

Условие равновесия плоского механизма. Принцип возможных скоростей

Задача. Плоский механизм с идеальными стационарными связями находится в равновесии под действием силы F и моментов $M_1 = 4$ Нсм, $M_2 = 8$ Нсм. Радиус диска $R = 4$ см, $CB = AB = AD = 8$ см, $OA = 12\sqrt{2}$ см, $\alpha = 45^\circ$. Стержень BC горизонтальный, стержень AB в данный момент вертикальный. Уголок ADE состоит из жестко соединенных в D взаимно перпендикулярных стержней. Диск катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания (рис. 1). Найти силу F .

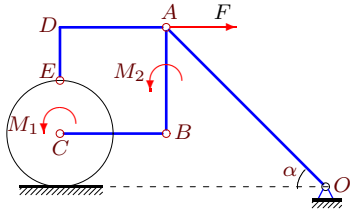


Рис. 1

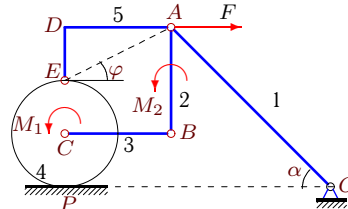


Рис. 2

Решение

Система состоит из пяти тел — трех стержней, уголка и диска. Пронумеруем тела (рис. 2). Уравнение принципа возможных скоростей для механизма имеет вид

$$-\omega_{1z}AO \cdot F \sin \alpha + M_{1z}\omega_{4z} + M_{2z}\omega_{2z} = 0 \quad (1)$$

Решим задачу кинематики. Выразим угловые скорости ω_{4z} , ω_{3z} через ω_{1z} . Точка P касания диска и поверхности является мгновенным центром скоростей диска, если качение происходит без проскальзывания. Скорость этой точки равна нулю. Составляем следующий кинематический граф

$$P \xrightarrow[\pi/2]{4} E \xrightarrow[\varphi]{5} A \xrightarrow[-\alpha]{1} O.$$

Отсюда следуют два уравнения¹

$$v_{Ox} = v_{Px} - \omega_{4z}2R \sin(\pi/2) - \omega_{5z}EA \sin \varphi - \omega_{1z}AO \sin(-\alpha),$$

$$v_{Oy} = v_{Py} + \omega_{4z}2R \cos(\pi/2) + \omega_{5z}EA \cos \varphi + \omega_{1z}AO \cos(-\alpha).$$

Перепишем эту систему при $EA \sin \varphi = DE = 4$, $EA \cos \varphi = AD = 8$, $v_{Ox} = v_{Px} = 0$, $v_{Oy} = v_{Py} = 0$:

$$-8\omega_{4z} - 4\omega_{5z} + 12\omega_{1z} = 0,$$

$$8\omega_{5z} + 12\omega_{1z} = 0.$$

¹Можно составить немного более длинный граф, не вводя в рассмотрение дополнительный угол φ :

$$P \xrightarrow[\pi/2]{4} E \xrightarrow[\pi/2]{5} D \xrightarrow[0]{5} A \xrightarrow[-\alpha]{1} O.$$

Уравнения для проекций скоростей будут при этом те же.

Решаем систему уравнений: $\omega_{4z} = (9/4)\omega_{1z}$, $\omega_{5z} = -(3/2)\omega_{1z}$. Для того, чтобы аналогичным образом выразить угловую скорость ω_{2z} стержня AB , входящую в (1) через ω_{1z} . Составляем граф

$$P \xrightarrow[\pi/2]{4} C \xrightarrow[0]{3} B \xrightarrow[\pi/2]{2} A \xrightarrow[-\alpha]{1} O.$$

Граф дает следующие уравнения

$$\begin{aligned} v_{Ox} &= v_{Px} - \omega_{4z}R \sin(\pi/2) - \omega_{3z}CB \sin 0 - \omega_{2z}BA \sin(\pi/2) - \omega_{1z}AO \sin(-\alpha), \\ v_{Oy} &= v_{Py} + \omega_{4z}R \cos(\pi/2) + \omega_{3z}CB \cos 0 + \omega_{2z}BA \cos(\pi/2) + \omega_{1z}AO \cos(-\alpha) \end{aligned}$$

С учетом уже найденной угловой скорости $\omega_{4z} = (9/4)\omega_{1z}$ получим

$$\begin{aligned} -8\omega_{2z} + 3\omega_{1z} &= 0, \\ 8\omega_{3z} + 12\omega_{1z} &= 0. \end{aligned}$$

Решаем систему уравнений: $\omega_{2z} = (3/8)\omega_{1z}$, $\omega_{3z} = -(3/2)\omega_{1z}$. Подставляем угловые скорости ω_{4z} и ω_{3z} в (1). Сокращаем на $\omega_{1z} \neq 0$. Получаем

$$-12F + (9/4)M_1 + (3/8)M_2 = 0.$$

При $M_1 = 4$ Нсм, $M_2 = 8$ Нсм отсюда следует $F = 1$ Н.