## 4.5. Тело на сферической и стержневых опорах

Постановка задачи. *Горизонтальная однородная прямоугольная полка имеет в одной точке сферическую опору и поддерживается двумя невесомыми шарнирно закрепленными по концам стержнями (горизонтальным и вертикальным) и наклонной подпоркой. К полке приложена сила, направленная вдоль одного из ее ребер. Определить реакции опор.*

План решения

1. Рассматриваем равновесие полки. Действие на полку опорных стержней заменяем их реакциями. Реакции стержней направляем вдоль их осей. Выбираем оси координат с началом в сферической опоре. Реакцию сферической опоры раскладываем на три составляющие вдоль выбранных осей.

2. Составляем систему уравнений равновесия (три уравнения в проекциях на оси и три уравнения моментов относительно осей). Решаем полученную систему.

3. Выполняем проверку решения, подставляя найденные значения в уравнение моментов относительно какой-либо дополнительной оси.

Пример Горизонтальная однородная полка весом $G = 6$ кН имеет в точке $A$ сферическую опору и поддерживается двумя невесомыми, шарнирно закрепленными по концам, стержнями (горизонтальным и вертикальным) и подпоркой в точке $B$ (рис. 70). К этой же точке приложена сила $F = 4$ кН, направленная вдоль одного из ребер полки. Даны размеры $a = 2$ м, $b = 4$ м, $c = 3$ м. Определить реакции опор.

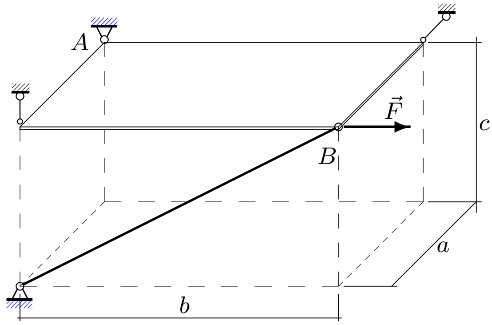


Рис. 70

Решение

1. Рассматриваем равновесие полки. Действие на тело опорных стержней заменяем их реакциями. Реакция $\vec{V}$ — вертикальная, $\vec{H}$ — горизонтальная вдоль бокового ребра полки.

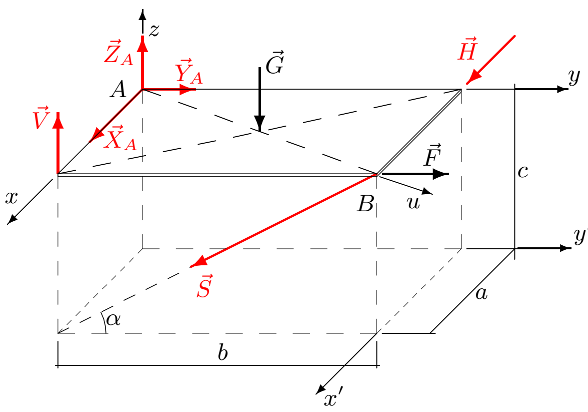


Рис. 71

Усилие $\vec{S}$ в подпорке направлено вдоль стержня. В сферическом шарнире $A$ имеется три составляющие реакции $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, которые направляем по осям координат. Так как полка однородная, ее центр тяжести совпадает с геометрическим центром. Сюда приложен вес $\vec{G}$. Начало системы координат $xyz$ помещаем в точку $A$ (рис. 71).

2. Составляем систему уравнений равновесия, состоящую из трех уравнений проекций на оси координат всех сил, действующих на полку, и трех уравнений моментов относительно этих же осей (аналогичные

уравнения см. § 4.4., с. 102):

$$
\begin{aligned}
&\sum X_i = X_A + H = 0,\\
&\sum Y_i = Y_A - S\cos\alpha + F = 0,\\
&\sum Z_i = Z_A + V - S\sin\alpha - G = 0,\\
&\sum M_{xi} = -S\cdot b\sin\alpha - G\cdot b/2 = 0,\\
&\sum M_{yi} = -V\cdot a + S\cdot a\sin\alpha + G\cdot a/2 = 0,\\
&\sum M_{zi} = -H\cdot b - S\cdot a\cos\alpha + F\cdot a = 0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Так как начало координат находится в сферической опоре, система уравнений равновесия разделяется и становится проще. Из уравнений моментов можно найти, независимо от других, три неизвестные реакции $S$, $H$ и $V$.

Вычисляем значения тригонометрических функций:

$$\sin\alpha = c/\sqrt{b^2+c^2} = 3/5 = 0.6, \quad \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = 0.8.$$

Из системы (1) находим реакции и заносим их в таблицу (в кН):

| $X_A$ | $Y_A$ | $Z_A$ | $H$ | $V$ | $S$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-4$ | $-8$ | 3 | 4 | 0 | $-5$ |

3. Выполняем проверку решения, подставляя найденные значения в уравнение моментов относительно дополнительных осей $x'$ и $y'$, проведенных параллельно соответствующим осям исходной системы координат:

$$
\begin{aligned}
&\sum M_{x'i} = -Y_A\cdot c - Z_A\cdot b - V\cdot b + G\cdot b/2 + S\cdot c\cos\alpha - F\cdot c = 0,\\
&\sum M_{y'i} = X_A\cdot c - V\cdot a + S\cdot a\sin\alpha + G\cdot a/2 + H\cdot c = 0.
\end{aligned}
$$

Замечание. Из решения системы (1) получается $V = 0$. В этом можно убедиться сразу из уравнения моментов относительно дополнительной оси $u$, лежащей на диагонали полки $AB$ (рис. 71). Действительно, все векторы, кроме $\vec{V}$, пересекают эту ось, и их моменты равны нулю. Уравнение принимает простой вид $\sum M_u = V\cdot h = 0$, где $h$ — некоторое плечо реакции $\vec{V}$ относительно диагональной оси $u$. Не вычисляя $h \neq 0$, получаем $V = 0$.