

ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ
Примеры выполнения расчётно-проектировочных работ

Расчётно-проектировочная работа № 1
КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

1. Содержание работы

Плоская механическая система (рис. 1) с одной степенью свободы состоит из блока, представляющего сплошной однородный диск с массой m_1 и радиусом r ; абсолютно жёсткого однородного стержня с массой m_2 и длиной l ; недеформируемой безмассовой тяги; цилиндрической винтовой пружины с коэффициентом жёсткости c_1 ; демфера с коэффициентом вязкого сопротивления α . Вынужденные колебания возбуждаются сосредоточенной гармонической силой $P(t) = P_0 \cos \omega t$. Требуется:

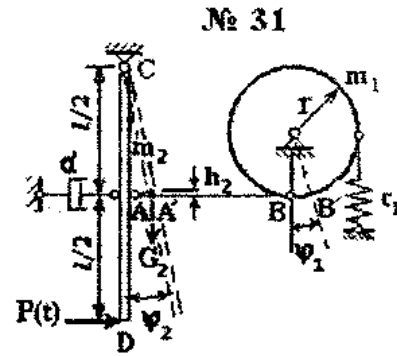


Рис. 1

1. Изобразить расчётную схему, показать выбранную обобщённую координату движения и обосновать число степеней свободы.
2. Составить уравнение вынужденных колебаний.
3. Составить уравнение свободных колебаний, определить круговую частоту и период свободных колебаний при отсутствии трения и с учётом трения.
4. Построить кривые амплитудно-частотных характеристик вынужденных колебаний при отсутствии трения и с учётом трения.
5. Определить значения амплитуд обобщённой координаты, скорости и ускорения при резонансных колебаниях демпфированной системы.
6. Определить максимальные значения амплитуд обобщённой координаты, скорости и ускорения для демпфированной системы и соответствующие им частоты обобщённой силы.

2. Расчётная схема

В качестве обобщённой координаты движения заданной плоской механической системы (рис. 1) примем $\varphi_1(t)$ – угол поворота блока вокруг оси. Его значение в любой момент времени однозначно определяет положение всех остальных звеньев механизма. Из этого следует, что система обладает одной степенью свободы.

3. Таблица исходных данных

Втрое число шифра	m_1 кг	r см	m_2 кг	l см	c_1 Н/м	α Нс/м	P_0 Н
5	6,2	25	3,6	70	8000	60	25

4. Решение

4.1. Уравнение вынужденных колебаний

Уравнение вынужденных колебаний составляется с помощью уравнения Лагранжа II рода для системы с одной степенью свободы

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = Q, \quad (1)$$

где T – кинетическая энергия, Π – потенциальная энергия, Φ – диссипативная функция Рэлея, Q – обобщённая сила.

Определим последовательно величины, входящие в (1). Функции T , Π , Φ вычисляются с точностью, при которой справедливы формулы

$$T = \frac{1}{2} a \dot{\varphi}_1^2; \quad \Phi = \frac{1}{2} b \dot{\varphi}_1^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} c \varphi_1^2; \quad (2)$$

где a , b , c – коэффициенты инерции, диссипации и жёсткости.

Кинетическую энергию системы найдём как сумму кинетических энергий блока и стержня

$$T = T_1 + T_2. \quad (3)$$

Кинетическая энергия вращающегося блока определяется по формуле

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2, \quad (4)$$

где J_1 – осевой момент инерции блока, ω_1 – угловая скорость вращения. Они вычисляются по известным формулам

$$J_1 = \frac{1}{2} m_1 r^2, \quad \omega_1 = \dot{\varphi}_1.$$

Подставляя их в (4), получим

$$T_1 = \frac{1}{4} m_1 r^2 \dot{\varphi}_1^2. \quad (5)$$

Кинетическая энергия стержня CD, вращающегося вокруг шарнира C

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2, \quad (6)$$

причём осевой момент инерции

$$J_2 = \frac{1}{3} m_2 l^2.$$

Очевидно (рис. 1), что с учётом малости углов поворота φ_1 и φ_2 и недеформируемости тяги, соединяющей точки А и В можно записать равенства

$$AA' = BB', \quad AA' = (l/2) \varphi_2, \quad BB' = r\varphi_1.$$

Тогда

$$\varphi_2 = \frac{2r}{l} \varphi_1. \quad (7)$$

Угловая скорость вращения стержня CD (рис. 1) вокруг шарнира равна

$$\omega_2 = \dot{\varphi}_2 = 2r \dot{\varphi}_1 / l.$$

С учётом этих значений кинетическая энергия стержня (6) принимает вид

$$T_2 = \frac{2}{3} m_2 r^2 \dot{\varphi}_1^2. \quad (8)$$

Формулы (3), (5), (8) дают

$$T_1 = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{1}{2} m_1 + \frac{4}{3} m_2 \right) \varphi_1^{-2} = \frac{1}{2} a \varphi_1^{-2}.$$

Отсюда получим значение коэффициента инерции

$$a = r^2 \left(\frac{1}{2} m_1 + \frac{4}{3} m_2 \right) = 0,25^2 \left(\frac{1}{2} \cdot 6,2 + \frac{4}{3} \cdot 3,6 \right) = 0,4938 \text{ кг м}^2. \quad (9)$$

Диссипативная функция Рэлея определяется по формуле

$$\Phi = \frac{1}{2} \alpha V_A^2,$$

где α – коэффициент вязкости. Скорости перемещений точек А и В равны между собой. Поэтому

$$v_A = v_B = r \omega_1 = r \dot{\varphi}_1.$$

Следовательно

$$\Phi = \frac{1}{2} \alpha r^2 \dot{\varphi}_1^2. \quad (10)$$

Сравнивая (2) и (10), запишем формулу для коэффициента демпфирования и вычислим его значение

$$b = \alpha r^2 = 60 \cdot 0,25^2 = 3,750 \text{ Н с м}. \quad (11)$$

Потенциальная энергия системы П равна сумме энергии деформированной пружины Π_1 и энергии стержня в поле сил тяжести Π_2

$$П = \Pi_1 + \Pi_2. \quad (12)$$

Каждое из этих слагаемых определяется как работа, совершаемая соответствующей силой на перемещении системы из отклонённого положения в равновесное положение, каковым будем считать положение покоя при $P(t) \equiv 0$.

Потенциальная энергия деформированной пружины равна

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} c_1 (BB')^2 = \frac{1}{2} c_1 r^2 \varphi_1^2. \quad (13)$$

Здесь, ввиду малости угла поворота φ_1 , деформация пружины приравнена к дуге BB' .

Потенциальная энергия, соответствующая силе тяжести стержня G_2 , равна

$$\Pi_2 = G_2 h_2 = m_2 g h_2, \quad (14)$$

где h_2 – вертикальное смещение центра тяжести стержня. Из чертежа (рис. 1) легко находим, что

$$h_2 = l/2 - (l/2) \cos \varphi_2 = (l/2)(1 - \cos \varphi_2). \quad (15)$$

Разложим $\cos \varphi_2$ в ряд Маклорена

$$\cos \varphi_2 = 1 - \frac{\varphi_2^2}{2!} + \frac{\varphi_2^4}{4!} - \dots \quad (16)$$

и учтём, что рассматриваются малые колебания системы около положения равновесия, т. е. φ_1, φ_2 – малые величины. Тогда в правой части (16) можно пренебречь величинами четвёртого порядка малости и записать (15) в виде

$$h_2 = \frac{1}{4} l \varphi_2^2. \quad (17)$$

Подставим (7) в (17), а далее в (14) и получим

$$\Pi = \frac{m_2 g r^2}{l} \varphi_1^2 \quad (18)$$

С учётом формул (17) и (18) сумма (12) принимает вид

$$\Pi = \frac{1}{2} r^2 \left(c_1 + \frac{2m_2 g}{l} \right) \varphi_1^2 = \frac{1}{2} c \varphi_1^2. \quad (19)$$

Следовательно, коэффициент жёсткости системы имеет значение

$$c = r^2 \left(c_1 + \frac{2m_2 g}{l} \right) = 0,25^2 \left(8000 + \frac{2 \cdot 3,6 \cdot 9,81}{0,7} \right) = 506,3 \text{ Нм}. \quad (20)$$

Определим обобщённую силу Q , соответствующую возмущающей силе P и выбранной обобщённой координате. Сообщим обобщённой координате φ_1 малое приращение $\delta\varphi_1$. Тогда обобщённая сила совершит работу

$$\delta A_Q = Q \delta\varphi_1. \quad (21)$$

В силу (7) угол поворота φ_2 получит приращение

$$\delta\varphi_2 = \frac{2r}{l} \delta\varphi_1.$$

Точка D переместится по горизонтали на расстояние $DD' = l \delta\varphi_2$, на котором сила P произведёт работу

$$\delta A_P = Pl \delta\varphi_2 = 2rP \delta\varphi_1. \quad (22)$$

Работы, определяемые из (21), (22), должны быть одинаковыми. Поэтому

$$Q = 2rP = 2rP_0 \cos \omega t = Q_0 \cos \omega t. \quad (23)$$

Здесь введено обозначение

$$Q_0 = 2rP_0 = 2 \cdot 0,25 \cdot 25 = 12,5 \text{ Нм.}$$

Определим последовательно производные в уравнении (1)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = a \ddot{\varphi}_1, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = c \varphi_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}_1} = b \dot{\varphi}_1. \quad (24)$$

Подстановка (23), (24) в (1) даёт дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$a \ddot{\varphi}_1 + b \dot{\varphi}_1 + c \varphi_1 = Q \quad (25)$$

с постоянными коэффициентами a , b , c , определяемыми формулами (9), (11), (20). Приведём (25) к стандартному виду

$$\ddot{\varphi}_1 + 2\varepsilon \dot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 = q, \quad (26)$$

где введены обозначения для коэффициента демпфирования

$$\varepsilon = b / 2a = 3,750 / 2 \cdot 0,4938 = 3,797 \text{ с}^{-1},$$

квадрата частоты свободных колебаний в системе без демпфирования ($\varepsilon = 0$)

$$\omega_0^2 = c / a = 506,3 / 0,4938 = 1025 \text{ с}^{-2} \quad (27)$$

и обобщённой силы

$$q = Q / a = (Q_0 / a) \cos \omega t = q_0 \cos \omega t.$$

Введённая здесь амплитуда обобщённой силы имеет значение

$$q_0 = Q_0 / a = 12,5 / 0,4938 = 25,32 \text{ с}^{-2}.$$

4.2. Уравнение свободных колебаний

Приравнивая правую часть уравнения вынужденных колебаний (26) к нулю, получим уравнение свободных колебаний

$$\ddot{\varphi}_1 + 2\varepsilon\dot{\varphi}_1 + \omega_0^2\varphi_1 = 0.$$

С помощью (27) найдём частоту свободных колебаний при отсутствии трения в системе

$$\omega_0 = 32,02 \text{ с}^{-1}.$$

Этой частоте соответствует период колебаний

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,141}{32,02} = 0,1962 \text{ с}.$$

Теперь вычислим частоту и период свободных колебаний с учётом трения

$$\omega_\varepsilon = \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2} = \sqrt{1025 - 3,797^2} = 31,8 \text{ с}^{-1},$$

$$T_\varepsilon = \frac{2\pi}{\omega_\varepsilon} = \frac{2 \cdot 3,141}{31,08} = 0,1976 \text{ с}.$$

Очевидно, что наличие трения практически не влияет на значения частоты и периода колебаний.

4.3. Амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики

Решение уравнения (26) при установившихся колебаниях не зависит от начальных условий и имеет вид

$$\varphi_1(t) = A \cos(\omega t - \psi). \quad (28)$$

Здесь A – амплитуда колебаний, ψ – угол сдвига фазы перемещений по отношению к фазе возмущающей силы (угол запаздывания). Они определяются формулами

$$A_\xi = q_0 / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega^2]^{1/2} = q_0 / \omega_0^2 [(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega^2/\omega_0^4]^{1/2} = \beta \varphi_{ст}, \quad (29)$$

$$\text{tg } \psi = 2\varepsilon\omega / (\omega_0^2 - \omega^2), \quad (30)$$

где β – динамический коэффициент системы, $\varphi_{ст}$ – статический угол поворота блока под действием статической обобщённой силы q_0 . Приведём формулы (29), (30) к виду, удобному для вычислений

$$\varphi_{ст} = q_0 / \omega_0^2 = 25,32/1025 = 0,02469 \text{ рад},$$

$$\beta = [(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega^2/\omega_0^4]^{-1/2}.$$

Введём обозначения

$$\eta = \omega/\omega_0, \quad \lambda = 2 \varepsilon/\omega_0 = 2 \cdot 3,797 / 32,02 = 0,2372.$$

Тогда получим

$$\beta_{\xi} = [(1 - \eta^2)^2 + \lambda^2 \eta^2]^{1/2}, \quad (31)$$

$$\psi = \arctg (\lambda \eta / (1 - \eta^2)). \quad (32)$$

Для определения амплитуд колебаний будем пользоваться формулами (29) и (31). При этом обозначим амплитуду и динамический коэффициент, вычисляемые без учёта трения в системе ($\varepsilon = 0$) A_0, β_0 , с учётом трения – $A_{\varepsilon}, \beta_{\varepsilon}$. В частности, будет

$$A_0 = \beta_0(\omega) \varphi_{ст}, \quad \beta_0(\omega) = 1/(1 - \eta^2).$$

Очевидно, что при $\varepsilon = 0$ и $\eta < 1$ (дорезонансный режим) формула (32) даёт значение $\psi_0 = 0$, а при $\eta > 1$ (зарезонансный режим) $\psi_0 = \pi$.

Результаты вычислений для амплитуд A_0, A_{ε} и сдвига фаз ψ_{ε} представляются таблицей

№ №	η	ω с ⁻¹	β_0	A_0 рад	β_{ε}	A_{ε} рад	ψ_{ε} рад
1	0	0	1,000	0,02469	1,0000	0,02469	0
2	0,25	8,006	1,067	0,02633	1,0645	0,02628	0,0632
3	0,50	16,01	1,333	0,03292	1,3170	0,03251	0,1568
4	0,75	24,02	2,286	0,05643	2,1174	0,05228	0,3862
5	0,90	28,82	5,263	0,12994	3,4993	0,08639	0,8435
6	0,95	30,42	10,256	0,25322	4,0732	0,10056	1,1624
7	1,00	32,02	∞	∞	4,2163	0,10409	1,5708
8	1,05	33,62	9,756	0,24086	3,7133	0,09168	1,9613
9	1,10	35,22	4,7519	0,11756	2,9859	0,7372	2,2485
10	1,25	40,03	1,778	0,04389	1,5727	0,03883	2,6565
11	1,50	48,03	0,800	0,01975	0,7694	0,01900	2,8643
12	1,75	56,04	0,4848	0,01197	0,4753	0,01173	2,9430
13	2,00	64,04	0,3333	0,00823	0,3292	0,00813	2,9848

По итогам вычислений построены графики амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик (рис 2, 3). Анализ таблицы и кривых (рис. 2) обнаруживает, что при $\omega/\omega_0 = 1$ (т.е. $\eta = 1, \omega = \omega_0$) имеется резко выраженное явление резонанса: при отсутствии трения амплитуда обращается в бесконечность, при наличии трения происходит существенное увеличение амплитуды

колебаний. Наличие трения практически сказывается лишь при колебаниях вблизи резонанса. При $\omega = 0$ амплитуда колебаний, как и следовало ожидать, равняется статическому отклонению диска. При высокочастотных колебаниях амплитуда уменьшается, асимптотически приближаясь к нулю.

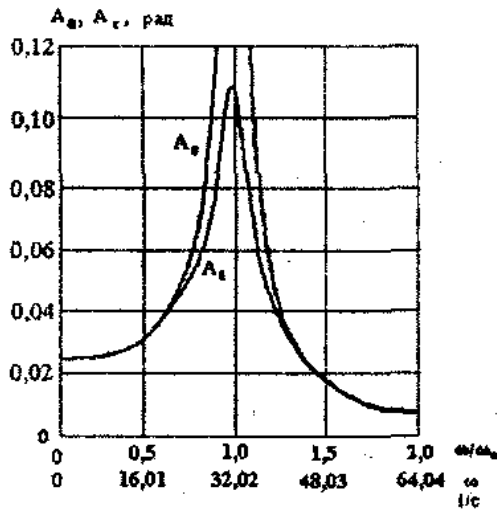


Рис. 2

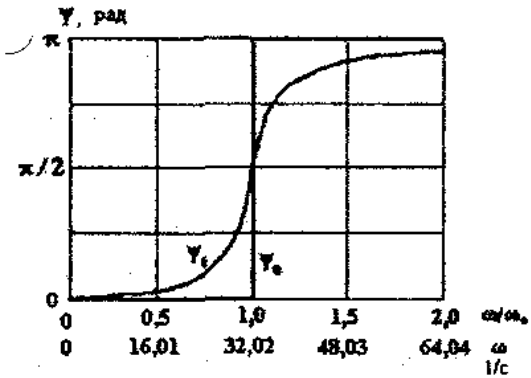


Рис. 3

Кривая фазо-частотной характеристики при наличии трения в системе (рис. 3) показывает, что сдвиг фаз ψ с ростом частоты возмущений увеличивается сначала медленно, затем быстро, достигая при резонансе значения $\pi/2$, а далее — значения π .

4.4. Амплитуды резонансных колебаний демпфированной системы

Амплитуда резонансных колебаний дана в таблице при значении $\eta = 1$

$$A_1 = A_e = 0,1041 \text{ рад.}$$

Дифференцируя функцию (28) дважды, найдём формулы для угловой скорости $\dot{\varphi}_1$, углового ускорения $\ddot{\varphi}_1$ и соответствующих амплитуд

$$\dot{\varphi}_1 = -\omega A_1 \sin(\omega t - \psi) = -A_2 \sin(\omega t - \psi), \quad A_2 = \omega A_1, \quad (33)$$

$$\ddot{\varphi}_1 = -\omega^2 A_1 \cos(\omega t - \psi) = -A_3 \cos(\omega t - \psi), \quad A_3 = \omega^2 A_1. \quad (34)$$

Находим легко, что

$$A_2 = \omega_0 A_1 = 32,02 \cdot 0,1041 = 3,333 \text{ рад/с,}$$

$$A_3 = \omega_0^2 A_1 = 1025 \cdot 0,1041 = 106,7 \text{ рад/с}^2.$$

4.5. Максимальные амплитуды колебаний демпфированной системы

Для определения частоты возмущений, которой соответствует максимальное значение амплитуды, производную по η^2 от выражения в квадратной скобке в формуле (31) приравняем к нулю

$$2\eta^2 + \lambda^2 - 2 = 0.$$

Отсюда

$$\eta^2 = \eta_1^2 = (2 - \lambda^2)/2 = (2 - 0,2372^2)/2 = 0,9719, \quad \eta = 0,9858.$$

Такому значению частотного соотношения отвечает частота возмущений

$$\omega_1 = \eta_1 \omega_0 = 0,9858 \cdot 32,02 = 31,57 \text{ с}^{-1}.$$

Амплитуда колебаний при этом является максимальной и определяется по (29), (31)

$$\begin{aligned} \max A_1 &= A_1(\omega_1) = A_1(\eta_1) = \beta(\eta_1) \varphi_{ст} = [(1 - \eta_1^2)^2 + \lambda^2 \eta_1^2]^{1/2} \varphi_{ст} = \\ &= [(1 - 0,9719)^2 + 0,2372^2 \cdot 0,9719]^{1/2} \cdot 0,02469 = 0,1048 \text{ рад.} \end{aligned}$$

Используя (29), амплитуду скорости колебаний (33) перепишем в виде

$$A_2(\omega) = \omega A_1(\omega) = q_0 / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 / \omega^2 + 4\varepsilon^2]^{1/2}.$$

Отсюда следует, что она имеет максимальное значение при $\omega = \omega_0$, т. е. при резонансе

$$\max A_2(\omega) = A_2(\omega_0) = q_0 / 2\varepsilon = 25,32 / 2 \cdot 3,797 = 3,333 \text{ рад/с.}$$

Можно легко показать, что амплитуда ускорений (34) имеет вид

$$A_3(\omega) = \omega^2 A_1(\omega) = q_0 / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 / \omega^4 + 4\varepsilon^2 / \omega^2]^{1/2}.$$

Её максимуму отвечает равенство нулю производной по ω^2 выражения в квадратной скобке, т. е.

$$\frac{d}{d\omega^2} [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 / \omega^4 + 4\varepsilon^2 / \omega^2] = 0.$$

После несложных преобразований приходим к формуле и значению частоты

$$\omega^2 = \omega_3^2 = \omega_0^4 / (\omega_0^2 - 2\varepsilon^2) = 32,02^4 / (32,02^2 - 2 \cdot 3,797^2) = 1055 \text{ с}^{-2}, \quad \omega_3 = 32,48 \text{ с}^{-1}$$

а далее к максимальной амплитуде ускорений

$$\begin{aligned} \max A_3(\omega) &= A_3(\omega_3) = q_0 / [(\omega_0^2 - \omega_3^2)^2 / \omega_3^4 + 4\varepsilon^2 / \omega_3^2]^{1/2} = \\ &= 25,32 / [(1025 - 1055)^2 / 32,48^4 + 4 \cdot 3,797^2 / 1055]^{1/2} = 110,6 \text{ рад/с}^2. \end{aligned}$$

Из этих результатов видно, что максимальные значения амплитуд весьма близки к резонансным значениям или даже совпадают с ними (амплитуда скорости).

Расчётно-проектировочная работа № 2

КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

1. Содержание работы

Плоская механическая система с двумя степенями свободы состоит из блока, являющегося сплошным однородным диском с массой m_1 и радиусом r ; абсолютно жёсткого однородного стержня с массой m_2 и длиной l ; цилиндрических винтовых пружин с коэффициентами жёсткости c_1 ; c_2 . Вынужденные колебания возбуждаются гармоническим моментом $M(t) = M_0 \cos \omega t$. Требуется:

1. Изобразить расчётную схему, показать выбранные обобщённые координаты движения и обосновать число степеней свободы.
2. Составить уравнения движения в общем виде.
3. Составить уравнения движения при свободных колебаниях.
4. Составить частотное уравнение и найти спектр собственных частот.
5. Найти спектр собственных форм, проверить их ортогональность.
6. Составить уравнения движения при вынужденных колебаниях.
7. Найти вектор амплитуд обобщённых координат.
8. Построить кривые амплитудно-частотных характеристик вынужденных колебаний.
9. Провести анализ колебаний в зависимости от частоты вынуждающей силы.

2. Расчётная схема

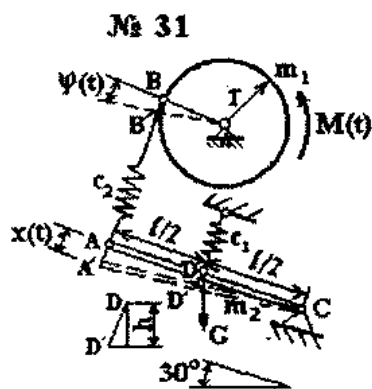


Рис. 1

В качестве обобщённых координат движения заданной плоской механической системы (рис. 1) примем $\varphi(t)$ – угол поворота блока вокруг оси и $x(t)$ – перемещение конца стержня AA' , отсчитанные от положения равновесия. Следует учесть, что в состоянии покоя ($M(t) \equiv 0$) из-за действия силы тяжести стержня AC система уже находится в отклонённом положении, т. е. обобщённые координаты имеют «донулевые» значения x_0 и φ_0 . Выбранные обобщённые координаты в любой момент времени однозначно определяют конфигурацию механизма. Из этого следует, что система обладает двумя степенями свободы.

3. Таблица исходных данных

Второе число шифра	m_1 кг	r см	m_2 кг	l см	c_1 Н/м	c_2 Н/м	M_0 Нм
5	2	16	3	40	8200	2500	3,1

4. Уравнения колебаний в общем виде

Уравнения колебаний составляются с помощью уравнений Лагранжа II рода для системы с двумя степенями свободы

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = f_x, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} + \frac{\partial \Pi}{\partial \phi} = f_\phi, \dots \quad (1)$$

где T – кинетическая энергия, Π – потенциальная энергия, f_x, f_ϕ – обобщённые силы.

Определим последовательно величины, входящие в (1). Функции T, Π вычисляются с точностью, при которой справедливы формулы

$$T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{x}^2 + a_{12} \dot{x}\dot{\phi} + \frac{1}{2} a_{22} \dot{\phi}^2; \quad \Pi = \frac{1}{2} c_{11} x^2 + c_{12} x\phi + \frac{1}{2} c_{22} \phi^2, \quad (2)$$

где a_{ij}, c_{ij} – коэффициенты инерции и жёсткости. Выражения в правых частях (2) представляют квадратичные формы обобщённых координат и обобщённых скоростей. Коэффициенты образуют симметричные квадратные матрицы инерции и жёсткости

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Кинетическую энергию системы найдём как сумму кинетических энергий блока и стержня

$$T = T_1 + T_2. \quad (3)$$

Кинетическая энергия вращающегося блока определяется по формуле

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2, \quad (4)$$

где J_1 – осевой момент инерции блока, ω_1 – угловая скорость вращения. Они вычисляются по известным формулам

$$J_1 = \frac{1}{2} m_1 r^2, \quad \omega_1 = \dot{\phi}.$$

Подставляя их в (4), получим

$$T_1 = \frac{1}{4} m_1 r^2 \dot{\phi}^2. \quad (5)$$

Кинетическая энергия стержня AC, вращающегося вокруг шарнира C.

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2, \quad (6)$$

причём осевой момент инерции определяется по известной формуле

$$J_2 = \frac{1}{3} m_2 l^2.$$

Очевидно (рис. 1), что

$$\omega_2 = \dot{x} / l.$$

С учётом этих значений кинетическая энергия стержня (6) принимает вид

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m_2 l^2 \left(\frac{\dot{x}}{l} \right)^2 = \frac{1}{6} m_2 \dot{x}^2. \quad (7)$$

Формулы (3), (5), (7) дают

$$T = \frac{1}{4} m_1 r^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{6} m_2 \dot{x}^2. \quad (8)$$

Сравнивая (2) и (8), получим значения элементов инерционной матрицы

$$a_{11} = \frac{1}{3} m_2 = \frac{1}{3} 3 = 1 \text{ кг}, \quad a_{12} = a_{21} = 0,$$

$$a_{22} = \frac{1}{2} m_1 r^2 = \frac{1}{2} 2 \cdot 0,16^2 = 0,0256 \text{ кг м}^2.$$

Потенциальная энергия системы Π равна сумме потенциальных энергий деформированных пружины Π_1 , Π_2 и стержня AC в поле сил тяжести Π_3 .

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3. \quad (9)$$

Каждое из этих слагаемых равно работе, совершаемой соответствующей силой на перемещении системы из отклонённого положения в равновесное положение, каковым будем считать положение покоя при $M(t) \equiv 0$.

Точки A , B , D во время колебаний перемещаются по дугам соответствующих окружностей. Но эти перемещения в обычном режиме достаточно маленькие и поэтому примем, что отклонения происходят по прямым линиям, и при этом $AA' \perp AC$, $BB' \perp BE$, $DD' \perp DC$.

Для первой пружины

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} c_1 (DD' + f_0)^2 - \frac{1}{2} c_1 f_0^2 = \frac{1}{2} c_1 \left(\frac{x}{2} + \frac{x_0}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} c_1 \left(\frac{x_0}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} c_1 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x_0 x}{2} \right). \quad (10)$$

В данном подсчёте учтено, что пружина в равновесном положении уже была растянута на величину $f_0 = x_0/2$.

Для второй пружины

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} c_2 (AA' - BB')^2 = \frac{1}{2} c_2 (x - r\varphi)^2 = \frac{1}{2} c_2 (x^2 - 2 r x \varphi + r^2 \varphi^2). \quad (11)$$

Потенциальная энергия отклонённого стержня A'C в поле сил тяжести

$$\Pi_3 = -G h = -m_2 g DD' \cos 30^\circ = -\frac{1}{2} m_2 g x \cos 30^\circ. \quad (12)$$

Здесь G – вес стержня, h – перемещение центра тяжести стержня в вертикальном направлении в процессе колебаний. Знак минус учитывает тот факт, что сила тяжести направлена вниз, а перемещение из отклонённого положения в равновесное положение направлено вверх. Подстановка (10), (11), (12) в (9) даёт

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x_0 x}{2} \right) + \frac{1}{2} c_2 (x^2 - 2 r x \varphi + r^2 \varphi^2) - \frac{1}{2} m_2 g x \cos 30^\circ. \quad (13)$$

Известно, что в нулевом (равновесном) положении ($x = 0$, $\varphi = 0$) должно быть

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0} = 0. \quad (14)$$

$\varphi = 0 \qquad \qquad \qquad \varphi = 0$

Выполнив первое дифференцирование (14) с учётом (13) и приравняв x и φ к нулю, получим

$$\frac{1}{4} c_1 x_0 - \frac{1}{2} m_2 g \cos 30^\circ = 0.$$

Учёт этого выражения упрощает формулу (13), и она принимает вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \left(\frac{c_1}{4} + c_2 \right) x^2 - c_2 r x \varphi + \frac{1}{2} c_2 r^2 \varphi^2. \quad (15)$$

Сравнение формул (2) и (15) даёт элементы матрицы жёсткости

$$c_{11} = \frac{c_1}{4} + c_2 = \frac{8200}{4} + 2500 = 4550 \text{ Н/м},$$

$$c_{12} = c_{21} = -c_2 r = -2500 \cdot 0,16 = -400 \text{ Н}, \quad c_{22} = c_2 r^2 = 2500 \cdot 0,16^2 = 64 \text{ Нм}.$$

Определим обобщённые силы $f_x(t)$, $f_\varphi(t)$, соответствующие возмущающему моменту $M(t)$ и выбранным обобщённым координатам. С этой целью сообщим обобщённой координате x малое приращение δx , в то время как обобщённая координата φ остаётся неизменной. Тогда обобщённая сила f_x совершит работу

$$\delta A_x = f_x \delta x. \quad (16)$$

Поскольку приращение $\delta\varphi$ координаты φ равно нулю, момент M произведёт нулевую работу, т. е.

$$\delta A_M = M \delta\varphi = 0. \quad (17)$$

Работы, определяемые по (16), (17), должны быть одинаковыми. Поэтому

$$f_x = 0. \quad (18)$$

Теперь дадим обобщённой координате φ малое приращение $\delta\varphi$, в то время как обобщённая координата x остаётся неизменной. Тогда обобщённая сила f_φ совершит работу

$$\delta A_\varphi = f_\varphi \delta\varphi. \quad (19)$$

На этом же перемещении момент M произведёт работу

$$\delta A_M = M \delta\varphi. \quad (20)$$

(19) и (20) должны приводить к одинаковым результатам. Поэтому

$$f_\varphi = M. \quad (21)$$

Определим последовательно производные в уравнениях (1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = a_{11} \dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = a_{11} \ddot{x}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x} = c_{11}x + c_{12}\varphi, \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = a_{22} \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = a_{22} \ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = c_{12}x + c_{22}\varphi. \end{aligned} \quad (22)$$

Подстановка (18), (21), (22) в (1) даёт дифференциальные уравнения вынужденных колебаний

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{x} + c_{11}x + c_{12}\varphi &= 0, \\ a_{22} \ddot{\varphi} + c_{21}x + c_{22}\varphi &= M_0 \cos \omega t. \end{aligned}$$

В матрично-векторной форме их можно записать в стандартном виде

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{Cq} = \mathbf{F} \cos \omega t. \quad (23)$$

Обобщенные координаты образуют вектор $q(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$. Матрицы A и C определены выше

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,0256 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4550 & -400 \\ -400 & 64 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что вектор амплитуд сил F может быть представлен в виде

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ M_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3,1 \end{pmatrix}.$$

5. Свободные колебания

5.1. Спектр собственных частот

Решение системы уравнений (23) имеет вид $q(t) = Q \cos(\omega t + \psi)$ и после подстановки приводит сначала к уравнению относительно собственных форм

$$(C - \omega^2 A) Q = 0, \quad (24)$$

а затем – к частотному (характеристическому) уравнению

$$\det(C - \omega^2 A) = 0, \quad (25)$$

где ω – частота свободных колебаний, Q – собственный вектор (собственная форма), $\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – нуль-вектор. В развернутом виде уравнение (25) имеет вид

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \omega^2 a_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} - \omega^2 a_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (26)$$

или

$$(c_{11} - \omega^2 a_{11})(c_{22} - \omega^2 a_{22}) - c_{12} c_{21} = a\omega^4 - b\omega^2 + c = 0. \quad (27)$$

При этом

$$a = a_{11} a_{22} = 1 \cdot 0,0256 = 0,0256 \text{ кг м}^2,$$

$$b = a_{11} c_{22} + a_{22} c_{11} = 1 \cdot 64 + 0,0256 \cdot 4550 = 180,5 \text{ кг}^2 \text{ м}^2 / \text{с}^2,$$

$$c = c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21} = 4550 \cdot 64 - (-400) \cdot (-400) = 131200 \text{ Н}.$$

Решаем биквадратное уравнение

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{180,5 \mp \sqrt{180,5^2 - 4 \cdot 0,0256 \cdot 131200}}{2 \cdot 0,0256} = 3525 \mp 2702 \text{ с}^{-2}.$$

Отсюда получим

$$\omega_1^2 = 883,0 \text{ с}^{-2}, \quad \omega_1 = 28,69 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_2^2 = 6227 \text{ с}^{-2}, \quad \omega_2 = 78,91 \text{ с}^{-1}.$$

Таким образом, спектр собственных частот есть множество

$$\Omega = \{28,69; 78,91\} \text{ с}^{-1}.$$

5.2. Спектр собственных форм

Каждой собственной частоте ω_k соответствует собственная форма $Q_k = \begin{pmatrix} Q_{1k} \\ Q_{2k} \end{pmatrix}$, которую можно найти из системы уравнений (24)

$$(C - \omega_k^2 A) Q_k = 0, \quad k = 1, 2.$$

В развернутой форме она имеет вид

$$\begin{pmatrix} c_{11} - \omega_k^2 a_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} - \omega_k^2 a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{1k} \\ Q_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Определитель матрицы коэффициентов системы (28) равен нулю, так как из этого условия (а именно (26)) найдены собственные частоты ω_k . Следовательно, (28) представляет систему линейно зависимых уравнений, и поэтому компоненты вектора Q_k находятся отсюда с точностью лишь до постоянного множителя. Отсюда также следует, что одним из компонентов вектора Q_k необходимо задаваться, а другой – находить как решение любого из двух уравнений (28). Пусть $Q_{1k} = 1 \text{ м}$, $k = 1, 2$. Найдем из первого уравнения, что

$$Q_{2k} = \frac{c_{11} - \omega_k^2 a_{11}}{-c_{12}} = \frac{4550 - \omega_k^2}{400}, \quad k = 1, 2.$$

Поочередно подставляя ω_k , находим

$$Q_{21} = \frac{4550 - 28,69^2}{400} = 9,317 \text{ рад}, \quad Q_{22} = \frac{4550 - 78,91^2}{400} = -4,192 \text{ рад}.$$

Таким образом, получен спектр собственных форм в виде вектора

$$Q = \{Q_1, Q_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 9,317 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4,192 \end{pmatrix} \right\}. \quad (29)$$

Его компоненты, в свою очередь, являются векторами и должны обладать свойством ортогональности с весами по матрицам инерции и жёсткости. В первом варианте это означает выполнение равенства

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 a_{jk} Q_{j1} Q_{k2} = 0.$$

Или с учётом элементов ранее приведённой матрицы А должно быть

$$a_{11} Q_{11} Q_{12} + a_{22} Q_{21} Q_{22} = 0.$$

Подставляя значения, имеем

$$1 \cdot 1 \cdot 1 + 0,0256 \cdot 9,317 (-4,192) = 1 - 0,9999 \approx 0.$$

Во втором варианте условие ортогональности собственных форм имеет вид

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 c_{jk} Q_{j1} Q_{k2}$$

или

$$c_{11} Q_{11} Q_{12} + c_{12} Q_{11} Q_{22} + c_{21} Q_{21} Q_{12} + c_{22} Q_{21} Q_{22} = 0.$$

Подставим значения и получим

$$4550 \cdot 1 \cdot 1 - 400 \cdot 1 \cdot (-4,192) - 400 \cdot 9,317 \cdot 1 + 64 \cdot 9,317 \cdot (-4,192) = 6227 - 6227 = 0.$$

Условия ортогональности собственных форм в двух различных вариантах выполняются. Значит, спектр собственных форм найден правильно.

6. Вынужденные колебания

6.1. Уравнения колебаний

Уравнения вынужденных колебаний имеют вид (23). В частном случае, когда $\omega = 0$, уравнения колебаний обращаются в уравнения статики

$$Cq_{ст} = F.$$

Отсюда можно легко получить статические отклонения при действии момента M_0

$$q_{ст} = C^{-1} F = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} c_{22} & -c_{21} \\ -c_{12} & c_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ M_0 \end{pmatrix}.$$

Здесь C^{-1} – обратная матрица

$$C^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} c_{22} & -c_{21} \\ -c_{12} & c_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{131200} \begin{pmatrix} 64 & 400 \\ 400 & 4550 \end{pmatrix},$$

Δ – определитель матрицы C , равный ранее найденному коэффициенту c биквадратного уравнения, т.е. $\Delta = c = 131200$ Н. Таким образом, имеем

$$q_{ст} = C^{-1} F = \frac{1}{131200} \begin{pmatrix} 64 & 400 \\ 400 & 4550 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,009451 \text{ м} \\ 0,1076 \text{ рад.} \end{pmatrix}.$$

Значит, статические значения обобщённых координат при действии момента M_0 будут следующими

$$x_{ст} = 0,009451 \text{ м} = 9,451 \text{ мм}, \quad \varphi_{ст} = 0,1076 \text{ рад.}$$

6.2. Амплитуды обобщённых координат

Решением системы уравнений (23) является вектор

$$q = Q \cos \omega t, \quad (30)$$

где $Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$ – вектор амплитуд обобщённых координат. Подставляя (30) в (23),

получим уравнение относительно амплитуд

$$(C - \omega^2 A)Q = F \quad (31)$$

или в развернутой форме

$$\begin{pmatrix} c_{11} - \omega^2 a_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} - \omega^2 a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ M_0 \end{pmatrix}.$$

Легко заметить, что решение системы уравнений имеет вид

$$Q_k = \Delta_k / \Delta_\omega, \quad k = 1, 2. \quad (32)$$

Здесь Δ_ω – определитель матрицы коэффициентов

$$\Delta_\omega = (c_{11} - \omega^2 a_{11})(c_{22} - \omega^2 a_{22}) - c_{12}c_{21} = (4550 - \omega^2)(64 - 0,0256\omega^2) - 160000, \quad (33)$$

введены обозначения

$$\Delta_1 = -c_{21} M_0 = 400 \cdot 3,1 = 1240 \text{ Н}^2\text{М}, \quad \Delta_2 = (c_{11} - \omega^2 a_{11}) M_0 = 3,1 \cdot (4550 - \omega^2). \quad (34)$$

Равенство нулю определителя Δ_ω дает $Q_1 = Q_2 = \infty$, т.е. приводит к резонансу, что, как известно, происходит при совпадении частоты вынуждающей силы ω с одной из собственных частот. Сравнивая (27) и (33), легко обнаружить, что корни частотного уравнения (т.е. собственные частоты) обращают Δ_ω в нуль.

Амплитуды (32) при некоторых значениях ω могут оказаться нулевыми, т.е. может иметь место явление антирезонанса. Рассмотрим вопрос подробнее. Из $Q_1 = 0$ следует, что должно выполняться условие $\Delta_1 = 0$, т.е. $c_{21} = 0$. Очевидно, что такое условие в данной задаче не может быть выполнено, и поэтому антирезонанса для стержня с массой m_2 не может быть. Для диска равенство нулю амплитуды колебаний Q_2 означает, что

$$c_{11} - \omega^2 a_{11} = 0 \Rightarrow \omega^2 = c_{11} / a_{11} = 4550 / 1 = 4550 \text{ с}^{-2}.$$

Таким образом, антирезонанс, когда диск с массой m_1 остаётся неподвижным, наблюдается на частоте

$$\omega_* = \sqrt{4550} = 67,45 \text{ с}^{-1}.$$

6.3. Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ)

Координаты точек АЧХ вычисляются по формулам (32), (33), (34). Результаты, полученные с их помощью, представляются таблицей.

$\omega, \text{с}^{-1}$	$Q_1, \text{мм}$	$Q_2, \text{рад}$	$\omega, \text{с}^{-1}$	$Q_1, \text{мм}$	$Q_2, \text{рад}$	$\omega, \text{с}^{-1}$	$Q_1, \text{мм}$	$Q_2, \text{рад}$
0	9,451	0,1075	40	-13,474	-0,0994	78,91	∞	∞
10	10,934	0,1216	50	-7,750	-0,0397	80	50,194	-0,2321
20	19,650	0,2039	60	-6,640	-0,0158	81	25,272	-0,1271
25	43,662	0,4284	67,45	-7,750	0,0000	85	7,581	-0,0507
28,69	∞	∞	70	-8,953	0,0078	90	3,554	-0,0315
32	-46,324	-0,4083	75	-16,757	0,0450	100	1,399	-0,0191
35	-24,091	-0,2003	77	-31,837	0,1098	110	0,731	-0,0138

По этим данным построены графики рис. 2, 3.

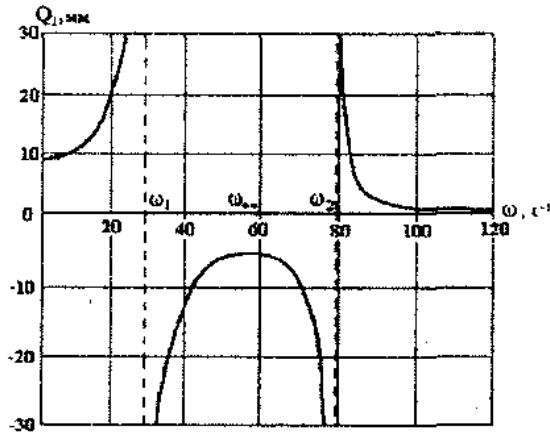


Рис. 2

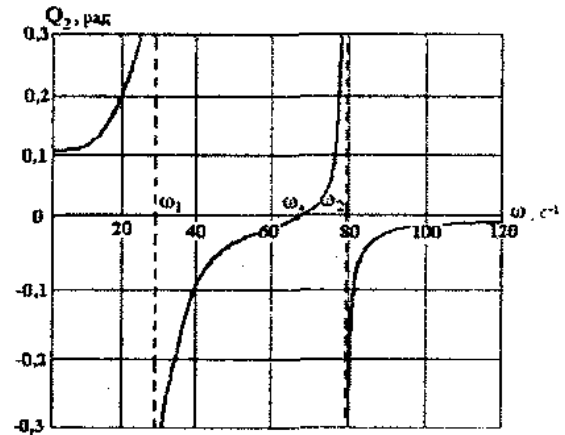


Рис. 3

7. Анализ колебаний в зависимости от частоты вынуждающей силы

Анализ колебаний проведём по кривым, показанным на рис. 2, 3. Очевидно, что частотную ось необходимо разбить на четыре характерных участка для обсуждения

$$0 \leq \omega \leq \omega_1; \quad \omega_1 \leq \omega \leq \omega_*; \quad \omega_* \leq \omega \leq \omega_2; \quad \omega_2 \leq \omega \leq \infty.$$

1) $0 \leq \omega \leq \omega_1$. При $\omega = 0$ амплитуды колебаний совпадают со статическими отклонениями, найденными выше. При росте частоты вынуждающей силы от нуля обе амплитуды увеличиваются, оставаясь положительными (рис. 2, 3), т. е. находясь в одной фазе; как между собой, так и с возмущающим моментом. В то же время это означает, что колебания происходят в основном по первой собственной форме (27). По мере приближения к первой собственной частоте амплитуды возрастают и становятся неограниченными при $\omega = \omega_1$, т. е. имеет место резонанс. При этом $Q_1 = Q_2 = \infty$.

2) $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_*$. Обе амплитуды колебаний стали отрицательными (рис. 2, 3). Значит, колебания диска и стержня происходят в противофазе с возмущающим моментом, но по-прежнему находятся в одной фазе между собой. Из этого следует, что вынужденные колебания по форме продолжают совпадать с первой собственной формой. При увеличении частоты амплитуды падают. Причём здесь имеется частота ω_* (рис. 2), которой соответствует минимальное значение амплитуды $|Q_1|$. Поскольку Q_1 определяется формулами (32), (33), (34), определитель (33) должен быть минимальным. Найдём ω_* , приравняв производную $d\Delta_\omega/d\omega^2$ к нулю

$$d\Delta/d\omega^2 = -a_{11}(c_{22} - \omega^2 a_{22}) - a_{22}(c_{11} - \omega^2 a_{11}) = 0.$$

Отсюда имеем

$$\omega_{**}^2 = (a_{11} c_{22} + a_{22} c_{11}) / 2 a_{11} a_{22} = (1 \cdot 64 + 0,0256 \cdot 4550) / 2 \cdot 1 \cdot 0,0256 = 3525 \text{ с}^{-1},$$
$$\omega_{**} = 59,37 \text{ с}^{-1}.$$

Такой частоте соответствует значение амплитуды

$$Q_1(\omega_{**}) = 1240 / [(4550 - 3525)(64 - 0,0256 \cdot 3525) - 160000] =$$
$$= -0,006635 \text{ м} = -6,635 \text{ мм}.$$

$Q_2(\omega_{**}) = 0$, так как имеет место явление антирезонанса (рис. 3).

3) $\omega_* \leq \omega \leq \omega_2$. Вторая амплитуда становится положительной в то время как первая остаётся отрицательной (рис. 2, 3). Значит, диск колеблется синфазно с действующим моментом, находясь в антифазе с колебаниями стержня. Из этого следует, что колебания системы происходят уже по второй собственной форме (29). Рост частоты сопровождается увеличением обеих амплитуд, которые становятся бесконечными при втором резонансе, т. е. при $\omega = \omega_2$.

4) $\omega_2 \leq \omega \leq \infty$. После перехода колебаний через второй резонанс знаки амплитуд изменяются на противоположные, но при этом остаются разными (рис. 2, 3). Следовательно, колебания продолжают происходить по второй собственной форме. Но теперь уже стержень колеблется синфазно с вынуждающим моментом, а диск находится в антифазе с ним. Дальнейший рост частоты приводит сначала к резкому, а затем к медленному уменьшению обеих амплитуд. При больших значениях частоты ω амплитуды колебаний незначительны и даже асимптотически приближаются к нулю при $\omega \rightarrow \infty$.

При уменьшении частоты вынуждающего момента из области высоких частот до нуля происходит обратная смена явлений, описанных выше.

Расчётно-проектировочная работа № 1

КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

1. Содержание работы

На упругой стальной раме круглого поперечного сечения диаметра d расположена сосредоточенная масса m , на которую действует вынуждающая гармоническая сила $F(t) = F_0 \cos \omega t$. При пренебрежении собственной массой рамы требуется:

1. Изобразить расчётную схему, обосновать число степеней свободы и показать выбранную координату движения.

2. Составить уравнения колебаний:

а) свободных при отсутствии трения;

б) свободных с учётом трения;

в) вынужденных при отсутствии трения;

г) вынужденных с учётом трения.

3. Определить круговую частоту и период свободных изгибных колебаний упругой системы при отсутствии трения и с учётом трения.

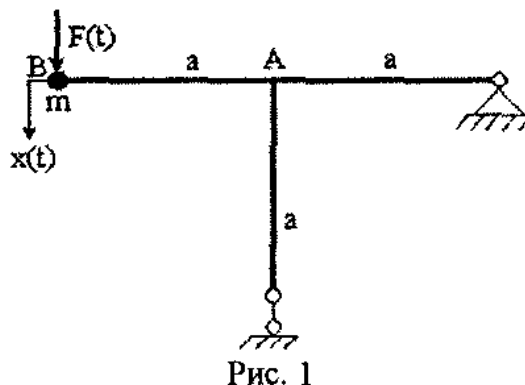
4. Построить кривые амплитудно-частотных характеристик при отсутствии трения и с учётом трения.

5. Определить в опасном сечении конструкции нормальные напряжения: среднее, амплитудное, максимальное, минимальное при вынужденных колебаниях с учётом трения для значений частот вынуждающей силы:

1) $\omega = 0,5 \omega_0$, 2) $\omega = \omega_0$, ω_0 – частота свободных колебаний без трения.

2. Расчётная схема

В заданной раме (рис. 1) положение массы m в любой момент времени однозначно определяется одной координатой – перемещением в вертикальном направлении $x(t)$. Поэтому рама представляет собой упругую систему с одной степенью свободы. Перемещения в горизонтальном направлении незначительны и ими пренебрегаем.



3. Таблица исходных данных

Второе число шифра	a м	d см	m кг	F_0 Н
5	1,2	4,1	24	42

4. Уравнения колебаний

4.1. Уравнение свободных колебаний при отсутствии трения

В общем виде:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

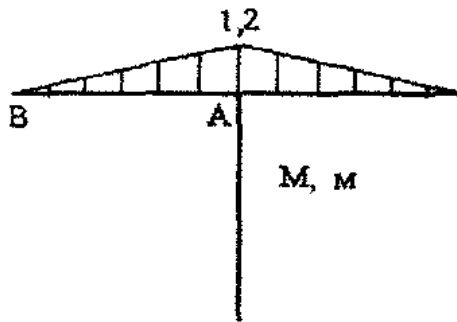


Рис. 2

Здесь $\omega_0^2 = c/m$ – угловая частота свободных колебаний, $c = 1/\delta$ – коэффициент жёсткости системы, δ – перемещение массы m при действии статической единичной силы $\bar{F} = 1$ в направлении перемещения $x(t)$. Определяем δ с помощью метода Мора-Верещагина, для чего построим эпюру $\bar{M}(\bar{F})$ (рис. 2). В соответствии с методом

$$\delta = \frac{1}{EJ} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 1,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,2 = \frac{1,152}{EJ}. \quad (1)$$

Возьмем для стали модуль упругости $E = 200$ ГПа. Осевой момент инерции поперечного сечения в форме круга вычисляется по формуле

$$J = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 4,1^4}{64} = 13,87 \text{ см}^4.$$

Подставим в (1) и получим

$$\delta = \frac{1,152}{200 \cdot 10^9 \cdot 13,87 \cdot 10^{-8}} = 0,4153 \cdot 10^{-4} \text{ м/Н}.$$

Далее

$$c = 1/\delta = 1/0,4153 \cdot 10^{-4} = 24081 \text{ Н/м}.$$

Угловая частота свободных колебаний

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m} = \frac{2,408 \cdot 10^4}{24} = 1003 \text{ с}^{-2}, \quad \omega_0 = 31,68 \text{ с}^{-1}.$$

Период свободных колебаний

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,141}{31,68} = 0,1984 \text{ с}.$$

Уравнение колебаний для данной рамы

$$\ddot{x} + 1003 x = 0.$$

4.2. Уравнение свободных колебаний с учетом трения

В общем виде

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2)$$

Здесь ε – коэффициент трения. По теории неупругого сопротивления его значение определяется для свободных колебаний по формуле

$$\varepsilon = \frac{\gamma\omega_0}{2},$$

где $\gamma = 0,025$ – коэффициент неупругого сопротивления для прокатной стали. С учётом значений γ и ω_0 имеем

$$\varepsilon = \frac{0,025 \cdot 31,68}{2} = 0,3960 \text{ с}^{-1}.$$

Уравнение (2) для данной рамы имеет вид

$$\ddot{x} + 0,7919\dot{x} + 1003 x = 0.$$

Угловая частота свободных колебаний с учётом трения

$$\omega_\varepsilon = \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2} = \sqrt{1003 - 0,3960^2} = 31,67 \text{ с}^{-1}.$$

Период свободных колебаний с учётом трения

$$T_\varepsilon = \frac{2\pi}{\omega_\varepsilon} = \frac{2 \cdot 3,14}{31,68} = 0,1984 \text{ с}.$$

Очевидно, что наличие трения практически не влияет на значения частоты и периода колебаний.

4.3. Уравнение вынужденных колебаний при отсутствии трения

В общем виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t,$$

ω – угловая частота вынуждающей силы. Учёт численных значений параметров дает уравнение колебаний рамы

$$\ddot{x} + 1003 x = 1,75 \cos \omega t.$$

4.4. Уравнение вынужденных колебаний с учётом трения

В общем виде

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t .$$

Уравнение вынужденных колебаний рамы

$$\ddot{x} + 0,7919\dot{x} + 1003x = 1,75 \cos \omega t .$$

5. Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ)

5.1. АЧХ при отсутствии трения

Координаты точек АЧХ связаны формулой

$$A_0 = \beta_0(\omega) A_{ст} ,$$

где $A_{ст} = \frac{F_0}{c} = \frac{42}{2,408 \cdot 10^4} = 1,744 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,744 \text{ мм}$ – статическое перемещение от силы $F_0 = 42 \text{ Н}$; A_0 – амплитуда вынужденных колебаний при отсутствии трения ($\varepsilon = 0$), β_0 – динамический коэффициент, определяемый по формуле

$$\beta_0(\omega) = 1 / | 1 - (\omega / \omega_0)^2 | .$$

5.2. АЧХ с учетом трения

Формулы с учётом трения приобретают вид

$$A_\varepsilon = \beta_\varepsilon(\omega) A_{ст} , \quad \beta_\varepsilon(\omega) = 1 / \sqrt{(1 - \omega^2 / \omega_0^2)^2 + (\gamma \omega / \omega_0)^2} = \\ = 1 / \sqrt{1 / \beta_0^2 + (\gamma \omega / \omega_0)^2} = 1 / \sqrt{1 / \beta_0^2 + (0,025 \omega / 31,68)^2} = 1 / \sqrt{1 / \beta_0^2 + 6,22 \cdot 10^{-7} \omega^2} ,$$

где A_ε , β_ε – амплитуда и динамический коэффициент вынужденных колебаний при наличии трения ($\varepsilon \neq 0$).

Результаты вычислений для амплитуд A_0 и A_ϵ представляются таблицей

№ №	ω/ω_0	ω с ⁻¹	β_0	A_0 мм	β_ϵ	A_ϵ мм
1	0,00	0,00	1,000	1,744	1,000	1,744
2	0,25	7,92	1,067	1,860	1,067	1,860
3	0,50	15,84	1,333	2,325	1,333	2,325
4	0,75	23,76	2,286	3,986	2,284	3,983
5	0,90	28,51	5,263	9,179	5,227	9,116
6	0,95	30,09	10,256	17,888	9,965	17,380
7	1,00	31,68	∞	∞	40,000	69,763
8	1,05	33,26	9,756	17,015	9,451	16,483
9	1,10	34,84	4,762	8,305	4,722	8,235
10	1,25	39,60	1,778	3,101	1,775	3,096
11	1,50	47,51	0,800	1,395	0,800	1,395
12	1,75	55,43	0,485	0,846	0,485	0,845
13	2,00	63,35	0,333	0,581	0,333	0,581

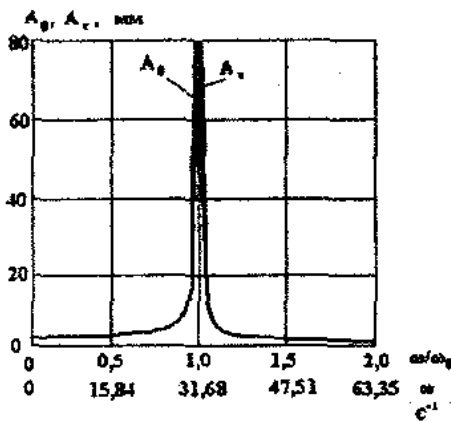


Рис. 3

По итогам вычислений построены графики АЧХ при отсутствии трения и наличии трения (рис. 3). Анализ таблицы и кривых показывает, что при $\omega/\omega_0 = 1$ (т.е. $\omega = \omega_0$) имеется резко выраженное явление резонанса. Наличие трения практически сказывается лишь при колебаниях вблизи резонанса.

6. Нормальные напряжения в опасном сечении

При колебаниях балки в её поперечных сечениях возникают нормальные напряжения, циклически изменяющиеся во времени. Среднее нормальное напряжение равно статическому напряжению. Динамическая составляющая напряжений является гармонической. Найдем оба напряжения, поскольку они представляют практический интерес для расчётов на прочность при переменных напряжениях.

По рис. 2 очевидно, что опасным является сечение А. В точке В масса m передаёт статическую сосредоточенную силу

$$G = mg = 24 \cdot 9,81 = 235,4 \text{ Н,}$$

которая даёт изгибающий момент в сечении А:

$$M_A = G a = 235,4 \cdot 1,2 = 282,5 \text{ Нм.}$$

Среднее нормальное напряжение в крайних волокнах сечения определяется по формуле

$$\sigma_m = \frac{M_A}{W},$$

где W – осевой момент сопротивления поперечного сечения в виде круга

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 4,1^3}{32} = 6,766 \text{ см}^3.$$

Подстановка чисел даёт

$$\sigma_m = \frac{282,5}{6,766 \cdot 10^{-6}} = 41,76 \cdot 10^6 \text{ Па} = 41,76 \text{ МПа}.$$

Амплитуда гармонически изменяющихся динамических напряжений определяется по формуле

$$\sigma_a = \sigma_d = \beta_\varepsilon \sigma_{ст}.$$

Здесь β_ε – динамический коэффициент, $\sigma_{ст}$ – статическое напряжение от силы P_0 .

$$\sigma_{ст} = \frac{M(F_0)}{W}, \quad M(F_0) = F_0 \cdot a = 42 \cdot 1,2 = 50,4 \text{ Нм},$$

$$\sigma_{ст} = \frac{50,4}{6,766 \cdot 10^{-6}} = 7,449 \cdot 10^6 \text{ Па} = 7,449 \text{ МПа},$$

Максимальное и минимальное напряжения цикла определяются по формулам:

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a, \quad \sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a.$$

Рассмотрим два значения частоты вынуждающей силы:

$$\begin{aligned} 1) \quad \omega = 0,5 \omega_0: \beta_\varepsilon = 1,333, \sigma_a = \sigma_d = 1,333 \cdot 7,449 = 9,930 \text{ МПа}, \\ \sigma_{\max} = 41,76 + 9,926 = 51,69 \text{ МПа}, \\ \sigma_{\min} = 41,76 - 9,926 = 31,82 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \omega = \omega_0: \beta_\varepsilon = 40, \sigma_a = \sigma_d = 40 \cdot 7,449 = 297,9 \text{ МПа}, \\ \sigma_{\max} = 41,76 + 297,9 = 339,7 \text{ МПа}, \\ \sigma_{\min} = 41,76 - 297,9 = -256,2 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Эти результаты позволяют решать вопросы прочности при циклически изменяющихся напряжениях.

Сравнение итогов, полученных для двух случаев, показывает, что при резонансных колебаниях значения напряжений существенно увеличиваются.

Расчётно-проектировочная работа № 2

КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

1. Содержание работы

На упругой системе из стального двутавра расположены две массы m_1 и m_2 . На одну из них действует вынуждающая сила $F(t) = F_0 \cos \omega t$. При пренебрежении собственной массой системы и отсутствии трения требуется:

- 1) Изобразить расчётную схему, обосновать число степеней свободы и показать выбранные координаты движения.
- 2) Составить уравнения движения при свободных колебаниях.
- 3) Составить частотное уравнение и найти спектр собственных частот.
- 4) Найти спектр собственных форм, проверить их ортогональность, показать на схеме.
- 5) Составить уравнения движения при вынужденных колебаниях.
- 6) Найти вектор амплитуд обобщенных координат.
- 7) Построить кривые амплитудно-частотных характеристик вынужденных колебаний масс.
- 8) Провести анализ колебаний в зависимости от частоты вынуждающей силы.

2. Расчётная схема

Заданная рама (рис. 1) представляет собой упругую систему с двумя степенями свободы, потому что положения масс m_1 и m_2 в любой момент времени однозначно определяются двумя обобщёнными координатами: перемещением массы m_1 в вертикальном направлении – $x_1(t)$ и перемещением массы m_2 в горизонтальном направлении – $x_2(t)$. Перемещения массы m_1 в горизонтальном и массы m_2 в вертикальном направлениях незначительные и поэтому во внимание не принимаются.

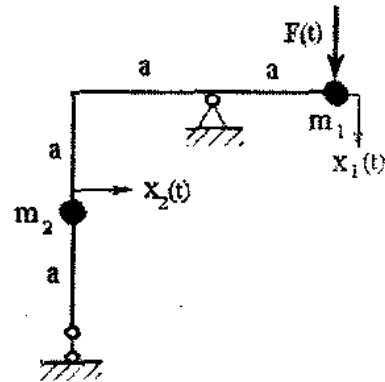


Рис. 1

3. Таблица исходных данных

Второе число шифра	a м	двутавр №	m_1 кг	m_2 кг	F_0 кН
5	1,5	12	300	260	3,2

4. Уравнения движения при свободных колебаниях

В данном случае удобно составлять уравнение свободных колебаний обратным способом в матрично-векторной форме:

$$D A \ddot{x} + x = 0. \quad (1)$$

Здесь $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ – вектор перемещений, $D = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}$ – матрица единичных

перемещений, δ_{jk} – перемещение массы m_j в направлении $x_j(t)$ от силы $\bar{F}_k = 1$, приложенной к массе m_k в направлении $x_k(t)$, $A = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$ – матрица масс,

$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – нуль вектор.

Элементы матрицы D определим методом Мора – Верещагина. С этой целью построим эпюры изгибающих моментов (рис. 2, 3) от единичных сил $\bar{F}_k = 1$ ($k = 1, 2$).

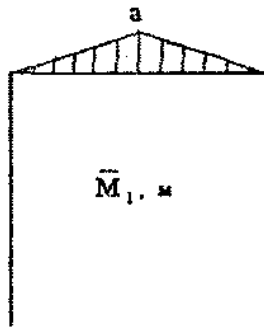


Рис. 2

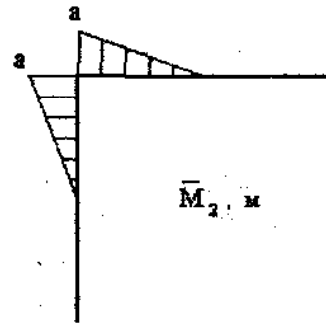


Рис. 3

Для стали модуль упругости $E = 200$ ГПа, для двутавра № 12 по ГОСТ 8239-72 осевой момент инерции $J = 350 \text{ см}^4$.

Перемножая эпюры, имеем:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{1}{EJ} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot a = \frac{2a^3}{3EJ},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{1}{3} \cdot a = \frac{a^3}{6EJ}.$$

Таким образом

$$D = \frac{a^3}{6EJ} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь введено обозначение параметра

$$\delta = \frac{a^3}{6EJ} = \frac{1,5^3}{6 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 350 \cdot 10^{-8}} = 8,036 \cdot 10^{-7} \text{ с}^2 / \text{кг}.$$

Для упрощения дальнейших преобразований в уравнении (1) перемножим матрицы

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{A} = \delta \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 260 \end{pmatrix} = 100\delta \begin{pmatrix} 12 & 2,6 \\ 3 & 10,4 \end{pmatrix} = \delta_0 \begin{pmatrix} 12 & 2,6 \\ 3 & 10,4 \end{pmatrix},$$

$$\delta_0 = 100\delta = 8,036 \cdot 10^{-5} \text{ с}^2 / \text{кг}$$

и оно примет вид

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3)$$

или после подстановок численных значений

$$\delta_0 \begin{pmatrix} 12 & 2,6 \\ 3 & 10,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. Частотное уравнение

Решение системы уравнений (3) имеет вид $\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q} \cos(\omega t + \varphi)$ и после подстановки приводит сначала к уравнению относительно собственных форм

$$(\mathbf{E} - \omega^2 \mathbf{B}) \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (4)$$

а затем – к частотному (характеристическому) уравнению

$$\det(\mathbf{E} - \omega^2 \mathbf{B}) = 0, \quad (5)$$

где $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица, ω – частота свободных колебаний, \mathbf{Q} – собственный вектор (собственная форма). В развернутом виде (5) дает

$$\begin{vmatrix} 1 - \omega^2 b_{11} & -\omega^2 b_{12} \\ -\omega^2 b_{21} & 1 - \omega^2 b_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

что можно записать в виде

$$a \omega^4 - b \omega^2 + 1 = 0.$$

При этом

$$a = b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21} = \delta_0^2 (12 \cdot 10,4 - 2,6 \cdot 3) = 117 \delta_0^2,$$

$$b = b_{11} + b_{22} = \delta_0 (12 + 10,4) = 22,4 \delta_0.$$

Решаем биквадратное уравнение

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a} = \frac{1}{\delta_0} \frac{22,4 \pm \sqrt{22,4^2 - 4 \cdot 117}}{2 \cdot 117} = \frac{1}{8,036 \cdot 10^{-5}} (22,4 \pm 5,81);$$

$$\omega_1^2 = 882,2 \text{ с}^{-2}, \quad \omega_1 = 29,70 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_2^2 = 1500 \text{ с}^{-2}, \quad \omega_2 = 38,73 \text{ с}^{-1}.$$

Таким образом, спектр собственных частот есть множество

$$\Omega = \{ 29,70; 38,73 \} \text{ с}^{-1}.$$

6. Уравнения для собственных форм

Каждой собственной частоте ω_k соответствует собственная форма

$\mathbf{Q}_k = \begin{pmatrix} Q_{1k} \\ Q_{2k} \end{pmatrix}$, которую можно найти из системы уравнений

$$(\mathbf{E} - \omega_k^2 \mathbf{B}) \mathbf{Q}_k = 0, \quad k = 1, 2.$$

В развернутой форме она имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 - \omega_k^2 b_{11} & -\omega_k^2 b_{12} \\ -\omega_k^2 b_{21} & 1 - \omega_k^2 b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{1k} \\ Q_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Определитель матрицы коэффициентов системы (7) равен нулю, так как из этого условия (а именно (6)) найдены собственные частоты ω_k . Следовательно, (7) представляет систему линейно зависимых уравнений, и поэтому компоненты вектора \mathbf{Q}_k находятся отсюда с точностью лишь до постоянного множителя. Отсюда также следует, что одним из компонентов вектора \mathbf{Q}_k необходимо задаваться, а другой – находить как решение любого из двух уравнений (7). Пусть $Q_{1k} = 1$ ($k = 1, 2$). Найдем из второго уравнения, что

$$Q_{2k} = \frac{\omega_k^2 b_{21}}{1 - \omega_k^2 b_{22}} = \frac{b_{21}}{\omega_k^2 - b_{22}} = \frac{3 \delta_0}{\omega_k^2 - 10,4 \delta_0} = \frac{3}{12444 \omega_k^{-2} - 10,4}, \quad k = 1, 2.$$

Поочередно подставляя ω_k^2 , находим

$$Q_{21} = \frac{3}{12444 / 882,2 - 10,4} = 0,8096, \quad Q_{22} = \frac{3}{12444 / 1500 - 10,4} = -1,4258.$$

Таким образом, получен спектр собственных форм в виде вектора

$$\mathbf{Q} = \{ \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0,8096 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1,4258 \end{pmatrix} \right\}.$$

Его компоненты, в свою очередь, являются векторами и должны обладать свойством ортогональности, что означает выполнение равенства

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 a_{jk} Q_{j1} Q_{k2} = 0.$$

Или с учётом элементов, ранее приведённой матрицы \mathbf{A}

$$m_1 Q_{11} Q_{12} + m_2 Q_{21} Q_{22} = 0.$$

Подставляя значения, имеем

$$300 \cdot 1 \cdot 1 + 260 \cdot 0,8096 (-1,4258) = 300 - 300,12 \approx 0.$$

Альтернативное условие ортогональности собственных форм имеет вид

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 c_{jk} Q_{j1} Q_{k2} = 0,$$

где c_{jk} – элементы матрицы жёсткости, обратной к матрице \mathbf{D}

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{\Delta_D} \begin{pmatrix} \delta_{22} & -\delta_{21} \\ -\delta_{12} & \delta_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{15\delta} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \delta_1 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Здесь Δ_D – определитель матрицы \mathbf{D} , обозначен

$$\delta_1 = 1 / 15\delta = 1 / 15 \cdot 8,036 \cdot 10^{-7} = 0,8296 \cdot 10^5 \text{ кг/с}^2.$$

Подставим значения c_{jk} , сократим δ_1 и получим

$$4 Q_{11} Q_{12} - Q_{11} Q_{22} - Q_{21} Q_{12} + 4 Q_{21} Q_{22} = 0.$$

Учтём численные значения компонентов вектора собственных форм и придём к результату

$$4 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1,4258) - 0,8096 \cdot 1 + 4 \cdot 0,8096 \cdot (-1,4258) = 5,4258 - 5,4269 \approx 0.$$

Условия ортогональности собственных форм в двух различных вариантах выполняются. Значит, спектр собственных форм найден правильно. Изобразим их на схемах рис. 4 и 5.

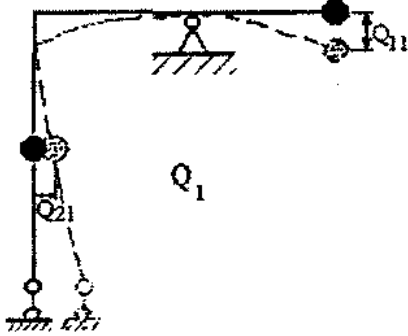


Рис. 4

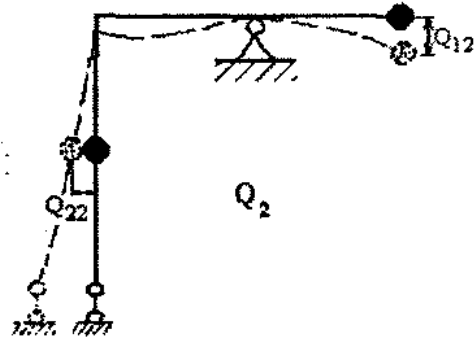


Рис. 5

7. Уравнения вынужденных колебаний

Уравнения вынужденных колебаний записываются в виде

$$A\ddot{x} + Cx = F \cos \omega t,$$

где $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – вектор внешних вынуждающих сил, ω – угловая частота

изменения нагрузки. Остальные обозначения остаются прежними. В развернутом виде уравнения имеют вид

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \delta_1 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos \omega t. \quad (8)$$

В частном случае, когда $\omega = 0$, уравнения колебаний обращаются в уравнения статики

$$\delta_1 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда можно легко получить статические прогибы от действия силы F_0

$$x_2 = F_0 / 15 \delta_1 = 3200 / 15 \cdot 0,8296 \cdot 10^5 = 0,002571 \text{ м} = 0,2571 \text{ см},$$

$$x_1 = 4 x_2 = 4 \cdot 0,2571 = 1,029 \text{ см}.$$

8. Амплитуды обобщённых координат

Решением системы уравнений (8) является вектор

$$x = Q \cos \omega t, \quad (9)$$

где $Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$ – вектор амплитуд обобщённых координат. Подставляя (9) в (8), получим уравнение относительно амплитуд

$$(C - \omega^2 A)Q = F \quad (10)$$

или в развёрнутой форме

$$\left[\delta_1 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\delta_1 - \omega^2 m_1 - \delta_1 \\ -\delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Легко заметить, что решение системы уравнений имеет вид

$$Q_k = \Delta_k / \Delta, \quad k = 1, 2. \quad (11)$$

Здесь Δ – определитель матрицы коэффициентов

$$\Delta = (4\delta_1 - \omega^2 m_1)(4\delta_1 - \omega^2 m_2) - \delta_1^2, \quad (12)$$

введены обозначения

$$\Delta_1 = F_0 (4\delta_1 - \omega^2 m_2), \quad \Delta_2 = F_0 \delta_1. \quad (13)$$

Равенство нулю определителя Δ дает $Q_1 = Q_2 = \infty$, т.е. приводит к резонансу, что, как известно, происходит при совпадении частоты вынуждающей силы ω с одной из собственных частот.

Амплитуды (11) при некоторых значениях ω могут обращаться в нуль, т.е. может иметь место явление антирезонанса. Рассмотрим вопрос подробнее. Из $Q_1 = 0$ следует, что должно выполняться условие $\Delta_1 = 0$, т.е.

$$4\delta_1 - \omega^2 m_2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = 4\delta_1 / m_2 = 4 \cdot 0,8296 \cdot 10^5 / 260 = 1276,35 \text{ с}^{-2}.$$

Таким образом, антирезонанс, когда масса m_1 остаётся неподвижной, наблюдается на частоте

$$\omega_* = \sqrt{1276,35} = 35,73 \text{ с}^{-1}.$$

Второе условие, дающее $Q_2 = 0$, имеет вид $\delta_1 = 0$, или $\delta = \infty$, т.е. $EJ = 0$. Очевидно, что такое условие в данной задаче не может быть выполнено, и поэтому антирезонанса для массы m_2 не может быть.

9. Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ)

Координаты точек АЧХ вычисляются по формуле (11). Приведем её к виду, удобному для расчётов. С этой целью выполним некоторые вычисления для дальнейшего использования

$$4\delta_1 = 4 \cdot 0,8296 \cdot 10^5 = 3,3184 \cdot 10^5 \text{ кг/с}^2; \quad \delta_1^2 = (0,8296 \cdot 10^5)^2 = 0,68824 \cdot 10^{10} \text{ кг}^2/\text{с}^4.$$

После подстановки чисел в (12), (13) имеем

$$\Delta = 10^6 [(331,84 - 0,3 \omega^2) (331,84 - 0,26 \omega^2) - 6882,4];$$

$$\Delta_1 = 10^6 \cdot 3,2 (331,84 - 0,26 \omega^2); \quad \Delta_2 = 10^6 \cdot 265,47.$$

После сокращений на 10^6 получим окончательные формулы для вычисления амплитуд и построения амплитудно-частотных характеристик

$$Q_1 = 3,2 (331,84 - 0,26 \omega^2) / [(331,84 - 0,3 \omega^2) (331,84 - 0,26 \omega^2) - 6882,4],$$

$$Q_2 = 265,47 / [(331,84 - 0,3 \omega^2) (331,84 - 0,26 \omega^2) - 6882,4]. \quad (14)$$

Результаты, полученные с их помощью, представляются таблицей.

$\omega, \text{с}^{-1}$	0	10	20	25	27	29	30	32
$Q_1, \text{см}$	1,029	1,146	1,762	3,086	4,940	17,084	-37632	-3,986
$Q_2, \text{см}$	0,257	0,311	0,641	1,512	2,880	12,523	-31,908	-5,041
$\omega, \text{с}^{-1}$	35,73	37	38	39	40	41	45	50
$Q_1, \text{см}$	0	1,548	5,664	-19,656	-4,821	-2,989	-1,332	-0,814
$Q_2, \text{см}$	-3,860	-5,329	-10,778	25,631	4,752	2,357	0,568	0,210

По этим данным построены графики рис. 6, 7.

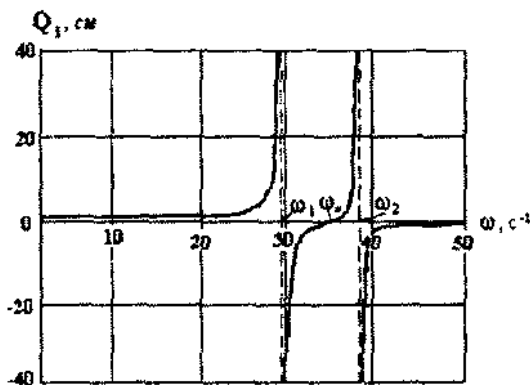


Рис. 6

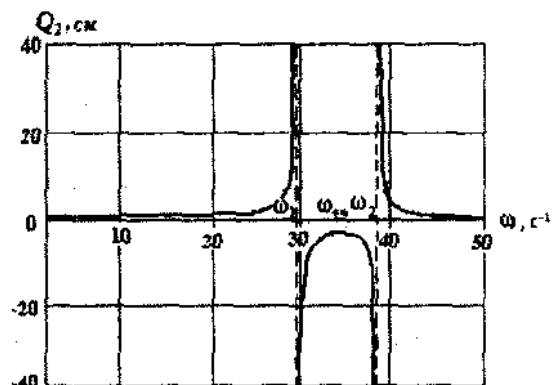


Рис. 7

10. Анализ колебаний в зависимости от частоты вынуждающей силы

Анализ колебаний проведём по кривым, показанным на рис. 4, 5, 6, 7. Очевидно, что частотную ось необходимо разбить на четыре характерных участка для обсуждения

$$0 \leq \omega \leq \omega_1; \quad \omega_1 \leq \omega \leq \omega_*; \quad \omega_* \leq \omega \leq \omega_2; \quad \omega_2 \leq \omega \leq \infty.$$

1) $0 \leq \omega \leq \omega_1$. При $\omega = 0$ амплитуды колебаний совпадают со статическими прогибами, найденными выше. При росте частоты вынуждающей силы от нуля обе амплитуды медленно растут, оставаясь положительными (рис. 6, 7), т. е. находясь в одной фазе, как между собой, так и с возмущающей силой. В то же время это означает, что колебания происходят в основном по первой собственной форме, т. е. в соответствии с рис. 4. По мере приближения к первой собственной частоте амплитуды возрастают и становятся неограниченными при $\omega = \omega_1$, т. е. имеет место резонанс. При этом $Q_1 = Q_2 = \infty$.

2) $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_*$. Обе амплитуды колебаний стали отрицательными (рис. 6, 7). Значит, колебания масс происходят в противофазе с возмущающей силой, но по-прежнему находятся в одной фазе между собой, из чего следует, что вынужденные колебания по форме совпадают с первой собственной формой (рис. 4). При увеличении частоты амплитуды падают. Причём здесь имеется частота ω_* (рис. 7), которой соответствует минимальное значение амплитуды $|Q_2|$. Поскольку Q_2 определяется формулами (11), (14), определитель (12) должен быть минимальным. Найдём ω_* , приравнявая производную $d\Delta/d\omega^2$ к нулю

$$d\Delta/d\omega^2 = -m_1(4\delta_1 - \omega^2 m_2) - m_2(4\delta_1 - \omega^2 m_1) = 0.$$

Отсюда имеем

$$\omega_*^2 = 2\delta_1(m_1 + m_2)/m_1 m_2 = 2 \cdot 0,8296 \cdot 10^5 (300 + 260) / 300 \cdot 260 = 1191 \text{ с}^{-2},$$

$$\omega_* = 34,51 \text{ с}^{-1}.$$

Такой частоте соответствует значение амплитуды

$$Q_2(\omega_*) = 265,4 / [(331,8 - 0,3 \cdot 1191)(331,8 - 0,26 \cdot 1191) - 6882] =$$

$$= -0,03565 \text{ м} = -3,565 \text{ см}.$$

При $\omega = \omega_*$ Q_1 обращается в нуль, так как имеет место явление антирезонанса (рис. 6).

3) $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$. Первая амплитуда становится положительной в то время как вторая остаётся отрицательной (рис. 6, 7). Значит, первая масса колеблется синфазно с действующей силой, находясь в антифазе с колебаниями второй массы. Из этого следует, что колебания системы происходят уже по второй собственной форме (рис. 5). Рост частоты сопровождается увеличением обеих амплитуд, которые становятся бесконечными при втором резонансе, т. е. при $\omega = \omega_2$.

4) $\omega_2 \leq \omega \leq \infty$. После перехода колебаний через второй резонанс знаки амплитуд изменяются на противоположные, но при этом остаются разными (рис. 6, 7). Следовательно, колебания продолжают происходить по второй собственной форме. Но теперь уже вторая масса колеблется синфазно с вынуждающей силой, а первая – находится в антифазе с ней. Дальнейший рост частоты приводит сначала к резкому, а затем к медленному уменьшению обеих амплитуд. При больших значениях частоты ω амплитуды колебаний незначительны и даже асимптотически приближаются к нулю при $\omega \rightarrow \infty$.

При уменьшении частот вынуждающей силы из области высоких частот до нуля происходит обратная смена явлений, описанных выше.

Содержание

Введение	3
1. Расчётно-проектировочные работы для механических специальностей	4
Расчётно-проектировочная работа № 1	5
Расчётно-проектировочная работа № 2	15
2. Расчётно-проектировочные работы для строительных специальностей	27
Расчётно-проектировочная работа № 1	28
Расчётно-проектировочная работа № 2	35