

ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ СОСТАВНОЙ БАЛКИ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННЫХ ПО НАПРАВЛЕНИЮ СИЛ
Методические указания с заданиями для
контрольных работ

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В практике инженерных расчетов на прочность опор составных неподвижных конструкций (балок) возникает необходимость определения максимальных значений сил реакций при действии на конструкцию переменных по направлению и постоянных по модулю сил. Такое воздействие на конструкцию оказывает, например, установленные на ней различные механизмы с вращающимися неуравновешенными массами.

Решая эту задачу методами статики, составную балку расчленяют по внутренним связям на отдельные части, выделяют одну из них, заменяя действие отброшенных частей реакциями соответствующих внутренних связей и составляют уравнения равновесия. Затем, применяя те же рассуждения к каждой из остальных составных частей, получают систему уравнений, из которой и определяют искомые опорные реакции. Такое решение является довольно громоздким.

Применение принципа возможных перемещений позволяет чрезвычайно упростить решение задачи и определить любую искомую опорную реакцию из одного соответствующим образом составленного уравнения. Особенно эффективно применение этого принципа в тех случаях, когда требуется определить только одну опорную реакцию, при этом значительно упрощается программа для решения задачи на ЭВМ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАЧИ

Конструкция состоит из двух жестких стержней различной конфигурации (рис. 0 – 9), соединенных в точке C цилиндрическим шарниром. Внешними связями, наложенными на конструкцию, являются в точке A или неподвижный шарнир или жесткая заделка; в точке B или шарнирно-подвижная опора (рис. 0, 1, 3, 4, 6, 7, 9), или шарнирно-неподвижная опора (рис. 2, 5, 8); в точке D или шарнирно-подвижная опора на катках (рис. 1, 4, 7), или невесомый стержень DD' (рис. 9).

На каждую конструкцию действуют: пара сил с моментом $M = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}$ и две силы. Эти силы, их направления и точки приложения указаны в табл. 1.

Определить реакции внешних связей при изменении направления каждой из заданных сил в отдельности. Так например, если на конструкцию действуют заданные силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , направления которых определены углами α и β , то для нахождения влияния на связи силы \vec{F}_1 следует полагать, что другая сила \vec{F}_2 действует под заданным углом β , а угол α будет изменяться че-

рез равные промежутки $\Delta\alpha = \pi/12$ от 0 до 2π . Для определения влияния на направления силы \vec{F}_2 поступать аналогично.

Таблица 1

Варианты условий задания

Сила	\vec{F}_1		\vec{F}_2		\vec{F}_3		\vec{F}_4	
	$F_1 = 10 \text{ кН}$		$F_2 = 20 \text{ кН}$		$F_3 = 30 \text{ кН}$		$F_4 = 40 \text{ кН}$	
Номер условия	Точка приложения	α , град.	Точка приложения	β , град.	Точка приложения	γ , град.	Точка приложения	θ , град.
0	Н	60	—	—	К	30	—	—
1	—	—	Е	60	—	—	Л	30
2	Л	30	—	—	Е	60	—	—
3	—	—	К	60	—	—	Н	60
4	Е	60	—	—	Л	30	—	—
5	—	—	Л	60	—	—	Е	30
6	К	30	—	—	Н	60	—	—
7	—	—	Н	30	—	—	К	60
8	Н	30	—	—	К	60	—	—
9	—	—	Е	30	—	—	Л	60

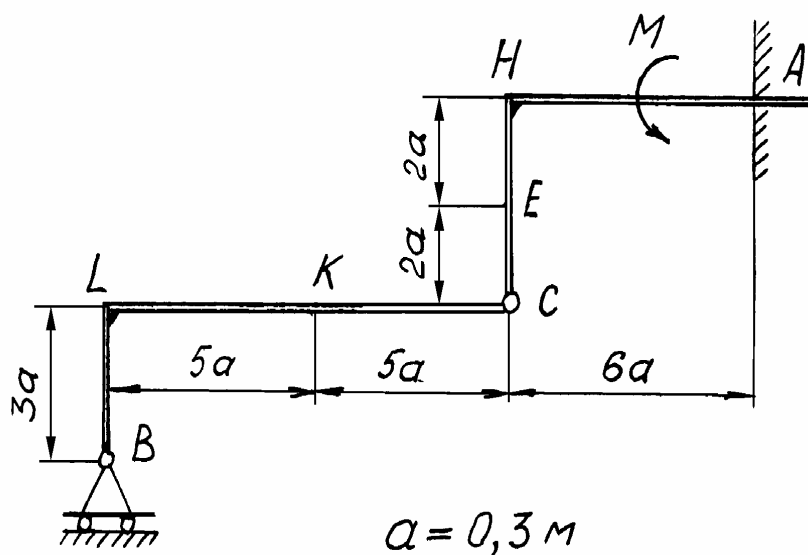


Рис. 0

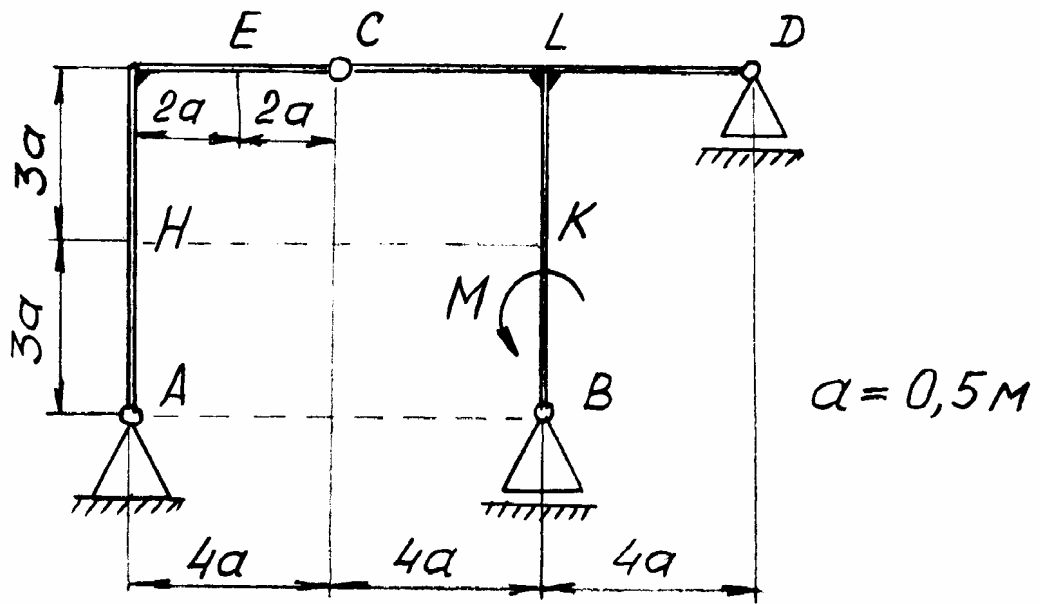


Рис. 1

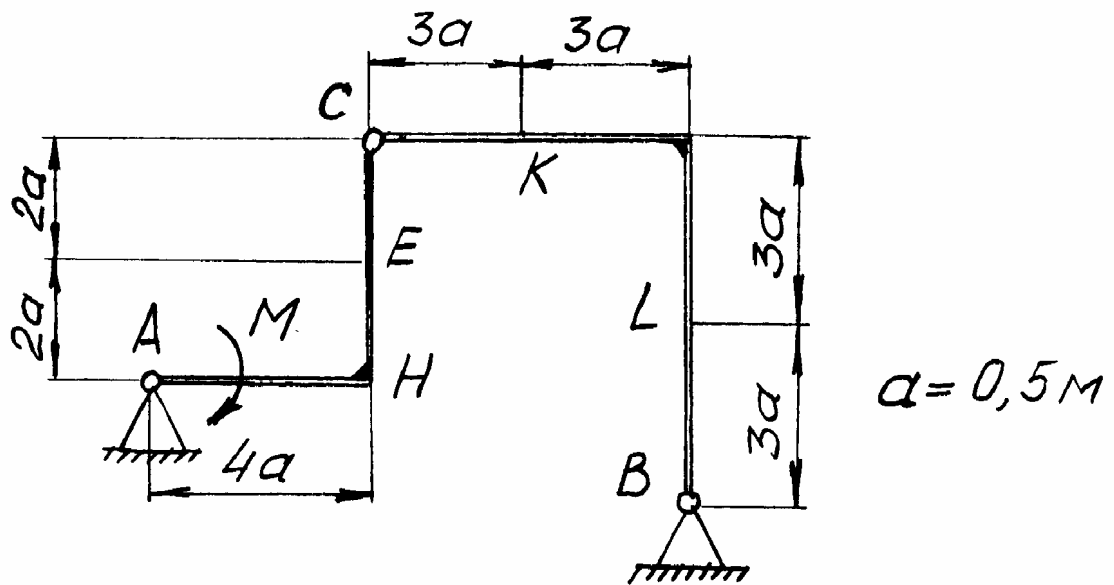


Рис. 2

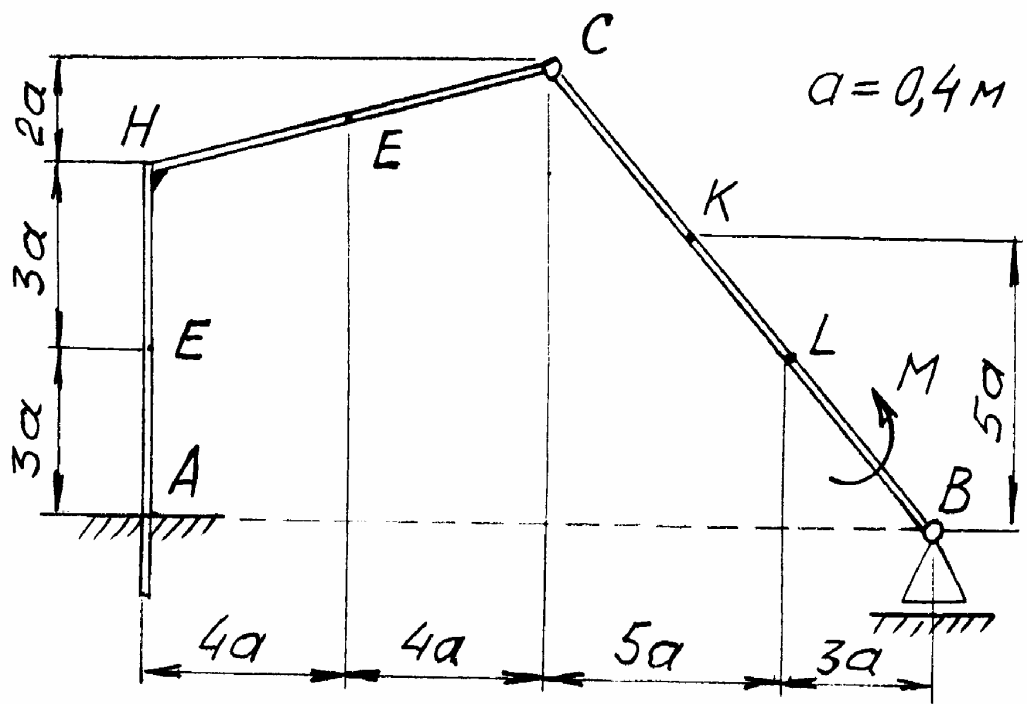


Рис. 3

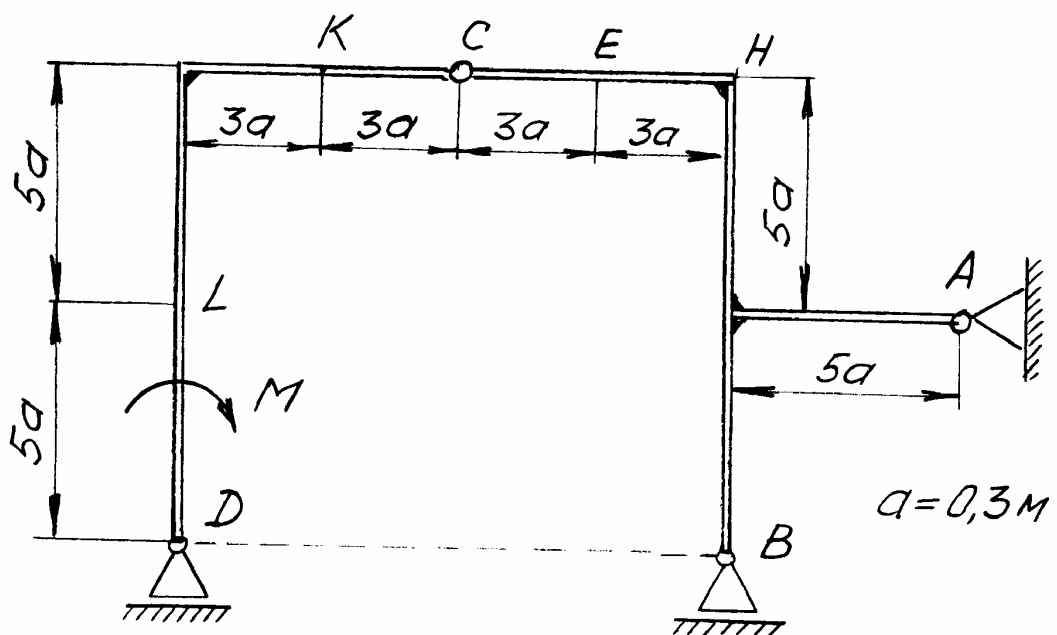


Рис. 4

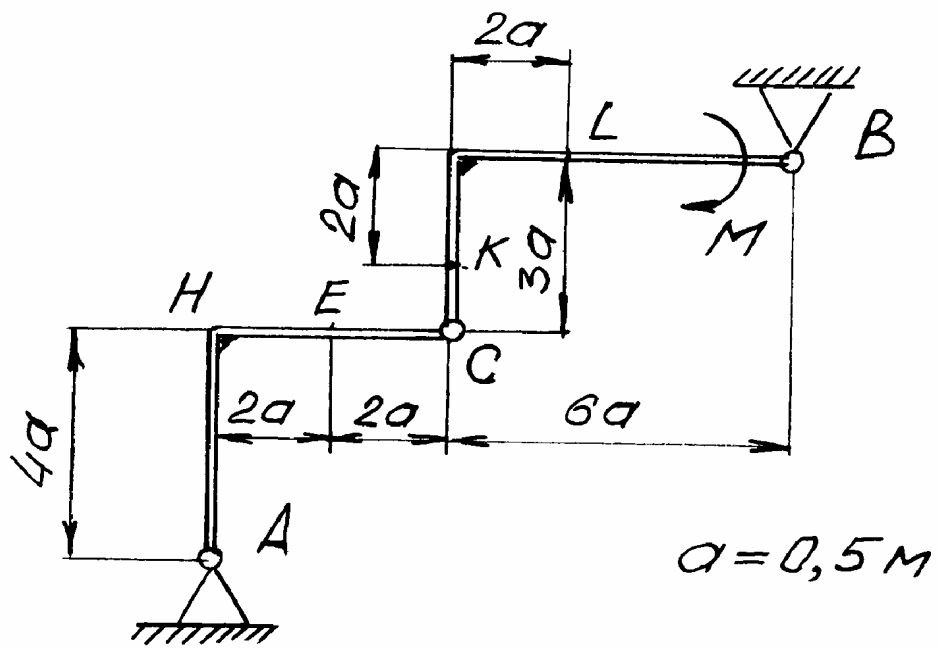


Рис. 5

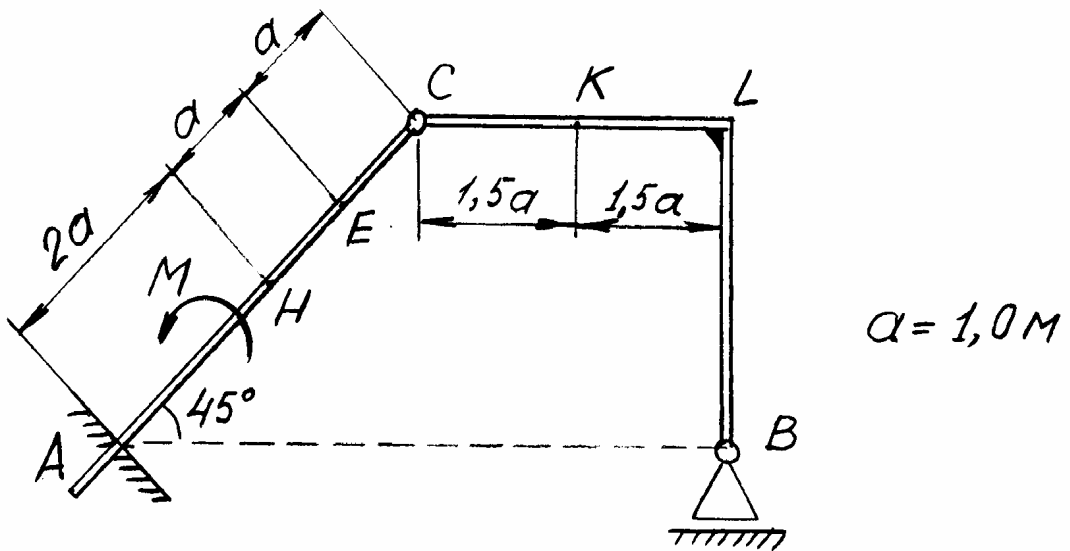


Рис. 6

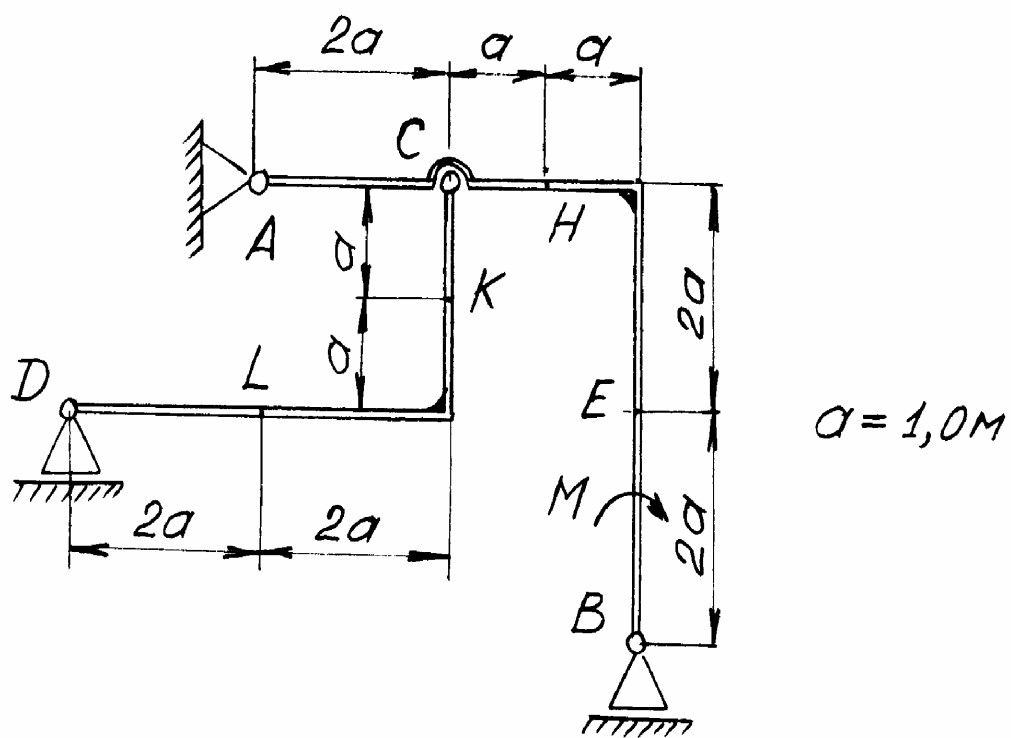


Рис. 7

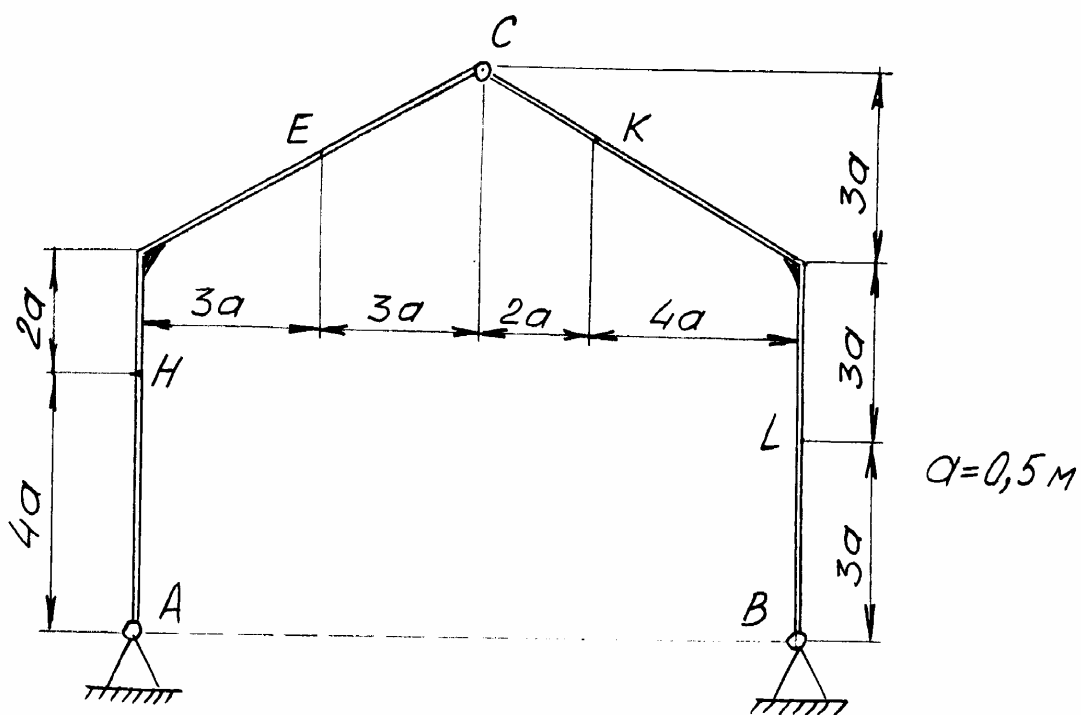


Рис. 8

Шарнирно-неподвижная опора A (рис. 10, а)

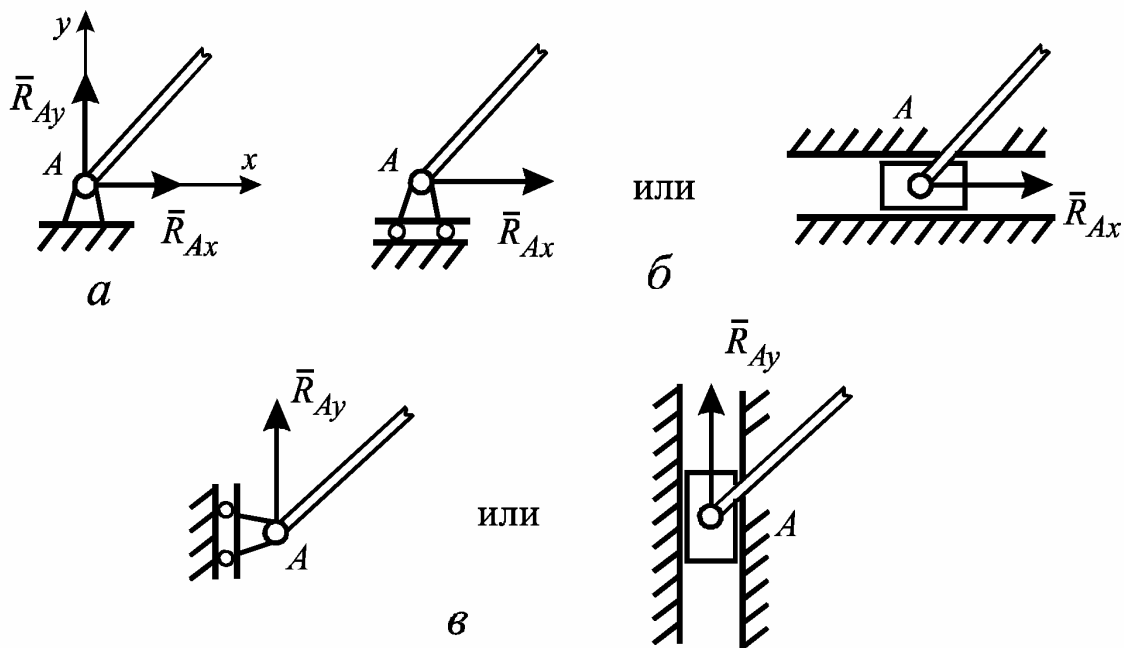


Рис. 10

Эта связь имеет две составляющие реакции: \bar{R}_{Ax} и \bar{R}_{Ay} .

Для определения составляющей \bar{R}_{Ax} эту опору преобразуют так, как показано на рис. 10, б, а для нахождения \bar{R}_{Ay} – так, как показано на рис. 10, в.

Шарнирно-подвижная опора B (рис.11, а)

Для определения реакции R_B отбрасывают опорную неподвижную поверхность и заменяют ее реакцией \bar{R}_B , как показано на рис. 11, б.



Рис. 11
 Невесомый стержень CC^l (рис. 12, а)

В этом случае стержень заменяют его реакцией \bar{R}_C , направленной вдоль этого стержня (рис. 12, б).

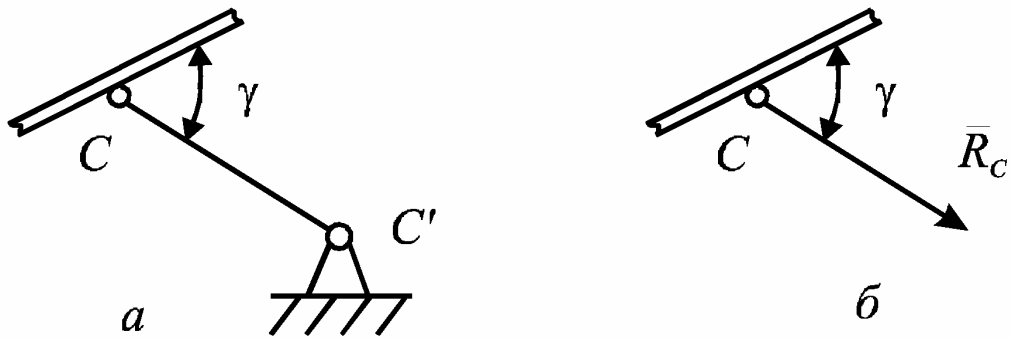


Рис. 12

Гладкая плоскость (рис. 13, а)

Отбрасывая опорную плоскость, к рассматриваемому телу в точке D его контакта с этой плоскостью прикладывают реакцию \bar{N}_D (рис. 13, б).

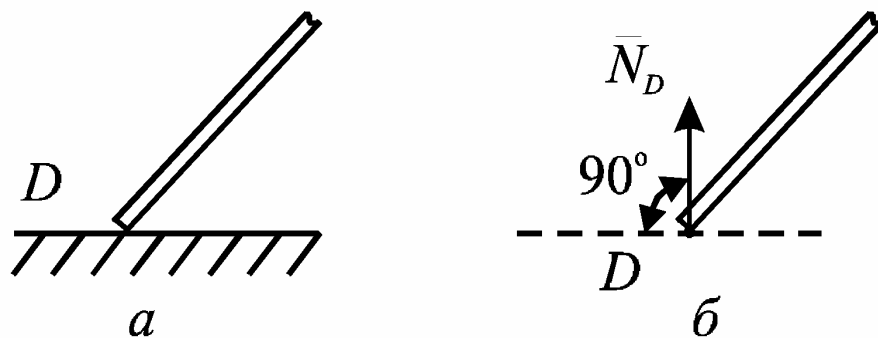


Рис. 13

Жесткая заделка E (рис. 14, а)

Данная связь имеет две составляющие реакции \bar{R}_{Ex} и \bar{R}_{Ey} , а также реактивный момент M_E . Для определения момента жесткую заделку заменяют

неподвижной шарнирной опорой, а к телу l прикладывают искомый реактивный момент M_E (рис. 14, б).

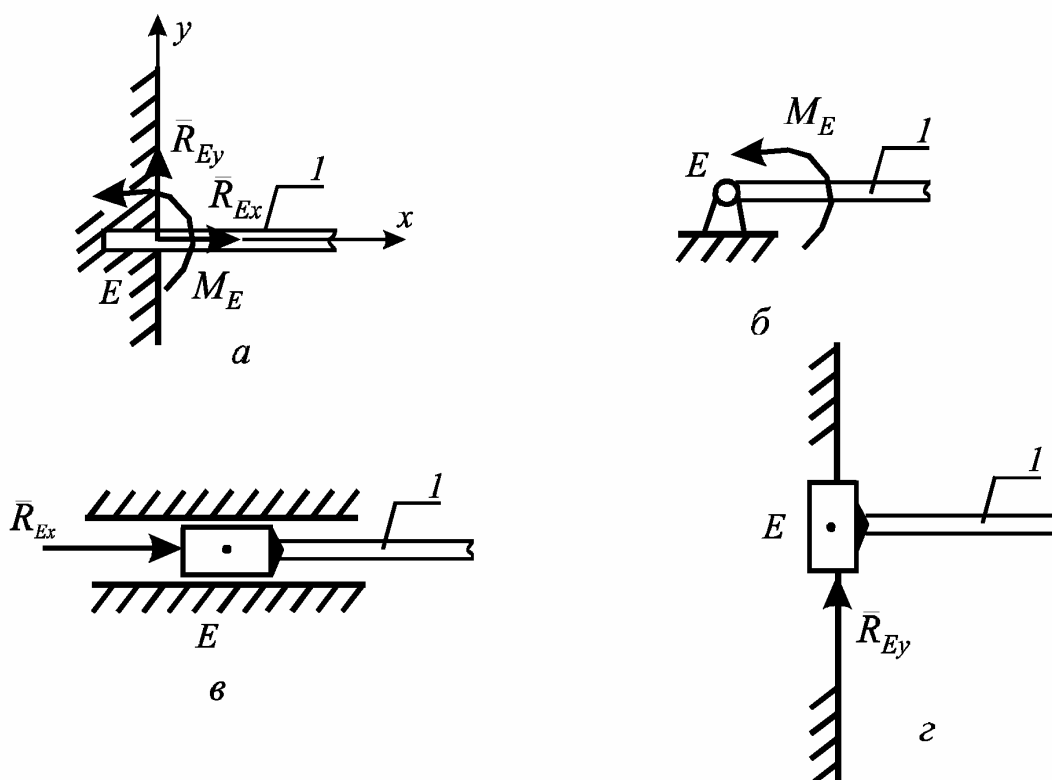


Рис. 14

Для определения составляющих \bar{R}_{Ex} и \bar{R}_{Ey} , жесткую заделку преобразуют так, как показана на рис. 14, в и 14, г соответственно.

Следует отметить, что возможные перемещения точек механической системы рассматриваются как величины первого порядка малости, поэтому действительные криволинейные перемещения точек заменяют прямолинейными, направленными по касательным к траекториям точек, а длины этих отрезков равны длинам соответствующих элементарных дуг. Так как возможные перемещения точек направлены по касательным к их траекториям, то эти перемещения совпадают с направлением скоростей точек. При расчетах учитывать, что зависимость между возможными перемещениями такие же, как между соответствующими скоростями звеньев механизма при его движении.

Для вычисления работы силы, приложенной к телу, которое совершает возможное перемещение, поворачиваясь вокруг мгновенного центра вращения (МЦВ) следует взять с соответствующим знаком произведение момента этой силы относительно МЦВ на угол поворота. Применение же теоремы Ва-

риньона о моменте равнодействующей значительно облегчает процесс решения задачи.

Пример

Конструкция состоит из двух жестких стержней AD и CB , соединенных в точке C цилиндрическим шарниром (рис. 15). Внешними связями являются в точке A шарнирно-неподвижная опора, а в точке D и B – шарнирно-подвижные опоры на катках.

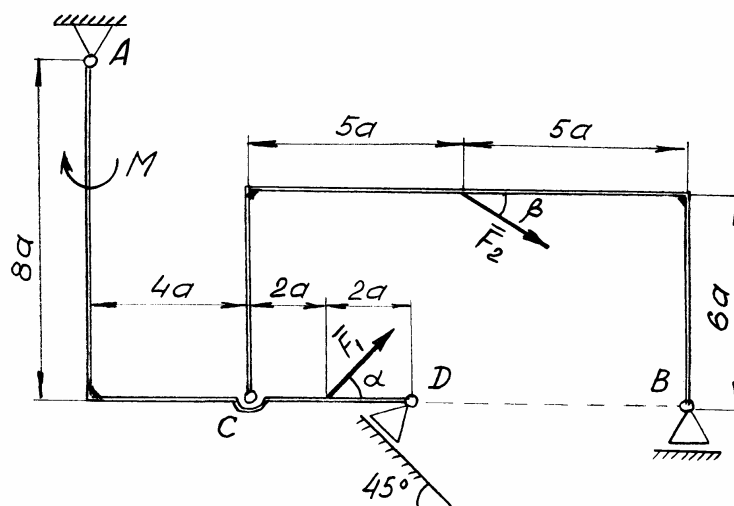


Рис. 15

На конструкцию действуют пара сил с моментом $M = 60 \text{ кН}\cdot\text{м}$ и две силы: $F_1 = 40 \text{ кН}$ и $F_2 = 50 \text{ кН}$, направление которых задано углами $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 60^\circ$.

Определить реакции внешних связей при изменении направления каждой из заданных сил в отдельности. При окончательных расчетах принять $a = 0,4 \text{ м}$.

Решение

1. Исследование влияния направления силы \bar{F}_1

1.1. Определение реакции R_{Ax}

Расчетная схема в этом случае представлена на рис. 16.

Стержень AD имеет МЦВ в точке P_1 , а стержень CB – в точке P_2 . Возможными перемещениями этих стержней будут углы поворота $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$ вокруг соответствующих мгновенных центров вращения. Связь между углами $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$ установим исходя из возможного перемещения δs_C общей для обеих стержней точки C

$$\delta s_C = \delta\varphi_1 \cdot P_1C = \delta\varphi_2 \cdot P_2C, \text{ откуда } \delta\varphi_2 = \delta\varphi_1 \cdot \frac{P_1C}{P_2C}.$$

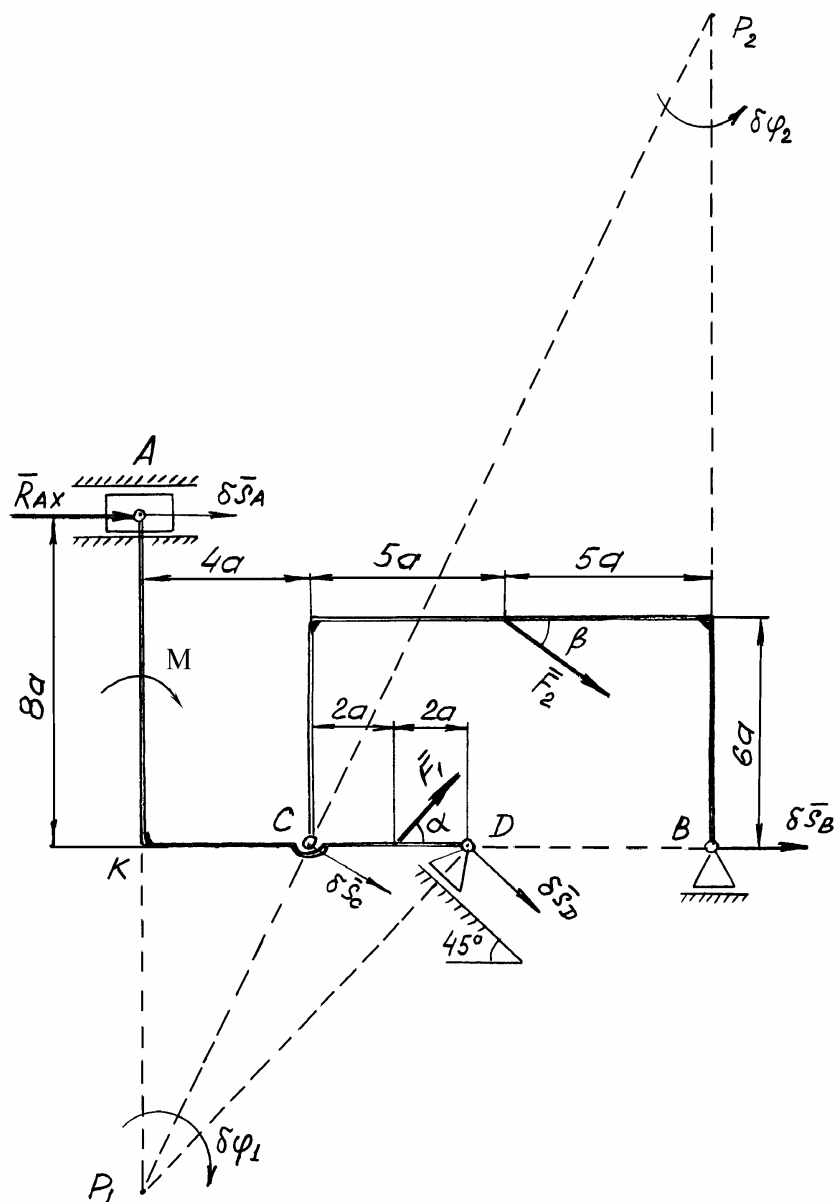


Рис. 16

Из подобия треугольников KCP_1 и BSP_2 имеем

$$\frac{P_1C}{P_2C} = \frac{KC}{BC} \quad \text{или} \quad \frac{P_1C}{P_2C} = \frac{4 \cdot a}{10 \cdot a},$$

тогда

$$\delta\varphi_2 = 0,4 \cdot \delta\varphi_1.$$

Кроме того, отметим, что в прямоугольном треугольнике P_1KD угол KP_1D равен 45° , следовательно, $KP_1 = KD = 8 \cdot a$. Снова рассматривая подобие треугольников KCP_1 и BSP_2 , находим

$$\frac{KC}{BC} = \frac{KP_1}{BP_2} \quad \text{или} \quad \frac{4 \cdot a}{10 \cdot a} = \frac{8 \cdot a}{BP_2}, \quad \text{откуда} \quad BP_2 = 20 \cdot a.$$

Составим уравнение равновесия в форме возможных работ:

$$R_{Ax} \cdot 16 \cdot a \cdot \delta\varphi_1 + M \cdot \delta\varphi_1 - F_1 \cdot \sin\alpha \cdot 6 \cdot a \cdot \delta\varphi_1 + F_1 \cdot \cos\alpha \cdot 8 \cdot a \cdot \delta\varphi_1 + \\ + F_2 \cdot \cos\beta \cdot 14 \cdot a \cdot \delta\varphi_2 + F_2 \cdot \sin\beta \cdot 5 \cdot a \cdot \delta\varphi_2 = 0.$$

В результате решения полученного алгебраического уравнения с учетом численных значений заданных величин, находим расчетную зависимость искомой реакции от изменяемого угла α :

$$R_{Ax} = 40 \cdot (0,375 \cdot \sin\alpha - 0,5 \cdot \cos\alpha) - 23,537 \quad (1)$$

1.2. Определение реакции R_{Ay}

Расчетная схема для определения реакции R_{Ay} представлена на рис. 17.

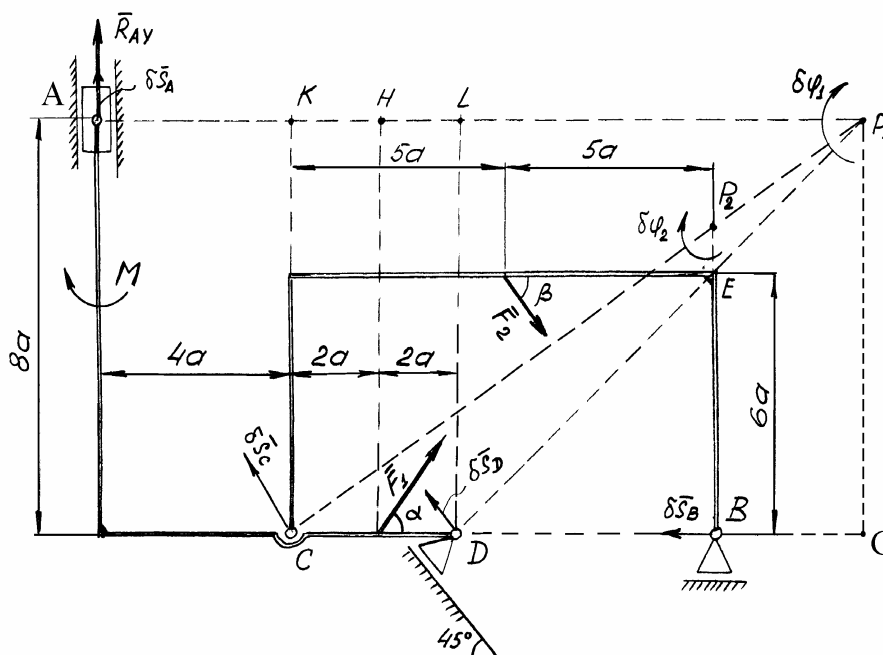


Рис. 17

Мгновенный центр вращения P_1 стержня AD находится на пересечении перпендикуляров к возможным перемещениям $\delta\bar{s}_A$ и $\delta\bar{s}_D$ точек A и D соответственно; таким образом возможным перемещением всего стержня AD будет являться угол поворота $\delta\varphi_1$ вокруг точки P_1 . Возможное перемещение $\delta\bar{s}_C$ точки C перпендикулярно CP_1 .

Возможный поворот стержня CB на некоторый угол $\delta\varphi_2$ будет осуществляться вокруг своего МЦВ (точек P_2), находящегося на пересечении перпендикуляров к возможным перемещениям $\delta\bar{s}_C$ и $\delta\bar{s}_B$.

Установим связь между углами $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$:

$$\delta s_C = \delta\varphi_1 \cdot CP_1 = \delta\varphi_2 \cdot CP_2, \quad \text{откуда} \quad \delta\varphi_2 = \delta\varphi_1 \cdot \frac{CP_1}{CP_2}.$$

Согласно рис. 17, прямоугольный треугольник DLP_1 – равнобедренный, следовательно $LP_1 = DL = 8a$, тогда в треугольнике CKP_1 сторона $KP_1 = KL + LP_1 = 4a + 8a = 12a$. Из подобия треугольников CKP_1 и P_2BC имеем

$$\frac{CP_1}{CP_2} = \frac{KP_1}{BC} \quad \text{или} \quad \frac{CP_1}{CP_2} = \frac{12 \cdot a}{10 \cdot a}.$$

Таким образом $\delta\varphi_2 = 1,2 \cdot \delta\varphi_1$.

Составим уравнение равновесия в форме возможных работ:

$$R_{Ay} \cdot (AP_1) \cdot \delta\varphi_1 + F_1 \cdot \sin\alpha \cdot (HP_1) \cdot \delta\varphi_1 - F_1 \cdot \cos\alpha \cdot (GP_1) \cdot \delta\varphi_1 + M \cdot \delta\varphi_1 - \\ - F_2 \cdot \sin\beta \cdot 5 \cdot a \cdot \delta\varphi_2 - F_2 \cdot \cos\beta \cdot (EP_2) \cdot \delta\varphi_2 = 0,$$

где

$$AP_1 = AK + KP_1 = 4 \cdot a + 12 \cdot a = 16 \cdot a, \quad HP_1 = 10 \cdot a, \quad P_1G = 8 \cdot a,$$

и т. к. $\Delta KCP_1 \sim \Delta BP_2C$ то $P_2B/KC = CB/KP_1$,

откуда

$$P_2B = (KC) \cdot (BC) / KP_1 = 8 \cdot a \cdot 10 \cdot a / 12 \cdot a = 6,667 \cdot a,$$

$$\text{и} \quad P_2E = P_2B - BE = 0,667 \cdot a.$$

После подстановок уравнение равновесия приобретет вид

$$R_{Ay} \cdot 16 \cdot a \cdot \delta\varphi_1 + F_1 \cdot \sin \alpha \cdot 10 \cdot a \cdot \delta\varphi_1 - F_1 \cdot \cos \alpha \cdot 8 \cdot a \cdot \delta\varphi_1 + M \cdot \delta\varphi_1 - \\ - F_2 \cdot \sin \beta \cdot 5 \cdot a \cdot 1,2 \cdot \delta\varphi_1 - F_2 \cdot \cos \beta \cdot 0,667 \cdot a \cdot 1,2 \cdot \delta\varphi_1 = 0.$$

С учетом численных значений заданных величин и в результате соответствующих преобразований получим расчетную формулу

$$R_{Ay} = 9,99 + 20 \cdot \cos \alpha - 25 \cdot \sin \alpha. \quad (2)$$

1.3. Определение реакции R_D

Расчетная схема представлена на рис. 18.

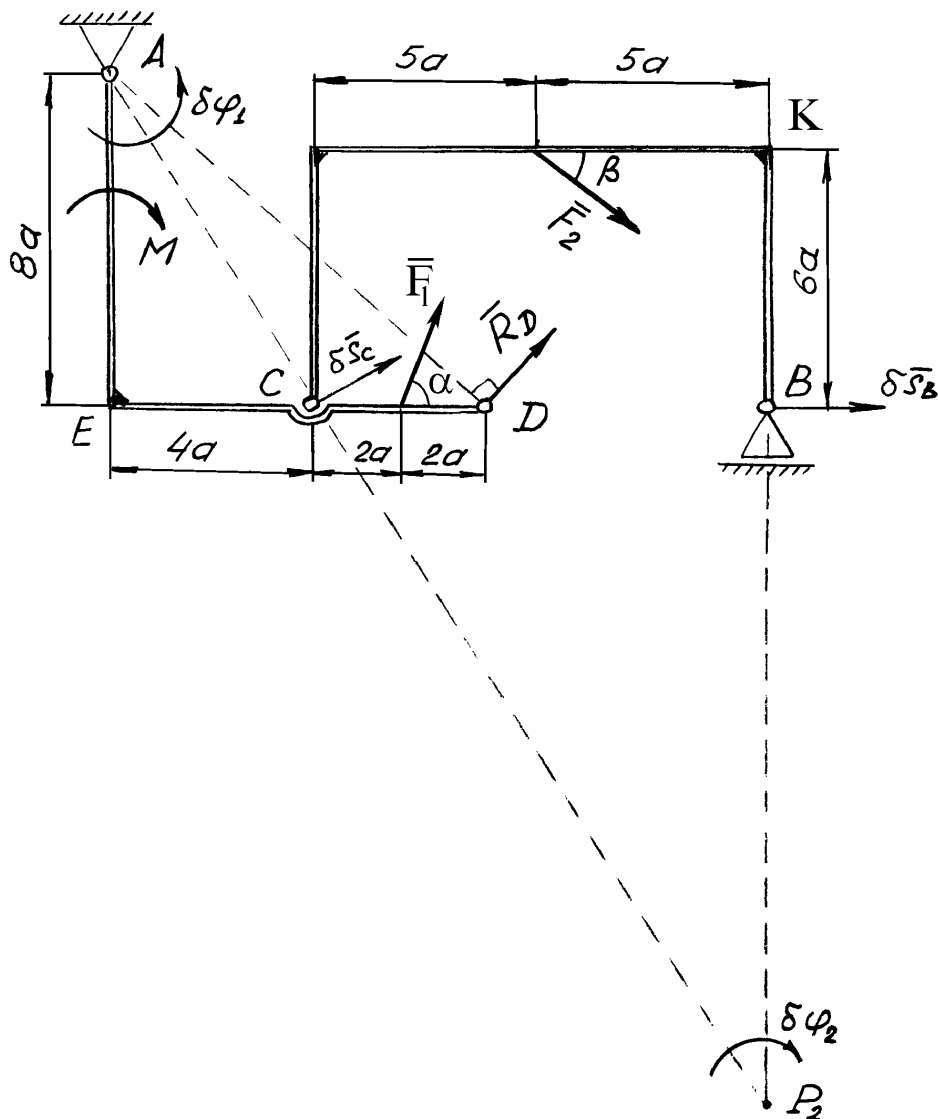


Рис. 18

Мгновенный центр вращения стержня CB находится в точке P_2 , а возможными перемещениями стержней AED и CB будут углы поворота $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$ соответственно.

Составим уравнение равновесия:

$$R_D \cdot (AD) \cdot \delta\varphi_1 + F_1 \cdot \cos\alpha \cdot 8 \cdot a \cdot \delta\varphi_1 + F_1 \cdot \sin\alpha \cdot 6 \cdot a \cdot \delta\varphi_1 - M \cdot \delta\varphi_1 + \\ + F_2 \cdot \cos\beta \cdot (KP_2) \cdot \delta\varphi_2 - F_2 \cdot \sin\beta \cdot 5 \cdot a \cdot \delta\varphi_2 = 0.$$

$$\text{Здесь } AD = \sqrt{AE^2 + ED^2} = 8\sqrt{2} \cdot a, \quad KP_2 = KB + BP_2.$$

Из подобия $\triangle AEC$ и $\triangle CBP_2$ находим $BP_2 / AE = BC / CE$, откуда $BP_2 = (BC) \cdot (AE) / (CE) = 20 \cdot a$, следовательно $KP_2 = 26 \cdot a$.

Связь между углами $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$ найдем через возможное перемещение $\delta\bar{s}_C$:

$$\delta s_C = \delta\varphi_1 \cdot AC = \delta\varphi_2 \cdot (CP_2), \quad \text{или} \quad \delta\varphi_2 = \frac{AC}{CP_2} \cdot \delta\varphi_1 = 0,4 \cdot \delta\varphi_1.$$

Перепишем уравнение равновесия с учетом найденных величин:

$$R_D \cdot 8\sqrt{2} \cdot a \cdot \delta\varphi_1 + F_1 \cdot \cos\alpha \cdot 8 \cdot a \cdot \delta\varphi_1 + F_1 \cdot \sin\alpha \cdot 6 \cdot a \cdot \delta\varphi_1 - M \cdot \delta\varphi_1 + \\ + F_2 \cdot \cos\beta \cdot 26 \cdot a \cdot 0,4 \cdot \delta\varphi_1 - F_2 \cdot \sin\beta \cdot 5 \cdot a \cdot 0,4 \cdot \delta\varphi_1 = 0.$$

Учитывая численные значения заданных величин после преобразований найдем

$$R_D = -2,06 - 21,21 \cdot \sin\alpha - 28,28 \cdot \cos\alpha. \quad (3)$$

1.4. Определение реакции R_B

Расчетная схема представлена на рис. 19.

Мгновенный центр вращения стержня CB находится в точке C . При этом возможным перемещением системы является поворот только стержня CB на угол $\delta\varphi$.

Составим уравнение равновесия:

$$R_B \cdot 10 \cdot a \cdot \delta\varphi - F_2 \cdot \sin\beta \cdot 5 \cdot a \cdot \delta\varphi - F_2 \cdot \cos\beta \cdot 6 \cdot a \cdot \delta\varphi = 0$$

или

$$10 \cdot R_B - F_2 \cdot (5 \cdot \sin\beta + 6 \cdot \cos\beta) = 0,$$

откуда

$$R_B = F_2 \cdot (5 \cdot \sin\beta + 6 \cdot \cos\beta) / 10 = 36,65 \text{ кН.} \quad (4)$$

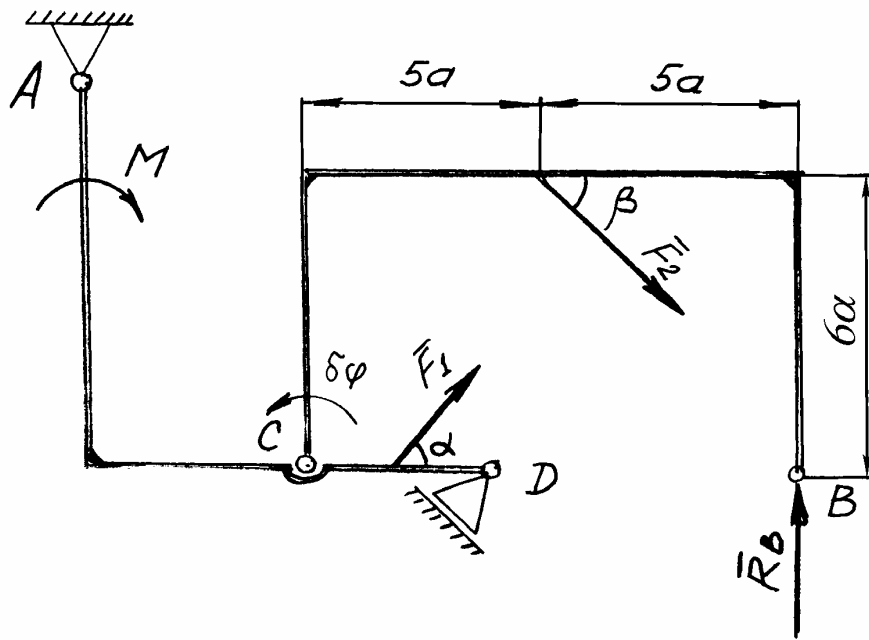


Рис. 19

Реакция R_B от изменения направления силы \bar{F}_1 не зависит.

2. Исследование влияния направления силы \bar{F}_2

Так как уравнения равновесия в форме возможных работ были составлены для определения реакций всех связей при исследовании влияния силы \bar{F}_1 , то теперь в этих уравнениях следует положить $\alpha = \text{const} = 30^\circ$, а угол β – переменным.

В результате соответствующих преобразований уравнений равновесия получим следующие формулы для определения реакций связей

$$R_{Ax} = -19,195 - 6,25 \cdot \sin\beta - 17,5 \cdot \cos\beta; \quad (5)$$

$$R_{Ay} = 18,75 \cdot \sin\beta + 2,5 \cdot \cos\beta - 4,531; \quad (6)$$

$$R_D = 8,84 \cdot \sin\beta - 45,967 \cdot \cos\beta - 21,845; \quad (7)$$

$$R_B = 25 \cdot \sin\beta + 30 \cdot \cos\beta. \quad (8)$$

Результаты расчетов по формулам (1) – (8) представлены в табл. 2 и 3 и на графиках (рис. 20, 21).

Программа вычислений по формулам (1) – (3) на языке Паскаль

```

Program Met3_1;
const dal=pi/12;

Var
  RAx, RAy, RD, RA, A1, alfa: REAL;
  F: Text;

Begin
  alfa := 0;
  Assign(F, 'S1.dat');
  Rewrite(F);
  Repeat
    RAx := 40*(0.375*sin(alfa) - 0.5*cos(alfa));
    RAy := 9.99 + 20*cos(alfa) - 25*sin(alfa);
    RD := - 2.06 - 21.21*sin(alfa) -
28.28*cos(alfa);
    RA := sqrt(sqr(RAx) + sqr(RAy));
    A1 := alfa*180/pi;
    Writeln(F, A1:8:3, RAx:8:3, RAy:10:3,
RD:10:3, RA:12:3);
    alfa := alfa + dal;
  Until alfa >= 2.1*pi;

End.

```

Таблица 2

Результаты вычислений реакций при переменном угле α

$\alpha, ^\circ$	$R_{Ax}, кН$	$R_{Ay}, кН$	$R_D, кН$
0	-20,00	29,99	-30,34
15	-15,43	22,83	-34,86
30	-9,82	14,81	-37,15
45	-3,53	6,45	-37,05
60	2,99	-1,66	-34,56
75	9,31	-8,98	29,86
90	15,00	-15,01	-23,27
105	19,66	-19,33	-15,22
120	22,99	-21,66	-6,28
135	24,74	-21,83	2,93
150	24,82	-19,83	11,82
165	23,20	-15,79	19,76
180	20,00	-10,01	26,22

195	15,43	-2,85	30,74
210	9,82	5,16	33,03
225	3,53	13,52	32,93
240	-2,99	21,64	30,44
255	-9,31	28,96	25,74
270	-15,00	34,99	19,15
285	-19,66	39,31	11,10
300	-22,99	41,64	2,16
315	-24,74	41,81	-7,05
330	-24,82	39,81	-15,94
345	-23,20	35,79	-23,88
360	-20,00	29,99	-30,34

Программа вычислений по формулам (5) – (8) на языке Паскаль

```

PROGRAM MET3_1;
CONST dbet=pi/12;
LABEL 1;
VAR RAx, RAy, RD, RA, RB, betta, B1:REAL;  R:TEXT;

    BEGIN
        betta := 0;
        Assign(R, 'S2.dat');
        ReWrite(R);
        Repeat
            RAx := -19.195 - 6.25*sin(betta) -
17.5*cos(betta);
            RAy := 18.75*sin(betta) + 2.5*cos(betta) -
4.531;
            RD := 8.84*sin(betta) - 45.976*cos(betta) -
21.845;
            RB := 25*sin(betta) + 30*cos(betta);
            RA := sqrt(sqr(RAx) + sqr(RAy));
            B1 := betta*180/pi;
            Writeln(R, B1:8:3, RAx:8:3, RAy:10:3,
RD:10:3, RB:10:3, RA:12:3);
            betta := betta + dbet;
            Until betta >= 2.1*pi;
        end.

```

Таблица 3

Результаты вычислений реакций при переменном угле β

$\beta, ^\circ$	$R_{Ax}, \kappa H$	$R_{Ay}, \kappa H$	$R_D, \kappa H$	$R_B, \kappa H$
0	-36,69	-2,03	-67,82	30,00
15	-37,71	2,73	-63,96	35,44
30	-37,47	7,00	-57,24	38,48
45	-35,98	10,49	-48,10	38,89
60	-33,35	12,95	-37,17	36,65
75	-29,76	14,22	-25,20	31,91
90	-25,44	14,21	-13,00	25,00
105	-20,70	12,93	-1,40	16,38
120	-15,85	10,45	8,79	6,65
135	-11,24	6,95	16,91	-3,53
150	-7,16	2,67	22,39	-13,48
165	-3,90	-2,09	24,85	-22,50
180	-1,69	-7,03	24,13	-30,00
195	-0,67	-11,79	20,27	-35,44
210	-0,91	-16,07	13,55	-38,48
225	-2,40	-19,55	4,41	-38,89
240	-5,03	-22,01	-6,51	-36,65
255	-8,62	-23,28	-18,48	-31,91
270	-12,94	-23,28	-30,68	-25,00
285	-17,68	-21,99	-42,28	-16,38
300	-22,53	-19,51	-52,48	-6,65
315	-27,15	-16,02	-60,60	3,53
330	-31,22	-11,74	-66,08	13,48
345	-34,48	-6,96	-68,54	22,50
360	-36,69	-2,03	-67,82	30,00

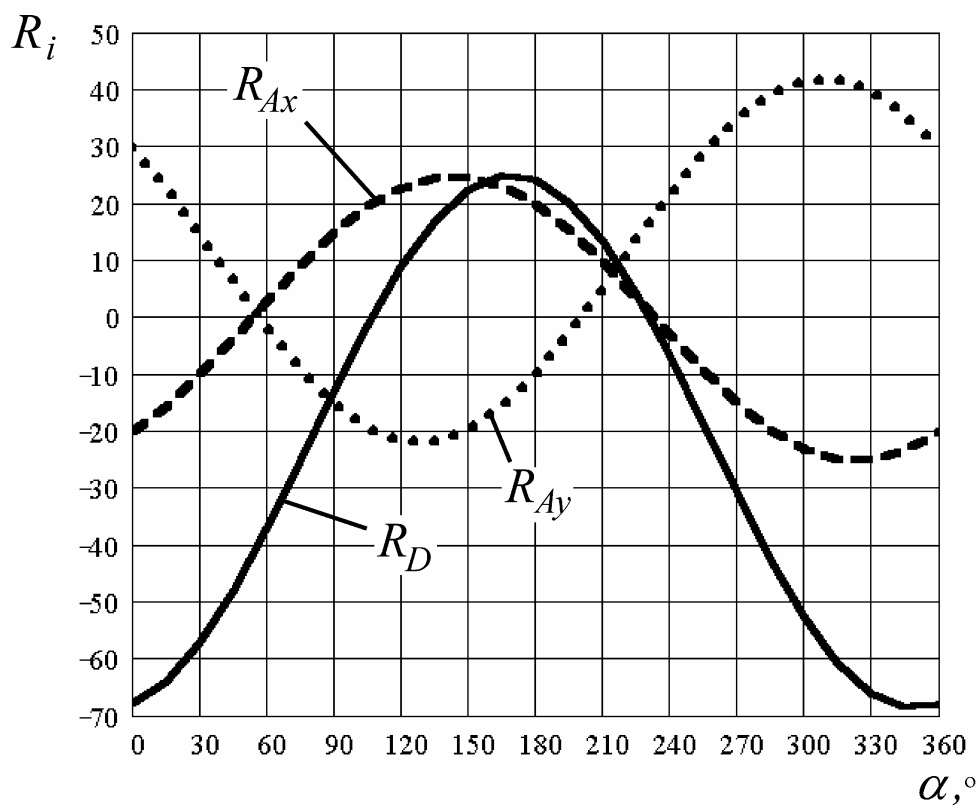


Рис. 20

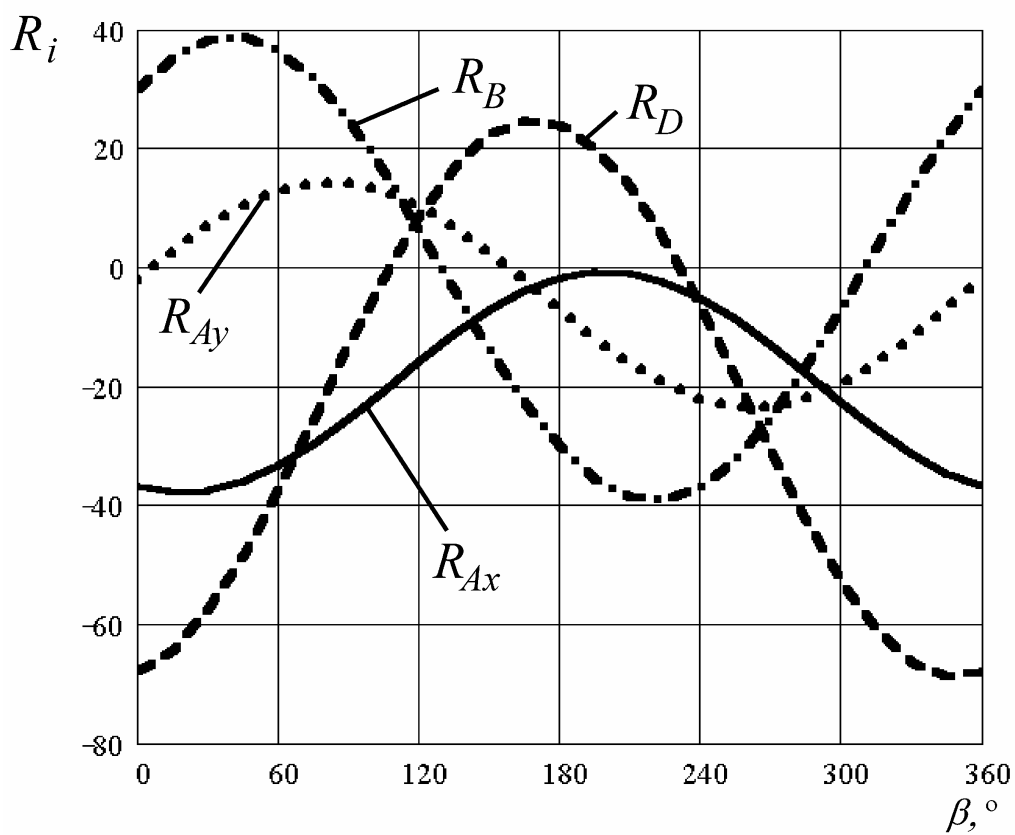


Рис. 21

ВЫВОДЫ

Как видно из рис. 20, 21 опорные реакции зависят от направления внешней силы. Применение принципа возможных перемещений позволяет определить величину и направление интересующей реакции, что значительно сокращает трудоемкость расчетов.

Предложенный способ определения дает возможность выявления максимальных значений сил, действующих на опоры, что необходимо при их расчете на прочность.

По зависимостям величин опорных реакций, рис. 20, 21, можно определить ее направление внешней силы, соответствующее максимальным и минимальным значениям опорных реакций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах: В 2 ч. Ч. II. М.: Наука, 1990.
2. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. М.: Наука, 1986.
3. Яблонский А. А. Курс теоретической механики. В 2 ч. Ч. II. М.: Наука, 1984.