

Кинематический анализ плоского механизма

Задача. Механизм изображен в произвольном положении, определяемом некоторым углом φ . Задана угловая скорость $\omega_{OA_z} = 56\frac{1}{c}$, длины звеньев $OA = 6$ см, $AB = 5$ см, $BC = 17$ см, $BD = 13$ см и радиус диска $R = 1$ см. Горизонтальные и вертикальные размеры на рисунках относятся к неподжным шарнирам и горизонтальной опорной плоскости диска. Диск катится без проскальзывания. Найти угловые скорости всех звеньев механизма и скорость центра диска при $\varphi = \pi/2$.

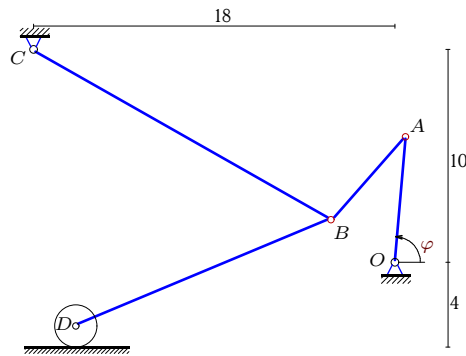


Рис. 1

Решение

Изобразим механизм при $\varphi = \pi/2$. Введем систему координат (рис. 2). Пронумеруем звенья механизма. Координаты некоторых шарниров в данном положении известны: $x_A = 18$ см, $y_A = 6$ см, $x_C = 0$, $y_C = 10$ см, $y_D = -3$ см.

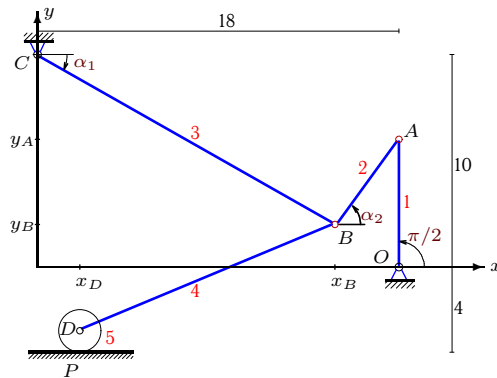


Рис. 2

Координаты шарнира B найдем из следующей системы уравнений

$$\begin{cases} x_B^2 + (y_C - y_B)^2 = BC^2, \\ (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = AB^2. \end{cases} \quad (1)$$

Подставляя сюда известные координаты и длины, получим

$$\begin{aligned}x_B^2 - 10y_B + y_B^2 &= 189, \\x_B^2 - 12y_B - 36x_B + y_B^2 &= -335.\end{aligned}$$

Вычтем из первого уравнения второе: $9x_B - 2y_B - 131 = 0$. Отсюда $x_B = (2y_B + 131)/9$. Подставим эту зависимость в первое или второе уравнение системы. Получим квадратное уравнение $85y_B^2 - 1096y_B + 1852 = 0$. Уравнение имеет два решения $y_{B_1} = 2$, $y_{B_2} = 10.89$. Из второго решения следует $y_B > y_A$, что не соответствует условию. Берем решение $y_B = 2$ см. Этому значению соответствует $x_B = (2 \cdot 2 + 131)/9 = 15$ см.

Угловые скорости звеньев 2 и 3 находим из графа

$$C \xrightarrow[-\alpha_1]{3} B \xrightarrow[\alpha_2]{2} A \xrightarrow[3\pi/2]{1} O$$

или из уравнения трех угловых скоростей

$$\begin{aligned}(x_C - x_B)\omega_3 + (x_B - x_A)\omega_2 + (x_A - x_O)\omega_1 &= 0, \\(y_C - y_B)\omega_3 + (y_B - y_A)\omega_2 + (y_A - y_O)\omega_1 &= 0.\end{aligned}$$

Подставляя сюда известные координаты и угловую скорость $\omega_1 = \omega_{OA} = 56\frac{1}{c}$, получим решение $\omega_2 = 60\frac{1}{c}$, $\omega_3 = 12\frac{1}{c}$. В точке P касания плоскости диска (тело 5) скорость равна нулю. Это позволяет рассмотреть диск как часть условного четырехзвенника $CBDP$ и записать уравнения трех угловых скоростей

$$\begin{aligned}(x_C - x_B)\omega_3 + (x_B - x_D)\omega_4 + (x_D - x_P)\omega_5 &= 0, \\(y_C - y_B)\omega_3 + (y_B - y_D)\omega_4 + (y_D - y_P)\omega_5 &= 0.\end{aligned}$$

Находим координату $x_D = x_B - \sqrt{BD^2 - (y_B - y_D)^2} = 15 - \sqrt{13^2 - 5^2} = 15 - 12 = 3$ см. Решаем систему и находим $\omega_4 = -15\frac{1}{c}$, $\omega_5 = 171\frac{1}{c}$. Скорость центра диска $v_D = R\omega_5 = 171\frac{\text{см}}{c}$. Проверить решение можно с помощью плана скоростей или мгновенных центров скоростей [1].

Замечание. Систему уравнений (1) для определения координат легче решить в системе Maple 11

```
> e1:=xb^2+(10-yb)^2-17^2:
> e2:=(18-xb)^2+(6-yb)^2-5^2:
> solve({e1,e2},{xb,yb});
```

Литература

1. Кирсанов М.Н. Решебник. Теоретическая механика/ Под ред. А. И. Кириллова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.

2. Кирсанов М.Н. Графы в Maple. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.