

**ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА  
ЛЕКЦИИ**

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	9
Предмет теоретической механики .....	9
Краткий исторический очерк .....	12

## ЧАСТЬ 1 . СТАТИКА. КИНЕМАТИКА

### СТАТИКА

<b>1. Основные понятия и аксиомы статики</b> .....	19
1.1. Некоторые основные определения .....	19
1.2. Аксиомы статики .....	20
1.3. Связи и их реакции .....	22
1.4. Методические указания по решению задач статики .....	23
<b>2. Система сходящихся сил</b> .....	24
2.1. Теорема о переносе силы по линии ее действия .....	24
2.2. Теорема о трех силах .....	24
2.3. Система сходящихся сил. Нахождение ее равнодействующей. Условия равновесия .....	25
<b>3. Момент силы</b> .....	27
3.1. Момент силы относительно точки .....	27
3.2. Теорема о моменте равнодействующей системы сходящихся сил .....	28
3.3. Момент силы относительно оси .....	28
3.4. Главный вектор и главный момент системы сил .....	30
<b>4. Теория пар сил</b> .....	31
4.1. Пара сил .....	31
4.2. Теоремы об эквивалентности пар сил .....	31
<b>5. Уравнения равновесия произвольной системы сил</b> .....	33
5.1. Теорема о параллельном переносе силы .....	33
5.2. Основная теорема статики .....	33
5.3. Следствие основной теоремы статики. Условия равновесия различных систем сил, приложенных к твердому телу .....	34
5.4. Определение опорных реакций однопролетных балок .....	37
5.5. Определение реакций опор составных конструкций .....	39
5.6. Простейшие фермы .....	40
5.7. Равновесие гибкой нити .....	42
5.8. Трение .....	47
<b>6. Преобразование систем сил к простейшему виду</b> .....	52
6.1. Соотношение между главными моментами относительно двух различных центров приведения .....	52



6.2. Статические инварианты .....	52
6.3. Приведение пространственной системы сил к равнодействующей .....	53
6.4. Теорема о моменте равнодействующей.....	53
6.5. Приведение пространственной системы сил к паре.....	54
6.6. Приведение пространственной системы сил к динамике .....	54
<b>7. Центр тяжести.....</b>	<b>56</b>
7.1. Центр параллельных сил .....	56
7.2. Центр тяжести тела .....	58
7.3. Примеры определения центров тяжести.....	60
7.4. Теоремы Паппа-Гульдина .....	63

## КИНЕМАТИКА

<b>8. Кинематика точки.....</b>	<b>66</b>
8.1. Введение в кинематику.....	66
8.2. Три способа определения движения точки .....	67
8.3. Скорость и ускорение точки при векторном и координатном способах задания движения .....	68
8.4. Скорость и ускорение точки в полярных координатах.....	71
8.5. Скорость и ускорение при естественном способе задания движения....	72
8.6. Криволинейные координаты .....	78
<b>9. Кинематика твердого тела .....</b>	<b>82</b>
9.1. Поступательное движение твердого тела.....	82
9.2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси .....	83
9.3. Плоско-параллельное движение твердого тела .....	85
9.4. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки .....	93
9.5. Движение свободного твердого тела .....	99
9.6. Основные теоремы о конечных перемещениях твердого тела.....	101
<b>10. Сложное движение точки .....</b>	<b>106</b>
10.1. Абсолютное, относительное и переносное движение.....	106
10.2. Абсолютная и относительная производные вектора.....	107
10.3. Теорема о сложении скоростей.....	108
10.4. Сложение ускорений.....	109
<b>11. Сложное движение твердого тела .....</b>	<b>112</b>
11.1. Общие замечания .....	112
11.2. Сложение вращений твердого тела вокруг параллельных осей .....	112
11.3. Кинематическое исследование планетарных передач .....	115
11.4. Волновая передача .....	117
11.5. Пара вращения .....	118
11.6. Пространственные механизмы для передачи вращательного движения .....	119

## ЧАСТЬ 2 . ДИНАМИКА. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

### ДИНАМИКА

<b>12. Законы Ньютона. Динамические уравнения движения материальной точки. Две основные задачи динамики</b> .....	127
12.1. Законы Ньютона .....	127
12.2. Динамические уравнения движения материальной точки .....	130
12.3. Две основные задачи динамики свободной материальной точки .....	132
12.4. Движение точки под действием центральной силы .....	135
12.5. Задача двух тел .....	140
<b>13. Основы теории колебаний материальной точки</b> .....	142
13.1. Свободные колебания материальной точки .....	142
13.2. Затухающие колебания материальной точки при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости .....	146
13.3. Вынужденные колебания материальной точки при отсутствии силы сопротивления среды .....	150
13.4. Вынужденные колебания материальной точки с учетом силы сопротивления среды .....	153
13.5. Вынужденные колебания материальной точки под действием периодической возмущающей силы общего вида.....	157
13.6. Вынужденные колебания под действием произвольной возмущающей силы .....	159
13.7. Комплексная форма решения задачи о вынужденных колебаниях материальной точки при произвольном периодическом возмущающем воздействии. Передаточная функция .....	160
13.8. Некоторые свойства передаточной функции .....	161
<b>14. Теорема об изменении количества движения</b> .....	164
14.1. Общие теоремы динамики как методы исследования механического движения .....	164
14.2. Теорема об изменении количества движения в дифференциальной форме .....	166
14.3. Теорема о движении центра масс .....	170
14.4. Теорема об изменении количества движения в интегральной форме ....	173
14.5. Динамика точки переменной массы .....	174
<b>15. Теорема об изменении момента количества движения (кинетического момента) системы материальных точек</b> .....	177
15.1. Понятие о моменте количества движения материальной точки и сис- темы материальных точек .....	177
15.2. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки .....	178

15.3. Теорема об изменении момента количества движения системы материальных точек.....	181
15.4. Главный момент количества движения твердого тела при вращении вокруг неподвижной оси .....	183
15.5. Моменты инерции .....	183
15.6. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей.....	187
15.7. Момент инерции относительно оси, произвольно расположенной в пространстве .....	188
15.8. Вычисление момента количества движения (кинетического момента) твердого тела во вращательном движении вокруг неподвижной точки .....	191
15.9. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси .....	192
15.10. Физический маятник.....	193
15.11. Давление на ось вращающегося тела .....	196
15.12. Теорема об изменении момента количества движения в относительном движении относительно центра инерции .....	198
15.13. Закон сохранения момента количества движения.....	200
<b>16. Некоторые задачи динамики твердого тела .....</b>	<b>203</b>
16.1. Элементарная теория гироскопа.....	203
16.2. Уравнения Эйлера для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.....	205
16.3. Движение твердого тела в случае Эйлера–Пуассона .....	207
16.4. Случай Лагранжа–Пуассона .....	210
16.5. Дифференциальные уравнения вращения симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки в осях, не связанных с телом .....	213
16.6. Регулярная прецессия симметричного тела .....	214
16.7. Уравнения движения гироскопа на подвижном основании .....	216
16.8. Гироскоп (датчик угловых скоростей) .....	219
16.9. Гироскопы Фуко .....	221
<b>17. Теорема об изменении кинетической энергии .....</b>	<b>225</b>
17.1. Работа силы. Мощность .....	225
17.2. Примеры вычисления работы силы .....	226
17.3. Кинетическая энергия системы материальных точек .....	230
17.4. Кинетическая энергия твердого тела при вращательном движении вокруг неподвижной оси, точки и в общем случае движения .....	232
17.5. Теорема об изменении кинетической энергии .....	235
<b>18. Теория потенциального силового поля .....</b>	<b>240</b>
18.1. Понятие о силовом поле .....	240
18.2. Необходимые и достаточные условия независимости работы сил поля от формы траектории.....	241
18.3. Теорема об изменении механической энергии .....	245

<b>19. Принцип Даламбера</b> .....	249
19.1. Основные определения. Связь принципа Даламбера с теоремой об изменении количества движения и момента количества движения ....	249
19.2. Уравнения плоско-параллельного движения твердого тела .....	251

## ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

<b>20. Принцип виртуальных перемещений Лагранжа и принцип Лагранжа–Даламбера</b> .....	254
20.1. Классификация связей .....	254
20.2. Виртуальные (возможные) перемещения системы .....	256
20.3. Идеальные связи .....	258
20.4. Принцип виртуальных перемещений .....	259
20.5. Применение принципа виртуальных перемещений .....	262
20.6. Принцип Даламбера–Лагранжа. Общее уравнение динамики .....	268
20.7. Обобщенные координаты. Тождества Лагранжа .....	268
20.8. Принцип виртуальных перемещений в обобщенных координатах .....	270
20.9. Примеры вычисления обобщенных сил .....	271
<b>21. Дифференциальные уравнения произвольной несвободной системы материальных точек</b> .....	273
21.1. Уравнения Лагранжа первого рода .....	273
21.2. Уравнения Лагранжа второго рода .....	277
21.3. Построение математической модели сложной механической системы с одной степенью свободы .....	284
21.4. Свободные колебания при гистерезисном (конструкционном) рассеянии энергии .....	287
21.5. Дифференциальные уравнения малых колебаний произвольной системы твердых тел, соединенных упругими связями.....	289
21.6. Динамическое гашение колебаний .....	296
21.7. Построение математической модели сложной механической системы .....	300
21.8. Анализ выражения кинетической энергии для нестационарной голономной системы .....	305
21.9. Диссипативная функция для сил сопротивления общего вида .....	308
21.10. Уравнения Лагранжа второго рода для системы, находящейся под действием потенциальных сил. Интеграл энергии. Гироскопические силы .....	311
21.11. Уравнения Лагранжа второго рода, разрешенные относительно старших производных .....	316
21.12. Циклические координаты .....	318
21.13. Функция Рауса .....	320

21.14. Уравнения движения неголономной системы в обобщенных координатах с множителями .....	322
21.15. Дифференциальные уравнения Аппеля .....	329
21.16. Уравнения Аппеля в квазискоростях .....	335
<b>22. Канонические уравнения и теорема Якоби .....</b>	<b>343</b>
22.1. Центральное уравнение Лагранжа .....	343
22.2. Преобразование центрального уравнения Лагранжа .....	343
22.3. Преобразование Лежандра .....	345
22.4. Канонические уравнения движения .....	348
22.5. Метод Якоби .....	354
22.6. Скобки Пуассона и скобки Лагранжа .....	362
22.7. Теорема Пуассона .....	365
22.8. Канонические преобразования .....	367
22.9. Производящие функции .....	369
22.10. Инвариантность канонических переменных .....	371
22.11. Теория возмущений. Метод вариации постоянных .....	372
22.12. Канонические уравнения возмущенного движения .....	375
<b>23. Принцип Гамильтона–Остроградского .....</b>	<b>377</b>
23.1. Действие по Гамильтону .....	377
23.2. Принцип Гамильтона–Остроградского .....	378
<b>Список рекомендуемой литературы.....</b>	<b>388</b>

## ВВЕДЕНИЕ

### Предмет теоретической механики

Как известно, все физические тела (твердые тела, жидкости и газы, молекулы и элементарные частицы) состоят из вещества. Элементарные частицы, а также микроскопические тела, которые состоят из элементарных частиц, взаимодействуют посредством физических полей. Вещество и поле являются объективной реальностью и образуют материальный мир, который нас окружает.

*Механикой называется наука о простейших формах движения вещества и поля, которые сводятся в конечном итоге к пространственным перемещениям физических тел из одного положения в другое.*

Теоретическая механика изучает наиболее общие законы механического движения.

При этом следует помнить, что существуют другие формы движения материи, которые не могут быть сведены к изменениям места в пространстве, а являются ее качественными изменениями, например, переход вещества в поле и рождение элементарных частиц из поля.

Движение вещества подчиняется законам квантовой механики, а при больших скоростях следует учитывать изменения, связанные с теорией относительности. Таким образом, законы классической механики вообще не имеют области применения, поэтому спрашивается, зачем же изучать классическую механику?

Однако, хотя и нет ни одного явления, точно описываемого классической механикой, есть обширные области, описываемые ею в очень хорошем приближении.

Кроме того, в классической механике были развиты общие математические методы, составляющие предмет аналитической механики, которые оказались настолько совершенными, что по их образцу строятся сейчас многие физические теории.

Со времен Ньютона и до конца XIX столетия механика рассматривалась как единственная основа физики. Понять и объяснить физическое явление означало построить его механическую модель, понимаемую в буквальном смысле, как некоторую механическую конструкцию из предметов, подчиняющихся законам классической механики. Например, для объяснения распространения световых волн была придумана упругая среда – «эфир», в котором световые колебания распространились бы как звук в твердых телах.

Создатель электродинамики Максвелл потратил много сил на попытки надделить эту среду такими свойствами, чтобы они описывались его уравнениями. В конце концов, физикам пришлось примириться с фактом существования явлений, которые принципиально не сводились к явлениям механическим.

Однако вместо реальных механических моделей стали использоваться математические, от которых требовалось не конструктивное подобие, а аналогия

в математическом описании. При этом для построения таких моделей по-прежнему используются механистические уравнения.

Основные понятия теоретической механики возникли в результате обобщения многочисленных наблюдений над явлениями природы с последующим абстрагированием от конкретных особенностей того или иного явления. К числу таких абстракций относятся понятия *материальной точки* и *абсолютно твердого тела*.

Понятие о материальной точке возникло при рассмотрении движений физических тел конечных размеров.

Если движения отдельных точек тела одинаковы или различиями этих движений можно пренебречь, то движение такого тела сводится к движению материальной точки.

Таким образом, за материальную точку в теоретической механике принимают не только мельчайшие частицы тела, но и тела весьма больших размеров, если размеры тела не играют существенной роли в данном исследовании.

Например, изучая движение планет вокруг Солнца, можно пренебречь различием движения из отдельных точек по отношению к Солнцу и считать их материальными точками. Однако, изучая движение искусственного спутника Земли, следует принимать во внимание ее размеры, а иногда и особенности рельефа поверхности.

Итак, *материальной точкой* называется тело, размерами которого в условиях данной задачи механики можно пренебречь.

Другим важным понятием механики является понятие о системе материальных точек.

*Системой материальных точек* называется совокупность материальных точек, положения и движения которых взаимосвязаны между собой.

Каждое материальное тело можно рассматривать как систему материальных точек, если мысленно разделить его на достаточно малые частицы.

Все реальные физические тела под влиянием внешних воздействий деформируются.

Однако для обеспечения прочности и надежности машин и сооружений подбирают материал и размеры их частей так, чтобы их деформации при данных нагрузках были достаточно малыми. Поэтому в ряде случаев этими малыми деформациями можно пренебречь и считать расстояние между частицами тела неизменными.

Таким образом, мы приходим к понятию *абсолютно твердого тела*.

*Абсолютно твердым* называется тело, расстояние между любыми двумя точками которого всегда остается неизменным.

И хотя в природе не существует ни материальных точек, ни абсолютно твердых тел, законы, установленные в теоретической механике, как и другие законы естествознания, объективно отражают реальную действительность, причем факты, найденные в теоретической механике, отражают наиболее общие закономерности механических движений.

На основе законов, установленных в теоретической механике, изучается механика деформируемых тел: *теория упругости и пластичности, гидроаэродинамика*.

На теоретической механике основаны такие прикладные дисциплины, как *сопротивление материалов, теория механизмов и машин, строительная механика*.

Теоретическая механика является научной базой многих разделов современной техники. На ее основе решаются закономерности динамических явлений в системах автоматического регулирования, вопросы устойчивости движения механических систем.

В основе теоретической механики лежат законы Ньютона и система аксиом.

Законы и аксиомы механики были пересмотрены в связи с развитием теории относительности. Тогда были уточнены и углублены такие понятия механики, как масса и энергия, пространство и время. Оказалось, что классическая механика, основанная на законах Ньютона, является первым приближением к релятивистской механике и что ее следует рассматривать как механику малых скоростей.

Для классической механики характерно представление об абсолютном пространстве и времени. Это означает, что расстояние между телами и промежутки времени не зависят от движения системы отсчета, в которой они рассматриваются.

Непосредственный опыт показывает, что наше пространство трехмерно.

Дальнейшее обобщение опытных фактов, связанных с пространственными изменениями, приводит нас к выводу, что оно евклидово и, следовательно, однородно и изотропно.

Именно поэтому Исаак Ньютон определил геометрические свойства пространства системой аксиом и теорем евклидовой геометрии, введя понятие об абсолютном пространстве и времени.

Такое определение пространства, как неподвижного, тождественно предположению существования абсолютно неподвижной системы координат.

В качестве такой системы Ньютон принимал гелиоцентрическую систему, начало координат, которой находится в центре Солнца, а оси направлены к трем «неподвижным» звездам.

Введенная Ньютоном система координат называется *инерциальной*.

Однако можно принять как опытный факт, что существует сколько угодно инерциальных систем, в которых пространство и время однородно и изотропно. То есть все инерциальные системы, движущиеся прямолинейно и равномерно относительно абсолютно неподвижной, совершенно эквивалентны по своим механическим свойствам.

Это утверждение составляет суть принципа относительности Галилея. При этом переход от одной системы к другой осуществляется согласно формулам:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t';$$

$$t = t',$$



где  $\vec{r}$  и  $\vec{r}'$  радиусы – векторы точек;  $\vec{v} = const$  – скорость относительного движения системы со штриховыми обозначениями относительно системы, в обозначениях которой штрихи отсутствуют. Время в обеих системах течет одинаково, а координаты точек связаны линейными соотношениями. При этом оказывается, что преимущественную систему отсчета нельзя выявить при помощи чисто механических опытов, то есть абсолютное пространство Ньютона в механическом смысле не наблюдаемо.

Очевидно, временные и пространственные сдвиги, а также повороты пространственных осей ведут к новой инерциальной системе. Поэтому подобные преобразования можно причислить к числу *галилеевых преобразований*.

К числу основных понятий механики относится понятие *механической силы*.

*Сила есть мера взаимодействия между телами*. Сила характеризуется величиной, направлением и точкой приложения. Следовательно, это векторная величина.

Теоретическую механику принято делить на *статику*, *кинематику* и *динамику*.

*В статике* изучаются методы эквивалентного преобразования сил, приложенных к материальной точке или абсолютно твердому телу, а также условия равновесия.

*Кинематикой* называется раздел теоретической механики, в котором изучается механическое движение без учета действующих сил.

Изучением движения материальной точки, системы материальных точек твердого тела и системы твердых тел с учетом действующих сил занимается *динамика*.

### Краткий исторический очерк

Термин «механика» был введен великим философом древности **Аристотелем** (384–322 гг. до н. э.). Происходит он от греческого слова «механе», что означает «ухищрение», «машина».

Вообще механика наряду с математикой и астрономией является одной из самых древних наук.

Египетские пирамиды, сооруженные более трех тысяч лет до новой эры, остатки еще более древних сооружений Индии и Китая свидетельствуют о том, что в глубокой древности применялись катки, рычаги, блоки, облегчающие поднятие тяжестей.

Однако моментом возникновения механики следует считать появление первые сочинений, теоретически обобщивших накопленный опыт. Поэтому основоположником механики следует считать величайшего ученого Древней Греции **Архимеда** (287–212 гг. до н. э.).

Архимед дал решение задачи о рычаге, открыл закон о давлении жидкости на погруженное в нее тело, носящий его имя, дал определение центра тяжести. Им были разработаны методы определения площадей и объемов.

Метательные машины, изобретенные Архимедом, позволяют предполагать, что он имел четкие понятия о динамике материальных тел.

Научные труды Аристотеля содержат законченный взгляд на мир и представляли собой энциклопедию античной мысли.

Именно этим, несмотря на ошибочность многих его взглядов, по-видимому, объясняется столь сильное воздействие его трудов на научную мысль Европы вплоть до эпохи Возрождения.

Приведем лишь некоторые взгляды Аристотеля, из-за которых было бы ошибочно считать его основателем механики как науки.

Например, он писал:

«Падение куска золота или свинца или любого другого тела, наделенного весом, происходит тем быстрее, чем больше его вес...».

Аристотель приводит такие примеры: лошадь непрерывно напрягается, чтобы тянуть повозку, камень опускается на дно озера. Поэтому он делает вывод, что тяжелые предметы падают быстрее, чем легкие. Чтобы повозка двигалась, необходимо прикладывать усилия. То есть Аристотель никогда не рассматривал то, что мы называем силами трения или сопротивления, как силы, отдельные от движения.

Это отделение было осуществлено **Галилео Галилеем** (1564–1642), благодаря которому возникло понятие инерции и начали складываться современные взгляды на движение тел.

Интенсивное развитие механики относится к XV–XVII столетиям, когда общественная практика (торговое мореплавание, военное дело и промышленность) поставила перед учеными ряд проблем, связанных с движением небесных тел, полетом артиллерийских снарядов, прочностью корабля, машин и строительных сооружений.

Усовершенствование техники определения географических координат с помощью астрономических наблюдений потребовало пересмотра теории движения небесных тел и привело к открытию гелиоцентрической системы мира **Н. Коперником** (1473–1543).

Система Коперника была чисто кинематической. Законы динамики присутствовали в ней в скрытом виде.

До Коперника общепризнанной была геоцентрическая система мира **Птолемея** (II в.), несмотря на то, что еще древние греки располагали фактами в пользу гелиоцентрической системы мира. Однако греческие астрономы отвергали гелиоцентрическую систему, так как для большинства греческих философов, в том числе и Аристотеля, Земля – обитель человечества – была наиболее важным объектом во Вселенной и было немислимо, чтобы этот центр Вселенной имел какое-то движение.

Следующим шагом было открытие **Иоганном Кеплером** (1571–1630) законов движения планет. Он установил, что орбиты планет представляют собой не окружности, а эллипсы с небольшим эксцентриситетом.

Законы, открытые Кеплером, позволили Ньютону обосновать закон всемирного тяготения.

Галилей впервые исследовал динамическое действие сил на движущееся тело и поэтому по праву является основоположником динамики.

Галилеем были проделаны наиболее точные для своего времени опыты по изучению свободного падения тел. В результате этих экспериментов он установил пропорциональность пройденного пути при падении квадрату времени, что означало независимость ускорения в пустоте от веса тела. Галилей доказал, что траекторией движения тела, брошенного в пустоте под углом к горизонту, является парабола. Галилей заложил также основы современной кинематики. Однако наиболее важным открытием Галилея является открытие закона инерции, после чего началось формирование современных взглядов на механическое движение.

Среди выдающихся ученых XVII в. следует отметить французского философа **Рене Декарта** (1596–1650), который сформулировал идею сохранения механического движения.

Замечательный исследователь **Христиан Гюйгенс** (1629–1695) обобщил понятие ускорения, введенного Галилеем, на случай криволинейного движения и впервые осуществил разложение ускорения на касательную и нормальную составляющие. Гюйгенс создал теорию математического и физического маятников. Гюйгенс использовал понятие об осевых моментах инерции, а также кинетической энергии, но не пользовался этими терминами.

**Исаак Ньютон** (1643–1727) в своем труде «Математические начала натуральной философии» (1687) подвел итог достижениям своих предшественников и сформулировал три основных закона механики, наметил пути дальнейшего развития механики. Ньютон ввел понятие массы и впервые обратил внимание на эквивалентность инертной и тяготеющих масс, проводя опыты над качающимися маятниками, выполненными из различных материалов.

Блестящие результаты дало применение закона всемирного тяготения, открытого Ньютоном, к решению астрономических задач. Так, например, и были открыты Нептун в XIX в. и Плутон в XX в., которые ранее в телескоп не наблюдались ввиду малой светимости, и были обнаружены лишь тогда, когда было предсказано их местоположение на небесной сфере.

Одним из выдающихся современников Ньютона был немецкий философ и математик **Готфрид Лейбниц** (1646–1716). Лейбниц одновременно с Ньютоном открыл исчисление бесконечно малых.

В области механики Лейбницу принадлежит установление понятия о «живой силе». В связи с этим возникла дискуссия между сторонниками Лейбница и Декарта о мерах движения. Декарт под мерой движения понимал «количество движения», равное по величине произведению массы точки на ее скорость. Лейбниц противопоставлял ей «живую силу», пропорциональную массе и квадрату скорости движения. Эта дискуссия была прекращена Даламбером, показавшим непротиворечивость обоих мер движения.

**Леонарду Эйлеру** (1707–1783) принадлежат выдающиеся заслуги в развитии механики в посленьютоновский период, Л. Эйлер был членом Российской Академии наук с 1727 г. Эйлер является основоположником динамики твердого

тела и гидромеханики, ему принадлежит общепризнанный метод кинематического описания движения твердого тела, имеющего неподвижную точку, с помощью трех углов, носящих его имя. Эйлером также была получена формула для скоростей точек тела, вращающегося вокруг неподвижной точки. Им была сформулирована и доказана теорема об изменении момента количества движения. Он заложил основы теории корабля, турбин, теорию устойчивости упругих стержней.

Современник Эйлера **Михаил Васильевич Ломоносов** (1711–1765) открыл закон сохранения вещества. Он создал кинетическую теорию газов и распространения тепла. Им был сформулирован закон сохранения количества движения.

Значительный вклад в динамику несвободных систем был сделан выдающимся французским ученым **Жаном Лероном Даламбером** (1717–1783), которому принадлежит формулировка принципа механики, носящего его имя. Однако Даламбер не располагал общими аналитическими методами решения задач динамики несвободных систем.

Общие аналитические решения задач динамики несвободных систем были разработаны **Ж.-Л. Лагранжем** (1736–1813) в его основополагающей работе «Аналитическая механика» (1788). За основу был взят принцип Лагранжа–Даламбера, являющийся синтезом принципа виртуальных перемещений Лагранжа и принципа Даламбера.

Механика XIX века связана с именами **Михаила Васильевича Остроградского** (1801–1861), **Уильяма Гамильтона** (1805–1865), **Карла Якоби** (1804–1851), **Карла Фридриха Гаусса** (1777–1855).

В частности, важное значение в механике имеет вариационный принцип Гамильтона–Остроградского.

Для построения общей теории интегрирования дифференциальных уравнений динамики предпочтительнее иметь дело с уравнениями первого порядка с их так называемой «канонической формой». В 1842 г. Якоби в «Лекциях по динамике» изложил метод интегрирования канонических уравнений.

Основополагающий вклад в кинематику механизмов был проделан выдающимся математиком и механиком **Пафнутием Львовичем Чебышевым** (1821–1894).

Его ученик **Александр Михайлович Ляпунов** (1857–1918) получил всемирную известность благодаря трудам по устойчивости и движения. Ляпунову принадлежит строгая постановка задачи об устойчивости движения и наиболее общих методов ее решения.

Выдающуюся роль в механике сыграл **Николай Егорович Жуковский** (1847–1921). Он является основоположником современной гидродинамики и аэродинамики. Жуковский теоретически обосновал возможность сложных движений самолета.

Ряд исследований Жуковского относится к вопросам теории устойчивости движений, динамике твердого тела, вопросам аэродинамического расчета самолетов.

Ученик Жуковского **Сергей Александрович Чаплыгин** (1869–1942) стал основоположником газовой динамики больших скоростей. Его работы по теории крыла и газовой динамике значительно опередили время, получив широкое применение лишь в 50-х годах XX столетия.

Большой вклад в механику внес кораблестроитель **Алексей Николаевич Крылов** (1863–1945), известный своими трудами в области теории качки корабля, прочности его корпуса, теории плавучести и непотопляемости.

Задачи динамики твердого тела всегда играли значительную роль в механике. Здесь следует упомянуть **Софью Васильевну Ковалевскую** (1850–1891). Ее работа является наиболее значительной в цепи преемственности трудов, начиная с Эйлера и Лагранжа. Более того, оказалось, как это было доказано Ляпуновым, что случаи Эйлера, Лагранжа и Ковалевской являются единственными, в которых уравнения вращений твердого тела допускают однозначные интегралы при всех значениях аргумента и начальных условиях.

Наиболее крупные результаты по теории устойчивости после А. М. Ляпунова получены **Н. Г. Четаевым** (1902–1959). Теория колебаний, линейных и нелинейных, получили существенное развитие в трудах **А. Н. Крылова** (1863–1945), **Н. М. Крылова** (1879–1955), **Н. Н. Боголюбова** (1909–1992), **Л. Н. Мандельштама** (1879–1944), **А. А. Андропова** (1901–1952), **Б. В. Булгакова** (1900–1952), **Ю. А. Митропольского** (1917–2008).

Значительный вклад в теорию устойчивости движения и ряд достижений в области линейной и нелинейной теории упругости принадлежит **А. И. Лурье** (1901–1979). **Л. Г. Лойцанский** (1900–1995) внес значительный вклад в гидродинамику.

На рубеже XIX и XX веков возник и начал интенсивно развиваться новый раздел теоретической механики – динамика *неголономных систем*. Основоположниками этого раздела являются **С. А. Чаплыгин**, **В. Вольтерра** (1860–1940), **П. Аппель** (1855–1930), **П. В. Воронеж** (1871–1923), **Л. Больцман** (1844–1906) и **Г. Грамель** (1877–1954).

Основоположником механики тел переменной массы является **И. В. Мещерский** (1859–1935).

**К. Э. Циолковский** (1857–1935) создал основы теории реактивного движения и реактивной техники.

В XX веке появилась релятивистская механика **А. Эйнштейна** (1879–1955).

В настоящее время интенсивное развитие получила механика космического полета.

## СТАТИКА

### 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ СТАТИКИ

#### 1.1. Некоторые основные определения

Одним из основных понятий механики является понятие о силе. *Сила является количественной мерой механического взаимодействия и характеризует интенсивность и направление этого взаимодействия.*

Таким образом, сила является векторной величиной. В качестве примеров сил можно назвать силу притяжения к Земле, всевозможные контактные силы, например, давление на опоры сооружения, силы, возникающие из-за сопротивления среды.

*Статикой* называют раздел механики, в котором изучают эквивалентные преобразования систем сил, приложенных к твердому телу, и условия их равновесия.

Статика основана на ряде законов и аксиом, которые считаются очевидными истинами и принимаются без математических доказательств.

Эти законы и аксиомы являются результатом обобщения многочисленных опытных данных. И хотя их проверка не всегда может быть осуществлена непосредственно, следствия, которые из них вытекают, подтверждаются наблюдениями.

К числу общих законов механики, на которых основана статика, относится *закон инерции*, открытый Галилеем, – первый закон Ньютона.

Закон утверждает, что *всякое тело должно находиться в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока это состояние не будет изменено действующими на тело силами.*

Ньютон, формулируя закон инерции, ничего не говорил о размерах тела, полагая, что под телом следует понимать материальную точку.

Другим основным законом механики, на котором основана статика, является *закон о равенстве действия и противодействия* – третий закон Ньютона.

*Силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине и противоположны по направлению и действуют по одной прямой.*

Система сил, действующих на материальную точку, считается уравновешенной, если материальная точка движется равномерно и прямолинейно или находится в состоянии покоя.

*Система материальных точек находится в равновесии, если каждая ее материальная точка находится в равновесии.*

Система сил, приложенных к твердому телу, находится в равновесии, если она своим действием не изменяет состояние покоя или движения этого тела по инерции.

*Две системы сил, действующих на абсолютно твердое тело, называются эквивалентными, если каждая из них порознь уравновешивает одну и ту же третью систему сил.*

*Равнодействующей данной системы сил называется сила, эквивалентная этой системе сил.*

*Уравновешивающей называется сила, добавление которой к исходной системе сил образует уравновешенную систему сил.*

Следует заметить, что не всякая система сил имеет равнодействующую, то есть неуравновешенные системы сил не всегда эквивалентны одной силе.

## 1.2. Аксиомы статики

### *Аксиома о равновесии двух сил*

При формулировке этой аксиомы считаем, что материальные точки или твердые тела, к которым приложены силы, являются свободными, то есть имеют возможность совершать любые перемещения в пространстве.

Суть аксиомы о двух силах в следующем.

*Две силы, приложенные к одной точке твердого тела или к отдельной материальной точке, находятся в равновесии только тогда, когда они равны по величине, направлены в противоположные стороны и действуют по одной прямой.*

Эта аксиома устанавливает простейшую систему сил, эквивалентную нулю. Аксиома справедлива, если силы приложены к одной точке твердого тела или к отдельной материальной точке.

### *Аксиома о параллелограмме сил*

*Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке под углом друг к другу, определяется диагональю параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах (рис. 1.1).*

Справедливо и обратное утверждение.

*Силу можно разложить по правилу параллелограмма на две составляющие, по любым произвольно выбранным направлениям. Замену двух сил одной по правилу параллелограмма называют векторным сложением:*

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 . \quad (1.2.1)$$

Вместо параллелограмма можно построить треугольник (рис. 1.2).

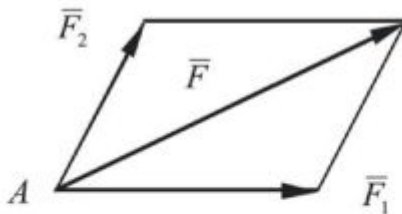


Рис. 1.1

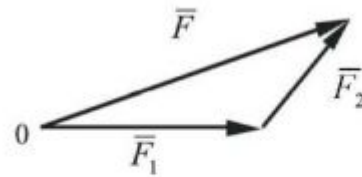


Рис. 1.2

То есть из конца первой силы  $\vec{F}_1$  проводится вторая  $\vec{F}_2$ . Замыкающая оказывается равнодействующей.

На основании аксиомы о параллелограмме можно определить равнодействующую пучка сил, приложенных в одной точке (рис. 1.3) или построить многоугольник сил (рис. 1.4).

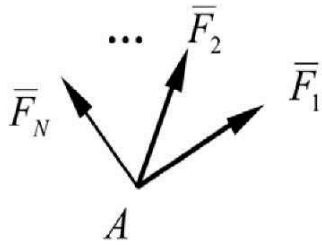


Рис. 1.3

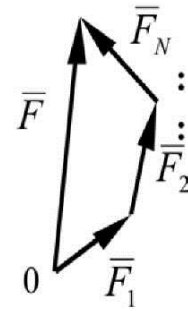


Рис. 1.4

При этом 
$$\bar{F} = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i.$$

**Аксиома об освобождаемости от связей**

*Если на движение материальной точки, системы или твердого тела не наложены наперед заданные ограничения, то материальная точка, система или твердое тело называются свободными.*

*В противном случае материальная точка, система или твердое тело называются несвободными.*

*Ограничения на свободу перемещений, указанных материальных объектов, называются связями.*

Связи осуществляются различными твердыми или гибкими телами. Это может быть, например, гладкая или шероховатая поверхность. И, если точка принудительно удерживается на данной поверхности, то это накладывает ограничения на ее перемещения. Следовательно, на точку наложена связь.

Сила, с которой связь действует на рассматриваемую точку, систему или твердое тело, называется **реакцией связи**.

По третьему закону Ньютона реакция связи равна по величине и противоположна по направлению силе, с которой тело действует на связь. Реакция связи исчезает, если прекращается действие тела на связь.

В дальнейшем мы часто будем говорить «**механическая система**», подразумевая под этим термином точку, систему материальных точек, твердое тело, а в некоторых случаях систему твердых тел в сочетании с отдельными материальными точками.

Третья аксиома – **аксиома об освобождаемости от связей** заключается в следующем:

*Не изменяя движения или равновесия механической системы, можно отбросить наложенные на нее связи, заменяя их действие силами, равными реакциям отброшенных связей.*

Из этой аксиомы следует, что всякую несвободную механическую систему можно рассматривать как свободную, если освободить ее от связей, заменяя их действие реакциями. Таким образом, эта аксиома позволяет решать задачи о движении или равновесии несвободной механической системы, сводя ее к решению задач о движении или равновесии соответствующих свободных объектов, составляющих механическую систему.



### Аксиома о наложении новых связей

Суть этой аксиомы в том, что *равновесие механической системы не нарушится при наложении на нее новых связей.*

### Аксиома о затвердевании

Эта аксиома по существу является частным случаем предыдущей. Ее суть в том, что *если деформируемое тело находится в равновесии, то это равновесие не нарушится, если тело превратится в абсолютно твердое, то есть затвердеет.*

### 1.3. Связи и их реакции

Для установления характера реакций связей обратимся к конкретным физическим телам. Рассмотрим связь в виде идеально гладкой поверхности. Эта поверхность не препятствует скольжению по ней тела, а препятствует его движению по нормали к поверхности. Поэтому реакция идеально гладкой поверхности направлена по нормали к ней (рис. 1.5, а, б).

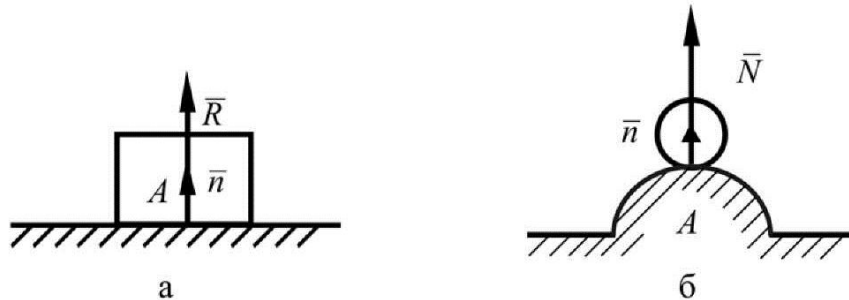


Рис. 1.5

На рис. 1.5,б показан контакт двух тел, ограниченных гладкими поверхностями. Реакция  $\bar{N}$  направлена по общей нормали  $\bar{n}$  к контактирующим поверхностям. Если поверхность тела или поверхность связи в месте их касания имеют заострение, то реакцию направляют по нормали к той поверхности, для которой направление нормали является определенным.

Например, если гладкий брус АВ опирается в точке А на гладкий столб, то реакция  $\bar{N}$  в этой точке направлена перпендикулярно брусу АВ (рис. 1.6).

Напротив, в точке В реакция направлена перпендикулярно опорной плоскости.

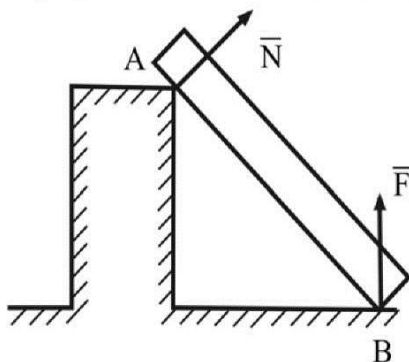


Рис. 1.6

Весьма распространенным видом связи является стержень. Крепят стержень при помощи точечных шарниров. При решении задач стержни считаются идеальными, то есть считаются нерастяжимыми, размерами шарниров пренебрегают, а силы трения не учитывают.

Реакция  $\bar{S}$  в идеальном стержне АВ направлена по оси стержня (рис. 1.7). Такой стержень находится

в равновесии под действием двух сил, приложенных к шарнирам. На основании первой аксиомы эти силы должны быть равны по величине, противоположны по направлению и действовать по одной прямой, соединяющей шарниры. Итак, если связью является идеальный стержень, то линию действия его реакции можно указать сразу: она совпадает с осью стержня.

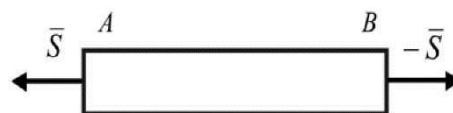


Рис. 1.7

В качестве опор различного рода сооружений часто используют шарнирно-подвижные опоры (рис. 1.8) и шарнирно-неподвижные опоры (рис. 1.9).

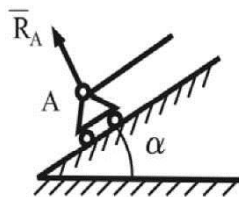


Рис. 1.8

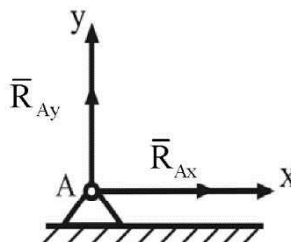


Рис. 1.9

Реакция идеальной шарнирно-подвижной опоры направлена перпендикулярно опорной плоскости (см. рис. 1.8). Если опора неподвижна (см. рис. 1.9), то заранее направление реакции указать нельзя. Поэтому показывают две составляющие  $\bar{R}_{Ax}$  и  $\bar{R}_{Ay}$ .

#### 1.4. Методические указания по решению задач статики

Как было отмечено, силы, действующие в данной механической системе, можно разделить на внешние и внутренние.

**Внешними называются силы взаимодействия между телами, не входящими в данную систему.**

**Внутренними называются силы взаимодействия между точками данной системы.**

Это деление является условным, так как внутренние силы можно перевести в разряд внешних по отношению к новой системе, представляющей составную часть данной.

Таким образом, отбрасывая связи, наложенные на систему, мы переводим реакции в число внешних сил. Затем составляются условия равновесия свободной материальной точки, или свободного твердого тела, из которых находят неизвестные реакции.

Вообще существует единая методика решения задач статики. Суть ее в следующем:

1. Выделяется тело, равновесие которого рассматривается.
2. Объект освобождается от связей.
3. Выписываются условия равновесия, где неизвестными являются реакции связей.

Если число неизвестных больше числа уравнений, то задача статически неопределима и требуется рассмотрение деформаций тела.

## 2. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

### 2.1. Теорема о переносе силы по линии ее действия

Прежде чем рассмотреть произвольную систему сходящихся сил, рассмотрим теорему, которая позволяет преобразовать эту систему к простейшему виду, а именно, к одной силе – равнодействующей.

Таковой теоремой является одна из простейших теорем статики – теорема о переносе силы вдоль линии ее действия.

Пусть на тело действует сила  $\vec{F}$  в точке А (рис. 2.1, а).

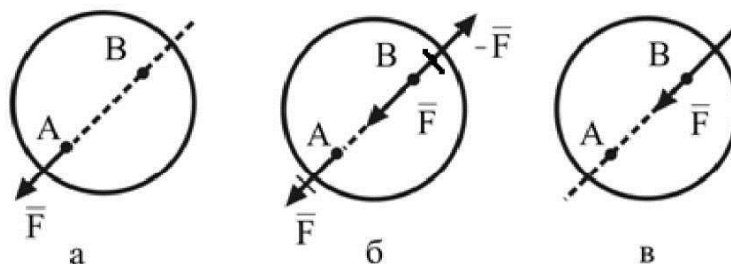


Рис. 2.1

Выберем на линии действия силы точку В и приложим в ней две равные, но противоположно направленные силы  $\vec{F}$  и  $-\vec{F}$  (рис. 2.1, б). Сила  $\vec{F}$ , приложенная в точке А, уравнивается на основании аксиомы о двух силах силой  $-\vec{F}$ , приложенной в точке В. Следовательно, получаем силу  $\vec{F}$ , приложенную в точке В (рис. 2.1, в), что и требовалось доказать.

Таким образом, сила, приложенная к абсолютно твердому телу, является скользящим вектором.

### 2.2. Теорема о трех силах

Три непараллельные силы, действующие на абсолютно твердое тело, лежащие в одной плоскости и находящиеся в равновесии, пересекаются в одной точке.

Пусть к твердому телу в точках А, В и С приложены три силы  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ , лежащие в одной плоскости (рис. 2.2). На основании теоремы о переносе силы вдоль линии действия, перенесем силы  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_3$  в точку пересечения и сложим по правилу параллелограмма.

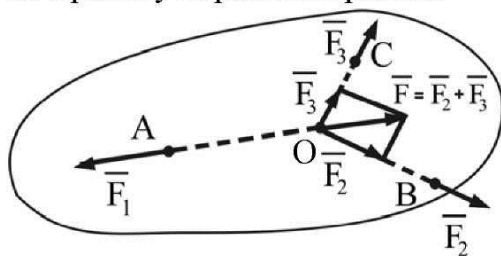


Рис. 2.2

Равнодействующая этих сил  $\vec{F} = \vec{F}_2 + \vec{F}_3$  и сила  $\vec{F}_1$  образуют уравновешенную систему сил. Следовательно, согласно аксиоме о двух силах,  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}$  равны по величине, противоположно направлены и имеют общую линию действия. Таким образом, все три силы пересекаются в одной точке.

### 2.3. Система сходящихся сил. Нахождение ее равнодействующей. Условия равновесия

Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется *системой сходящихся сил* (рис. 2.3).

Расположим в точке пересечения сил начало декартовой системы координат  $Oxyz$ . Затем перенесем все силы по линии действия в точку  $O$ . В результате получим пучок сходящихся сил. Применяя последовательно правило параллелограмма или, построив многоугольник сил, получим равнодействующую системы сходящихся сил:

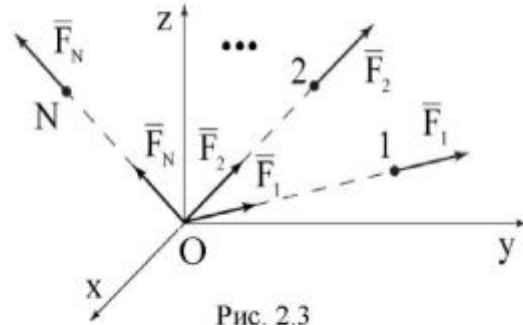


Рис. 2.3

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (2.3.1)$$

Векторному равенству (2.3.1) соответствуют три скалярных.

Действительно, мы можем разложить силы по координатным осям:

$$\vec{F}_i = F_{xi} \vec{i} + F_{yi} \vec{j} + F_{zi} \vec{k};$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}.$$

Следовательно,

$$F_x = \sum_{i=1}^N F_{xi}; \quad F_y = \sum_{i=1}^N F_{yi}; \quad F_z = \sum_{i=1}^N F_{zi}. \quad (2.3.2)$$

Зная проекции равнодействующей (2.3.2) на оси координат, определим ее модуль и направление.

Модуль найдется по формуле

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \quad (2.3.3)$$

Направление равнодействующей определим по направляющим косинусам:

$$\cos(\vec{F}, x) = \frac{F_x}{F}; \quad \cos(\vec{F}, y) = \frac{F_y}{F}; \quad \cos(\vec{F}, z) = \frac{F_z}{F}. \quad (2.3.4)$$

Для нахождения проекций силы на координатные оси необходимо знать два угла, например, угол между силой и осью  $z$  и угол между проекцией силы на плоскость  $oxy$  и осью  $x$  (рис. 2.4).

Согласно рис. 2.4:

$$F_x = F \sin \alpha \cos \beta;$$

$$F_y = F \sin \alpha \sin \beta;$$

$$F_z = F \cos \alpha,$$

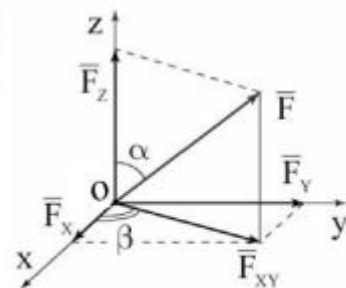


Рис. 2.4

где  $\alpha$  – угол между силой и осью  $z$ ,  $\beta$  – угол между проекцией силы  $F_{xy}$  на плоскость  $oxy$  и осью  $x$ .

Очевидно,

$$\cos(\bar{F}, x) = \sin \alpha \cos \beta;$$

$$\cos(\bar{F}, y) = \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\bar{F}, z) = \cos \alpha.$$

Условием равновесия системы сходящихся сил является условие равенства нулю ее равнодействующей:

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i = 0. \quad (2.3.5)$$

Равенство (2.3.5) означает, что многоугольник сил является замкнутым, то есть начало первого вектора силы и конец последнего совпадают. Поэтому вместо (2.3.5) можно написать

$$\sum_{i=1}^N F_{xi} = 0; \quad \sum_{i=1}^N F_{yi} = 0; \quad \sum_{i=1}^N F_{zi} = 0. \quad (2.3.6)$$

Условия (2.3.6) называются *условиями равновесия*.

В общем случае их три. Если имеет место плоская система сходящихся сил, то уравнений будет два.

Для статической определенности задачи число неизвестных не должно превышать число уравнений.

### 3. МОМЕНТ СИЛЫ

#### 3.1. Момент силы относительно точки

Момент силы характеризует ее вращающее действие.

*Моментом силы  $\vec{F}$  относительно некоторого центра  $O$  называется векторное произведение радиус-вектора точки приложения силы относительно центра  $O$  на силу  $\vec{F}$*  (рис. 3.1).

Момент силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$  (центра момента) обозначается  $\vec{M}_O(\vec{F})$ :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (3.1.1)$$

Следовательно, момент силы относительно точки – это вектор, направленный перпендикулярно к плоскости, содержащей силу  $\vec{F}$  и точку  $O$ , в ту часть пространства, из которой вращающее действие силы будет видно против часовой стрелки.

Опустим перпендикуляр из точки  $O$  на линию действия силы  $\vec{F}$ . Отрезок перпендикуляра, соединяющего точку  $O$  и линию действия силы  $\vec{F}$ , обозначим через  $h$ . Этот отрезок  $h$  в дальнейшем будем называть плечом. Модуль вектора момента (3.1.1)  $M_O(\vec{F})$  будет:

$$M_O(\vec{F}) = rF \sin \alpha = hF. \quad (3.1.2)$$

В формуле (3.1.2)  $\alpha$  – угол между радиус-вектором  $\vec{r}$  и силой  $\vec{F}$ .  
Очевидно,

$$M_O(\vec{F}) = 2nl\Delta OAB,$$

где  $nl\Delta OAB$  – площадь треугольника  $OAB$ , образованного радиусом вектором  $\vec{r}$  и силой  $\vec{F}$ .

Если в точке  $O$  расположить начало декартовой системы координат  $Oxyz$  (рис. 3.2), то проекции момента  $\vec{M}_O(\vec{F})$  найдутся из выражения:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \\ &= (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + \\ &+ (xF_y - yF_x)\vec{k}. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

В символическом определителе, входящем в формулу (3.1.3), первая строка составлена из координатных ортов  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , вторая строка – это проекции радиуса-вектора  $\vec{r}$ :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

третья составлена из проекций силы  $\vec{F}$ :

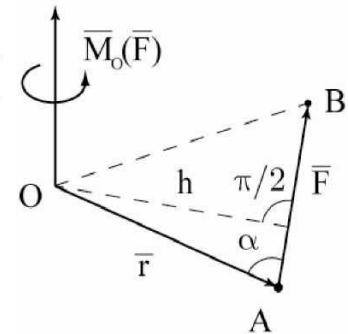


Рис. 3.1

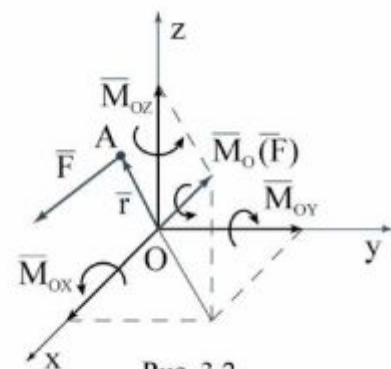


Рис. 3.2



$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}.$$

Таким образом, для проекций момента силы  $\vec{M}_0(\vec{F})$  на координатные оси  $x, y$  и  $z$  получаем формулы:

$$M_{0x} = yF_z - zF_y; \quad M_{0y} = zF_x - xF_z; \quad M_{0z} = xF_y - yF_x. \quad (3.1.4)$$

### 3.2. Теорема о моменте равнодействующей системы сходящихся сил

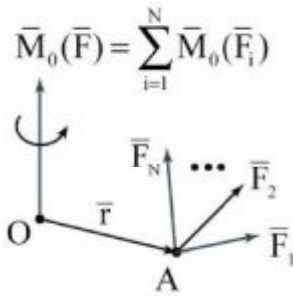


Рис. 3.3

*Момент равнодействующей системы сходящихся сил относительно произвольной точки равен векторной сумме моментов составляющих относительно этой точки* (рис. 3.3), то есть:

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \sum_{i=1}^N \vec{M}_0(\vec{F}_i), \quad (3.2.1)$$

где  $\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$  – равнодействующая системы сходящихся сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ .

Пучок сходящихся сил расположен в точке  $A$ . В качестве моментной точки выбираем некоторую точку  $O$ . Согласно определению момента силы относительно точки имеем:

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r} \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \vec{M}_0(\vec{F}_i),$$

что и доказывает равенство (3.2.1), представляющее собой математическое выражение теоремы о моменте равнодействующей системы сходящихся сил.

Применение теоремы о моменте системы сходящихся сил при решении задач статики часто существенно облегчает составление уравнений равновесия.

### 3.3. Момент силы относительно оси

*Моментом силы относительно оси называется проекция момента силы относительно произвольной точки, расположенной на оси, на эту ось.*

Возьмем в качестве моментной точки начало декартовой системы координат  $Oxyz$  – точку  $O$ .

Рассмотрим, например, проекцию момента  $\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$  на ось  $z$ :

$$M_{0z}(\vec{F}) = M_0(\vec{F}) \cos \alpha = xF_y - yF_x. \quad (3.3.1)$$

По определению формула (3.3.1) представляет собой момент силы относительно оси  $z$  (рис. 3.4). Кроме того, как видно, выражение (3.3.1) не зависит от положения моментной точки  $O$  на оси  $z$ . Естественно, это относится к остальным осям  $Ox$  и  $Oy$ .

С другой стороны, проекция  $\bar{M}_{Oz}(\bar{F})$  представляет собой момент проекции силы  $\bar{F}$  на плоскость  $Oxy$  относительно точки  $O$ .

Проекция силы  $\bar{F}$  на плоскость  $Oxy$  будет

$$\bar{F}_{xy} = F_x \bar{i} + F_y \bar{j} + O\bar{k}.$$

Радиус-вектор точки  $A_1$ , являющейся началом вектора  $\bar{F}_{xy}$ , по отношению к точке  $O$ :

$$\bar{r}_{xy} = x\bar{i} + y\bar{j} + O\bar{k}.$$

Тогда:

$$\bar{M}_0(\bar{F}_{xy}) = \bar{r}_{xy} \times \bar{F}_{xy} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = (xF_y + yF_x)\bar{k} = \bar{M}_{Oz}(\bar{F}) = \bar{M}_z(\bar{F}). \quad (3.3.2)$$

Очевидно, в выражении момента силы относительно координатной оси (3.3.2) можно опустить индекс, указывающий положение моментной точки на оси. Следовательно, моменты силы относительно координатных осей выражаются формулами:

$$M_x(\bar{F}) = yF_z - zF_y; \quad M_y(\bar{F}) = zF_x - xF_z; \quad M_z(\bar{F}) = xF_y - yF_x. \quad (3.3.3)$$

При вычислении моментов силы относительно координатных осей не обязательно пользоваться формулами (3.3.3). В некоторых случаях может быть полезен следующий прием.

Вначале проводим плоскость, перпендикулярную оси. Затем проектируем силу  $\bar{F}$  на эту плоскость и вычисляем момент проекции силы относительно точки пересечения оси с плоскостью. Момент считается положительным, если вращающее действие силы со стороны положительного направления соответствующей оси направлено против часовой стрелки.

В противном случае момент относительно оси считается отрицательным.

Очевидно, момент силы относительно оси обращается в нуль, если сила пересекает ось или параллельна оси. Иными словами, если сила и ось лежат в одной плоскости, то момент силы относительно оси равен нулю.

При аналитическом вычислении моментов силы относительно осей за центр моментов берем начало координат, так как точка одновременно принадлежит сразу всем трем осям. Поэтому проекции момента на оси совпадают с моментом силы относительно оси.

В заключение этого пункта рассмотрим понятие момента силы относительно оси, исходя из несколько других соображений. Рассмотрим силу  $\bar{F}$  с началом в точке  $A$ , координаты которой  $x, y, z > 0$ . Проекция силы на оси координат тоже удовлетворяют условию  $F_x, F_y, F_z > 0$  (рис. 3.5).

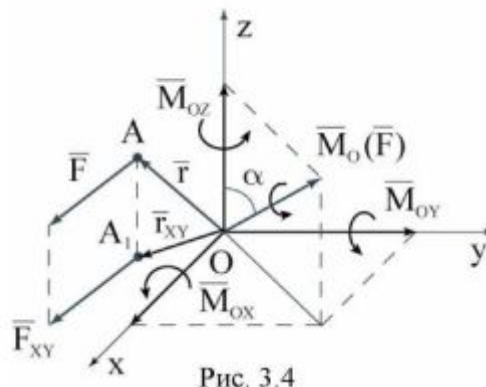


Рис. 3.4



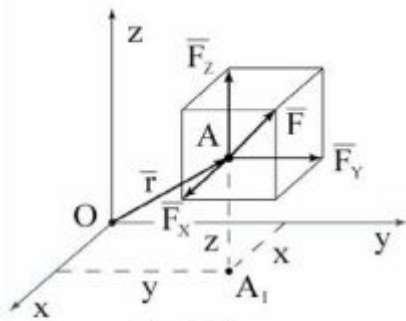


Рис. 3.5

Как было отмечено ранее, вращающее действие силы, параллельной оси, отсутствует. Тогда, находя момент сил  $F_x, F_y, F_z$  относительно координатных осей, получаем:

$$M_x = yF_z - zF_y;$$

$$M_y = zF_x - xF_z;$$

$$M_z = xF_y - yF_x,$$

то есть мы получили проекции векторного произведения (3.3.1) на оси координат.

### 3.4. Главный вектор и главный момент системы сил

В дальнейшем нам потребуются нижеприведенные определения, которые вводятся для удобства.

**Главным вектором  $\bar{F}$  системы сил  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_N$  называется векторная сумма этих сил:**

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i.$$

Понятия главного вектора и равнодействующей не тождественны. Если же система сил и приводится к равнодействующей, то она имеет вполне определенную линию действия, в то время как главный вектор, который равен по величине равнодействующей и имеет с ней одинаковое направление, является свободным вектором.

**Главным моментом  $\bar{M}_0$  системы сил  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_N$  относительно какого-либо центра  $O$  называется векторная сумма моментов этих сил относительно этого центра  $O$ :**

$$\bar{M}_0 = \sum_{i=1}^N \bar{M}_0(\bar{F}_i).$$

## 4. ТЕОРИЯ ПАР СИЛ

### 4.1. Пара сил

*Парой сил называется система двух параллельных сил, приложенных к твердому телу, равных по величине и направленных в противоположные стороны* (рис. 4.1).

Главный вектор пары равен нулю. Определим ее главный момент относительно некоторой точки  $O$ :

$$\bar{M}_O = \bar{r}_1 \times \bar{F} - \bar{r}_2 \times \bar{F} = (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \times \bar{F} = \bar{r}_{21} \times \bar{F} = \bar{M}. \quad (4.1.1)$$

Однако, как оказалось, главный момент пары не зависит от центра моментов. Следовательно, главный момент, или просто момент является свободным вектором, а это в свою очередь означает, что пару сил, действующую на твердое тело, можно переносить как угодно, сохраняя лишь величину и ориентацию ее момента. Момент пары перпендикулярен плоскости ее действия и направления в ту часть пространства, откуда ее вращательное действие видно против часовой стрелки.

Величина момента пары равна произведению силы на ее плечо (рис. 4.2):  $M = hF$ , где  $h$  – плечо пары, представляющее собой отрезок перпендикуляра, соединяющий линии действия сил, образующих пару.

Действительно,

$$M = |\bar{r}_{21} \times \bar{F}| = r_{21} F \sin \alpha = hF.$$

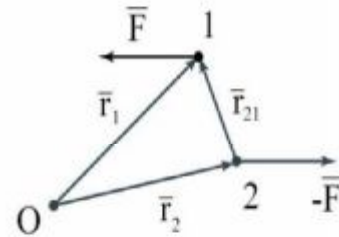


Рис. 4.1

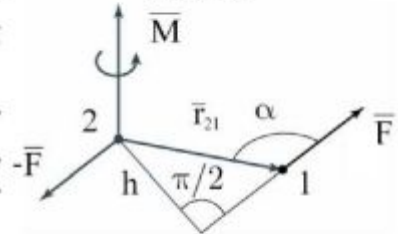


Рис. 4.2

### 4.2. Теоремы об эквивалентности пар сил

1. Пару сил, действующих на твердое тело, можно заменить другой парой сил, расположенных в той же плоскости и имеющей одинаковый с первой парой алгебраический момент (рис. 4.3).

Рассмотрим пару сил  $\bar{F}$  и  $-\bar{F}$ , расположенных в точках  $A_0$  и  $B_0$ . Перенесем эти силы по линиям их действия в точки  $A$  и  $B$ . Приложим взаимно уравновешенные силы  $\bar{Q}$  и  $-\bar{Q}$ , как показано на рис. 4.3. Затем сложим силы  $\bar{F}$  и  $\bar{Q}$ , а также  $-\bar{F}$  и  $-\bar{Q}$  по правилу параллелограмма.

Вновь полученные силы  $\bar{P}$  и  $-\bar{P}$  образуют пару с плечом  $h_1$ .

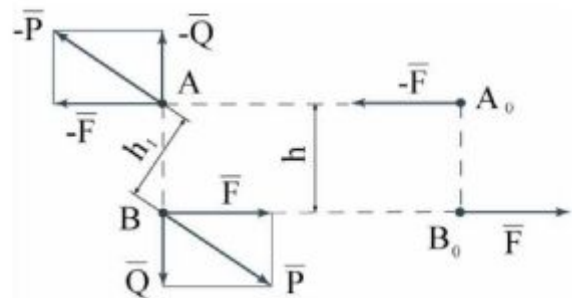


Рис. 4.3

Однако момент этой пары сохраняет свою величину. Действительно, согласно теореме о моменте равнодействующей системы сходящихся сил, имеем

$$\vec{M}_A(\vec{P}) = \vec{M}_A(\vec{F}) + \vec{M}_A(\vec{Q}),$$

но  $\vec{M}_A(\vec{Q}) = 0$ , так как сила  $\vec{Q}$  проходит через точку  $B$ .

Поэтому  $\vec{M}_A(\vec{P}) = \vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{M}$ .

2. Действие пары сил на твердое тело не изменяется, если пару перенести из данной плоскости в любую другую плоскость, ей параллельную.

Пусть пара сил первоначально действует в плоскости 1. Выберем некоторую плоскость 2, параллельную 1. Точки  $A_0, A, B$  и  $B_0$  являются вершинами прямоугольника. В точках  $A$  и  $B$  приложим взаимно уравновешенные силы, как показано на рис. 4.4. Затем складываем силы, приложенные в вершинах прямоугольника, а именно: силы  $\vec{F}$ , приложенные в точках  $A_0$  и  $B$ , и силы  $-\vec{F}$ , приложенные в точках  $B_0$  и  $A$ . В результате в центре прямоугольника получим две взаимно уравновешенные силы  $\vec{R}$  и  $-\vec{R}$ . На рис. 4.4 все эквивалентные и взаимно уравновешенные силы перечеркнуты.

Таким образом, неперечеркнутые силы образуют пару, которая лежит уже в плоскости 2, параллельной исходной.

3. Сложение пар сил, лежащих в пересекающихся плоскостях.

Перенесем обе пары на линию пересечения плоскостей. Силы выберем так, чтобы плечи у обоих пар были одинаковы (рис. 4.5).

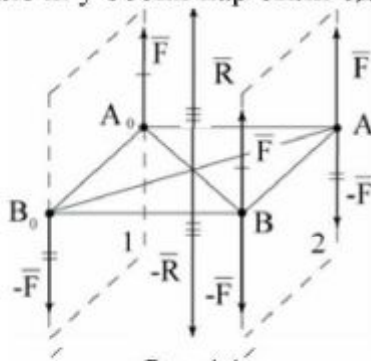


Рис. 4.4

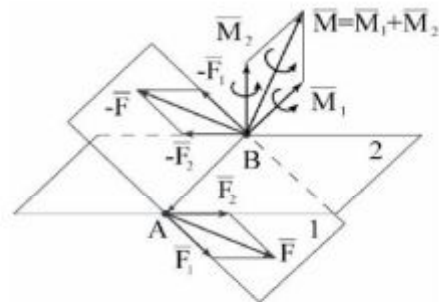


Рис. 4.5

Сложим силы в точках  $A$  и  $B$  по правилу параллелограмма. В результате получим новую пару, образованную силами  $\vec{F}$  и  $-\vec{F}$ . Момент этой пары  $\vec{M} = \vec{M}_B(\vec{F})$ . Согласно теореме о моменте равнодействующей системы сходящихся сил, будет:

$$\vec{M} = \vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{r}_{BA} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{M}_B(\vec{F}_1) + \vec{M}_B(\vec{F}_2) = \vec{M}_1 + \vec{M}_2.$$

Здесь  $\vec{M}_1 = \vec{M}_B(\vec{F}_1)$  и  $\vec{M}_2 = \vec{M}_B(\vec{F}_2)$  – векторы моментов соответствующих пар.

Таким образом, при сложении пар необходимо складывать векторы их моментов.

## 5. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

### 5.1. Теорема о параллельном переносе силы

Эта теорема играет фундаментальную роль, так как с ее помощью доказывается основная теорема статики.

*Действие силы на твердое тело не изменится, если ее перенести параллельно самой себе в некоторую точку, называемую центром приведения, присоединив при этом пару сил, равную векторному произведению вектора переноса силы с обратным знаком на эту силу (рис. 5.1).*

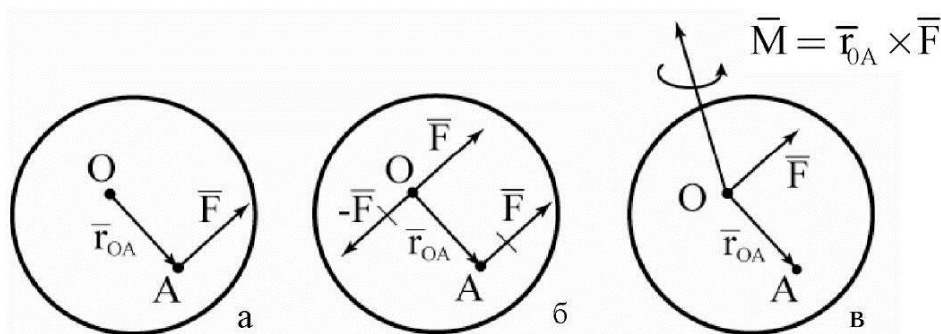


Рис. 5.1

Пусть в точке  $A$  абсолютно твердого тела приложена сила  $\vec{F}$ . Выберем центр приведения точку  $O$  (рис. 5.1, а). Приложим в точке  $O$  силы  $\vec{F}$  и  $-\vec{F}$  (рис. 5.1, б). Перечеркнутые силы образуют пару с моментом:

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{r}_{oA} \times \vec{F},$$

где  $\vec{r}_{oA}$  – вектор переноса силы с обратным знаком. Эту пару можно перенести в любую точку плоскости, содержащую силы  $\vec{F}$  и  $-\vec{F}$ , например точку  $O$ .

Таким образом, оказывается, что сила  $\vec{F}$  приложена в точке  $O$  и к этой же точке приложена пара с моментом  $\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{r}_{oA} \times \vec{F}$  (рис. 5.1, в).

### 5.2. Основная теорема статики

Эта теорема доказывается с помощью теоремы о параллельном переносе силы. Рассмотрим твердое тело, на которое действует система сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$  (рис. 5.2, а).

Выберем в качестве центра приведения точку  $O$ , являющуюся началом декартовой системы координат  $Oxyz$ . Осуществим параллельный перенос всех сил в центр приведения, присоединяя при этом пары (рис. 5.2, б):

$$\vec{M}_o(\vec{F}_i) = \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

В центре приведения получим пучок сходящихся сил и пучок присоединенных пар. Сложив все силы, получим в точке приведения силу



$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i,$$

равную главному вектору. Сложив пары, получим главный момент:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^N \vec{M}_O(\vec{F}_i).$$

Таким образом, доказана следующая теорема, которая носит название основной теоремы статики: *главный вектор и главный момент, помещенные в центре приведения, статически эквивалентны исходной системе сил* (рис. 5.2, в).

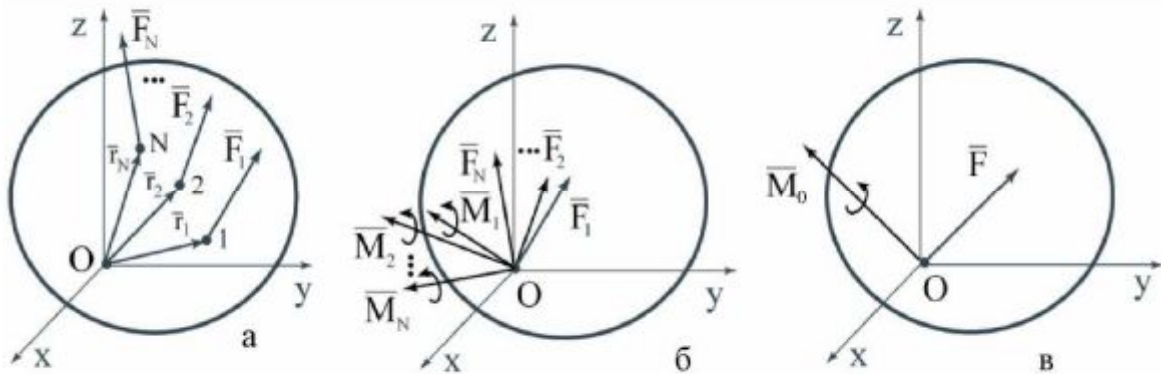


Рис. 5.2

Иными словами, заданная система сил, приложенных к твердому телу, заменяется одной силой  $\vec{F}$ , равной главному вектору этой системы и приложенной в центре  $O$ , и одной парой с моментом  $\vec{M}_O$ , равным главному моменту сил относительно центра приведения  $O$  (рис. 5.2, в).

### 5.3. Следствие основной теоремы статики. Условия равновесия различных систем сил, приложенных к твердому телу

Поскольку главный вектор и главный момент, помещенные в центре приведения, эквивалентны исходной системе сил, то они являются полными характеристиками статического действия этой системы сил. Поэтому необходимыми и достаточными условиями равновесия произвольной системы сил, приложенной к твердому телу, являются обращение в нуль ее главного вектора и главного момента относительно какой-либо точки:

$$\vec{F} = 0; \vec{M}_O = 0, \quad (5.3.1)$$

где  $\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$  – главный вектор системы сил;

$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^N \vec{M}_O(\vec{F}_i)$  – главный момент системы сил относительно точки приведения  $O$ .

Условия (5.3.1) являются условиями равновесия твердого тела и представляют собой следствие основной теоремы статики.

Два векторных равенства (5.3.1) эквивалентны шести скалярным уравнениям равновесия произвольной системы сил в пространстве:

$$\begin{aligned}
 1. \quad F_x &= \sum_{i=1}^N F_{ix} = 0; \\
 2. \quad F_y &= \sum_{i=1}^N F_{iy} = 0; \\
 3. \quad F_z &= \sum_{i=1}^N F_{iz} = 0; \\
 4. \quad M_x &= \sum_{i=1}^N (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) = 0; \\
 5. \quad M_y &= \sum_{i=1}^N (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) = 0; \\
 6. \quad M_z &= \sum_{i=1}^N (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = 0.
 \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

Три последних уравнения представляют собой моменты системы сил относительно координатных осей и совпадают с проекциями главного момента  $\bar{M}_0$  на оси координат.

Уравнения (5.3.2) означают, что произвольная пространственная система сил, приложенных к твердому телу, находится в равновесии. Тогда алгебраические суммы проекций всех сил на координатные оси и алгебраические суммы моментов этих сил относительно координатных осей равны нулю.

Рассмотрим частные случаи.

Пусть, например, система сил произвольно расположена в плоскости  $Oxy$  (рис. 5.3). Тогда из шести уравнений статики (5.3.2) третье, четвертое и пятое уравнения обращаются в тождества.

Имеют смысл первое, второе и шестое уравнения:

$$\begin{aligned}
 1. \quad F_x &= \sum_{i=1}^N F_{ix} = 0; \\
 2. \quad F_y &= \sum_{i=1}^N F_{iy} = 0; \\
 3. \quad M_0 &= \sum_{i=1}^N (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = 0.
 \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

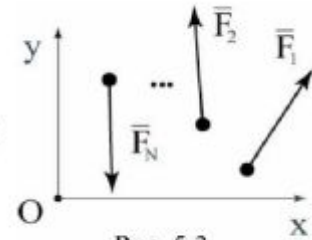


Рис. 5.3

Таким образом, произвольная система сил, расположенных в одной плоскости, уравнивается лишь в том случае, когда алгебраические суммы проекций всех сил на две координатные оси и алгебраическая сумма моментов относительно произвольной точки этой плоскости равны нулю.

То есть уравнения (5.3.3) являются уравнениями равновесия произвольной системы сил на плоскости. Чтобы задача была статически определима, число неизвестных не должно быть больше трех.

Форму уравнений можно изменить, но нельзя изменить их количество. Можно составить два уравнения моментов относительно двух точек  $A$  и  $B$ , причем прямая  $AB$  не должна быть перпендикулярна оси, на которую проектируются силы. Пусть таковой будет ось  $Ox$ . Тогда:

$$\sum_{i=1}^N F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^N M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^N M_B(\bar{F}_i) = 0. \quad (5.3.4)$$

Если выполнены два последних условия, то это означает, что у системы сил может быть равнодействующая, проходящая через точки  $A$  и  $B$ . Ее равенство нулю будет гарантировано, если ось  $x$  не перпендикулярна прямой  $AB$ . Можно составить три уравнения моментов сил относительно точек, не лежащих на одной прямой:

$$\sum_{i=1}^N M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^N M_B(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^N M_C(\bar{F}_i) = 0; \quad (5.3.5)$$

В данном случае выполнение двух условий не гарантирует отсутствия равнодействующей, которая может проходить через соответствующие точки. Если же выполнено условие равенства нулю момента всех сил относительно точки, не лежащей на этой прямой, то это уже гарантирует отсутствие равнодействующей и, следовательно, равновесие. Системы уравнений (5.3.3), (5.3.4) и (5.3.5) эквивалентны друг другу. Однако в конкретных случаях предпочтительней может быть какая-нибудь из них.

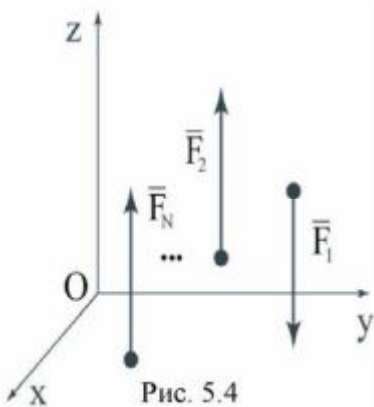


Рис. 5.4

Представляет интерес другой частный случай – система параллельных сил в пространстве (рис. 5.4).

Расположим декартову систему координат так, чтобы ось  $z$  была параллельна силам. Тогда из шести уравнений равновесия (5.3.2) обратятся в тождество первое, второе и шестое уравнения.

Следовательно, для равновесия параллельных сил в пространстве необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций сил на ось, им параллельную, равнялась нулю, и алгебраические суммы моментов относительно двух других осей равнялись нулю:

$$1. \sum_{i=1}^N F_{iz} = 0; \quad 2. M_x = \sum_{i=1}^N y_i F_{iz} = 0; \quad 3. M_y = -\sum_{i=1}^N x_i F_{iz} = 0; \quad (5.3.6)$$

Задача будет статически определимой, если число неизвестных в данном случае не будет превышать трех.

Если система параллельных сил расположена в плоскости, например, в плоскости  $Ouz$ , то третье уравнение системы (5.3.6) обращается в тождество. Поэтому для равновесия необходимо и достаточно выполнение условий:



$$1. \sum_{i=1}^N F_{iz} = 0; \quad 2. M_0 = \sum_{i=1}^N y_i F_{iz} = 0. \quad (5.3.7)$$

То есть необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций сил на параллельную им ось и алгебраическая сумма моментов этих сил относительно произвольной точки равнялись нулю.

Вместо условий равновесия (5.3.7) можно написать другие уравнения, то есть условиям равновесия можно придать другую форму, рассматривая моменты относительно двух точек:

$$1. \sum_{i=1}^N M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad 2. \sum_{i=1}^N M_B(\bar{F}_i) = 0.$$

Прямая  $AB$ , естественно, не должна быть параллельна этим силам.

#### 5.4. Определение опорных реакций однопролетных балок

Рассмотрим однопролетную шарнирно опертую балку, нагруженную некоторой стандартной нагрузкой (рис. 5.5).

На балку действует плоская система параллельных сил. Поэтому необходимо составить два уравнения статики для определения неизвестных реакций  $\bar{Y}_A$  и  $\bar{Y}_B$ .

Обозначим через  $a$  расстояние силы  $\bar{P}$  до опоры  $A$ . Распределенная нагрузка интенсивностью  $\bar{q}$  действует на участке балки, который начинается на расстоянии  $b$  от опоры  $A$  и заканчивается на расстоянии  $c$ . Как известно, действие пары сил  $M$  на твердое тело не зависит от ее положения. Поэтому все равно, в какой точке пролета находится сосредоточенный момент  $M$ . Расстояние между опорами  $A$  и  $B$  равно  $l$ .

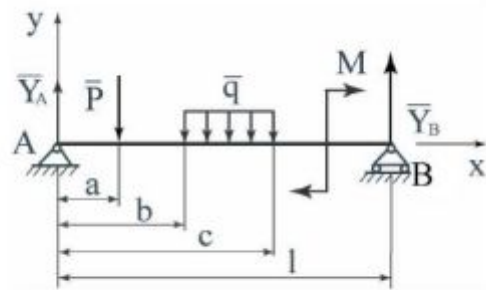


Рис. 5.5

Начало плоской системы координат расположим в опоре  $A$ . Ось  $Ax$  совпадает с осью балки. Составим уравнение моментов относительно точки  $A$ :

$$1. \sum_{i=1}^N M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad -Pa - q \frac{(c^2 - b^2)}{2} - M + Y_B l = 0.$$

Здесь момент от распределенной нагрузки находится из следующих соображений.

Ее равнодействующая:

$$Q = q(c - b).$$

Плечо этой равнодействующей:

$$h = \frac{b + c}{2}.$$

Откуда получаем выражение для ее момента относительно опоры  $A$ :

$$q \frac{(c^2 - b^2)}{2}.$$



В качестве второго уравнения статики возьмем уравнение проекций сил на ось  $y$ :

$$2. \sum_{i=1}^N F_{iy} = 0; Y_A - P - q(c-b) + Y_B = 0.$$

Из первого уравнения статики получаем:

$$Y_B = \frac{Pa + \frac{q(c^2 - b^2)}{2} + M}{l}, \quad (5.4.1)$$

из второго:

$$Y_A = P + q(c-b) - \frac{Pa + \frac{q(c^2 - b^2)}{2} + M}{l}. \quad (5.4.2)$$

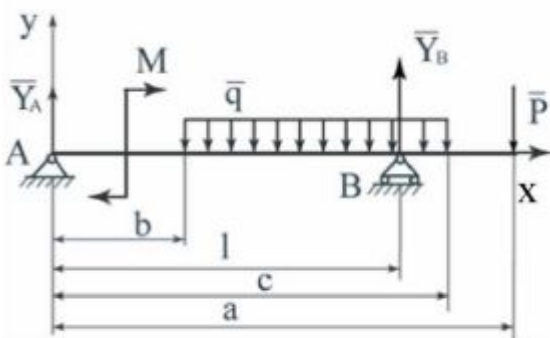


Рис. 5.6

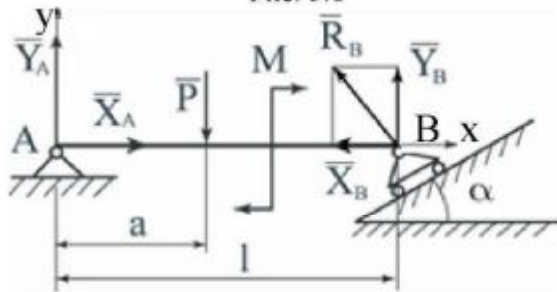


Рис. 5.7

Любопытно, что уравнения статики, а, следовательно, и формулы для неизвестных будут такими же и для балки, изображенной на рис. 5.6.

При этом следует выполнить условия: расстояние силы  $P$  до левой опоры обозначим  $a$ ; расстояние начала и конца участка, где действует распределенная нагрузка,  $b$  и  $c$  – соответственно. Длину пролета обозначим  $l$ .

Если, например, опора  $B$  опирается на наклонную плоскость (рис. 5.7), то реакции  $Y_A$  и  $Y_B$  найдутся по формулам (5.4.1) и (5.4.2).

Например, если действуют сила  $\bar{P}$  и момент  $M$ , то получим:

$$Y_A = P - \frac{Pa + M}{l}; \quad Y_B = \frac{Pa + M}{l},$$

но при этом  $X_B = Y_B \operatorname{tg} \alpha$ ;  $X_A = X_B$ .

В заключение этого пункта рассмотрим определение реакций консольной балки (рис. 5.8).

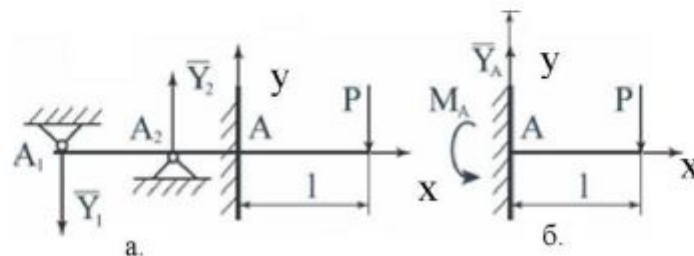


Рис. 5.8

На рис. 5.8, а показано, что на самом деле представляет собой такая конструкция. Это балка, заделанная в стенку. При этом положение опор  $A_1$  и  $A_2$  неопределенно. Нельзя точно определить и реакции  $Y_1$  и  $Y_2$ . Поэтому в опоре  $A$  указывается проекция главного вектора опорных реакций  $Y_1$  и  $Y_2$  на ось  $y$

$$Y_A = Y_2 - Y_1,$$

и главный момент (рис. 5.8, б):

$$M_A = Y_1 \cdot A_1 A - Y_2 \cdot A_2 A.$$

### 5.5. Определение реакций опор составных конструкций

**Составными** называются конструкции, представляющие совокупность твердых тел, связанных между собой шарнирами. Пример такой конструкции изображен на рис. 5.9.

Плоская конструкция, изображенная на рис. 5.9, состоит из двух тел  $AC$  и  $CB$ , связанных между собой шарниром  $C$ . На конструкцию действует сила  $\bar{P}$ , пара с моментом  $M$  и равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $\bar{q}$ . В такой конструкции связи, соединяющие ее части, называются внутренними. В данном случае это шарнир  $C$ .

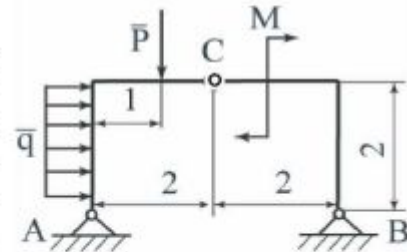


Рис. 5.9

Связи, присоединяющие ее к другим телам, называются **внешними** – это опоры  $A$  и  $B$ .

Конструкция имеет четыре неизвестных опорных реакции  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$ . Все их невозможно определить из трех уравнений статики для плоской системы сил. Чтобы определить реакции опор, мысленно разрежем конструкцию в шарнире  $C$  (рис. 5.10).

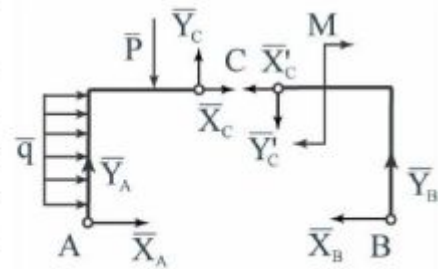


Рис. 5.10

Реакции внутренней связи шарнира  $C$ , приложенные к телам  $AC$  и  $BC$ , попарно равны по модулям и противоположны по направлениям согласно третьему закону Ньютона:  $X_C = X'_C, Y_C = Y'_C$ . Для тел  $AC$  и  $BC$  можно составить по три уравнения равновесия. Всего получается шесть уравнений, содержащих шесть неизвестных величин.

Однако при решении данной задачи целесообразно воспользоваться следующим приемом. Если применить принцип наложения новых связей и считать систему отвердевшей в шарнире, то можно составить уравнения моментов сил относительно опор  $A$  и  $B$ , в которые войдут только по одному неизвестному:

$$1. \sum_{i=1}^N M_A(\bar{F}_i) = 0; Y_B \cdot 4 - M - P \cdot 1 - \frac{q \cdot 2^2}{2} = 0; Y_B = \frac{M + P \cdot 1 + q \cdot 2 \cdot 1}{4}.$$

$$2. \sum_{i=1}^N M_B(\bar{F}_i) = 0; -Y_A \cdot 4 - \frac{q \cdot 2^2}{2} - M + P \cdot 3 = 0; Y_A = \frac{P \cdot 3 - M - q \cdot 2 \cdot 1}{4}.$$

Зная  $Y_A$  и  $Y_B$ , можно рассмотреть равновесие какой-либо отсеченной части. Удобнее рассмотреть ту часть, где меньше нагрузок.

Поэтому рассмотрим часть ВС.

$$3. \sum_{i=1}^N Y_i = 0; -Y'_C + Y_B = 0; Y'_C = Y_B.$$

$$4. \sum_{i=1}^N M_C(\bar{F}_i) = 0; -M + Y_B \cdot 2 - X_B \cdot 2 = 0; X_B = \frac{-M + Y_B \cdot 2}{2}.$$

$$5. \sum_{i=1}^N X_i = 0; -X'_C - X_B = 0; X'_C = -X_B.$$

Наконец составим уравнение проекции сил на ось  $x$  для части АС:

$$6. \sum_{i=1}^N X_i = 0; X_A + 2q + X_C = 0.$$

Тогда  $X_A = -X_C - 2q$ .

В итоге можно сформулировать примерный план решения задач по определению реакций составных тел.

1. Согласно принципу освобождения от связей, отбрасываем внешние связи, заменяя их действие реакциями.

Применяя принцип наложения новых связей, то есть, считая конструкцию отвердевшей, проверяем возможность нахождения некоторых опорных реакций из уравнений моментов, составленных для системы в целом.

2. Расчленим конструкцию в шарнирных соединениях. При этом учитываем, что в шарнире момент обращается в нуль:  $\sum_{i=1}^N M_C(\bar{F}_i) = 0$ .

3. Каждое из расчлененных тел, входящих в конструкцию, рассматриваем отдельно.

Составляем и решаем уравнения равновесия для отсеченных частей.

## 5.6. Простейшие фермы

**Фермой** называется конструкция, состоящая из стержней, соединенных идеальными точечными шарнирами и представляющая собой геометрически неизменяемую систему.

В действительности стержни фермы соединяются между собой не шарнирами, а скрепляются наглухо путем сварки либо с помощью заклепок. Поэтому фактически стержни фермы испытывают кроме растяжения и сжатия еще изгиб. Однако изгибающие моменты в стержнях невелики, поэтому ими пренебрегают.

Места соединений стержней фермы называют **узлами**. Мы ограничимся простейшими плоскими фермами с прямолинейными стержнями. Силы будем считать приложенными в узлах фермы. Таким образом, согласно вышеописанной расчетной схеме стержни испытывают либо растяжение, либо сжатие.

По своему назначению различают фермы мостовые, крановые, стропильные.

Для того чтобы ферма была статически определимой, число ее стержней и узлов должно быть связано вполне определенной зависимостью. Пусть в ферме  $n$  узлов и  $k$  стержней (рис. 5.11).

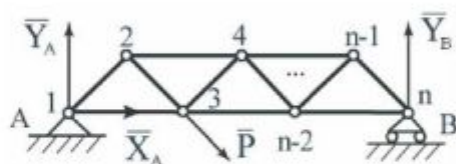


Рис. 5.11

В результате соединения трех стержней получается простейшая геометрически неизменяемая система – треугольник. Для образования оставшейся части фермы остается  $n-3$  узла и  $k-3$  стержня. Для присоединения  $n-3$  узлов нужно  $2(n-3)$  стержня. Поэтому  $k-3 = 2(n-3)$ . Откуда

$$k = 2n - 3. \quad (5.6.1)$$

Условие (5.6.1) является условием статической определенности. Число неизвестных равно  $k+3$ . В это число входят три неизвестные опорные реакции и  $k$  неизвестных усилий в стержнях. В каждом узле имеется система сходящихся сил, а условия ее равновесия – два уравнения.

$$\sum_{i=1}^N X_i = 0; \quad \sum_{i=1}^N Y_i = 0. \quad (5.6.2)$$

Всего таких уравнений можно составить  $2n$ . Следовательно, должно выполняться равенство  $k-3 = 2n$ , но это как раз и есть условие (5.6.1).

Однако использование уравнений (5.6.2) не всегда оказывается рациональным. Например, для определения реакций опор можно воспользоваться уравнениями для плоской системы сил:

$$\sum_{i=1}^N X_i = 0; \quad \sum_{i=1}^N Y_i = 0; \quad \sum_{i=1}^N M_0(\bar{F}_i) = 0. \quad (5.6.3)$$

Используя уравнение (5.6.3), можно перейти к определению усилий в стержнях. Для этого вырезаем сначала опорные узлы и рассматриваем их равновесие. Затем переходим к соседним узлам, где имеется минимальное число неизвестных.

В ряде случаев наиболее рациональным является метод сечения. Рассмотрим ферму, изображенную на рис. 5.12.

Рассмотрим определение усилий в стержнях 8-6, 6-7, 5-7. Для этого проведем сечение через эти стержни и рассмотрим правую отсеченную часть, где меньше нагрузок (рис. 5.13).



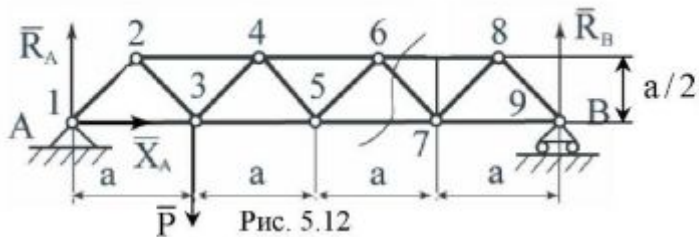


Рис. 5.12

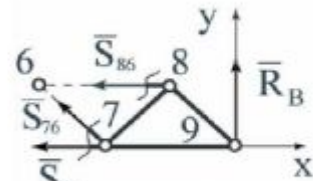


Рис. 5.13

Найдем реакции  $\bar{R}_A$ ,  $\bar{R}_B$  и  $X_A$ :

$$R_A = \frac{3}{4}P; R_B = \frac{1}{4}P, X_A = 0.$$

Будем считать, что все стержни, попавшие в сечение, растянуты. Возьмем в качестве моментной точки узел 6:

$$1. \sum M_6(\bar{F}_i) = 0; -S_{57} \frac{a}{2} + R_B 1,5a = 0; S_{57} = 3R_B = \frac{3}{4}P.$$

Таким образом, нижний стержень 5-7 растянут.

Возьмем теперь в качестве моментной точки узел 7:

$$2. \sum M_7(\bar{F}_i) = 0; S_{86} \frac{a}{2} + R_B a = 0; S_{86} = -2R_B = -\frac{P}{2}.$$

Таким образом, верхний стержень 8-6 сжат.

3. Для нахождения усилия в стержне 7-6 составим уравнение проекций на ось  $y$ :

$$S_{67} \cos 45^\circ + R_B = 0;$$

$$S_{67} = -R_B \sqrt{2} = -\frac{P\sqrt{2}}{4} = -0,353P.$$

### 5.7. Равновесие гибкой нити

Под гибкой нитью будем подразумевать систему материальных точек, непрерывно расположенных по кривой, причем каждая из точек соединена с соседними бесконечно коротким идеальным стержнем с шарнирами по концам, то есть расстояние между точками считается неизменным, а в самой нити моменты сил относительно любой ее точки обращаются в нуль. Это означает, что натяжение нити всегда направлено по касательной к ней.

Итак, пусть идеальная нить закреплена в точках  $A$  и  $B$  (рис. 5.14).

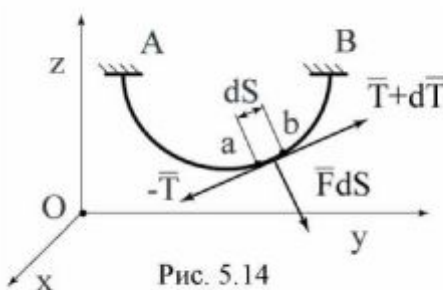


Рис. 5.14

Нить находится в равновесии под действием сил, которые действуют на все ее точки. Длину нити от начальной точки  $A$  до некоторой произвольной точки  $a$  обозначим через  $S$ . Рассмотрим равновесие элемента нити  $ab = dS$ . Обозначим натяжение нити в точке  $a$  через  $\bar{T}$ . Тогда в точке  $b$  будет уже  $\bar{T} + d\bar{T}$ . Кроме того, на элемент  $dS$  действует сила  $\bar{F}dS$ , где  $\bar{F}$  – сила, действующая на единицу длины нити.

Условие равновесия элемента  $dS$  будет:

$$\bar{F}dS + \bar{T} + d\bar{T} - \bar{T} = 0.$$

Откуда следует:

$$\bar{F}dS + d\bar{T} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d\bar{T}}{dS} + \bar{F} = 0. \quad (5.7.1)$$

Равенство (5.7.1) представляет собой уравнение равновесия гибкой нити в векторной форме.

Векторное уравнение (5.7.1) эквивалентно трем скалярным:

$$\frac{dT_x}{dS} + F_x = 0; \quad \frac{dT_y}{dS} + F_y = 0; \quad \frac{dT_z}{dS} + F_z = 0, \quad (5.7.2)$$

где  $T_x, T_y, T_z$  – проекции натяжения нити на оси  $x, y, z$ .

Косинусы углов, которые касательная образует с координатными осями, находятся по формулам:

$$\cos(\bar{T}, x) = \frac{dx}{dS}; \quad \cos(\bar{T}, y) = \frac{dy}{dS}; \quad \cos(\bar{T}, z) = \frac{dz}{dS}.$$

Поэтому:

$$T_x = T \frac{dx}{dS}; \quad T_y = T \frac{dy}{dS}; \quad T_z = T \frac{dz}{dS}.$$

Следовательно, вместо (5.7.2) можно написать:

$$\frac{d}{dS} \left( T \frac{dx}{dS} \right) + F_x = 0; \quad \frac{d}{dS} \left( T \frac{dy}{dS} \right) + F_y = 0; \quad \frac{d}{dS} \left( T \frac{dz}{dS} \right) + F_z = 0 \quad (5.7.3)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dS} \frac{dx}{dS} + T \frac{d^2x}{dS^2} + F_x &= 0; \\ \frac{dT}{dS} \frac{dy}{dS} + T \frac{d^2y}{dS^2} + F_y &= 0; \\ \frac{dT}{dS} \frac{dz}{dS} + T \frac{d^2z}{dS^2} + F_z &= 0. \end{aligned} \quad (5.7.4)$$

Рассмотрим равновесие нити под действием сил тяжести (рис. 5.15).

Найдем форму кривой. Пусть вес единицы длины нити равен  $\gamma$  и нить однородна, то есть  $\gamma = const$ . Вследствие того, что нить находится под действием параллельных сил тяжести, фигура равновесия нити будет плоской кривой, лежащей в вертикальной плоскости. Расположим в плоскости кривой систему координат  $Oxy$ . Тогда  $F_x = 0$ ;  $F_y = -\gamma$ .

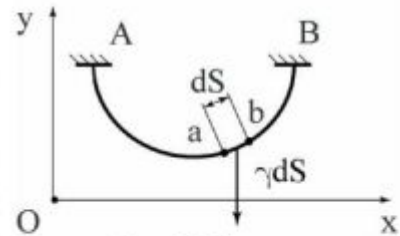


Рис. 5.15

Уравнения равновесия нити (5.7.3) примут вид:

$$\frac{d}{dS}(T \frac{dx}{dS}) = 0; \quad \frac{d}{dS}(T \frac{dy}{dS}) = \gamma \quad (5.7.5)$$

Из первого уравнения (5.7.5) следует, что

$$T \frac{dx}{dS} = T_0 = const,$$

то есть проекция натяжения на ось  $x$  есть величина постоянная.

Следовательно, натяжение нити  $T$  найдется из соотношения:

$$T = T_0 \frac{dS}{dx}. \quad (5.7.6)$$

Подставляя выражение (5.7.6) во второе уравнение (5.7.5), получим:

$$\frac{d}{dS}(T_0 \frac{dS}{dx} \frac{dy}{dS}) = \gamma \quad (5.7.7)$$

или

$$d(T_0 \frac{dy}{dx}) = \gamma dS.$$

Но

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} dx.$$

Следовательно,

$$d(T_0 \frac{dy}{dx}) = \gamma \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} dx. \quad (5.7.8)$$

Для интегрирования уравнения (5.7.8) полагаем  $\frac{dy}{dx} = p$ .

Тогда уравнение (5.7.8) переписется так:

$$T_0 dp = \gamma \sqrt{1 + p^2} dx. \quad (5.7.9)$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Тогда, обозначая  $\frac{T_0}{\gamma} = a$ , получаем:

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dx}{a}. \quad (5.7.10)$$

Интеграл (5.7.10) берется с помощью подстановки Эйлера.

$$\sqrt{1 + p^2} = t - p; \quad t = p + \sqrt{1 + p^2},$$

откуда

$$dt = dp + \frac{p dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dp(p + \sqrt{1 + p^2})}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dp t}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Следовательно,

$$\frac{dt}{t} = \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Тогда вместо (5.7.10) получаем:

$$\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a} \int dx$$

или

$$\ln t = \frac{x}{a} + C.$$

Учитывая подстановку Эйлера, получаем:

$$\ln(p + \sqrt{1+p^2}) = \frac{x}{a} + C.$$

Положим, что при  $p = \frac{dy}{dx} = 0$ ,  $x = 0$ , то есть проведем ось  $y$  через точку кривой, где касательная параллельна оси  $x$ . Тогда  $C = 0$  и мы будем иметь:

$$p + \sqrt{1+p^2} = e^{x/a}.$$

Для определения  $p$  рассмотрим обратную величину:

$$\frac{1}{p + \sqrt{1+p^2}} = -p + \sqrt{1+p^2} = e^{-x/a}.$$

Вычитая из первого выражения второе, получаем:

$$p = \frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2} = sh \frac{x}{a}.$$

Так как  $p = \frac{dy}{dx} = sh \frac{x}{a}$ , то  $dy = sh \frac{x}{a} dx$ .

Откуда, интегрируя, найдем:

$$y = ach \frac{x}{a} + C_1.$$

Пусть при  $x = 0$   $y = a$ .

Тогда, так как  $ch0 = 1$ , то  $C_1 = 0$  и  $y = ach \frac{x}{a} = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$ .

***То есть однородная идеальная нить, располагается в однородном поле тяжести по цепной линии.***

Найдем длину нити на участке  $x = 0$ ,  $x = b$ :

$$S = \int_0^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^b \sqrt{1 + sh^2 \frac{x}{a}} dx = \int_0^b ch \frac{x}{a} dx = ash \frac{x}{a} \Big|_0^b = ash \frac{b}{a}.$$



Согласно равенству  $T = T_0 \frac{ds}{dx}$  имеем:

$$T = T_0 ch \frac{x}{a} = \frac{T_0}{a} y = \gamma y.$$

Таким образом, натяжение нити в каждой точке равно весу отрезка той же нити, длина которого равна ординате точки этой нити.

Следовательно, если нить перекинута через два идеальных блока, то она будет в равновесии, если свободные концы касаются осей  $x$ , но при этом  $a$  должно быть больше нуля. То есть вся нить должна располагаться над осью  $x$  (рис. 5.16).

Рассмотрим нить под действием непрерывной вертикальной нагрузки, равномерно распределенной по длине проекции нити на горизонтальную ось и приложенной во всех точках нити. Подобная ситуация имеет место в висячих мостах (рис. 5.17).

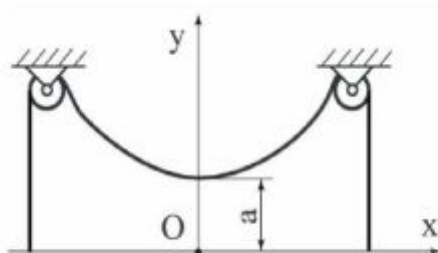


Рис. 5.16

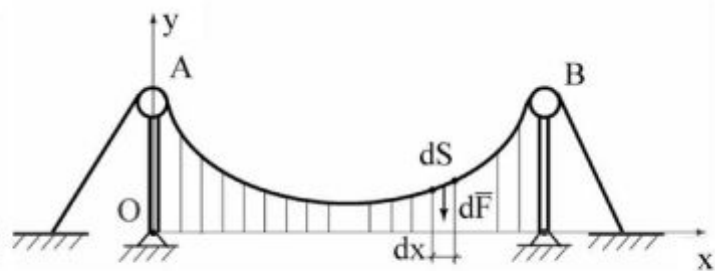


Рис. 5.17

Найдем форму кривой, по которой расположится нить при этой нагрузке.

На элемент нити длиной  $dS$  действует нагрузка

$$dF = -\gamma dx = F_y dS,$$

где  $\gamma$  – нагрузка, приходящаяся на единицу длины по оси  $x$ .

Но тогда

$$F_y = -\gamma \frac{dx}{dS}.$$

Рассмотрим уравнения равновесия:

$$\frac{d}{dS} \left( T \frac{dx}{dS} \right) = 0; \quad \frac{d}{dS} \left( T \frac{dy}{dS} \right) + F_y = 0.$$

Из первого уравнения следует:

$$T \frac{dx}{dS} = T_0 = const.$$

Откуда

$$T = T_0 \frac{ds}{dx}.$$

Из второго уравнения получаем:

$$\frac{d}{dS} \left( T \frac{dy}{dS} \right) - \gamma \frac{dx}{dS} = 0.$$

Откуда следует:

$$d\left(T \frac{dy}{dS}\right) = \gamma dx$$

или

$$d\left(T_0 \frac{dS}{dx} \frac{dy}{dS}\right) = \gamma dx, \quad T_0 \frac{d^2 y}{dx^2} = \gamma.$$

Полагая  $T_0 / \gamma = a$ , получим:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{a}.$$

Интегрируя, найдем:

$$y = \frac{x^2}{2a} + C_1 x + C_2,$$

где  $C_1, C_2$  – постоянные интегрирования.

Таким образом, нить в данном случае располагается по параболе, ось которой вертикальна.

Выберем начало отсчета в точке минимума, где

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad y = y_0.$$

Тогда

$$C_1 = 0; \quad C_2 = y_0, \quad y = \frac{x^2}{2a} + y_0.$$

Согласно соотношению  $T = T_0 \frac{dS}{dx}$  имеем:

$$T dx = T_0 dS = T_0 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Откуда

$$T = T_0 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \text{или} \quad T = \sqrt{T_0^2 + \gamma^2 x^2}.$$

## 5.8. Трение

**Трением** называют сопротивление, возникающее при перемещении одного тела по поверхности другого. В курсе теоретической механики обычно рассматривают два вида трения – **трение скольжения** и **трение качения**.

Если перемещение представляет собой скольжение, то соответствующее трение называется **трением скольжения** или **трением первого рода**.

Когда перемещение является качением, то трение называется **трением качения** или **трением второго рода**.

## Трение скольжения

Если реакция поверхности направлена по нормали к этой поверхности, то говорят, что это связь без трения или идеальная связь. Связь с трением, кроме нормальной составляющей реакции  $\bar{N}$ , имеет касательную составляющую  $\bar{F}_\tau$  (рис. 5.18).

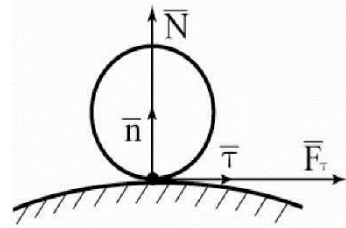


Рис. 5.18

**Нормальная реакция** представляет собой давление поверхности на тело, в то время как тангенциальная реакция возникает благодаря наличию сил трения в зоне контакта.

Трение между соприкасающимися телами происходит вследствие сцепления прижатых друг к другу тел, а также вследствие шероховатости поверхности.

Механизм трения до сих пор полностью не установлен из-за больших трудностей, связанных с количественной оценкой сил молекулярного сцепления, зависящих от состояния контактирующих поверхностей и их физико-химических свойств. Поэтому при учете трения пользуются законами, которые носят качественный, эмпирический характер и являются весьма приближенным отражением действительного явления. Силы трения существенно зависят от наличия смазки. При этом следует различать статическое трение, имеющее место при относительном покое соприкасающихся тел, и трение скольжения, которое возникает при относительном движении контактирующих тел. Законы трения в результате первых опытов были установлены **Г. Амонтоном** (1699) и уточнены **Ш. Кулоном** (1781).

Законы трения скольжения формулируются следующим образом:

1. Наибольшая сила трения скольжения пропорциональна величине нормальной составляющей реакции поверхности связи, то есть:

$$F_{\tau \max} = fN, \quad (5.8.1)$$

где  $F_{\tau \max}$  – максимальное значение касательной составляющей реакции поверхности связи;  $f$  – коэффициент трения;  $N$  – нормальное давление на поверхность связи или нормальная составляющая реакции поверхности связи.

2. Сила трения не зависит от площади контакта соприкасающихся поверхностей. На самом деле это не так, хотя и выполняется в довольно широком диапазоне параметров.
3. Сила трения скольжения при движении меньше силы трения при покое. Хотя и этот закон не всегда выполняется. В настоящее время созданы антифрикционные материалы, у которых сила трения растет с увеличением скорости скольжения.

В дополнение к сказанному отметим, что коэффициент трения скольжения при покое, например, для пары чугун-чугун

$$f_0 = 0,15 \div 0,25,$$

при трении дерева о дерево

$$f_0 = 0,4 \div 0,7.$$

Коэффициент трения зависит от степени обработки и состояния трущихся поверхностей и от скорости скольжения. Обычно с увеличением скорости скольжения величина  $f$  убывает, затем стабилизируется и снова растет (рис. 5.19).

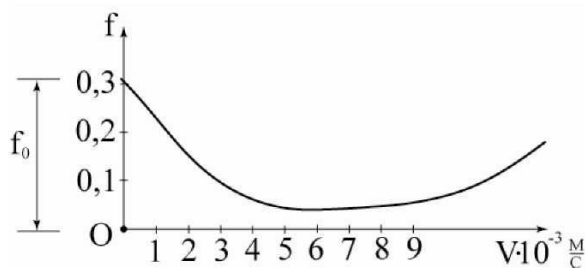


Рис. 5.19

### Реакция поверхности с трением. Угол и конус трения

Реакция при наличии силы трения состоит из двух составляющих: силы трения  $\vec{F}_\tau$ , которая направлена по касательной к поверхности в точке касания, и нормальной составляющей реакции  $\vec{N}$ . Таким образом, реакция шероховатой поверхности равна векторной сумме этих сил:

$$\vec{R} = \vec{F}_\tau + \vec{N}. \quad (5.8.2)$$

Рассмотрим предельный случай равновесия тела на плоскости с трением (рис. 5.20).

Составим уравнения равновесия. На тело действует сила  $\vec{Q}$ , составляющая угол  $\varphi$  с вертикалью. Поскольку имеет место равновесие системы сходящихся сил, то имеем два уравнения:

$$\begin{aligned} 1. \sum_{i=1}^N F_{ix} = 0; \quad F_\tau - Q \sin \varphi = 0; \\ 2. \sum_{i=1}^N F_{iy} = 0; \quad N - Q \cos \varphi = 0. \end{aligned}$$

Но  $F_\tau = fN$ , где  $f$  – коэффициент трения скольжения. Поэтому имеем:

$$F_\tau = Q \sin \varphi = fQ \cos \varphi.$$

Откуда  $f = \operatorname{tg} \varphi$ , где  $\varphi$  – так называемый угол трения. Очевидно при  $\alpha < \varphi$ , где  $\alpha$  – угол между силой и вертикалью, имеет место равновесие при любой силе  $Q$ .

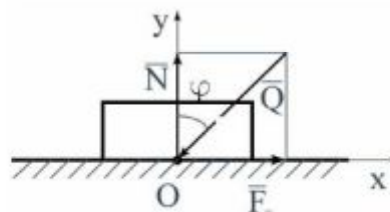
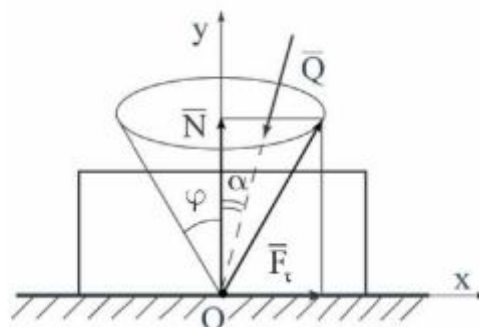


Рис. 5.20

Следовательно, угол трения – это наибольший угол  $\varphi$ , на который отклоняется реакция шероховатой поверхности от нормали к ней.

Линия действия реакции образует коническую поверхность с углом раствора  $2\varphi$ , называемую конусом трения (рис. 5.21).





Внутренняя часть конуса определяет область равновесия. Причем коэффициент равен тангенсу угла трения.

### Трение гибкой нити о цилиндрическую поверхность

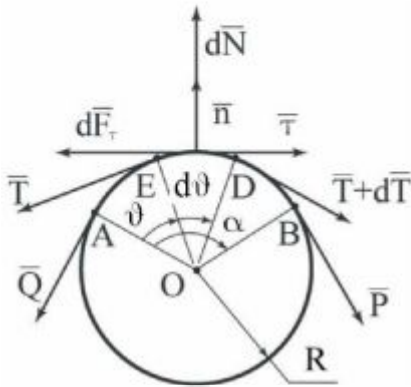


Рис. 5.22

Нить касается поверхности кругового цилиндра вдоль дуги  $AEDB$  с центральным углом  $\alpha$  (рис. 5.22). Коэффициент трения нити о цилиндр равен  $f$ . К одному концу нити приложена сила  $\bar{P}$ . Найти наименьшую силу  $\bar{Q}$ , которую необходимо приложить к другому концу, чтобы сохранить равновесие. Для этого рассмотрим равновесие элемента нити  $DE$  длиной  $dS = R d\vartheta$ , где  $R$  – радиус цилиндра. На него действуют приложенные в точках  $D$  и  $E$  натяжения  $\bar{T} + d\bar{T}$  и  $\bar{T}$ , нормальная реакция  $dN$  и сила трения  $d\bar{F}_\tau$ . Составим уравнения равновесия в проекциях на касательную  $\bar{\tau}$  и нормаль  $\bar{n}$ , считая

$$\sin \frac{d\vartheta}{2} = \frac{d\vartheta}{2}, \cos \frac{d\vartheta}{2} = 1; \quad dT = dF_\tau; \quad dN = 2T \sin \frac{d\vartheta}{2} = T d\vartheta.$$

Рассматриваемое положение равновесия является предельным, поэтому  $dF_\tau = f dN$ . Подставляя в это равенство  $dF_\tau$  и  $dN$ , получим:

$$dT = f T d\vartheta.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\int_Q^P \frac{dT}{T} = f \int_0^\alpha d\vartheta,$$

или

$$\ln \frac{P}{Q} = f \alpha.$$

Откуда  $Q = P e^{-f\alpha}$ .

Согласно этой формуле, полученной Эйлером, оказывается, что уравновешивающая сила не зависит от радиуса цилиндра и быстро убывает с увеличением  $\alpha$ .

### Трение качения

Опыт показывает, что для качения тяжелого цилиндра по горизонтальной плоскости к оси цилиндра необходимо приложить некоторую горизонтальную силу  $\bar{F}$ , чтобы преодолеть сопротивление, возникающее при качении цилиндра. Это сопротивление называется силой трения качения или силой трения второго рода.

Появление трения качения объясняется изменением формы поверхности, по которой катится тело. При качении цилиндр деформируется и несколько

вдавливается в плоскость. При этом сила трения качения тем больше, чем сильнее деформации в зоне контакта.

Вследствие деформации тел под действием силы веса  $\bar{P}$  их касание происходит по некоторой площадке. На рис. 5.23 этой площадке соответствует дуга  $AB$  с центральным углом  $\alpha$ .

Нормальная реакция  $\bar{N}$  приложена в точке  $B$ . Как видно, имеет место равновесие трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости. Поэтому они пересекаются в точке  $O$ . При этом горизонтальная проекция реакции  $\bar{N}$  равна по величине движущейся силе  $F = N \sin \alpha$ . Очевидно, горизонтальная проекция  $\bar{N}$  и есть сила трения качения.

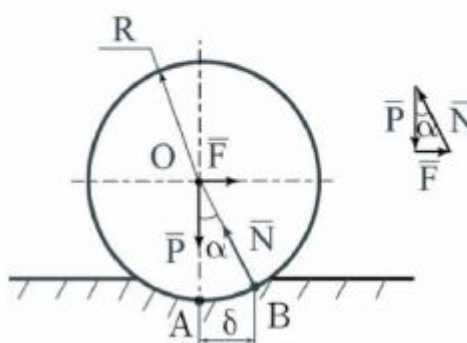


Рис. 5.23

Составим уравнение моментов сил, действующих на каток относительно точки  $B$ , считая деформации малыми:

$$P\delta - FR = 0,$$

где  $\delta$  – проекция дуги  $AB$  на горизонталь.

Тогда:

$$F = P \frac{\delta}{R}. \quad (5.8.3)$$

В формуле (5.8.3)  $\delta$  – называется коэффициентом трения качения. Очевидно,  $\delta$  имеет размерность длины.

Например, для шарикоподшипников  $\delta = 0,001$  см, а для вагонных колес  $\delta = 0,005$  см. Отношение  $\frac{\delta}{R}$  обычно меньше  $f$ . Поэтому в технике трение скольжения стремятся заменить на трение качения.

## 6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМ СИЛ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ

### 6.1. Соотношение между главными моментами относительно двух различных центров приведения

Статическое действие любой системы сил полностью характеризуется главным вектором и главным моментом, приложенными в центре приведения. При этом главный вектор по определению от центра приведения не зависит и, следовательно, является *статическим инвариантом*. Главный момент – это свободный вектор, который зависит от центра приведения.

Рассмотрим, как меняется главный момент, если поменять центр приведения. Пусть новым центром будет точка  $O_1$  (рис. 6.1).

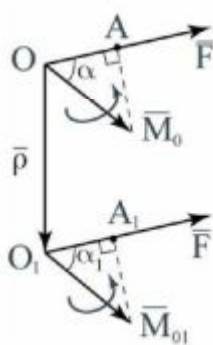


Рис. 6.1

Главный вектор  $\bar{F}$  и главный момент  $\bar{M}_0$ , расположенные в старом центре приведения – точке  $O$ , и главный вектор  $\bar{F}$  и главный момент  $\bar{M}_{0_1}$ , расположенные в новом центре – точке  $O_1$ , совершенно равноправны и порознь эквивалентны исходной системе сил. Поэтому исходную систему сил при дальнейших преобразованиях можно не принимать во внимание. Найдем главный момент силовых факторов, расположенных в точке  $O_1$ , относительно точки  $O$ .

$$\text{Очевидно, } \bar{M}_0 = \bar{M}_{0_1} + \bar{\rho} \times \bar{F}.$$

Тогда

$$\bar{M}_{0_1} = \bar{M}_0 - \bar{\rho} \times \bar{F}, \quad (6.1.1)$$

где  $\bar{\rho}$  – радиус-вектор, направленный от точки  $O$  к точке  $O_1$ .

Формула (6.1.1) дает соотношение главных моментов относительно двух различных центров приведения.

*Главный момент относительно нового центра приведения равен геометрической разности главного момента относительно старого центра и момента главного вектора, расположенного в новом центре приведения, относительно старого.*

### 6.2. Статические инварианты

*Первый статический инвариант – это главный вектор, который не зависит от центра приведения:*

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i.$$

*Второй статический инвариант – это проекция главного момента на направление главного вектора.*

Иными словами, поскольку главный вектор сам по себе является статическим инвариантом, то скалярное произведение главного вектора и главного момента системы сил для любого центра приведения есть величина постоянная. Воспользуемся формулой (6.1.1) и рассмотрим скалярное произведение:



$$\overline{M}_{0_1} \cdot \overline{F} = (\overline{M}_0 - \overline{\rho} \times \overline{F}) \cdot \overline{F}. \quad (6.2.2)$$

В формуле (6.2.2) смешанное произведение  $\overline{\rho} \times \overline{F} \cdot \overline{F} = 0$  и, следовательно,

$$\overline{M}_{0_1} \cdot \overline{F} = \overline{M}_0 \cdot \overline{F} \quad (6.2.3)$$

или

$$M_{0_1x}F_x + M_{0_1y}F_y + M_{0_1z}F_z = M_{0x}F_x + M_{0y}F_y + M_{0z}F_z.$$

Как известно, скалярное произведение двух векторов равно произведению их модулей, умноженных на косинус угла между ними. Поэтому вместо (6.2.3) имеем (см. рис. 6.1):

$$M_0 F \cos \alpha = M_{0_1} F \cos \alpha_1.$$

Откуда следует, что

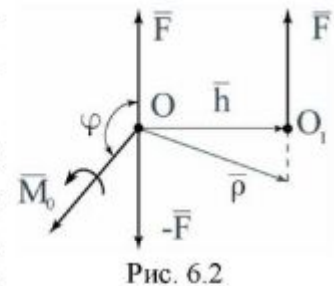
$$M_0 \cos \alpha = M_{0_1} \cos \alpha_1. \quad (6.2.4)$$

На рис. 6.1 отрезки  $OA$  и  $O_1A_1$ , являющиеся проекциями главных моментов на направление главного вектора, согласно формуле (6.2.4), равны между собой.

### 6.3. Приведение пространственной системы сил к равнодействующей

*Пространственная система сил сводится к равнодействующей, если равен нулю второй статический инвариант, то есть равна нулю проекция главного момента на направление главного вектора. Это означает, что главный вектор  $\overline{F}$  и главный момент  $\overline{M}_0$  системы сил взаимно перпендикулярны* (рис. 6.2).

Итак, пусть в точке  $O$ , являющейся центром приведения, главный вектор  $\overline{F}$  и главный момент  $\overline{M}_0$  взаимно перпендикулярны, то есть угол  $\varphi$  между  $\overline{F}$  и  $\overline{M}_0$  равен  $\pi/2$ . Как было показано ранее, главный вектор  $\overline{F}$  и главный момент  $\overline{M}_0$  полностью характеризуют статическое действие исходной системы сил. Поэтому в результате дальнейших эквивалентных преобразований мы будем получать новую систему сил, эквивалентную исходной системе. Заменим главный момент парой сил  $\overline{F}$  и  $-\overline{F}$  с плечом  $h = \frac{M_0}{F}$ . Силы  $\overline{F}$  и  $-\overline{F}$  в точке  $O$  уравниваются. Сила, приложенная в точке  $O_1$ , таким образом, оказывается равнодействующей, что и требовалось доказать.



### 6.4. Теорема о моменте равнодействующей

Вышеописанное построение по приведению системы сил к равнодействующей одновременно является доказательством теоремы о моменте равнодействующей в общем случае.

Суть этой теоремы в том, что *если пространственная система сил имеет равнодействующую, то ее момент относительно некоторой точки ра-*



вен векторной сумме моментов составляющих сил относительно той же точки.

Действительно, по определению главный момент:

$$\bar{M}_0 = \sum_{i=1}^N \bar{M}_0(\bar{F}_i),$$

а по построению:

$$\bar{M}_0 = \bar{h} \times \bar{F} = \bar{\rho} \times \bar{F} = \bar{M}_0(\bar{F}),$$

где  $\bar{\rho}$  – радиус-векторы точек на линии действия равнодействующей.

Следовательно,

$$\bar{M}_0(\bar{F}) = \sum_{i=1}^N \bar{M}_0(\bar{F}_i). \quad (6.4.1)$$

В любой точке приведения второй статический инвариант обращается в нуль и поэтому данное построение может быть осуществлено также для любой точки.

Следовательно, точку  $O$  можно считать произвольной, а значит, и выражение (6.4.1), если у системы сил есть равнодействующая, справедливо для любой точки.

Из доказанного следует, что момент равнодействующей относительно оси равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же оси.

### 6.5. Приведение пространственной системы сил к паре

Если главный вектор  $\bar{F}$  равен нулю, а главный момент системы сил  $\bar{M}_0$  не равен нулю, то система сил приводится к паре. Момент этой пары равен главному моменту рассматриваемой системы сил:

$$\bar{M} = \bar{M}_0 = \sum_{i=1}^N \bar{M}_0(\bar{F}_i).$$

То есть главный момент уже не зависит от выбора точки приведения.

Таким образом, если система сил сводится к паре, то равен нулю первый статический инвариант.

### 6.6. Приведение пространственной системы сил к динаме

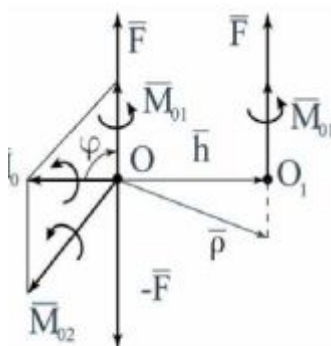


Рис. 6.3

**Динамой** или **силовым винтом** называется система, состоящая из силы и пары, вектор момента которой направлен по этой силе.

Пространственная система сил сводится к динаме, если отличны от нуля оба статических инварианта, иными словами, не равные нулю главный вектор  $\bar{F}$  и главный момент  $\bar{M}_0$  образуют между собой угол  $\varphi$ , отличный от  $\pi/2$  (рис. 6.3).

Разложим главный момент  $\bar{M}_0$  по направлению главного вектора и перпендикулярно ему. На рис. 6.3

первая составляющая  $\bar{M}_{01}$  направлена по силе  $\bar{F}$ , а вторая  $\bar{M}_{02}$  ей перпендикулярна. Заменяем вторую составляющую  $\bar{M}_{02}$  парой сил  $\bar{F}$  и  $-\bar{F}$  с плечом  $h = \frac{M_{02}}{F}$ .

В точке  $O$  силы  $\bar{F}$  и  $-\bar{F}$  уравниваются, а в точке  $O_1$  получаем силу  $\bar{F}$  и момент  $\bar{M}_{01}$ , который переносим из точки  $O$ .

Сила  $\bar{F}$  и момент  $\bar{M}_{01}$ , направленные по одной прямой, называемой центральной осью системы сил или линией действия динамы, образуют динаму или динамический винт.

Из построения следует, что элементами динамы являются главный вектор  $\bar{F}$  и проекция главного момента  $\bar{M}_0$  на направление главного вектора.

$$M_{01} = M_0 \cos \varphi.$$

Причем

$$\cos \varphi = \frac{F_x M_{0x} + F_y M_{0y} + F_z M_{0z}}{F M_0}.$$

Уравнение оси динамы определяется условием  $\cos \varphi = 1$ , то есть векторы  $\bar{M}_{01}$  и  $\bar{F}$  должны быть параллельны. Но

$$\bar{M}_{01} = \bar{M}_0 - \bar{\rho} \times \bar{F},$$

где  $\bar{\rho} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$  – радиус-векторы точек линии действия динамы.

Условие параллельности векторов записывается так:

$$\frac{M_{01x}}{F_x} = \frac{M_{01y}}{F_y} = \frac{M_{01z}}{F_z}$$

или

$$\frac{M_{0x} - (yF_z - zF_y)}{F_x} = \frac{M_{0y} - (zF_x - xF_z)}{F_y} = \frac{M_{0z} - (xF_y - yF_x)}{F_z}. \quad (6.6.1)$$

Уравнение (6.6.1) является уравнением прямой, которая представляет собой линию действия динамы.

## 7. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

### 7.1. Центр параллельных сил

*Центром параллельных сил называется точка на линии действия ее равнодействующей, не меняющая своего положения при одновременном повороте всех сил на один и тот же угол вокруг их точек приложения.*

Рассмотрим систему параллельных, одинаково направленных сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ , приложенных к твердому телу в точках  $A_1, A_2, \dots, A_N$ . Эта система имеет равнодействующую, которая может быть найдена последовательным сложением сил (рис. 7.1).

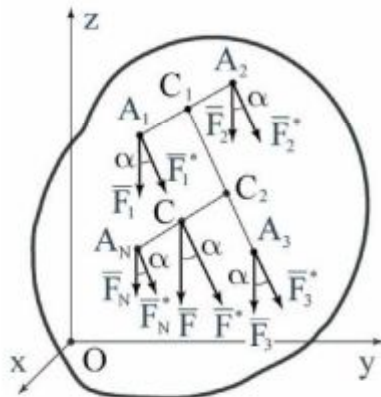


Рис. 7.1

Сложим сначала силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ . Их равнодействующая  $\vec{F}_{12}$  (на рис. не показана) приложена в точке  $C_1$ , которая находится из условия:

$$F_1 \cdot A_1 C_1 = F_2 \cdot C_1 A_2,$$

и равна по модулю сумме  $\vec{F}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ . Положение точки  $C_1$  не меняется при одновременном повороте сил на угол  $\alpha$ . На рис. 7.1 – это силы, обозначенные звездочкой. Затем, складывая  $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_3$ , получим точку  $C_2$ , где приложена равнодействующая сил  $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_3$ , равная по модулю  $F_1 + F_2 + F_3$ . На последнем этапе сложения получим точку  $C$ , где приложена равнодействующая всей системы и которая, очевидно, также не меняет своего положения при повороте всех сил на один и тот же угол. Равнодействующая этих сил  $\vec{F}$ , приложенная в точке  $C$ , являющейся центром параллельных сил, находится согласно равенству:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (7.1.1)$$

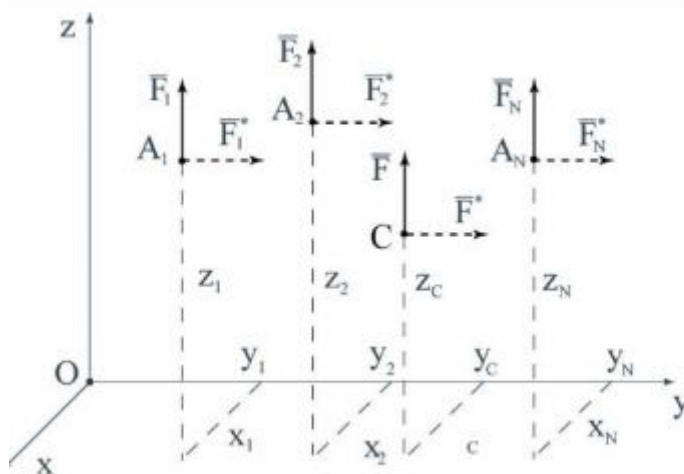


Рис. 7.2

Если некоторые силы направлены в противоположную сторону, то это не меняет сути дела, так как положение точек приложения равнодействующей антипараллельных сил находится по правилу рычага второго рода и также неизменно при одновременном повороте всех сил на один и тот же угол.

Пусть система сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$  параллельна оси  $z$  (рис. 7.2).

Зная координаты точек приложения сил, определим положение центра параллельных сил, применив теорему о моменте равнодействующей.

Для определения координаты  $x_c$  центра параллельных сил составим уравнение моментов сил относительно оси  $y$ :

$$M_y(\bar{F}) = \sum_{i=1}^N M_y(\bar{F}_i)$$

или

$$-F x_c = -\sum_{i=1}^N F_i x_i,$$

откуда

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^N F_i x_i}{F}. \quad (7.1.2)$$

Если составить уравнение моментов сил относительно оси  $x$ , то получим координату  $y_c$  центра параллельных сил:

$$M_x(\bar{F}) = \sum_{i=1}^N M_x(\bar{F}_i)$$

или

$$F y_c = \sum_{i=1}^N F_i y_i.$$

Откуда

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^N F_i y_i}{F}. \quad (7.1.3)$$

Для определения координаты  $z_c$  центра параллельных сил повернем сначала все силы на один и тот же угол  $\alpha = \pi/2$ , как показано на рис. 7.2 и составим уравнение моментов относительно оси  $x$ :

$$M_x(\bar{F}^*) = \sum_{i=1}^N M_x(\bar{F}_i^*)$$

или

$$-F^* z_c = -\sum_{i=1}^N F_i^* z_i.$$

Откуда, учитывая, что  $F_i = F_i^*$ , получим

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^N F_i z_i}{F}. \quad (7.1.4)$$

Формулы (7.1.2), (7.1.3), (7.1.4) можно объединить в одно векторное равенство:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N F_i \bar{r}_i}{F}, \quad (7.1.5)$$

где  $\vec{r}_i = x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k}$  – радиус-вектор точки приложения  $i$ -й силы,  
 $\vec{r}_c = x_c\vec{i} + y_c\vec{j} + z_c\vec{k}$  – радиус-вектор центра параллельных сил.

## 7.2. Центр тяжести тела

Согласно закону всемирного тяготения на все частицы тела, которое находится вблизи земной поверхности, действуют силы притяжения к Земле. Эти силы называются **силами тяжести**.

Силы тяжести, строго говоря, не являются параллельными, так как они сходятся в центре Земли. В связи с небольшими размерами тела по сравнению с радиусом Земли, силы тяжести отдельных частиц тела с достаточно большой точностью можно считать параллельными.

**Равнодействующая параллельных сил тяжести отдельных частиц тела называется весом тела. Силу веса или силу тяжести тела будем обозначать буквой  $P$ .**

**Центром тяжести тела** называется центр параллельных сил тяжести отдельных частиц тела.

### Центр тяжести неоднородного тела

Пусть неоднородное тело произвольной формы разбито на  $n$  элементов.

Обозначим вес  $i$ -го элемента через  $\Delta p_i$ . Точка приложения силы  $\Delta p_i$  находится внутри элемента (рис. 7.3). Однако где именно внутри элемента находится эта точка, не известно.

В зависимости от выбора этой точки получим приближенные значения координат центра тяжести тела.

Чтобы получить точные значения, необходимо совершить предельный переход:

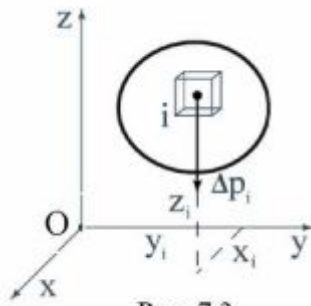


Рис. 7.3

$$\begin{aligned}
 x_c &= \lim_{N \rightarrow \infty, \Delta p_i \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N x_i \Delta p_i}{P} = \frac{\int x dp}{P}; \\
 y_c &= \lim_{N \rightarrow \infty, \Delta p_i \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N y_i \Delta p_i}{P} = \frac{\int y dp}{P}; \\
 z_c &= \lim_{N \rightarrow \infty, \Delta p_i \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N z_i \Delta p_i}{P} = \frac{\int z dp}{P}.
 \end{aligned} \tag{7.2.1}$$

Интегралы в формулах (7.2.1) берутся по объему  $V$  твердого тела.



### Центр тяжести однородного тела

Если тело однородно, то удельный вес его  $\gamma$  постоянный. Тогда вес тела будет  $p = \gamma V$  и, следовательно,  $dp = \gamma dV$ .

Тогда вместо формул (7.2.1) получим:

$$x_c = \frac{\int x dV}{V}; y_c = \frac{\int y dV}{V}; z_c = \frac{\int z dV}{V}. \quad (7.2.2)$$

Таким образом, центр тяжести однородного тела является центром тяжести его объема. Интегралы в числителях формул (7.2.2) называются статическими моментами объёма относительно координатных плоскостей. Интеграл  $\int_V x dV$  – статический момент относительно плоскости  $Oyz$ , интеграл  $\int_V y dV$  – относительно плоскости  $Oxz$ , интеграл  $\int_V z dV$  – относительно плоскости  $Oxy$ .

### Центр тяжести плоской фигуры

Пусть плоская фигура расположена в плоскости  $Oxy$  (рис. 7.4). Поступая так же, как и в случае пространственного тела, получаем формулы для нахождения координат центра тяжести.

$$x_c = \lim_{N \rightarrow \infty, \Delta p_i \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N x_i \Delta p_i}{p} = \frac{\int x dp}{p};$$

$$y_c = \lim_{N \rightarrow \infty, \Delta p_i \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N y_i \Delta p_i}{p} = \frac{\int y dp}{p}.$$

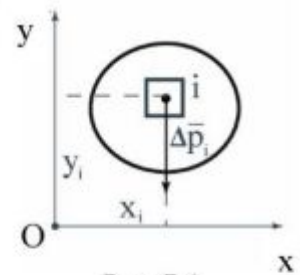


Рис. 7.4

(7.2.3)

Интегралы в формулах (7.2.3) берутся по площади  $S$  плоской фигуры. Если плоская фигура однородна, то сила тяжести пропорциональна ее площади:

$$p = \gamma S,$$

где  $S$  – площадь фигуры;

$\gamma = const$  – вес единицы площади.

Тогда получим

$$x_c = \frac{\int_S x dS}{S}; y_c = \frac{\int_S y dS}{S}. \quad (7.2.4)$$

В формулах (7.2.4) интегралы  $\int_S x dS$  и  $\int_S y dS$  называются статическими моментами площади плоской фигуры относительно оси  $y$  и  $x$  соответственно.

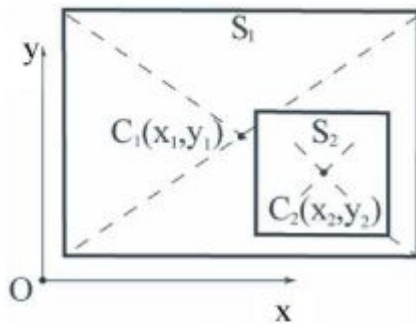


Рис. 7.5

Если плоскую фигуру разбить на элементы, центры тяжести которых известны, например, прямоугольники, то получаем точные формулы. При наличии отверстий соответствующее слагаемое берем со знаком минус (метод отрицательных площадей или объемов).

На рис. 7.5 элемент  $S_2$  является отверстием, поэтому:

$$x_c = \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2}{S_1 - S_2};$$

$$y_c = \frac{S_1 y_1 - S_2 y_2}{S_1 - S_2}.$$

### Центр тяжести линии

К понятию линии приходим, рассматривая тело, поперечное сечение которого мало по сравнению с длиной (рис. 7.6). В случае, если поперечное сечение постоянно и постоянен вес единицы длины, имеем:

$$x_c = \frac{\int x dl}{l}; \quad y_c = \frac{\int y dl}{l}; \quad z_c = \frac{\int z dl}{l}, \quad (7.2.5)$$

где  $l$  – длина линии,  $dl = ds$  (рис. 7.6).

Интегралы, входящие в формулы (7.2.5) на-

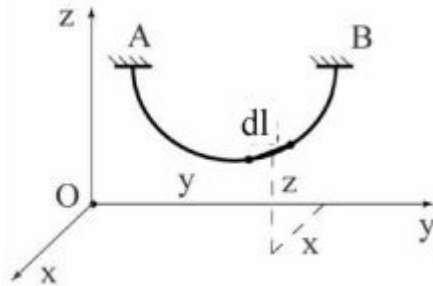


Рис. 7.6

зываются криволинейными.

## 7.3. Примеры определения центров тяжести

### Центр тяжести дуги окружности

Рассмотрим дугу окружности с центральным углом  $2\alpha$ , симметричную относительно оси  $x$  (рис. 7.7).

Согласно общим формулам для центра тяжести имеем

$$x_c = \frac{\int x dl}{l}, \quad (7.3.1)$$

где  $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  – элемент длины линии;

$dx = ab, dy = ac$  – соответствующие проекции элемента  $dl$  на оси  $x$  и  $y$ . Треугольники  $OAB$  и  $abc$  по-

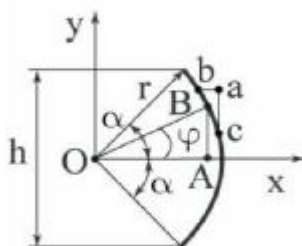


Рис. 7.7

добны. Следовательно, справедлива пропорция:

$$\frac{x}{r} = \frac{dy}{dl},$$

где  $r$  – радиус окружности.

Подынтегральное выражение в формуле (7.3.1), таким образом, удовлетворяет равенству:

$$xdl = rdy$$

и, следовательно, интеграл

$$\int_l xdl = \int_l rdy = r \int_l dy = rh, \quad (7.3.2)$$

где  $h$  – проекция дуги на ось  $y$ .

В итоге формула (7.3.1) с учетом (7.3.2) переписывается так:

$$x_C = \frac{rh}{l}. \quad (7.3.3)$$

Это общая формула для координат  $x_C$  центра тяжести несимметричной дуги.

В рассматриваемом случае

$$h = 2r \sin \alpha, \quad l = 2\alpha r. \quad (7.3.4)$$

Подставляя (7.3.4) в (7.3.3), получим:

$$x_C = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}. \quad (7.3.5)$$

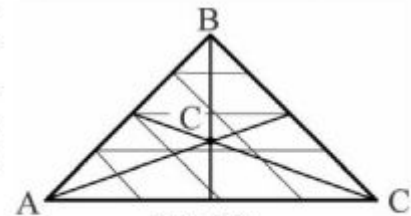
Формула (7.3.7), естественно, может быть получена непосредственным интегрированием. Пусть  $\varphi$  – полярный угол элемента  $dl = r d\varphi$ .

Координата  $x = r \cos \varphi$ , тогда:

$$x_C = \frac{r^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi}{2r\alpha} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}.$$

### Центр тяжести площади треугольника

Разобьем площадь треугольника прямыми, параллельными основанию, на очень большое число узких полосок, которые можно рассматривать как материальные отрезки прямых линий (рис. 7.8). Центр тяжести каждого отрезка лежит на его середине, а, следовательно, центр тяжести всей площади треугольника лежит на его медиане. Разбив площадь прямыми, параллельными каждой из сторон, можно утверждать, что центр тяжести треугольника лежит на каждой из медиан. Следовательно, он лежит на пересечении медиан. Из геометрии известно, что медианы пересекаются на расстоянии одной трети от основания и двух третей от вершины.



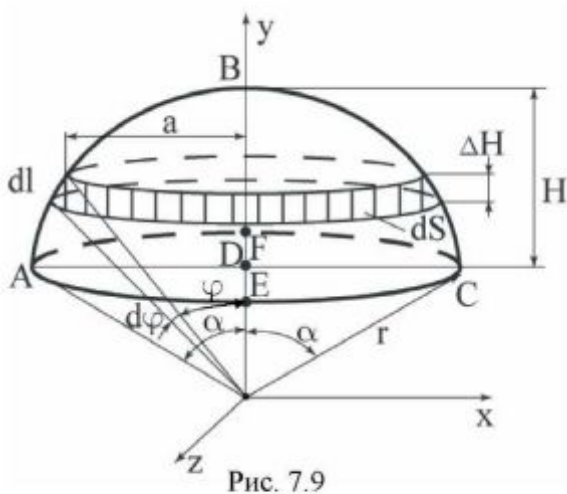


### Центр тяжести площади кругового сектора

Рассмотрим симметричный сектор с углом  $2\alpha$ . Разобьем сектор на элементарные секторы с центральными углами  $d\varphi$ . Каждый такой сектор можно рассматривать как треугольник с высотой  $r$  и основанием  $r d\varphi$ . Центр тяжести каждого такого треугольника лежит на расстоянии  $\frac{2}{3}r$  от центра круга. Следовательно, необходимо найти центр тяжести материальной дуги круга радиуса  $\frac{2}{3}r$ . Поэтому

$$x_c = \frac{2}{3}r \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (7.3.6)$$

### Центр тяжести поверхности сферического сегмента



Дана поверхность сферического сегмента  $ABCEF$ . Чтобы найти центр тяжести, рассмотрим определение его площади (рис. 7.9).

Площадь пояса с образующей  $dl = r d\varphi$ :

$$dS = 2\pi a dl = 2\pi r^2 \sin \varphi d\varphi,$$

где  $a = r \sin \varphi$

Откуда площадь всего сегмента:

$$S = 2\pi r^2 \int_0^\alpha \sin \varphi d\varphi = 2\pi r^2 (1 - \cos \alpha).$$

Однако  $r(1 - \cos \alpha) = H$ , следовательно,

$$S = 2\pi r H. \quad (7.3.7)$$

Из формулы (7.3.7) следует, что площадь сферического сегмента равна произведению дуги окружности большого круга на его высоту. Очевидно, площадь сферического пояса оказывается также равной произведению дуги большого круга на его высоту.

Разделим высоту  $H$  на большее число равных частей  $\Delta H$  и через точки деления проведем плоскости, параллельные основанию сегмента. Тогда поверхность сегмента, согласно формуле (7.3.7), разделится на большое число равных по площади поясов, центр тяжести которых лежит на их геометрическом центре, то есть на отрезке  $BD$ .

Таким образом, высота  $H$  будет равномерно покрыта материальными точками и, следовательно, центр тяжести сегмента будет находиться в центре отрезка  $BD$ .

Следовательно,

$$y_c = r - \frac{H}{2}. \quad (7.3.8)$$

В частном случае, когда  $H = r$ , то есть для полусферы, имеем

$$y_c = r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}.$$

То есть центр полусферы находится на середине радиуса, перпендикулярного основанию.

### Центр тяжести многогранной пирамиды

Начало координат расположим в вершине пирамиды (рис. 7.10). Ось  $z$  направим вертикально вниз. Найдем соотношение между площадями основания  $F_0$  и некоторого сечения  $F_z$ , находящегося на расстоянии  $z$  от вершины.

Очевидно,  $\frac{F_z}{F_0} = \frac{z^2}{h^2}$ .

Следовательно,  $F_z = F_0 z^2 / h^2$ .

Согласно общей формуле для центра тяжести имеем

$$z_c = \frac{\int_V z dV}{V}. \quad (7.3.9)$$

Вычисление интеграла в числителе можно упростить, если в качестве  $dV$  взять объем заштрихованного элемента толщиной  $dz$ :

$$dV = F_z dz = \frac{F_0}{h^2} z^2 dz.$$

Тогда интеграл в числителе формулы (7.3.9) будет

$$\int_V z dV = \frac{F_0}{h^2} \int_0^h z^3 dz = \frac{F_0 h^2}{4}. \quad (7.3.10)$$

Объем пирамиды  $V = \frac{1}{3} F_0 h$ , тогда, согласно (7.3.9) и (7.3.10),

$$z_c = \frac{3}{4} h. \quad (7.3.11)$$

Из приведенных рассуждений следует, что координата  $z_c$  не зависит от формы основания пирамиды и расположена на расстоянии четверти высоты от основания. Следовательно, это относится и к любому конусу, независимо от угла его наклона.

### 7.4. Теоремы Паппа–Гульдина

Эти теоремы были открыты александрийским механиком Паппом, по одним сведениям в третьем, а по другим в четвертом веке новой эры, и затем в 1635 году они же были вновь открыты монахом Гульдиным.

**Теорема 1.** *Поверхность тела, образованного вращением плоской кривой вокруг оси, лежащей в ее плоскости и не пересекающей ее, равна произ-*

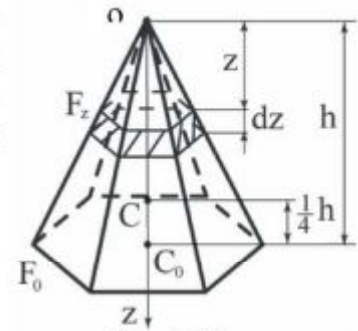


Рис. 7.10

ведению длины кривой на длину окружности, описываемой ее центром тяжести.

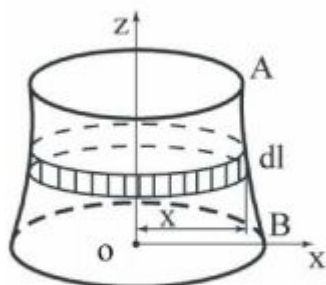


Рис. 7.11

Пусть дуга плоской кривой  $AB$  (рис. 7.11) образует при вращении вокруг оси  $z$  некоторую поверхность. Выделим элемент  $dl$  этой кривой. Площадь пояска, образованного вращением этого элемента, будет:

$$dS = 2\pi x dl,$$

где  $x$  – расстояние элемента до оси вращения.

Чтобы найти площадь поверхности вращения, необходимо вычислить интеграл

$$S = 2\pi \int_l x dl. \quad (7.4.1)$$

Но известно, что

$$\int_l x dl = x_c l, \quad (7.4.2)$$

где  $l$  – длина дуги  $AB$ ;  $x_c$  – координата центра тяжести дуги  $AB$ .

Следовательно, согласно (7.4.1) и (7.4.2),

$$S = 2\pi x_c l. \quad (7.4.3)$$

что и доказывает первую теорему Паппа–Гульдина.

Формула (7.4.3) позволяет определять координаты центра тяжести плоских кривых:

$$x_c = \frac{S}{2\pi l}. \quad (7.4.4)$$

Например, для полуокружности получим:  $S = 4\pi r^2$  – так как в результате ее вращения получается сфера;  $l = \pi r$ , следовательно,  $x_c = \frac{2r}{\pi}$ .

**Теорема 2.** Объем тела, полученного вращением плоской фигуры вокруг оси, лежащей в ее плоскости и не пересекающей ее, равен произведению площади фигуры на длину окружности, описанной ее центром тяжести.

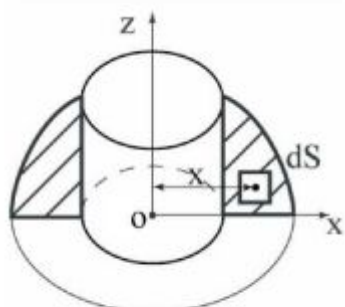


Рис. 7.12

Выделим элемент  $dS$  в пределах плоской фигуры (рис. 7.12). При вращении этого элемента вокруг оси  $z$  получается кольцо, объем которого находится по формуле:

$$dV = 2\pi x dS,$$

где  $x$  – расстояние элемента до оси  $z$ .

Объем тела вращения найдем интегрированием:

$$V = 2\pi \int_s x dS. \quad (7.4.5)$$

По определению центра тяжести:

$$\int_S x dS = x_C S, \quad (7.4.6)$$

где  $x_C$  – координата центра тяжести;  $S$  – площадь фигуры.

Тогда, согласно (7.4.5) и (7.4.6),

$$V = 2\pi x_C S, \quad (7.4.7)$$

что доказывает вторую теорему Паппа–Гульдина.

Из (7.4.7) получаем:

$$x_C = \frac{V}{2\pi S}.$$

Для полукруга имеем:

$V = \frac{4}{3} \pi r^3$  – так как при его вращении получается шар.

$$S = \frac{\pi r^2}{2}$$

и, следовательно,

$$x_C = \frac{4r}{3\pi}.$$



# КИНЕМАТИКА

## 8. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

### 8.1. Введение в кинематику

*Кинематикой* называется раздел теоретической механики, в котором изучается механическое движение материальных тел независимо от действующих на них сил. В связи с этим в кинематике не встречаются такие понятия, как «сила» и «масса».

В кинематике изучается зависимость между пространственными характеристиками движения, поэтому кинематику называют также геометрией движения. В основе кинематики лежит понятие об *абсолютном пространстве и времени*, введенное **И. Ньютоном**.

*Абсолютное пространство* обычно представляется в виде некоторого *проницаемого безграничного твердого тела, свойства которого не зависят от распределения материальных тел и от их движения. Абсолютное время одинаково во всех точках пространства и течет равномерно и непрерывно.*

Геометрические свойства пространства в классической механике определяются системой аксиом и теорем геометрии Евклида.

Астрономы предприняли ряд попыток оценить пределы применимости геометрии **Евклида**.

Один из методов проверки был предложен Шварцшильдом.

Между двумя наблюдениями с интервалом в шесть месяцев удаленной звезды положение Земли относительно Солнца меняется на длину диаметра, то есть на  $3 \cdot 10^{13}$  см (рис. 8.1).



Рис. 8.1

При этом сумма углов  $\alpha$  и  $\beta$  должна быть меньше  $180^\circ$ , если пространство оказывается плоским, и может оказаться больше, если пространство криволинейно. Однако в настоящее время нет данных наблюдений, согласно которым сумма углов  $\alpha + \beta$  где-либо становилась бы больше  $180^\circ$ , при этом оказалось, что радиус кривизны, определяемый триангуляцией, в любом случае должен быть больше, чем  $6 \cdot 10^{19}$  см. При помощи более точных астрономических наблюдений было установлено, что радиус кривизны должен иметь величину порядка  $10^{28}$  см. Но при этом неизвестно, имеет ли пространство кривизну в масштабах длин, превышающих эту величину. С другой стороны, исследования на современных ускорителях позволяют утверждать, что Евклидова геометрия выдерживает экспериментальную проверку вплоть до размеров  $10^{-13}$  см.

Одной из важнейших задач кинематики является установление связи параметров движения, заданного в различных системах координат, движущихся относительно друг друга. При этом наличие инерциальной системы отсчета,

имеющей принципиальное значение в динамике, для кинематики не существенно.

Предметом изучения кинематики, как и механики в целом, являются те же модели материальных тел, а именно: материальной точки, системы материальных точек, твердого тела, а также различные модели сплошных сред.

## 8.2. Три способа определения движения точки

Основной задачей кинематики точки является изучение законов ее движения.

Закон движения точки задается с помощью зависимости от времени ее положения в пространстве. При этом закон движения считается известным, если положение точки в пространстве можно определить в произвольный момент времени. Кривая, которую описывает точка, называется *ее траекторией*.

Если траектория является прямой линией, то движение точки называется прямолинейным. В противном случае движение называется *криволинейным*.

Движение точки можно определить тремя способами: *векторным, координатным и естественным*.

### Векторный способ

Положение точки можно определить с помощью радиус-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из некоторой заданной неподвижной точки  $O$  в данную точку  $M$  (рис. 8.2).

При движении точки радиус-вектор  $\vec{r}$  изменяется по величине и направлению. Положение точки  $M$  в каждый момент времени является вполне определенным, иными словами, точка  $M$  в данный момент может находиться только в одном месте пространства, поэтому функция  $\vec{r}=\vec{r}(t)$  является однозначной. Кроме того,  $\vec{r}=\vec{r}(t)$  является

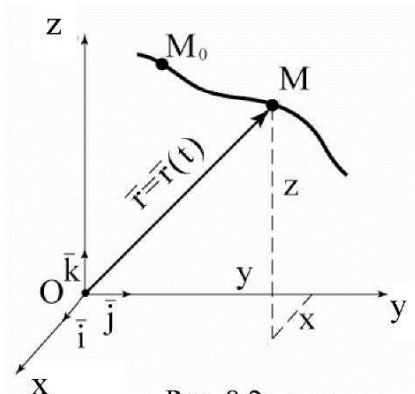


Рис. 8.2

почти всюду непрерывной и дважды дифференцируемой функцией времени. Геометрическое место концов вектора  $\vec{r}=\vec{r}(t)$  называется *годографом*. Следовательно, траектория точки является годографом радиус-вектора  $\vec{r}=\vec{r}(t)$ .

Уравнение

$$\vec{r}=\vec{r}(t). \quad (8.2.1)$$

называется *кинематическим уравнением движения* точки в векторной форме и представляет собой уравнение ее траектории.

### Координатный способ

Этот способ определения движения состоит в том, что задаются координаты точки как функции времени. Например, в декартовых координатах следует задать три зависимости:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad (8.2.2)$$



где  $x, y, z$  – соответствующие декартовы координаты точки  $M$  (см. рис. 8.2).

Между векторным и координатным способами задания движения точки существует очевидная связь:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (8.2.3)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – координатные орты.

Зависимости (8.2.2) являются уравнениями траектории в параметрической форме. Эти зависимости также однозначны, непрерывны и дважды дифференцируемы.

Если из соотношений (8.2.2) исключить время, то получим уравнение траектории в явной форме.

### Естественный способ

При естественном способе задания движения траектория точки должна быть известна заранее. Поэтому для определения положения точки в пространстве достаточно задать ее положение на траектории. Для этого на траектории выбирается начало отсчета дуговых координат, а положение точки  $M$  определяется ее ориентированным расстоянием  $S$ , отсчитываемым по дуге траектории от выбранной точки. Иными словами, необходимо задать уравнение

$$S = S(t). \quad (8.2.4)$$

Уравнение (8.2.4) определяет закон движения точки по траектории. При этом функция  $S = S(t)$  должна быть непрерывной и дважды дифференцируемой.

Дуговая координата  $S$  отлична от пройденного точкой пути. Если дуга  $S$  является монотонной функцией времени, то путь и дуговая координата не отличаются друг от друга. Если же это не так, то путь, пройденный точкой, следует разбить на участки монотонного изменения дуговой координаты и затем просуммировать.

### 8.3. Скорость и ускорение точки при векторном и координатном способах задания движения

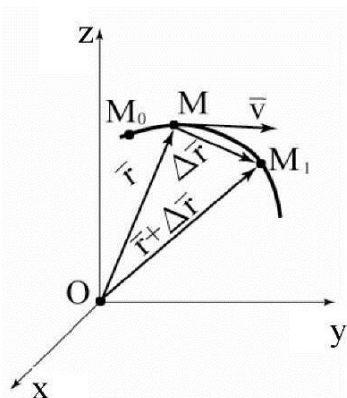


Рис. 8.3

Пусть точка  $M$  движется по некоторой кривой (рис. 8.3). В момент времени  $t$  она занимает положение  $M$ . Соответствующий радиус-вектор  $\vec{r}$ . Через малый промежуток времени  $\Delta t$  точка переходит в положение  $M_1$ . Ее радиус-вектор изменяется на величину  $\Delta\vec{r}$ , становится равным  $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ . Скоростью точки в данный момент времени называется величина:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (8.3.1)$$

или

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}.$$

Следовательно, **скорость – это первая производная радиус-вектора точки по времени** (рис. 8.3).

Приращение радиус-вектора  $\Delta \vec{r}$  является секущей. В пределе секущая переходит в касательную, поэтому и скорость в данной точке направлена по касательной к траектории в сторону изменения дуги.

Пусть движение точки задано координатным способом. В силу равенства (8.2.3) получаем:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}. \quad (8.3.2)$$

Откуда следует, что

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}. \quad (8.3.3)$$

Очевидно  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ ,  $\cos(\vec{v}, x) = \frac{v_x}{v}$ ;  $\cos(\vec{v}, y) = \frac{v_y}{v}$ ;  $\cos(\vec{v}, z) = \frac{v_z}{v}$ .

Выберем некоторую точку  $O_1$  и расположим в ней декартову систему осей  $x_1, y_1, z_1$ . Если перенести в точку параллельно самим себе векторы  $\vec{v}$ , то концы векторов  $\vec{v}$  образуют кривую, называемую **годографом скорости**. Очевидно, координаты точек годографа скорости определяются согласно равенствам:

$$x_1 = v_x(t); \quad y_1 = v_y(t); \quad z_1 = v_z(t). \quad (8.3.4)$$

Это уравнение годографа в параметрической форме. Если исключить время, являющееся параметром, то получим уравнение годографа скорости в явной форме.

Физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости движения точки во времени, называется **ускорением**.

Рассмотрим два близких положения точки  $M$  и  $M_1$  на траектории (рис. 8.4). Скорости в точках  $M$  и  $M_1$  будут соответственно  $\vec{v}$  и  $\vec{v} + \Delta \vec{v}$ . Вектор ускорения в данный момент времени будет:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

или

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}. \quad (8.3.5)$$

Следовательно, **ускорение – это первая производная вектора скорости по времени**.

Если движение точки задано координатным способом, например, в декартовых осях, то согласно соотношению (8.3.3) и (8.3.2), имеем:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{v}_x\vec{i} + \dot{v}_y\vec{j} + \dot{v}_z\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}, \quad (8.3.6)$$

То есть,

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}.$$

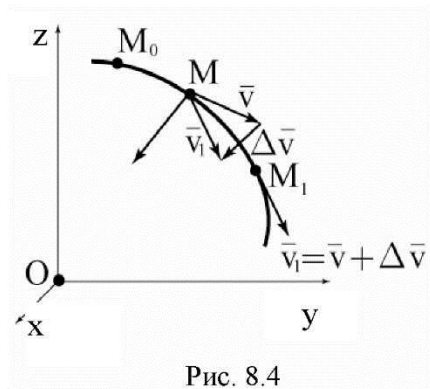


Рис. 8.4

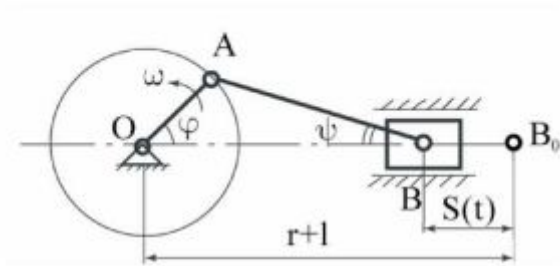


Рис. 8.5

В качестве примера рассмотрим кривошипно-шатунного механизма (рис. 8.5).

Кривошип  $OA$  равномерно вращается против часовой стрелки. Его угол поворота  $\varphi = \omega t$ . Звено  $AB$  называется шатуном. Размеры звеньев:  $OA = r$ ,  $AB = l$ . В начальный момент времени поршень  $B$  находится в верхней мертвой точке  $B_0$ , причем

$OB_0 = OA + AB = r + l$  – перемещение поршня отсчитывается от точки  $B_0$ :  $B_0B = S(t)$ .

Из треугольника  $OAB$  имеем:

$$OB = r \cos \varphi + l \cos \psi.$$

По теореме синусов:  $\frac{r}{\sin \psi} = \frac{l}{\sin \varphi}$ , откуда  $\sin \psi = \frac{r}{l} \sin \varphi$ .

Введем обозначение  $\frac{r}{l} = \lambda$ . Тогда получим:  $\cos \psi = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}$  и, следовательно,  $S(t) = r(1 - \cos \varphi) + l(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi})$ .

Движение ползуна колебательное с частотой  $\omega$  и ходом поршня  $2r$ . обычно величина  $\lambda \approx \frac{1}{5}$ , то есть, достаточно мала. Поэтому, если разложить радикал в ряд и пренебречь величинами порядка  $\lambda^4$ , то выражение для  $S(t)$  существенно упрощается. Итак:

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t} = (1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \omega t \dots = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \left( \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right).$$

Подставим это выражение в формулу  $S(t)$ :

$$S(t) = r(1 - \cos \omega t) + l \left( \frac{1}{4} \lambda^2 - \frac{1}{4} \lambda^2 \cos 2\omega t \right) = l \left( \lambda + \frac{1}{4} \lambda^2 - \lambda \cos \omega t - \frac{\lambda^2}{4} \cos 2\omega t \right).$$

Найдем скорость и ускорение поршня:

$$v = \dot{S} = l\omega \left( \lambda \sin \omega t + \frac{\lambda^2}{2} \sin 2\omega t \right);$$

$$a = \ddot{S} = l\omega^2 (\lambda \cos \omega t + \lambda^2 \cos 2\omega t).$$

Как видно, уравнение движения точки содержит две существенно проявляющихся себя гармоники.

### 8.4. Скорость и ускорение точки в полярных координатах

Пусть движение точки происходит в плоскости  $Oxy$ . Кинематические уравнения движения точки в декартовых осях заданы:  $x = x(t); y = y(t)$ . Заданы также и полярные координаты точки:  $r = r(t), \varphi = \varphi(t)$ . Пусть  $\bar{e}_r$  – единичный вектор (орт), направленный вдоль радиус-вектора  $\bar{r}$  точки  $M$  относительно точки  $O$  в сторону возрастания  $\bar{r}$ , а  $\bar{e}_\varphi$  – единичный вектор трансверсального направления, получающийся поворотом вектора  $\bar{e}_r$  на угол  $\pi/2$  против часовой стрелки.

В системе координат  $Oxy$  векторы  $\bar{e}_r$  и  $\bar{e}_\varphi$ , если использовать матричную форму, записываются следующим образом (рис. 8.6):

$$e_r^T = (\cos \varphi, \sin \varphi), e_\varphi^T = (-\sin \varphi, \cos \varphi), \quad (8.4.1)$$

так как

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi,$$

то в системе координат  $Oxy$  получим:

$$v^T = (\dot{x}, \dot{y}) = (\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi, \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi), \quad (8.4.2)$$

$$a^T = (\ddot{x}, \ddot{y}) = ((\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \cos \varphi - (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \sin \varphi, (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \sin \varphi + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \cos \varphi). \quad (8.4.3)$$

Проекции  $v_r$  и  $v_\varphi$  на радиальную и трансверсальную оси представляют собой радиальную и трансверсальную скорости, которые, согласно (8.4.1) и (8.4.2), являются следующими скалярными произведениями:

$$v_r = (v \cdot e_r) = (\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi) \cos \varphi + (\dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi) \sin \varphi = \dot{r}, \quad (8.4.4)$$

$$v_\varphi = (v \cdot e_\varphi) = -(\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi) \sin \varphi + (\dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi) \cos \varphi = r\dot{\varphi}, \quad (8.4.5)$$

Для проекций ускорения осуществим аналогичные выкладки, найдем:

$$a_r = (a \cdot e_r) = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2; \quad (8.4.6)$$

$$a_\varphi = (a \cdot e_\varphi) = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}. \quad (8.4.7)$$

Переход от системы осей  $Oxy$  к осям  $Me_r e_\varphi$  можно осуществить с помощью матрицы поворота на угол  $\varphi$ :

$$A = \begin{vmatrix} \cos \varphi, & -\sin \varphi \\ \sin \varphi, & \cos \varphi \end{vmatrix}, \quad (8.4.8)$$

при этом:

$$\begin{vmatrix} v_x \\ v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} v_r \\ v_\varphi \end{vmatrix}. \quad (8.4.9)$$

$$\begin{vmatrix} a_x \\ a_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} a_r \\ a_\varphi \end{vmatrix}. \quad (8.4.10)$$

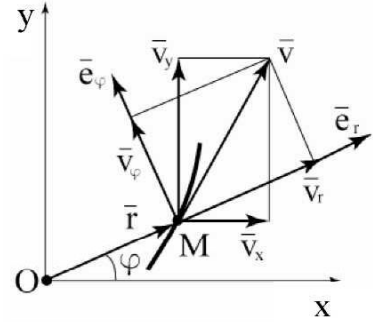


Рис. 8.6



Не трудно увидеть, что матрица  $A$  образована векторами  $\bar{e}_r$  и  $\bar{e}_\varphi$ :

$$A = \left| \bar{e}_r, \bar{e}_\varphi \right|.$$

Учитывая (8.4.4) и (8.4.5), согласно (8.4.9), приходим к формуле (8.4.2). Аналогично подставляя (8.4.6) и (8.4.7) в (8.4.10) получим формулу (8.4.3).

Важным является тот факт, что

$$A \cdot A^T = I,$$

где  $I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$  — единичная матрица.

Следовательно, транспонированная матрица  $A$  равна своей обратной:

$$A^T = A^{-1}$$

Соответствующие определители матриц  $A$  и  $A^T$  равны единице:

$$\|A\| = \|A^T\| = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

В математике преобразование с матрицей типа (8.4.8) называется *унитарным*.

## 8.5. Скорость и ускорение при естественном способе задания движения

### Естественные оси (натуральный триэдр)

В каждой точке кривой есть три взаимно перпендикулярных направления: касательная, главная нормаль и бинормаль.

Единичные орты этих направлений обозначим соответственно  $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$  (рис. 8.7). Орт касательной  $\bar{\tau}$  направляется в сторону положительного отсчета дуговых координат  $S$ , орт главной нормали  $\bar{n}$  — в сторону вогнутости траектории, орт бинормали  $\bar{b}$  направлен так, чтобы векторы  $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$  образовывали правую систему координат. На рис. 8.7 показаны также соприкасающаяся плоскость  $\Pi_0$  и нормальная плоскость  $N_0$ .

Проведем в точке  $M$  плоскость  $N_0$ , перпендикулярную к касательной (рис. 8.7). Эта плоскость называется нормальной плоскостью кривой. Любая прямая, проведенная в этой плоскости через точку  $M$ , будет перпендикулярна

$\bar{\tau}$ , то есть будет нормалью к кривой. Линия пересечения нормальной и соприкасающейся плоскостей называется *главной нормалью кривой*. Следовательно, главная нормаль лежит в соприкасающейся плоскости, а бинормаль перпендикулярна к главной нормали. Совокупность трех взаимно ортогональных осей  $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ , образующих правую систему координат, называется *натуральным триэдром* или *естественными осями*.

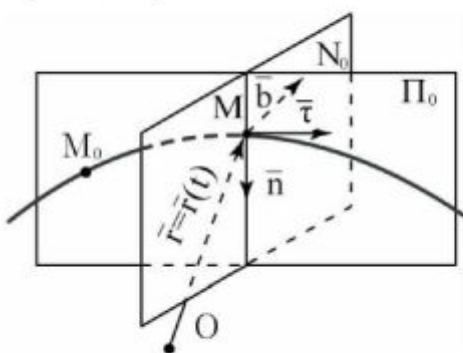


Рис. 8.7

Рассмотрим предельный переход, в результате которого получается соприкасающаяся плоскость. Для этого, наряду с точкой  $M$ , рассмотрим близко расположенную точку  $M_1$  (рис. 8.8).

Дуговая координата точки  $M$ , отсчитываемая от точки  $M_0$ ,  $S = S(t)$ . Точка  $M_1$  находится на расстоянии  $\Delta S$  от точки  $M$ , то есть положение точки  $M_1$  определяется значением дуги  $S + \Delta S$ , причем  $\Delta S > 0$ . Орт касательной в точке  $M_1$  обозначается через  $\bar{\tau}_1$ . Перенесем орт  $\bar{\tau}_1$  в точку  $M$  и

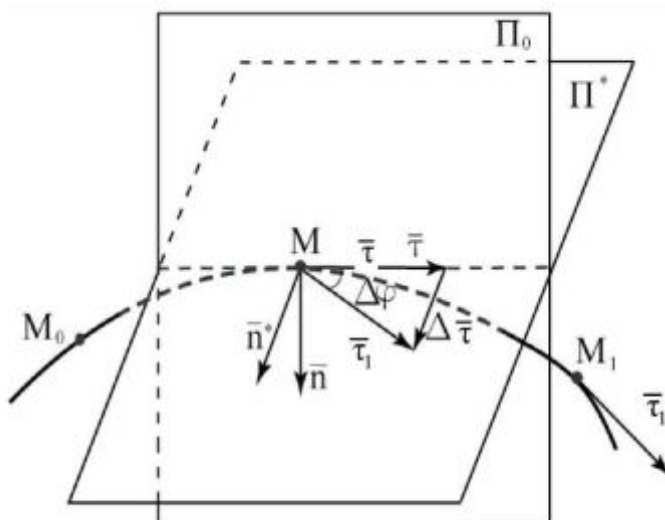


Рис. 8.8

через образовавшийся треугольник проведем плоскость  $\Pi^*$ . Если устремить точку  $M_1$  к точке  $M$ , то плоскость  $\Pi^*$  будет вращаться вокруг касательной  $\bar{\tau}$  и при уменьшении  $\Delta S$  до нуля займет некоторое предельное положение  $\Pi_0$ , называемое **соприкасающейся плоскостью**.

Найдем выражения единичных векторов натурального триэдра через радиус-вектор  $\bar{r} = \bar{r}(S)$ .

Рассмотрим векторную производную  $\frac{d\bar{r}}{dS}$ . Вектор  $\frac{d\bar{r}}{dS}$  направлен по касательной к годографу вектора  $\bar{r} = \bar{r}(S)$  в сторону возрастания дуг  $S$ . С другой стороны, численная величина производной равна

$$\left| \frac{d\bar{r}}{dS} \right| = \left| \frac{d\bar{r}}{dS} \right| = 1.$$

Таким образом, векторная производная  $\frac{d\bar{r}}{dS}$  представляет единичный вектор касательной:

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{dS}. \quad (8.5.1)$$

Для определения орта главной нормали  $\bar{n}$  рассмотрим равнобедренный треугольник, образованный векторами  $\bar{\tau}$  и  $\bar{\tau}_1$  в плоскости  $\Pi^*$  (рис. 8.8). Если точка  $M_1$  взята на малом расстоянии  $\Delta S$  от точки  $M$ , то угол  $\Delta\varphi$  будет тоже мал, а вектор  $\Delta\bar{\tau}$  можно приближенно считать перпендикулярным к  $\bar{\tau}$  и параллельным вектору нормали  $\bar{n}^*$ , лежащему в плоскости  $\Pi^*$ . По величине  $|\Delta\bar{\tau}|$  как основание равнобедренного треугольника с малым углом  $\Delta\varphi$  при вершине и боковыми сторонами, равными единице, будет равен:



$$|\Delta \bar{\tau}| = 2|\bar{\tau}| \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \approx 2 \cdot 1 \frac{\Delta \varphi}{2} = \Delta \varphi.$$

Следовательно,  $\Delta \bar{\tau} \approx \Delta \varphi \bar{n}^*$ .

Поделим обе части этого равенства на  $\Delta S$  и перейдем к пределу:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta S} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \bar{n}^*.$$

По определению производной:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta S} = \frac{d\bar{\tau}}{dS}, \quad \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta S} = \frac{d\varphi}{dS}.$$

Поскольку орт  $\bar{n}^*$  при приближении точки  $M_1$  к  $M$  стремится к  $\bar{n}$ , то

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \bar{n}^* = \bar{n}.$$

Таким образом,

$$\frac{d\bar{\tau}}{dS} = \frac{d\varphi}{dS} \bar{n}.$$

Производная  $\frac{d\varphi}{dS} = k$  называется кривизной кривой.

При этом  $k = \frac{1}{\rho}$ ,

где  $\rho$  – радиус кривизны кривой.

Следовательно,

$$\frac{d\bar{\tau}}{dS} = \frac{1}{\rho} \bar{n} \quad \text{или} \quad \bar{n} = \rho \frac{d\bar{\tau}}{dS} = \rho \frac{d^2 \bar{r}}{dS^2}. \quad (8.5.2)$$

Если через данную точку кривой  $M$  и две близкие к ней точки провести круг, то при стремлении этих точек к точке  $M$  круг будет стремиться к некоторому предельному кругу, называемому **соприкасающимся кругом**, который лежит в соприкасающейся плоскости. Радиус этого круга будет радиусом кривизны кривой, центр круга – центром кривизны кривой.

Наконец найдем орт бинормали  $\bar{b}$ :

$$\bar{b} = \bar{\tau} \times \bar{n} = \rho \left( \frac{d\bar{\tau}}{dS} \times \frac{d^2 \bar{r}}{dS^2} \right).$$

### Скорость в естественных осях

По определению скорость – это векторная производная радиуса-вектора  $\bar{r}$  по времени. Согласно этому определению и используя (8.5.1), получим:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dS} \frac{dS}{dt} = \dot{S} \cdot \bar{\tau}.$$

Здесь  $\dot{S}$  – производная дуговой координаты по времени. Найдем скалярное произведение

$$\bar{v} \cdot \bar{\tau} = \dot{S} \cdot \bar{\tau} \cdot \bar{\tau} = \dot{S}.$$

Очевидно  $\dot{S} = v_\tau$ , то есть производная дуги по времени равна проекции вектора скорости  $\bar{v}$  на орт касательной  $\bar{\tau}$ .

Следовательно, вектор скорости в естественных осях записывается следующим образом:

$$\bar{v} = v_\tau \bar{\tau}. \quad (8.5.3)$$

Для сравнения напомним выражение вектора скорости в декартовых осях:

$$\bar{v} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k}.$$

### Ускорение в естественных осях

Для того чтобы найти выражение вектора ускорения в естественных осях, воспользуемся определением ускорения и формулой (8.5.3) для вектора скорости в естественных осях:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_\tau \bar{\tau}) = \frac{dv_\tau}{dt} \bar{\tau} + v_\tau \frac{d\bar{\tau}}{dt}. \quad (8.5.4)$$

Применим ранее полученные выражения для ортов осей натурального триэдра.

Согласно (8.5.2)

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{1}{\rho} v_\tau \bar{n}. \quad (8.5.5)$$

Подставим (8.5.5) в выражение (8.4.5):

$$\bar{a} = \frac{dv_\tau}{dt} \bar{\tau} + \frac{v_\tau^2}{\rho} \bar{n}. \quad (8.5.6)$$

Равенство (8.5.6) представляет собой разложение вектора ускорения по осям натурального триэдра. При этом величина

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}. \quad (8.5.7)$$

называется **касательным ускорением** и характеризует изменение вектора скорости по величине.

Величина

$$a_n = \frac{v_\tau^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho} \quad (8.5.8)$$

называется **нормальным ускорением** и характеризует изменение вектора скорости по направлению.

Если учесть обозначения (8.5.7) и (8.5.8), то формулу (8.5.6) можно переписать так:

$$\bar{a} = a_\tau \bar{\tau} + a_n \bar{n}. \quad (8.5.9)$$

Равенство (8.5.9) говорит о том, что проекция ускорения на бинормаль равна нулю. Для сравнения приведем выражение вектора ускорения в декартовых осях:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}.$$

## Связь естественного и координатного способов задания движения

Не представляет труда найти все кинематические характеристики движения точки в естественных осях по заданным координатным способом ее уравнениям движения.

Пусть известны уравнения движения точки в декартовых осях:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Найдем проекции скорости и ускорения:

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z},$$
$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}.$$

Квадрат модуля скорости:

$$\bar{v} \cdot \bar{v} = v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v_\tau^2.$$

Найдем производную по времени от  $v^2$ :

$$\frac{dv^2}{dt} = 2\bar{v} \frac{d\bar{v}}{dt} = 2(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = 2\bar{v}\bar{a}.$$

Учитывая, что  $\bar{v} = v_\tau \bar{\tau}$  и  $\bar{a} = a_\tau \bar{\tau} + a_n \bar{n}$ , получим:

$$\bar{v} \cdot \bar{a} = (v_\tau \bar{\tau})(a_\tau \bar{\tau} + a_n \bar{n}) = v_\tau a_\tau.$$

Следовательно,

$$a_\tau = \frac{(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})}{v_\tau}.$$

Если скалярное произведение  $\bar{v} \cdot \bar{a} > 0$ , то движение ускоренное и, если  $\bar{v} \cdot \bar{a} < 0$ , то замедленное.

Из равенства  $a^2 = a_\tau^2 + \frac{v^4}{\rho^2}$  следует:

$$\rho = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - a_\tau^2}}.$$

Представляет определенный интерес проанализировать частные случаи движения. Приведем некоторые примеры.

1. *Прямолинейное движение.* Если во время движения точки нормальное ускорение  $a_n$  равно нулю, то движение точки является прямолинейным. Действительно, если  $a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$ , то  $\rho = \infty$ . Следовательно, траекторией является

прямая, при этом полное ускорение равно касательному:  $\bar{a} = \bar{a}_\tau$ . Если во время движения точки ее ускорение равно нулю  $\bar{a} = 0$ , то движение является равномерным и прямолинейным, так как скорость в этом случае не изменится ни по величине, ни по направлению.

## 2. Равномерное криволинейное движение.

Если во время движения точки касательное ускорение равно нулю  $a_\tau = 0$ , то величина проекций скорости  $v_\tau$  на орт касательной не изменяется. Действительно, если  $a_\tau = \dot{v}_\tau = 0$ , то  $v_\tau = const$ . В этом случае точка движется равномерно по кривой, а полное ускорение равно нормальному  $\vec{a} = \vec{a}_n$ .

3. Равнопеременное движение. Если во время движения точки по некоторой кривой касательное ускорение постоянно  $\vec{a}_\tau = const$ , то дуговая координата меняется по закону:

$$S = \frac{a_\tau t^2}{2} + v_{\tau 0} t + S_0.$$

## Примеры определения радиуса кривизны траектории

1. Пусть даны уравнения движения точки:

$$x = t, y = -t^2 + 1.$$

Исключив время, получим уравнение траектории (рис. 8.9).

$$y = -x^2 + 1$$

Найдем скорость и ускорение:

$$v_x = \dot{x} = 1; \quad v_y = \dot{y} = -2t.$$

$$a_x = 0; \quad a_y = -2;$$

$$\vec{a} = \vec{a}_y.$$

Точка движется из вершины параболы по правой ее ветви. При  $t = 1, v_\tau = \sqrt{5} = 2.24$ .

Касательное ускорение будет:

$$a_\tau = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{v_\tau} = \frac{4}{\sqrt{5}} = 1.789.$$

Нормальное ускорение:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0.894.$$

Радиус кривизны траектории:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{5\sqrt{5}}{2} = 5.59.$$

2. Определим радиус кривизны эллипса в произвольной точке. Уравнения эллипса в параметрической форме:  $x = a \cos t, y = b \sin t$

Если исключить время, то получаем уравнение эллипса в явной форме:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Для радиуса кривизны имеем формулу

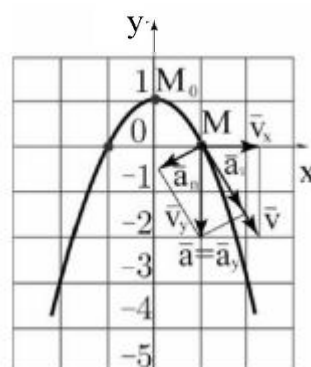


Рис. 8.9

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}$$

Найдем составляющие скорости и ускорения:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -a \sin t, & \dot{y} &= b \cos t, \\ \ddot{x} &= -a \cos t, & \ddot{y} &= -b \sin t.\end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}, \\ a &= \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}, \\ (a_\tau)^2 &= \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2 \sin^2 t \cos^2 t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}, \\ a_n &= \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t - \frac{(a^2 - b^2)^2 \sin^2 t \cos^2 t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} = \\ &= \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}.\end{aligned}$$

Наконец, найдем:

$$\rho = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{ab}.$$

## 8.6. Криволинейные координаты

Движение точки в пространстве не обязательно задается только декартовыми координатами. Как было показано ранее, это движение, например, в плоскости, можно задать в полярных координатах. В пространстве трех измерений движение можно задать с помощью любых трех чисел, однозначно определяющих положение точки.

Эти три числа  $q_1, q_2, q_3$ , в отличие от прямолинейных декартовых координат, называются криволинейными координатами. Движение точки считается заданным, если ее криволинейные координаты  $q_i, i=1,2,3$  представляют известные функции времени:  $q_i = q_i(t)$ .

В силу однозначности соответствия между определением положения точки при помощи радиус-вектора  $\vec{r}$  и определением ее положения при помощи криволинейных координат  $q_i, i=1,2,3$  можно написать:

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3). \quad (8.6.1)$$

Последнее соотношение утверждает, что радиус-вектор  $\vec{r}$  является однозначной функцией криволинейных координат.

Пусть  $M_0$  – некоторая точка в пространстве. Ее криволинейные координаты обозначим  $q_{01}, q_{02}, q_{03}$ . Координатными линиями, проходящими через точку  $M_0$ , назовем зависимости  $\vec{r} - \vec{r}(q_1, q_{02}, q_{03})$ ,  $\vec{r} - \vec{r}(q_{01}, q_2, q_{03})$ ,  $\vec{r} - \vec{r}(q_{01}, q_{02}, q_3)$ , которые получаются из (8.6.1) при фиксировании координат, в обозначении ко-



торых имеется индекс 0. Касательную к  $i$ -й координатной линии в точке  $M_0$  назовем  $i$ -й координатной осью.

Приращение дуги вдоль  $i$ -й координатной оси будет:

$$dS_i = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right| dq_i,$$

где  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \bar{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \bar{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \bar{k}$ ,  $d\bar{r}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} dq_i$ .

Следовательно,

$$\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2} = H_i.$$

Величины  $H_i$  называются коэффициентами Ламе. При этом  $\frac{dS_i}{dq_i} = H_i$ .

Единичный вектор  $i$ -й координатной оси, направленный по касательной и соответствующей координатной линии, будет:

$$\bar{e}_i = \frac{d\bar{r}}{dS_i} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{dS_i} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}. \quad (8.6.2)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением ортогональных криволинейных координат. В этом случае:

$$\bar{e}_i \bar{e}_j = \frac{1}{H_i H_j} \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j} \right) = \frac{1}{H_i H_j} \left( \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j} \right) = 0, \quad (8.6.3)$$

если  $i \neq j$ .

Рассмотрим дифференциал дуги произвольной кривой в заданной системе криволинейных координат. Для этого воспользуемся формулой для произвольного малого перемещения:

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3} dq_3.$$

Чтобы найти квадрат дифференциала дуги  $dS^2$ , необходимо найти скалярное произведение  $d\bar{r} \cdot d\bar{r}$ :

$$dS^2 = d\bar{r} \cdot d\bar{r} = |d\bar{r}|^2 = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3} dq_3 \right|^2.$$

Учитывая (8.6.3) получим выражение дифференциала дуги в ортогональной криволинейной системе координат:

$$\begin{aligned} dS^2 &= \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \right)^2 (dq_1)^2 + \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} \right)^2 (dq_2)^2 + \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3} \right)^2 (dq_3)^2 = \\ &= H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2. \end{aligned} \quad (8.6.4)$$

Найдем проекции скорости  $\bar{v}$  и ускорения  $\bar{a}$  точки  $M$  на оси криволинейной системы координат. По определению скорости, с учетом (8.6.2), получаем:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3 = H_1 \dot{q}_1 \bar{e}_1 + H_2 \dot{q}_2 \bar{e}_2 + H_3 \dot{q}_3 \bar{e}_3. \quad (8.6.5)$$

В формуле (8.6.5) величины:

$$v_{qi} = H_i \dot{q}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (8.6.6)$$

представляют собой проекции вектора скорости на криволинейные координаты. Согласно формуле (8.6.5), квадрат величины скорости будет:

$$v^2 = H_1^2 \dot{q}_1^2 + H_2^2 \dot{q}_2^2 + H_3^2 \dot{q}_3^2. \quad (8.6.7)$$

что соответствует также формуле (8.6.4).

Для определения проекций ускорения представим их в виде:

$$a_{qi} = \bar{a} \bar{e}_i = \dot{\bar{v}} \cdot \frac{1}{H_i} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}.$$

Откуда

$$H_i a_{qi} = \dot{\bar{v}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \bar{v} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) - \bar{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}. \quad (8.6.8)$$

Из выражения для скорости (8.6.5) следует:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}. \quad (8.6.9)$$

Кроме того:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_1 \partial q_i} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_2 \partial q_i} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_3 \partial q_i} \dot{q}_3$$

и

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_i \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_i \partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_i \partial q_3} \dot{q}_3.$$

Ввиду того, что  $\bar{r}$  – дважды дифференцируемые функции  $q_1, q_2, q_3$ , то смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования, поэтому:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i}. \quad (8.6.10)$$

Подставляя (8.6.9) и (8.6.10) в формулу (8.6.8), получим:

$$H_i a_{qi} = \frac{d}{dt} \left( \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i}.$$

Введем обозначение  $v^2 / 2 = T^\circ$ . Тогда для  $a_{qi}$  получим следующее выражение:

$$a_{qi} = \frac{1}{H_i} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T^\circ}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T^\circ}{\partial q_i} \right), i = 1, 2, 3. \quad (8.6.11)$$

Оператор  $\varepsilon_i ( ) = \frac{d}{dt} \frac{\partial ( )}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial ( )}{\partial q_i}$  – называется оператором Эйлера, так как

он впервые получил его при решении задач оптимизации.

## Примеры

1. Найти скорость и ускорение точки в цилиндрической системе координат (рис. 8.10).

В этом случае:

$$q_1 = r, q_2 = \varphi, q_3 = z,$$

причем

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad z = z.$$

$$H_r = 1; \quad H_\varphi = r; \quad H_z = 1.$$

$$v_r = \dot{r}; \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}; \quad v_z = \dot{z}.$$

$$T^\circ = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2);$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2; \quad a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}; \quad a_z = \ddot{z}.$$

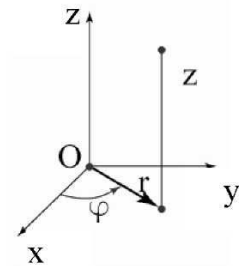


Рис. 8.10

2. Найти скорость и ускорение точки в сферической системе координат (рис. 8.11).

$$q_1 = r, q_2 = \varphi, q_3 = \vartheta.$$

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi; \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi; \quad z = r \cos \vartheta.$$

$$H_r = 1; \quad H_\varphi = r \sin \vartheta; \quad H_\vartheta = r.$$

$$v_r = \dot{r}; \quad v_\varphi = r \sin \vartheta \dot{\varphi}; \quad v_\vartheta = r \dot{\vartheta}.$$

$$T^\circ = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2);$$

$$a_r = \ddot{r} - r \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 - r \dot{\vartheta}^2;$$

$$a_\varphi = r \sin \vartheta \ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \vartheta + 2r \cos \vartheta \dot{\varphi} \dot{\vartheta};$$

$$a_\vartheta = r \ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} - r \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2.$$

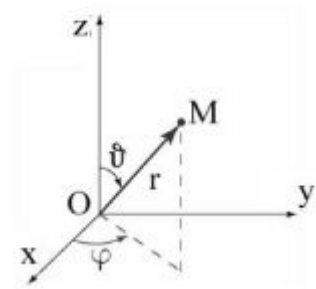


Рис. 8.11

## 9. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

### 9.1. Поступательное движение твердого тела

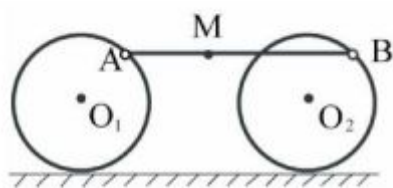


Рис. 9.1

**Поступательным** называется такое движение твердого тела, когда любая проведенная в нем прямая остается параллельной самой себе.

В качестве примера поступательного движения можно привести движение спарника колес паровоза, имеющих одинаковый радиус (рис. 9.1).

Стержень  $AB$ , соединяющий две точки колес с центрами в точках  $O_1$  и  $O_2$ , называется **спарником**.

При движении паровоза, если колеса вращаются без проскальзывания, спарник остается параллельным самому себе и, следовательно, движется поступательно.

При поступательном движении точки твердого тела описывают одинаковые траектории.

Пусть отрезок  $\vec{r}_{AB}$  соединяет две произвольные точки тела, совершающего поступательное движение (рис. 9.2).

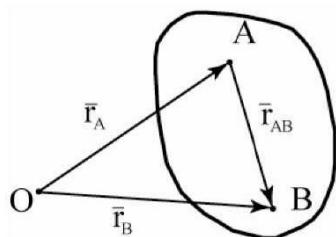


Рис. 9.2

Положение точек  $A$  и  $B$  определим их радиус-векторами  $\vec{r}_A$  и  $\vec{r}_B$ . Радиус-вектор  $\vec{r}_{AB}$  постоянен по величине и направлению:

$$\vec{r}_{AB} = const.$$

Поскольку

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}, \quad (9.1.1)$$

то траектория точки  $B$  получается из траектории точки  $A$  параллельным смещением точек этой траектории на постоянный вектор  $\vec{r}_{AB}$ .

В рассматриваемом примере у спарника колес паровоза траекториями точек  $A$  и  $B$ , а, следовательно, и точки  $M$ , являются циклоиды одинаковой формы.

Докажем, что при поступательном движении твердого тела все его точки движутся с одинаковыми скоростями и ускорениями.

Воспользовавшись соотношением (9.1.1), найдем:

$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} + \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}.$$

Согласно определению поступательного движения:

$$\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = 0.$$

Следовательно, скорости точек  $A$  и  $B$  равны между собой:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B.$$

Дифференцируя последнее выражение по времени, приходим к выводу, что и ускорения этих точек также одинаковы:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B.$$

Таким образом, для изучения поступательного движения твердого тела достаточно изучить движение одной точки. Следовательно, кинематика поступательного движения сводится к кинематике точки.

## 9.2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

*Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором, по крайней мере, две его точки остаются неподвижными. Прямая, проходящая через эти две точки, называется осью вращения (рис. 9.3).*

Положительным направлением вращения будем считать вращение против часовой стрелки. Проведем плоскость через ось вращения и некоторую точку  $M_0$ .

Положение тела определим, задав угол поворота этой плоскости как функцию времени:

$$\varphi = \varphi(t). \quad (9.2.1)$$

Угол  $\varphi$  будем считать положительным, если поворот происходит против часовой стрелки, в противном случае будем считать его отрицательным. Угол  $\varphi$  измеряется в радианах.

*Угловая скорость тела характеризует интенсивность изменения угла поворота и равна первой производной от угла поворота по времени:*

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (9.2.2)$$

*Угловое ускорение тела характеризует интенсивность изменения угловой скорости и равно первой производной от угловой скорости по времени или второй производной по времени от угла поворота:*

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (9.2.3)$$

Угловую скорость и угловое ускорение принято изображать скользящими векторами. Вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$  направляют вдоль по оси вращения в ту часть пространства, откуда вращение видно против часовой стрелки.

Если вращение ускоренное, то вектор углового ускорения  $\vec{\varepsilon}$  совпадает по направлению с вектором угловой скорости  $\vec{\omega}$ .

Траекториями точек тела при вращении вокруг неподвижной оси являются окружности, расположенные в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения. Центры этих окружностей находятся в точках пересечения оси с указанными плоскостями. Радиусы данных окружностей представляют собой расстояния точек до оси вращения.

Поскольку траектории точек известны, то можно считать, что движение задано естественным способом. Обозначим дугу  $M_0M$  через  $S$ . При повороте тела на угол  $\varphi$  закон движения точки по траектории будет:

$$S = R\varphi, \quad (9.2.4)$$



Рис. 9.3



где  $S$  – дуговая координата, соответствующая углу поворота  $\varphi = \varphi(t)$ .

Для определения скоростей и ускорений точки воспользуемся общими формулами, полученными в естественных осях.

Для скорости точки, согласно (9.2.4), имеем:

$$v_\tau = \dot{S} = R\dot{\varphi} = R\omega. \quad (9.2.5)$$

Касательное ускорение будет:

$$a_\tau = \dot{v}_\tau = \dot{S} = R\ddot{\varphi} = R\varepsilon. \quad (9.2.6)$$

Учитывая формулу для скорости (9.2.5), найдем нормальное ускорение:

$$a_n = \frac{v_\tau^2}{R} = \frac{v^2}{R} = R\omega^2. \quad (9.2.7)$$

Формулам для скоростей и ускорений точек при вращении тела вокруг неподвижной оси можно придать векторную форму (рис. 9.4).

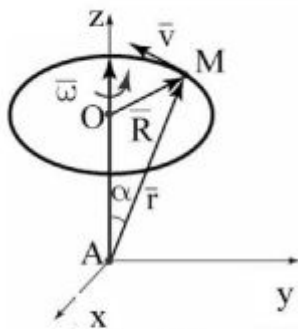


Рис. 9.4

Пусть тело вращается против часовой стрелки. Вектор угловой скорости  $\bar{\omega}$  направлен по оси  $Oz$ . Положение рассматриваемой точки  $M$  определим с помощью радиус-вектора  $\bar{r}$ , проведенного из начала координат. Радиус вращения  $R$  будет  $R = r \sin \alpha$ , где  $\alpha$  – угол между осью вращения и радиус-вектором  $\bar{r}$ . Следовательно, модуль линейной скорости будет равен модулю векторного произведения  $\bar{\omega} \times \bar{r}$ . Но и направление линейной скорости  $\bar{v}$  совпадает с направлением этого векторного произведения, т.е.

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (9.2.8)$$

Формула (9.2.8) называется **формулой Эйлера**. Проекции скорости на произвольные оси координат будут:

$$v_x = \omega_y r_z - \omega_z r_y;$$

$$v_y = \omega_z r_x - \omega_x r_z;$$

$$v_z = \omega_x r_y - \omega_y r_x,$$

где  $r_x, r_y, r_z$  – проекции радиус-вектора  $r$  на оси координат  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – соответствующие проекции вектора угловой скорости.

Векторная формула для ускорений может быть получена путем дифференцирования формулы Эйлера (9.2.8):

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}), \quad (9.2.9)$$

где  $\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$  – угловое ускорение;  $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$  – скорость точки.

Здесь  $\bar{\varepsilon} \times \bar{r} = \bar{a}_\tau$  – вращательное ускорение;  
 $\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = -\omega^2 \bar{R} = \bar{a}_n$  – центростремительное ускорение (рис. 9.5).

На рис. 9.5 изображены составляющие полного ускорения точки  $M$ :  $\bar{a}_\tau$  и  $\bar{a}_n$ , их векторная сумма  $\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$ .

При этом  $\operatorname{tg} \beta = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$ . Угол  $\beta$  откладывается

от полного ускорения  $\bar{a}$  при ускоренном вращении в сторону вращения. При замедленном вращении – в сторону, противоположную вращению.

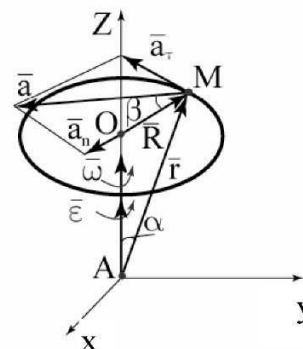


Рис. 9.5

### 9.3. Плоско-параллельное движение твердого тела

*Плоско-параллельным или плоским движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости* (рис. 9.6).

Из определения плоско-параллельного движения следует, что движение точек тела, расположенных на перпендикуляре к неподвижной плоскости  $\Pi_0$ , одинаково. Поэтому можно рассматривать движение проекции тела на неподвижную плоскость по этой плоскости.

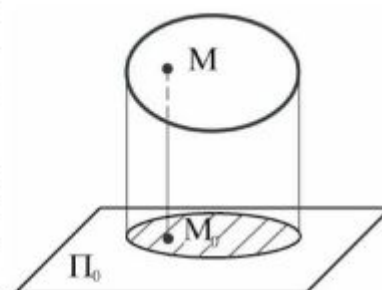


Рис. 9.6

#### Теорема о перемещениях плоской фигуры

**Теорема.** *Перемещение плоской фигуры в ее плоскости можно осуществить путем поступательного перемещения вместе с произвольно выбранным полюсом и вращения вокруг полюса. При этом угол поворота от выбора полюса не зависит.*

**Доказательство.** Пусть отрезок  $AB$ , определяющий положение плоской фигуры, занял новое положение  $A_1B_1$  (рис. 9.7). В это положение можно попасть двумя путями. Первый путь – это параллельный перенос отрезка в положение  $A_1B_1'$  и поворот вокруг точки  $A_1$ , принятой за полюс, на угол  $\varphi$ . Второй путь – это параллельный перенос отрезка в положение  $A_1'B_1$  и поворот на угол  $\varphi$  уже вокруг точки  $B_1$ . По построению в обоих случаях угол поворота одинаков.

Полное перемещение состоит из поступательного перемещения и поворота на один и тот же угол вокруг соответствующего полюса, что и доказывает сформулированную выше теорему.

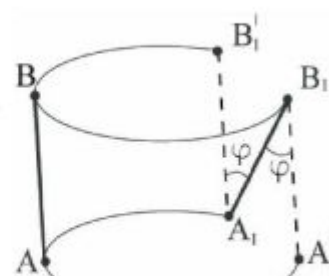


Рис. 9.7

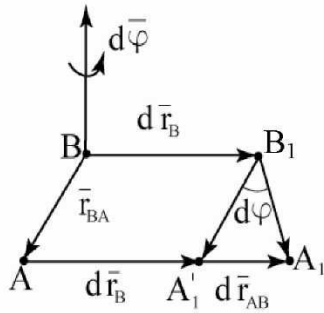


Рис. 9.8

Указанные соображения справедливы и для бесконечно малых перемещений отрезка  $AB$  (рис. 9.8).

Перемещение точки  $A$  равно:

$$d\vec{r}_A = d\vec{r}_B + d\vec{r}_{AB},$$

причем

$$d\vec{r}_{AB} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}_{BA},$$

где  $d\vec{\varphi}$  – вектор бесконечно малого угла поворота, направленный перпендикулярно плоскости, в которой движется отрезок  $AB$  в ту часть пространства, откуда поворот виден против часовой стрелки;  $d\vec{r}_B$  – перемещение точки  $B$ .

Окончательно имеем:

$$d\vec{r}_A = d\vec{r}_B + d\vec{\varphi} \times \vec{r}_{BA}. \quad (9.3.1)$$

Из формулы (9.3.1) следует, что плоско-параллельные перемещения можно рассматривать как совокупность некоторого переносного движения вместе с полюсом и относительно вращательного движения вокруг полюса.

### Кинематические уравнения плоско-параллельного движения

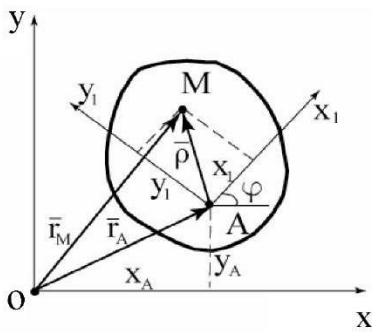


Рис. 9.9

Пусть плоская фигура движется в неподвижной плоскости (рис. 9.9).

Выберем в качестве полюса точку  $A$  плоской фигуры и свяжем с ней подвижную систему координат, движущуюся вместе с фигурой. Для определения положения подвижной системы координат относительно неподвижной следует задать положение полюса  $A$  и угол поворота  $\varphi$  вокруг полюса:

$$x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad (9.3.2)$$

где  $x_A, y_A, \varphi$  – однозначные, непрерывные и дважды дифференцируемые функции времени.

Координаты любой точки  $M$  будут:

$$\begin{aligned} x_M &= x_A + x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi; \\ y_M &= y_A + x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi \end{aligned} \quad (9.3.3)$$

или в матричной форме:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + A\vec{\rho},$$

где

$$A = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix};$$

$$\vec{r}_M^T = (x_M, y_M), \quad \vec{r}_A^T = (x_A, y_A), \quad \vec{\rho}^T = (x_1, y_1).$$

### Скорости точек тела при плоско-параллельном движении

При плоско-параллельном движении твердого тела скорость любой его точки равна векторной сумме скорости полюса и относительной вращательной скорости вокруг полюса. Чтобы доказать это положение, воспользуемся формулой (9.3.1) и поделим обе ее части на  $dt$

$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} + \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r}_{BA}.$$

Согласно определению линейной скорости и угловой скорости, получаем:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}, \quad (9.3.4)$$

где  $\vec{v}_A$  – скорость точки  $A$ ;  $\vec{v}_B$  – скорость точки  $B$ , принятой за полюс;

$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$  – угловая скорость плоской фигуры (рис. 9.10).

На рис. 9.10  $\vec{v}_{AB} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$  вращательная скорость точки  $A$  по отношению к точке  $B$ . При этом  $\vec{v}_{AB} \perp \vec{r}_{BA}$ . Поэтому **проекции скоростей концов отрезка  $\vec{v}_B$  и  $\vec{v}_A$  на направление отрезка равны между собой.**

Если известен вектор скорости одной точки и направление скорости другой, то можно графически найти скорость любой точки плоской фигуры (рис. 9.11,а).

Построение осуществляем согласно формуле:  $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$ , причем  $\vec{v}_{BA} \perp AB$  (рис. 9.11, б).

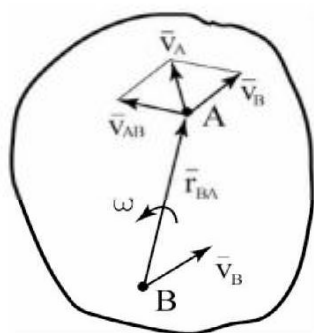


Рис. 9.10

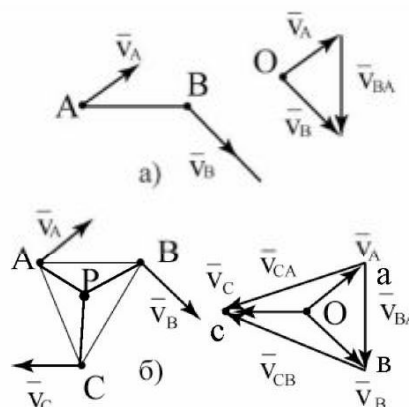


Рис. 9.11

Для нахождения скорости точки  $C$  воспользуемся формулами:  $\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA}$ ,  $\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}$ , при этом  $\vec{v}_{AC} \perp \overline{AC}$ ;  $\vec{v}_{CB} \perp \overline{BC}$ . Из построения следует, что треугольник  $abc$  подобен треугольнику  $ABC$ , при этом

$$\frac{v_{CA}}{AC} = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{v_{CB}}{BC} = \omega.$$

Треугольник  $abc$  повернут на угол  $\pi/2$  по отношению к треугольнику  $ABC$  в сторону вращения.

## Мгновенный центр скоростей

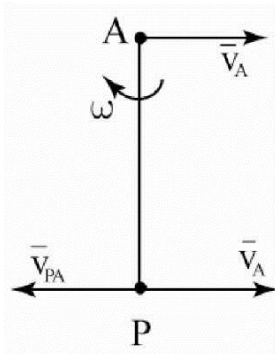


Рис. 9.12

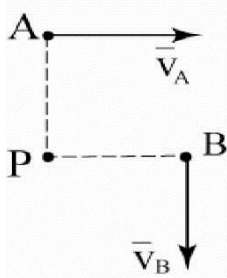


Рис. 9.13

В каждый момент времени существует точка плоской фигуры, скорость которой равна нулю. Эта точка называется мгновенным центром скоростей. Докажем его существование.

Пусть известна скорость какой-либо точки  $A$  и мгновенная угловая скорость плоской фигуры  $\omega$ . Отложим отрезок  $AP = \frac{v_A}{\omega}$  от вектора  $\bar{v}_A$  в сторону вращения (рис. 9.12).

По построению  $\bar{v}_{PA} = -\bar{v}_A$ . Следовательно,  $\bar{v}_P = \bar{v}_A + \bar{v}_{PA} = 0$ . Распределение скоростей фигуры соответствует мгновенному вращению вокруг мгновенного центра скоростей. Поэтому, например, если известны скорости двух точек, то мгновенный центр скоростей окажется на пересечении перпендикуляров, проведенных из начала векторов этих скоростей (рис. 9.13).

Действительно, если  $AP \perp \bar{v}_A$ , и поскольку,  $\bar{v}_P = \bar{v}_A + \bar{v}_{PA}$ ,  $\bar{v}_{PA} \perp AP$ ,  $\bar{v}_P = \bar{v}_B + \bar{v}_{PB}$ ,  $\bar{v}_{PB} \perp BP$ , то  $\bar{v}_P \perp AP$  и  $\bar{v}_P \perp BP$ .

Но скорость точки  $P$  не может быть перпендикулярна одновременно двум разным направлениям. Следовательно,

$\bar{v}_P = 0$ .

Очевидно,  $\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}$ . Величины скоростей пропорциональны их рас-

стояниям от мгновенного центра скоростей:  $\frac{v_A}{v_B} = \frac{AP}{BP}$ . Таким образом, скорости

точек  $A$  и  $B$  можно рассматривать как скорости в их вращательном движении вокруг мгновенного центра скоростей  $P$ .

Примеры графического определения центра скоростей показаны на рис. 9.14, а, б, в.

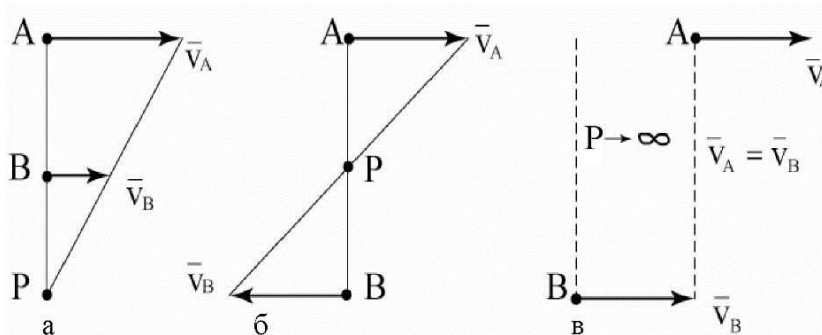


Рис. 9.14



В качестве другого примера построения плана скоростей рассмотрим кривошипно-шатунный механизм (рис. 9.15, а, б, в).

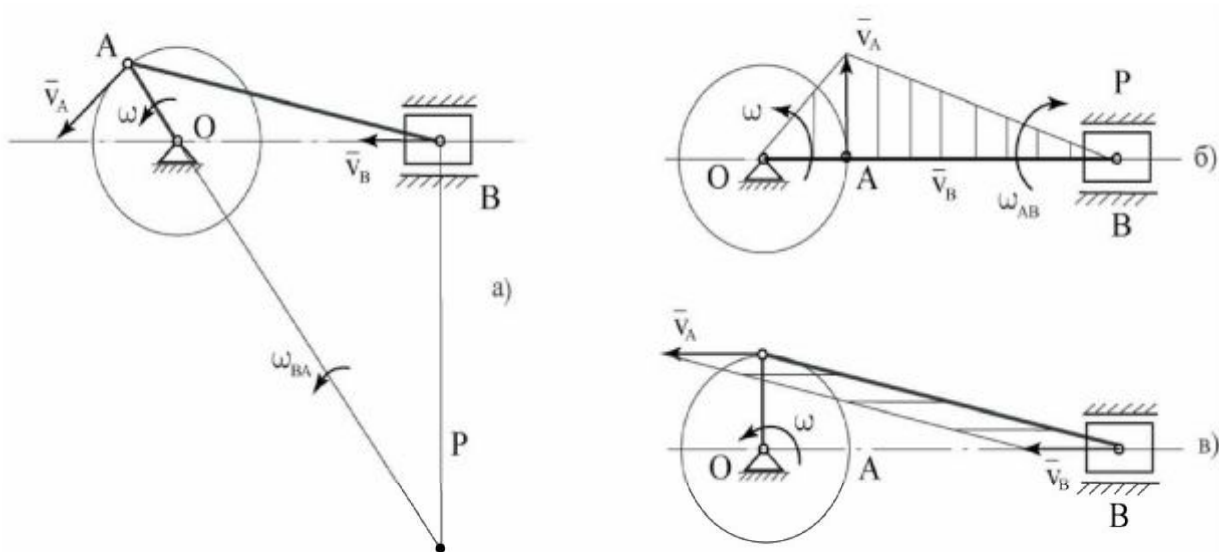


Рис. 9.15

В первом случае  $\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP}$ . Во втором случае поршень находится в верхней мертвой точке, его скорость, равна нулю  $\omega_{AB} = \frac{v_A}{AB}$ . В третьем случае, когда  $OA \perp OB$ , скорости точек  $A$  и  $B$  одинаковы:  $\bar{v}_A = \bar{v}_B$ . Мгновенный центр скоростей звена  $AB$  находится в бесконечности и, следовательно,  $\omega_{AB} = 0$ .

### Ускорения точек тела при плоско-параллельном движении

*Ускорение любой точки тела при плоско-параллельном движении равно геометрической сумме ускорения полюса, вращательного и центростремительного ускорения относительно полюса* (рис. 9.16).

Согласно формуле (9.3.4) и определению ускорения

$$\begin{aligned} \bar{a}_A &= \frac{d\bar{v}_A}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{v}_B + \bar{\omega} \times \bar{r}_{BA}) = \\ &= \frac{d\bar{v}_B}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}_{BA} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}_{BA}}{dt}. \end{aligned} \quad (9.3.5)$$

Но  $\frac{d\bar{v}_B}{dt} = \bar{a}_B$  – ускорение полюса;

$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon}$  – угловое ускорение плоской фигуры;

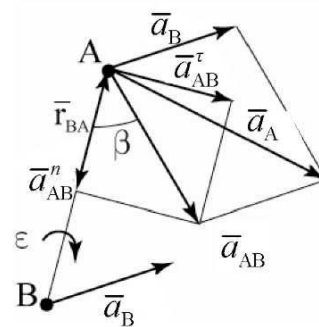


Рис. 9.16

$\frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \vec{v}_{AB} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$  – относительная скорость точки  $A$  по отношению к точке  $B$ .

Следовательно, формулу (9.3.5) можно переписать так:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{BA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}). \quad (9.3.6)$$

Величина  $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{BA} = \vec{a}_{AB}^{\tau}$  представляет собой вращательное ускорение. Так как  $\sin(\vec{\varepsilon}, \vec{r}_{BA}) = 1$ , то модуль вращательного ускорения  $a_{AB}^{\tau} = \varepsilon r_{BA}$ . Величина  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}) = -\omega^2 \vec{r}_{BA} = \vec{a}_{AB}^n$  является центростремительным ускорением. Вектор  $\vec{a}_{AB}^n$  направлен из точки  $A$  к точке  $B$ . Следовательно, относительное ускорение точки  $A$  во вращательном движении вокруг точки  $B$  будет:

$$\vec{a}_{AB} = \vec{a}_{AB}^{\tau} + \vec{a}_{AB}^n,$$

при этом

$$a_{AB} = r_{BA} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{a_{AB}^{\tau}}{a_{AB}^n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

С учетом введенных обозначений формула (9.3.6) переписывается так:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}^{\tau} + \vec{a}_{AB}^n. \quad (9.3.7)$$

При плоско-параллельном движении вращательное ускорение  $\vec{a}_{AB}^{\tau}$  следует отличать от касательного  $\vec{a}_{\tau}$ , а центростремительное ускорение  $\vec{a}_{AB}^n$  от нормального  $\vec{a}_n$ . Касательное ускорение направлено по касательной, а нормальное – по главной нормали к абсолютной траектории точки. Центростремительное и вращательное ускорения представляют собой ускорения в относительном вращательном движении вокруг полюса. Центростремительное ускорение  $\vec{a}_{AB}^n$  направлено по радиус-вектору  $\vec{r}_{BA}$ , а вращательное  $\vec{a}_{AB}^{\tau}$  перпендикулярно радиус-вектору  $\vec{r}_{BA}$  и направлено в сторону углового ускорения  $\varepsilon$ .

Если принять во внимание алгебраические величины проекций ускорений концов отрезка на направление отрезка, то оказывается, что проекция ускорения любой точки плоской фигуры на ось, проведенную из произвольного полюса через эту точку, не может быть больше проекции ускорения полюса на ту же ось (рис. 9.17).

Действительно, если построить вектор ускорения точки  $A$  согласно формуле:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}^{\tau} + \vec{a}_{AB}^n,$$

то окажется, что проекция  $\vec{a}_B$  на направление отрезка  $\vec{r}_{BA}$  всегда больше проекции ускорения точки  $A$   $\vec{a}_A$  из-за того, что  $\vec{a}_{AB}^n$  направлено от точки  $A$  к точке  $B$ , а составляющая  $\vec{a}_{AB}^{\tau} \perp \vec{r}_{BA}$ . Концы ускорений точек отрезка, принадлежащего плоской фигуре, лежат на одной прямой и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между этими точками (рис. 9.18).

Относительные ускорения точек  $D$  и  $B$  равны соответственно:

$$a_{DA} = AD\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

$$a_{BA} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Угол  $\beta$  между  $\bar{a}_{DA}$  и  $\bar{a}_{BA}$  и прямой  $AB$  одинаков, так как  $\operatorname{tg}\beta = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$ .

Следовательно,  $\Delta A_1 D_1 D_2 \propto \Delta A_1 B_1 B_2$  и концы векторов ускорений  $\bar{a}_D$  и  $\bar{a}_B$  лежат на одной прямой. При этом

$$\frac{A_1 D_2}{A_1 B_2} = \frac{A_1 D_1}{A_1 B_1} = \frac{AD}{AB}.$$

Таким образом, концы ускорений точек отрезка делят прямую, соединяющую эти концы, на части, пропорциональные расстояниям между соответствующими точками.

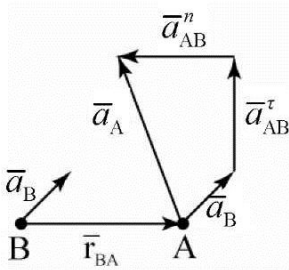


Рис. 9.17

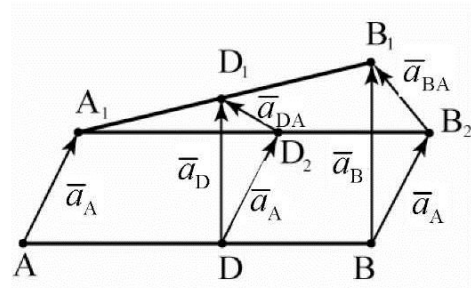


Рис. 9.18

### Мгновенный центр ускорений

Ускорение любой точки плоской фигуры определяется как геометрическая сумма ускорения полюса и ускорения этой точки во вращении вокруг полюса (рис. 9.19). Покажем, что в каждый момент времени существует точка плоской фигуры, ускорение которой в этот момент равно нулю. Ранее было установлено, что угол  $\beta$  между вектором относительного ускорения и отрезком, соединяющим точку и полюс, равен  $\beta = \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{\omega^2}$  и находится в пределах от 0 до

$\pi/2$ . Отложим угол  $\beta$  от ускорения  $\bar{a}_A$  по направлению углового ускорения  $\varepsilon$ .

На проведенной полупрямой отложим отрезок

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \quad \text{Тогда} \quad \text{окажется,} \quad \text{что}$$

$a_{QA} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = a_A$ , причем  $\bar{a}_{QA} = -\bar{a}_A$ . Поэтому  $\bar{a}_Q = \bar{a}_A + \bar{a}_{QA} = 0$ . Поскольку ускорение точки  $Q$  равно нулю, то эта точка является мгновенным центром ускорений.

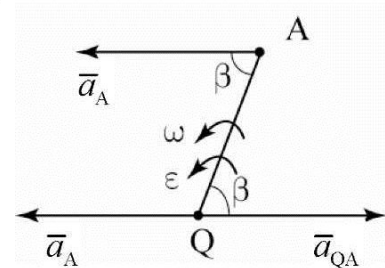


Рис. 9.19

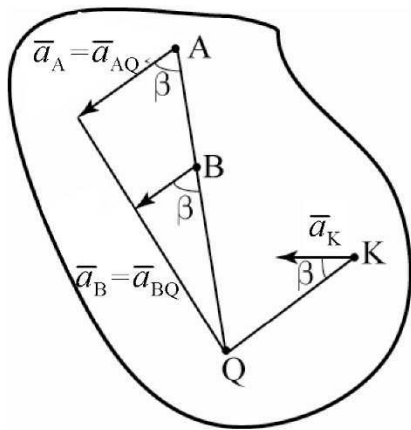


Рис. 9.20

Если мгновенный центр ускорений принять за полюс, то ускорение любой точки плоской фигуры в данный момент определится как ускорение этой точки во вращательном движении вокруг центра ускорений (рис. 9.20).

Модули ускорений точек плоской фигуры в каждый момент времени пропорциональны расстояниям этих точек до мгновенного центра ускорений. Углы, которые составляют эти ускорения с лучами, проведенными в мгновенный центр ускорений, одинаковы для всех точек. Мгновенный центр ускорений и мгновенный центр скоростей – разные точки.

Если известны модули и направления двух точек, то мгновенный центр ускорений можно найти, исходя из следующих соображений. Ускорения точек связаны соотношением:  $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$ , откуда  $\vec{a}_{BA} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$ .

Угол между  $\vec{a}_{BA}$  и отрезком  $AB$  равен  $\beta$ , причем  $\beta = \arctg \frac{\varepsilon}{\omega^2}$ . Отложим угол  $\beta$  от  $\vec{a}_A$  и  $\vec{a}_B$ . Точка пересечения лучей определяет мгновенный центр ускорений (рис. 9.21).

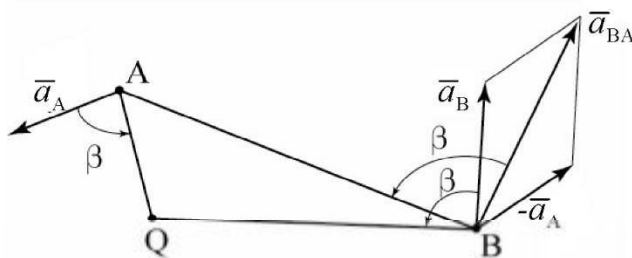


Рис. 9.21

**Пример.** Кривошип  $OA$  кривошипно-шатунного механизма вращается равномерно с угловой скоростью  $\omega$ . Длина шатуна  $AB$  в два раза больше длины кривошипа  $OA$ .

Определить положение точки шатуна  $AB$ , ускорение которой направлено вдоль шатуна, в момент, когда кривошип перпендикулярен направляющей ползуна (рис. 9.22).

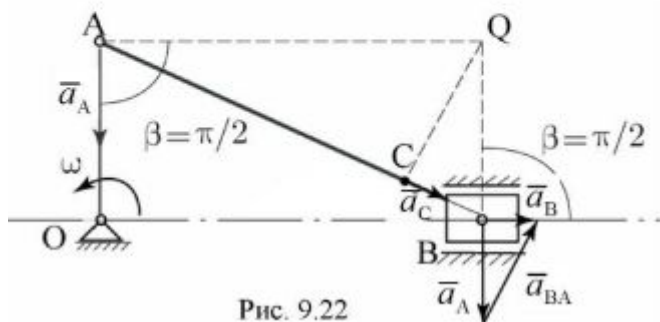


Рис. 9.22

Согласно общей формуле для ускорений при плоскопараллельном движении  $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^t + \vec{a}_{BA}^n$ . В данном случае  $\omega_{AB} = 0$  и поэтому  $\vec{a}_{BA}^n = 0$ , так как звено  $AB$  находится в состоянии мгновенно – поступательного движения  $\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^t$  и направлено перпендикулярно шатуну  $AB$ .

Следовательно,  $\beta = \arctg \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \infty$  и, следовательно,  $\beta = \pi/2$ . Мгновенный центр ускорений  $Q$ , таким образом, находится на пересечении перпендикуляров, проведенных из начала векторов ускорений в точках  $A$  и  $B$ .

Если опустить из точки  $Q$  перпендикуляр  $QC$  на  $AB$ , то ускорение точки  $C$  будет перпендикулярно  $QC$  и, следовательно, совпадет с  $AB$ . Поскольку  $\angle ABO = 30^\circ$ , то:

$$CB = \frac{1}{2} AB \cos 60^\circ = \frac{1}{4} AB .$$

#### 9.4. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки

##### Определение положения твердого тела, имеющего неподвижную точку

Пусть твердое тело имеет неподвижную точку, вокруг которой оно может вращаться как угодно (рис. 9.23).

Выясним число параметров, которое необходимо задать для определения положения твердого тела в пространстве. Проведем в теле ось  $\bar{u}$ , жестко связанную с телом. Положение этой оси можно задать, например, двумя углами  $\alpha$  и  $\beta$ , которые представляют собой соответственно угол между осью  $x$  и осью  $\bar{u}$  и угол между осью  $y$  и осью  $\bar{u}$ .

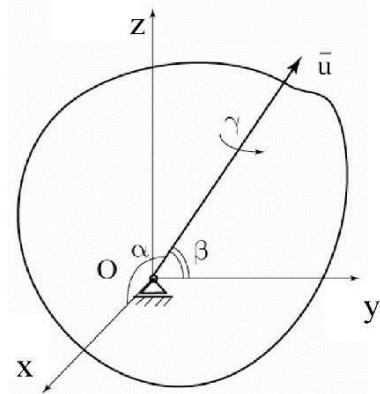


Рис. 9.23

Однако этих двух углов еще недостаточно для определения положения твердого тела, так как тело может вращаться вокруг оси  $\bar{u}$ . Угол поворота  $\gamma$  вокруг оси  $\bar{u}$  в совокупности с углами  $\alpha$  и  $\beta$  полностью определяют положение твердого тела. Таким образом, положение твердого тела, имеющего неподвижную точку, определяется тремя независимыми величинами. Говорят, что в таком случае система имеет три степени свободы. Положение тела можно задать при помощи матрицы направляющих косинусов между подвижной системой координат  $(O, x_1, y_1, z_1)$ , жестко связанной с телом, и неподвижной системой координат  $(O, x, y, z)$  (рис. 9.24).

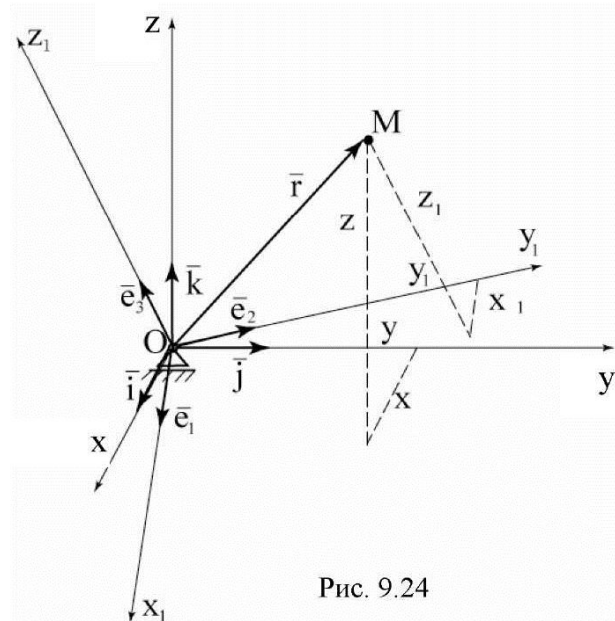


Рис. 9.24



Направляющие косинусы приведены в следующей таблице:

	$x_1$	$y_1$	$z_1$
$x$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$y$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$z$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$

Здесь  $\alpha_{11} = \cos(x, x_1), \alpha_{12} = \cos(x, y_1), \dots, \alpha_{33} = \cos(z, z_1)$ .

Тогда декартовы координаты в обеих системах будут связаны равенствами:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

где  $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$  – матрица направляющих косинусов.

Учитывая, что имеет место тождество:

$$A^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^T A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},$$

можно сделать вывод, что:

$$A^T A = I,$$

где  $I$  – единичная матрица и, следовательно,  $A^T = A^{-1}$ , то есть транспонированная матрица  $A$  равна своей обратной.

Единичные орты подвижной системы  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  – записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= \alpha_{11}\bar{i} + \alpha_{21}\bar{j} + \alpha_{31}\bar{k}; \\ \bar{e}_2 &= \alpha_{12}\bar{i} + \alpha_{22}\bar{j} + \alpha_{32}\bar{k}; \\ \bar{e}_3 &= \alpha_{13}\bar{i} + \alpha_{23}\bar{j} + \alpha_{33}\bar{k} \end{aligned}$$

Очевидно:

$$\bar{e}_i \bar{e}_j = \sum_{k=1}^3 \alpha_{k_i} \alpha_{k_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \quad (9.4.1)$$

Величина  $\delta_{ij}$  называется **символом Кронекера**.

Всего имеется шесть соотношений вида (9.4.1). Можно построить соотношения вида (9.4.1), взяв обратные соотношения:

$$\begin{aligned}\bar{i} &= \alpha_{11}\bar{e}_1 + \alpha_{12}\bar{e}_2 + \alpha_{13}\bar{e}_3; \\ \bar{j} &= \alpha_{21}\bar{e}_1 + \alpha_{22}\bar{e}_2 + \alpha_{23}\bar{e}_3; \\ \bar{k} &= \alpha_{31}\bar{e}_1 + \alpha_{32}\bar{e}_2 + \alpha_{33}\bar{e}_3\end{aligned}$$

При этом получим:

$$\sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} \alpha_{jk} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \quad (9.4.2)$$

Соотношения (9.4.1) и (9.4.2) взаимосвязаны, так как координаты  $(x, y, z)$  и  $(x_1, y_1, z_1)$  могут меняться ролями. Поэтому из соотношений (9.4.2) следуют соотношения (9.4.1) и наоборот. Следовательно, между девятью направляющими имеется шесть соотношений: либо (9.4.1), либо (9.4.2). Поэтому независимых величин, определяющих положение твердого тела, все-таки три.

Однако выразить через три независимых косинуса все остальные затруднительно. Эту трудность можно устранить, вводя так называемые углы Эйлера, которые полностью определяют положение твердого тела, имеющего неподвижную точку, и являются независимыми переменными. Углы Эйлера вводятся следующим образом. Повернем исходную систему вокруг оси  $z$  на угол  $\psi$  (рис. 9.25).

Угол  $\psi$  называется **углом прецессии**. Соответствующая ему матрица поворота имеет вид:

$$A_\psi = \begin{vmatrix} \cos \psi; & -\sin \psi; & 0 \\ \sin \psi; & \cos \psi; & 0 \\ 0; & 0; & 1 \end{vmatrix}.$$

Положение оси  $x$ , получающееся в результате этого поворота, обозначим через  $N$ . Назовем ось  $N$  линией узлов. Второй поворот осуществляется вокруг оси  $N$  на угол  $\vartheta$ , который называется **углом нутации**. Соответствующая ему матрица поворота имеет вид:

$$A_\vartheta = \begin{vmatrix} 1; & 0; & 0 \\ 0; & \cos \vartheta; & -\sin \vartheta \\ 0; & \sin \vartheta; & \cos \vartheta \end{vmatrix}.$$

Третий поворот совершается вокруг оси  $z_1$  на угол  $\varphi$ , называемый **углом собственного вращения** с матрицей

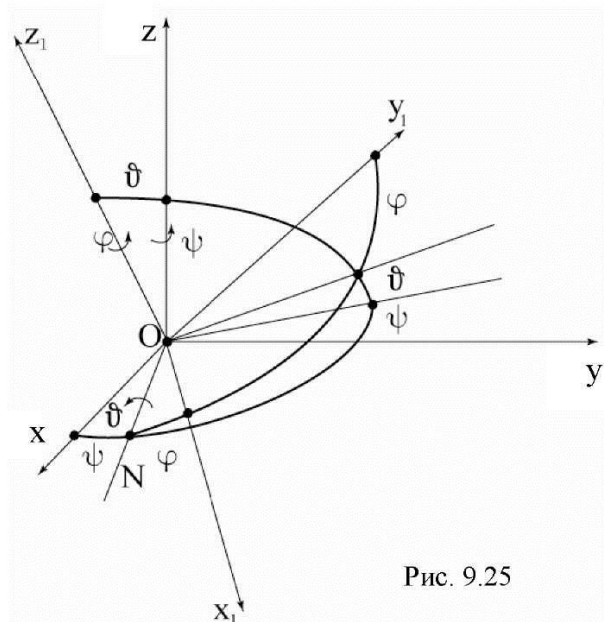


Рис. 9.25

$$A_\varphi = \begin{vmatrix} \cos \varphi; & -\sin \varphi; & 0 \\ \sin \varphi; & \cos \varphi; & 0 \\ 0; & 0; & 1 \end{vmatrix}.$$

Все три поворота осуществляются против часовой стрелки, если смотреть с конца соответствующей оси.

Матрица  $A$  перехода от осей  $Ox_1y_1z_1$  к осям  $Oxyz$  равна произведению:

$$A = A_\varphi A_\vartheta A_\psi.$$

Поскольку произведение матриц не коммутативно, то и конечные повороты твердого тела не обладают свойством коммутативности. Это означает, что ориентация твердого тела, полученная в результате конечных поворотов, зависит от порядка выполнения этих поворотов.

При  $\vartheta = 0$  или  $\vartheta = \pi$  линия узлов не определена и поэтому нельзя различить углы  $\psi$  и  $\varphi$ . Это затрудняет использование углов Эйлера, введенных таким образом. Этой трудности можно избежать, если модифицировать углы Эйлера и выбрать их так, как это делается при исследовании движения самолета или корабля.

### Скорости точек тела, вращающегося вокруг неподвижной точки

Определим положение точки  $M$  в системе осей, связанной с телом при помощи радиус-вектора (рис. 9.26):

$$\bar{r} = x_1\bar{e}_1 + y_1\bar{e}_2 + z_1\bar{e}_3. \quad (9.4.3)$$

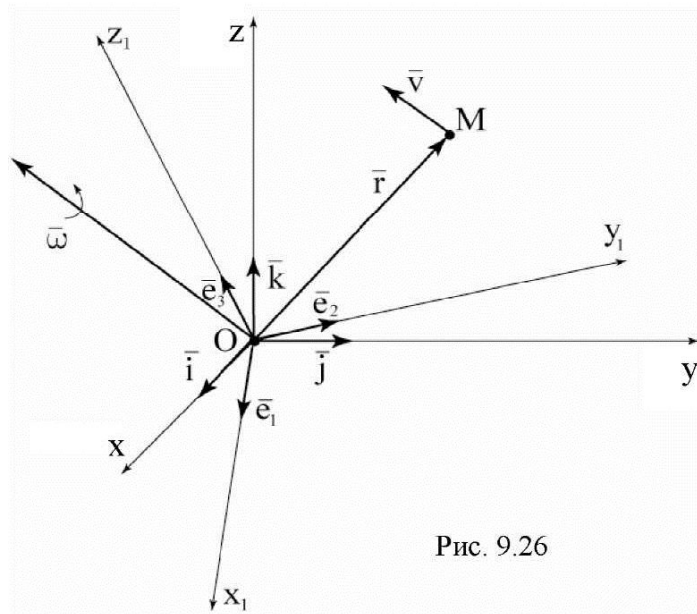


Рис. 9.26

При определении скорости точки  $M$  следует учесть, что координаты точки  $M$  в системе осей  $Ox_1y_1z_1$ , связанной с телом, неизменны, а координатные орты  $\bar{e}_i$  являются функциями времени. Поэтому

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = x_1 \frac{d\bar{e}_1}{dt} + y_1 \frac{d\bar{e}_2}{dt} + z_1 \frac{d\bar{e}_3}{dt}. \quad (9.4.4)$$

Координатные орты  $\bar{e}_i$  удовлетворяют соотношению:

$$\bar{e}_i \bar{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Найдем производную по времени от последнего соотношения:

$$\frac{d}{dt}(\bar{e}_i \bar{e}_j) = \frac{d}{dt} \bar{e}_i \bar{e}_j + \bar{e}_i \frac{d\bar{e}_j}{dt} = 0.$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &= \frac{d\bar{e}_i}{dt} \bar{e}_j = -\frac{d\bar{e}_j}{dt} \bar{e}_i = -\omega_{ji}; \\ \omega_{ii} &= \frac{d\bar{e}_i}{dt} \bar{e}_i = -\frac{d\bar{e}_i}{dt} \bar{e}_i = 0. \end{aligned}$$

Придадим индексам  $i, j$  конкретные значения:

$$\begin{aligned} \omega_{23} &= -\omega_{32} = \frac{d\bar{e}_2}{dt} \bar{e}_3 = -\frac{d\bar{e}_3}{dt} \bar{e}_2 = \omega_1; \\ \omega_{31} &= -\omega_{13} = \frac{d\bar{e}_3}{dt} \bar{e}_1 = -\frac{d\bar{e}_1}{dt} \bar{e}_3 = \omega_2; \\ \omega_{12} &= -\omega_{21} = \frac{d\bar{e}_1}{dt} \bar{e}_2 = -\frac{d\bar{e}_2}{dt} \bar{e}_1 = \omega_3. \end{aligned}$$

Пользуясь соотношениями (9.4.4), найдем проекции вектора скорости  $\bar{v}$  на координатные оси  $Ox_1y_1z_1$ :

$$\begin{aligned} v_{x_1} &= \bar{v} \bar{e}_1 = \omega_2 z_1 - \omega_3 y_1; \\ v_{y_1} &= \bar{v} \bar{e}_2 = \omega_3 x_1 - \omega_1 z_1; \\ v_{z_1} &= \bar{v} \bar{e}_3 = \omega_1 y_1 - \omega_2 x_1. \end{aligned} \quad (9.4.5)$$

Величины (9.4.5) представляют собой проекции векторного произведения векторов:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \omega_1 \bar{e}_1 + \omega_2 \bar{e}_2 + \omega_3 \bar{e}_3 \quad \text{на вектор} \quad \bar{r} = x_1 \bar{e}_1 + y_1 \bar{e}_2 + z_1 \bar{e}_3: \\ \bar{v} &= \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = (\omega_2 z_1 - \omega_3 y_1) \bar{e}_1 + (\omega_3 x_1 - \omega_1 z_1) \bar{e}_2 + (\omega_1 y_1 - \omega_2 x_1) \bar{e}_3. \end{aligned} \quad (9.4.6)$$

При вращении вокруг неподвижной оси вектор  $\bar{\omega}$  – вектор угловой скорости. Таким образом, формула (9.4.6) является обобщением формулы для скоростей точек тела при вращении вокруг неподвижной оси, при этом вектор  $\bar{\omega}$  следует называть вектором мгновенной угловой скорости.

## Ускорения точек тела, вращающегося вокруг неподвижной точки

Воспользуемся формулой Эйлера для определения скоростей точек тела при вращательном движении вокруг неподвижной точки:  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ . По определению ускорения:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Принимая во внимание, что  $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$  — является угловым ускорением, а

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  скоростью точки, получим  $\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ . Первое слагае-

мое  $\vec{a}^{\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$  называется вращательным ускорением, второе  $\vec{a}^n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  — осеостремительным ускорением. Преобразуем формулу для осеостремительного ускорения:

$$\vec{a}^n = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \omega^2 \vec{r} = \omega^2 \left[ \frac{\vec{\omega}}{\omega} \left( \frac{\vec{\omega}}{\omega} \cdot \vec{r} \right) - \vec{r} \right].$$

Согласно рис. 9.27, скалярное произведение вектора  $\frac{\vec{\omega}}{\omega}$ , являющегося единичным ортом оси  $\vec{\omega}$ , на вектор  $\vec{r}$ , представляет проекцию  $\vec{r}$  на вектор  $\vec{\omega}$ :

$$\frac{\vec{\omega}}{\omega} \cdot \vec{r} = OM_1.$$

Величина  $OM_1$ , будучи умноженной на единичный орт  $\frac{\vec{\omega}}{\omega}$ , превращается в век-

тор  $\overline{OM_1}$ , то есть  $\overline{OM_1} = \frac{\vec{\omega}}{\omega} \cdot \left( \frac{\vec{\omega}}{\omega} \cdot \vec{r} \right)$ .

Геометрическая разность равна  $\overline{OM_1} - \vec{r} = \overline{MM_1}$ .

Поэтому  $\vec{a}^n = \omega^2 \overline{MM_1}$ .

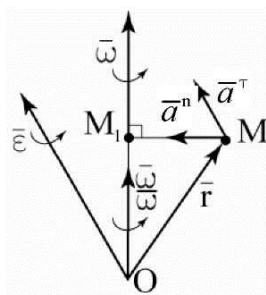


Рис. 9.27

Таким образом, вектор осеостремительного ускорения  $\vec{a}^n$  лежит в плоскости, определенной векторами  $\vec{\omega}$  и  $\vec{r}$ , и направлен вдоль мгновенного радиуса вращения к мгновенной оси вращения. По величине осеостремительное ускорение равно произведению квадрата угловой скорости на расстояние точки до мгновенной оси вращения.

Полное ускорение произвольной точки тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, равно векторной сумме вращательного и осеостремительного ускорения:

$$\vec{a} = \vec{a}^{\tau} + \vec{a}^n.$$

При этом вектор вращательного ускорения не направлен по касательной к траектории рассматриваемой точки, а вектор осеостремительного ускорения не направлен по главной нормали. На этот факт указывают индексы, расположенные сверху.



## 9.5. Движение свободного твердого тела

### Определение положения свободного твердого тела

Для того, чтобы задать положение свободного твердого тела, вводится неподвижная система координат  $O_0x_0y_0z_0$ . В некоторой точке  $O$  твердого тела, принимаемой за полюс, располагается система координат  $Oxyz$ , движущаяся поступательно к неподвижной системе  $O_0x_0y_0z_0$ . Кроме того, вводится система осей  $Ox_1y_1z_1$  связанная с телом. Положение системы осей  $Ox_1y_1z_1$  по отношению к поступательно движущейся системе  $Oxyz$  можно определить при помощи углов Эйлера: угла прецессии  $\psi$ , угла нутации  $\vartheta$  и угла собственного вращения  $\varphi$  (рис. 9.28).

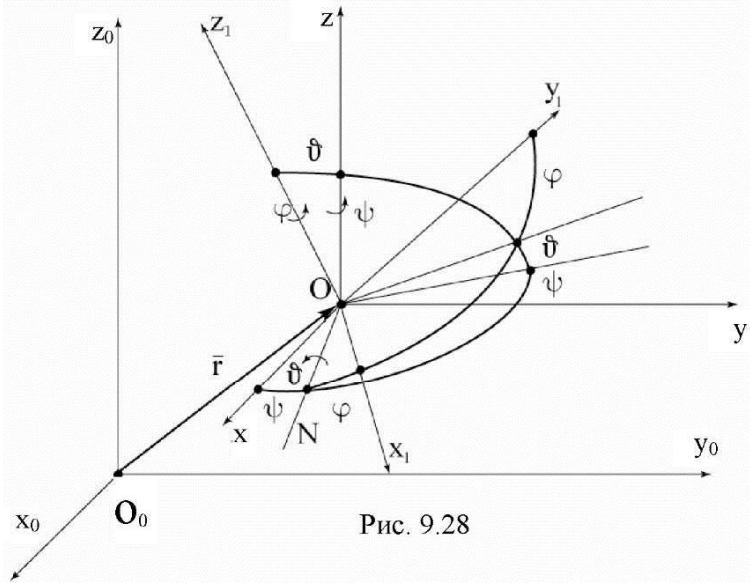


Рис. 9.28

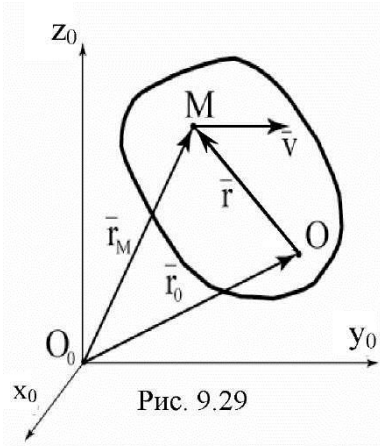
Положение свободного твердого тела однозначно определяется положением подвижной системы координат  $Ox_1y_1z_1$ . Следовательно, параметры, определяющие положение этой системы, определяют положение твердого тела. Этими параметрами являются координаты  $x_0, y_0, z_0$  ее начала и, например, углы Эйлера  $\psi, \vartheta$  и  $\varphi$ , определяющие направление осей подвижной системы координат.

Таким образом, положение твердого тела характеризуется шестью параметрами или, как говорят, свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы. Задание этих параметров как функций времени дают кинематические уравнения движения свободного твердого тела:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0(t), y_0 = y_0(t), z_0 = z_0(t), \\ \psi &= \psi(t), \vartheta = \vartheta(t), \varphi = \varphi(t). \end{aligned}$$

Из сказанного следует, что движение свободного твердого тела можно произвольным образом разбить на поступательное вместе с полюсом и вращательное вокруг полюса. При изменении положения полюса углы Эйлера не изменяются. Перемена полюса означает параллельный перенос осей  $Oxyz$ , а при параллельном переносе углы между осями не изменяются, следовательно, не изменяются ни угловая скорость вращения тела, ни его угловое ускорение.

## Скорости точек свободного твердого тела



Положение произвольной точки  $M$  свободного твердого тела определяется ее радиус-вектором (рис. 9.29):

$$\vec{r}_M = \vec{r}_0 + \vec{r},$$

где  $\vec{r}_0$  – радиус-вектор полюса;  $\vec{r}$  – радиус-вектор, определяющий положение точки в системе осей, связанных с телом.

Поскольку точки  $\vec{r}$  являются точками твердого тела, то все приращения  $\vec{r}$  возможны только за счет вращения.

Справедлива теорема: **Проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой.**

Рассмотрим величину:

$$r^2 = (\vec{r}_M - \vec{r}_0)(\vec{r}_M - \vec{r}_0) = const.$$

Ее производная по времени:

$$\frac{d}{dt} r^2 = 2 \left( \frac{d\vec{r}_M}{dt} - \frac{d\vec{r}_0}{dt} \right) (\vec{r}_M - \vec{r}_0) = 0.$$

Откуда

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} (\vec{r}_M - \vec{r}_0) = \frac{d\vec{r}_0}{dt} (\vec{r}_M - \vec{r}_0).$$

Следовательно,  $\vec{v}_M \vec{r} = \vec{v}_0 \vec{r}$ , что и доказывает теорему.

Согласно определению скорость точки:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Величина  $\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \vec{v}_0$  является скоростью полюса;  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  – вращательная скорость точки  $M$  по отношению к полюсу. Поэтому:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (9.5.1)$$

## Ускорения точек свободного твердого тела

Согласно определению:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}, \text{ или, учитывая, что } \frac{d\vec{v}_0}{dt} = \vec{a}_0 \text{ – является ус-}$$

корением полюса,  $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$  – представляет собой угловое ускорение, а  $\frac{d\vec{r}}{dt}$ , со-

гласно формуле Эйлера,  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , получим:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Здесь  $\bar{\varepsilon} \times \bar{r} = \bar{a}^\tau$  – вращательное ускорение;  $\bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{\omega}(\bar{\omega} \cdot \bar{r}) - \omega^2 \bar{r} = \bar{a}^n$  – осесредительное ускорение.

Таким образом:

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{a}^\tau + \bar{a}^n. \quad (9.5.2)$$

Формула (9.5.2), формула для скоростей (9.5.1), естественно, справедливы для всех частных случаев движения твердого тела, рассмотренных ранее.

### 9.6. Основные теоремы о конечных перемещениях твердого тела Векторно-матричное задание движения твердого тела

Пусть положение точки  $M$  определено радиус-вектором (рис. 9.30):

$$\bar{r}_M = \bar{r}_0 + \bar{r}. \quad (9.6.1)$$

Пусть радиус-вектор  $\bar{r}$  задан своими компонентами в системе осей  $Ox_1y_1z_1$ , то есть дано  $r^T = (x_1, y_1, z_1)$  и дана матрица  $A$  направляющих косинусов между системами осей  $Ox_0y_0z_0$  и  $Ox_1y_1z_1$ .

Если известны углы Эйлера, то  $A = A_\psi A_\theta A_\varphi$ . Тогда для вектора координат

точки в системе  $O_0x_0y_0z_0$   $r_M^T = (x_{M_0}, y_{M_0}, z_{M_0})$  получим:

$$r_M = r_0 + Ar,$$

где  $r_0^T = (x_0, y_0, z_0)$ , как было отмечено ранее, матрица  $A$  может быть задана и при помощи модифицированных углов Эйлера.

Матрица  $A$ , задавая переход от одного ортонормированного базиса к другому, является ортогональной, то есть  $A^T = A^{-1}$ .

Ее элементы связаны шестью соотношениями вида:

$$\sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} \alpha_{jk} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

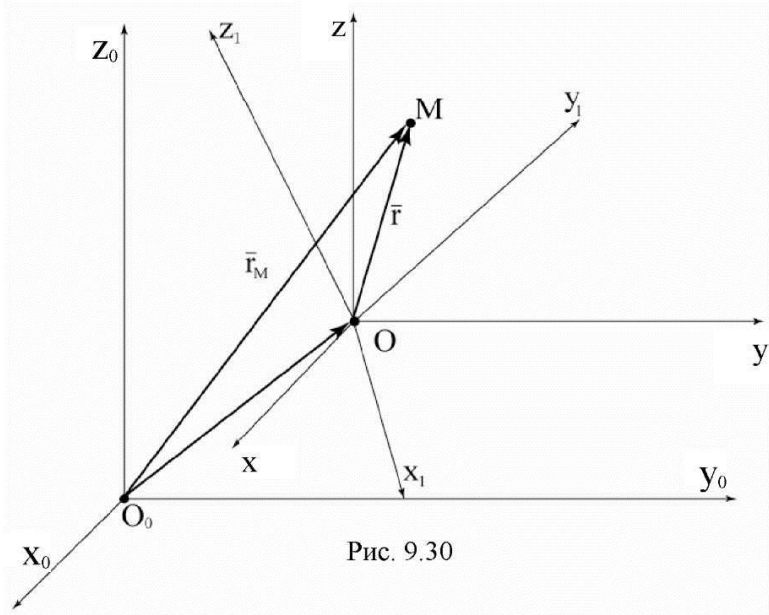


Рис. 9.30

## Движение тела с неподвижной точкой как ортогональное преобразование

При движении тела вокруг неподвижной точки в формуле (9.6.1) вектор  $\bar{r}_0$  постоянен. Пусть  $\bar{r}_0 = 0$ . Тогда:

$$r_M = Ar.$$

И, если в начальный момент оси  $Ox_0y_0z_0$  совпадают с осями  $Ox_1y_1z_1$ , то матрица  $A$  будет в этот момент единичной:

$$A(0) = I.$$

При этом  $r_M = r$ .

Когда тело начинает двигаться, то имеет место соотношение:

$$r_M = A(t)r.$$

Так как  $A(t)A^T(t) = I$ , то  $(\det A)^2 = 1$ .

Следовательно,  $\det A$  может принимать только два значения  $+1$  или  $-1$ . Но поскольку в начальный момент  $\det A(0) = 1$ , то в силу непрерывности  $\det A(t)$  он будет продолжать оставаться равным единице. Таким образом, движение твердого тела вокруг неподвижной точки представляет собой ортогональное преобразование.

### Теорема Эйлера о конечном повороте вокруг неподвижной точки

*Произвольное перемещение твердого тела вокруг неподвижной точки может осуществляться как поворот вокруг оси, проходящей через эту точку.*

Утверждение теоремы Эйлера эквивалентно доказательству существования у матрицы  $A$  собственного значения, равного  $+1$ . При этом соответствующий собственный вектор  $r$  задает ось вращения.

Действительно, так как  $r = Ar$ , то направление оси остается неизменным при вращении тела.

Пусть  $f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  – характеристический многочлен матрицы  $A$ . Докажем, что  $f(1) = 0$ .

Рассмотрим цепочку равенств:

$$\begin{aligned} f(1) &= \det(A - I) = \det(A^T - I^T) = \det(A^{-1} - I) = \det A^{-1}(I - A) = \\ &= -\det(A - I) = -f(1) = 0. \end{aligned}$$

Откуда следует, что  $f(1) = 0$ , и теорема доказана.

### Теорема об общем перемещении твердого тела

*Общее перемещение твердого тела может быть представлено в виде суммы поступательного перемещения вместе с произвольно выбранным полюсом и вращательного перемещения вокруг некоторой оси, проходящей через этот полюс.*

На рис. 9.31  $O_0x_0y_0z_0$  – абсолютная система координат. Системы координат  $Oxyz$  и  $Ox_1y_1z_1$ , связанные с телом, с началами в двух различных полюсах

$O$  и  $O_1$ , на рисунке не показаны. Их соответствующие поступательные перемещения определяются векторами  $\bar{r}_0$  и  $\bar{r}_{01}$ , заданными своими компонентами в абсолютной системе:

$$r_0^T = (x_0, y_0, z_0), \quad r_{01}^T = (x_{01}, y_{01}, z_{01}).$$

Положение произвольной точки  $M$  в абсолютной системе координат определяется вектором  $\bar{r}_M$ . Векторы  $\bar{r}$  и  $\bar{r}_1$  заданы в системе осей  $Ox_1y_1z_1$ , жестко связанной с телом:

$$r^T = (x_1, y_1, z_1), \quad r_1^T = (x_{11}, y_{11}, z_{11}).$$

Имеем следующие равенства:

$$r_M = r_0 + Ar = r_0 + A(\rho + r_1) = r_0 + A\rho + Ar_1 = r_{01} + Ar_1.$$

Откуда и следует справедливость утверждения теоремы.

Здесь вектор  $\overline{OO_1} = \bar{\rho}$ , заданный своими компонентами в системе осей  $Ox_1y_1z_1$ :

$$\rho^T = (x_{\rho 1}, y_{\rho 1}, z_{\rho 1}).$$

Как видно, угол поворота и, следовательно, ось вращения, определяется матрицей  $A$ , которые не зависят от выбора полюса.

Если выбрать абсолютную систему отсчета  $O_0\tilde{x}_0\tilde{y}_0\tilde{z}_0$  так, чтобы ось  $O_0\tilde{z}_0$  была параллельна оси вращения, то матрица  $\tilde{A}$  будет иметь вид:

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} \cos \alpha; & -\sin \alpha; & 0 \\ \sin \alpha; & \cos \alpha; & 0 \\ 0; & 0; & 1 \end{vmatrix}. \quad (9.6.2)$$

### Теорема о винтовом перемещении твердого тела

**Общее перемещение твердого тела является винтовым перемещением.**

Для удобства ось  $O_0z_0$  абсолютной системы отсчета направим по оси вращения. Тогда матрица поворота, определяющая конечное положение тела, будет определяться выражением (9.6.2).

Для доказательства теоремы необходимо установить существование такой прямой в твердом теле, точки которой при перемещении из начального положения в конечное перемещались бы вдоль этой прямой.

Тогда, выбрав полюс на этой прямой, перемещение тела было бы представлено в виде винтового перемещения.

Представим перемещение полюса в виде суммы двух векторов:

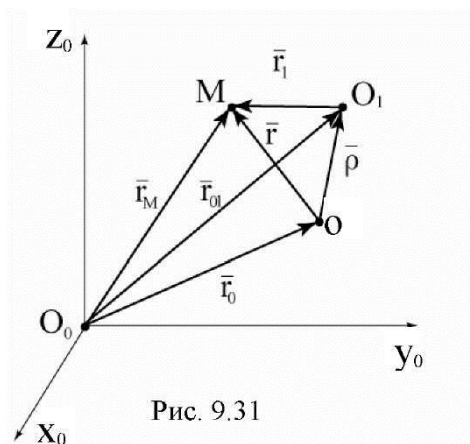


Рис. 9.31



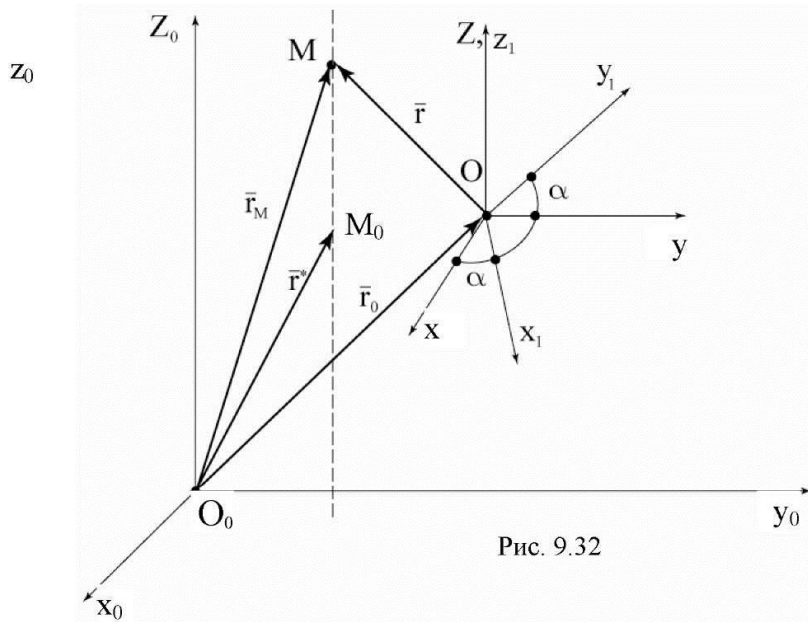


Рис. 9.32

$$r_0 = r_0^{\parallel} + r_0^{\perp},$$

где  $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $(r_0^{\parallel})^T = (0, 0, z_0)$  — представляет собой смещение лишь вдоль оси  $O_0z_0$ ;  $(r_0^{\perp})^T = (x_0, y_0, 0)$  — представляет смещение, перпендикулярное оси  $O_0z_0$ .

Пусть точка  $M$  движется по этой прямой. Ее начальное положение  $M_0$  (рис. 9.32).

В начальный момент времени системы осей  $O_0x_0y_0z_0$  и  $Ox_1y_1z_1$  совпадают. Поэтому радиус-

вектор  $r^*$ , указывающий положение точки  $M_0$  в системе связанных с телом осей  $Ox_1y_1z_1$  в начальный момент времени, будет совпадать по своим компонентам с радиус-вектором  $\bar{r}$  в конечный момент времени. Иными словами,

$$r^* = r,$$

где  $(r_0^*)^T = (x_1, y_1, z_1)$ ;  $r^T = (x, y, z)$ .

В конечном положении имеем:

$$r_0 + Ar = r_0 + Ar^* = r^* + r_0^{\parallel}.$$

Откуда следует:

$$(A - I) r^* = r_0^{\parallel} - r_0 = -r_0^{\perp}.$$

Из последнего равенства получаем два скалярных уравнения:

$$\begin{aligned} (\cos \alpha - 1)x^* - \sin \alpha y^* &= -x_0; \\ \sin \alpha x^* + (\cos \alpha - 1)y^* &= -y_0. \end{aligned} \tag{9.6.3}$$

Третье уравнение удовлетворяется тождественно.

Определитель системы уравнений (9.6.3) равен:

$$(\cos \alpha - 1)^2 + \sin^2 \alpha = 2(1 - \cos \alpha) = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Он отличен от нуля, если  $\alpha \neq 0, 2\pi$ , то есть когда перемещение отлично от поступательного. Таким образом, существует решение системы (9.6.3) и, следовательно, существует прямая  $x_0 = x^*$ ,  $y_0 = y^*$ , параллельная оси вращения, точки которой смещаются вдоль ее самой.

## Кинематические инварианты. Кинематический винт

Первым кинематическим инвариантом является вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$ , который не зависит от точки  $M$ .

Второй кинематический инвариант – это проекции скоростей точек тела на направление вектора угловой скорости  $\vec{\omega}$ .

Действительно, скорости любой точки  $M$  равны:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Умножая скалярно это равенство на вектор  $\vec{\omega}$ , получим:

$$\vec{v}_M \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_0 \cdot \vec{\omega},$$

что и доказывает предыдущее утверждение.

Если второй кинематический инвариант отличен от нуля, то в теле существует мгновенная винтовая ось, скорости точек которой совпадают по направлению с мгновенной осью  $\vec{\omega}$ . Действительно, на этой прямой (рис. 9.33)  $\vec{\omega} \parallel \vec{v}$ , поэтому:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = k \vec{\omega}, \quad (9.6.4)$$

где  $k$  – постоянный коэффициент.

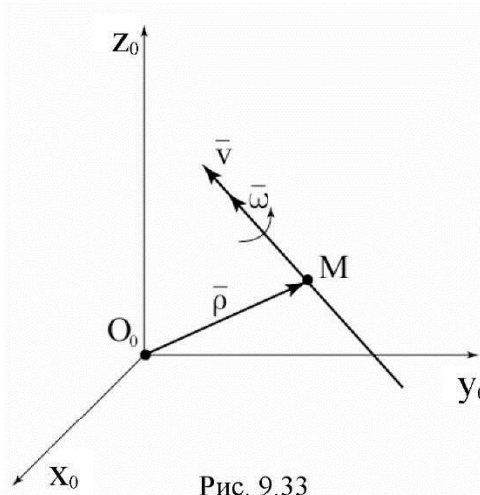


Рис. 9.33

Условие (9.6.4) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} \frac{v_{0x} + (\omega_{y0}z_0 - \omega_{z0}y_0)}{\omega_{x0}} &= \frac{v_{0y} + (\omega_{z0}x_0 - \omega_{x0}z_0)}{\omega_{y0}} = \\ &= \frac{v_{0z} + (\omega_{x0}y_0 - \omega_{y0}x_0)}{\omega_{z0}} = k \end{aligned} \quad (9.6.5)$$

Прямая называется **мгновенной винтовой осью тела**. Точки мгновенной винтовой оси имеют одинаковые скорости, равные по величине проекции скоростей точек тела на направление  $\vec{\omega}$ .

## 10. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

### 10.1. Абсолютное, относительное и переносное движение

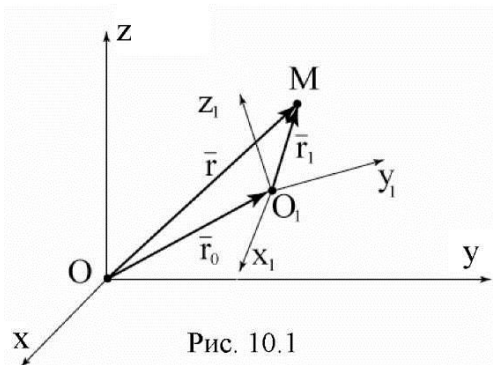


Рис. 10.1

В ряде случаев приходится рассматривать движение точки по отношению к системе координат  $O_1x_1y_1z_1$ , которая, в свою очередь, движется по отношению к другой системе координат  $Oxyz$ , условно принятой в качестве неподвижной (рис. 10.1).

Движение точки определяется наблюдениями, связанными с каждой из этих систем. Наблюдатели определяют кинематические характеристики движения: траекторию, скорость и ускорение в своей системе отсчета. При этом наблюдатель, связанный с абсолютной системой отсчета, видит более сложное движение, чем наблюдатель, связанный с подвижной системой.

В частности, более сложное движение точки по отношению к абсолютной системе отсчета обусловлено движением подвижной системы, которая, как правило, связана с некоторым твердым телом и движением точки по отношению к подвижной системе отсчета, то есть по поверхности этого твердого тела.

В связи с этим ставится задача: найти связь между кинематическими параметрами движения в каждой системе отсчета, зная движение подвижной системы по отношению к неподвижной.

Введем следующие определения:

1. **Движение точки относительно неподвижной системы координат  $Oxyz$  называется абсолютным.**
2. **Движение точки относительно подвижной системы координат называется относительным.**
3. **Переносным движением называется движение той точки твердого тела, связанного с подвижной системой, где в данный момент находится рассматриваемая точка.**

В качестве примера рассмотрим качение без скольжения колеса вагона по рельсу. С рельсом свяжем неподвижную систему координат, а подвижную – с центром колеса. Предположим, что подвижная система движется поступательно. Движение точки на ободе колеса для наблюдателя, связанного с рельсом, будет происходить по циклоиде, а для наблюдателя, связанного с корпусом вагона, – по окружности. При этом переносным будет поступательное движение системы, связанной с корпусом вагона.

Элементы абсолютного движения будем обозначать подстрочным индексом "a", относительного – индексом "r", а переносного – "e".

Тогда абсолютные скорость и ускорение будут обозначаться  $\bar{v}_a$  и  $\bar{a}_a$ , относительные  $\bar{v}_r$  и  $\bar{a}_r$ , а переносные –  $\bar{v}_e$  и  $\bar{a}_e$ .

Следует заметить, что поскольку переносное движение задается твердым телом, то кинематика переносного движения – это кинематика твердого тела, в то время как кинематика относительного движения – это кинематика точки.

## 10.2. Абсолютная и относительная производные вектора

Рассмотрим вектор  $\bar{r}_1$ , проекции которого в подвижной системе осей  $x_1, y_1, z_1$  являются заданными функциями времени. Сравним между собой производные по времени, вычисленные в абсолютной и относительной системах отсчета.

Учитывая, что в выражении

$$\bar{r}_1 = x_1 \bar{i}_1 + y_1 \bar{j}_1 + z_1 \bar{k}_1 \quad (10.2.1)$$

координатные орты  $\bar{i}_1, \bar{j}_1$  и  $\bar{k}_1$  также являются переменными, составим выражение абсолютной производной:

$$\frac{d\bar{r}_1}{dt} = \frac{dx_1}{dt} \bar{i}_1 + \frac{dy_1}{dt} \bar{j}_1 + \frac{dz_1}{dt} \bar{k}_1 + x_1 \frac{d\bar{i}_1}{dt} + y_1 \frac{d\bar{j}_1}{dt} + z_1 \frac{d\bar{k}_1}{dt}. \quad (10.2.2)$$

Первые три члена в выражении абсолютной производной (10.2.2) вычислены в предположении неизменности ортов  $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$ . Следовательно, они характеризуют скорость изменения вектора  $\bar{r}$ , которую видит наблюдатель, связанный с подвижной системой отсчета.

Такое выражение естественно назвать относительной производной:

$$\frac{d\bar{r}_1}{dt} = \frac{dx_1}{dt} \bar{i}_1 + \frac{dy_1}{dt} \bar{j}_1 + \frac{dz_1}{dt} \bar{k}_1. \quad (10.2.3)$$

Изменение единичных ортов  $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$ , точки которых являются точками твердого тела, возможно только за счет их вращения. Поэтому, для нахождения соответствующих производных следует воспользоваться формулой Эйлера для скоростей точек тела при вращении вокруг неподвижной точки  $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$ . Следовательно,

$$\frac{d\bar{i}_1}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{i}_1, \quad \frac{d\bar{j}_1}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{j}_1, \quad \frac{d\bar{k}_1}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{k}_1.$$

Тогда, согласно (10.2.1) и (10.2.2),

$$x_1 \frac{d\bar{i}_1}{dt} + y_1 \frac{d\bar{j}_1}{dt} + z_1 \frac{d\bar{k}_1}{dt} = \bar{\omega} \times (x_1 \bar{i}_1 + y_1 \bar{j}_1 + z_1 \bar{k}_1) = \bar{\omega} \times \bar{r}_1$$

и равенство (10.2.2) приобретает вид

$$\frac{d\bar{r}_1}{dt} = \frac{d\bar{r}_1}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{r}_1. \quad (10.2.4)$$

**Абсолютная производная вектора по времени равна геометрической сумме относительной производной того же вектора и векторного произведения вектора угловой скорости подвижной системы относительно неподвижной на дифференцируемый вектор.**

### 10.3. Теорема о сложении скоростей

При сложном движении точки ее абсолютная скорость  $\vec{v}_a$  равна векторной сумме относительной  $\vec{v}_r$  и переносной  $\vec{v}_e$  скоростей.

Пусть точка  $M$  совершает одновременное движение по отношению к подвижной  $O_1x_1y_1z_1$  и неподвижной  $Oxyz$  системам координат. Угловая скорость  $\vec{\omega}$  вращения подвижной системы координат считается заданной. Положение точки  $M$  определяется радиус-вектором:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1.$$

Установим соотношение между скоростями точки  $M$  по отношению к двум системам координат: подвижной и неподвижной.

Для этого, воспользовавшись формулой (10.2.4), найдем абсолютную производную вектора  $\vec{r}$ :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_a = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}_1}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}_1. \quad (10.3.1)$$

В формуле (10.3.1) производная  $\frac{d\vec{r}_0}{dt}$  представляет собой скорость  $\vec{v}_0$  начала подвижной системы координат:

$$\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt}.$$

Если вспомнить определение переносной скорости  $\vec{v}_e$ , то, очевидно,

$$\vec{v}_e = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_1,$$

так как это выражение представляет собой скорость точки твердого тела – носителя, где в данный момент находится точка  $M$ .

Относительная производная  $\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{v}_r$  представляет собой относительную скорость. Следовательно,

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e. \quad (10.3.2)$$

**Пример.** Рассмотрим механизм мальтийского креста (рис. 10.2).

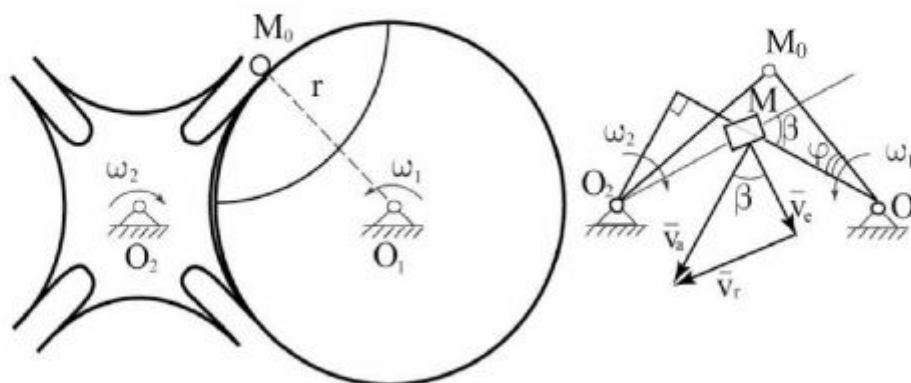


Рис. 10.2



Мальтийский крест служит для создания прерывистого движения. Чтобы не было ударов при вхождении штифта в прорезь, угол между отрезками  $O_1M_0$  и  $O_2M_0$  должен быть равен  $\pi/2$ . Абсолютную скорость штифта  $\bar{v}_a$  можно представить как геометрическую сумму относительной скорости  $\bar{v}_r$  скольжения штифта вдоль по прорези и переносной скорости, за которую следует принять скорость точки прорези, где в данный момент находится штифт, то есть точка  $M$ . Тогда

$$v_e = \omega_2 O_2M = v_a \cos \beta = r \omega_1 \cos \beta,$$

$$\omega_2 = \frac{r \omega_1 \cos \beta}{O_2M}.$$

Но

$$(O_2M)^2 = (O_1M)^2 + (O_1O_2)^2 - 2O_1M \cdot O_1O_2 \cos(45^\circ - \varphi).$$

Поскольку

$$O_1O_2 = r\sqrt{2},$$

то

$$(O_2M)^2 = r^2 + 2r^2 - 2r^2\sqrt{2}(\cos 45^\circ \cos \varphi + \sin 45^\circ \sin \varphi) =$$

$$= r^2 - 2r^2 \cos \varphi + 2r^2 - 2r^2 \sin \varphi = r^2(3 - 2 \cos \varphi - 2 \sin \varphi).$$

Согласно рис. 10.2,

$$O_2O_1 \cos(45^\circ - \varphi) - O_2M \cos \beta = MO_1 = r.$$

Откуда

$$O_2M \cos \beta = r(\cos \varphi + \sin \varphi) \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} - r = r(\cos \varphi + \sin \varphi - 1).$$

Следовательно,

$$\omega_2 = \frac{r \omega_1 \cos \beta}{O_2M} = \frac{r \omega_1 O_2M \cos \beta}{O_2M^2} = \frac{r^2 \omega_1 (\cos \varphi + \sin \varphi - 1)}{r^2 (3 - 2 \cos \varphi - 2 \sin \varphi)} = \frac{\omega_1 (\cos \varphi + \sin \varphi - 1)}{3 - 2 \cos \varphi - 2 \sin \varphi}.$$

График отношения  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$  показан на рис.

10.3. Только четверть оборота механизм находится в зацеплении. Остальное время он неподвижен. Используется в киноаппаратах и для стрельбы через винт в авиации.

#### 10.4. Сложение ускорений

При сложном движении точки, независимо от характера переносного движения, абсолютная скорость точки определяется по правилу параллелограмма скоростей.

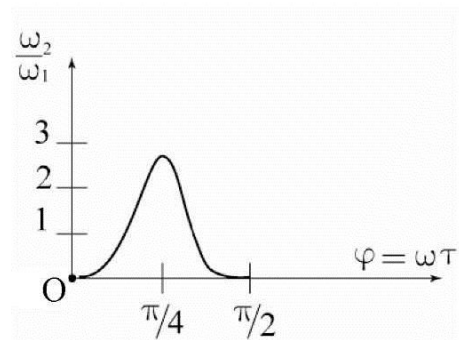


Рис. 10.3

Однако характер переносного движения существенно влияет на абсолютное ускорение точки.

Если переносное движение не является поступательным, то появляется добавочное поворотное, или кориолисово, ускорение, и абсолютное ускорение точки  $\bar{a}_a$  оказывается равным векторной сумме переносного  $\bar{a}_e$ , относительно  $\bar{a}_r$  и поворотного  $\bar{a}_c$  ускорений. При этом, как было отмечено выше, выражение для переносного ускорения определяется движением точек твердого тела – носителя, а соответствующие формулы для составляющих относительного ускорения берутся из раздела 8 «Кинематика точки».

Воспользуемся выражением (10.3.2), записанным в виде:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_1 + \bar{v}_r,$$

где  $\bar{v}_e = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_1$  – переносная скорость точки.

По определению ускорения, согласно формуле для абсолютной производной (10.2.4), получим:

$$\bar{a}_a = \frac{d\bar{v}_0}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}_1 + \bar{\omega} \times \left( \frac{d\bar{r}_1}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{r}_1 \right) + \frac{d\bar{v}_r}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{v}_r. \quad (10.4.1)$$

В выражении (10.4.1)  $\frac{d\bar{v}_0}{dt} = \bar{a}_0$  – ускорение начала подвижной системы;

$\frac{d\bar{\omega}}{dt}$  – угловое ускорение тела – носителя и, следовательно, переносное ускорение:

$$\bar{a}_e = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_1 + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_1). \quad (10.4.2)$$

Выражение (10.4.2) характерно для кинематики твердого тела. Величина

$\bar{a}_r = \frac{d\bar{v}_r}{dt}$  – относительное ускорение точки. И, наконец, учитывая, что

$$\frac{d\bar{r}_1}{dt} = \bar{v}_r \quad (10.4.3)$$

получим для поворотного, или кориолисова, ускорения следующую формулу:

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r. \quad (10.4.4)$$

Окончательно получаем формулу для абсолютного ускорения точки:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_c, \quad (10.4.5)$$

где  $\bar{a}_e, \bar{a}_r, \bar{a}_c$  берутся по соответствующим формулам (10.4.2), (10.4.3) и (10.4.4).

Многие явления на Земле обусловлены влиянием кориолисова ускорения.

К числу таковых относится явление, называемое законом Бера, выражающееся в том, что реки, текущие с севера на юг в северном полушарии размывают правый берег, а в южном полушарии – ле-

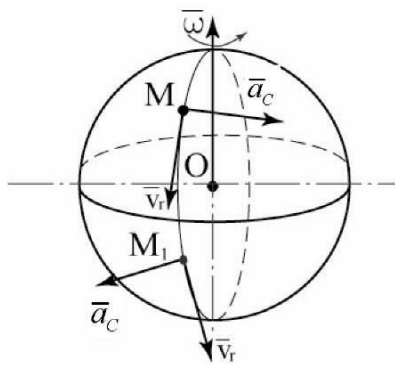


Рис. 10.4

вый. Чтобы объяснить этот факт, рассмотрим частицу воды  $M$ , движущуюся вдоль по меридиану с севера на юг в северном полушарии. Согласно формуле для ускорения Кориолиса

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r,$$

оно направлено на восток.

Это означает, что на частицы воды действуют силы, направленные на восток. И эти силы создаются руслом реки. Однако действие равно противодействию и, следовательно, это противодействие приложено к западному, то есть к правому берегу. Аналогично устанавливается, что в южном полушарии, если направление течения реки по-прежнему будет с севера на юг, будет размываться уже левый берег. То же самое происходит и с воздушными массами, перетекающими, например, с севера на юг. Наблюдателю, находящемуся на экваторе, кажется, что ветры имеют преимущественно северо-восточное направление.

## 11. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

### 11.1. Общие замечания

Ранее мы рассмотрели простейшие движения твердого тела – поступательное, вращательное вокруг оси и точки, а также общий случай движения свободного твердого тела. В общем случае движение представлено как некоторая сумма поступательного движения вместе с произвольно выбранным полюсом и вращательного движения вокруг этого полюса. Поступательное движение вместе с полюсом можно считать переносным, а вращение вокруг полюса считать относительным движением. То есть движение твердого тела, как и движение точки, в ряде случаев следует рассматривать как сложное.

Пусть тело совершает движение относительно системы координат  $O_1x_1y_1z_1$ , которая в свою очередь движется относительно неподвижной системы координат  $Oxyz$ . Как и в кинематике сложного движения точки, введем определения: движение тела относительно неподвижной системы координат называется абсолютным, относительным называется движение тела относительно подвижной системы координат.

Задачей кинематики сложного движения твердого тела является установление соотношений между характеристиками абсолютного и относительного движений.

Сложное движение твердого тела может быть получено сложением поступательных, вращательных или сложением поступательного и вращательного движений.

### 11.2. Сложение вращений твердого тела вокруг параллельных осей

Предположим, что твердое тело вращается вокруг некоторой оси, которая в свою очередь вращается вокруг другой, неподвижной оси, параллельной подвижной. Зная угловые скорости каждого из вращений, определим абсолютное движение тела.

Угловую скорость вращения вокруг подвижной оси будем называть угловой скоростью собственного вращения тела или относительной угловой скоростью. Обозначим ее через  $\bar{\omega}_r$ . Угловую скорость вращения подвижной оси вокруг неподвижной естественно назвать переносной угловой скоростью, которую обозначим  $\bar{\omega}_e$ .

Рассмотрим сечение тела плоскостью  $Oxy$  и некоторую точку  $M$ , расположенную в нем (рис. 11.1). Найдем относительную, переносную и абсолютную скорости точки  $M$ .

Относительная скорость будет

$$\bar{v}_r = \bar{\omega}_r \times \bar{r}_1 = \bar{\omega}_r \times (\bar{r} - \bar{r}_0).$$

Переносная скорость:

$$\bar{v}_e = \bar{\omega}_e \times \bar{r}.$$

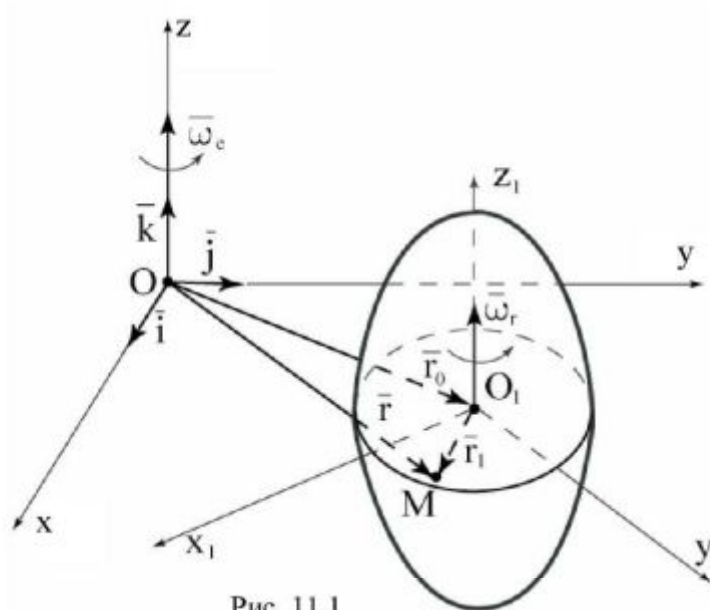


Рис. 11.1

Согласно теореме о сложении скоростей, абсолютная скорость точки  $M$ :

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e = \bar{\omega}_r \times (\bar{r} - \bar{r}_0) + \bar{\omega}_e \times \bar{r} = (\bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r) \times \bar{r} - \bar{\omega}_r \times \bar{r}_0. \quad (11.2.1)$$

С другой стороны, рассматриваемое движение является плоскопараллельным движением твердого тела и его можно представить как мгновенное вращение вокруг мгновенного центра скоростей. Мгновенный центр скоростей часто называется полюсом. Положение полюса определим при помощи радиус-вектора  $\bar{r}_p$ , который определим из условия, что скорость полюса  $\bar{v}_p$  равна нулю:

$$\bar{v}_p = 0 = (\bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r) \times \bar{r}_p - \bar{\omega}_r \times \bar{r}_0. \quad (11.2.2)$$

Найдем угловую скорость вращения вокруг полюса. Для этого вычтем последнее равенство (11.2.2) из предыдущего (11.2.1). Откуда

$$\bar{v}_a = (\bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r) \times (\bar{r} - \bar{r}_p).$$

Но это формула вращательной скорости плоской фигуры вокруг точки  $P$  с угловой скоростью:

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r. \quad (11.2.3)$$

Это **абсолютная угловая скорость**

Она представляет собой векторную сумму переносной и относительной угловых скоростей. Для определения положения точки  $P$ , являющейся мгновенным центром скоростей, воспользуемся равенством (11.2.2). Умножим обе части этого равенства векторно на орт  $\bar{k}$  – орт оси  $z$ .

$$0 = (\bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r) \times (\bar{r}_p \times \bar{k}) - \bar{\omega}_r \times (\bar{r}_0 \times \bar{k}).$$

Тогда получим

$$(\bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r) \bar{r}_p = \bar{\omega}_r \bar{r}_0. \quad (11.2.4)$$



В формуле (11.2.4),  $\tilde{\omega}_e$  и  $\tilde{\omega}_r$  представляют алгебраические значения соответствующих угловых скоростей. Откуда

$$\bar{r}_p = \frac{\tilde{\omega}_r}{\tilde{\omega}_e + \tilde{\omega}_r} \bar{r}_0. \quad (11.2.5)$$

Как видно из формулы (11.2.5), мгновенный центр скоростей лежит на линии, совпадающей с радиус-вектором  $\bar{r}_0$ , который соединяет два центра вращения  $O$  и  $O_1$ .

Учитывая, что  $\bar{r}_p = \overline{OP}$ , а  $\bar{r}_0 = \overline{OP} + \overline{PO_1}$ , формулу (11.2.4) можно записать так:

$$(\tilde{\omega}_e + \tilde{\omega}_r) \overline{OP} = \tilde{\omega}_r (\overline{OP} + \overline{PO_1}). \quad (11.2.6)$$

Проанализируем различные варианты сложения вращений. Возможны случаи, когда вращение направлено в одну сторону и в разные стороны.

1. Направление вращения одинаково. Пусть направление векторов угловых скоростей совпадает с направлением оси  $z$ .

Тогда проекции  $\omega_e$  и  $\omega_r$  положительны и вместо (11.2.6) можно записать (рис. 11.2):

$$(\omega_e + \omega_r) \overline{OP} = \omega_r (\overline{OP} + \overline{PO_1}), \quad (11.2.7)$$

то есть опустить знак « $\tilde{\omega}$ » в обозначениях угловых скоростей.

Из соотношения (11.2.7) следует:

$$\omega_e \overline{OP} = \omega_r \overline{PO_1}$$

или

$$\frac{\omega_e}{\omega_r} = \frac{PO_1}{OP}.$$

Таким образом, точка  $P$  находится из условия равновесия рычага первого рода под действием «сил»  $\omega_e$  и  $\omega_r$ .

2. Направление вращений противоположно. Пусть угловая скорость относительно вращения направлена вниз (рис. 11.3). Тогда

$$(\omega_e - \omega_r) \overline{OP} = -\omega_r (\overline{OP} + \overline{PO_1})$$

или

$$\omega_e \overline{OP} = -\omega_r \overline{PO_1}.$$

Откуда найдем:

$$\frac{\omega_e}{\omega_r} = \frac{PO_1}{OP}.$$

Точка  $P$  уже находится из условия равновесия рычага второго рода под действием «сил»  $\omega_e$  и  $\omega_r$ . Таким образом, можно сделать вывод, что во всех случаях полюс находится по правилу рычага, а угловые скорости складываются геометрически.

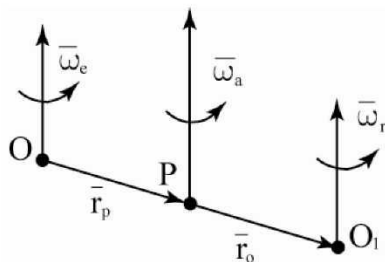


Рис. 11.2

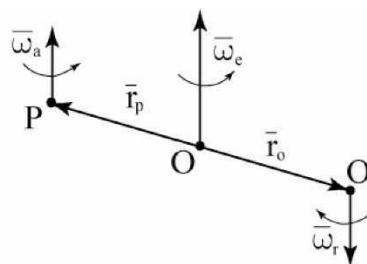


Рис. 11.3

3. Направление вращений противоположно, а величины угловых скоростей  $\omega_e$  и  $\omega_r$  одинаковы, то есть  $\bar{\omega}_e = -\bar{\omega}_r$  (рис. 11.4) или  $\omega_e = \omega_r = \omega$ .

Это так называемая пара вращений. При этом абсолютная скорость точки, согласно (11.2.1), будет:

$$\begin{aligned} \bar{v}_a &= (\bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r) \times \bar{r} - \bar{\omega}_r \times \bar{r}_0 = -\bar{\omega}_r \times \bar{r}_0 = \\ &= \bar{\omega}_e \times \bar{r}_0 = \bar{\omega} \times \bar{r}_0. \end{aligned}$$

То есть скорости всех точек тела одинаковы. Следовательно, тело совершает поступательное движение.

Подводя итог, можно сформулировать теорему: **При сложении вращений вокруг параллельных осей угловые скорости складываются так же, как параллельные силы в статике.**

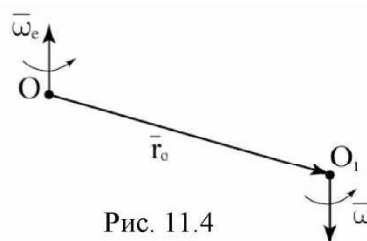


Рис. 11.4

### 11.3. Кинематическое исследование планетарных передач

Планетарным механизмом называется зацепление двух или нескольких колес, одно из которых вращается вокруг неподвижной оси, другие – вокруг осей, закрепленных на подвижной рукоятке. Зацепление может быть внешним или внутренним. Колеса, вращающиеся вместе с рукояткой, называются сателлитами.

Рассмотрим общее соотношение между угловыми скоростями колес и рукоятки по отношению к основанию механизма в случаях внешнего и внутреннего зацеплений.

Придадим механизму в целом вращение с угловой скоростью  $-\Omega$ , равной по величине угловой скорости рукоятки, но противоположной ей по направлению. Тогда рукоятка станет неподвижным звеном и, следовательно, механизм превратится в механизм с неподвижными осями.

Угловые скорости колес будут соответственно  $\tilde{\omega}_1 - \Omega$  и  $\tilde{\omega}_2 - \Omega$ . Для внешнего зацепления (рис. 11.5) получим:

$$\frac{\tilde{\omega}_2 - \Omega}{\tilde{\omega}_1 - \Omega} = -\frac{R_1}{R_2}. \quad (11.3.1)$$

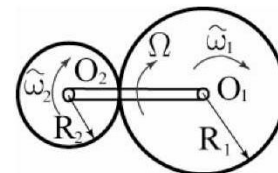


Рис. 11.5

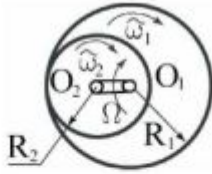


Рис. 11.6

Знак минус в формуле (11.3.1) учитывает тот факт, что колеса при внешнем зацеплении вращаются в противоположные стороны.

В случае внутреннего зацепления (рис. 11.6) получаем:

$$\frac{\tilde{\omega}_2 - \Omega}{\tilde{\omega}_1 - \Omega} = \frac{R_1}{R_2}. \quad (11.3.2)$$

Рассмотрим примеры определения передаточных отношений планетарных передач.

Для получения больших угловых скоростей применяют механизм, изображенный на рис. 11.7. Его кинематическая схема дана на рис. 11.8.

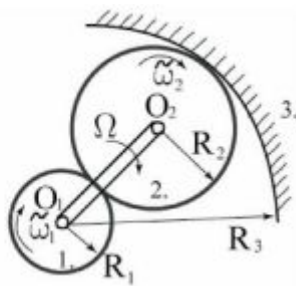


Рис. 11.7

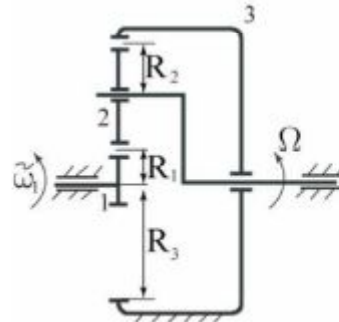


Рис. 11.8

Найдем соотношение между угловыми скоростями. Для этого придадим механизму вращение с угловой скоростью  $-\Omega$ . Для пары колес 1-2, представляющей внешнее зацепление, можно написать:

$$\frac{\tilde{\omega}_2 - \Omega}{\tilde{\omega}_1 - \Omega} = -\frac{R_1}{R_2}.$$

Для пары 2-3, являющейся внутренним зацеплением, имеем

$$\frac{\tilde{\omega}_2 - \Omega}{\tilde{\omega}_3 - \Omega} = \frac{R_3}{R_2}.$$

Здесь, однако, необходимо учесть, что третье колесо неподвижно, то есть  $\tilde{\omega}_3 = 0$ . Следовательно, вместо предыдущего равенства имеем:

$$\frac{\tilde{\omega}_2 - \Omega}{-\Omega} = \frac{R_3}{R_2}.$$

Поделив левые и правые части соотношений между угловыми скоростями для пар колес 1-2 и 2-3, получим:

$$\frac{\tilde{\omega}_1 - \Omega}{-\Omega} = -\frac{R_3}{R_1}.$$

Откуда следует:

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{R_1 + R_3}{R_1} \Omega.$$

Если, например,  $R_3 = 9R_1$ , то  $\tilde{\omega}_1 = 10\Omega$ .

У зубчатых колес число зубьев пропорционально их радиусу, поэтому

$$\omega_1 = \frac{z_1 + z_3}{z_1} \Omega,$$

где  $z_1$  и  $z_3$  – число зубьев первого и третьего колес. Отметим, что число зубьев второго, промежуточного колеса, в эту формулу не вошло.

Рассмотрим другой пример (рис. 11.9).

Это планетарная передача, состоящая из двух внешних зацеплений. Последовательно можно написать:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\omega}_1 - \Omega}{\tilde{\omega}_2 - \Omega} &= -\frac{z_2}{z_1}; \\ \frac{\tilde{\omega}_3 - \Omega}{\tilde{\omega}_4 - \Omega} &= -\frac{z_4}{z_3}. \end{aligned}$$

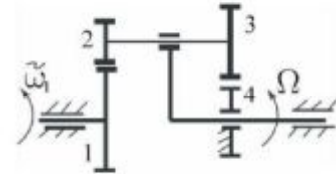


Рис. 11.9

Согласно кинематической схеме,  $\tilde{\omega}_4 = 0$  и  $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3$ .

Следовательно,

$$\frac{\tilde{\omega}_1 - \Omega}{-\Omega} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}.$$

Откуда

$$\frac{\omega_1}{\Omega} = 1 - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}.$$

Если величина  $\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$  близка к единице, то  $\Omega \gg \omega_1$ .

#### 11.4. Волновая передача

В данном пункте рассматривается механизм, состоящий из деформируемых тел. Таким образом, здесь мы отклоняемся от традиций курса теоретической механики, где обычно рассматриваются системы абсолютно твердых тел.

Волновая передача весьма перспективна в технике, например, в химическом машиностроении, так как позволяет передавать вращательное движение через непроницаемую стенку (рис. 11.10).

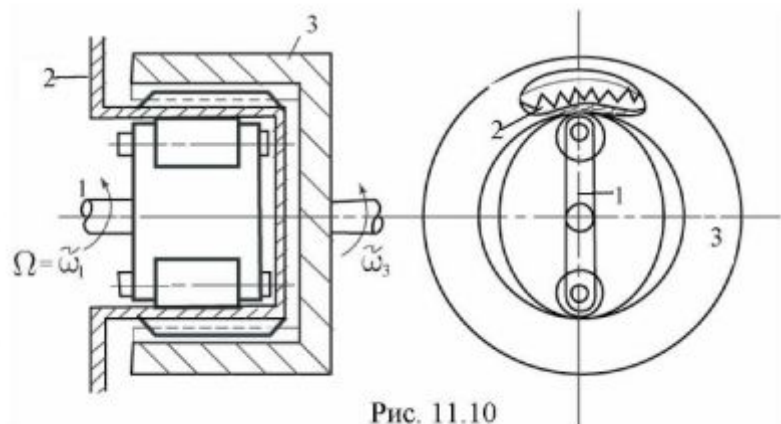


Рис. 11.10

Здесь 1 – ведущий вал; 2 – гибкий цилиндр с зубчатым венцом; 3 – ведомое звено.

Ведущий вал с роликами называется генератором волн. Этот механизм представляет собой разновидность внутреннего планетарного зацепления, только внутреннее кольцо является гибким. Число зубьев неподвижного гибкого цилиндра 2 и ведомого звена 3 почти одинаково. Придадим механизму в целом вращение с угловой скоростью  $-\Omega$ .

Тогда можно записать:

$$\frac{\tilde{\omega}_3 - \Omega}{\tilde{\omega}_2 - \Omega} = \frac{z_2}{z_3}.$$

Учитывая, что  $\tilde{\omega}_2 = 0$ ;  $\Omega = \tilde{\omega}_1$ , получаем

$$\frac{\tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_1}{-\tilde{\omega}_1} = \frac{z_2}{z_3}.$$

Откуда следует:

$$i_{31} = \frac{\tilde{\omega}_3}{\tilde{\omega}_1} = \frac{z_3 - z_2}{z_3}.$$

Если, например,  $z_3 - z_2 = 2$  – это минимальная величина, которую можно достигнуть из-за технологических ограничений, то  $z_2 = 200 \div 300$ .

При таких условиях можно получить:

$$i_{13} = 100 \div 150,$$

то есть весьма большой перепад угловых скоростей.

Эта передача применялась для поворота антенн спутников, где требовалась абсолютная герметичность. Кроме того, поворот ведомого звена такой передачи может осуществляться с высокой точностью.

### 11.5. Пара вращения

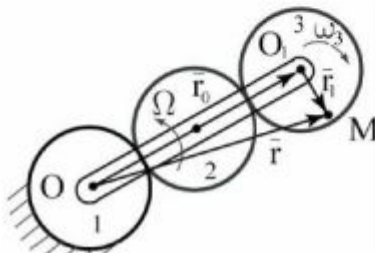
Рассмотрим механизм, изображенный на рис. 11.11. Пусть  $R_1 = R_2 = R_3$ . Для пар 1-1 и 2-3 можно написать следующие соотношения:

$$\frac{\tilde{\omega}_1 - \Omega}{\tilde{\omega}_2 - \Omega} = -\frac{R_2}{R_1},$$

$$\frac{\tilde{\omega}_2 - \Omega}{\tilde{\omega}_3 - \Omega} = -\frac{R_3}{R_2}.$$

Откуда следует:

$$\frac{\tilde{\omega}_1 - \Omega}{\tilde{\omega}_3 - \Omega} = \frac{R_3}{R_1}.$$



Если  $\tilde{\omega}_1 = 0$ , то получаем, что  $\tilde{\omega}_3 = 0$ . Следовательно, шестерня 3 находится в состоянии поступательного движения. Здесь  $\bar{\omega}_e = \bar{\Omega}$ ;  $\bar{\omega}_r = -\bar{\Omega}$ , поэтому  $\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r = 0$ . Таким образом, рассматриваемый



механизм осуществляет пару вращения для шестерни 3.

Согласно теореме о сложении скоростей для любой точки твердого тела, участвующего во вращениях вокруг параллельных осей с равными по величине, но противоположно направленными угловыми скоростями, имеем:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r = \bar{\omega}_e \times \bar{r} + \bar{\omega}_r \times \bar{r}_1 = \bar{\Omega} \times (\bar{r} - \bar{r}_1) = \bar{\Omega} \times \bar{r}_0.$$

Поскольку скорость точек  $M$   $\bar{v} = \bar{\Omega} \times \bar{r}_0$  не зависит от ее положения в теле, то скорости всех точек тела равны между собой и, следовательно, твердое тело совершает поступательное движение.

## 11.6. Пространственные механизмы для передачи вращательного движения

### Теорема о сложении вращений вокруг пересекающихся осей

Пусть тело вращается вокруг подвижной оси  $z_1$  с относительной угловой скоростью  $\bar{\omega}_r$ , а система осей  $Ox_1y_1z_1$  вращается вокруг неподвижной оси  $z$  с переносной угловой скоростью  $\bar{\omega}_e$  (рис. 11.12).

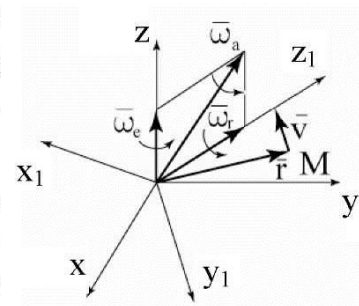


Рис. 11.12

Обе системы координат имеют общее начало. Поэтому имеет место вращение твердого тела вокруг неподвижной точки. Пусть мгновенная угловая скорость этого вращения  $\bar{\omega}_a$ . Тогда для скоростей точек справедлива формула:

$$\bar{v}_a = \bar{\omega}_a \times \bar{r}, \quad (11.6.1)$$

где  $\bar{v}_a$  – абсолютная скорость точки  $M$ .

Но  $\bar{r}$  – радиус-вектор точки  $M$ . С другой стороны, для абсолютной скорости точек  $M$ , согласно теореме о сложении скоростей, имеем

$$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r,$$

где  $\bar{v}_e = \bar{\omega}_e \times \bar{r}$ ,  $\bar{v}_r = \bar{\omega}_r \times \bar{r}$ .

Подставляя эти выражения в предыдущую формулу, получим

$$\bar{v}_a = \bar{\omega}_e \times \bar{r} + \bar{\omega}_r \times \bar{r} = (\bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r) \times \bar{r}. \quad (11.6.2)$$

Сопоставляя формулы (11.6.1) и (11.6.2), получим, что

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r. \quad (11.6.3)$$

Таким образом, доказана следующая теорема: **совокупность двух вращений, происходящих вокруг пересекающихся осей, эквивалентна вращению, происходящему с мгновенной угловой скоростью, равной векторной сумме угловых скоростей составляющих вращений.**

При этом, как было отмечено ранее, вектор угловой скорости  $\bar{\omega}_a$  представляет собой мгновенную ось вращения тела.

Рассмотрим планетарное коническое зацепление (рис. 11.13).

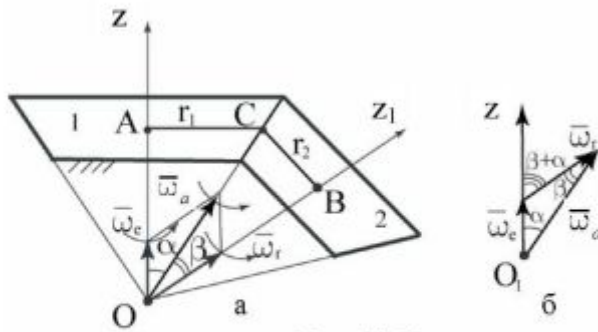


Рис. 11.13

Углы раствора конусов  $2\alpha$  и  $2\beta$ . Определим абсолютную угловую скорость  $\bar{\omega}_a$  вращения колеса 2 по неподвижному колесу 1. Линия зацепления  $OC$  является мгновенно неподвижной, поэтому она является мгновенной осью вращения колеса 2 и, следовательно, вектор абсолютной угловой скорости  $\bar{\omega}_a$  лежит на отрезке  $OC$ . Таким образом, если зада-

на угловая скорость  $\bar{\omega}_e$ , то тем самым предопределяется величина и направление абсолютной угловой скорости  $\bar{\omega}_a$ .

Параллелограмм угловых скоростей изображен на рис. 11.13, а и соответствующий ему треугольник на рис. 11.13, б.

Вектор относительной угловой скорости  $\bar{\omega}_r$  направлен под углом  $\alpha + \beta$  к оси  $z$ . Воспользовавшись теоремой синусов, можно записать следующее равенство:

$$\frac{\omega_r}{\sin \alpha} = \frac{\omega_e}{\sin \beta} = \frac{\omega_a}{\sin(\pi - \alpha - \beta)} = \frac{\omega_a}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Рассматривая прямоугольные треугольники  $OAC$  и  $OBC$ , имеющие общую гипотенузу  $OC$ , найдем:

$$\sin \alpha = \frac{r_1}{OC}; \quad \sin \beta = \frac{r_2}{OC}.$$

Следовательно,

$$\omega_r = \omega_e \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{r_1}{r_2} \omega_e; \quad \omega_a = \omega_e \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta}.$$

Если предположить, что переносная угловая скорость  $\bar{\omega}_e$  постоянна по величине, то нетрудно найти полное угловое ускорение подвижной шестерни 2.

Угловое ускорение  $\bar{\varepsilon}_a$  можно определить как скорость конца вектора  $\bar{\omega}_a$  при вращении его вокруг оси  $z$ . Для нахождения этой скорости воспользуемся формулой Эйлера

$$\bar{\varepsilon}_a = \bar{\omega}_e \times \bar{\omega}_a = \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r) = \bar{\omega}_e \times \bar{\omega}_r.$$

Величина углового ускорения  $\bar{\varepsilon}_a$  будет

$$\varepsilon_a = \omega_e \omega_r \sin(\alpha + \beta) = \omega_e^2 \frac{\sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta}.$$

Вектор  $\bar{\varepsilon}_a$  направлен перпендикулярно плоскости  $Ozz_1$  в сторону вращения оси  $Oz_1$ .

### Дифференциальное зацепление

На рис. 11.14 изображен механизм, называемый двойным дифференциалом. Рамка  $BB$  вращается вокруг оси  $xx$  с угловой скоростью  $\Omega$  и увлекает ось  $AA$ . Колеса радиусами  $R_1$  и  $R_2$  не связаны с рамкой, но имеют ту же ось вращения. Двойная шестерня с радиусами  $r_1$  и  $r_2$  называется сателлитом. Эта шестерня свободно вращается вокруг оси  $AA$ .

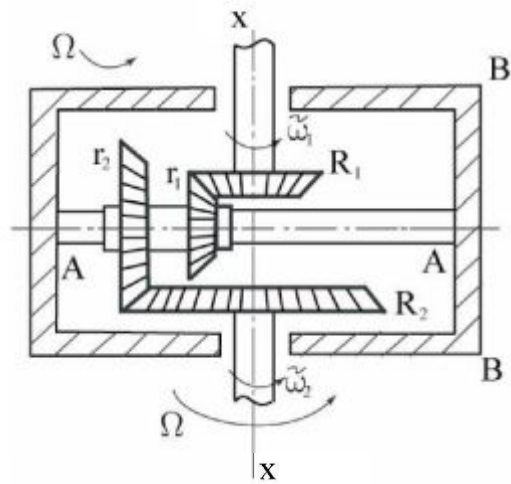


Рис. 11.14

Найдем соотношение между угловыми скоростями. Для этого мысленно придадим механизму в целом вращение с угловой скоростью  $-\Omega$ . Тогда рамка, а вместе с нею и ось двойной шестерни станут неподвижными. Угловые скорости колес с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  будут  $\tilde{\omega}_1 - \Omega$  и  $\tilde{\omega}_2 - \Omega$ . Относительную скорость сателлита обозначим  $\tilde{\omega}$ . При остановившейся рамке для верхнего колеса получаем

$$\frac{\tilde{\omega}_1 - \Omega}{\tilde{\omega}} = \frac{r_1}{R_1}$$

и для нижнего

$$\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}_2 - \Omega} = -\frac{R_2}{r_2}.$$

В последней формуле знак минус учитывает тот факт, что верхнее и нижнее колеса вращаются в противоположные стороны. Умножая левые и правые части первого и второго равенств, получим:

$$\frac{\tilde{\omega}_1 - \Omega}{\tilde{\omega}_2 - \Omega} = -\frac{r_1 R_2}{R_1 r_2}.$$

Откуда следует:

$$\tilde{\omega}_1 \frac{R_1}{r_1} + \tilde{\omega}_2 \frac{R_2}{r_2} = \Omega \left( \frac{R_1}{r_1} + \frac{R_2}{r_2} \right).$$

Полагая  $R_1 = r_1$  и  $R_2 = r_2$ , получим:

$$\frac{\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2}{2} = \Omega.$$

В этом случае оказывается, что среднее арифметическое угловых скоростей  $\tilde{\omega}_1$  и  $\tilde{\omega}_2$  равно угловой скорости кожуха  $\Omega$ . Полагая  $R_1 = R_2$  и  $r_1 = r_2$ , получим механизм автомобильного дифференциала (рис. 11.15).

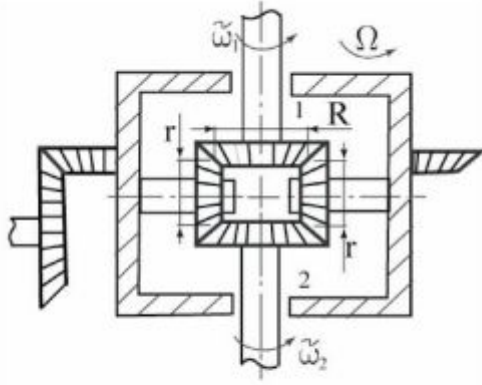


Рис. 11.15

Предположим, что центр автомобиля описывает окружность радиуса  $\rho$ . Если расстояние между колесами будет  $d$ , то радиус внешней окружности будет  $\rho + \frac{d}{2}$ , а внутренней  $\rho - \frac{d}{2}$ .

Пусть скорость центра автомобиля  $v$ , если радиус задних колес равен  $a$ , то угловая скорость первой шестерни будет

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{v}{a} \frac{\left(\rho + \frac{d}{2}\right)}{\rho},$$

а второй:  $\tilde{\omega}_2 = \frac{v}{a} \frac{\left(\rho - \frac{d}{2}\right)}{\rho}$ .

Угловая скорость кожуха:

$$\Omega = \frac{1}{2}(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2) = \frac{v}{a},$$

и относительная угловая скорость сателлитов, если  $R = r$

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1 - \Omega = \frac{v}{a} \frac{\left(\rho + \frac{d}{2}\right)}{\rho} - \frac{v}{a} = \frac{vd}{2\rho a}.$$

### Шарнир Гука

Если два вала составляют между собой некоторый угол, то для передачи вращения с их помощью применяется специальное соединение, которое называется шарниром Гука. Кинематическая схема этого устройства изображена на рис. 11.16, а.

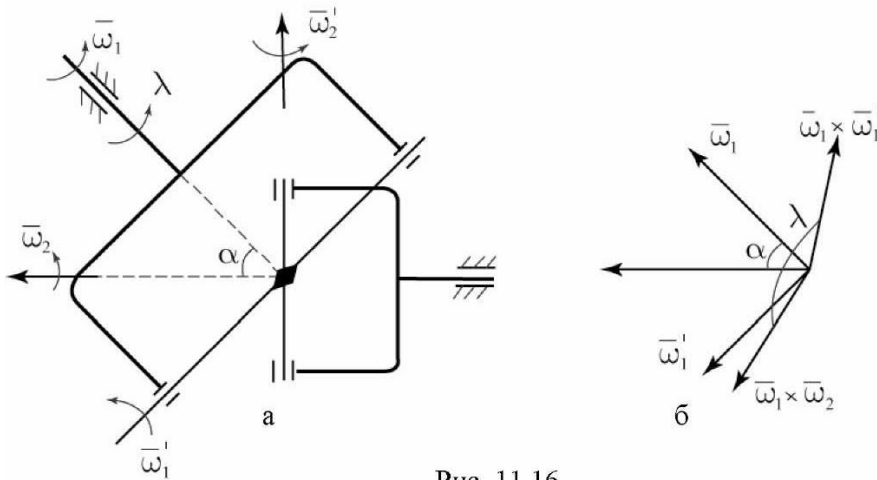


Рис. 11.16

К концам валов присоединены вилки, которые в свою очередь присоединены к жесткой крестовине.

Пусть  $\alpha$  – угол между валами, которые расположены в плоскости чертежа. Абсолютная угловая скорость крестовины  $\bar{\omega}_a$ , согласно теореме о сложении вращений вокруг пересекающихся осей, будет

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}'_1 = \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}'_2, \quad (11.6.4)$$

где  $\bar{\omega}_1$  – угловая скорость ведущего вала;  $\bar{\omega}'_1$  – угловая скорость крестовины относительно ведущего вала;  $\bar{\omega}_2$  – угловая скорость ведомого вала;  $\bar{\omega}'_2$  – угловая скорость крестовины относительно ведомого вала. Стержни, образующие крестовину, расположены под прямым углом, поэтому векторы  $\bar{\omega}_1$  и  $\bar{\omega}'_1$ ,  $\bar{\omega}_2$  и  $\bar{\omega}'_2$ , а также  $\bar{\omega}'_1$  и  $\bar{\omega}'_2$  перпендикулярны (рис. 11.16, б).

Следовательно, равны нулю следующие скалярные произведения:

$$\bar{\omega}_1 \cdot \bar{\omega}'_1 = 0; \quad \bar{\omega}_2 \cdot \bar{\omega}'_2 = 0; \quad \bar{\omega}'_2 \cdot \bar{\omega}'_1 = 0. \quad (11.6.5)$$

Рассмотрим вспомогательные соотношения. Умножим соотношение (11.6.4) скалярно на  $\bar{\omega}'_1$ . Учитывая соотношения (11.6.5), получим:

$$\omega_1'^2 = \bar{\omega}_2 \bar{\omega}'_1. \quad (11.6.6)$$

Чтобы найти отношение  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ , необходимо как-то проследить за изменением угла поворота ведущего вала  $\lambda$ .

Для этого рассмотрим два векторных произведения  $\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$  и  $\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}'_1$ .

Векторное произведение  $\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$  перпендикулярно плоскости чертежа, а векторное произведение  $\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}'_1$  перпендикулярно плоскости ведущей вилки. Можно сказать, что вектор  $\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}'_1$  вращается с угловой скоростью  $\bar{\omega}_1$ . Угол между вышеупомянутыми векторными произведениями равен  $\lambda$ .

Рассмотрим скалярное произведение:

$$(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}'_1) = (\omega_1 \omega_2 \sin \alpha)(\omega_1 \omega'_1) \cos \lambda = \omega_1^2 \omega_2 \omega'_1 \sin \alpha \cos \lambda. \quad (11.6.7)$$

Это же скалярное произведение, с другой стороны, можно представить так:

$$\begin{aligned} (\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}'_1) &= (\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}'_1)(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2) = \\ &= [(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2) \times \bar{\omega}_1] \bar{\omega}'_1 = [\bar{\omega}_2 \omega_1^2 - \bar{\omega}_1(\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2)] \bar{\omega}'_1 = \\ &= \omega_1^2 (\bar{\omega}_2 \bar{\omega}'_1) - (\bar{\omega}_1 \bar{\omega}'_1)(\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2) = \omega_1^2 (\bar{\omega}_2 \bar{\omega}'_1) \quad * \end{aligned} \quad (11.6.8)$$

\*) Известна формула скалярно-векторного произведения:  
 $(\bar{A} \times \bar{B}) \cdot \bar{C} = (\bar{C} \times \bar{A}) \cdot \bar{B} = (\bar{B} \times \bar{C}) \cdot \bar{A}$ , выражающая объем параллелепипеда, построенного на тройке перемноживаемых векторов. Тогда в произведении  $(\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C})) \cdot \bar{D}$ , полагая  $\bar{A} \times \bar{B}$  отдельным вектором, получим:  $(\bar{C} \times \bar{D})(\bar{A} \times \bar{B}) = (\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C})) \cdot \bar{D}$ .



Приравнивая (11.6.7) и (11.6.8), получаем:

$$\omega_2 \omega_1' \sin \alpha \cos \lambda = \bar{\omega}_2 \bar{\omega}_1' . \quad (11.6.9)$$

Учитывая (11.6.6), вместо (11.6.9) находим:

$$\omega_2 \omega_1' \sin \alpha \cos \lambda = \omega_1'^2$$

или

$$\omega_2 \sin \alpha \cos \lambda = \omega_1' .$$

В дальнейшем нам потребуется последнее выражение в ином виде:

$$\omega_2^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda = \omega_1'^2 . \quad (11.6.10)$$

Умножим скалярно (11.6.4) на  $\bar{\omega}_2$ :

$$(\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_1') \bar{\omega}_2 = (\bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_2') \bar{\omega}_2 ,$$

откуда

$$\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_1' \cdot \bar{\omega}_2 = \omega_2^2 .$$

Учитывая (11.6.6), получаем:

$$\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_1'^2 = \omega_2^2 .$$

Подставляя в последнее соотношение (11.6.10), найдем:

$$\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 + \omega_2^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda = \omega_2^2 .$$

Наконец, приходим к равенству:

$$\omega_2^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda = \omega_2^2 - \omega_1 \omega_2 \cos \alpha .$$

Откуда следует:

$$\omega_2 - \omega_1 \cos \alpha = \omega_2 \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda .$$

После чего нетрудно получить передаточное отношение:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \lambda}$$

Если  $\lambda = \omega t$ , то  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \omega t}$ .

Найдем наибольшие и наименьшие значения отношения  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ .

$$\left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)_{\max} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} ;$$

$$\left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)_{\min} = \cos \alpha .$$

Неравномерность вращения  $\delta$  будет:

$$\delta = \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)_{\max} - \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)_{\min} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} ,$$

при большом перекосе валов механизм становится неработоспособным, так как

при  $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$  неравномерность вращения  $\delta \rightarrow \infty$ .

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – М. : Наука, 1985. – Т. 1. – 250 с.; Т. 2. – 496 с.
2. Лойцянский, Л. Г. Курс теоретической механики / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – М. : Наука. – Ч. 1, 1982. – 350 с.; Ч. 2, 1983. – 640 с.
3. Кильчевский, Н. А. Курс теоретической механики / Н. А. Кильчевский. – М. : Наука. – Ч.1, 1977. – 480 с.; Ч.2, 1977. – 544 с.
4. Бухгольц, Н. Н. Основной курс теоретической механики / Н. Н. Бухгольц. – М. : Наука. – Ч. 1, 1965. – 467 с.; Ч. 2, 1969. – 332 с.
5. Лурье, А. И. Аналитическая механика / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1961. – 824 с.
6. Гантмахер, Ф. Р. Аналитическая механика / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1960. – 296 с.
7. Маркеев, А. П. Теоретическая механика / А. П. Маркеев. – М. : Наука, 1990. – 416 с.
8. Мещерский, И. В. Сборник задач по теоретической механике / И. В. Мещерский. – М. : Наука, 1981. – 480 с.
9. Бать, М. Л. Теоретическая механика в примерах и задачах / М. Л. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – М. : Наука, 1967. – Т. 1. – 510 с.; 1986. – Т. 2. – 624 с.; 1973. – Т. 3. – 486 с.
10. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учеб. пособие для технич. вузов / под. ред. А. А. Яблонского. – М. : Высшая школа, 1985. – 367 с.

## ДИНАМИКА

### 12. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ДВЕ ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ

#### 12.1. Законы Ньютона

В основе динамики лежат законы И. Ньютона, изложенные им в «Математических началах натуральной философии» (1687).

Эти законы были найдены в результате обобщения непосредственных наблюдений механических явлений и являются истинными, поскольку следствия, вытекающие из них, согласуются с опытом в пределах точности наблюдений.

Одной из основ классической механики является предположение о существовании «абсолютно неподвижной» системы координат, что эквивалентно предположению о существовании абсолютного пространства.

*Инерциальной (галилеевой) называется система координат, движущаяся поступательно, равномерно и прямолинейно относительно гипотетической абсолютно неподвижной системы. Законы Ньютона справедливы в инерциальной системе координат.*

#### *Первый закон Ньютона*

При установлении законов механики Ньютон рассматривал движение изолированной материальной точки, на движение которой не наложены какие-либо кинематические ограничения.

Многочисленные наблюдения над механическими движениями привели к установлению первого закона механики – закона инерции или первого закона Ньютона, который связывается также с именем Галилея. Этот закон формулируется так:

*Изолированная материальная точка сохраняет состояние равномерного и прямолинейного движения или находится в состоянии покоя относительно инерциальной системы координат.*

*Изолированной* называется материальная точка, взаимодействием которой с окружающими телами пренебрегают.

Свойство изолированной материальной точки сохранять состояние равномерного и прямолинейного движения называется свойством инертности.

Из закона инерции вытекает, что самопроизвольное изменение движения материальной точки невозможно. Изменение движения материальной точки может произойти только в результате ее взаимодействия с другими телами. Мерой этих взаимодействий являются механические силы. Понятие силы позволяет установить связь между механическими и немеханическими формами движения материи.

#### *Второй закон Ньютона*

Второй закон Ньютона устанавливает связь между скоростью изменения количества движения материальной точки и силой, к ней приложенной.

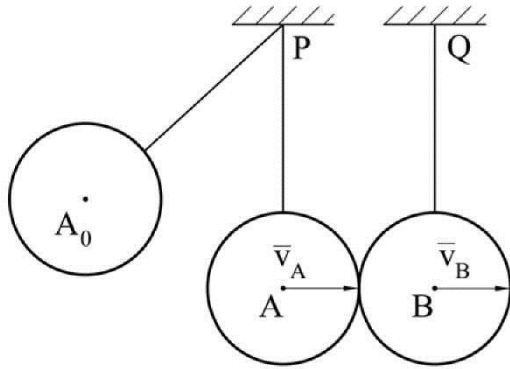


Рис. 12.1

Прежде всего выясним, что же представляет собой количество движения материальной точки. Рассмотрим два шара  $A$  и  $B$ , подвешенные в точках  $P$  и  $Q$  (рис. 12.1).

Экспериментально можно установить, что  $m_A \bar{u}_A = m_A \bar{v}_A + m_B \bar{v}_B$ , где  $m_A$  и  $m_B$  – массы шаров;  $\bar{u}_A$  – скорость шара  $A$  перед соударением;  $\bar{v}_A$  и  $\bar{v}_B$  – скорости шаров после соударения.

Иными словами величина

$$\bar{k}_{AO} = m_A \bar{u}_A$$

равна геометрической сумме величин  $\bar{k}_A = m_A \bar{v}_A$  и  $\bar{k}_B = m_B \bar{v}_B$ . То есть

$$\bar{k}_{AO} = \bar{k}_A + \bar{k}_B.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что векторная величина

$$\bar{k} = m\bar{v}$$

представляет собой меру механического движения. Эта величина называется **количеством движения**.

Второй закон Ньютона устанавливает связь между силой, действующей на точку, и быстротой изменения ее количества движения. Формулируется он следующим образом:

**Скорость изменения количества движения материальной точки равна силе, действующей на эту точку.**

Математически этот закон выражается равенством

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{F}, \quad (12.1.1)$$

где  $m\bar{v}$  – количество движения материальной точки;

$m$  – масса точки.

При  $m = const$ , получим

$$m\bar{a} = \bar{F}, \quad (12.1.2)$$

где  $\bar{a} = \dot{\bar{v}}$  – ускорение точки.

Второй закон Ньютона чаще всего рассматривается в форме (12.1.2), хотя далеко не всегда масса точки оказывается постоянной. При движении ракеты или при релятивистских скоростях элементарных частиц приходится пользоваться формулой (12.1.1). Уравнения (12.1.1) и (12.1.2) можно назвать уравнениями динамики свободной материальной точки. При  $\bar{F} = 0$  и  $m = const$  из второго закона вытекает закон инерции. Действительно, если  $\bar{F} = 0$ , то  $\bar{a} = 0$  и тогда  $\bar{v} = const$ .

Второй закон Ньютона выражает количественное соотношение между тремя физическими величинами: силой, массой и ускорением.

**Массой материальной точки** называется физическая величина, являющаяся мерой инертности и гравитационных свойств.

Для определения массы существуют два способа.

Первый способ определения массы основан на законе всемирного тяготения, согласно которому сила взаимного притяжения между телами выражается формулой

$$F = \gamma \frac{mm_1}{r^2},$$

где  $\gamma$  – гравитационная постоянная;

$r$  – расстояние между материальными точками с массами  $m$  и  $m_1$ .

Еще Галилей установил, что вблизи земной поверхности ускорение свободного падения

$$g = \gamma \frac{m_1}{r^2}$$

в единицах СИ равно  $9,81 \text{ м/с}^2$ .

Поэтому сила тяготения определяется формулой

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

Таким образом, измерив силу тяжести с помощью весов, можно определить и массу.

Второй способ определения массы тела состоит в следующем.

Пусть одна и та же сила  $\vec{F}$  действует на два различных тела с массами  $m_1$  и  $m_2$  и вызывает ускорения  $a_1$  и  $a_2$ .

Тогда, согласно второму закону Ньютона,

$$m_1 a_1 = m_2 a_2,$$

откуда

$$m_2 = \frac{a_1}{a_2} m_1.$$

Выбрав массу первого тела, нетрудно найти массу второго.

Указанный способ определения массы называется динамическим, а сама масса, определенная этим способом, называется инертной. Экспериментально доказано, что весомая и инертная массы численно равны между собой в пределах точности измерений, обеспечиваемых современной техникой.

### **Третий закон Ньютона**

**Силы взаимодействия двух материальных точек (действие и противодействие) равны по величине, направлены в противоположные стороны и имеют общую линию действия.**

Таким образом, третий закон отражает двусторонность механических процессов.

Первый и второй законы Ньютона относятся к динамике материальной точки. Третий закон – к динамике системы материальных точек.

Третий закон не содержит кинематических характеристик и поэтому справедлив в любой системе координат, а не только инерциальной.



### **Закон независимости действия сил**

Этот закон является следствием аксиомы о параллелограмме сил.

Равнодействующая из  $N$  сил, приложенных в точке,  $\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ . Если каждая

из этих сил действует на материальную точку, то согласно второму закону Ньютона имеем

$$m\vec{a}_i = \vec{F}_i. \quad (12.1.3)$$

Суммируя соотношения (12.1.3), найдем

$$m \sum_{i=1}^N \vec{a}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i,$$

или

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

где  $\sum_{i=1}^N \vec{a}_i = \vec{a}$ .

*То есть ускорение  $\vec{a}$ , получаемое материальной точкой от одновременного действия системы сил, равно геометрической сумме ускорений, получаемых этой точкой от каждой силы в отдельности.*

### **12.2. Динамические уравнения движения материальной точки**

Если движение материальной точки массы  $m$  задано в векторной форме с помощью радиус-вектора  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , то основное уравнение динамики примет вид

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}). \quad (12.2.1)$$

Из записи уравнения динамики (12.2.1) следует, что сила  $\vec{F}$  в общем случае может явно зависеть от времени, положения и скорости точки. Силы, явно зависящие от времени, встречаются при исследовании движения различного рода машин и механизмов. Такого рода силы встречаются в теории колебаний, теории устойчивости движения, в небесной механике. К силам, зависящим от положения точки, относятся силы упругости, силы тяготения. Силы, зависящие от скорости, встречаются в аэрогидродинамике, где изучаются движения в жидкой или газообразной среде.

Уравнение движения (12.2.1) должно быть дополнено начальными условиями:

$$\vec{r}|_{t=0} = \vec{r}_0; \quad \dot{\vec{r}}|_{t=0} = \dot{\vec{r}}_0 = \vec{v}_0. \quad (12.2.2)$$

Рассмотренным уравнениям (12.2.1) и начальным условиям (12.2.2) в декартовых осях соответствуют следующие три дифференциальных уравнения и шесть начальных условий:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \end{aligned} \quad (12.2.3)$$

$$\begin{aligned} x|_{t=0} &= x_0; & y|_{t=0} &= y_0; & z|_{t=0} &= z_0; \\ \dot{x}|_{t=0} &= \dot{x}_0; & \dot{y}|_{t=0} &= \dot{y}_0; & \dot{z}|_{t=0} &= \dot{z}_0. \end{aligned} \quad (12.2.4)$$

В уравнениях (12.2.3)  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$  – проекции ускорения на оси координат;  $x, y, z$  – координаты точек;  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  – проекции скорости;  $F_x, F_y, F_z$  – проекции силы. Соответственно в (12.2.4):  $x_0, y_0, z_0$  – координаты начального положения точки;  $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$  – составляющие скорости точки в начальный момент времени.

Система уравнений (12.2.3) имеет шестой порядок.

Из уравнения (12.2.1) получаются уравнения движения точки в криволинейных координатах:

$$m a_{q_i} = F_{q_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (12.2.5)$$

где  $a_{q_i}$  – проекции ускорения на ось  $q_i$  системы криволинейных координат;

$F_{q_i}$  – проекция силы на ту же ось.

Ранее было получено (см. п. 8.6, часть 1):

$$a_{q_i} = \frac{1}{H_i} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T^0}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T^0}{\partial q_i} \right), \quad \text{где}$$

$$H_i = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}, \quad - \text{коэффициент Ламе,}$$

$$T^0 = \frac{v^2}{2} - \text{скоростной потенциал.}$$

Уравнение (12.2.5) можно записать в форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (12.2.6)$$

где  $Q_i = H_i F_{q_i}$  – носят название обобщенных сил;

$$T = mT^0 = \frac{mv^2}{2} - \text{кинетическая энергия материальной точки.}$$

Уравнения (12.2.6) представляют собой дифференциальные уравнения движения материальной точки в форме Лагранжа.

Воспользуемся общей формой уравнений (12.2.5) для получения уравнений в полярных и сферических координатах.

В полярных координатах ( $r, \varphi$ ) получим:

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= F_r; \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) &= F_\varphi, \end{aligned} \quad (12.2.7)$$

где  $F_r$  и  $F_\varphi$  – проекции силы соответственно на направление радиуса  $r$  и перпендикулярное ему направление в сторону возрастания угла  $\varphi$ .

Соответствующие уравнения в сферической системе координат ( $r, \varphi, \vartheta$ ) будут:

$$m(\ddot{r} - r \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 - r \dot{\varphi}^2) = F_r;$$

$$m(r \sin \vartheta \ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \vartheta + 2r \cos \vartheta \dot{\varphi} \dot{\vartheta}) = F_\varphi;$$

$$m(r \ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} - r \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2) = F_\vartheta.$$

Рассмотрим уравнение динамики в естественных осях.

Во-первых, если речь идет о естественных осях, то траектория движения считается заданной.

Вектор ускорения в естественных осях определяется формулой

$$\bar{a} = a_\tau \bar{\tau} + a_n \bar{n},$$

где  $a_\tau = \dot{S}$  – касательное ускорение;

$a_n = v^2 / \rho$  – нормальное ускорение;

$\bar{\tau}$  – орт касательной;

$\bar{n}$  – орт нормали;

$S$  – дуговая координата, проекция ускорения на бинормаль, равна нулю.

Тогда, согласно второму закону Ньютона, можно написать следующие уравнения:

$$ma_\tau = F_\tau;$$

$$ma_n = F_n,$$

$$m\dot{S} = F_\tau(t, S, \dot{S});$$

или

$$m \frac{\dot{S}^2}{\rho} = F_n(t, S, \dot{S}). \quad (12.2.8)$$

Из уравнений (12.2.8) дифференциальным является только первое. Второе уравнение – следствие первого. Их следует дополнить начальными условиями

$$S|_{t=0} = S_0; \quad \dot{S}|_{t=0} = \dot{S}_0.$$

Уравнения (12.2.8) называются динамическими уравнениями движения точки в естественной форме или форме Эйлера.

### 12.3. Две основные задачи динамики свободной материальной точки

При исследовании движения материальной точки возникают две основные задачи динамики – прямая и обратная.

1. Прямая задача заключается в определении силы  $\bar{F}$ , действующей на материальную точку, если заданы ее масса и кинематические уравнения движения.

Решение этой задачи осуществляется следующим образом:

Пусть уравнения движения заданы в декартовых осях:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

Дважды дифференцируя эти соотношения по времени, получаем проекции ускорения на оси координат:

$$a_x = \ddot{x}; \quad a_y = \ddot{y}; \quad a_z = \ddot{z}.$$

Тогда, если известна масса точки  $m$ , проекции силы будут:

$$F'_x = m\ddot{x}; \quad F'_y = m\ddot{y}; \quad F'_z = m\ddot{z}.$$

Модуль этой силы

$$F = \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z},$$

направляющие косинусы

$$\cos(\bar{F}, x) = \frac{F'_x}{F}; \quad \cos(\bar{F}, y) = \frac{F'_y}{F}; \quad \cos(\bar{F}, z) = \frac{F'_z}{F}.$$

Аналогично решается задача динамики точки и в естественных осях. Учитывая, что

$$a_\tau = \dot{v} = \ddot{S}; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\dot{S}^2}{\rho},$$

найдем

$$F_\tau = m\dot{v}; \quad F_n = m \frac{v^2}{\rho};$$

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2}.$$

Направление силы  $\bar{F}$  можно найти по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_\tau}{F_n} = \frac{a_\tau}{a_n},$$

где  $\alpha$  – угол между силой  $\bar{F}$  и главной нормалью к траектории.

2. Обратная задача заключается в определении кинематических уравнений движения материальной точки по заданной массе  $m$ , приложенной силе  $\bar{F}$  и начальным условиям движения:

$$\bar{r}|_{t=0} = \bar{r}_0; \quad \dot{\bar{r}}|_{t=0} = \dot{\bar{r}}_0.$$

Решение этой задачи сводится к интегрированию дифференциальных уравнений движения. Первая задача решается дифференцированием и, если процедура дифференцирования является элементарной, то о процедуре интегрирования этого сказать нельзя. Поэтому в ряде случаев решение второй задачи динамики точки сопряжено со значительными трудностями.

Пусть найден общий интеграл уравнений движения

$$\bar{r} = \bar{r}(t, c_i), \quad i = \overline{1, 6}, \tag{12.3.1}$$

где  $c_i$  – постоянная интегрирования.

При этом, очевидно, известна и скорость точки

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}}(t, c_i). \tag{12.3.2}$$

Воспользовавшись соотношениями (12.3.1) и (12.3.2) и начальными условиями

$$\bar{r}|_{t=0} = \bar{r}_0; \quad \dot{\bar{r}}|_{t=0} = \dot{\bar{r}}_0 = \bar{v}_0,$$

получим шесть уравнений, которые в векторном виде записываются так:

$$\bar{r}(0, c_i) = \bar{r}_0; \quad \dot{\bar{r}}(0, c_i) = \bar{v}_0. \tag{12.3.3}$$

Из системы уравнений (12.3.3) находим шесть постоянных интегрирования

$$c_i = c_i(t_0, \bar{r}_0, \dot{\bar{r}}_0), \quad i = \overline{1,6}. \quad (12.3.4)$$

Подставив значения постоянных (12.3.4) в общий интеграл (12.3.1), найдем искомые кинематические уравнения движения

$$\bar{r} = \bar{r}(t).$$

При решении второй задачи динамики в естественных осях интегрируем уравнение движения

$$m\ddot{S} = F_\tau,$$

после чего находим общий интеграл

$$S = S(t, c_1, c_2), \quad (12.3.5)$$

где  $c_1, c_2$  – постоянные интегрирования.

Учитывая начальные условия, получим

$$c_i = c_i(t_0, S_0, \dot{S}_0), \quad i = 1, 2. \quad (12.3.6)$$

Подставляя (12.3.6) в (12.3.5), найдем зависимость

$$S = S(t).$$

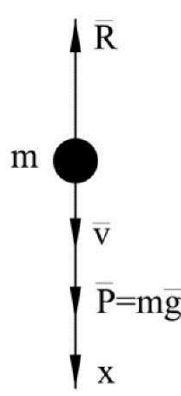
После чего из второго уравнения (12.2.8) можно найти, например,  $F_n$ . Радиус кривизны траектории известен, так как траектория считается заданной, а неизвестным является закон изменения дуговой координаты.

Таким образом, решение обратной задачи динамики материальной точки состоит из трех этапов:

1. Составления динамических уравнений движения материальной точки в соответствии с условиями задачи.
2. Интегрирования полученной системы дифференциальных уравнений, в результате чего находится общий интеграл системы.
3. Определения постоянных интегрирования в соответствии с начальными условиями движения.

Пример: определить скорость тяжелого тела, падающего без начальной скорости в среде с сопротивлением  $\bar{R}$ , пропорциональным квадрату скорости:

$$\bar{R} = -bv^2 \text{sign } \bar{v},$$



где  $b$  – коэффициент сопротивления;  $\text{sign } \bar{v} = \frac{\bar{v}}{v}$  – единичный вектор, имеющий направление скорости.

Дифференциальное уравнение движения (рис. 12.2):

$$m \frac{dv}{dt} = P - R,$$

где  $P = mg$ ;  $R = bv^2$ , то есть  $m \frac{dv}{dt} = mg - bv^2$ .

Обозначим  $\frac{b}{mg} = k^2$ .

Рис. 12.2 Тогда дифференциальное уравнение движения будет:

$$\frac{dv}{dt} = g(1 - k^2 v^2).$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Поэтому можно записать

$$\frac{dv}{1 - k^2 v^2} = g dt. \quad (12.3.7)$$

Разложим дробь  $\frac{1}{1 - k^2 v^2}$  на простейшие множители:

$$\frac{1}{1 - k^2 v^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 + kv} + \frac{1}{1 - kv} \right).$$

В результате вместо (12.3.7) получим

$$\frac{kdv}{1 + kv} + \frac{kdv}{1 - kv} = 2kg dt. \quad (12.3.8)$$

Интегрируя (12.3.8), найдем

$$\ln(1 + kv) - \ln(1 - kv) = 2kgt + c.$$

Согласно начальным условиям

$$v|_{t=0} = v_0 = 0,$$

поэтому  $c = 0$ .

Следовательно,

$$\ln \frac{1 + kv}{1 - kv} = 2kgt \quad \text{или} \quad \frac{1 + kv}{1 - kv} = e^{2kgt},$$

откуда

$$v = \frac{e^{2kgt} - 1}{k(e^{2kgt} + 1)}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(1 - e^{-2kgt})}{k(1 + e^{-2kgt})} = \frac{1}{k}.$$

#### 12.4. Движение точки под действием центральной силы

Центральной называется сила, действие которой во время движения проходит через неподвижный центр  $O$ .

Траектория движения лежит в плоскости, проходящей через начальный радиус-вектор  $\vec{r}_0$  и вектор начальной скорости  $\vec{v}_0$  (рис. 12.3).

Составим уравнение движения точки в полярных координатах:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r;$$

$$\frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}) = F_\varphi = 0. \quad (12.4.1)$$

Начальные условия таковы:

при  $t = 0, r = r_0, \varphi = 0,$

$\dot{r} = \dot{r}_0 = v_0 \cos \alpha, \quad r_0 \dot{\varphi} = v_0 \sin \alpha.$

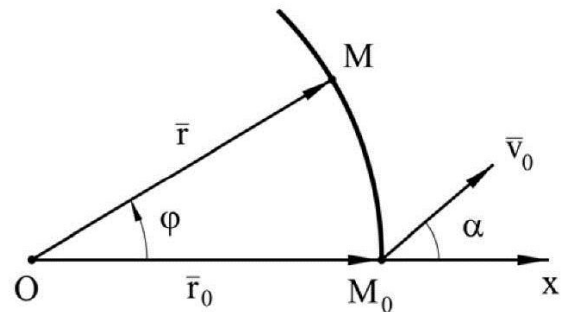


Рис. 12.3



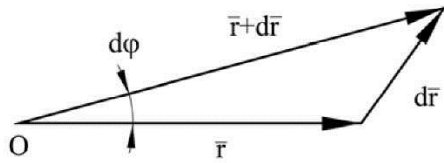


Рис. 12.4

Из второго уравнения (12.4.1) получается первый интеграл:

$$r^2 \dot{\phi} = 2C \quad (12.4.2)$$

Рассмотрим геометрический смысл выражения (12.4.2). Для этого рассмотрим модуль векторного произведения  $\vec{r} \times d\vec{r}$ . По определению это удвоенная площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{r}$  и  $d\vec{r}$  (рис. 12.4). Обозначим эту площадь через  $dS$ . Следовательно,

$$dS = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2} r^2 d\phi,$$

где  $d\phi$  – угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{r} + d\vec{r}$ .

Если поделить обе части этого равенства на  $dt$ , то получим

$$\dot{S} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi},$$

где  $\dot{S}$  – так называемая секторная скорость.

Секторная скорость – это производная по времени от площади  $S$ , охватываемой радиус-вектором  $\vec{r}$ .

Пользуясь начальными условиями, найдем величину постоянной  $C$ :

$$\dot{S} = C = \frac{1}{2} r_0^2 \dot{\phi}_0 = \frac{1}{2} r_0 v_0 \sin \alpha. \quad (12.4.3)$$

Пользуясь формулой (12.4.3), вместо (12.4.2) можно написать:

$$r^2 \dot{\phi} = r_0 v_0 \sin \alpha. \quad (12.4.4)$$

Этот интеграл называется интегралом площадей.

Воспользуемся интегралом площадей (12.4.4) и исключим из первого уравнения (12.4.1) время.

Для этого найдем:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi} = \frac{2C}{r^2} \frac{dr}{d\phi} = -2C \frac{d}{d\phi} \left( \frac{1}{r} \right), \\ \ddot{r} &= \frac{d\dot{r}}{d\phi} \dot{\phi} = -\frac{4C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\phi^2} \left( \frac{1}{r} \right). \end{aligned} \quad (12.4.5)$$

Подставив выражение для  $\ddot{r}$  в первое уравнение (12.4.1) с учетом (12.4.2), получим

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{r^2}{4C^2 m} F_r. \quad (12.4.6)$$

Уравнение (12.4.6) называется уравнением Бине.

Если сила  $F_r < 0$ , то есть является силой тяготения, то величина

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{l}{r}\right) + \frac{l}{r}$$

положительна и, следовательно, кривая обращена к полюсу вогнутостью.

При  $F_r > 0$ , когда сила является силой отталкивания, кривая обращена к полюсу выпуклостью.

Введем новую функцию  $u = l/r$ . Тогда вместо (12.4.6) получим:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{F_r(l/u)}{4mC^2u^2}. \quad (12.4.7)$$

Наибольший интерес представляет сила гравитационного взаимодействия. Сила притяжения планеты, принимаемой за однородный шар, и некоторой материальной точки равна

$$\vec{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (12.4.8)$$

где  $\gamma$  – гравитационная постоянная;  $m$  – масса материальной точки;  $M$  – масса планеты;  $r$  – расстояние между тяготеющей точкой и центром планеты.

Если известна сила притяжения  $mg$  на поверхности планеты, то можно упростить формулу (12.4.8). Здесь  $g$  – ускорение свободного падения относительно невращающейся Земли. Положим,  $r = R$ , где  $R$  – радиус Земли. Тогда из равенства (12.4.8) получим

$$mg = \frac{\gamma mM}{R^2}, \quad \gamma M = gR^2.$$

После чего равенство (12.4.8) принимает вид:

$$\vec{F} = -\frac{mgR^2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (12.4.9)$$

Следовательно,  $F_r(r) = F_r(l/u) = -mgR^2u^2$ , и дифференциальное уравнение траектории принимает вид

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{l}{P}, \quad (12.4.10)$$

где  $P = \frac{4C^2}{gR^2} = const$ .

Уравнение (12.4.10) – неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Решение уравнения (12.4.10) представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения  $u_1$  и частного решения неоднородного уравнения  $u_2$ :

$$u = u_1 + u_2. \quad (12.4.11)$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

его корни  $\lambda_{1,2} = \pm i$ . Следовательно,

$$u_1 = C_1^* e^{i\varphi} + C_2^* e^{-i\varphi} \quad (12.4.12)$$

Частное решение

$$u_2 = \frac{1}{P}. \quad (12.4.13)$$

Подставляя (12.4.12) и (12.4.13) в (12.4.11), получим

$$u = C_1^* e^{i\varphi} + C_2^* e^{-i\varphi} + \frac{1}{P}. \quad (12.4.14)$$

Решение (12.4.14) не является вещественным. Если воспользоваться формулами Эйлера  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ,  $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$ , то решение (12.4.14) можно записать через тригонометрические функции:

$$u = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + \frac{1}{P}. \quad (12.4.15)$$

Очевидно,  $C_1 = C_1^* + C_2^*$ ,  $C_2 = i(C_1^* - C_2^*)$ .

Общее решение (12.4.15) можно записать в виде

$$u = a \cos(\varphi - \varepsilon) + \frac{1}{P}, \quad (12.4.16)$$

где  $a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  и  $\varepsilon = \arctg \frac{C_2}{C_1}$  – также являются постоянными интегрирования.

Учитывая, что  $u = \frac{1}{r}$ , перепишем уравнение (12.4.16) в виде:

$$r = \frac{P}{1 + e \cos(\varphi - \varepsilon)}, \quad (12.4.17)$$

где  $e = aP$  – постоянная величина.

Уравнение (12.4.17) представляет собой траекторию материальной точки, движущейся под действием силы гравитационного тяготения.

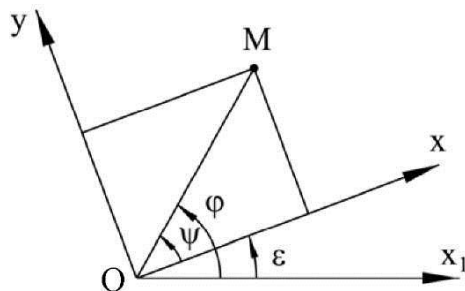


Рис. 12.5

Для упрощения анализа введем новую переменную  $\psi = \varphi - \varepsilon$ . Угол  $\psi$  будет отсчитываться от некоторого нового направления  $Ox$ , повернутого относительно первого на угол  $\varepsilon$  (рис. 12.5).

Но вид траектории при этом не изменится. Уравнение (12.4.17) запишется так:

$$r = \frac{P}{1 + e \cos \psi}. \quad (12.4.18)$$

Кривые типа (12.4.18) представляют конические сечения, то есть являются кривыми второго порядка.

Действительно,

$$x = r \cos \psi = \frac{P \cos \psi}{1 + e \cos \psi}; \quad y = r \sin \psi = \frac{P \sin \psi}{1 + e \cos \psi}.$$

Откуда следует

$$\cos \psi = \frac{x}{P - ex}; \quad \sin \psi = \frac{y}{P - ex},$$

и, наконец,

$$x^2 + y^2 = (P - ex)^2. \quad (12.4.19)$$

То есть уравнение (12.4.19) представляет собой уравнение кривых второго порядка.

Тип траектории определяется значением величины  $e$ , называемой эксцентриситетом конического сечения.

Если принять  $e > 0$ , то положительное направление оси  $Ox$  при  $\psi = 0$  будет направлено в точку, называемую перигеом орбиты.

В случае спутника эта точка называется перигеем.

Если  $e < 1$ , то знаменатель в формуле (12.4.18) не обращается в нуль и, следовательно, кривая (12.4.18) не имеет бесконечно удаленных точек. Поэтому эта кривая – эллипс.

При  $e = 0$  получаем  $r = P = const$  и, следовательно, эллипс превращается в окружность.

Если  $e > 1$ , то получаются бесконечно удаленные точки при двух значениях угла  $\psi$ , полученных из уравнения:

$$1 + e \cos \psi = 0,$$

то есть при

$$\psi = \pm \arccos\left(-\frac{1}{e}\right).$$

Таким свойством обладает гипербола. При  $e = 1$  знаменатель обращается в нуль, это соответствует  $\psi = \pi$ .

Кривая, имеющая бесконечно удаленную точку при одном значении полярного угла, называется параболой.

На рис. 12.6 изображены возможные траектории при  $e \geq 0$  и одинаковом для всех траекторий расстоянии до перигея.

Это расстояние равно  $r_{min} = r_0 = P/(1 + e)$ .

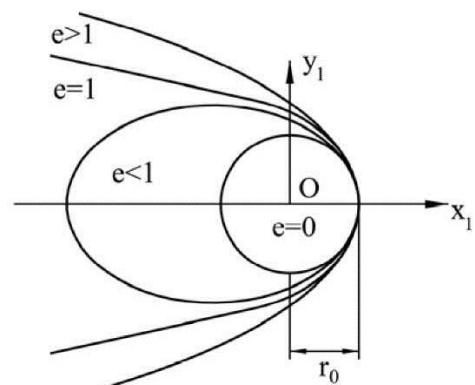


Рис. 12.6

Иследуем траекторию на экстремум. Для этого найдем производную

$$\frac{dr}{d\psi} = \frac{P e \sin \psi}{(1 + e \cos \psi)^2}$$

и приравняем ее к нулю.

Так как  $dr/d\psi = 0$  при  $\psi = 0$ , то в этой точке полярный радиус имеет экстремум.

Это значит, что при  $\psi = 0$  и любом  $e$  скорость точки перпендикулярна к радиус-вектору  $r_0$ .

Учитывая, что  $\dot{\phi} = \dot{\psi}$  и  $v_0 = r_0 \dot{\psi}$ , из интеграла площадей следует

$$\frac{l}{2} r_0 v_0 = C.$$

При  $r = r_0$ ,  $v = v_0$  и  $\psi = 0$  получим

$$r_0 = \frac{P}{1+e}, e = \frac{P}{r_0} - 1.$$

Кроме того,

$$P = \frac{4C^2}{gR^2}.$$

Тогда  $e = \frac{r_0 v_0^2}{gR^2} - 1$ .

Если  $e = 0$ , то траекторией будет окружность:

$$v_{01} = v_0 = \sqrt{gR^2 / r_0}.$$

При  $r_0 \approx R$  получим значение первой космической скорости:

$$v_{01} = \sqrt{gR} \approx 7,9 \text{ км/с}.$$

Параболическая траектория получается при  $e = 1$

$$v_{02} = \sqrt{2gR^2 / r_0}.$$

Параболическая скорость при  $r_0 \approx R$ ,

$$v_{02} = \sqrt{2gR} \approx 11,2 \text{ км/с},$$

называется второй космической скоростью.

При  $v_0 > \sqrt{2gR^2 / r_0}$  получается гиперболическая скорость.

### 12.5. Задача двух тел

К рассмотренной выше задаче динамики точки в поле центральной силы сводится так называемая задача двух тел.

Рассмотрим две тяготеющих массы  $m_c$  и  $m_p$  (рис. 12.7).

Дифференциальные уравнения их движения по отношению к инерциальной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  будут:

$$m_c \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = \gamma \frac{m_c m_p}{r^2} \frac{\bar{r}}{r}, \quad (12.5.1)$$

$$m_p \frac{d^2 \bar{r}_p}{dt^2} = -\gamma \frac{m_c m_p}{r^2} \frac{\bar{r}}{r}$$

где  $\bar{r}_c$  – радиус-вектор точки  $m_c$ ;  $\bar{r}_p$  – радиус-вектор точки  $m_p$ ;  $\frac{\bar{r}}{r}$  – единичный орт радиус-вектора  $\bar{r}$ .

Умножая первое уравнение (12.5.1) на  $m_p$ , а второе – на  $m_c$  и вычитая из второго уравнения первое, получим:

$$m_c m_p \left( \frac{d^2 \bar{r}_p}{dt^2} - \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} \right) = -\gamma \frac{m_c m_p}{r^2} (m_c + m_p) \frac{\bar{r}}{r}.$$

Учитывая, что  $\bar{r} = \bar{r}_p - \bar{r}_c$ , найдем:

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = -\gamma \frac{M m}{r^2} \frac{\bar{r}}{r}, \quad (12.5.2)$$

где  $M = m_c + m_p$ ,  $m_p = m$ .

Уравнение (12.5.2) представляет собой уравнения движения точки в поле центральной силы, решение которого рассмотрено выше.

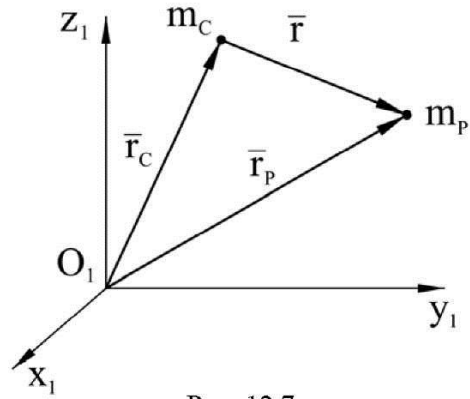


Рис. 12.7



### 13. ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Среди механических движений особое место занимают движения, которые так или иначе характеризуются периодическим повторением состояния системы. Такие движения называются *механическими колебаниями*.

К механическим колебаниям относятся колебания маятников, струн, различных деталей машин и механизмов, зданий, сооружений, мостов, фундаментов, корабля, автомобиля, самолета.

Колебательные процессы часто встречаются в природе и технике. Важную роль играют колебательные процессы в системах автоматического регулирования, которые получили широкое развитие в современной технике, так как способствуют высокой производительности труда.

Решение вышеуказанных задач основано на теории линейных и нелинейных колебаний. Линейные колебания описываются линейными дифференциальными уравнениями, разработка решений которых в основном завершена. Нелинейные колебания описываются нелинейными уравнениями, решения которых, как правило, являются приближенными и требуют индивидуального подхода.

Далее речь будет идти в основном о линейных колебаниях, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

#### 13.1. Свободные колебания материальной точки

Свободные или собственные колебания материальной точки проходят под действием силы, которая является линейной функцией перемещения. Эта сила называется *восстанавливающей*.

Примером такой силы является сила упругости, удовлетворяющая закону Гука.

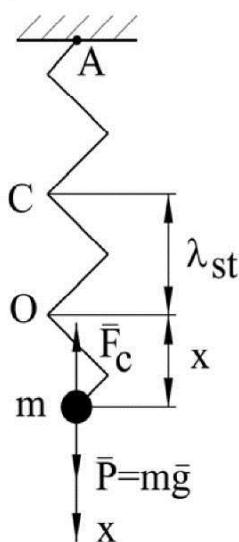


Рис. 13.1

Рассмотрим колебания груза массой  $m$ , подвешенного на пружине, верхний конец которой закреплен в точке А (рис. 13.1). На данную материальную точку  $m$  действует сила тяжести  $\bar{P}$  и реакция пружины  $\bar{F}_c$ , согласно закону Гука, равная  $c\lambda$ . Здесь  $c$  – жесткость пружины,  $\lambda$  – удлинение пружины.

Ось  $x$  направим вертикально вниз, начало координат поместим в положение статического равновесия, то есть в точке  $O$ , в которой сила тяжести  $\bar{P}$  уравновешивается статической реакцией пружины  $F_{St} = c\lambda_{st}$ , где  $\lambda_{st}$  – называется статическим удлинением пружины.

Очевидно,  $P = c\lambda_{st}$ .

Если координату точки  $m$  в произвольном ее положении обозначить через  $x$ , то удлинение пружины  $\lambda$  будет

$$\lambda = \lambda_{st} + x.$$

И, следовательно, проекция реакции пружины на ось  $Ox$  будет:

$$F_{cx} = -c\lambda = -P - cx.$$

Чтобы определить закон движения материальной точки  $m$ , находящейся под действием сил  $\bar{P}$  и  $\bar{F}_c$ , составим дифференциальное уравнение движения этой точки.

Согласно второму закону Ньютона, получаем

$$m\ddot{x} = P + F_{cx} = P - P - cx = -cx,$$

или

$$m\ddot{x} + cx = 0. \quad (13.1.1)$$

Обычно уравнение (13.1.1) преобразуют к стандартному виду

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad (13.1.2)$$

где  $k^2 = c/m$ .

Уравнение (13.1.2) – дифференциальное уравнение свободных колебаний материальной точки. Это линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

Решение линейного уравнения типа (13.1.2) всегда отыскивается подстановкой Эйлера

$$x = ce^{rt}, \quad (13.1.3)$$

где  $c$  и  $r$  – постоянные.

Подставляя выражение (13.1.3) в уравнение (13.1.2), получим

$$ce^{rt}(r^2 + k^2) = 0.$$

Последнее равенство возможно лишь в том случае, когда

$$r^2 + k^2 = 0. \quad (13.1.4)$$

Уравнение (13.1.4) называется характеристическим уравнением, его корни

$$r_{1,2} = \pm ik,$$

и, следовательно, общее решение

$$x = C_1^* e^{ikt} + C_2^* e^{-ikt}. \quad (13.1.5)$$

Решение (13.1.5), куда входят показательные функции мнимого аргумента, являются вещественными и может быть преобразовано с помощью формул Эйлера:

$$\begin{aligned} e^{ikt} &= \cos kt + i \sin kt, \\ e^{-ikt} &= \cos kt - i \sin kt \end{aligned} \quad (13.1.6)$$

к такому виду:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (13.1.7)$$

С помощью формул (13.1.6) можно установить связь между постоянными  $C_1^*, C_2^*$  и  $C_1, C_2$ , входящими в выражения (13.1.5) и (13.1.7).

Постоянные интегрирования  $C_1, C_2$  находятся из начальных условий:

$$x|_{t=0} = x_0; \quad \dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0, \quad (13.1.8)$$

после чего находится закон движения точки  $m$  по оси  $x$ , то есть определяется координата этой точки как функция времени.

Дифференцируя выражение (13.1.7) по времени, найдем скорость

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (13.1.9)$$

Удовлетворяя начальным условиям (13.1.8), из (13.1.7) и (13.1.9) получим:

$$x|_{t=0} = x_0 = C_1; \quad \dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0 = C_2 k.$$

Следовательно, 
$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt. \quad (13.1.10)$$

Уравнение (13.1.10) можно записать в более компактном виде, если положить

$$x_0 = a \sin \alpha; \quad \dot{x}_0 = a \cos \alpha. \quad (13.1.11)$$

Тогда получим, что

$$x = a \sin(kt + \alpha). \quad (13.1.12)$$

Таким образом, свободные незатухающие колебания являются гармоническими. Графиком свободных колебаний является синусоида (рис. 13.2).

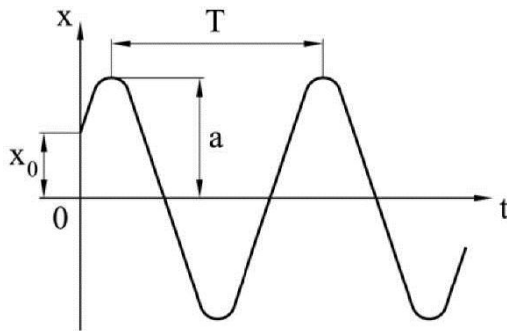


Рис. 13.2

Возводя в квадрат и складывая величины (13.1.11), получим, что амплитуда свободных колебаний

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}. \quad (13.1.13)$$

Величина  $\varphi = kt + \alpha$  — называется фазой колебаний, где  $\alpha$  — начальная фаза,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 k}{\dot{x}_0}; \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{x_0 k}{\dot{x}_0}; \quad (13.1.14)$$

$k$  — круговая частота свободных колебаний, определяемая по формуле

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (13.1.15)$$

и равная числу колебаний за  $2\pi$  секунд.

Периодом  $T$  свободных колебаний называется промежуток времени, в течение которого фаза колебания  $\varphi$  изменяется на  $2\pi$ .

Следовательно,  $[k(t+T) + \alpha] - (kt + \alpha) = 2\pi$ . Откуда 
$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}.$$

В течение одного периода происходит одно полное колебание.

Величина, обратная периоду колебаний  $T$ , называется частотой колебаний  $f$ , измеряемой в Герцах.

$$f = \frac{1}{T}.$$

Формулу для частоты свободных колебаний  $k$  можно представить в ином виде.

Рассмотрим формулу  $P = c\lambda_{st}$ .

Иначе  $mg = c\lambda_{st}$ .

$$\text{Откуда } \frac{g}{\lambda_{st}} = \frac{c}{m} = k^2.$$

Тогда

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{st}}}. \quad (13.1.16)$$

Число свободных колебаний в минуту можно определить следующим образом:

$$n = 60f = \frac{60}{T} = \frac{60}{2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}} = \frac{30}{\pi\sqrt{\frac{\lambda_{st}}{g}}}. \quad (13.1.17)$$

Полагая  $\pi = 3.14$ ,  $g = 981 \text{ см/с}^2$ , получим:

$$n \approx \frac{300}{\sqrt{\lambda_{st}}},$$

где  $\lambda_{st}$  – берется в сантиметрах.

**Если свободные колебания характеризуются круговой частотой  $k$  или периодом  $T$ , не зависящими от начальных условий, то они называются изохронными.**

Формула (13.1.17) часто оказывается весьма удобной на практике, так как частоту свободных колебаний можно найти, измерив статическую деформацию.

Рассмотрим электродвигатель на упругой балке (рис. 13.3).

Пусть  $n = 980 \text{ об/мин}$ . Тогда, если

$$\lambda_{st} \approx \frac{300^2}{n^2} \approx \frac{9 \cdot 10^4}{10^6} \approx \frac{1}{10} \text{ см} = 1 \text{ мм},$$

то есть прогиб балки примерно равен 1 мм, то частота вращения двигателя оказывается близкой к собственной частоте колебаний.

Ниже будет показано, что это, как правило, недопустимо.

Рассмотрим еще один пример.

К концу пружины подвешен груз. Статическое удлинение пружины равно  $\lambda$ . Определить движение груза, если в начальный момент времени пружина была сжата на длину, равную  $\lambda$ , а груз был опущен без начальной скорости.

Начало координат расположить в положении статического равновесия, ось координат направить вниз.

Воспользуемся решением (13.1.10), поскольку начальная скорость равна нулю, то в нем остается только первый член. Согласно условию задачи до положения статического равновесия расстояние груза в начальный момент равно  $2\lambda$ . Поэтому  $x_0 = -2\lambda$ , и, следовательно, закон движения груза будет

$$x = -2\lambda \cos \sqrt{\frac{g}{\lambda}} t.$$

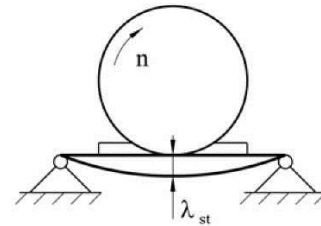


Рис. 13.3

### 13.2. Затухающие колебания материальной точки при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости

Пусть наряду с восстанавливающей упругой силой  $\bar{F}_c$  на материальную точку действует сила сопротивления среды  $\bar{F}_v$ , являющаяся линейной функцией скорости  $\bar{v}$ .

К числу сил сопротивления относятся силы трения жидкости или воздуха, внутреннее трение в материале, трение между поверхностями скольжения.

Из опыта известно, что сила сопротивления жидкости или воздуха является функцией скорости. При малых скоростях можно считать, что эта сила сопротивления  $\bar{F}_v$  является линейной функцией скорости

$$\bar{F}_v = -b\bar{v}, \quad (13.2.1)$$

где  $b$  – коэффициент пропорциональности, определяемый опытным путем.

При больших диапазонах изменения скорости линейный закон сопротивления уже не может быть принят. Более того, часто не представляется возможным получить единое аналитическое выражение силы сопротивления для всего диапазона изменения скорости.

По-прежнему будем рассматривать колебания груза массой  $m$ , подвешенного на пружине в точке А (рис. 13.4).

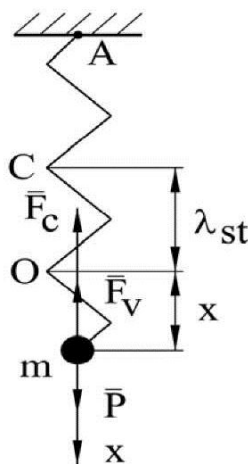


Рис. 13.4

Начало координат поместим в положение статического равновесия. На материальную точку, наряду с силой веса  $\bar{P}$  и восстанавливающей упругой силой  $\bar{F}_c$ , действует сила сопротивления среды  $\bar{F}_v$ . Проекция силы  $\bar{F}_v$  на ось  $x$  будет  $F_{vx} = -b\dot{x}$ .

Тогда, согласно второму закону Ньютона,

$$m\ddot{x} = P + F_{cx} + F_{vx} = P - P - cx - b\dot{x} = -cx - b\dot{x}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение движения точки:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0,$$

или

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0, \quad (13.2.2)$$

где  $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$  – частота свободных незатухающих колебаний;

$n = \frac{b}{2m}$  – приведенный коэффициент сопротивления среды.

Уравнение (13.2.2), как и уравнение свободных незатухающих колебаний (13.1.2), является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Решается оно подстановкой (13.1.3), при этом характеристическое уравнение будет

$$r^2 + 2nr + k^2 = 0. \quad (13.2.3)$$

Корни характеристического уравнения (13.2.3)

$$r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} . \quad (13.2.4)$$

В зависимости от того, каков дискриминант уравнения (13.2.3)  $D = n^2 - k^2$ , возможны три вида решения уравнения (13.2.2).

1. Случай большого трения  $D > 0$ ,  $n > k$ .

Корни характеристического уравнения действительные различные.

Частные решения уравнения (13.2.2):

$$x_1^* = e^{-nt} e^{k_1^* t}; \quad x_2^* = e^{-nt} e^{-k_1^* t},$$

где  $k_1^* = \sqrt{n^2 - k^2}$ .

Так как решаемое дифференциальное уравнение линейное, то любая линейная комбинация решений  $x_1^*$  и  $x_2^*$  будет также решением уравнения (13.2.2). Поэтому за частные решения примем следующие выражения:

$$x_1 = \frac{x_1^* + x_2^*}{2} = e^{-nt} \frac{e^{k_1^* t} + e^{-k_1^* t}}{2} = e^{-nt} ch k_1^* t;$$

$$x_2 = \frac{x_1^* - x_2^*}{2} = e^{-nt} \frac{e^{k_1^* t} - e^{-k_1^* t}}{2} = e^{-nt} sh k_1^* t.$$

Тогда получим следующее общее решение однородного уравнения:

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 = e^{-nt} (C_1 ch k_1^* t + C_2 sh k_1^* t). \quad (13.2.5)$$

2. Граничный случай, когда  $D = 0$ ;  $n = k$ .

Корни характеристического уравнения вещественные, равные.

Общее решение

$$x = e^{-nt} (C_1 + C_2 t). \quad (13.2.6)$$

3. Случай малого трения  $D < 0$ ;  $n < k$ .

Частные решения

$$x_1^* = e^{-nt} e^{ik_1 t}; \quad x_2^* = e^{-nt} e^{-ik_1 t},$$

где  $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ .

Чтобы избавиться от показательных функций мнимого аргумента, используем следующие комбинации решений  $x_1^*$  и  $x_2^*$ :

$$x_1 = \frac{x_1^* + x_2^*}{2} = e^{-nt} \frac{e^{ik_1 t} + e^{-ik_1 t}}{2} = e^{-nt} \cos k_1 t;$$

$$x_2 = \frac{x_1^* - x_2^*}{2i} = e^{-nt} \frac{e^{ik_1 t} - e^{-ik_1 t}}{2i} = e^{-nt} \sin k_1 t.$$

Таким образом, в общее решение войдут тригонометрические функции и оно запишется так:

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t). \quad (13.2.7)$$



Первые два случая соответствуют аperiodическому движению точки. В третьем случае решение содержит периодические функции, но благодаря множителю  $e^{-nt}$  отклонения точки уменьшаются со временем, асимптотически приближаясь к нулю.

Рассмотрим третий случай. Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  в выражении (13.2.7) найдем из начальных условий:

$$x|_{t=0} = x_0; \quad \dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0. \quad (13.2.8)$$

Продифференцировав (13.2.7) по времени, найдем скорость:

$$\begin{aligned} \dot{x} = e^{-nt} (-C_1 k_1 \sin k_1 t + C_2 k_1 \cos k_1 t) - \\ - n e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t). \end{aligned} \quad (13.2.9)$$

Воспользовавшись начальными условиями (13.2.8) и выражениями (13.2.7) и (13.2.9), получаем:

$$x|_{t=0} = x_0 = C_1; \quad \dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0 = C_2 k_1 - C_1 n.$$

Откуда  $C_2 = \frac{\dot{x}_0 + n x_0}{k_1}$ .

Общее решение уравнения (13.2.2) в данном случае будет

$$x = e^{-nt} \left( x_0 \cos k_1 t + \frac{\dot{x}_0 + n x_0}{k_1} \sin k_1 t \right). \quad (13.2.10)$$

Обозначим

$$x_0 = a \sin \alpha; \quad \frac{\dot{x}_0 + n x_0}{k_1} = a \cos \alpha.$$

Тогда, вместо (13.2.10), получим:

$$x = a e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha), \quad (13.2.11)$$

где  $a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + n x_0)^2}{k_1^2}}$  – начальная амплитуда затухающих колебаний;  $\alpha = \arctg \frac{x_0 k_1}{\dot{x}_0 + n x_0}$  – начальная фаза.

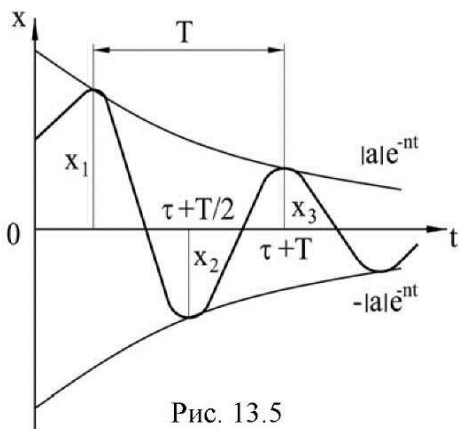


Рис. 13.5

График функции (13.2.11), изображенный на рис. 13.5, представляет искаженную синусоиду, заключенную между двумя экспонентами  $\pm |a| e^{-nt}$ , характеризующими изменение амплитуды колебаний.

Эти кривые асимптотически приближаются к оси  $t$ .

Периодом  $T$  затухающих колебаний материальной точки называется промежуток времени между двумя последовательными прохождениями точки через положение статического равновесия в одном и том же направлении.

Круговая частота  $k_1$  и период  $T'$  затухающих колебаний соответственно равны:

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}, \quad T' = \frac{2\pi}{k_1}.$$

Свободные затухающие колебания материальной точки при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости, как и свободные колебания без наличия сил сопротивления, являются изохронными. Силы сопротивления вызывают уменьшение круговой частоты и увеличение периода  $T'$ .

Наибольшие отклонения движущейся точки от положения равновесия представляют убывающую геометрическую прогрессию:

$$x_1 = ae^{-nt}; \quad x_2 = ae^{-n(t+\frac{T'}{2})}, \dots,$$

поэтому

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = e^{-n\frac{T'}{2}} = \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{2}},$$

где  $q = e^{nT'}$  – величина, характеризующая быстроту затухающих колебаний, называется декрементом колебаний.

$\ln q = nT'$  – называется логарифмическим декрементом колебаний.

Сравним влияние сил сопротивления на частоту колебаний и скорость их затухания. Пусть  $n = 0,1k$ .

Тогда

$$k_1 = \sqrt{k^2 - (0,1k)^2} \approx 0,995k.$$

Найдем отношение:

$$\frac{x_1}{x_3} = e^{0,1k\frac{2\pi}{k}} = e^{0,2\pi} = 1,87,$$

то есть  $x_3 = 0,553x_1$ .

Таким образом, частота изменилась на 0,5 %, а амплитуда за цикл на 53,3 %. За 10 циклов отклонение будет составлять около 0,002 от первоначального.

Таким образом, влияние сил сопротивления незначительно на частоту колебаний, и, как правило, может не учитываться.

Напротив, это влияние весьма существенно на скорость затухания колебаний.

В заключении этого пункта рассмотрим решения при большом трении.

Если  $n > k$ , то частота  $k_1$  становится мнимой.

$$k_1 = ik_1^* = i\sqrt{n^2 - k^2}.$$

Общее решение однородного уравнения дается формулой (13.2.5) и может быть получено из решения (13.2.10), если учесть, что

$$\cos i k_1^* t = \operatorname{ch} k_1^* t; \quad \sin i k_1^* t = i \operatorname{sh} k_1^* t.$$

Следовательно, в данном случае

$$x = e^{-nt} \left( x_0 \operatorname{ch} k_1^* t + \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{k_1^*} \operatorname{sh} k_1^* t \right), \quad (13.2.12)$$

где  $k_1^* = \sqrt{n^2 - k^2}$ .

При  $k = n$ , когда  $k_1 = k_1^* = 0$ , имеем

$$x = e^{-nt} [x_0 + (\dot{x}_0 + nx_0)t]. \quad (13.2.13)$$

Это решение получается из любого предыдущего в результате предельного перехода.

Рассмотрим, например, выражение (13.2.12). Если  $k_1^* = 0$ , то  $\operatorname{ch} k_1^* t = 0$ .

$$\lim_{k_1^* \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} k_1^* t}{k_1^*} = \lim_{k_1^* \rightarrow 0} \frac{k_1^* t}{k_1^*} = t.$$

Таким образом, видно, что из (13.2.12) получается выражение (13.2.13). При этом оба решения (13.2.12) и (13.2.13) носят аperiодический характер.

### 13.3. Вынужденные колебания материальной точки при отсутствии силы сопротивления среды

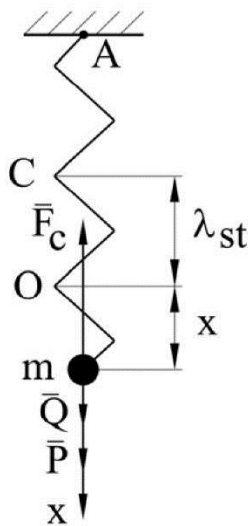


Рис. 13.6

Пусть материальная точка подвешена на пружине (рис. 13.6). При действии силы  $\bar{Q}(t)$ , меняющейся во времени, происходят вынужденные колебания материальной точки.

В дальнейшем эту силу будем называть возмущающей. Рассмотрим случай, когда возмущающая сила является гармонической

$$\bar{Q} = \bar{H} \sin pt,$$

где  $H$  – амплитуда возмущающей силы;  
 $p$  – ее частота.

Начало координат расположим в положении статического равновесия. Дифференциальное уравнение движения материальной точки под действием восстанавливающей силы  $F_{cx} = -C(x + \lambda_{st})$ , силы веса  $P = mg$  и возмущающей силы  $Q = H \sin pt$  будет

$$m\ddot{x} + cx = H \sin pt. \quad (13.3.1)$$

Разделив (13.3.1) на массу  $m$ , получим:

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt, \quad (13.3.2)$$

где  $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$  – частота свободных незатухающих колебаний;

$h = \frac{H}{m}$  – приведенная амплитуда возмущающей силы.

Уравнение (13.3.2) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка.

Общее решение неоднородного уравнения складывается из общего решения  $x_1$ , соответствующего однородного уравнения и частного решения  $x_2$  неоднородного уравнения:

$$x = x_1 + x_2. \quad (13.3.3)$$

Причем здесь  $x_1$ , согласно (13.1.7), дается формулой:

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (13.3.4)$$

Частное решение уравнения (13.3.2) будем искать в виде

$$x_2 = A \sin pt. \quad (13.3.5)$$

После подстановки (13.3.5) в уравнение (13.3.2) будем иметь

$$-Ap^2 + Ak^2 = h.$$

Откуда

$$A = \frac{h}{k^2 - p^2}, \quad (13.3.6)$$

и, следовательно,

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (13.3.7)$$

Таким образом, общее решение уравнения (13.3.2) согласно (13.3.3), (13.3.4) и (13.3.7) имеет вид:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (13.3.8)$$

Найдем решение дифференциального уравнения (13.3.2), соответствующее начальным условиям:

$$x|_{t=0} = x_0; \quad \dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0. \quad (13.3.9)$$

Для этого подставим начальные условия в соотношение (13.3.8) и в соотношение

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos pt$$

при  $t = 0$ .

Тогда найдем

$$x_0 = C_1; \quad \dot{x}_0 = C_2 k + \frac{hp}{k^2 - p^2}.$$

Откуда

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} - \frac{hp}{k(k^2 - p^2)}.$$

Подставляя найденные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  в уравнение (13.3.8), получим кинематическое уравнение движения точки, соответствующее начальным условиям (13.3.9) и действию гармонической возмущающей силы  $Q = H \sin pt$ :

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt - \frac{hp}{k(k^2 - p^2)} \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (13.3.10)$$

В уравнении (13.3.10) первые два слагаемых характеризуют свободные колебания точки с частотой  $k$ , третье – вынужденные колебания точки также с частотой свободных колебаний  $k$ , четвертое – вынужденные колебания с частотой возмущающей силы  $p$ . Амплитуда  $A$  вынужденных колебаний с частотой возмущающей силы  $p$ , определяемая формулой (13.3.6), зависит от соотношения частоты собственных колебаний  $k$  и частоты возмущающей силы  $p$ .

Для анализа этой зависимости представим  $A$  в виде

$$A = \frac{A_0}{1 - \chi^2},$$

где  $A = \frac{h}{k^2} = \frac{H}{C}$  – статическое отклонение материальной точки от действия силы  $H$ , равной амплитуде возмущающей силы;

$\chi = p/k$  – отношение частот, называемое коэффициентом расстройки.

Отношение  $\frac{A}{A_0} = \frac{1}{1 - \chi^2}$  – называется коэффициентом динамичности. Введем следующее обозначение для коэффициента динамичности:

$$\frac{A}{A_0} = \lambda.$$

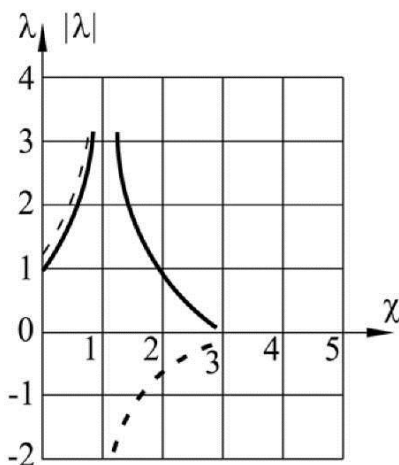


Рис. 13.7

График зависимости  $\lambda$  представлен на рис. 13.7 пунктиром, сплошной линией показана зависимость  $|\lambda(\chi)|$ . Как видно, величина  $\lambda(\chi)$  слева от точки  $\chi = 1$  равна  $+\infty$ , а справа  $-\infty$ . То есть при совпадении частоты возмущающей силы с собственной частотой колебаний амплитуда вынужденных колебаний неограниченно возрастает. При дальнейшем увеличении коэффициента расстройки  $\chi$  амплитуда вынужденных колебаний убывает, стремясь к нулю.

Явление, когда частота возмущающей силы совпадает с собственной частотой и при котором отмечается рост амплитуды вынужденных колебаний, называется **резонансом**.

Покажем, что при отсутствии сил сопротивления амплитуда при резонансе возрастает пропорционально времени.

В случае резонанса сумма третьего и четвертого слагаемых в выражении (13.3.10) принимает неопределенное значение и может быть найдена с помощью правила Лопиталья:

$$h \lim_{p \rightarrow k} \frac{\sin pt - \frac{p}{k} \sin kt}{k^2 - p^2} = h \lim_{p \rightarrow k} \frac{\frac{d}{dp} (\sin pt - \frac{p}{k} \sin kt)}{\frac{d}{dp} (k^2 - p^2)} = -\frac{h}{2k} t \cos kt + \frac{h}{2k^2} \sin kt.$$

Итак, в случае резонанса при отсутствии сил сопротивления, движение определяется уравнением

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt - \frac{h}{2k} t \cos kt + \frac{h}{2k^2} \sin kt. \quad (13.3.11)$$

В решении (13.3.11) содержится растущий со временем член

$$x^* = -\frac{h}{2k} t \cos kt. \quad (13.3.12)$$

График зависимости (13.3.12) показан на рис. 13.8.

Как видно, резонанс не сразу развивается во времени. В некоторых случаях его можно избежать быстрым изменением частоты возмущающей силы или собственной частоты.

Возможность возникновения резонанса следует учитывать при проектировании машин, так как резонанс способен вызвать разрушения. С другой стороны, резонанс широко используется в радиотехнике как полезное явление.

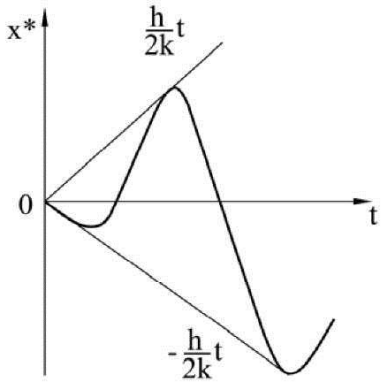


Рис. 13.8

### 13.4. Вынужденные колебания материальной точки с учетом силы сопротивления среды

Рассмотрим вынужденные колебания материальной точки под действием гармонической возмущающей силы  $\bar{Q} = \bar{H} \sin pt$ , происходящие в среде, в которой сила сопротивления  $\bar{F}_v$  пропорциональна первой степени скорости

$$\bar{F}_v = -b\bar{v}.$$

Тогда дифференциальное уравнение колебаний точки будет:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = H \sin pt. \quad (13.4.1)$$

Поделив (13.4.1) на  $m$ , получим уравнение в стандартной форме:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h \sin pt, \quad (13.4.2)$$

где  $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ ;  $n = \frac{b}{2m}$ ;  $h = \frac{H}{m}$ .

Уравнение (13.4.2) является неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения  $x_1$  и частного решения  $x_2$  неоднородного уравнения.

Будем рассматривать случай малого трения, когда  $k > n$ . Общее решение однородного уравнения  $x_1$  было получено ранее:

$$x_1 = e^{-m} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t), \quad (13.4.3)$$

где  $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ .



Частное решение  $x_2$  будем искать в виде:

$$x_2 = A_1 \sin pt + A_2 \cos pt, \quad (13.4.4)$$

где  $A_1, A_2$  – некоторые постоянные.

Подставляя (13.4.4) в уравнение (13.4.2), получим

$$\begin{aligned} & -A_1 p^2 \sin pt - A_2 p^2 \cos pt + 2nA_1 p \cos pt - \\ & -2nA_2 p \sin pt + k^2 A_1 \sin pt + k^2 A_2 \cos pt = h \sin pt. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты у одноименных тригонометрических функций, получим:

$$\begin{aligned} & (-p^2 + k^2)A_1 - 2npA_2 = h; \\ & 2npA_1 + (-p^2 + k^2)A_2 = 0. \end{aligned} \quad (13.4.5)$$

Решая систему (13.4.5), найдем:

$$A_1 = \frac{h(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}; \quad A_2 = \frac{-2nph}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}. \quad (13.4.6)$$

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения, согласно (13.4.3), (13.4.4) и (13.4.6), таково:

$$\begin{aligned} x = & e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + \\ & + \frac{h(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} \sin pt - \frac{2nph}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} \cos pt. \end{aligned} \quad (13.4.7)$$

Найдем скорость:

$$\begin{aligned} \dot{x} = & -ne^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + \\ & + e^{-nt} (-C_1 k_1 \sin k_1 t + C_2 k_1 \cos k_1 t) + \\ & + \frac{hp(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} \cos pt + \frac{2np^2 h}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} \sin pt. \end{aligned} \quad (13.4.8)$$

Воспользовавшись начальными условиями

$$x|_{t=0} = x_0; \quad \dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0,$$

получим, согласно (13.4.7) и (13.4.8):

$$\begin{aligned} x_0 = & C_1 - \frac{2nph}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}; \\ \dot{x}_0 = & -nC_1 + C_2 k_1 + \frac{hp(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}. \end{aligned}$$

Откуда находим постоянные  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{aligned} C_1 = & x_0 + \frac{2nph}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}; \\ C_2 = & \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{k_1} + \frac{2n^2 ph}{k_1 [(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2]} - \frac{hp(k^2 - p^2)}{k_1 [(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2]}. \end{aligned}$$

Таким образом, искомое решение будет:

$$\begin{aligned}
 x = & e^{-nt} \left( x_0 \cos k_1 t + \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{k_1} \sin k_1 t \right) + \\
 & + e^{-nt} \frac{2nph}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} \cos k_1 t + \\
 & + e^{-nt} \left\{ \frac{2n^2 ph}{k_1 [(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2]} - \frac{hp(k^2 - p^2)}{k_1 [(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2]} \right\} \sin k_1 t + \\
 & + \frac{h(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} \sin pt - \frac{2nph}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} \cos pt.
 \end{aligned} \tag{13.4.9}$$

Как видно, по истечении некоторого промежутка времени, из-за влияния множителя  $e^{-nt}$ , существенную роль в полученном решении (13.4.9) будут играть только два последних слагаемых, то есть частное решение

$$x_2 = \frac{h(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} \sin pt - \frac{2nph}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} \cos pt. \tag{13.4.10}$$

Выражение (13.4.10) описывает чисто вынужденные колебания. Если ввести обозначения:

$$\frac{h(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} = A \cos \varphi; \quad \frac{2nph}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} = A \sin \varphi,$$

вместо (13.4.10) получим:

$$x_2 = A \sin(pt - \varphi), \tag{13.4.11}$$

где

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} - \tag{13.4.12}$$

амплитуда вынужденных колебаний:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2np}{k^2 - p^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{2np}{k^2 - p^2}, \tag{13.4.13}$$

$\varphi$  – сдвиг фазы между перемещением и возмущающей силой при чисто вынужденных колебаниях.

Исследуем амплитуду вынужденных колебаний, определяемую формулой (13.4.12) (рис. 13.9).

Разделив числитель и знаменатель на  $k^2$ , получим:

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{(1 - \chi^2)^2 + 4\nu^2 \chi^2}}, \tag{13.4.14}$$

где  $A_0 = \frac{h}{k^2} = \frac{H}{c}$  – статическая деформация пружины от действия силы  $H$ , равной амплитуде

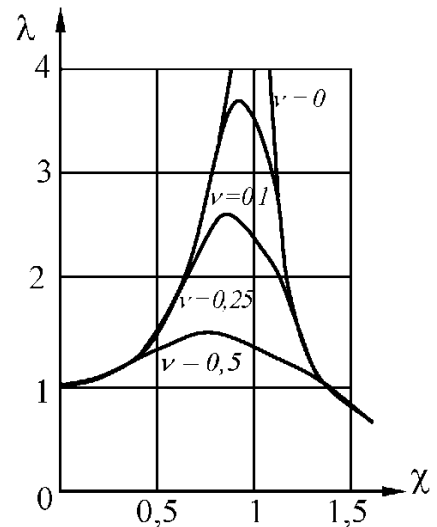


Рис. 13.9

возмущающей силы;  $\chi = \frac{p}{k}$  – расстройка;  $\nu = \frac{n}{k}$  – коэффициент, характеризующий действие сил сопротивления.

Величина  $\lambda$ , равная отношению  $A/A_0$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-\chi^2)^2 + 4\nu^2\chi^2}}, \quad (13.4.15)$$

называется коэффициентом динамичности.

Выясним, при каких значениях коэффициент динамичности  $\lambda$  будет иметь максимум и минимум. Для этого исследуем зависимость  $f(\chi) = (1-\chi^2)^2 + 4\nu^2\chi^2$  на экстремум.

При  $f(\chi)_{\max}$  получим  $\lambda_{\min}$  и наоборот, при  $f(\chi)_{\min}$  получим  $\lambda_{\max}$ .

Найдем производную  $f'(\chi)$  и приравняем ее к нулю:

$$2(1-\chi^2)(-2\chi) + 8\nu^2\chi = 0.$$

Корни этого уравнения  $\chi_1 = 0$ ;  $\chi_2 = \sqrt{1-2\nu^2}$ .

При малом сопротивлении среды, когда  $n < k$ ,  $\chi_2$  – вещественная величина.

Найдем вторую производную:

$$f''(\chi) = -4(1-3\chi^2) + 8\nu^2.$$

При  $\chi = \chi_1$ ,  $f''(\chi_1) = 4(2\nu^2 - 1) < 0$ ;

При  $\chi = \chi_2$ ,  $f''(\chi_2) = -4[1-3(1-2\nu^2)] + 8\nu^2 = 8(1-2\nu^2) > 0$ .

Таким образом, при  $\chi = \chi_1$ ,  $f(\chi)$  имеет максимум, а при  $\chi = \chi_2$  – минимум.

Следовательно, у коэффициента динамичности  $\lambda$  первая точка  $\chi_1 = 0$  – минимум, а вторая точка  $\chi_2 = \sqrt{1-2\nu^2}$  – максимум.

В начале амплитуда вынужденных колебаний возрастает, а потом падает. Ее максимум смещен от резонанса в сторону низких частот. При значениях  $\chi_2 = 0$ , когда  $\nu = \sqrt{2}/2$ , максимум у коэффициента динамичности исчезает и с увеличением частоты возмущающей силы  $p$  коэффициент динамичности будет монотонно убывать.

Рассмотрим изменение сдвига по фазе  $\varphi$  между вынужденными колебаниями и возмущающей силой в зависимости от частоты вынужденных колебаний.

Перепишем формулу для сдвига фазы (13.4.13) в виде

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2np}{k^2 - p^2} = \operatorname{arctg} \frac{2\nu\chi}{1 - \chi^2}.$$

При значении расстройки  $\chi = 1$  имеем  $\operatorname{tg}\varphi = \infty$ , следовательно,  $\varphi = \pi/2$ . То есть при резонансе сдвиг фаз равен  $\pi/2$ ; при  $\chi = 0$  и  $\chi = \infty$ , независимо от  $\nu$  имеем  $\varphi(0) = 0$ ;  $\varphi(\infty) = \pi$ .

Найдем производную

$$\frac{d\varphi}{d\chi} = \frac{2\nu(1+\chi^2)}{(1-\chi^2)^2 + (2\nu\chi)^2} = 2\nu\lambda^2(1+\chi^2), \quad (13.4.16)$$

где  $\lambda$  – коэффициент динамичности, определяемый формулой (13.4.15).

Согласно формуле (13.4.16), производная  $\frac{d\varphi}{d\chi}$  положительна при любых значениях  $\chi$ .

Поэтому  $\varphi$  монотонно возрастает от нуля до  $\pi$ , приобретая значение  $\pi/2$  при  $\chi = 1$  (рис. 13.10). При  $\nu = 0, \varphi$  – разрывная функция, имеющая значения  $\varphi = 0$  при  $\chi < 1$ ,  $\varphi = \pi$  при  $\chi > 1$ .

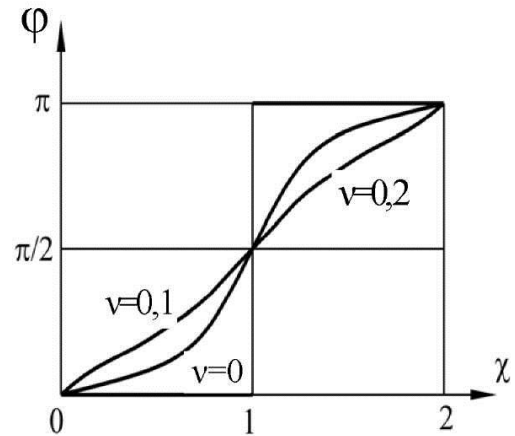


Рис. 13.10

### 13.5. Вынужденные колебания материальной точки под действием периодической возмущающей силы общего вида

Пусть на материальную точку, колеблющуюся в среде с силой сопротивления  $\vec{F}_v = -b\vec{v}$ , действует произвольная периодическая возмущающая сила, имеющая период  $T$ :

$$Q(t+T) = Q(t). \quad (13.5.1)$$

Разложим силу  $Q(t)$  в ряд Фурье:

$$Q(t) = m \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos j\omega t + b_j \sin j\omega t) \right], \quad (13.5.2)$$

где  $m$  – масса точки;

$$a_j = \frac{\omega}{m\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} Q(t) \cos j\omega t dt, \quad j = \overline{0, \infty},$$

$$b_j = \frac{\omega}{m\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} Q(t) \sin j\omega t dt, \quad j = \overline{1, \infty},$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Обозначим  $a_j = h_j \sin \beta_j$ ;  $b_j = h_j \cos \beta_j$ .

Тогда ряд (13.5.2) переписывается в виде:

$$Q(t) = m \left[ h_0 + \sum_{j=1}^{\infty} h_j \sin(j\omega t + \beta_j) \right], \quad (13.5.3)$$

где  $h_0 = \frac{a_0}{2}$ ;  $h_j = \sqrt{a_j^2 + b_j^2}$ ;  $\beta_j = \arctg \frac{a_j}{b_j}$ .

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний точки под действием возмущающей силы, определяемой рядом (13.5.3), будет:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h_0 + \sum_{j=1}^{\infty} h_j \sin(j\omega t + \beta_j). \quad (13.5.4)$$

Рассмотрим чисто вынужденную составляющую решения уравнения (13.5.4), которую будем искать также в виде ряда Фурье:

$$x = x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} x_j \sin(j\omega t + \beta_j - \varepsilon_j). \quad (13.5.5)$$

После подстановки (13.5.5) в уравнение (13.5.4) получим:

$$k^2 x_0 = h_0; \quad (13.5.6)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[ -j^2 \omega^2 \sin(j\omega t + \beta_j - \varepsilon_j) + 2nj \omega \cos(j\omega t + \beta_j - \varepsilon_j) + k^2 \sin(j\omega t + \beta_j - \varepsilon_j) \right] x_j = \sum_{j=1}^{\infty} h_j \sin(j\omega t + \beta_j). \quad (13.5.7)$$

Обозначив  $j\omega t + \beta_j - \varepsilon_j = \psi_j$ , перепишем (13.5.7) в виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} (-j^2 \omega^2 \sin \psi_j + 2nj \omega \cos \psi_j + k^2 \sin \psi_j) x_j = \\ & = \sum_{j=1}^{\infty} h_j (\sin \psi_j \cos \varepsilon_j + \cos \psi_j \sin \varepsilon_j). \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты у одноименных тригонометрических функций угла  $\psi_j$ , получаем:

$$(-j^2 \omega^2 + k^2) x_j = h_j \cos \varepsilon_j;$$

$$2nj \omega x_j = h_j \sin \varepsilon_j.$$

Откуда находим

$$x_j = \frac{h_j}{\sqrt{(k^2 - j^2 \omega^2)^2 + 4n^2 j^2 \omega^2}}; \quad \varepsilon_j = \arctg \frac{2nj \omega}{k^2 - j^2 \omega^2}. \quad (13.5.8)$$

Таким образом, искомое решение, согласно (13.5.6) и (13.5.8), будет

$$x = \frac{h_0}{k^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{h_j}{\sqrt{(k^2 - j^2 \omega^2)^2 + 4n^2 j^2 \omega^2}} \sin(j\omega t + \beta_j - \varepsilon_j). \quad (13.5.9)$$

Если осуществляется одно из условий:

$$j\omega = k, \quad j = \overline{1, \infty},$$

то, как следует из выражения (13.5.9), имеет место резонанс первого, второго или высшего порядков.

Исследование действия произвольной периодической возмущающей силы не содержит принципиальных трудностей, если возмущающая сила  $Q(t)$  не имеет разрывов, когда ухудшается сходимость ряда (13.5.2).

### 13.6. Вынужденные колебания под действием произвольной возмущающей силы

Рассмотрим вначале свободные затухающие колебания материальной точки под действием единичного импульса

$$m v_0 = m \dot{x}_0 = 1,$$

где  $m$  – масса точки;  $v_0 = \dot{x}_0$  – начальная скорость.

Для этого следует рассмотреть решение однородного уравнения

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0,$$

при следующих начальных условиях:

$$x|_{t=0} = x_0 = 0; \quad \dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0 = \frac{1}{m}.$$

Это решение согласно (13.2.10) имеет вид

$$\xi = e^{-nt} \frac{1}{mk_1} \sin k_1 t, \quad (13.6.1)$$

где  $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ .

Функция  $\xi$  называется реакцией на единичный импульс. Если последний накладывается не в момент времени  $t = 0$ , а при  $t = \tau$ , то в выражении (13.6.1) надо заменить  $t$  на  $(t - \tau)$ .

$$\xi(t - \tau) = e^{-n(t-\tau)} \frac{1}{mk_1} \sin k_1(t - \tau); \quad t > \tau; \quad (13.6.2)$$

$$\xi(t - \tau) = 0; \quad t < \tau.$$

Действие произвольной силы  $H(t)$  в промежутке времени  $(0, t)$  можно представить как последовательное приложение импульсов бесконечно малой величины  $H(\tau)d\tau$ . Каждый такой импульс вызывает движение, определяемое выражением

$$H(\tau)\xi(t - \tau)d\tau,$$

а окончательное движение, согласно принципу независимости действия сил или принципу суперпозиции, определится интегралом:

$$x^*(t) = \int_0^t H(\tau)\xi(t - \tau)d\tau = \frac{1}{mk_1} \int_0^t H(\tau)e^{-n(t-\tau)} \sin k_1(t - \tau)d\tau. \quad (13.6.3)$$

Для того, чтобы учесть влияние начальных условий, наложим на решение (13.6.3) свободные колебания, возникающие за счет начального отклонения  $x_0$  и начальной скорости  $\dot{x}_0$ :



$$x(t) = e^{-nt} \left( x_0 \cos k_1 t + \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{k_1} \sin k_1 t \right) + \frac{1}{mk_1} \int_0^t H(\tau) e^{-n(t-\tau)} \sin k_1 (t-\tau) d\tau. \quad (13.6.4)$$

Отметим, что если сделать замену переменных  $t - \tau = \tau_1$ , то выражение (13.6.3) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} x^*(t) &= -\frac{1}{mk_1} \int_{\tau}^0 H(t - \tau_1) e^{-n\tau_1} \sin k_1 \tau_1 d\tau_1 = \\ &= \frac{1}{mk_1} \int_0^t H(t - \tau) e^{-n\tau} \sin k_1 \tau d\tau. \end{aligned}$$

Рассмотрим действие на систему возмущающей силы в виде ступенчатой функции:

$$H(\tau) = \begin{cases} 1; & \tau > 0; \\ 0; & \tau < 0, \end{cases}$$

при  $x_0 = 0$ ;  $\dot{x}_0 = 0$ .

Это означает, что следует найти интеграл

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{mk_1} \int_0^t e^{-n(t-\tau)} \sin k_1 (t-\tau) d\tau = \frac{1}{mk_1} \int_0^t e^{-n\tau} \sin k_1 \tau d\tau = \\ &= \frac{1}{m(k_1^2 + n^2)} \left[ 1 - e^{-nt} \left( \cos k_1 t + \frac{n}{k_1} \sin k_1 t \right) \right] = \frac{1}{c} \left[ 1 - e^{-nt} \left( \cos k_1 t + \frac{n}{k_1} \sin k_1 t \right) \right]. \end{aligned}$$

### 13.7. Комплексная форма решения задачи о вынужденных колебаниях материальной точки при произвольном периодическом возмущающем воздействии. Передаточная функция

Пусть произвольная периодическая нагрузка представлена в виде ряда Фурье (13.5.2). Воспользуемся формулами Эйлера:

$$\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}); \quad \cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$$

и заменим с их помощью в ряде (13.5.2) тригонометрические функции на показательные от мнимого аргумента. Тогда вместо ряда (13.5.2) получим следующее выражение

$$Q(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j e^{ij\omega t}, \quad (13.7.1)$$

$$\text{где } C_j = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} Q(t) e^{-ij\omega t} dt. \quad (13.7.2)$$

В выражении (13.7.1) каждому положительному  $j$ , например  $j = +n$ , соответствует  $j = -n$ , при этом члены  $C_n e^{jn\omega t}$  и  $C_{-n} e^{-jn\omega t}$  являются комплексными сопряженными, поэтому их сумма оказывается вещественным числом. Это соответствует тому, что возмущающая сила  $Q(t)$  – вещественна.

Ограничимся рассмотрением установившегося режима чисто вынужденных колебаний, когда переходный процесс, обусловленный начальными условиями, закончился.

Рассмотрим единичную комплексную нагрузку

$$Q(t) = e^{i\omega t}. \quad (13.7.3)$$

Согласно уравнению

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = e^{i\omega t},$$

полагая

$$x = W(i\omega) e^{i\omega t},$$

получим

$$(-m\omega^2 + i\omega b + c)W(i\omega) = 1. \quad (13.7.4)$$

Из (13.7.4) следует, что

$$W(i\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + i\omega b + c}. \quad (13.7.5)$$

Зависимость  $W(i\omega)$  называется передаточной функцией. Из выражения (13.7.5) видно, что  $W(i\omega)$  является комплексно-сопряженным с  $W(-i\omega)$ . Поэтому в соответствии с принципом суперпозиции установившаяся реакция рассматриваемой системы на периодическое воздействие в комплексной форме записывается следующим образом:

$$x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} W(ij\omega) C_j e^{ij\omega t}. \quad (13.7.6)$$

Решение (13.7.6) также является вещественным числом, так как  $W(ij\omega)$  и  $W(-ij\omega)$  – комплексные сопряженные. При этом оно совпадает с решением (13.5.9), однако выгодно отличается от последнего простотой записи.

### 13.8. Некоторые свойства передаточной функции

Для дальнейшего передаточную функцию системы с одной степенью свободы (13.7.5) перепишем в виде

$$W(i\omega) = \frac{k}{-T_2^2 \omega^2 + i\omega T_1 + 1}, \quad (13.8.1)$$

$$T_2^2 = \frac{l}{\omega_j^2} = \frac{m}{c}; \quad \frac{b}{c} = T_1;$$

$k = \frac{l}{c}$  – статическая податливость;

$T_1, T_2$  – постоянные времени.

Отделим вещественную и мнимую части в выражении (13.8.1):

$$W(i\omega) = \operatorname{Re}W(i\omega) + i \operatorname{Im}W(i\omega), \quad (13.8.2)$$

$$\text{где } \operatorname{Re}W(i\omega) = \frac{k(1 - T_2^2 \omega^2)}{(1 - T_2^2 \omega^2) + T_1^2 \omega^2}; \quad (13.8.3)$$

$$\operatorname{Im}W(i\omega) = -\frac{kT_1 \omega}{(1 - T_2^2 \omega^2) + T_1^2 \omega^2}. \quad (13.8.4)$$

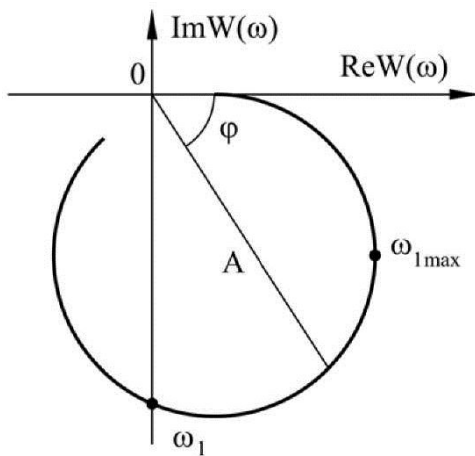


Рис. 13.11

Если нанести в комплексной плоскости точки вектора (13.8.2), то получим кривую (рис. 13.11), которая называется амплитудно-фазо-частотной характеристикой (АФЧХ). Она начинается со значения  $\operatorname{Re}W(i\omega) = k$ ,  $\operatorname{Im}W(i\omega) = 0$ .

Величина  $\omega_{1max}$  означает частоту, при которой вещественная часть характеристики приобретает максимальное значение. Величина  $\omega_1$  – резонансная частота, когда мнимая часть АФЧХ приобретает максимальное (отрицательное) значение. Кривая на рис.

13.11 может быть снята экспериментально. Для этого при гармоническом силовом воздействии  $Q(t) = \sin \omega t$  измеряется амплитуда перемещения  $x(t) = A \sin(\omega t - \varphi)$  и сдвиг фаз  $\varphi$  между силовым воздействием и перемещением. Затем откладывается амплитуда  $A$  под углом  $\varphi$  к вещественной оси, как показано на рис. 13.11.

По экспериментальной АФЧХ легко находятся постоянные времени  $T_1, T_2$  и величина статической податливости  $k$ , которая в данном случае может быть еще названа коэффициентом усиления. Оказывается, что данная кривая обладает замечательными свойствами и может служить средством для исследования рассеяния энергии, а также для приближенного моделирования сложных механических систем в виде системы с одной степенью свободы.

Исследуем  $\operatorname{Re}W(i\omega)$  на экстремум. Для этого найдем производную  $\frac{d \operatorname{Re}W(i\omega)}{d\omega}$  и приравняем ее к нулю при  $\omega = \omega_{1max}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{Re} W(\omega)}{d\omega} &= \frac{d}{d\omega} \frac{k(1-T_2^2\omega^2)}{(1-T_2^2\omega^2)^2 + T_1^2\omega^2} = \\ &= k \frac{-2T_2^2\omega[(1-T_2^2\omega^2)^2 + T_1^2\omega^2] - (1-T_2^2\omega^2)[2(1-T_2^2\omega^2)(-2T_2^2\omega^2) + 2T_1^2\omega]}{[(1-T_2^2\omega^2)^2 + T_1^2\omega^2]^2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим числитель этого выражения:

$$(1-T_2^2\omega^2)^2 T_2^2\omega - T_1^2 T_2^2\omega^3 - T_1^2\omega + T_1^2 T_2^2\omega^3 \Big|_{\omega = \omega_{1\max}} = 0.$$

После несложных преобразований получим:

$$(1-T_2^2\omega^2)^2 T_2^2 - T_1^2 \Big|_{\omega = \omega_{1\max}} = 0$$

Учитывая, что  $T_2 = l/\omega_1$ , находим

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 - T_2^2\omega_{1\max}^2 = 1 - \frac{\omega_{1\max}^2}{\omega_1^2}. \quad (13.8.5)$$

Величина  $T_2 = l/\omega_1$  определяется по максимальному отрицательному значению  $\operatorname{Im} W(i\omega)$ . После чего нетрудно найти  $T_1 = b/c$ . И, наконец, определив максимальную амплитуду  $A$ , можно найти

$$k = A \frac{T_1}{T_2}, \quad (13.8.6)$$

где  $A = -\operatorname{Im} W(i\omega_1)$ .

## 14. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

### 14.1. Общие теоремы динамики как методы исследования механического движения

Полное исследование механического движения системы материальных точек сопряжено, как правило, со значительными трудностями, связанными с интегрированием дифференциальных уравнений движения и нахождением внутренних сил. В ряде случаев эти трудности оказываются непреодолимыми даже при условии применения современных вычислительных машин. Однако существует класс разнообразных задач динамики, при решении которых полная информация о движении не требуется и не нужно решать динамические уравнения. К числу подобных задач относятся задачи, когда достаточно определить суммарные меры механического движения системы: количество движения, момент количества движения, кинетическую энергию в зависимости от главного вектора и главного момента внешних сил или работы сил, действующих в системе.

Соотношения между суммарными мерами движения системы материальных точек и суммарными воздействиями сил, приложенных к точкам системы, даются общими теоремами динамики систем материальных точек. При этом использование общих теорем в конкретных случаях приводит к решению вышеуказанных задач, и в этом состоит их методологическое значение. Общие теоремы динамики являются следствием дифференциальных уравнений движения и могут быть сформулированы как в дифференциальной, так и в интегральной формах.

К числу общих теорем динамики относятся: теорема об изменении количества движения и ее частный случай, теорема о движении центра масс, теорема об изменении момента количества движения и теорема об изменении кинетической энергии.

Как известно, внутренние силы не в состоянии изменять такие характеристики механического движения, как количество движения и момент количества движения, в то время как они могут существенно влиять на величину кинетической энергии. С этой точки зрения кинетическая энергия является более общей мерой механического движения, более полно отражающей его свойства.

**Понятие энергии** вводится для описания механических и электрических явлений, явлений микромира и может быть использовано для установления связи между явлениями различной физической природы, например, тепловых, ядерных и механических процессов.

Остановимся подробнее на понятиях двух основных мер движения: количества движения и кинетической энергии.

**Количеством движения материальной точки называется вектор, равный произведению массы точки на ее скорость:**

$$\vec{K}_i = m_i \vec{v}_i. \quad (14.1.1)$$

**Количеством движения системы материальных точек называется векторная сумма количеств движения всех ее точек:**

$$\bar{K} = \sum_{i=1}^N \bar{K}_i = \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i. \quad (14.1.2)$$

Суммарное количество движения системы  $\bar{K}$  может быть представлено как произведение массы системы на скорость ее центра масс.

Понятие центра масс аналогично понятию центра параллельных сил.

**Центром масс или центром инерции системы** называется центр параллельных сил  $F_i = m_i a$ ,  $i = 1, N$ , сообщающих всем точкам движение с одинаковыми ускорениями.

Поэтому для центра масс  $\bar{r}_c$  имеем следующую формулу:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N F_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^N F_i} = \frac{a \sum_{i=1}^N m_i \bar{r}_i}{a \sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}.$$

Здесь  $\sum_{i=1}^N m_i = m$  является массой системы, следовательно,

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \bar{r}_i}{m}. \quad (14.1.3)$$

Понятие центра масс или центра инерции является более общим, чем понятие центра тяжести, так как свободно от требования о параллельности сил тяжести.

Возьмем производную от обеих частей равенства (14.1.3)

$$m \dot{\bar{r}}_c = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\bar{r}}_i.$$

Но здесь  $\dot{\bar{r}}_c = \bar{v}_c$  – скорость центра масс системы, а  $\sum_{i=1}^N m_i \dot{\bar{r}}_i = \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i = \bar{K}$  – ее количество движения, то есть

$$\bar{K} = m \bar{v}_c. \quad (14.1.4)$$

**Кинетической энергией материальной точки** называется скалярная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат модуля ее скорости:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2. \quad (14.1.5)$$

**Кинетической энергией системы материальных точек** называется сумма кинетических энергий всех точек:

$$T = \sum_{i=1}^N T_i = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (14.1.6)$$

Следует заметить, что формулу (14.1.5) можно записать как скалярное произведение:



$$T_i = \frac{1}{2} (m_i \bar{v}_i) \bar{v}_i = \frac{1}{2} \bar{K}_i \bar{v}_i, \quad (14.1.7)$$

где  $\bar{K}_i$  – количество движения материальной точки. Следовательно, и формула (14.1.6) переписывается так:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \bar{K}_i \bar{v}_i. \quad (14.1.8)$$

Формулы (14.1.7) и (14.1.8) показывают, что кинетическая энергия и количество движения как меры механического движения не противоречат, а взаимно дополняют одна другую.

## 14.2. Теорема об изменении количества движения в дифференциальной форме

Дифференциальные уравнения движения свободной или несвободной систем материальных точек согласно второму закону Ньютона могут быть записаны в виде:

$$\frac{d(m_i \bar{v}_i)}{dt} = \bar{F}_i + \bar{R}_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (14.2.1)$$

где  $\bar{F}_i$  – равнодействующая внешних сил, приложенных к  $i$ -й точке;  $\bar{R}_i$  – равнодействующая внутренних сил, приложенных к  $i$ -й точке.

В случае несвободной системы уравнения (14.2.1) являются также следствием применения принципа освобожденности от связей. Суть этого принципа в том, что *состояние покоя или движения несвободной системы материальных точек не нарушится, если ее освободить от наложенных связей, а их действие заменить реакциями*. В результате формально несвободную систему можно рассматривать как свободную, дополнив, однако, уравнения (14.2.1) уравнениями связей.

Суммируя уравнения (14.2.1), получим:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i. \quad (14.2.2)$$

Главный вектор внутренних сил, будь то силы взаимодействия между точками или реакции связей, для системы в целом, согласно третьему закону Ньютона, равен нулю

$$\sum_{i=1}^N \bar{R}_i = 0.$$

Главный вектор внешних сил  $\bar{F}$  по определению:

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i.$$

Так как количество движения системы

$$\bar{K} = \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i,$$

то из (14.2.2) получаем следующее соотношение:

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{F}. \quad (14.2.3)$$

Таким образом, справедлива теорема:

**Первая производная по времени от количества движения системы материальных точек равна главному вектору внешних сил.**

Это теорема об изменении количества движения в дифференциальной форме.

Из этой теоремы следует, что внутренние силы не могут изменить количества движения. Изменение количества движения системы вызывается только внешними силами.

Если главный вектор внешних сил равен нулю, то количество движения системы будет постоянно, то есть, если  $\bar{F} = 0$ , то согласно (14.2.3)  $\frac{d\bar{K}}{dt} = 0$  и, следовательно,

$$\bar{K} = const. \quad (14.2.4)$$

Условие (14.2.4) означает, что вектор  $\bar{K}$  является неизменным как по величине, так и по направлению.

Рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. На корме находящейся в покое баржи установлен автомобиль. В некоторый момент времени автомобиль начал перемещаться по палубе, направляясь к носу баржи. Пренебрегая сопротивлением воды движению баржи, определить ее скорость  $\bar{v}$  в зависимости от скорости автомобиля  $\bar{u}$  относительно баржи. Масса баржи равна  $m_1$ , а масса автомобиля  $m_2$  (рис. 14.1).

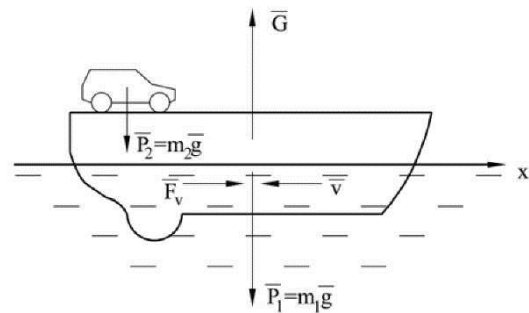


Рис. 14.1

На рассматриваемую систему действуют вертикальные силы: вес баржи  $\bar{P}_1 = m_1\bar{g}$ , вес автомобиля  $\bar{P}_2 = m_2\bar{g}$  и архимедова сила  $\bar{G}$ . Сила сопротивления  $\bar{F}_v = 0$ .

В данном случае, поскольку проекции сил на ось  $x$  равны нулю, то проекция количества движения на эту ось сохраняет постоянное значение, равное начальному:

$$K_x = K_{x0} = const.$$

Если считать, что при  $t = 0$  система находилась в покое, то есть  $v = 0, u = 0$ , тогда  $K_{x0} = 0$ . Полагая, что баржа движется в сторону, противоположную движению автомобиля, получим

$$K_x = -m_1v + m_2(u - v) = 0.$$

Откуда 
$$v = \frac{m_2}{m_1 + m_2}u.$$

Из последней формулы видно, что как только остановится автомобиль, то сразу же остановится и баржа. Разумеется допущение, что  $\bar{F}_v = 0$  в данном случае не оправдано.

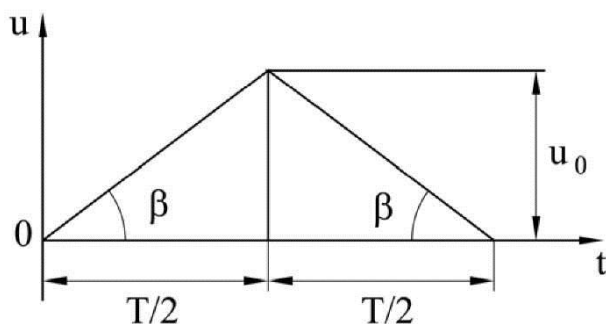


Рис. 14.2

Пример 2. Пусть на корпус баржи действует сила сопротивления  $\bar{F}_v$ , пропорциональная скорости, а автомобиль перемещается по закону, изображенному на рис. 14.2. Для простоты будем считать, что разогнавшись с постоянным ускорением до величины скорости  $u_0$ , автомобиль по такому же закону тормозит до полной остановки.

Сила сопротивления воды  $\bar{F}_v = -b\bar{v}$ , где  $b$  – коэффициент сопротивления, направлена в сторону, противоположную скорости баржи  $\bar{v}$ . Количество движения в проекции на ось  $x$  было установлено в предыдущей задаче:

$$K_x = -(m_1 + m_2)v + m_2u.$$

Согласно теореме об изменении количества движения  $\frac{dK_x}{dt} = F_x$  получаем:

$$-(m_1 + m_2)\frac{dv}{dt} + m_2\frac{du}{dt} = bv,$$

или  $\frac{dv}{dt} + kv = f(t)$ , где  $k = \frac{b}{m_1 + m_2}$ .

На первом этапе движения  $\frac{du}{dt} = tg\beta$ .

Тогда  $\frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{du}{dt} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}tg\beta = a$ .

На втором этапе имеем  $\frac{du}{dt} = -tg\beta$ , поэтому  $f(t) = -a$ .

Следовательно, на первом этапе уравнение движения будет:

$$\frac{dv}{dt} + kv = a, \quad a \leq t \leq T/2.$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение таково:

$$v = C_1 e^{-kt} + \frac{a}{k}.$$

Постоянную  $C_1$  найдем из начальных условий  $v|_{t=0} = 0$ :

$$0 = C_1 + \frac{a}{k}.$$

Откуда  $C_1 = -\frac{a}{k}$ . После чего получаем

$$v = \frac{a}{k}(1 - e^{-kt}), \quad 0 \leq t \leq T/2.$$

При  $t = T/2$  скорость будет

$$v_1 = \frac{a}{k}(1 - e^{-kT/2}).$$

Это значение скорости будет начальным условием для второго промежутка  $T/2 \leq t \leq T$ .

На втором этапе дифференциальное уравнение движения уже будет иметь вид:

$$\frac{dv}{dt} + kv = -a, \quad T/2 \leq t \leq T.$$

Его общее решение

$$v = C_2 e^{-kt} - \frac{a}{k}.$$

Учитывая начальное условие

$$v_1 = \frac{a}{k}(1 - e^{-kT/2}) = C_2 e^{-kT/2} - \frac{a}{k},$$

получим выражение для  $C_2$ :

$$C_2 = \frac{a}{k}(2 - e^{-kT/2})e^{kT/2} = \frac{a}{k}(2e^{kT/2} - 1),$$

откуда

$$v = \frac{a}{k}[2e^{k(T/2-t)} - e^{-kt} - 1], \quad T/2 \leq t \leq T.$$

При  $t = T$  скорость будет

$$v_2 = \frac{a}{k}(2e^{-kT/2} - e^{-kT} - 1).$$

В этот момент происходит остановка автомобиля. После остановки автомобиля дифференциальное уравнение движения уже будет

$$\frac{dv}{dt} + kv = 0, \quad T \leq t < \infty.$$

Его решение  $v = C_3 e^{-kt}$ .

Постоянную интегрирования  $C_3$  найдем из начального условия  $v|_{t=T} = v_2$ , или  $v_2 = C_3 e^{-kT}$ .

Откуда  $C_3 = v_2 e^{kT}$

и, следовательно,  $v = v_2 e^{k(T-t)}$ ,  $T \leq t < \infty$ .

Как видно, скорость с течением времени будет асимптотически стремиться к нулю. При этом  $v_2$  может оказаться и отрицательной, то есть при определенных условиях автомобиль и баржа могут двигаться в одном направлении.

### 14.3. Теорема о движении центра масс

Центр масс или центр инерции системы определяется с помощью формулы (14.1.3), а количество движения по формуле (14.1.4)

$$\bar{K} = m\bar{v}_c,$$

где  $m$  – масса системы;  $\bar{v}_c$  – скорость центра масс.

Воспользуемся дифференциальной формой теоремы об изменении количества движения (14.2.3)

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{F},$$

и подставим в нее выражение (14.1.4)

$$m \frac{d\bar{v}_c}{dt} = \bar{F}.$$

Но  $\frac{d\bar{v}_c}{dt} = \bar{a}_c$  – ускорение центра масс. Следовательно,

$$m\bar{a}_c = \bar{F}. \quad (14.3.1)$$

В результате можно сформулировать теорему:

**Центр масс системы материальных точек движется как свободная материальная точка с массой, равной массе системы, под действием силы, равной главному вектору внешних сил, приложенных к точкам системы.**

Согласно теореме о движении центра масс, если  $\bar{F} = 0$ , то  $\bar{v}_c = const$  при  $\bar{v}_c = 0$ ,  $\bar{r}_c = const$ . Эти соотношения выражают законы сохранения скорости и положения центра масс.

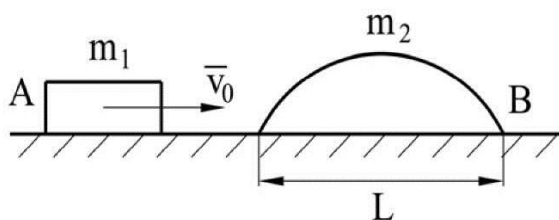


Рис. 14.3

Пример 1. Тело А и тело В находятся на горизонтальной плоскости. Массы тел  $m_1$  и  $m_2$  соответственно. Тело А въезжает на неподвижное тело со скоростью  $\bar{v}_0$ . Длина основания тела В равна  $L$ . Определить перемещение тела В за время взаимодействия тел, трением пренебречь (рис. 14.3).

Здесь возможны два случая: тело А, поднявшись на некоторую высоту, скатывается обратно, и когда тело А перекаатывается через тело В.

Прежде всего найдем скорость центра масс системы  $\bar{v}_c$ . Количество движения системы неизменно и равно  $m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v_c$ , где  $v_c$  скорость центра масс.

$$\text{Следовательно, } v_c = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}.$$

Рассмотрим случай, когда тело А скатывается обратно.

В момент касания, при начале взаимодействия и в момент скатывания, когда тело А вновь находится на плоскости, тела друг относительно друга зани-

мают одинаковые положения. Поэтому можно считать, что оба тела прошли за время взаимодействия расстояние, пройденное центром масс  $S_c$ .

Следовательно, тело В пройдет расстояние  $S$ , равное  $S_c$ :

$$S = S_c = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} t,$$

где  $t$  – время взаимодействия.

Если же тело А перекатится через тело В, то имеет место взаимное расположение, показанное на рис. 14.4.

Путь, пройденный центром масс, одинаков как в первом, так и во втором случае:

$$S_c = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} t.$$

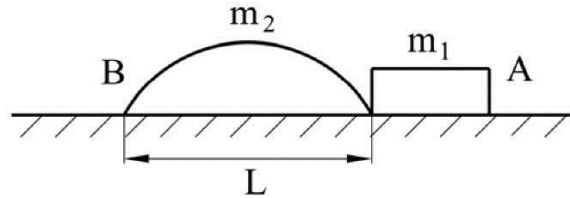


Рис. 14.4

Рассмотрим инерциальную систему, которая движется со скоростью центра масс. В этой системе положение центра масс неизменно, то есть

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 (x_1 + L - \Delta) + m_2 (x_2 - \Delta)}{m_1 + m_2} = const,$$

где  $x_1, x_2$  – исходные координаты тел А и В;

$\Delta$  – относительное смещение тела В после окончания взаимодействия.

Откуда: 
$$\Delta = \frac{L m_1}{m_1 + m_2}.$$

Суммарное перемещение тела В состоит из переносного перемещения центра масс  $S_c$  и относительного смещения  $\Delta$ . Следовательно,

$$S = S_c - \Delta = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_0 t - L).$$

### Пример 2.

На гладком горизонтальном фундаменте установлен электромотор весом  $\bar{P}_1$  (рис. 14.5). На валу мотора под прямым углом к оси вращения закреплен однородный стержень длиной  $2l$  и весом  $\bar{P}_2$ , на конце которого насажен конечный груз весом  $\bar{P}_3$ . Вал вращается равномерно с угловой скоростью  $\omega$ . Определить:

1. Уравнение горизонтального движения мотора, поставленного на фундамент свободно.
2. Наибольшее горизонтальное давление на болты, если электромотор

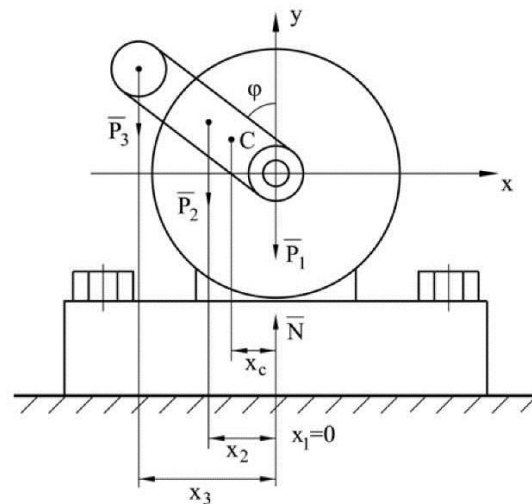


Рис. 14.5



прикреплен ими к фундаменту.

### 3. Вертикальную реакцию.

Если мотор поставлен на фундамент свободно, то на систему действуют внешние силы  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$  и реакция опорной плоскости  $\bar{N}$ . Допустим, что в начальный момент угол  $\varphi = 0$ . Проекция главного вектора внешних сил на ось  $x$  равна нулю, поэтому

$$x_C = const.$$

Если в начальный момент центр масс системы находится на оси  $y$ , то  $x_C = 0$ . Так как координата  $x_C$  постоянна, то при смещении центра масс стержня и груза влево от оси  $y$  центр масс мотора смещается вправо и наоборот.

Координата центра масс системы в любой момент времени:

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m} = \frac{m_1 x_1 - m_2 (l \sin \varphi - x_1) - m_3 (2l \sin \varphi - x_1)}{m} = 0,$$

где  $x_1, x_2, x_3$  – координаты центра масс мотора, стержня и груза; здесь  $x_C = 0$ ;

$$m = m_1 + m_2 + m_3 \text{ – масса системы; } \varphi = \omega t.$$

Откуда

$$x_1 = \frac{m_2 + 2m_3}{m} l \sin \omega t.$$

Следовательно, мотор совершает гармонические колебания с амплитудой

$$\frac{m_2 + 2m_3}{m} l.$$

Если мотор прикреплен к фундаменту болтами, как это показано на рис. 14.5, то  $x_1 = 0$ . Центр масс системы перемещается по окружности и, следовательно, меняются его координаты  $x_C$  и  $y_C$ . При этом движется центр масс под действием реакций  $\bar{F}_x$  и  $\bar{F}_y$ .

Определим координату  $x_C$  в любой момент времени  $t$ :

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m} = -\frac{m_2 + 2m_3}{m} l \sin \omega t.$$

$$\text{Найдем } \ddot{x}_C = \frac{m_2 + 2m_3}{m} l \omega^2 \sin \omega t.$$

Согласно теореме о движении центра масс,

$$m \ddot{x} = F_x,$$

поэтому  $F_x = (m_2 + 2m_3) l \omega^2 \sin \omega t$ .

Найдем вертикальную реакцию. Координата  $y_C$  центра масс:

$$y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m}.$$

Здесь  $y_1 = 0$ ;  $y_2 = l \cos \varphi$ ;  $y_3 = 2l \cos \varphi$ .

Следовательно,

$$y_C = \frac{m_2 + 2m_3}{m} l \cos \omega t.$$

Найдем  $\ddot{y}_C = -\frac{m_2 + 2m_3}{m}l\omega^2 \cos\omega t$ .

Согласно теореме о движении центра масс,

$$m\ddot{y}_C = F_y.$$

Поэтому,  $F_y = N - mg = m\ddot{y}_C = -(m_2 + 2m_3)l\omega^2 \cos\omega t$ .

Следовательно,

$$N = mg - (m_2 + 2m_3)l\omega^2 \cos\omega t.$$

Максимальное значение  $N$  будет:

$$N_{max} = mg + (m_2 + 2m_3)l^2\omega^2;$$

минимальное –

$$N_{min} = mg - (m_2 + 2m_3)l^2\omega^2.$$

#### 14.4. Теорема об изменении количества движения в интегральной форме

Теорему об изменении количества движения в интегральной форме иногда называют теоремой импульсов. Рассмотрим теорему об изменении количества движения в дифференциальной форме

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{F},$$

где  $\bar{K} = \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i$  – количество движения системы;

$\bar{F} = \sum_{i=1}^N F_i$  – главный вектор внешних сил.

Проинтегрируем обе части вышеприведенного основного соотношения по времени в пределах  $(t_1, t_2)$ .

Тогда получим:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\bar{K}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \bar{F}_i dt. \quad (14.4.1)$$

Величина  $\bar{F}_i dt$  – элементарный импульс силы  $\bar{F}_i$ .

Интеграл  $\int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_i dt = \bar{S}_i$  – называется импульсом силы  $\bar{F}_i$ .

Сумма импульсов  $\sum_{i=1}^N \bar{S}_i = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \bar{F}_i dt = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt = \bar{S}$  – называется главным импульсом внешних сил.

Следовательно, уравнение (14.4.1) можно переписать так:

$$\bar{K}(t_2) - \bar{K}(t_1) = \bar{S}. \quad (14.4.2)$$

Здесь  $\bar{K}(t_2) - \bar{K}(t_1) = \Delta\bar{K}$  – представляет собой изменение количества движения за промежуток времени  $(t_1, t_2)$ .

Равенство (14.4.2) представляет собой математическое выражение теоремы об изменении количества движения в интегральной форме или теоремы импульсов.

**Приращение количества движения системы материальных точек за некоторый промежуток времени равно главному импульсу внешних сил, приложенных к системе.**

Рассмотрим пример.

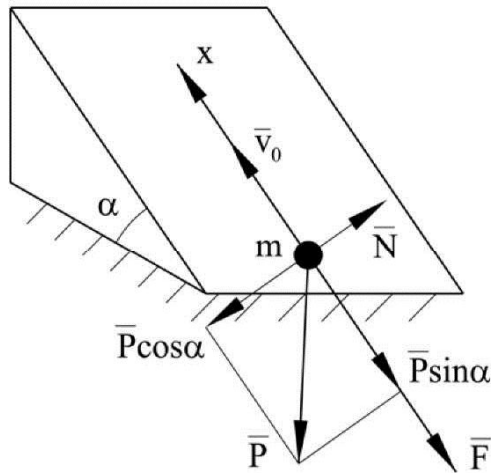


Рис. 14.6

Материальная точка массой  $m$ , получив начальную скорость  $\bar{v}_0$ , поднимается по шероховатой наклонной плоскости с коэффициентом трения  $f$ , наклоненной к горизонту под углом  $\alpha$  (рис. 14.6).

Найти время подъема точки до полной остановки.

Для решения этой задачи нет необходимости составлять и интегрировать дифференциальные уравнения движения. Здесь целесообразно воспользоваться теоремой импульсов. Направим ось  $x$  по наклонной плоскости.

На точку действует сила веса  $P = mg$ , сила трения  $F_\tau = fP \cos \alpha$  и реакция плоскости  $N = P \cos \alpha$ .

Проекция равнодействующей силы на эту плоскость

$$F_x = -mg(\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

Следовательно, проекция импульса равнодействующей силы на ось  $x$  будет

$$S_x = F_x t,$$

где  $t$  – время подъема точки до полной остановки. Согласно (14.2.2) имеем:

$$m(v_x - v_{x0}) = S_x,$$

где  $v_x = 0$ ;  $v_{x0} = v_0$ .

Откуда следует

$$-mv_0 = -mg(\sin \alpha + f \cos \alpha)t,$$

$$t = \frac{v_0}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}.$$

### 14.5. Динамика точки переменной массы

Основоположником динамики точки переменной массы является И. В. Мещерский (1859–1935) – профессор механики С.-Петербургского политехнического института. Его сочинение под названием «Динамика точки переменной массы» было опубликовано в 1897 г. и является основой ракетной техники.

## 15. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ (КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА) СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

### 15.1. Понятие о моменте количества движения материальной точки и системы материальных точек

В механике большое значение имеет понятие момента количества движения.

*Моментом количества движения  $\vec{K} = m\vec{v}$  материальной точки относительно центра  $O$  называется векторное произведение радиуса вектора материальной точки на ее количество движения (рис. 15.1).*

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{K} = \vec{r} \times m\vec{v}. \quad (15.1.1)$$

Проекции вектора момента количества движения (15.1.1) на оси координат найдутся из соотношения

$$\begin{aligned} \vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v} &= m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = m(yv_z - zv_y)\vec{i} + \\ &+ m(zv_x - xv_z)\vec{j} + m(xv_y - yv_x)\vec{k} = \\ &= L_{Ox}\vec{i} + L_{Oy}\vec{j} + L_{Oz}\vec{k}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} L_{Ox} &= m(yv_z - zv_y); \\ L_{Oy} &= m(zv_x - xv_z); \\ L_{Oz} &= m(xv_y - yv_x). \end{aligned} \quad (15.1.2)$$

Понятие момента количества движения аналогично понятию момента силы. Ранее момент силы  $\vec{M}_O$  относительно точки  $O$  был определен как векторное произведение радиус-вектора  $\vec{r}$  точки приложения силы и вектора силы  $\vec{F}$ :

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Аналогично понятию момента силы относительно оси введем понятие момента количества движения материальной точки относительно оси.

Моментом количества движения материальной точки относительно оси называется проекция момента количества движения относительно любой точки, взятой на оси, на эту ось. Следовательно, момент количества движения точки относительно оси можно искать по формулам (15.1.2).

В ряде случаев для вычисления момента количества движения относительно оси, можно в любой точке оси провести плоскость, перпендикулярную к ней,

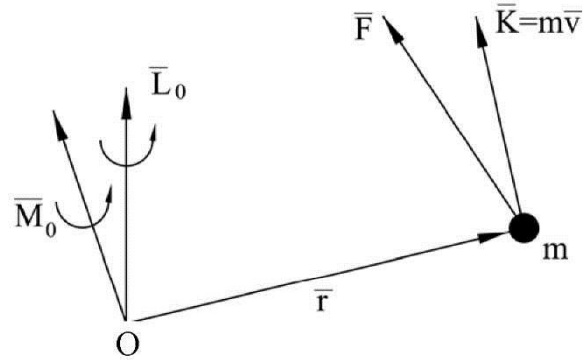


Рис. 15.1

спроектировать на эту плоскость количество движения материальной точки и составить произведение модуля полученной проекции на ее расстояние до точки пересечения оси с плоскостью.

Знак берется так же, как и в случае вычисления момента силы относительно оси. То есть, если глядя со стороны положительного направления оси мы видим вращающее действие проекции количества движения против часовой стрелки, то это положительная величина. В противном случае – отрицательная.

Моментом количества движения материальной системы относительно центра  $O$  будем называть геометрическую сумму моментов количества движения отдельных точек относительно того же центра:

$$\bar{L}_O = \sum_{i=1}^N \bar{L}_{O_i} = \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i.$$

Соответствующие моменты количества движения относительно координатных осей будут:

$$\begin{aligned} L_x &= \sum_{i=1}^N L_{xi} = \sum_{i=1}^N m_i (y_i v_{zi} - z_i v_{yi}); \\ L_y &= \sum_{i=1}^N L_{yi} = \sum_{i=1}^N m_i (z_i v_{xi} - x_i v_{zi}); \\ L_z &= \sum_{i=1}^N L_{zi} = \sum_{i=1}^N m_i (x_i v_{yi} - y_i v_{xi}). \end{aligned}$$

## 15.2. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки

Дифференцируя момент количества движения материальной точки  $\bar{L}_O = \bar{r} \times m\bar{v}$  по времени, найдем

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} + \bar{r} \times \frac{d(m\bar{v})}{dt}. \quad (15.2.1)$$

В формуле (15.2.1) первое слагаемое равно нулю, так как сомножители параллельны:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} = \bar{v} \times m\bar{v} = 0.$$

Во втором слагаемом, согласно второму закону Ньютона,

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{F},$$

где  $\bar{F}$  – равнодействующая сила, приложенная к точке.

Поэтому второе слагаемое представляет собой момент силы  $\bar{F}$  относительно центра  $O$ :

$$\bar{r} \times \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{M}_O(F).$$

Следовательно, вместо (15.2.1) можно написать

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{M}_0(\bar{F}). \quad (15.2.2)$$

Равенство (15.2.2) представляет собой математическое выражение теоремы об изменении момента количества движения материальной точки.

**Первая производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какого-либо центра равна моменту равнодействующей силы, приложенной к этой точке относительно того же центра.**

Пример 1. Математический маятник.

Математический маятник – это тяжелый груз малых размеров, подвешенный с помощью нерастяжимой нити к неподвижной опоре. В случае отклонения от положения равновесия, представленный сам себе груз принуждается силой тяжести совершать колебания по дуге окружности, радиус которой равен длине подвеса.

Совместим плоскость движения груза с плоскостью чертежа (рис. 15.2).

На рис 15.2  $m$  – масса груза;  $l$  – длина подвеса;  $\varphi$  – угол отклонения подвеса;  $\bar{T}$  – сила натяжения нити;  $l \sin \varphi$  – плечо силы веса  $\bar{P}$  по отношению к точке подвеса  $O$ .

Воспользуемся теоремой об изменении количества движения. Если движение происходит в плоскости чертежа, то

$$\frac{dL_0}{dt} = M_0(\bar{P}), \quad (15.2.3)$$

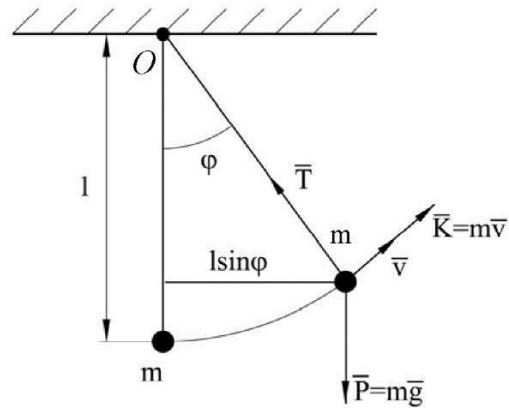


Рис. 15.2

где  $M_0(\bar{P})$  – момент силы веса относительно точки подвеса. Сила натяжения нити  $\bar{T}$  момент не создает, так как проходит через точку  $O$ .

Скорость точки выражается через производную от угла  $\varphi$ :

$$v = l\dot{\varphi}.$$

Поэтому

$$L_0 = lmv = ml^2\dot{\varphi},$$

а

$$\frac{dL_0}{dt} = ml^2\ddot{\varphi}.$$

Момент силы веса относительно точки  $O$  будет

$$M_0 = -mgl \sin \varphi.$$

Подставляя соответствующие величины в исходное равенство (15.2.3), получим

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi,$$

или



$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (15.2.4)$$

Уравнение (15.2.4) пригодно для описания больших колебаний маятника. Если ограничиться рассмотрением малых колебаний, то в ряду для

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \dots$$

следует сохранить один член. То есть при малых  $\varphi$  полагаем  $\sin \varphi \approx \varphi$ .

Тогда уравнение малых колебаний математического маятника будет

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0. \quad (15.2.5)$$

Следовательно, частоты малых колебаний

$$k = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

а период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Решение уравнения (15.2.5) известно:

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt + \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin kt,$$

где  $\varphi_0$  и  $\dot{\varphi}_0$  – начальное отклонение от положения равновесия и начальная угловая скорость подвеса.

Частота малых колебаний математического маятника не зависит от начальных условий, следовательно, они изохронны.

Пример 2. Движение в поле центральной силы.

Центральной силой может быть, например, сила тяготения. Выражение для центральной силы запишем в виде (рис. 15.3)

$$\vec{F} = \frac{F_r}{r} \vec{r}, \quad (15.2.6)$$

где  $F_r$  – проекция силы на радиус-вектор  $\vec{r}$ ;  $r$  – модуль радиус-вектора.

То есть  $\frac{\vec{r}}{r}$  – единичный вектор направления  $\vec{r}$ . Если сила  $\vec{F}$  является силой тяготения, то  $F_r$  отрицательно.

Согласно теореме об изменении момента количества движения, учитывая (15.2.6), имеем

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{F_r}{r} \vec{r} = 0.$$

Следовательно,

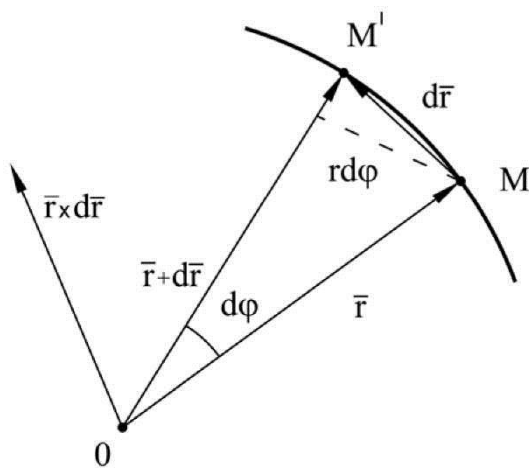


Рис. 15.3

$$\bar{L}_0 = const ,$$

поэтому

$$\bar{L}_0 = \bar{r} \times m\bar{v} = m\bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = const . \quad (15.2.7)$$

Векторное произведение  $\bar{r} \times d\bar{r}$  в (15.2.7) представляет удвоенную площадь  $dS$ , описанную радиус-вектором  $\bar{r}$  за время  $dt$ , то есть

$$dS = \frac{1}{2} |\bar{r} \times d\bar{r}| = \frac{1}{2} r^2 d\varphi .$$

Производная  $\frac{dS}{dt}$  есть так называемая секторная скорость точки, представляющая собой площадь, охватываемую радиус-вектором в единицу времени. Таким образом,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{L_0}{2m} = const .$$

Следовательно, при движении точки в поле центральной силы площадь, охватываемая радиус-вектором, пропорциональна времени.

$$S = \frac{L_0}{2m} t + S_0 .$$

Это закон площадей. Применительно к движению планет – это второй закон Кеплера.

### 15.3. Теорема об изменении момента количества движения системы материальных точек

Рассмотрим несвободную систему материальных точек. Если воспользоваться принципом освобождения от связей, то для каждой точки можно написать следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d(m_i \bar{v}_i)}{dt} = \bar{F}_i + \bar{R}_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (15.3.1)$$

где  $m_i \bar{v}_i$  – количество движения  $i$ -й точки;

$\bar{F}_i$  – равнодействующая внешних сил, действующих на точку;

$\bar{R}_i$  – равнодействующая внешних сил, приложенных к точке.

В случае свободной системы материальных точек уравнение (15.3.1) также справедливо. Только под величинами  $\bar{R}_i$  следует понимать силы взаимодействия между точками.

Согласно теореме об изменении момента количества для отдельной материальной точки можно написать:

$$\frac{d\bar{L}_{oi}}{dt} = \bar{M}_o(\bar{F}_i) + \bar{M}_o(\bar{R}_i), \quad i = \overline{1, N}. \quad (15.3.2)$$

Суммируя (15.3.2) по всем точкам системы, получим:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N L_{0i} = \sum_{i=1}^N \bar{M}_0(\bar{F}_i) + \sum_{i=1}^N \bar{M}_0(\bar{R}_i). \quad (15.3.3)$$

Согласно третьему закону Ньютона внутренние силы попарно равны по величине, противоположно направлены и имеют общую линию действия. При этом каждая  $\bar{R}_i$  представляет некоторую геометрическую сумму этих сил.

Поэтому для системы в целом

$$\sum_{i=1}^N \bar{R}_i = 0 \text{ и } \sum_{i=1}^N \bar{M}_0(\bar{R}_i) = 0.$$

Последние равенства не означают, что внутренние силы  $\bar{R}_i$  уравновешены, так как приложены они к разным точкам системы.

Учитывая, что по определению  $\sum_{i=1}^N \bar{L}_{0i} = \bar{L}_0$  – главный момент количества движения системы, а  $\sum_{i=1}^N \bar{M}_0(\bar{F}_i) = \bar{M}_0$  – главный момент внешних сил, приложенных к точкам системы, получим:

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{M}_0.$$

Следовательно, справедлива теорема:

**Первая производная по времени от момента количества движения системы относительно какого-либо центра равна главному моменту внешних сил, приложенных к точкам системы относительно того же центра.**

Теорема об изменении момента количества движения допускает кинематическую интерпретацию. Кинематическое истолкование теоремы об изменении момента количества движения дал Резаль (1829–1886). Производную  $\frac{d\bar{L}_0}{dt}$  можно считать скоростью конца вектора  $\bar{L}_0$  по его годографу, если началом того вектора является центр  $O$ .

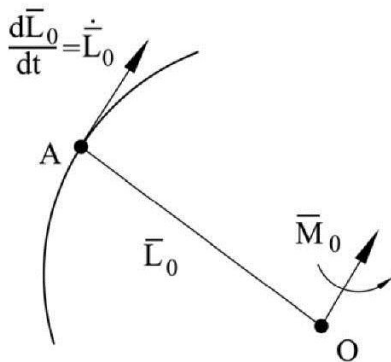


Рис. 15.4

Следовательно, **скорость конца вектора момента количества движения  $\bar{L}_0$  относительно неподвижного центра равна главному моменту внешних сил  $\bar{M}_0$  относительно того же центра** (рис. 15.4).

Теорема об изменении момента количества движения в такой формулировке применяется, например, в приближенной теории гироскопа.

Кроме того, воспользовавшись формулировкой Резаля теоремы об изменении момента количества движения, можно определить давление вращающегося ротора на подшипники.

## 15.4. Главный момент количества движения твердого тела при вращении вокруг неподвижной оси

Вычислим главный момент количества движения твердого тела, вращающегося с угловой скоростью  $\bar{\omega}$  вокруг неподвижной оси  $z$  (рис. 15.5).

Рассмотрим момент количества движения элементарной массы  $dm$ , расположенной на расстоянии  $h$  до оси вращения.

Скорость точки  $v = \tilde{\omega}h$ , где  $\tilde{\omega}$  – алгебраическое значение угловой скорости. Тогда момент количества движения массы  $dm$  будет

$$dL_z = hvdm = \tilde{\omega}h^2 dm. \quad (15.4.1)$$

Для нахождения главного момента количества движения необходимо проинтегрировать (15.4.1) по массе твердого тела:

$$L_z = \int_{(m)} dL_z = \tilde{\omega} \int_{(m)} h^2 dm. \quad (15.4.2)$$

В выражении (15.4.2) интеграл

$$J_z = \int_{(m)} h^2 dm = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm, \quad (15.4.3)$$

то есть *интеграл от произведения массы элементарной частицы на квадрат расстояния до некоторой оси, называется моментом инерции тела относительно этой оси*. В случае дискретной системы материальных точек интеграл заменяется конечной суммой. Отношение  $J_z/m = \rho^2$  имеет размерность квадрата длины. *Величина  $\rho$  называется радиусом инерции тела относительно рассматриваемой оси*.

Перепишем выражение (15.4.2)

$$L_z = J_z \tilde{\omega}. \quad (15.4.4)$$

*Момент количества движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равен произведению осевого момента инерции тела на угловую скорость его вращения.*

Момент инерции при вращательном движении играет роль, аналогичную массе при поступательном движении.

## 15.5. Моменты инерции

Планарным, осевым или полярным моментом инерции системы материальных точек называется сумма произведений масс точек на квадраты их расстояний соответственно до плоскости, оси или точки, именуемой полюсом.

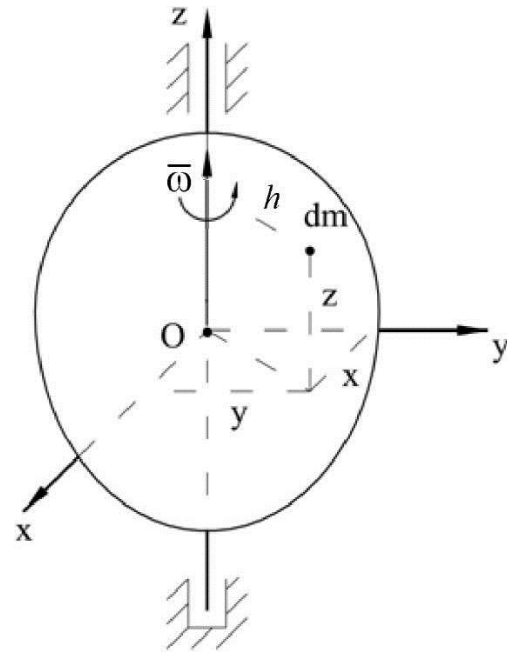


Рис. 15.5

Таким образом, общая формула для момента инерции такова:

$$J = \sum_{i=1}^N m_i h_i^2, \quad (15.5.1)$$

где  $m_i$  – масса  $i$ -й материальной точки;

$h_i$  – расстояние этой точки либо до плоскости, либо до оси, либо до полюса.

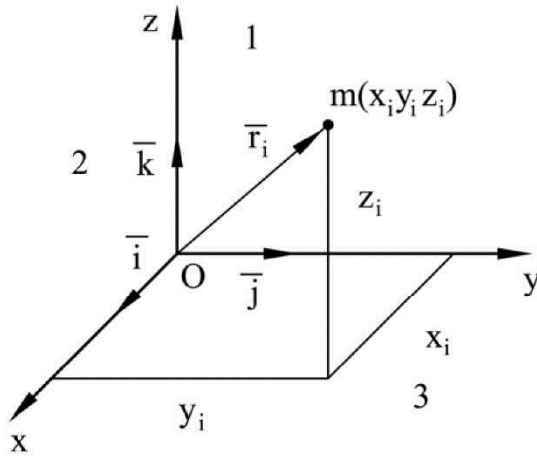


Рис. 15.6

Пронумеруем плоскости, образованные осями координат, как показано на рис. 15.6.

Радиус-вектор  $i$ -й точки:

$$\vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}.$$

Ее расстояние до плоскости  $(y, z) - x$  и, следовательно, соответствующий момент инерции будет:

$$J_1 = \sum_{i=1}^N m_i x_i^2.$$

Формулы для планарных моментов инерции относительно плоскостей  $(z, x)$  и  $(x, y)$ :

$$J_2 = \sum_{i=1}^N m_i y_i^2; \quad J_3 = \sum_{i=1}^N m_i z_i^2.$$

Осевые моменты инерции:

$$J_x = \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2); \quad J_y = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2); \quad J_z = \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + x_i^2). \quad (15.5.2)$$

Квадрат расстояния до полюса

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2.$$

Поэтому полярный момент инерции

$$J_0 = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = J_1 + J_2 + J_3 = \frac{1}{2} (J_x + J_y + J_z). \quad (15.5.3)$$

Рассмотрим примеры вычисления моментов инерции.

### 1. Стержень.

Определим момент инерции относительно оси  $z$ , перпендикулярной стержню.

Пусть стержень расположен как показано на рис. 15.7.

В качестве  $dm$  возьмем малый участок стержня длиной  $dx$ :

$$dm = \gamma dx,$$

где  $\gamma$  – погонная масса стержня.

Согласно общей формуле (15.5.1):

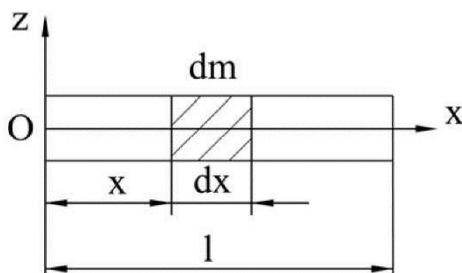


Рис. 15.7

$$J_z = \int_{(m)} x^2 dm = \gamma \int_0^l x^2 dx = \frac{\gamma l^3}{3},$$

где  $l$  – длина стержня.

Если учесть, что его масса  $m = \gamma l$ , то для момента инерции  $J_z$  получим формулу

$$J_z = \frac{ml^2}{3}. \quad (15.5.4)$$

## 2. Круговой диск.

Требуется найти моменты инерции тонкого диска радиусом  $R$  и массой  $m$  относительно осей, расположенных в его центре (рис. 15.8).

В данном случае осевые моменты инерции  $J_x = \int_{(m)} y^2 dm$  и  $J_y = \int_{(m)} x^2 dm$  в силу симметрии равны между собой  $J_x = J_y$ .

Их сумма равна полярному моменту инерции:

$$J_0 = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm = J_x + J_y = 2J_x = 2J_y.$$

Если учесть, что квадрат расстояния  $\rho^2$  элементарной массы до центра  $O$  равен  $\rho^2 = x^2 + y^2$ , то формулу для  $J_0$  можно переписать так:

$$J_0 = \int_{(m)} \rho^2 dm.$$

В качестве  $dm$  возьмем массу бесконечно тонкого кольца радиусом  $\rho$  и толщиной  $d\rho$ . Тогда двойной интеграл по площади превратится в одинарный интеграл в интервале  $(0, R)$ . Поэтому проще сначала вычислить  $J_0$  и уже затем  $J_x = J_y = \frac{J_0}{2}$ .

Итак,  $dm = 2\pi\rho d\rho\gamma$ ,

где  $\gamma$  – плотность единицы площади диска, которая считается всюду одинаковой. Полярный момент инерции:

$$J_0 = \int_{(m)} \rho^2 dm = 2\pi\gamma \int_0^R \rho^3 d\rho = \pi\gamma \frac{R^4}{2}.$$

Масса диска

$$m = \pi R^2 \gamma.$$

Поэтому

$$J_0 = \frac{mR^2}{2}, \quad (15.5.5)$$

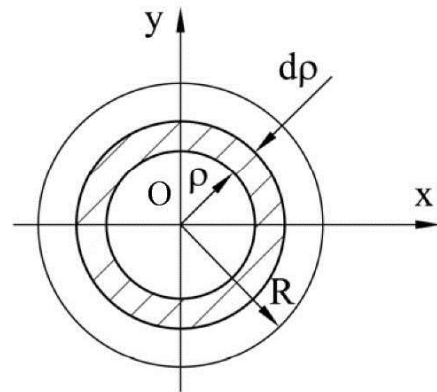


Рис. 15.8

$$J_x = J_y = \frac{mR^2}{4}. \quad (15.5.6)$$

### 3. Круговой цилиндр.

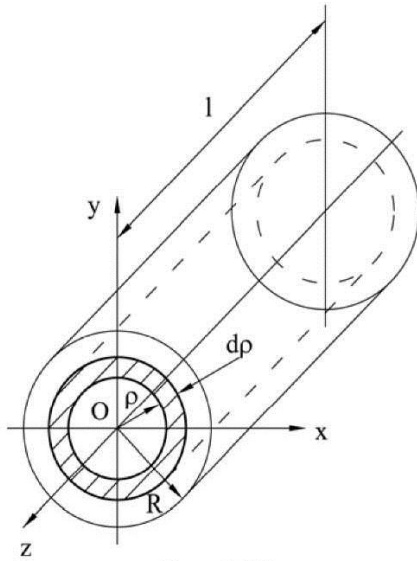


Рис. 15.9

Требуется найти осевой момент инерции цилиндра относительно его продольной оси  $z$ .

Здесь  $dm = 2\pi\rho d\rho l\gamma$  (рис. 15.9), где  $l$  – длина цилиндра.

Тогда

$$J_0 = 2\pi l\gamma \int_0^R \rho^3 d\rho = \pi l\gamma \frac{R^4}{2} = \frac{mR^2}{2}, \quad (15.5.7)$$

где  $m = \pi R^2 l\gamma$ .

Формулу (15.5.7) можно было бы написать сразу, так как момент инерции не изменится, если массу сместить параллельно вдоль оси  $z$ . Поэтому здесь справедлива формула для диска (15.5.5).

### 4. Шар.

Рассмотрим однородный шар с постоянной удельной плотностью  $\gamma$ , радиусом  $R$  и массой  $m$  (рис. 15.10).

В силу симметрии здесь

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{3}J_0,$$

где  $J_0$  – полярный момент инерции.

Если в качестве  $dm$  взять массу бесконечно тонкой сферы радиусом  $\rho$  и толщиной  $d\rho$

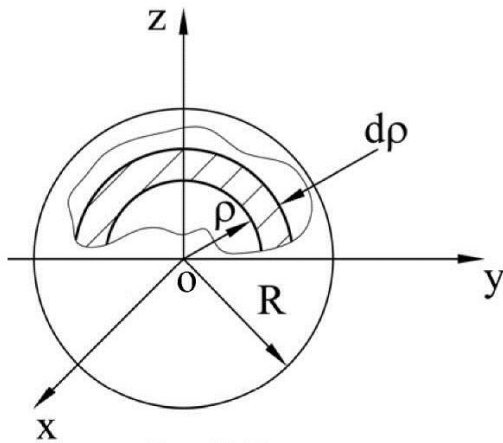


Рис. 15.10

$$dm = 4\pi\rho^2 d\rho\gamma,$$

то получим

$$J_0 = \int_{(m)} \rho^2 dm = 4\pi\gamma \int_0^R \rho^4 d\rho = 4\pi\gamma \frac{R^5}{5}.$$

Масса шара

$$m = \frac{4}{3}\pi R^3\gamma.$$

Следовательно,

$$J_0 = \frac{3}{5}mR^2,$$

откуда

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5}mR^2. \quad (15.5.8)$$



## 15.6. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей

В ряде задач динамики приходится вычислять моменты инерции нескольких тел или тел сложной формы. При этом система разбивается на простейшие элементы, для каждого из которых известен момент инерции относительно его центральных осей. Но вычислять момент инерции этих элементов приходится относительно других осей, параллельных центральным осям. Затем осуществляется поэлементное суммирование, чтобы получить момент инерции всего тела или системы.

В ряде случаев вычисление моментов инерции для отдельного тела относительно параллельных осей представляет самостоятельный интерес.

При решении подобных задач используется теорема о моментах инерции относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса–Штейнера):

**Момент инерции системы материальных точек относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно центральной оси, параллельной данной, сложенному с произведением массы системы на квадрат расстояния между осями.**

На рис. 15.11 оси  $o_1x_1y_1z_1$  – центральные.

Координаты  $i$ -й точки в рассматриваемых осях связаны соотношениями

$$x_i = x_{1i} + a, \quad y_i = y_{1i} + b, \quad z_i = z_{1i} + c.$$

Рассмотрим момент инерции относительно оси  $z$ .

Согласно рис. 15.11, имеем:

$$\begin{aligned} J_z &= \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) = \\ &= \sum_{i=1}^N [(x_{1i} + a)^2 + (y_{1i} + b)^2] = \sum_{i=1}^N m_i (x_{1i}^2 + y_{1i}^2) + \\ &+ (a^2 + b^2) \sum_{i=1}^N m_i + 2a \sum_{i=1}^N m_i x_{1i} + 2b \sum_{i=1}^N m_i y_{1i}. \end{aligned}$$

Однако, поскольку оси  $o_1x_1y_1z_1$  являются центральными, то статистические моменты относительно их равны нулю, то есть:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i x_{1i} &= m x_{o_1} = 0 \\ \sum_{i=1}^N m_i y_{1i} &= m y_{o_1} = 0. \end{aligned}$$

Кроме того,  $\sum_{i=1}^N m_i = m$  – масса системы, а  $a^2 + b^2 = d^2$  – квадрат расстояния между осью  $z$  и  $z_1$ .

Следовательно,

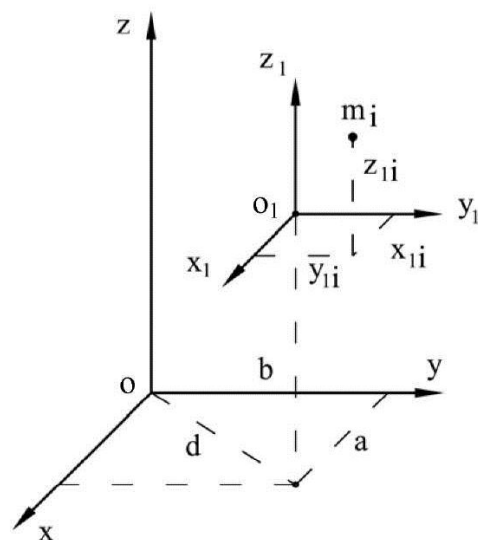


Рис. 15.11

$$J_z = J_{z1} + md^2, \quad (15.6.1)$$

что и доказывает приведенную выше теорему.

Очевидно, что момент инерции относительно центральной меньше любого другого момента инерции относительно другой оси, ей параллельной.

### 15.7. Момент инерции относительно оси, произвольно расположенной в пространстве

Простейшие задачи динамики твердого тела: вращение вокруг неподвижной оси или плоское движение не требуют общих сведений о моментах инерции. Изложение более сложных вопросов, таких как динамика автомобиля, самолета, ракеты, гироскопа, космического корабля требуют изложения общих соотношений для моментов инерции.

Рассмотрим в некоторой точке  $O$  твердого тела систему взаимно перпендикулярных осей  $Oxyz$  и ось  $OA$  с направляющими косинусами:

$$\cos(x, OA) = \alpha; \quad \cos(y, OA) = \beta; \quad \cos(z, OA) = \gamma.$$

Найдем момент инерции системы материальных точек относительно оси  $OA$ . По определению момента инерции  $J = \sum_{i=1}^N m_i h_i^2$ , где  $h_i$  – длина перпендикуляра, опущенного из точки  $m_i$  на ось  $OA$  (рис. 15.12).

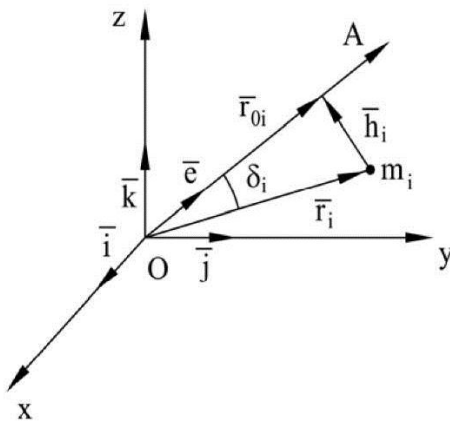


Рис. 15.12

Обозначим радиус-вектор точки  $m_i$  через  $\vec{r}_i$ .

Его проекция на ось  $OA$  будет  $r_{oi} = r_i \cos \delta_i$ , где  $\delta_i$  – угол между  $\vec{r}_i$  и осью  $OA$ .

Но, с другой стороны, величину  $r_{oi}$  можно представить как скалярное произведение единичного вектора оси  $OA$

$$\vec{e} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$$

и

$$\vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k},$$

то есть

$$r_{oi} = r_i \cos \delta_i = \vec{e} \cdot \vec{r}_i = x_i \alpha + y_i \beta + z_i \gamma.$$

Тогда

$$\begin{aligned} h_i^2 &= r_i^2 - r_{oi}^2 = (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - (x_i \alpha + y_i \beta + z_i \gamma)^2 = \\ &= x_i^2 (1 - \alpha^2) + y_i^2 (1 - \beta^2) + z_i^2 (1 - \gamma^2) - 2\alpha \beta x_i y_i - 2\beta \gamma y_i z_i - 2\gamma \alpha z_i x_i. \end{aligned}$$

Учитывая соотношение

$$\vec{e} \cdot \vec{e} = e^2 = 1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

перепишем предыдущее равенство в виде

$$h_i^2 = x_i^2(\beta^2 + \gamma^2) + y_i^2(\alpha^2 + \gamma^2) + z_i^2(\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha\beta x_i y_i - 2\beta\gamma y_i z_i - 2\gamma\alpha z_i x_i = \\ = \alpha^2(y_i^2 + z_i^2) + \beta^2(z_i^2 + x_i^2) + \gamma^2(x_i^2 + y_i^2) - 2\alpha\beta x_i y_i - 2\beta\gamma y_i z_i - 2\gamma\alpha z_i x_i.$$

Подставляя  $h_i^2$  в общее равенство для момента инерции, получим:

$$J = \alpha^2 \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) + \beta^2 \sum_{i=1}^N m_i (z_i^2 + x_i^2) + \\ + \gamma^2 \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2\alpha\beta \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i - 2\beta\gamma \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i - 2\gamma\alpha \sum_{i=1}^N m_i z_i x_i.$$

Как видно, здесь величины

$$J_x = \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2); J_y = \sum_{i=1}^N m_i (z_i^2 + x_i^2); \\ J_z = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

представляют собой осевые моменты инерции относительно осей  $x, y, z$ .

Величины

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i; J_{yz} = \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i; \\ J_{xz} = \sum_{i=1}^N m_i z_i x_i$$

называются центробежными моментами инерции.

Таким образом, окончательно для момента инерции относительно оси  $OA$  получим формулу

$$J = J_x \alpha^2 + J_y \beta^2 + J_z \gamma^2 - 2J_{xy} \alpha\beta - 2J_{yz} \beta\gamma - 2J_{xz} \alpha\gamma \quad (15.7.1)$$

В случае непрерывного распределения масс во всех вышеперечисленных формулах конечные суммы заменяются интегралами:

$$J_x = \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm; \quad J_y = \int_{(m)} (z^2 + x^2) dm; \quad J_z = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm; \\ J_{xy} = \int_{(m)} xy dm; \quad J_{yz} = \int_{(m)} yz dm; \quad J_{xz} = \int_{(m)} zx dm. \quad (15.7.2)$$

В любой точке твердого тела существуют оси инерции, относительно которых центробежные моменты инерции обращаются в нуль, а осевые приобретают экстремальные значения. Такие оси называются главными, этих осей три и они взаимоперпендикулярны.

Для доказательства прибегнем к геометрическому толкованию формулы (15.7.1).

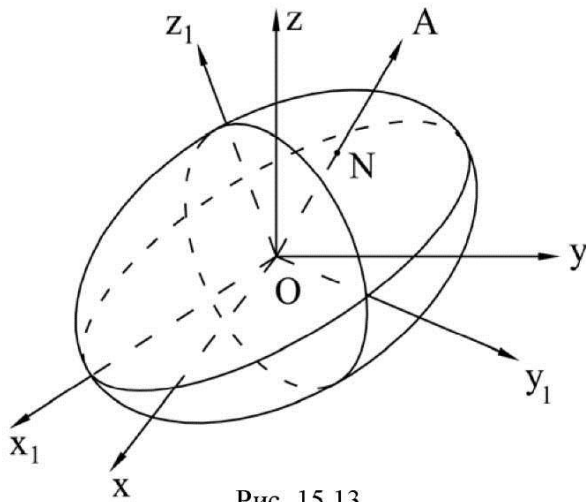


Рис. 15.13

Вдоль оси  $OA$  отложим отрезок  $ON = \frac{l}{\sqrt{J}}$  (рис. 15.13).

Координаты конца этого отрезка в системе осей  $Oxyz$  будут:

$$\begin{aligned} x &= ON \cos(OA, x) = \frac{\alpha}{\sqrt{J}}; \\ y &= ON \cos(OA, y) = \frac{\beta}{\sqrt{J}}; \\ z &= ON \cos(OA, z) = \frac{\gamma}{\sqrt{J}}. \end{aligned} \quad (15.7.3)$$

Тогда

$$\alpha = x\sqrt{J}; \quad \beta = y\sqrt{J}; \quad \gamma = z\sqrt{J}.$$

Подставляя формулы (15.7.3) в выражение для момента инерции  $J$  относительно оси  $OA$  (15.7.1), получим:

$$l = J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy} xy - 2J_{yz} yz - 2J_{xz} xz. \quad (15.7.4)$$

Это поверхность второго порядка. Она определяет геометрические места концов отрезков  $ON$  при любых направлениях оси  $OA$ .

Поскольку момент инерции относительно любой оси есть величина существенно положительная, ограниченная и не обращается в нуль, то поверхность, определяемая уравнением (15.7.4), есть эллипсоид. Этот эллипсоид называется эллипсоидом инерции тела в точке  $O$ .

Уравнение эллипсоида может быть приведено к канонической форме.

В новых осях получим:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = l,$$

где  $a, b, c$  – полуоси эллипсоида.

По построению

$$a = \frac{l}{\sqrt{J_1}}; \quad b = \frac{l}{\sqrt{J_2}}; \quad c = \frac{l}{\sqrt{J_3}},$$

где  $J_1, J_2, J_3$  – главные моменты инерции. Центробежные моменты инерции здесь равны нулю.

Главная ось инерции относительно какой-либо точки уже не обязательно является главной осью инерции для другой точки оси.

Пусть ось  $Oz$  является главной осью инерции относительно точки  $O$ .

Тогда

$$J_{zy} = \sum_{i=1}^N m_i z_i y_i = 0; \quad J_{zx} = \sum_{i=1}^N m_i z_i x_i = 0.$$

Для другой точки  $O_1$  на этой оси на расстоянии  $a$  от точки  $O_1$  получим:

$$J_{z_1y} = \sum_{i=1}^N m_i(z_i - a)y_i = -a \sum_{i=1}^N m_i y_i = -amy_c;$$

$$J_{z_1x} = \sum_{i=1}^N m_i(z_i - a)x_i = -a \sum_{i=1}^N m_i x_i = -amx_c.$$

Здесь  $x_c, y_c$  – координаты центра масс.

Если ось  $Oz$  не является центральной, то

$$J_{z_1y} \neq 0; \quad J_{z_1x} \neq 0.$$

Следовательно, для точки  $O_1$  ось  $Oz$  уже не является главной. Если тело имеет ось материальной симметрии, то эта ось будет главной и центральной.

### 15.8. Вычисление момента количества движения (кинетического момента) твердого тела во вращательном движении вокруг неподвижной точки

При вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной точки  $O$  скорости его точек определяются по формуле  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  (рис. 15.14).

Поэтому кинетический момент твердого тела

$$\vec{L}_0 = \int_{(m)} \vec{r} \times \vec{v} dm = \int_{(m)} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm.$$

Согласно формуле векторной алгебры

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}),$$

имеем:  $\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} r^2 - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{r})$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned} \vec{L}_0 &= \vec{\omega} \int_{(m)} r^2 dm - \int_{(m)} \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) dm = \\ &= \vec{\omega} \int_{(m)} (x^2 + y^2 + z^2) dm - \\ &- \int_{(m)} (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) \vec{r} dm. \end{aligned}$$

Вектор  $\vec{L}_0$  имеет три составляющие:

$$\vec{L}_0 = L_{0x} \vec{i} + L_{0y} \vec{j} + L_{0z} \vec{k},$$

его проекции:

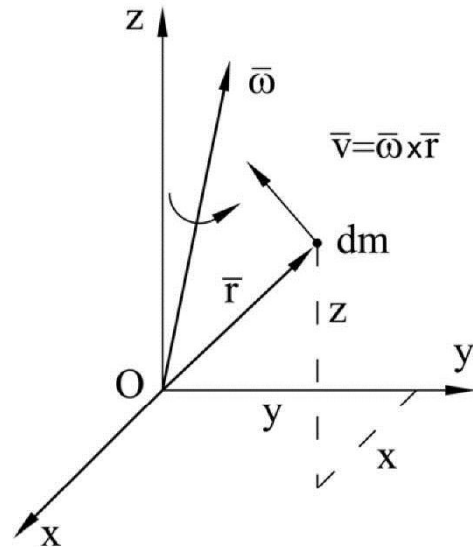


Рис. 15.14

$$L_{0x} = \omega_x \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm - \omega_y \int_{(m)} xy dm - \omega_z \int_{(m)} xz dm;$$

$$L_{0y} = -\omega_x \int_{(m)} yx dm + \omega_y \int_{(m)} (z^2 + x^2) dm - \omega_z \int_{(m)} yz dm;$$

$$L_{0z} = -\omega_x \int_{(m)} zx dm - \omega_y \int_{(m)} zy dm + \omega_z \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm.$$

Если учесть обозначения (15.7.2), то получим:

$$\begin{aligned} L_{0x} &= \omega_x J_x - \omega_y J_{xy} - \omega_z J_{xz}; \\ L_{0y} &= -\omega_x J_{yx} + \omega_y J_y - \omega_z J_{yz}; \\ L_{0z} &= -\omega_x J_{zx} - \omega_y J_{zy} + \omega_z J_z. \end{aligned} \quad (15.8.1)$$

Как видно, если, например,

$$\omega_x = \omega_y = 0,$$

то

$$L_{0x} = -\omega_z J_{xz}; \quad L_{0y} = -\omega_z J_{yz}; \quad L_{0z} = \omega_z J_z.$$

Следовательно, при вращении вокруг неподвижной оси, если оси инерции не являются главными, все остальные составляющие кинетического момента отличны от нуля.

### 15.9. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси  $z$ . Тогда его момент количества движения относительно этой оси будет:

$$L_z = J_z \omega_z = J_z \dot{\phi},$$

где  $\omega_z = \dot{\phi}$  – угловая скорость вращения.

Согласно теореме об изменении момента количества движения

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z,$$

получим

$$J_z \ddot{\phi} = M_z. \quad (15.9.1)$$

Уравнение (15.9.1) является дифференциальным уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

В качестве примера рассмотрим крутильные колебания диска (рис. 15.15).

Момент инерции однородного диска

$$J_z = \frac{mR^2}{2}.$$

Упругий момент вала

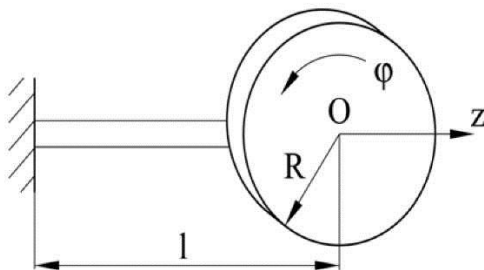


Рис. 15.5

$$M_z = \frac{GJ_p}{l} \varphi,$$

где  $G$  – модуль сдвига;

$J_p$  – полярный момент инерции поперечного сечения упругого элемента (вал считается круглым).

Для круглого вала  $J_p = \frac{Sr^2}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$ , где

$r$  – радиус вала;

$D$  – диаметр вала;

$S$  – площадь вала;

$l$  – длина упругого вала.

Следовательно, дифференциальное уравнение крутильных колебаний будет:

$$\frac{mR^2}{2} \ddot{\varphi} = -\frac{GJ_p}{l} \varphi,$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0, \quad (15.9.2)$$

где  $k = \sqrt{\frac{2GJ_p}{mR^2 l}}$  – частота свободных крутильных колебаний диска.

Решение уравнения (15.9.2) хорошо известно:

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt + \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin kt,$$

где  $\varphi_0$  и  $\dot{\varphi}_0$  – начальные условия движения.

### 15.10. Физический маятник

**Физический маятник представляет собой твердое тело произвольной формы, имеющее горизонтальную ось вращения, не проходящую через центр его тяжести.** Пусть ось подвеса перпендикулярна плоскости чертежа. Воспользуемся дифференциальным уравнением вращения тела вокруг неподвижной оси:

$$J_0 \ddot{\varphi} = M_0, \quad (15.10.1)$$

где  $\varphi$  – угол поворота тела;  $J_0$  – момент инерции твердого тела вокруг оси, перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через точку  $O$  (рис. 15.16);  $M_0$  – момент силы тяжести  $\bar{P} = m\bar{g}$  вокруг точки  $O$ :

$$M_0 = -mgl \sin \varphi,$$

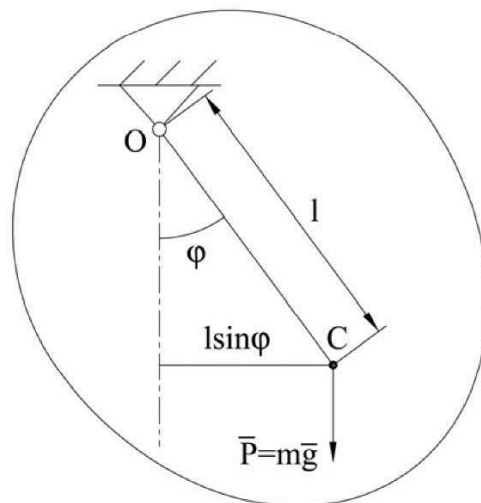


Рис. 15.16



где  $l$  – расстояние между центром тяжести  $C$  и точкой (осью) подвеса  $O$ .

Подставляя выражение  $M_o$  в уравнение (15.10.1), получим

$$J_o \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{J_o} \sin \varphi = 0. \quad (15.10.2)$$

При малых  $\varphi$  вместо (15.10.2) имеем

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0,$$

где  $k = \sqrt{\frac{mgl}{J_o}}$  – частота малых свободных колебаний физического маятника.

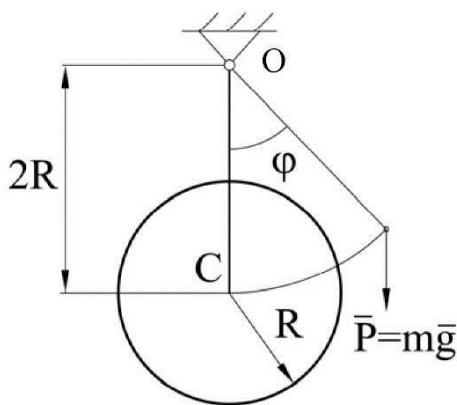


Рис. 15.17

В качестве примера рассмотрим шар, подвешенный на невесомой нити длиной  $R$ , равной радиусу шара (рис. 15.17).

Найдем момент инерции относительно точки подвеса:

$$J_o = \frac{2}{5} mR^2 + 4mR^2 = \frac{22}{5} mR^2. \quad (15.10.3)$$

Согласно формуле (15.10.3)

$$k = \sqrt{\frac{5mg2R}{22mR^2}} = \sqrt{\frac{5}{11} \frac{g}{R}}. \text{ Если учесть, что}$$

$$l = 2R, \quad k = \sqrt{\frac{10}{11} \frac{g}{l}} = 0,953 \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Если бы вся масса шара была сосредоточена в точке  $C$ , то это был бы математический маятник, частота малых колебаний которого

$$k_o = \sqrt{\frac{g}{2R}} = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

следовательно,

$$k = 0,953k_o.$$

Момент инерции относительно центра масс  $J_c$ , если известен радиус инерции  $\rho$ , выражается формулой

$$J_c = m\rho^2.$$

Согласно теореме о моментах инерции относительно параллельных осей,

$$J_o = m(\rho^2 + l^2).$$

Частота малых колебаний

$$k = \sqrt{\frac{gl}{\rho^2 + l^2}}.$$

Следовательно, длина эквивалентного математического маятника будет

$$l_0 = \frac{\rho^2 + l^2}{l}. \quad (15.10.4)$$

Отложим отрезок  $l_0$  вдоль по прямой  $OC$ . Конец отрезка обозначим  $O_1$ .

Перепишем формулу (15.10.4) в виде

$$l^2 - l_0 l + \rho^2 = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно  $l$ , причем его корни  $l$  и  $l_1$ , согласно теореме Виета, удовлетворяют равенствам:

$$l \cdot l_1 = \rho^2; \quad l + l_1 = l_0.$$

Оба корня входят симметрично в эти соотношения. Поэтому тот же период колебаний физического маятника можно получить, если ось подвеса расположить либо на расстоянии  $l$  от центра тяжести в точке  $O$ , либо в точке  $O_1$  на расстоянии  $l_1$ .

Здесь  $l_{0,1} = \frac{l_0}{2} \pm \sqrt{\frac{l_0^2}{4} - \rho^2}$  (рис. 15.18).

Период колебаний физического маятника

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{\rho^2 + l^2}{gl}}.$$

Если известна величина  $l$  – расстояния центра тяжести до точки подвеса, то не представляет труда найти квадрат радиуса инерции  $\rho^2$ :

$$\rho^2 = \frac{T^2}{4\pi^2} gl - l^2.$$

После чего находим

$$J_c = m\rho^2.$$

Таким образом, по экспериментальному периоду малых колебаний физического маятника можно найти его центральный момент инерции, а затем и момент инерции относительно оси подвеса.

В заключение рассмотрим физический маятник в виде однородного стержня длиной  $L$ . Тогда  $l = \frac{L}{2}$ ,  $\rho^2 = \frac{L^2}{12} = l \cdot l_1$  и, следовательно,  $l_1 = \frac{L}{6}$ .

То есть, подвесив однородный стержень в точке  $O_1$  на расстоянии  $l_1 = \frac{L}{6}$ , получим тот же период малых колебаний, что и в случае, когда он подвешен в точке  $O$ , расположенной на его конце.

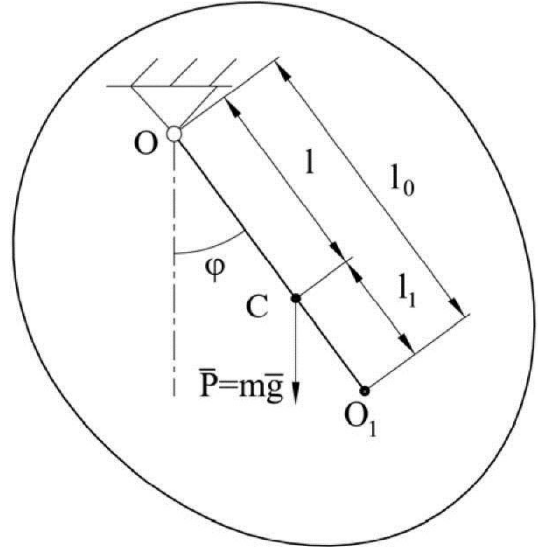


Рис. 15.18

### 15.11. Давление на ось вращающегося тела

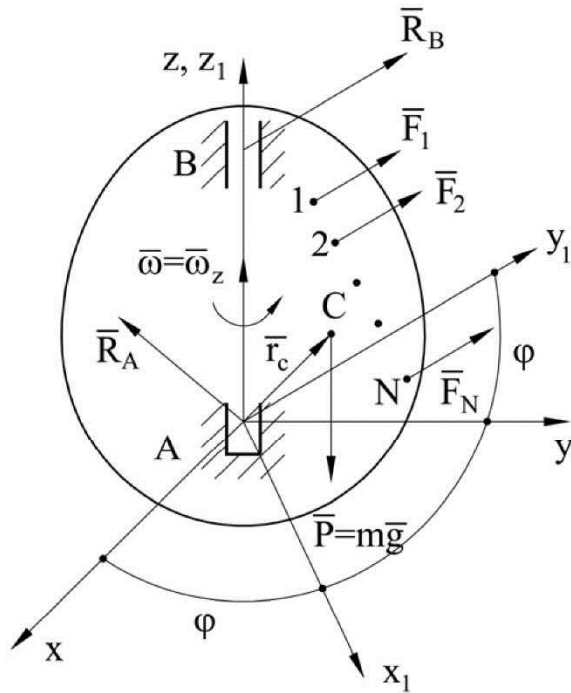


Рис. 15.19

Пусть  $\bar{R}_A, \bar{R}_B$  – динамические реакции связей в точках  $A$  и  $B$  (рис. 15.19),  $\bar{F} = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i$  – главный вектор внешних (активных) сил.

Для определения реакций  $\bar{R}_A, \bar{R}_B$  воспользуемся теоремами об изменении количества движения и момента количества движения. Кроме того, поскольку выгодно использовать оси  $Axyz$ , связанные с телом, так как в них моменты инерции неизменны, то необходимо пользоваться формулой, связывающей абсолютную и относительную производные вектора:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (15.11.1)$$

Количество движения  $\bar{K}$  и момент количества движения  $\bar{L}_A$  находятся по

формулам:

$$\bar{K} = m\bar{v}_c, \quad (15.11.2)$$

где  $\bar{v}_c$  – скорость центра масс тела;

$$\bar{L}_A = -J_{xz}\omega_z\bar{i} - J_{yz}\omega_z\bar{j} + J_z\omega_z\bar{k}, \quad (15.11.3)$$

где  $J_{xz}, J_{yz}$  – центробежные моменты инерции;  $J_z$  – осевой момент инерции;  $\omega_z$  – угловая скорость вращения тела.

Тогда, согласно формуле (15.11.1) и формулам (15.11.2), (15.11.3), получим:

$$m \frac{d\bar{v}_c}{dt} + m\bar{\omega}_z \times \bar{v}_c = \bar{R}_A + \bar{R}_B + \bar{F}, \quad (15.11.4)$$

$$\frac{d\bar{L}_A}{dt} + \bar{\omega}_z \times \bar{L}_A = \bar{M}_A + \bar{AB} \times \bar{R}_B, \quad (15.11.5)$$

где  $\bar{M}_A$  – главный момент внешних сил относительно опоры  $A$ .

Учитывая, что  $\bar{v}_c = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} = (-\omega_z y_c)\bar{i} + (\omega_z x_c)\bar{j} + 0\bar{k}$ ;

$$\bar{\omega}_z \times \bar{v}_c = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ -\omega_z y_c & \omega_z x_c & 0 \end{vmatrix} = (-\omega_z^2 x_c) \bar{i} + (-\omega_z^2 y_c) \bar{j} + 0 \bar{k};$$

$\bar{v}_c = \bar{\omega}_z \times \bar{r}_c$ , найдем  $v_{cx} = -y_c \omega_z$ ,  $v_{cy} = x_c \omega_z$ ;

$$\bar{\omega}_z \times \bar{L}_A = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ -J_{xz} \omega_z & -J_{yz} \omega_z & -J_{yz} \omega_z \end{vmatrix} = (J_{yz} \omega_z^2) \bar{i} - (J_{xz} \omega_z^2) \bar{j} + 0 \bar{k}.$$

Тогда в развернутом виде уравнения (15.11.4) и (15.11.5) будут таковы:

$$\begin{aligned} -m y_c \ddot{\phi} - m x_c \dot{\phi}^2 &= R_{Ax} + R_{By} + F_x; \\ m x_c \ddot{\phi} - m y_c \dot{\phi}^2 &= R_{Ay} + R_{Bx} + F_y; \\ 0 &= R_{Az} + R_{Bz} + F_z; \\ -J_{xz} \ddot{\phi} + J_{yz} \dot{\phi}^2 &= M_x - h R_{By}; \\ -J_{yz} \ddot{\phi} - J_{xz} \dot{\phi}^2 &= M_y + h R_{Bx}; \\ J_z \ddot{\phi} &= M_z, \end{aligned} \quad (15.11.6)$$

где учтено, что  $\omega_z = \dot{\phi}$ , и положено  $AB = h$ .

Уравнения (15.11.6) при известном  $\phi = \phi(t)$  позволяют решить первую задачу динамики, то есть найти неизвестные реакции.

Чтобы найти  $\phi = \phi(t)$ , необходимо проинтегрировать шестое уравнение (15.11.6).

Первые два уравнения при отсутствии внешних сил и реакций имеют вид:

$$\begin{aligned} y_c \ddot{\phi} + x_c \dot{\phi}^2 &= 0; \\ x_c \ddot{\phi} - y_c \dot{\phi}^2 &= 0, \end{aligned}$$

их определитель

$$\Delta = -\ddot{\phi} \dot{\phi}^2 - \dot{\phi}^4 \neq 0, \quad (15.11.7)$$

в общем случае не равен нулю. Поэтому они имеют лишь нулевое решение, то есть  $x_c = y_c = 0$ .

Аналогично четвертое и пятое уравнения

$$\begin{aligned} -J_{xz} \ddot{\phi} + J_{yz} \dot{\phi}^2 &= 0; \\ -J_{yz} \ddot{\phi} - J_{xz} \dot{\phi}^2 &= 0, \end{aligned}$$

при отсутствии внешних сил и реакций удовлетворяются лишь при условии, что  $J_{xz} = J_{yz} = 0$ , так как их определитель дается формулой (15.11.7).

Следовательно, динамические реакции отсутствуют, если центр тяжести лежит на оси вращения, а центробежные моменты инерции равны нулю.

**15.12. Теорема об изменении момента количества движения  
в относительном движении относительно центра инерции**

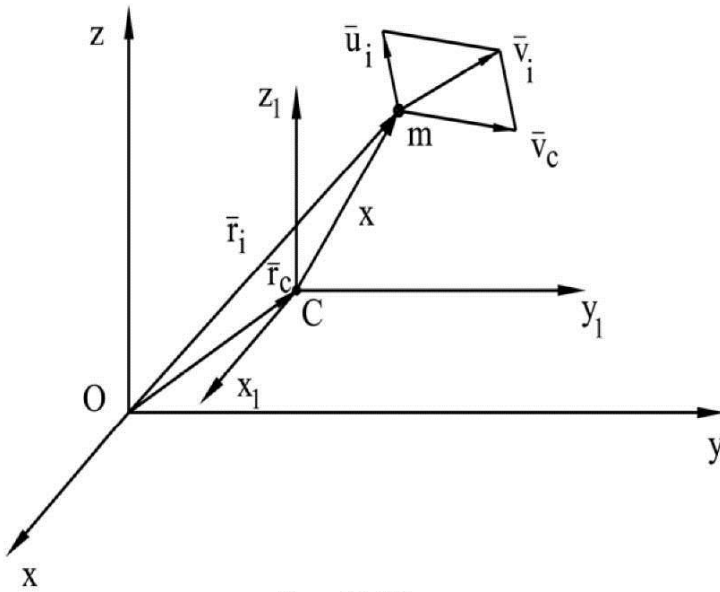


Рис. 15.20

Рассмотрим неподвижную систему декартовых осей  $Oxyz$  и подвижную систему  $Cx_1y_1z_1$ , начало которой расположено в центре инерции системы материальных точек, движущуюся поступательно вместе с центром инерции  $C$  (рис. 15.20).

Абсолютное движение системы представим как сумму переносного движения вместе с подвижной системой  $Cx_1y_1z_1$  и относи-

тельного движения по отношению к подвижному центру инерции.

Переносное движение здесь поступательное, поэтому переносные скорости всех точек системы одинаковы и равны скорости центра инерции

$$\bar{v}_{ie} = \bar{v}_c.$$

Обозначив относительную скорость  $i$ -й точки системы  $\bar{v}_{ir} = \bar{u}_i$ , для абсолютной скорости получим:

$$\bar{v}_i = \bar{v}_c + \bar{u}_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Между радиус-векторами существует зависимость  $\bar{r}_i = \bar{r}_c + \bar{\rho}_i$ , где  $\bar{r}_c$  – радиус-вектор подвижного начала относительно неподвижного,  $\bar{\rho}_i$  – радиус-вектор  $i$ -й точки по отношению к подвижной системе осей. При этом

$$\sum_{i=1}^N m_i \bar{\rho}_i = m \bar{\rho}_c = 0,$$

где  $\bar{\rho}_c$  – радиус-вектор центра масс в подвижной системе осей;  $\bar{\rho}_c = 0$  по определению подвижной системы.

Найдем кинетический момент системы относительно подвижного центра инерции:

$$\begin{aligned} \bar{L}_c &= \sum_{i=1}^N \bar{\rho}_i \times m_i \bar{v}_i = \sum_{i=1}^N \bar{\rho}_i \times m_i (\bar{v}_c + \bar{u}_i) = \\ &= \left( \sum_{i=1}^N m_i \bar{\rho}_i \right) \times \bar{v}_c + \sum_{i=1}^N \bar{\rho}_i \times m_i \bar{u}_i. \end{aligned}$$

Здесь  $(\sum_{i=1}^N m_i \bar{\rho}_i) \times \bar{v}_c = 0$ , поэтому

$$\bar{L}_c = \sum_{i=1}^N \bar{\rho}_i \times m_i \bar{u}_i.$$

Таким образом, при вычислении момента количества движения относительно подвижного центра масс можно не обращать внимания на переносное движение центра масс.

Найдем момент количества движения относительно неподвижного начала:

$$\begin{aligned} \bar{L}_0 &= \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i = \sum_{i=1}^N (\bar{r}_c + \bar{\rho}_i) \times m_i \bar{v}_c = \\ &= \sum_{i=1}^N \bar{r}_c \times m_i \bar{v}_i + \sum_{i=1}^N \bar{\rho}_i \times m_i \bar{v}_i = \\ &= \bar{r}_c \times \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i + \sum_{i=1}^N \bar{\rho}_i \times m_i (\bar{v}_c + \bar{u}_i) = \bar{r}_c \times \bar{K} + \bar{L}_c. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что  $\sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i = \bar{K}$  – количество движения системы.

Следовательно,

$$\bar{L}_0 = \bar{L}_c + \bar{r}_c \times \bar{K}. \quad (15.12.1)$$

Аналогичное соотношение имеем и для главного момента  $\bar{M}_0$ :

$$\begin{aligned} \bar{M}_0 &= \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \sum_{i=1}^N (\bar{r}_c + \bar{\rho}_i) \times \bar{F}_i = \\ &= \bar{M}_c + \bar{r}_c \times \sum_{i=1}^N \bar{F}_i = \bar{M}_c + \bar{r}_c \times \bar{F}, \end{aligned}$$

где  $\bar{F} = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i$  – главный вектор внешних сил, приложенных к точкам системы.

То есть

$$\bar{M}_0 = \bar{M}_c + \bar{r}_c \times \bar{F}. \quad (15.12.2)$$

По существу, это известная из статистики формула для преобразования главного момента при изменении центра приведения.

Согласно теореме об изменении момента количества движения, с учетом (15.12.1) и (15.12.2), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{L}_0}{dt} &= \frac{d}{dt} (\bar{L}_c + \bar{r}_c \times \bar{K}) = \frac{d\bar{L}_c}{dt} + \frac{d\bar{r}_c}{dt} \times \bar{K} + \\ &+ \bar{r}_c \times \frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{M}_0 = \bar{M}_c + \bar{r}_c \times \bar{F}. \end{aligned}$$

Но 
$$\frac{d\bar{r}_c}{dt} \times \bar{K} = \bar{v}_c \times m\bar{v}_c = 0,$$

$$\bar{r}_c \times \frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{r}_c \times \bar{F}.$$

Поэтому

$$\frac{d\bar{L}_c}{dt} = \bar{M}_c. \quad (15.12.3)$$

Следовательно, теорема об изменении момента количества движения относительно подвижного центра масс сохраняет свою формулировку.

То есть **первая производная по времени от момента количества движения относительно центра масс в осях, движущихся поступательно вместе с центром масс, равна главному моменту внешних сил, приложенных к точкам системы относительно центра масс.**

### 15.13. Закон сохранения момента количества движения

Если главный момент внешних сил  $M_0$  равен нулю, то момент количества движения  $\bar{L}_0$  будет постоянным.

Действительно, если

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = 0, \text{ то } \bar{L}_0 = const.$$

Сказанное относится и к отдельным проекциям.

В качестве примера рассмотрим систему (рис. 15.21), вращающуюся вокруг оси  $z$ , состоящую из однородного диска массой  $m_1$ , по радиусу которого

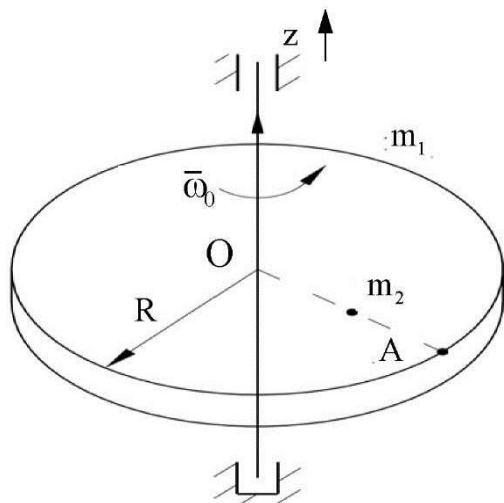


Рис. 15.21

движется материальная точка массой  $m_2$ . Радиус диска равен  $R$ . В начале точка находилась в центре диска, а угловая скорость равнялась  $\bar{\omega}_0$ . Определить, как изменится угловая скорость после того, как точка достигнет края диска – точки А.

В данном случае

$$L_z = J_1 \omega_0 = (J_1 + m_2 R^2) \omega = const,$$

где  $\omega$  – конечное значение угловой скорости;

$$J_1 = \frac{m_1 R^2}{2} \text{ – момент инерции диска.}$$

Подставляя в предыдущее равенство значения момента инерции диска, получим:



$$\frac{m_1 R^2}{2} \omega_0 = \left( \frac{m_1 R^2}{2} + m_2 R^2 \right) \omega.$$

Откуда  $\frac{\omega_0}{\omega} = 1 + \frac{2m_2}{m_1}$ .

В качестве другого примера рассмотрим управление вращением космического корабля с помощью маховика (рис. 15.22).

Пусть система осей  $Oxyz$  движется поступательно. Корабль получил вращение вокруг оси  $z$ . Момент инерции корабля относительно точки  $O$  равен  $J_1$ , а момент инерции маховика –  $J_2$ . Корабль и маховик вращаются в одну сторону. Оси  $Ox_1y_1z_1$  связаны с кораблем.

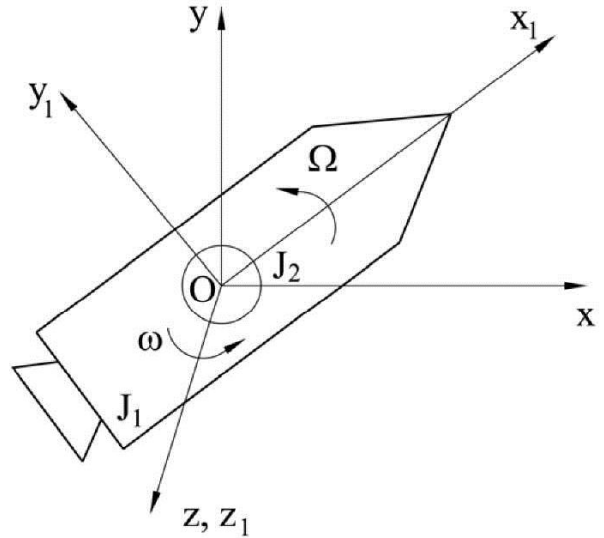


Рис. 15.22

При отсутствии внешних сил

$$\begin{aligned} L_{Oz} &= J_1 \Omega_0 + J_2 (\omega_0 + \Omega_0) = \\ &= J_1 \Omega + J_2 (\omega + \Omega) = \text{const}, \end{aligned}$$

где  $\Omega_0$  – начальная угловая скорость корабля;

$\omega_0$  – начальная относительная угловая скорость маховика;

$\Omega$  и  $\omega$  – текущие значения соответствующих угловых скоростей.

Здесь  $\omega + \Omega$ , согласно теореме о сложении вращений вокруг параллельных осей, – абсолютная угловая скорость маховика.

Если положить  $\omega_0 = 0$ , то тогда

$$(J_1 + J_2) \Omega_0 = J_1 \Omega + J_2 (\omega + \Omega)$$

и, следовательно,

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{J_2 \omega}{J_1 + J_2}.$$

Вращение космического корабля остановится, если

$$\omega = \frac{J_1 + J_2}{J_2} \Omega_0.$$

При помощи маховика космический корабль можно повернуть на любой угол. Предположим, что он не вращался, тогда

$$L_{Oz} = J_1 \Omega + J_2 (\omega + \Omega) = 0.$$

Пусть  $\psi$  – угол поворота корабля;  $\varphi$  – угол поворота маховика.

Предыдущее равенство, учитывая, что

$$\Omega = \frac{d\psi}{dt} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{d\phi}{dt},$$

можно переписать так:

$$J_1 d\psi + J_2 (d\phi + d\psi) = 0.$$

Интегрируя это равенство, получим:

$$(J_1 + J_2)(\psi - \psi_0) + J_2(\phi - \phi_0) = 0.$$

Откуда

$$\psi - \psi_0 = -\frac{J_2}{J_1 + J_2}(\phi - \phi_0),$$

где  $\psi_0$  и  $\phi_0$  – начальные значения углов  $\psi$  и  $\phi$ .

Следовательно, чтобы повернуть корабль на угол  $\psi - \psi_0$ , необходимо маховик повернуть на угол  $(\phi - \phi_0)$  в противоположную сторону.

## 16. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

### 16.1. Элементарная теория гироскопа

*Гироскопом называется твердое тело, вращающееся вокруг подвижной оси материальной симметрии, одна из точек которой неподвижна* (рис. 16.1).

В качестве примера гироскопа можно привести детскую игрушку «волчок». Будучи раскрученным до значительной угловой скорости вокруг оси симметрии, «волчок» некоторое время сохраняет устойчивое вертикальное положение, затем, по мере замедления вращения, его ось начинает описывать коническую поверхность. Это движение оси называется прецессией и, наконец, теряется устойчивость: «волчок» падает.

Свойство гироскопа сохранять направление оси вращения в пространстве широко используется в технике. Гироскопические компасы значительно точнее магнитных. С помощью гироскопических устройств осуществляется определение координат самолетов, ракет, кораблей. Гироскопические приборы позволяют с высокой точностью определять угловые и линейные ускорения летательных аппаратов и наземных транспортных средств, стабилизировать орудийные платформы на корабле.

На рис. 16.1 изображен «волчок». Это гироскоп с тремя степенями свободы. Оси  $Oxyz$  связаны с ротором. Угловая скорость вращения вокруг оси  $z$  равна  $\bar{\omega}_0$ . Ее называют угловой скоростью собственного вращения. Ось  $z$  является осью материальной симметрии и она описывает коническую поверхность с угловой скоростью  $\bar{\omega}^*$ , направленной по вертикальной оси  $z^*$ .

Угловая скорость  $\bar{\omega}^*$  называется угловой скоростью прецессии. Оси  $Ox_1y_1z_1$  отстают от осей, связанных с телом, на величину угловой скорости собственного вращения  $\bar{\omega}_0$ , поэтому их угловая скорость равна  $\bar{\omega}^*$ , то есть угловой скорости прецессии.

В силу симметрии оси  $Oxyz$  являются главными, а в главных осях момент количества движения относительно точки  $O$  будет:

$$\bar{L}_0 = J_x \omega_x \bar{i} + J_y \omega_y \bar{j} + J_z \omega_z \bar{k}. \quad (16.1.1)$$

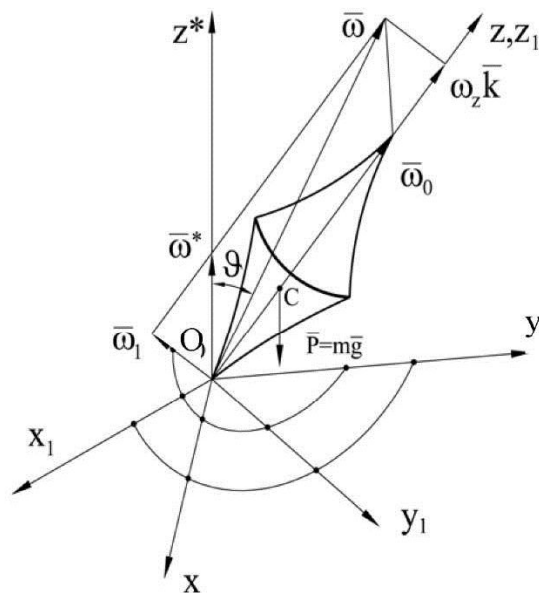


Рис. 16.1

Однако здесь  $J_x = J_y = J_1$ . Обозначим  $J_z = J_3$ . Тогда формула (16.1.1) перепишется в виде

$$\bar{L}_0 = J_1(\bar{\omega}_x + \bar{\omega}_y) + J_3\omega_z\bar{k}.$$

В последнем выражении  $\bar{\omega}_x + \bar{\omega}_y = \bar{\omega}_l$ , то есть проекции полной угловой скорости  $\bar{\omega}$  на плоскость  $Oxy$ .

Очевидно,  $\omega_z = \omega_0 + \omega^* \cos \vartheta$ , где  $\vartheta$  – угол между вертикалью и осью  $z$ .

Если предположить, что  $\omega_0 \gg \omega^*$ , то для  $\bar{L}_0$  можно принять следующую приближенную формулу:

$$\bar{L}_0 = J_3\omega_0\bar{k}. \quad (16.1.2)$$

Воспользуемся теоремой об изменении момента количества движения в формулировке Резаля.

Конец вектора  $\bar{L}_0$  описывает окружность со скоростью

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{\omega}^* \times \bar{L}_0.$$

Эта величина равна моменту внешней силы относительно точки  $O$ . В рассматриваемом случае это момент силы веса  $\bar{P}$  относительно точки  $O$ . Поэтому

$$\bar{\omega}^* \times \bar{L}_0 = OC \times \bar{P}. \quad (16.1.3)$$

Из (16.1.3) следует

$$J_3\omega_0\omega^* \sin \vartheta = OCmg \sin \vartheta. \quad (16.1.4)$$

Таким образом, находим формулу для угловой скорости регулярной прецессии

$$\omega^* = \frac{mgl}{J_3\omega_0},$$

где  $l = OC$  – расстояние центра масс до опоры гироскопа.

Если гироскоп имеет две степени свободы и его оси сообщено вращение, например, с угловой скоростью  $\bar{\omega}$ , то это приводит к возникновению гироскопического момента относительно точки  $O$ , равного

$$\bar{M}_g = -\bar{M}_0 = -J_3\omega_0\bar{\omega} \times \bar{k}.$$

То есть вектор момента  $\bar{M}_g$  перпендикулярен плоскости, содержащей вектор  $\bar{\omega}^*$  и ось собственного вращения ротора, и стремится совместить векторы  $\bar{L}_0$  и  $\bar{\omega}^*$  по кратчайшему расстоянию.

В качестве примера рассмотрим определение реакций подшипников ротора турбины при продольной качке корабля. Ротор турбины схематично изображен на рис. 16.2. Угловая скорость качки  $\bar{\omega} \perp Oz$  и направлена по оси  $y$ .

Расстояние между опорами  $AB = l$ . Тогда реакции подшипников будут:

$$R_{Ay} = R_{By} = \frac{J_3\omega_0\omega}{l}.$$

$\bar{M}_g = -\bar{M}_0$  – гироскопический момент.

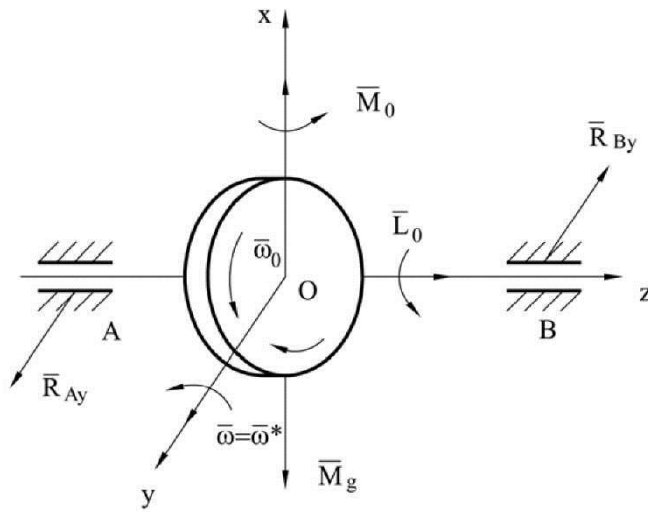


Рис. 16.2

### 16.2. Уравнения Эйлера для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки

Уравнения Эйлера для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, представляет собой дифференциальные уравнения, устанавливающие связь между силами, действующими на тело, и параметрами, определяющими его положение. В качестве таких параметров могут быть взяты углы Эйлера (рис. 16.3).

Для составления дифференциальных уравнений воспользуемся теоремой об изменении момента количества движения относительно неподвижной точки:

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{M}_0, \quad (16.2.1)$$

где  $\bar{L}_0$  – момент количества движения тела относительно неподвижной точки  $O$ ;  $\bar{M}_0$  – главный момент внешних сил относительно этой же точки.

Пусть система осей  $Ox_1y_1z_1$  неподвижна, а система  $Oxyz$  жестко связана с телом. При движении тела его моменты инерции относительно неподвижной системы осей будут меняться, так как непрерывно меняется положение тела относительно этой системы. Если вектор момента количества движения определить в системе осей, связанных с телом, то ситуация меняется, так как моменты инерции будут

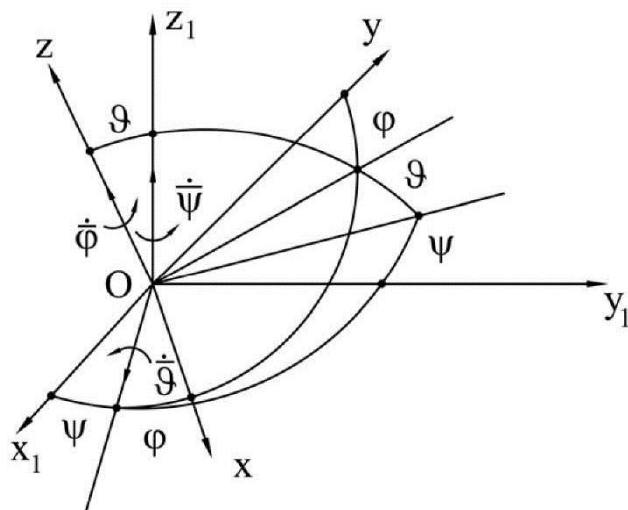


Рис. 16.3

уже постоянными величинами.

Но при вычислении производной необходимо будет пользоваться известной теоремой об относительной производной вектора:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d'\bar{r}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{r}, \quad (16.2.2)$$

где  $\frac{d\bar{r}}{dt}$  – абсолютная производная  $\bar{r}$ ;

$\frac{d'\bar{r}}{dt}$  – относительная производная;

$\bar{\omega}$  – угловая скорость подвижной системы.

Учитывая это обстоятельство, равенство (16.2.1) переписывается в виде

$$\frac{d'\bar{L}_0}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{L}_0 = \bar{M}_0. \quad (16.2.3)$$

Спроектируем (16.2.3) на подвижные оси  $Oxyz$ :

$$\begin{aligned} \frac{d'L_x}{dt} + \omega_y L_z - \omega_z L_y &= M_x; \\ \frac{d'L_y}{dt} + \omega_z L_x - \omega_x L_z &= M_y; \\ \frac{d'L_z}{dt} + \omega_x L_y - \omega_y L_x &= M_z. \end{aligned} \quad (16.2.4)$$

Если подвижные оси главные, то

$$L_x = J_1 \omega_x; \quad L_y = J_2 \omega_y; \quad L_z = J_3 \omega_z, \quad (16.2.5)$$

где  $J_1, J_2, J_3$  – главные моменты инерции.

Подставляя (16.2.5) в уравнения (16.2.4), получим:

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_x + (J_3 - J_2) \omega_y \omega_z &= M_x; \\ J_2 \dot{\omega}_y + (J_1 - J_3) \omega_x \omega_z &= M_y; \\ J_3 \dot{\omega}_z + (J_2 - J_1) \omega_x \omega_y &= M_z. \end{aligned} \quad (16.2.6)$$

Здесь обозначено  $\frac{d'\omega_x}{dt} = \dot{\omega}_x$ ;  $\frac{d'\omega_y}{dt} = \dot{\omega}_y$ ;  $\frac{d'\omega_z}{dt} = \dot{\omega}_z$ .

Уравнения (16.2.6) называются динамическими уравнениями Эйлера. Систему (16.2.6) следует дополнить кинематическими уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi; \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi; \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (16.2.7)$$

где  $\psi$  – угол прецессии;  $\vartheta$  – угол нутации;  $\varphi$  – угол собственного вращения, – известные углы Эйлера.

Если задаются углы Эйлера как функция времени, то уравнения (16.2.6) и (16.2.7) позволяют найти силы, действующие на тело, то есть решить первую задачу динамики.

Решение второй задачи динамики, которая заключается в интегрировании этих шести уравнений первого порядка, в общем случае представляет значительные математические трудности.

Поэтому рассмотрим наиболее простой случай вращения твердого тела вокруг неподвижной точки по инерции. Это случай Эйлера–Пуассона.

### 16.3. Движение твердого тела в случае Эйлера–Пуассона

Это вращение по инерции, когда  $\bar{M}_0 = 0$ . В этом случае динамические уравнения Эйлера примут вид:

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_x + (J_3 - J_2) \omega_y \omega_z &= 0; \\ J_2 \dot{\omega}_y + (J_1 - J_3) \omega_x \omega_z &= 0; \\ J_3 \dot{\omega}_z + (J_2 - J_1) \omega_x \omega_y &= 0. \end{aligned} \quad (16.3.1)$$

Умножим первое уравнение на  $J_1 \omega_x$ , второе – на  $J_2 \omega_y$ , третье – на  $J_3 \omega_z$  и сложим. В результате получим:

$$J_1^2 \omega_x \dot{\omega}_x + J_2^2 \omega_y \dot{\omega}_y + J_3^2 \omega_z \dot{\omega}_z = 0,$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (J_1^2 \omega_x^2 + J_2^2 \omega_y^2 + J_3^2 \omega_z^2) = 0.$$

$$\text{Откуда} \quad J_1^2 \omega_x^2 + J_2^2 \omega_y^2 + J_3^2 \omega_z^2 = I_0^2 = \text{const}. \quad (16.3.2)$$

Равенство (16.3.2) означает, что модуль момента количества  $\bar{L}_0$  сохраняет постоянную величину и представляет собой первый интеграл уравнений движения.

Соотношение (16.3.2) можно было бы написать сразу. Поскольку  $\bar{M}_0 = 0$ , то  $\bar{L}_0 = \text{const}$  и, следовательно,

$$\bar{L}_0 \cdot \bar{L}_0 = I_0^2 = \text{const}.$$

Еще один первый интеграл получим, если умножить уравнения (16.3.1) соответственно на  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  и сложить:

$$J_1 \omega_x^2 + J_2 \omega_y^2 + J_3 \omega_z^2 = 2T = \text{const},$$

где  $T$  – постоянная энергии.

Определение углов Эйлера существенно упрощается, если  $J_1 = J_2$ , то есть, когда ось  $z$  является осью материальной симметрии.

Уравнения (16.3.1) в этом случае будут:

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_x + (J_3 - J_1) \omega_y \omega_z &= 0; \\ J_2 \dot{\omega}_y + (J_1 - J_3) \omega_x \omega_z &= 0; \\ J_3 \dot{\omega}_z &= 0. \end{aligned} \quad (16.3.3)$$



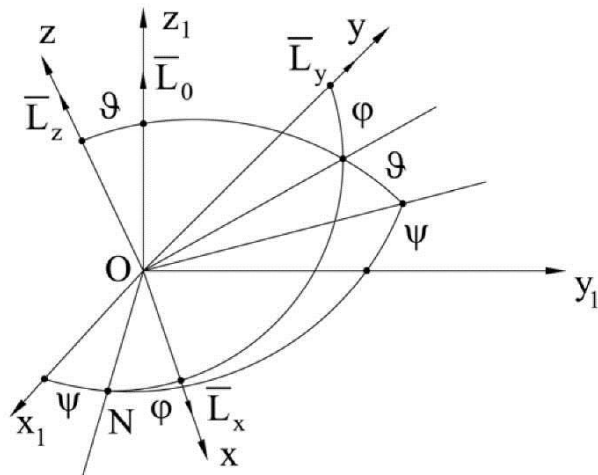


Рис. 16.4

Из третьего уравнения следует, что

$$\omega_z = \omega_{z0} = const. \quad (16.3.4)$$

В рассматриваемом случае момент количества движения  $\bar{L}_0$  постоянен по модулю и направлению. Совместим неподвижную ось  $z_1$  с направлением  $\bar{L}_0$  (рис. 16.4).

Проекции  $\bar{L}_0$  на оси  $Oxyz$  будут:

$$\begin{aligned} L_x &= L_0 \sin \vartheta \sin \varphi, \\ L_y &= L_0 \sin \vartheta \cos \varphi, \\ L_z &= L_0 \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (16.3.5)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} L_x &= J_1 \omega_x; \quad L_y = J_2 \omega_y; \\ L_z &= J_3 \omega_z. \end{aligned} \quad (16.3.6)$$

Учитывая (16.3.4), (16.3.5), (16.3.6), найдем:

$$J_3 \omega_{z0} = L_z = L_0 \cos \vartheta = const.$$

Откуда

$$\cos \vartheta = \frac{J_3 \omega_{z0}}{L_0} = const.$$

Таким образом, угол нутации  $\vartheta$  является постоянной величиной:

$$\dot{\vartheta} = 0; \quad \vartheta = \vartheta_0.$$

Кинематические уравнения Эйлера примут вид:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin \vartheta_0 \sin \varphi; \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \vartheta_0 \cos \varphi; \\ \omega_{z0} &= \dot{\psi} \cos \vartheta_0 + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (16.3.7)$$

Подставим (16.3.7) в (16.3.6) с учетом (16.3.5):

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\psi} \sin \vartheta_0 \sin \varphi &= L_0 \sin \vartheta_0 \sin \varphi, \\ J_1 \dot{\psi} \sin \vartheta_0 \cos \varphi &= L_0 \sin \vartheta_0 \cos \varphi. \end{aligned}$$

Откуда

$$L_0 = J_1 \dot{\psi},$$

и, следовательно,

$$\dot{\psi} = \frac{L_0}{J_1} = \omega^* = const.$$

Откуда

$$\psi = \omega^* t + \psi_0,$$

где  $\psi_0$  – значение угла  $\psi$  при  $t = 0$ .

Из третьей формулы (16.3.7) следует:

$$\dot{\varphi} = \omega_{z0} - \dot{\psi} \cos \vartheta_0 = \omega_{z0} - \omega^* \cos \vartheta_0 = \omega_0 = \text{const}.$$

И, следовательно,  $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ , где  $\varphi_0$  – начальное значение  $\varphi$ .

Решение дифференциальных уравнений движения твердого тела, таким образом, имеет вид:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_0; \\ \psi &= \omega^* t + \psi_0; \\ \varphi &= \omega_0 t + \varphi_0. \end{aligned} \tag{16.3.8}$$

Постоянные  $\vartheta_0, \psi_0, \omega^*, \omega_0$  связаны соотношением

$$\omega_{z0} = \omega_0 + \omega^* \cos \vartheta_0.$$

Движение, описываемое уравнением (16.3.8), называется регулярной прецессией (рис. 16.5). При этом ось симметрии описывает круговой конус с угловой скоростью  $\omega^*$ , а само тело вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью  $\omega_0$ .

Однако не все режимы вращения тела вокруг неподвижной точки по инерции являются устойчивыми.

В некоторых случаях при наличии малого возмущения от установившегося движения отклонения начинают возрастать с течением времени. Такие режимы движения называют неустойчивыми.

Предположим, что ось вращения совпадает с главной осью инерции  $z$ . Тогда

$$\omega_x = \omega_y = 0, \omega_z = \omega_0 = \text{const}.$$

Для того, чтобы выяснить, является ли режим устойчивым, придадим малое возмущение телу, в результате которого угловые скорости изменятся и будут равны:

$$\omega_x = \omega_1; \quad \omega_y = \omega_2; \quad \omega_z = \omega_0 + \omega_3, \tag{16.3.9}$$

где  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  – малые по сравнению с  $\omega_0$ .

Подставим значения (16.3.9) в уравнения (16.3.1):

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 (\omega_0 + \omega_3) &= 0; \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 (\omega_0 + \omega_3) &= 0; \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 &= 0. \end{aligned} \tag{16.3.10}$$

В уравнениях (16.3.10) следует пренебречь малыми высшего порядка, то есть произведениями  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ :

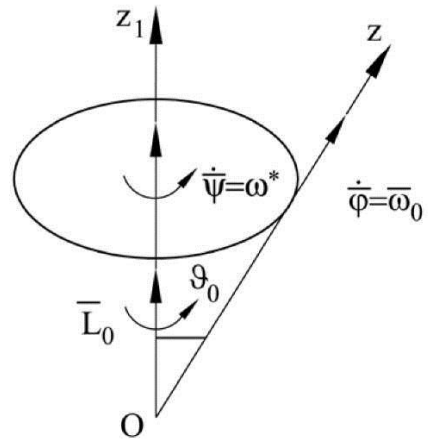


Рис. 16.5

$$\begin{aligned}
J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_0 &= 0; \\
J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_0 &= 0; \\
J_3 \dot{\omega}_3 &= 0.
\end{aligned}
\tag{16.3.11}$$

Из третьего уравнения сразу следует  $\omega_3 = \omega_{30} = const$ , а первые два преобразуются к виду:

$$\begin{aligned}
\ddot{\omega}_1 + \omega_0^2 \frac{(J_3 - J_1)(J_3 - J_2)}{J_1 J_2} \omega_1 &= 0; \\
\ddot{\omega}_2 + \omega_0^2 \frac{(J_3 - J_1)(J_3 - J_2)}{J_1 J_2} \omega_2 &= 0.
\end{aligned}
\tag{16.3.12}$$

Решения уравнений (16.3.12) выражаются через тригонометрические функции, которые со временем не возрастают, если

$$(J_3 - J_1)(J_3 - J_2) > 0, \tag{16.3.13}$$

и тогда движение устойчиво.

Если же

$$(J_3 - J_1)(J_3 - J_2) < 0, \tag{16.3.14}$$

то решение выражается через показательные функции и движение будет неустойчивым. Из (16.3.13) следует, что  $J_3$  должно быть либо максимальным, либо минимальным.

Условие (16.3.14) возможно лишь в том случае, когда  $J_3 < J_1$  и  $J_3 > J_2$  или наоборот,  $J_3 > J_1$  и  $J_3 < J_2$ , то есть является средним по величине моментом инерции.

### 16.4. Случай Лагранжа–Пуассона

В случае Лагранжа–Пуассона центр тяжести тела лежит на оси вращения эллипсоида инерции. Момент внешних сил создается силой

$$\bar{P} = -P(\gamma_1 \bar{i} + \gamma_2 \bar{j} + \gamma_3 \bar{k}),$$

где  $\gamma_1 = \sin \vartheta \sin \varphi$ ,

$\gamma_2 = \sin \vartheta \cos \varphi$ ,  $\gamma_3 = \cos \vartheta$  – направляющие косинусы вектора  $\bar{P}$  в осях  $Oxyz$  (рис. 16.6).

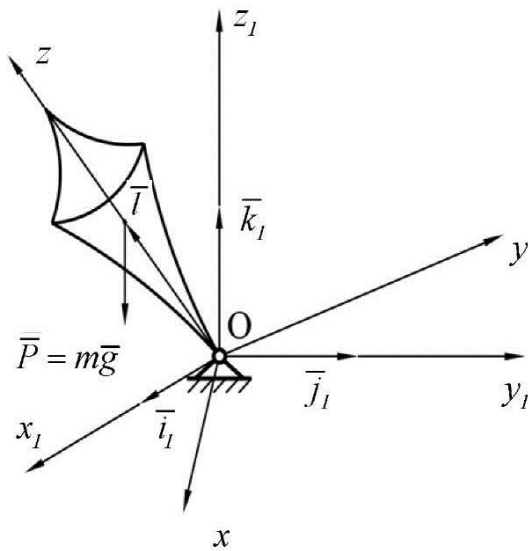


Рис. 16.6

$$\bar{M}_0 = \bar{a} \times \bar{P} = -P \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & l \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = Pl\gamma_2 \bar{i} - Pl\gamma_1 \bar{j},$$

где  $\bar{l} = l\bar{k}$  – вектор точек приложения силы  $\bar{P}$ .

Поэтому уравнения Эйлера в данном случае принимают вид:

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_x + (J_3 - J_1) \omega_y \omega_z &= Pl \gamma_2; \\ J_2 \dot{\omega}_y + (J_1 - J_3) \omega_x \omega_z &= -Pl \gamma_1; \\ J_3 \dot{\omega}_z &= 0. \end{aligned} \quad (16.4.1)$$

Эти уравнения следует дополнить кинематическими соотношениями Эйлера:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi; \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi; \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (16.4.2)$$

Для того, чтобы проинтегрировать систему (16.4.1) и (16.4.2), найдем три первых интеграла.

Один – тривиальный геометрический интеграл

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \quad (16.4.3)$$

Умножим первое уравнение (16.4.1) на  $\omega_x$ , второе на  $\omega_y$ , третье на  $\omega_z$  и сложим

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_x \omega_x + J_1 \dot{\omega}_y \omega_y + J_3 \dot{\omega}_z \omega_z &= Pa(\gamma_2 \omega_x - \\ &- \gamma_1 \omega_y) = Pa[\sin \vartheta \cos \varphi (\dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \\ &+ \dot{\vartheta} \cos \varphi) - \sin \vartheta \sin \varphi (\dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \\ &- \dot{\vartheta} \sin \varphi)] = Pl \dot{\vartheta} \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Интегрируя это соотношение, найдем

$$J_1(\omega_x^2 + \omega_y^2) + J_3 \omega_z^2 = -2Pl \cos \vartheta + h. \quad (16.4.4)$$

Для получения еще одного интеграла, воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента в проекции на ось  $Oz$ .

Так как  $M_{z1} = 0$ , то  $\frac{d}{dt} L_{z1} = 0$  и  $L_{z1} = const$ .

$$\begin{aligned} L_{z1} = \bar{L}_0 \bar{k}_1 &= (J_1 \omega_x \bar{i} + J_1 \omega_y \bar{j} + J_3 \omega_z \bar{k})(\gamma_1 \bar{i} + \gamma_2 \bar{j} + \gamma_3 \bar{k}) = \\ &= J_1(\omega_x \gamma_1 + \omega_y \gamma_2) + J_3 \omega_z \gamma_3 = const. \end{aligned} \quad (16.4.5)$$

Еще один нетривиальный интеграл получаем из третьего уравнения (16.4.1):

$$\omega_z = const. \quad (16.4.6)$$

Введем в полученные интегралы Эйлера углы. Из первых двух уравнений (16.4.2) следует

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \psi^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2.$$

Так как  $\gamma_3 = \cos \vartheta$ , то объединяя в (16.4.4)  $J_3 \omega_z^2$  с  $h$ , получаем:

$$J_1(\psi^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + 2Pl \cos \vartheta = h_1, \quad (16.4.7)$$

где  $h_1 = h - J_3 \omega_z^2$ .

Учитывая, что

$$\gamma_1 = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \gamma_2 = \sin \vartheta \cos \varphi,$$

из первых двух уравнений (16.4.2) получим:

$$\omega_x \gamma_1 = \dot{\psi} \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi \sin \vartheta \sin \varphi;$$

$$\omega_y \gamma_2 = \dot{\psi} \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi \sin \vartheta \cos \varphi.$$

Складывая эти соотношения, найдем:

$$\omega_x \gamma_1 + \omega_y \gamma_2 = \dot{\psi} \sin^2 \vartheta.$$

Тогда интеграл (16.4.5) перепишется в виде:

$$J_1 \dot{\psi} \sin^2 \vartheta + J_3 \omega_z \cos \vartheta = b, \quad (16.4.8)$$

где  $b$  – постоянная, которую определяем по начальным условиям. Кроме того, вместо (16.4.6) получим:

$$\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta = \omega_z = \text{const}. \quad (16.4.9)$$

Наконец, из (16.4.7) имеем:

$$\dot{\vartheta}^2 = \frac{h_1 - Pl \cos \vartheta - J_1 \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta}{J_1},$$

из (16.4.8):

$$\dot{\psi} = \frac{b - J_3 \omega_z \cos \vartheta}{J_1 \sin^2 \vartheta}.$$

После чего найдем

$$\dot{\vartheta}^2 = \frac{h_1 - 2Pl \cos \vartheta}{J_1} - \frac{(b - J_3 \omega_z \cos \vartheta)^2}{J_1^2 \sin^2 \vartheta}. \quad (16.4.10)$$

Уравнение (16.4.10) дает выражение для квадрата скорости нутации и может быть проинтегрировано.

Перепишем уравнение (16.4.10) в виде:

$$J_1^2 \sin^2 \vartheta \dot{\vartheta}^2 = J_1 (h_1 - 2Pl \cos \vartheta) \sin^2 \vartheta - (b - J_3 \omega_z \cos \vartheta)^2.$$

Введем новую переменную  $\cos \vartheta = s$ ,  $-\sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{ds}{dt}$ .

Тогда уравнение примет вид:

$$J_1^2 \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = f(s), \quad (16.4.11)$$

где  $f(s) = J_1 (h_1 - 2Pls)(1 - s^2) - (b - J_3 \omega_z s)^2$ . (16.4.12)

Рассмотрим корни уравнения (16.4.11) (рис. 16.7).

Этих корней три. Движение возможно, если  $s_1 \leq s \leq s_2$  и невозможно во всех остальных случаях, так как  $f(s) > 0$  и  $s = \cos \vartheta \leq 1$  согласно (16.4.11).

Вершина гироскопа описывает сферическое движение одного из трех видов (рис. 16.8).

При  $s_1 = s_2$  получается регулярная прецессия, при этом  $\vartheta = \text{const}$ .

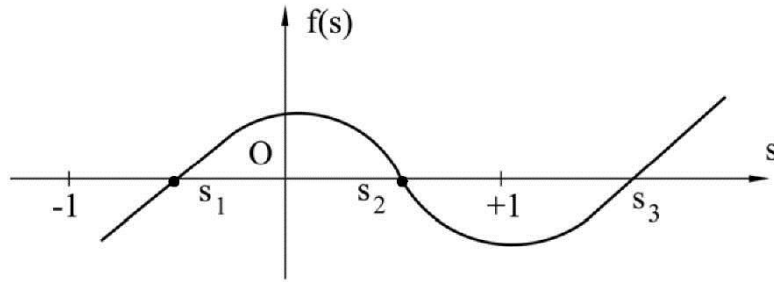


Рис. 16.7

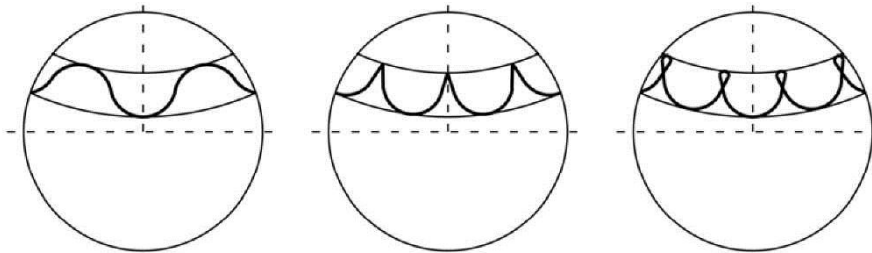


Рис. 16.8

### 16.5. Дифференциальные уравнения вращения симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки в осях, не связанных с телом

Уравнения Эйлера для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, были получены в главных осях, связанных с телом. Это ограничение было вызвано тем, что моменты инерции для тела произвольной формы в осях, не связанных с телом, переменны и это условие ведет к усложнению уравнений динамики. Если же тело имеет ось материальной симметрии, например, в случае гироскопа, то можно допустить наличие осей, не связанных с телом, отстающих от него, например, на величину угловой скорости собственного вращения. Это облегчает анализ гироскопических явлений, не усложняя уравнений динамики.

При наличии круговой материальной симметрии, то есть в случае гироскопа, уравнение Эйлера существенно упрощается. Пусть, например,  $J_1 = J_2$ . Будем считать, что главный момент внешних сил относительно оси гироскопа равен нулю, то есть  $M_z = \bar{M}_0 \bar{k} = 0$ .

Тогда из третьего уравнения Эйлера (16.2.6) получим  $\omega_z = \bar{\omega} \cdot \bar{k} = const$  (рис. 16.9).

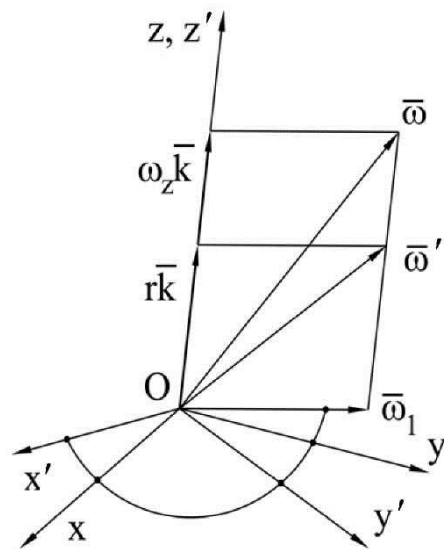


Рис. 16.9

Оси  $Oxyz$  считаются связанными с телом. Проекция угловой скорости  $\bar{\omega}$  на плоскость  $Oxy$  будет:

$$\bar{\omega}_1 = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j}.$$

Следовательно,  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \omega_z \bar{k}$ .

Момент количества движения тела относительно точки  $O$  с учетом равенства  $J_1 = J_2$ :

$$\bar{L}_0 = J_1 \bar{\omega}_1 + J_3 \omega_z \bar{k}. \quad (16.5.1)$$

Наряду с системой осей  $Oxyz$ , неизменно связанной с телом, введем систему осей  $Ox'y'z'$ , вращающуюся с угловой скоростью  $\bar{\omega}' = \bar{\omega}_1 + r\bar{k}$  (рис. 16.9).

При  $r = \omega_z$  получаем систему осей, связанную с телом, то есть  $\bar{\omega}' = \bar{\omega}$ .

Пользуясь теоремой об относительной производной, найдем производную  $\frac{d\bar{L}_0}{dt}$  в системе осей  $Ox'y'z'$  (см. (16.2.2)):

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \frac{d'\bar{L}_0}{dt} + \bar{\omega}' \times \bar{L}_0 = J_1 \left( \frac{d'\bar{\omega}_1}{dt} + \bar{\omega}' \times \bar{\omega}_1 \right) + J_3 \omega_z \left( \frac{d'\bar{k}}{dt} + \bar{\omega}' \times \bar{k} \right).$$

Здесь  $\bar{\omega}' \times \bar{\omega}_1 = (\bar{\omega}_1 + r\bar{k}) \times \bar{\omega}_1 = r(\bar{k} \times \bar{\omega}_1)$ ,  $\frac{d'\bar{k}}{dt} = 0$ , так как единичный орт оси  $z$  является неизменным в системе осей  $Ox'y'z'$ .

Следовательно,

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = J_1 \frac{d'\bar{\omega}_1}{dt} + (J_3 \omega_z - J_1 r)(\bar{\omega}_1 \times \bar{k}).$$

Учитывая, что  $\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{M}_0$ , получаем:

$$J_1 \frac{d'\bar{\omega}_1}{dt} + (J_3 \omega_z - J_1 r)(\bar{\omega}_1 \times \bar{k}) = \bar{M}_0. \quad (16.5.2)$$

При  $r = \omega_z$  из (16.5.2), спроектировав на оси  $x, y$ , получим два первых уравнения Эйлера.

В ряде случаев при рациональном выборе величины  $r$  можно существенно упростить уравнения динамики

## 16.6. Регулярная прецессия симметричного тела

Рассмотрим быстро вращающееся симметричное относительно оси  $z$  твердое тело. Будем считать, что вектор угловой скорости собственного вращения  $\bar{\omega}_0$  имеет постоянную величину, а вектор угловой прецессии  $\bar{\omega}' = \bar{\omega}^*$  постоянную величину и направление (рис. 16.10).



Оси  $Ox'y'z'$  отстают от осей, связанных с телом, на величину угловой скорости собственного вращения  $\omega_0$ . Таким образом, полная угловая скорость осей  $Ox'y'z'$  равна угловой скорости прецессии  $\bar{\omega}^*$ .

Обозначим через  $\bar{k}$  и  $\bar{k}^*$  единичные векторы, имеющие направление собственного вращения  $\bar{\omega}_0$  и прецессии  $\bar{\omega}^*$ . Тогда  $\bar{\omega}_0 = \omega_0 \bar{k}$ ,  $\bar{\omega}^* = \omega^* \bar{k}^*$ .

Вектор  $\bar{k}^*$  – единичный вектор, имеющий неизменное направление. Вектор  $\bar{k}$  вращается с угловой скоростью  $\bar{\omega}^*$ . Поэтому скорость конца вектора  $\bar{k}$  будет:

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = \omega_0^* \times \bar{k}.$$

Угловая скорость тела, совершающего регулярную прецессию, по теореме сложения угловых скоростей вокруг пересекающихся осей равна:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}^*.$$

Ее проекция на ось собственного вращения

$$\omega_z = \bar{\omega} \cdot \bar{k} = \omega_0 + \bar{\omega}^* \cdot \bar{k} = \omega_0 + \omega^* \cos \vartheta.$$

Эта проекция постоянна, так как  $\omega_0 = const$ ,  $\omega = const$ ,  $\vartheta = const$ .

Поперечная составляющая угловой скорости

$$\bar{\omega}_1 = \bar{\omega} - \omega_z \bar{k} = \bar{\omega}^* - \omega^* \cos \vartheta \bar{k}.$$

Вектор  $\bar{\omega}^*$  имеет постоянную величину. Поэтому в уравнении (16.5.2) первое слагаемое  $J_1 \frac{d'\bar{\omega}_1}{dt} = 0$ . Оси  $Ox'y'z'$  вращаются с угловой скоростью прецессии. Это полная их угловая скорость, поэтому  $\bar{\omega}' = \bar{\omega}^*$ .

Следовательно,  $\omega_z = \omega_0 + \omega^* \cos \vartheta$ ;  $r = \omega^* \cos \vartheta$ .

Тогда второе слагаемое в уравнении (16.5.2) будет:

$$\begin{aligned} & [J_3(\omega_0 + \omega^* \cos \vartheta) - J_1 \omega^* \cos \vartheta] (\bar{\omega}^* - \omega^* \cos \vartheta \bar{k}) \times \bar{k} = \\ & = J_3 \omega_0 \left( 1 + \frac{J_3 - J_1}{J_3} \frac{\omega^*}{\omega_0} \cos \vartheta \right) \bar{\omega}^* \times \bar{k}. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\omega_0 \bar{k} = \bar{\omega}_0$ , получим:

$$J_3 \bar{\omega}^* \times \bar{\omega}_0 \left( 1 + \frac{J_3 - J_1}{J_3} \frac{\omega^*}{\omega_0} \cos \vartheta \right) = \bar{M}_0. \quad (16.6.1)$$

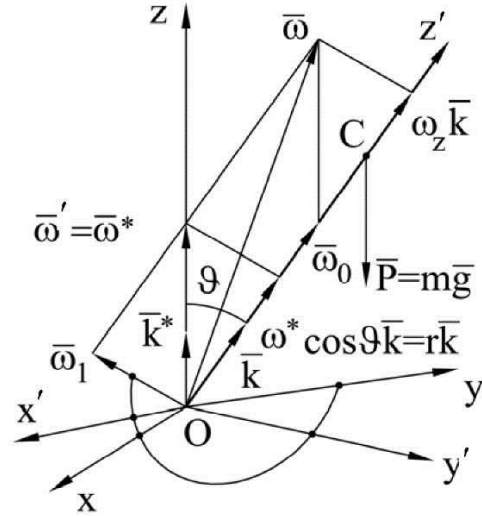


Рис. 16.10

Если  $\bar{\omega}_0$  весьма велико, то из (16.6.1) получим уравнение приближенной теории (16.1.4)  $\frac{d\bar{L}_0}{dt} \approx J_3 \bar{\omega}^* \times \bar{\omega}_0 = \bar{M}_0$ , откуда следует

$$J_3 \omega_0 \omega^* \sin \vartheta = mgl \sin \vartheta.$$

Определим условия, когда имеет место регулярная прецессия гироскопа. Пусть  $\bar{P}$  – вес гироскопа,  $l$  – расстояние центра тяжести до точки опоры. Угол между  $\bar{\omega}_0$  и  $\bar{\omega}^*$  равен  $\vartheta$ , поэтому

$$M_0 = Pl \sin \vartheta \text{ и } |\bar{\omega}^* \times \bar{\omega}_0| = \omega^* \omega_0 \sin \vartheta.$$

Следовательно, из (16.6.1) получим:

$$J_3 \omega_0 \omega^* + (J_3 - J_1) \omega^{*2} \cos \vartheta = Pl. \quad (16.6.2)$$

Выражение (16.6.2) представляет собой квадратное уравнение относительно  $\omega^*$ . Его корни представляют собой значения угловой скорости прецессии:

$$\omega^* = \frac{-J_3 \omega_0 \pm \sqrt{J_3^2 \omega_0^2 + 4Pl(J_3 - J_1) \cos \vartheta}}{2(J_3 - J_1) \cos \vartheta}. \quad (16.6.3)$$

Регулярная прецессия возможна, если

$$J_3^2 \omega_0^2 + 4Pl(J_3 - J_1) \cos \vartheta > 0.$$

Пусть угловая скорость  $\omega_0$  достаточна велика. Тогда представляя корень в (16.6.3) в виде ряда

$$J_3 \omega_0 \sqrt{1 + \frac{4Pl(J_3 - J_1) \cos \vartheta}{J_3^2 \omega_0^2}} = J_3 \omega_0 \left( 1 + \frac{2Pl(J_3 - J_1) \cos \vartheta}{J_3^2 \omega_0^2} + \dots \right),$$

получим

$$\omega_1^* = \frac{Pl}{J_3 \omega_0}; \quad \omega_2^* = \frac{J_3 \omega_0}{(J_3 - J_1) \cos \vartheta}.$$

Угловая скорость  $\omega_1^*$  соответствует медленной скорости прецессии. Значение  $\omega_1^*$  получается из приближения теории. Другой корень соответствует быстрой прецессии.

### 16.7 Уравнения движения гироскопа на подвижном основании

Центр инерции гироскопа расположим в точке пересечения осей карданова подвеса. Для вывода уравнений движения воспользуемся векторным уравнением (16.5.2), которое справедливо при подвижном центре инерции, если начало координат расположить в этом центре (рис. 16.11).

Оси  $Cx_1y_1z_1$  неизменно свяжем с основанием. Вектор угловой скорости вращения основания и, следовательно, осей  $Cx_1y_1z_1$  обозначим через  $\bar{\Omega}$ . Ось  $Cz_1$  этой системы будем считать направленной по оси вращения наружного кольца карданова подвеса.

Вторую систему, связанную с подвижными осями, определим так: ось  $Cx$  направлена по оси внутреннего кольца; ее положение определяется углом  $\psi$ , отсчитываемым от оси  $Cx_1$  вокруг оси  $Cz_1$ . Ось  $Cz$  направлена по оси вращения ротора. Ее направление задается углом  $\vartheta$ , отсчитываемым вокруг оси  $Cx$ . Ось  $Cy$  перпендикулярна плоскости  $Czx$ . Поворот ротора задается углом  $\phi$ . Углы  $\psi, \vartheta, \phi$  – это Эйлеровы углы прецессии, нутации и собственного вращения. Ось вращения внутреннего кольца  $Cx$  является линией узлов. На рис. 16.11  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ , поэтому оси  $y$  и  $z_1$  совпадают.

Обозначим через  $\bar{n}, \bar{n}', \bar{k}$  единичные орты осей  $Cx, Cy$  и  $Cz$ . Орт  $\bar{n}_1$  перпендикулярен линии узлов  $Cx$  и расположен в плоскости  $Cx_1y_1$  под углом  $\psi + \frac{\pi}{2}$  к оси  $Cx_1$ . Орт наружного кольца  $Cz_1$  обозначим через  $\bar{k}^*$ . Очевидно,

$$\bar{k}^* = \bar{k} \cos \vartheta + \bar{n}' \sin \vartheta. \quad (16.7.1)$$

Оси  $Cxyz$  отстают от осей, связанных с ротором, на величину угловой скорости собственного вращения  $\bar{k}\dot{\phi} = \bar{k}\omega_0$ . Поэтому их угловая скорость относительно абсолютно неподвижной системы определяется соотношением (рис. 16.12)

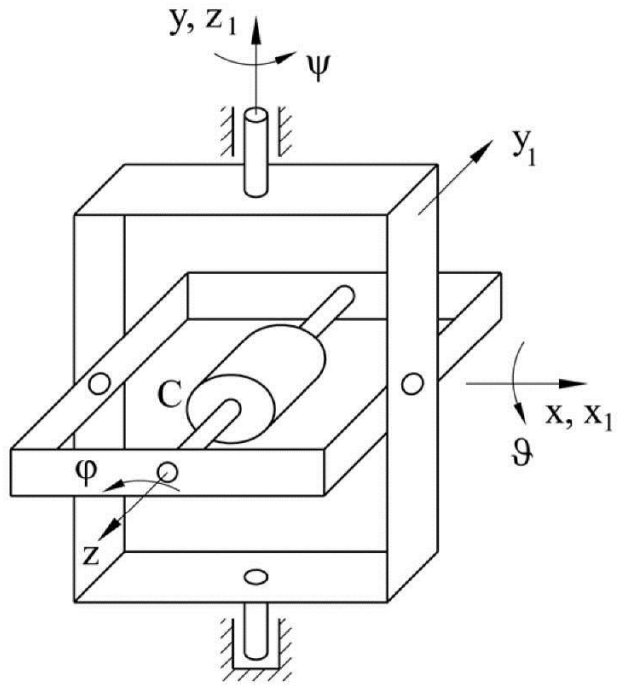


Рис. 16.11

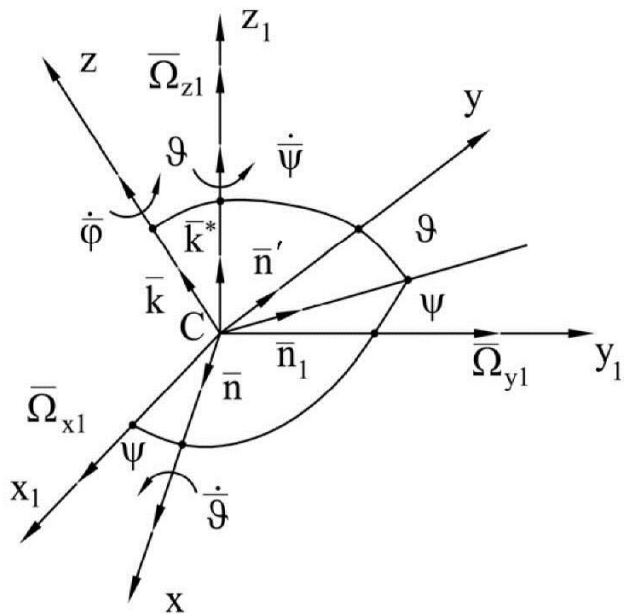


Рис. 16.12

$$\bar{\omega}' = \bar{\Omega} + \bar{k} * \dot{\psi} + \bar{n} \dot{\vartheta}. \quad (16.7.2)$$

Угловая скорость ротора  $\bar{\omega}$  отличается от  $\bar{\omega}'$  слагаемым  $\bar{k} \dot{\varphi}$ , поэтому

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}' + \bar{k} \dot{\varphi}. \quad (16.7.3)$$

Ранее было получено уравнение (16.5.2) динамики гироскопа. Здесь роль точки О играет центр инерции. Поэтому

$$J_1 \frac{d' \bar{\omega}_1}{dt} + (J_3 \omega_z - J_1 r) \bar{\omega}_1 \times \bar{k} = \bar{M}_C. \quad (16.7.4)$$

Остается вычислить величины, входящие в уравнение (16.7.4). Согласно (16.7.1) и (16.7.2), получаем выражения для  $r$ :

$$r = \bar{\omega}' \bar{k} = \bar{\Omega} \bar{k} + \dot{\psi} \bar{k} * \bar{k} = \Omega_z + \dot{\psi} \cos \vartheta.$$

Из (16.7.3) получаем  $\omega_z$ :

$$\omega_z = \bar{\omega} \cdot \bar{k} = r + \dot{\varphi}.$$

Проекция угловой скорости осей  $Cxyz$  на плоскость  $Cxy$ , перпендикулярная оси вращения ротора  $Cz$ , равна

$$\bar{\omega}_1 = (\Omega_x + \dot{\vartheta}) \bar{n} + (\Omega_y + \dot{\psi} \sin \vartheta) \bar{n}'.$$

Это поперечная составляющая угловой скорости  $\bar{\omega}'$ . Здесь предполагается, что проекции угловой скорости вращения основания  $\Omega_x$  и  $\Omega_y$  на оси  $x$  и  $y$  известны.

В уравнение (16.7.4) входит векторное произведение  $\bar{\omega}_1 \times \bar{k}$ :

$$\bar{\omega}_1 \times \bar{k} = (\Omega_x + \dot{\vartheta}) \bar{n} \times \bar{k} + (\Omega_y + \dot{\psi} \sin \vartheta) \bar{n}' \times \bar{k}.$$

Здесь  $\bar{n} \times \bar{k} = -\bar{n}'$ ;  $\bar{n}' \times \bar{k} = \bar{n}$ .

Поэтому

$$\bar{\omega}_1 \times \bar{k} = -(\Omega_x + \dot{\vartheta}) \bar{n}' + (\Omega_y + \dot{\psi} \sin \vartheta) \bar{n}.$$

Найдем

$$J_3 \omega_z - J_1 r = J_3 (r + \dot{\varphi}) - J_1 r = J_3 \dot{\varphi} + (J_3 - J_1) (\Omega_z + \dot{\psi} \cos \vartheta).$$

Подставим соответствующие величины в уравнение (16.7.4) и спроектируем на оси  $Cx$  и  $Cy$ :

$$J_1 \frac{d}{dt} (\Omega_x + \dot{\vartheta}) + [J_3 \dot{\varphi} + (J_3 - J_1) (\Omega_z + \dot{\psi} \cos \vartheta)] (\Omega_y + \dot{\psi} \sin \vartheta) = M_{Cx}; \quad (16.7.5)$$

$$J_1 \frac{d}{dt} (\Omega_y + \dot{\psi} \sin \vartheta) - [J_3 \dot{\varphi} + (J_3 - J_1) (\Omega_z + \dot{\psi} \cos \vartheta)] (\Omega_x + \dot{\vartheta}) = M_{Cy}.$$

Уравнения (16.7.5) представляют уравнения динамики гироскопа на подвижном основании и являются основой для исследования гироскопических приборов и устройств.

В этих уравнениях  $M_{Cx}$  – главный момент внешних сил относительно оси вращения внутреннего кольца;  $M_{Cy}$  – главный момент внешних сил относительно перпендикулярного к оси вращения ротора направления.

В уравнения (16.7.5) входят проекции угловой скорости вращения основания  $\Omega$  на оси  $Cxyz$ . Вектор  $\bar{\Omega}$  через известные проекции  $\Omega_{x_1}, \Omega_{y_1}, \Omega_{z_1}$  в осях  $Cx_1y_1z_1$  представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} &= (\Omega_{x_1} \cos \psi + \Omega_{y_1} \sin \psi) \bar{n} + \\ &+ [(-\Omega_{x_1} \sin \psi + \Omega_{y_1} \cos \psi) \cos \vartheta + \Omega_{z_1} \sin \vartheta] \bar{n}' + \\ &+ [-(\Omega_{x_1} \sin \psi + \Omega_{y_1} \cos \psi) \sin \vartheta + \Omega_{z_1} \cos \vartheta] \bar{k}. \end{aligned} \quad (16.7.6)$$

Для того, чтобы получить выражение (16.7.6), необходимо каждую составляющую  $\Omega_{x_1}, \Omega_{y_1}, \Omega_{z_1}$  последовательно спроектировать на оси  $Cxyz$ .

### 16.8. Гиротахометр (датчик угловых скоростей)

Если закрепить наружное кольцо относительно основания и совместить его ось  $Cz$  с осью вращения, то  $\psi = 0, \Omega_{x_1} = 0$  (рис. 16.13).

Оси  $x$  и  $x_1$  совмещены, ось  $y_1$  направлена противоположно оси  $z$ . Угол  $\vartheta$  в начальном положении рамки, показанной на рис. 16.13, равен  $\frac{\pi}{2}$ .

Оси  $Cx_1y_1z_1$  связаны с основанием. Вектор угловой скорости основания  $\bar{\Omega}$  направлен вдоль оси  $z_1$ , поэтому  $\Omega_{x_1} = \Omega_{y_1} = 0$  и, кроме того, поскольку ось рамки  $x$  перпендикулярна  $z_1$ , то  $\Omega_x = 0$ . Угол  $\vartheta$  будем считать мало отличающимся от  $\frac{\pi}{2}$ :

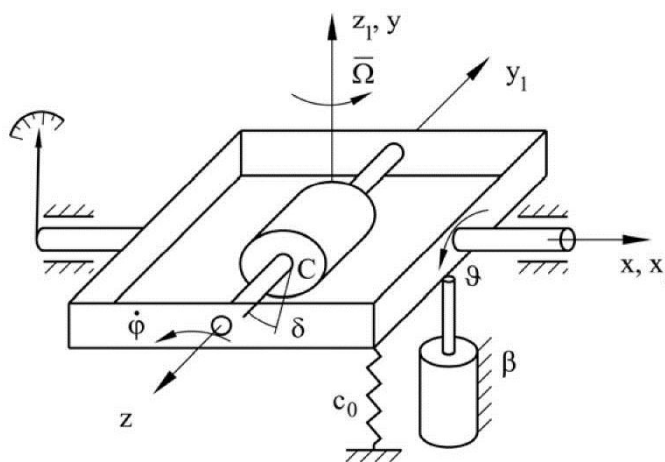


Рис. 16.13

где  $\delta$  – малая величина. Тогда

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} + \delta,$$

где  $\delta$  – малая величина. Тогда

$$\sin \vartheta \approx \cos \delta \approx 1.$$

Кроме того, здесь  $\psi = 0$ , так как ось закреплена от поворота по отношению к основанию.

Согласно общим зависимостям:

$$\Omega_y = \Omega_{z_1} \sin \vartheta = \Omega \sin \vartheta;$$

$$\Omega_z = \Omega_{z_1} \cos \vartheta = \Omega \cos \vartheta,$$

где  $\Omega$  – измеряемая угловая скорость основания.

Воспользуемся первым уравнением (16.7.5) для гироскопа на подвижном основании:

$$J_1 \ddot{\vartheta} + [J_3 \dot{\phi} + (J_3 - J_1) \Omega \cos \vartheta] \Omega \sin \vartheta = M_{C\kappa}. \quad (16.8.1)$$

В уравнении (16.8.1) учтено, что

$$\Omega_x = 0 \text{ и } \dot{\psi} = 0.$$

Угловая скорость собственного вращения  $\dot{\phi} = \omega_0$  существенно больше угловой скорости основания, то есть

$$|\dot{\phi}| \gg \Omega.$$

Поэтому из (16.8.1) получаем

$$J_1 \ddot{\vartheta} + J_3 \dot{\phi} \Omega = M_{C\kappa}. \quad (16.8.2)$$

Чтобы получить измерительный прибор, присоединим к внутреннему кольцу пружину и демпфер. Тогда

$$M_{C\kappa} = -c\delta - \beta\dot{\delta}, \quad (16.8.3)$$

где  $c$  – жесткость кольца при повороте;

$\beta$  – коэффициент демпфирования.

Величины  $c$  и  $\beta$  находятся по формулам:

$$c = c_0 h_1^2, \quad \beta = b h_2^2,$$

где  $c_0$  – линейная жесткость пружины;

$h_1$  – плечо упругой силы по отношению к оси  $x$ ;

$b$  – коэффициент сопротивления при движении поршня в демпфере;

$h_2$  – плечо демпфирующей силы по отношению к оси  $x$ .

Подставляя (16.8.3) в (16.8.2) с учетом того, что  $\vartheta = \frac{\pi}{2} + \delta$ , получим

$$J_1 \ddot{\delta} + \beta \dot{\delta} + c\delta = -J_3 \dot{\phi} \Omega$$

или

$$\ddot{\delta} + 2n\dot{\delta} + k^2\delta = -H\Omega, \quad (16.8.4)$$

где

$$2n = \frac{\beta}{J_1}; \quad k = \sqrt{\frac{c}{J_1}}; \quad H = \frac{J_3 \dot{\phi}}{J_1},$$

при достаточно высокой собственной частоте прибора  $k$  свободные колебания быстро затухают, и мы получаем из (16.8.4)

$$\delta = -\frac{H\Omega}{k^2} = -\frac{J_3 \dot{\phi}}{J_1 k^2} \Omega$$

или

$$\Omega = -\frac{c}{J_3 \dot{\phi}} \delta.$$

Следовательно, в некоторых пределах отклонение стрелки прибора пропорционально угловой скорости основания.

## 16.9. Гироскопы Фуко

Пусть подвижным основанием гироскопа является Земля (рис. 16.14). Расположим ось вращения наружного кольца гироскопа  $Cz_1$  по вертикали места, а ось  $Cx_1$  по горизонтали на север; ось  $Cy_1$  будет находиться в той же плоскости и окажется направленной на Запад.

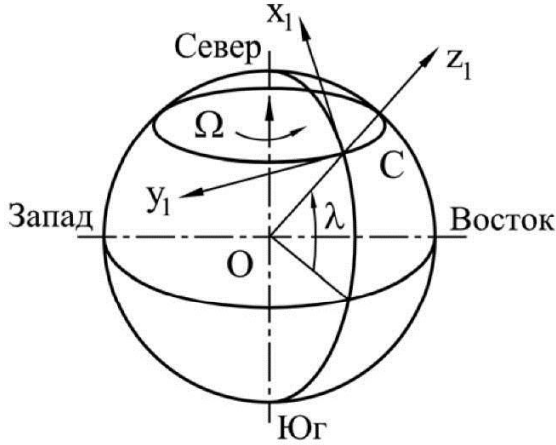


Рис. 16.14

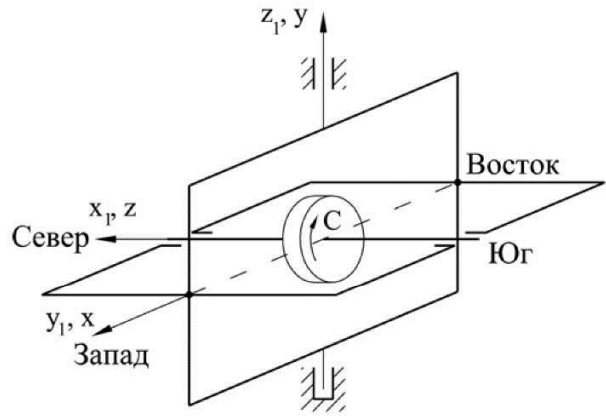


Рис. 16.15

Тогда проекции угловой скорости основания на оси  $(x_1, y_1, z_1)$  будут:

$$\Omega_{x_1} = \Omega \cos \lambda; \quad \Omega_{y_1} = 0; \quad \Omega_{z_1} = \Omega \sin \lambda, \quad (16.9.1)$$

где  $\Omega$  – угловая скорость Земли;  $\lambda$  – северная широта места.

В гироскопе Фуко первого рода внутреннее кольцо жестко связано с наружным так, что оно находится в плоскости горизонта. Следовательно,  $\vartheta = \pi / 2$  (рис. 16.15). Поэтому ось ротора гироскопа  $Cz$  тоже остается в этой же плоскости.

Когда ось располагается в плоскости меридиана, угол  $\psi$  равен  $\pi / 2$ , а ось  $Cx$  направлена на запад. Обозначим через  $\chi$  угол отклонения оси гироскопа  $Cz$  от плоскости меридиана (рис. 16.16).

Тогда угол прецессии  $\psi$  будет  $\psi = \pi / 2 + \chi$ , при этом, согласно (16.9.1),

$$\begin{aligned} \Omega_x &= -\Omega \cos \lambda \sin \chi; \quad \Omega_y = \Omega \sin \lambda; \\ \Omega_z &= \Omega \cos \lambda \cos \chi. \end{aligned} \quad (16.9.2)$$

Если пренебречь силами трения в подшипниках наружного кольца, то следует считать, что

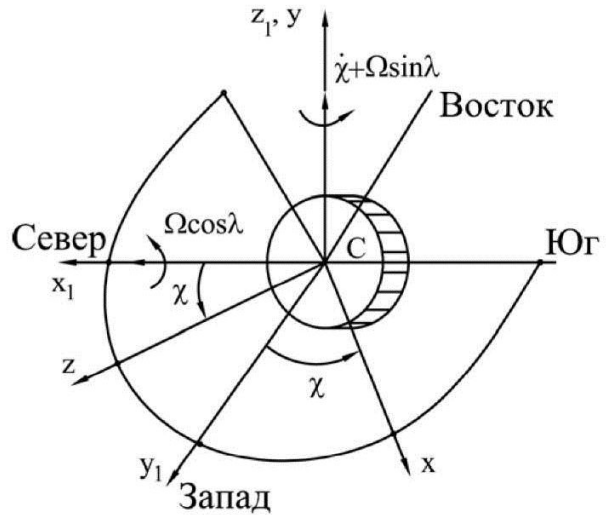


Рис. 16.16



$$M_{Cy} = 0.$$

И, поскольку внутреннее кольцо закреплено, то момент  $M_{Cx}$  найдется из первого уравнения (16.7.5):

$$M_{Cx} = -J_1 \dot{\chi} \Omega \cos \lambda \cos \chi + \\ + [J_3 \dot{\phi} + (J_3 - J_1) \Omega \cos \lambda \cos \chi] (\Omega \sin \lambda + \dot{\chi}).$$

Второе уравнение (16.7.5) приводится к виду:

$$J_1 \ddot{\chi} + [J_3 \dot{\phi} + (J_3 - J_1) \Omega \cos \lambda \cos \chi] \cdot \\ \cdot (\Omega \cos \lambda \sin \chi) = 0.$$

Учитывая, что  $\dot{\phi} \gg \Omega$ , это уравнение можно упростить:

$$J_1 \ddot{\chi} + J_3 \dot{\phi} \Omega \cos \lambda \sin \chi = 0. \quad (16.9.3)$$

Если  $\dot{\phi} > 0$ , то есть вращение ротора происходит в ту же сторону, что и вращение Земли, то уравнение (16.9.3) представляет уравнение колебаний маятника вокруг положения равновесия. При этом, если  $\chi$  мало, то период колебаний будет

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{J_3 \dot{\phi} \Omega \cos \lambda}}. \quad (16.9.4)$$

При  $\dot{\phi} < 0$  положение  $\chi = 0$  соответствует неустойчивому вертикальному положению маятника. В подобной ситуации ось гироскопа должна опрокинуться в положение  $\chi = \pi$ , причем конец вектора  $\bar{k} \dot{\phi}$  должен быть направлен снова на север.

Следовательно, гироскоп Фуко первого рода позволяет в принципе устанавливать плоскость меридиана.

В гироскопе Фуко второго рода (рис. 16.17) наружное кольцо закреплено.

Ось вращения внутреннего кольца  $Cx$  направляется на Запад перпендикулярно к плоскости меридиана. Угол  $\psi = \pi / 2$ . Ось вращения ротора  $Cz$ , находясь в плоскости меридиана, имеет возможность вращаться вокруг оси внутреннего кольца. Угол между вектором угловой скорости Земли  $\Omega$  и осью собственного вращения гироскопа обозначим через  $\delta$ .

Тогда (рис. 16.18)

$$\vartheta + \lambda - \delta = \pi / 2.$$

Найдем проекции угловой скорости основания  $\bar{\Omega}$  на оси  $(x, y, z)$ :

$$\Omega_x = 0; \Omega_y = \Omega \sin \delta; \Omega_z = \Omega \cos \delta. \quad (16.9.5)$$

По первому уравнению (16.7.5) согласно (16.9.5) получаем:

$$J_1 \ddot{\delta} + [J_3 \dot{\phi} + (J_3 - J_1) \Omega \cos \delta] \Omega \sin \delta = 0. \quad (16.9.6)$$

При  $\dot{\phi} \gg \Omega$  из (16.9.6) получаем уравнения типа уравнения колебаний маятника:

$$J_1 \ddot{\delta} + J_3 \dot{\phi} \Omega \sin \delta = 0. \quad (16.9.7)$$

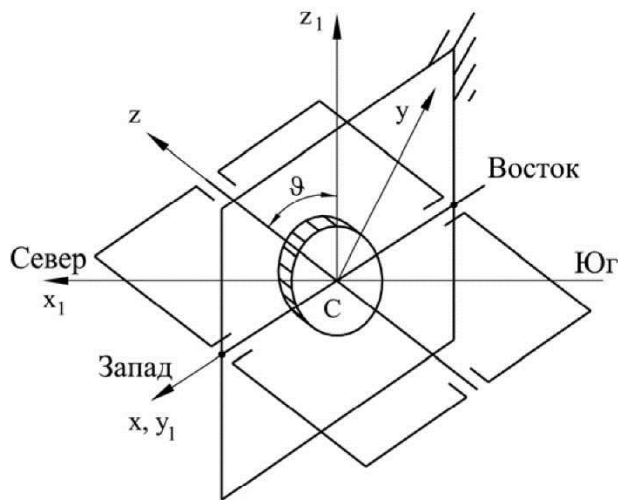


Рис. 16.17

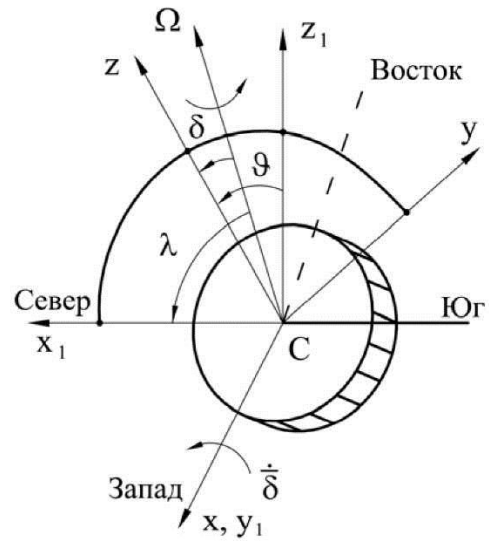


Рис. 16.18

Откуда получаем формулу для периода малых колебаний, который не зависит от широты места:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{J_3 \dot{\phi} \Omega}}. \quad (16.9.8)$$

Согласно (16.9.7) ось гироскопа располагается параллельно оси вращения Земли и, таким образом, возникает возможность, измеряя угол между плоскостью гироскопа и вертикалью, определить широту места. Однако на практике влияние моментов сил трения оказывается весьма велико. Кроме того, существенную роль могут оказать несовершенства ротора гироскопа, а именно, несовпадение точки пересечения осей  $Cx$ ,  $Cy$ ,  $Cz$  с центром тяжести ротора. Это приводит к существенным погрешностям. Поэтому при создании гирокомпасов на основе первоначальной идеи гироскопов Фуко пришлось ввести ряд новых принципов, а именно, жидкостные и электромагнитные опоры, оптический съём сигнала.

Пусть ротор гироскопа вращается, например, в электростатическом подвесе и свобода поворота собственной оси вращения ничем не ограничена.

Воспользуемся уравнением динамики гироскопа вокруг точки на его оси симметрии (16.5.2):

$$J_1 \frac{d'\bar{\omega}_1}{dt} + (J_3 \omega_z - J_1 r)(\bar{\omega}_1 \times \bar{k}) = \bar{M}_0,$$

здесь  $\bar{\omega}_1$  – поперечная составляющая угловой скорости ротора.

В данном случае можно считать, что  $\bar{M}_0 = 0$ .

Пусть величина  $r = \omega_z - \dot{\phi}$ , тогда

$$J_3 \omega_z - J_1 r = (J_3 - J_1) \omega_z + J_1 \dot{\phi}.$$

$\omega_z$  – проекция угловой скорости ротора на ось  $z$ ;

$r$  – проекция угловой скорости осей, отстающих от осей, связанных с ротором, на величину угловой скорости собственного вращения  $\dot{\phi}$ .

Из уравнения (16.5.2) получаем:

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_{1x} + [(J_3 - J_1)\omega_z + J_1 \dot{\phi}] \omega_{1y} &= 0; \\ J_1 \dot{\omega}_{1y} + [(J_3 - J_1)\omega_z + J_1 \dot{\phi}] \omega_{1x} &= 0. \end{aligned} \quad (16.9.9)$$

Введем в рассмотрение комплексную переменную

$$U = \omega_{1x} + i\omega_{1y}.$$

Поделим оба уравнения на  $J_1$ . Затем умножим второе уравнение на  $i = \sqrt{-1}$  и сложим его с первым.

В итоге получим уравнение первого порядка:

$$\dot{U} - i\left(\frac{J_3 - J_1}{J_1} \omega_z + \dot{\phi}\right)U = 0. \quad (16.9.10)$$

Общее решение этого уравнения (16.9.10)

$$U = U_0 e^{i\left(\frac{J_3 - J_1}{J_1} \omega_z + \dot{\phi}\right)t}$$

Следовательно, вектор поперечной угловой скорости  $\bar{\omega}_1$  совершает колебания с частотой:

$$k = \dot{\phi} + \frac{J_3 - J_1}{J_1} \omega_z.$$

При большой угловой скорости собственного вращения

$$|\dot{\phi}| \gg |\omega_z - \dot{\phi}|.$$

Поэтому

$$k \approx \frac{J_3}{J_1} \omega_z \approx \frac{J_3}{J_1} \dot{\phi}.$$

Если ротором является шар, то  $J_3 = J_1$  и, следовательно,

$$k \approx \dot{\phi}.$$

При малом возмущении и большой угловой скорости собственного вращения ротор гироскопа сохраняет в среднем начальное направление неизменным, совершая относительно его малые колебания.

## 17. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

### 17.1. Работа силы. Мощность

Работа силы является мерой действия на материальную точку на протяжении пути, ею пройденного.

*Если материальная точка движется прямолинейно (рис. 17.1) и к ней приложена постоянная по величине и направлению сила  $\vec{F}$ , то работа  $A$  находится по формуле*

$$A = Fs \cos \alpha, \quad (17.1.1)$$

где  $s$  – путь, пройденный силой;

$\alpha$  – угол между линией действия силы и направлением движения.

На рис. 17.1 путь материальной точки – это прямолинейный отрезок  $\overline{M_1M_2} = \vec{s}$ . Вспоминая формулу для скалярного произведения векторов, вместо (17.1.1) можно написать:

$$\begin{aligned} A &= Fs \cos \alpha = \\ &= \vec{F} \cdot \vec{s} = F_x s_x + F_y s_y + F_z s_z, \end{aligned} \quad (17.1.2)$$

где  $F_x, F_y, F_z$  – проекции силы  $\vec{F}$  на оси координат;

$s_x, s_y, s_z$  – проекции перемещения  $\vec{s}$ .

Рассмотренное определение работы для постоянной силы, действующей на прямолинейном участке пути, допускает обобщение на случай криволинейного движения при действии переменной силы.

Рассмотрим бесконечно малое перемещение  $M_1M = ds$  (рис. 17.2).

Дуге  $ds$  соответствует приращение радиус-вектора  $d\vec{r}$ . При этом  $ds = |d\vec{r}| = dr$ , то есть бесконечно малая дуга эквивалентна хорде. На бесконечно малом перемещении  $ds$  силу  $\vec{F}$  можно считать постоянной по величине и направлению.

Будем называть работу силы  $\vec{F}$  на бесконечно малом перемещении элементарной работой и обозначим  $d'A$ . Воспользовавшись определением скалярного произведения векторов, получаем:

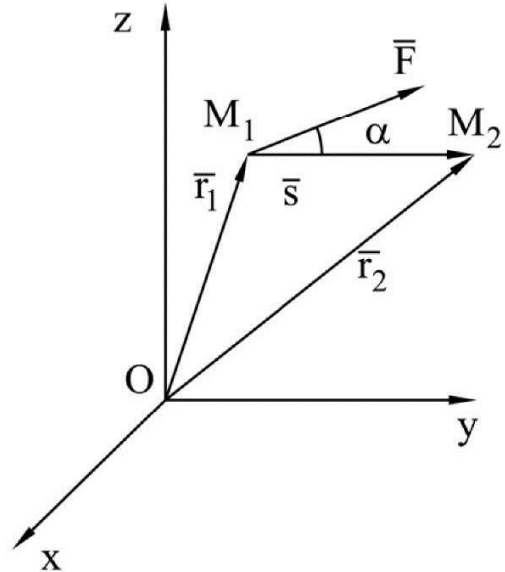


Рис. 17.1

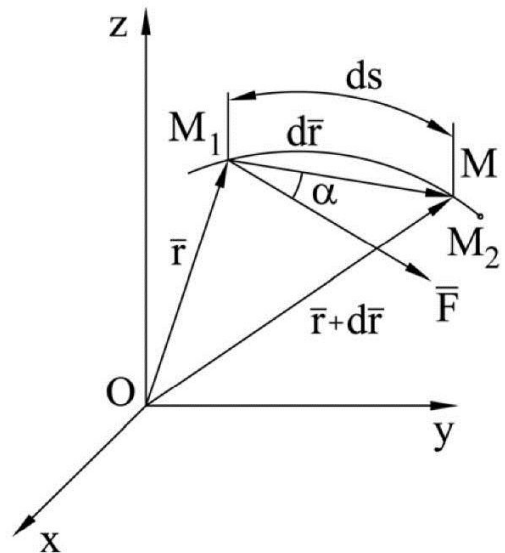


Рис. 17.2

$$d'A = F ds \cos \alpha = F dr \cos \alpha = \vec{F} d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (17.1.3)$$

Штрих в обозначении элементарной работы означает, что она не всегда имеет структуру полного дифференциала.

Работа силы на конечном участке пути  $M_1 M_2$  представляет собой сумму элементарных работ, определяемых формулой (17.1.3):

$$A = \int_{M_1}^{M_2} d'A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{M_1}^{M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (17.1.4)$$

Следовательно, работа силы представляет собой криволинейный интеграл, взятый по дуге кривой  $M_1 M_2$ .

Криволинейный интеграл (17.1.4) сводится к обыкновенному интегралу, если задана функция  $\vec{F} = \vec{F}(t)$ .

Действительно, учитывая, что  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$  и, следовательно,  $d\vec{r} = \vec{v} dt$ , вместо (17.1.4) получим

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{t_0}^t \vec{F} \vec{v} dt. \quad (17.1.5)$$

Выражение (17.1.5) представляет собой уже обыкновенный интеграл по времени.

Из определения работы следует, что работа равнодействующей силы на каком-либо перемещении равна алгебраической сумме работ составляющих сил на том же перемещении.

Кроме того, работа силы на полном перемещении равна сумме работ этой же силы на составляющих перемещениях, на которые разбито перемещение.

**Работа, которую может совершить сила за единицу времени, называется мощностью.**

Таким образом, мощность характеризует работоспособность какого-либо источника силы.

Следовательно, мощность может быть определена по формуле:

$$N = \frac{d'A}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z. \quad (17.1.6)$$

То есть **мощность равна скалярному произведению силы на скорость точки**. При этом, чем больше скорость, тем меньше сила при одной и той же мощности.

## 17.2. Примеры вычисления работы силы

### Работа силы тяжести материальной точки и системы материальных точек

Силу тяжести  $\vec{P}$  материальной точки  $m$  вблизи поверхности Земли можно считать постоянной и направленной по вертикали вниз.

Пусть ось  $z$  направлена вверх (рис. 17.3). Тогда  $P_x = 0$ ;  $P_y = 0$ ;  $P_z = -P = -mg$ .

Найдем работу:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} (P_x dx + P_y dy + P_z dz) = -mg \int_{M_1}^{M_2} dz = -mg(z_2 - z_1) = mgh, \quad (17.2.1)$$

где  $h = z_1 - z_2$  – высота опускания точки.

Следовательно, работа силы тяжести положительна при опускании точки и отрицательна при подъеме.

В случае системы материальных точек работа сил тяжести представляет собой сумму работ для отдельных точек:

$$A = g \left( \sum_{i=1}^N m_i z_{i1} - \sum_{i=1}^N m_i z_{i2} \right). \quad (17.2.2)$$

Согласно определению центра масс

$$\sum_{i=1}^N m_i z_{i1} = mz_{c1}, \quad \sum_{i=1}^N m_i z_{i2} = mz_{c2},$$

где  $m$  – масса системы;

$z_{c1}$  – начальное положение центра масс;  $z_{c2}$  – конечное положение центра масс.

Следовательно, формулу (17.2.2) можно переписать так:

$$A = mg(z_{c1} - z_{c2}) = mgh. \quad (17.2.3)$$

Здесь  $h$  – высота опускания центра масс материальной системы.

Таким образом, при вычислении работы сил тяжести, любую систему материальных точек можно рассматривать как материальную точку, которая находится в центре масс, при этом работа силы тяжести равна произведению массы системы на высоту опускания центра масс (17.2.3). В этом случае работа положительна. Если же центр масс поднимается, то работа сил тяжести системы будет отрицательной.

Как видно, работа силы тяжести не зависит от формы траектории и определяется только разностью уровней центра масс.

### Работа линейной упругой силы

Рассмотрим сначала случай, когда сила действует вдоль пружины. Пусть, например, упругая пружина расположена вдоль оси  $y$  и так же действует сила  $\bar{F}_y$  (рис. 17.4). Тогда упругая сила будет  $\bar{F}_{cy} = -c\bar{y}$ , где  $c$  – коэффициент жестко-

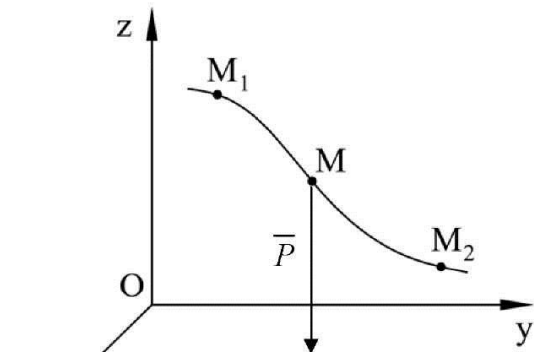


Рис. 17.3

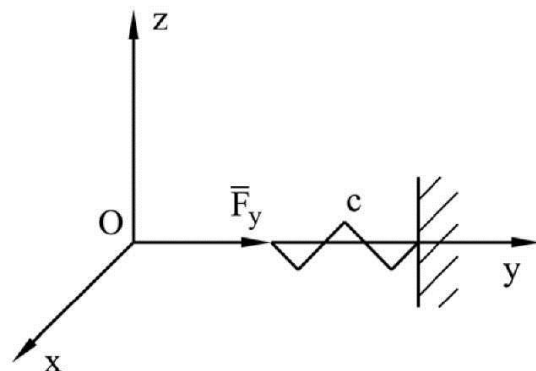


Рис. 17.4

сти пружины;  $\bar{y}$  – перемещение конца пружины из ненапряженного состояния или статического равновесия. Очевидно, элементарная работа упругой силы

$$d'A = dA = -cydy.$$

Интегрируя последнее соотношение в пределах  $y_1, y_2$ , найдем:

$$A = c \int_{y_1}^{y_2} ydy = \frac{-c(y_2^2 - y_1^2)}{2}. \quad (17.2.4)$$

Согласно (17.2.4) работа линейной упругой силы на перемещении из состояния статического равновесия всегда отрицательна:

$$A = -\frac{cy^2}{2}.$$

Если изобразить на графике зависимость силы  $\bar{F}_y$  как функцию перемещения  $y$ , то получим прямую, переходящую через начало координат (рис. 17.5).

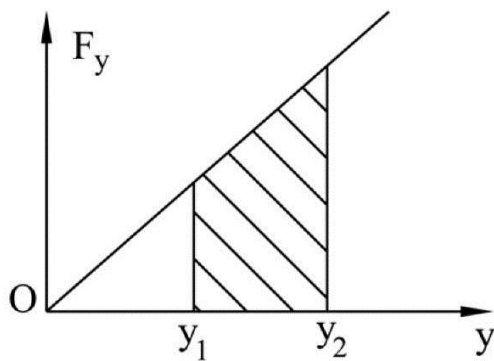


Рис. 17.5

При этом работа силы на участке  $(y_1, y_2)$  численно будет равна площади заштрихованной трапеции. Соответствующая работа упругой силы  $F_{cy}$  будет равна по величине и противоположна по знаку.

Рассмотрим более сложный случай. Пусть упругим элементом является круглый стержень, заделанный одним концом (рис. 17.6). Перемещения будем считать малыми, чтобы иметь линейную зависимость между силой  $\bar{F}$  и перемещением  $\bar{r}$ .

Тогда проекции упругой силы на оси  $x$  и  $y$  будут  $F_{cx} = -cx$ ,  $F_{cy} = -cy$ .

Жесткость стержня  $c$  находится по известной формуле сопротивления материалов:

$$c = \frac{3EJ}{l^3},$$

где  $E$  – модуль упругости;

$J$  – момент инерции относительно центральной оси сечения;

$l$  – длина стержня.

Элементарная работа будет

$$d'A = \bar{F}_c d\bar{r} = -c(xdx + ydy) = -c\bar{r} \cdot d\bar{r} = -cd\left(\frac{r^2}{2}\right).$$

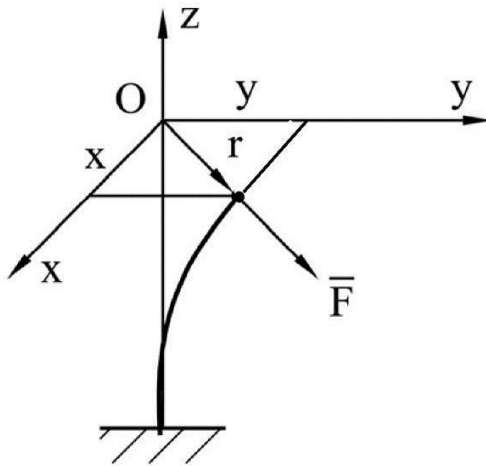


Рис. 17.6

Интегрируя последнее выражение, найдем:



$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_c d\vec{r} = -c \int_{r_1}^{r_2} d\left(\frac{r^2}{2}\right) = c \frac{(r_1^2 - r_2^2)}{2}. \quad (17.2.5)$$

В данном случае элементарная работа является полным дифференциалом, и поэтому работа не зависит от формы траектории. Кроме того, работа определяется разностью квадратов расстояний до центра стержня в начальном и конечном состоянии.

### Работа силы сухого трения

Сила сухого трения определяется силой нормального давления и противоположна по направлению скорости движения  $\vec{v}$ :

$$\vec{F}_\tau = -fN \text{sign} \vec{v},$$

где  $f$  – коэффициент трения скольжения;

$N$  – сила нормального давления;

$\text{sign} \vec{v} = \frac{\vec{v}}{v}$  – знак скорости скольжения  $v$  (рис. 17.7).

При движении вдоль оси  $x$  в положительном направлении

$$d'A = -fN dx.$$

Откуда следует, что

$$A = -fN(x_2 - x_1) = -fNs, \quad (17.2.6)$$

где  $x_2 - x_1 = s$  – путь, пройденный телом.

Если тело меняет направление движения, то меняется знак силы и знак перемещения. Поэтому вновь получается формула (17.2.6).

Вообще при вычислении работы силы сухого трения необходимо вычислить путь, пройденный телом, то есть разбить перемещение на участки его монотонного изменения и просуммировать. Затем воспользоваться формулой (17.2.6). Очевидно, работа силы сухого трения всегда отрицательна.

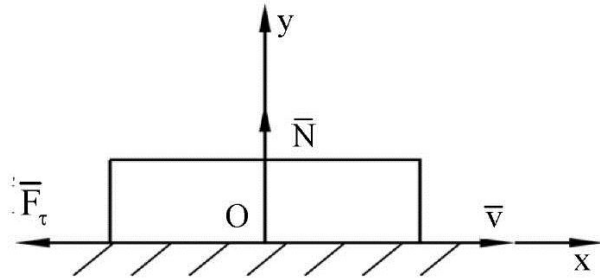


Рис. 17.7

### Элементарная работа сил, действующих на абсолютно твердое тело

Выберем в качестве полюса произвольную точку  $O$  (рис. 17.8). Обозначим радиус-вектор  $i$ -й точки  $M_i$  через  $\vec{r}_i$ . Элементарное перемещение точки  $M_i$  складывается из элементарного перемещения полюса  $d\vec{r}_0 = dx_0 \vec{i} + dy_0 \vec{j} + dz_0 \vec{k}$  и перемещения за счет поворота  $d\vec{\varphi} \times \vec{r}_i$ , где  $d\vec{\varphi} = d\varphi_x \vec{i} + d\varphi_y \vec{j} + d\varphi_z \vec{k}$  – элементарный угол поворота тела.

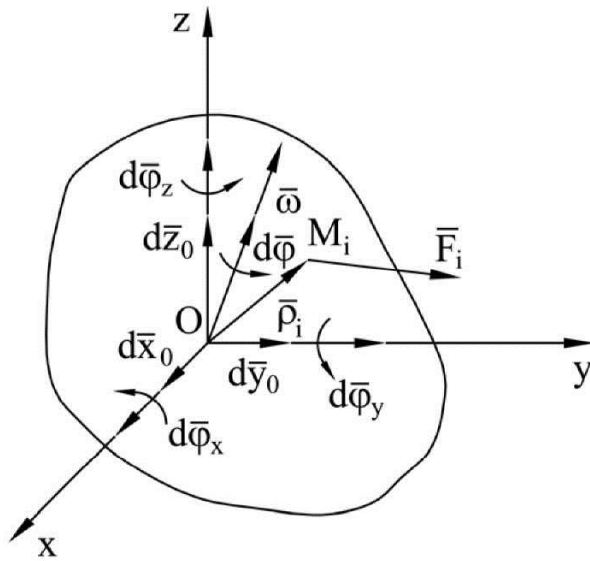


Рис. 17.8

Таким образом, элементарное перемещение точки  $M_i$  будет:

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_0 + d\vec{\varphi} \times \vec{\rho}_i. \quad (17.2.7)$$

Вектор элементарного поворота  $d\vec{\varphi}$  связан с вектором мгновенной угловой скорости  $\vec{\omega}$  соотношением  $d\vec{\varphi} = \vec{\omega} dt$ . Элементарная работа сил  $d'A$  будет:

$$d'A = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i d\vec{r}_i = \left( \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \right) d\vec{r}_0 + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i (d\vec{\varphi} \times \vec{\rho}_i) \quad (17.2.8)$$

В выражении (17.2.8)

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{F} \quad - \text{главный вектор сил,}$$

действующих на твердое тело.

Второе слагаемое в (17.2.8), согласно свойству скалярно-векторного произведения, преобразуется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i (d\vec{\varphi} \times \vec{\rho}_i) = \sum_{i=1}^N (\vec{\rho}_i \times \vec{F}_i) d\vec{\varphi} = \vec{M}_0 \cdot d\vec{\varphi},$$

где  $\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^N \vec{\rho}_i \times \vec{F}_i$  – главный момент сил  $\vec{F}_i$  относительно полюса  $O$ .

Таким образом, вместо (17.2.8) можно написать:

$$d'A = \vec{F} d\vec{r}_0 + \vec{M}_0 d\vec{\varphi}. \quad (17.2.9)$$

Главный момент и главный вектор внутренних сил, действующих на твердое тело, равен нулю. Поэтому внутренние силы, действующие в твердом теле, не совершают работы.

Окончательно можно сформулировать следующее утверждение.

**Элементарная работа сил, действующих на абсолютно твердое тело, равна алгебраической сумме работы главного вектора этих сил на элементарном поступательном перемещении тела вместе с произвольно выбранным полюсом и работы главного момента сил, взятого относительно полюса, на элементарном вращательном перемещении тела вокруг полюса.**

### 17.3. Кинетическая энергия системы материальных точек

#### Теорема Кенига

Кинетическая энергия материальной точки наряду с количеством движения является мерой ее механического движения и определяется формулой

$$T = \frac{mv^2}{2}, \quad (17.3.1)$$

где  $m$  – масса точки;  $v$  – ее скорость,  $v^2 = \bar{v} \cdot \bar{v}$ .

Если учесть, что количество движения  $\bar{K} = m\bar{v}$ , то выражение (17.3.1) для  $T$  можно переписать в виде скалярного произведения:

$$T = \frac{1}{2} m\bar{v} \cdot \bar{v} = \frac{1}{2} \bar{K} \cdot \bar{v}. \quad (17.3.2)$$

Кинетическая энергия системы материальных точек есть сумма кинетических энергий отдельных точек:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2, \quad (17.3.3)$$

или по аналогии с (17.3.2),

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \bar{K}_i \cdot \bar{v}_i. \quad (17.3.4)$$

Здесь  $\bar{K}_i = m_i \bar{v}_i$  – количество движения  $i$ -й материальной точки.

При вычислении кинетической энергии полезной является теорема Кенига (1712–1757). Методика вычисления кинетической энергии основана на том, что движение системы представляется в виде суммы переносного движения вместе с центром масс и относительного движения по отношению к поступательно движущейся системе осей вместе с центром масс.

Суть теоремы Кенига в следующем:

**Кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической энергии материальной точки, масса которой равна массе системы и которая движется со скоростью центра масс, и кинетической энергии точек в относительном движении по отношению к поступательно движущейся системе осей вместе с центром масс:**

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i u_i^2. \quad (17.3.5)$$

В формуле (17.3.5) через  $m$  обозначена масса системы;  $\bar{v}_c$  – скорость ее центра масс;  $\bar{u}_i$  – скорости точек системы по отношению к поступательно движущимся осям вместе с центром масс.

Докажем эту теорему.

Пусть скорость  $i$ -й точки представлена в виде суммы:

$$\bar{v}_i = \bar{v}_c + \bar{u}_i. \quad (17.3.6)$$

Кинетическая энергия  $T$ , если воспользоваться формулой (17.3.6), запишется в виде:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i \cdot \bar{v}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\bar{v}_c + \bar{u}_i) (\bar{v}_c + \bar{u}_i) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_c \cdot \bar{v}_c + \sum_{i=1}^N m_i \bar{u}_i \cdot \bar{v}_c + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \bar{u}_i \cdot \bar{u}_i = \\
&= \frac{m v_c^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i u_i^2 + \bar{v}_c \sum_{i=1}^N m_i \bar{u}_i.
\end{aligned}$$

Если начало подвижной системы находится в центре масс, то слагаемое

$$\bar{v}_c \sum_{i=1}^N m_i \bar{u}_i = 0.$$

Действительно,

$$\sum_{i=1}^N m_i \bar{u}_i = m \bar{u}_c,$$

где  $\bar{u}_c$  – относительная скорость центра масс по отношению к подвижному началу. Но эта величина равна нулю, так как подвижное начало является центром масс.

Поэтому

$$T = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i u_i^2.$$

Если подвижное начало не совпадает с центром масс, то для кинетической энергии получаем формулу

$$T = \frac{m v_c^2}{2} + m \bar{u}_0 \cdot \bar{v}_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i u_i^2. \quad (17.3.7)$$

Здесь  $\bar{v}_0$  – скорость начала некоторой поступательно движущейся системы;  $\bar{u}_0$  – относительная скорость центра масс по отношению к подвижному началу  $O$ ;  $\bar{u}_i$  – относительная скорость  $i$ -й точки по отношению к подвижным осям.

Формула (17.3.7) может быть полезна при вычислении кинетической энергии, если по каким-либо соображениям за полюс целесообразно взять точку, отличную от центра масс.

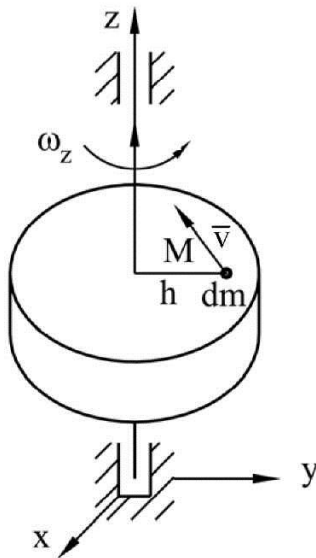


Рис. 17.9

#### 17.4. Кинетическая энергия твердого тела при вращательном движении вокруг неподвижной оси, точки и в общем случае движения

##### Вращение вокруг неподвижной оси

Скорости точек тела при вращении вокруг неподвижной оси (рис. 17.9) находятся по формуле:

$$v = \omega_z h. \quad (17.4.1)$$

В формуле (17.4.1)  $\omega_z$  – угловая скорость вращения тела;  $h$  – расстояние точки  $M$  до оси вращения.

Кинетическая энергия материальной точки  $M$  массой  $dm$  будет

$$dT = \frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{2} \omega_z^2 h^2 dm. \quad (17.4.2)$$

Интегрируя выражение (17.4.2) по массе тела, найдем его кинетическую энергию

$$T = \int_{(m)} dT = \frac{1}{2} \omega_z^2 \int_{(m)} h^2 dm.$$

Но величина  $\int_{(m)} h^2 dm = J_z$  представляет собой осевой момент инерции тела относительно оси  $z$ . Следовательно,

$$T = \frac{J_z \omega_z^2}{2}. \quad (17.4.3)$$

Формула (17.4.3) аналогична формуле (17.3.1), выражающей кинетическую энергию точки.

### Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки

Формула (17.4.3) не меняет своего вида при рассмотрении вращения тела вокруг неподвижной точки.

Известно, что распределение скоростей соответствует вращению вокруг мгновенной оси, являющейся вектором угловой скорости  $\vec{\omega}$  (рис. 17.10). Скорость точки находится по формуле Эйлера  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , ее модуль  $v = \omega h$ , где  $h$  – отрезок перпендикуляра, опущенного из точки  $M$  на мгновенную ось.

Поэтому в случае вращения твердого тела вокруг неподвижной точки для кинетической энергии получим выражение

$$T = \frac{J \omega^2}{2}. \quad (17.4.4)$$

Только величина момента инерции будет переменной, так как непрерывно меняется направление мгновенной оси  $\vec{\omega}$ .

Момент инерции относительно оси, произвольно расположенной в пространстве, определяется по формуле

$$J = J_x \alpha^2 + J_y \beta^2 + J_z \gamma^2 - 2J_{xy} \alpha\beta - 2J_{xz} \alpha\gamma - 2J_{yz} \beta\gamma,$$

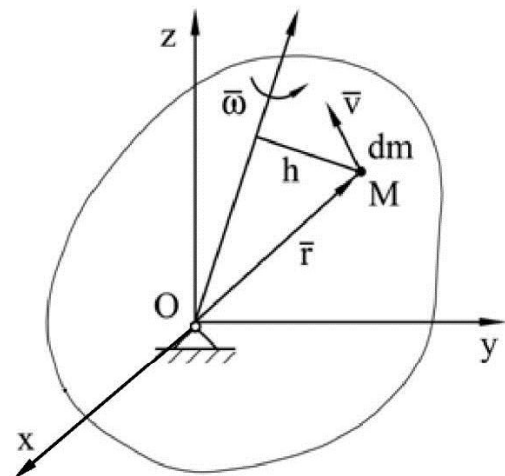


Рис. 17.10

где  $\alpha, \beta, \gamma$  – направляющие косинусы мгновенной оси  $\bar{\omega}$ .

Учитывая, что проекции вектора угловой скорости  $\bar{\omega}$  на оси  $x, y, z$  определяются соотношениями  $\omega_x = \alpha\omega, \omega_y = \beta\omega, \omega_z = \gamma\omega$ , формула (17.4.4) переписывается следующим образом:

$$T = \frac{1}{2}(J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2 - 2J_{xy}\omega_x\omega_y - 2J_{xz}\omega_x\omega_z - 2J_{yz}\omega_y\omega_z). \quad (17.4.5)$$

### Кинетическая энергия твердого тела в общем случае движения

При вычислении кинетической энергии твердого тела в случае произвольного движения целесообразно воспользоваться теоремой Кенига.

Если расположить начало подвижной системы в центре масс, то для кинетической энергии справедлива формула

$$T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J\omega^2, \quad (17.4.6)$$

где  $m$  – масса тела;  $\bar{v}_c$  – скорость центра масс;  $J$  – момент инерции относительно мгновенной оси  $\bar{\omega}$ , являющейся вектором угловой скорости, проходящей через центр инерции.

Величина  $\frac{1}{2}J\omega^2$  находится по формуле (17.4.5).

Если учесть, что количество движения тела  $\bar{K} = m\bar{v}_c$ , а момент количества движения  $\bar{L}_c$  относительно центра масс  $C$

$$\begin{aligned} \bar{L}_c = & (J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z)\bar{i} + \\ & + (-J_{yx}\omega_x + J_y\omega_y - J_{yz}\omega_z)\bar{j} + \\ & + (-J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y + J_z\omega_z)\bar{k}, \end{aligned}$$

то формулу (17.4.6) можно переписать следующим образом:

$$T = \frac{1}{2}\bar{K} \cdot \bar{v}_c + \frac{1}{2}\bar{L}_c \cdot \bar{\omega}. \quad (17.4.7)$$

В формулу (17.4.7) вошли количество движения тела и момент количества движения тела относительно центра масс.

Формула (17.4.6), естественно, справедлива и при плоском движении. При таком движении скорости всех точек тела в каждый момент времени распределены так, как если бы тело вращалось вокруг оси, перпендикулярной к плоскости движения и проходящей через мгновенный центр скоростей  $p$ .

Следовательно, пользуясь формулой для кинетической энергии при вращении вокруг оси, получим

$$T = \frac{1}{2}J_p\omega^2,$$

где  $J_p$  – момент инерции твердого тела относительно мгновенной оси;  $\omega$  – угловая скорость тела.

Но, согласно теореме Штейнера–Гюйгенса о моментах инерции относительно параллельных осей,

$$J_p = J_c + m\rho^2.$$

Здесь  $J_c$  – момент инерции относительно центра масс;  $m$  – масса тела;  $\rho$  – расстояние мгновенного центра скоростей до центра масс (рис. 17.11).

Учитывая, что  $v_c = \omega\rho$ , получим выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2. \quad (17.4.8)$$

Формула (17.4.8) является непосредственным следствием общей зависимости (17.4.6) и могла бы быть написана сразу без вывода.

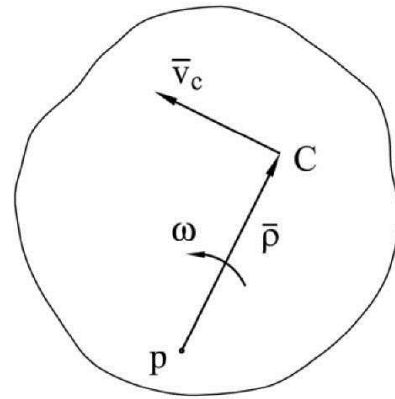


Рис. 17.11

### 17.5. Теорема об изменении кинетической энергии

Теорема об изменении кинетической энергии устанавливает связь между работой сил, действующих на точки механической системы, и ее кинетической энергией.

Рассмотрим в начале отдельную материальную точку. Воспользуемся ее уравнением динамики:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \quad (17.5.1)$$

где  $\vec{F}$  – равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке.

Умножим скалярно (17.5.1) на элементарное перемещение точки  $d\vec{r}$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (17.5.2)$$

В выражении (17.5.2) справа стоит выражение элементарной работы  $d'A$ .

Учитывая, что

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m \vec{v} d\vec{v} = d \frac{m}{2} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = d \frac{mv^2}{2} = dT,$$

где  $T = \frac{mv^2}{2}$  – кинетическая энергия материальной точки, из (17.5.2) получим, что

$$dT = d'A. \quad (17.5.3)$$

Соотношение (17.5.3) выражает теорему об изменении кинетической энергии для материальной точки в дифференциальной форме:

**Приращение кинетической энергии материальной точки на элементарном перемещении равно элементарной работе равнодействующей силы, приложенной к точке на этом же перемещении.**



Интегрируя соотношение (17.5.3) в пределах, соответствующих началу  $M_1$  и концу движения  $M_2$ , получим:

$$T_2 - T_1 = A_{12}. \quad (17.5.4)$$

Здесь

$$T_2 = \frac{mv_2^2}{2}; T_1 = \frac{mv_1^2}{2}; A_{12} = \int_{M_1}^{M_2} d'A.$$

Выражение (17.5.4) представляет собой теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме:

**Приращение кинетической энергии материальной точки на конечном перемещении равно работе равнодействующей силы, к ней приложенной, на том же перемещении.**

В ряде случаев полезной может быть другая формулировка дифференциальной формы доказанной теоремы.

Умножим скалярно обе части уравнения динамики на  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (17.5.5)$$

В полученном выражении

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} = \frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} \right) = \frac{dT}{dt};$$

$\vec{F} \cdot \vec{v} = N$  – мощность силы.

Поэтому вместо (17.5.5) получаем

$$\frac{dT}{dt} = N. \quad (17.5.6)$$

То есть, **производная по времени от кинетической энергии материальной точки равна мощности равнодействующей силы, к ней приложенной.**

В случае системы материальных точек доказанная теорема справедлива для каждой в отдельности материальной точки.

В частности, справедлива ее дифференциальная форма:

$$dT_i = d'A_i.$$

Однако здесь следует подчеркнуть, что элементарная работа  $d'A_i$  обусловлена действием как внешних сил, приложенных к точке, так и внутренних сил, то есть реакций связей и сил взаимодействия между точками.

Суммируя эти уравнения по всем точкам системы, получаем:

$$\sum_{i=1}^N dT_i = \sum_{i=1}^N d'A_i.$$

Поскольку  $\sum_{i=1}^N dT_i = d \sum_{i=1}^N T_i = dT$ ,

где  $T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2}$  – кинетическая энергия системы и  $\sum_{i=1}^N d'A_i = d'A + d'A^*$  – работа внешних и внутренних сил на совокупности элементарных перемещений  $d\vec{r}_i$ , то можно написать

$$dT = d'A + d'A^*. \quad (17.5.7)$$

Здесь  $d'A$  – элементарная работа внешних сил;  $d'A^*$  – элементарная работа внутренних сил.

Равенство (17.5.7) выражает теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме:

**Приращение кинетической энергии системы материальных точек на множестве ее элементарных перемещений равно элементарной работе внешних и внутренних сил на этом же множестве перемещений.**

Интегрируя равенство (17.5.7) в пределах, соответствующих началу и концу движения:

$$\int_{(1)}^{(2)} dT = \int_{(1)}^{(2)} (d'A + d'A^*),$$

получим:

$$T_2 - T_1 = A_{12} + A_{12}^*, \quad (17.5.8)$$

то есть **приращение кинетической энергии системы на множестве ее конечных перемещений равно сумме работ внешних и внутренних сил, приложенных к точкам системы на этом же множестве перемещений.**

Дифференциальная форма (17.5.6) для отдельной точки обобщаются и на случай системы материальных точек:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^N \vec{R}_i \vec{v}_i = N + N^*. \quad (17.5.9)$$

Здесь  $N$  – мощность внешних сил;  $N^*$  – мощность внутренних сил  $\vec{R}_i$ .

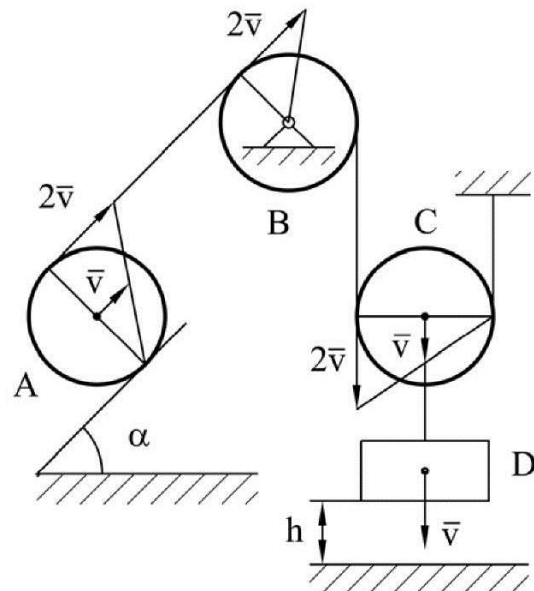
То есть **производная по времени от кинетической энергии системы материальных точек равна мощности внешних и внутренних сил, приложенных к системе.**

Рассмотрим примеры.

1. Для механической системы, изображенной на рис. 17.12, найти скорость груза  $D$  при опускании его на высоту  $h$ . Массы тел связаны соотношениями:

$$m_A = m_B = m_C = \frac{1}{2} m_D = m.$$

Радиусы дисков, которые считаются однородными, одинаковы:



$$R_A = R_B = R_C = R.$$

Коэффициент трения качения тела  $A$  равен  $\delta$ . Угол наклона плоскости —  $\alpha$ . В начальный момент времени система находилась в покое.

Согласно теореме об изменении кинетической энергии в интегральной форме имеем:

$$T_2 - T_1 = A_{12}.$$

Поскольку в начальный момент времени система находилась в покое, то  $T_1 = 0$ . Сначала построим план скоростей, так как это облегчает составление выражения кинетической энергии.

$$T_2 = \frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{J_A \omega_A^2}{2} + \frac{J_B \omega_B^2}{2} + \frac{m_C v_C^2}{2} + \frac{J_C \omega_C^2}{2} + \frac{m_D v_D^2}{2}.$$

Согласно плану скоростей

$$v_A = v; \omega_A = \frac{v}{R}; \omega_B = \frac{2v}{R}; v_C = v_D = v; \omega_C = \frac{v}{R}.$$

С учетом этих соотношений выражение для  $T_2$  будет:

$$T_2 = \frac{3}{4} m v^2 + \frac{m R^2}{2} \frac{4 v^2}{2 R^2} + \frac{3}{4} m v^2 + \frac{2 m v^2}{2} = \frac{7}{2} m v^2.$$

Работа сил тяжести и сил трения:

$$A_{12} = m g h \left( -\sin \alpha - \frac{\delta}{R} \cos \alpha + 3 \right),$$

тогда  $v = \sqrt{\frac{2}{7} g h \left( 3 - \sin \alpha - \frac{\delta}{R} \cos \alpha \right)}$ .

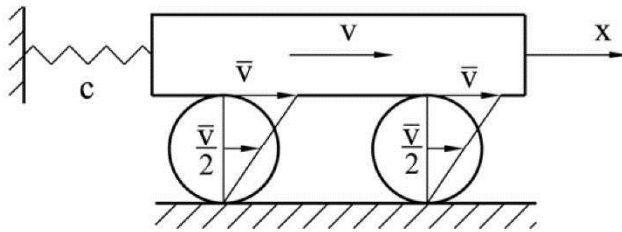


Рис. 17.13

2. В качестве другого примера рассмотрим определение собственной частоты колебаний механической системы, изображенной на рис. 17.13, пользуясь дифференциальной формой теоремы об изменении кинетической энергии. Система состоит из платформы, расположенной на двух катках.

Платформа прикреплена пружиной к неподвижной опоре. Масса платформы  $M$ , масса каждого из катков  $m$ . Жесткость пружины  $c$ . Найти частоту колебаний системы.

Согласно (17.5.9),

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= N, \\ T &= \frac{M v^2}{2} + 2 \frac{3}{4} m \left( \frac{v}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \left( M + \frac{3}{4} m \right) v^2, \\ N &= -c x v. \end{aligned}$$

Подставляем  $\frac{dI}{dt}$  и  $N$  в математическое выражение теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$\left(M + \frac{3}{4}m\right)v\ddot{x} = -cxv,$$

или

$$\left(M + \frac{3}{4}m\right)\ddot{x} + cx = 0.$$

Запишем последнее уравнение в стандартной форме:

$$\ddot{x} + k^2x = 0.$$

Откуда следует формула для собственной частоты колебаний:

$$k = \sqrt{\frac{c}{M + \frac{3}{4}m}}.$$

## 18. ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО СИЛОВОГО ПОЛЯ

### 18.1. Понятие о силовом поле

Класс сил, зависящих от координат точки в пространстве или от взаимного расположения точек, занимает особое место в механике. Такие силы называются *позиционными*. Позиционными являются силы тяготения, электростатические, силы упругости.

*Часть пространства, в котором на материальную точку действует некоторая сила, являющаяся однозначной функцией координат и не зависящая от скорости движения точки, называется силовым полем.*

Силовое поле может меняться в данной точке с течением времени или оставаться постоянным. В первом случае оно называется нестационарным, во втором – стационарным. В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь стационарных силовых полей.

В стационарном силовом поле вектор силы  $\vec{F}$  можно рассматривать как векторную функцию радиус-вектора:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}).$$

Эта зависимость эквивалентна трем скалярным соотношениям, определяющим проекции силы на оси координат:

$$F_x = F_x(x, y, z), F_y = F_y(x, y, z), F_z = F_z(x, y, z),$$

которые не зависят от движения точки в пространстве.

Структура поля геометрически интерпретируется системой силовых линий, проходящих через каждую точку пространства.

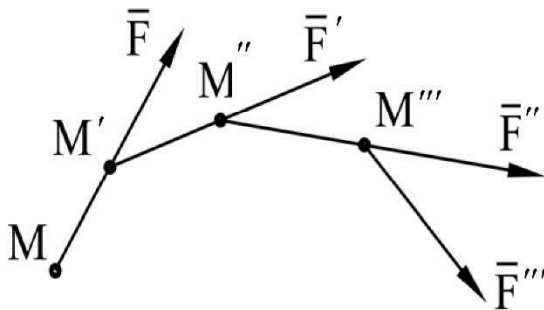


Рис. 18.1

Проведем через точку поля  $M$  вектор силы  $\vec{F}$ , с которой поле действует на материальную точку. На линии действия силы  $\vec{F}$  выберем близкую точку  $M'$  и через нее также проведем силу  $\vec{F}'$ , с которой поле действует на материальную точку. Продолжая построение, получим ломаную линию, которая в пределе при сближении соседних точек превращается в кривую, называемую силовой линией поля (рис. 18.1).

Согласно определению, силы поля направлены по касательной к силовой линии. Это условие выражается следующей системой соотношений:

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z},$$

которые являются дифференциальными уравнениями силовых линий.

## 18.2. Необходимые и достаточные условия независимости работы сил поля от формы траектории

В результате перемещения точки из начального положения  $M_0$  в конечное положение  $M_1$  совершается работа:

$$A_{01} = \int_{M_0}^{M_1} \bar{F} d\bar{r} = \int_{M_0}^{M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (18.2.1)$$

Криволинейный интеграл в общем случае зависит от формы траектории.

Однако, если подынтегральное выражение будет иметь структуру полного дифференциала некоторой функции, которую обозначим  $-\Pi(x, y, z)$ , то интеграл берется сразу и его величина равна разности начального и конечного значения функции  $\Pi(x, y, z)$ .

Функция  $\Pi(x, y, z)$  называется потенциальной энергией или потенциалом.

Итак, пусть функция  $\Pi(x, y, z)$  определена единственным образом в точке рассматриваемой области пространства и пусть

$$\begin{aligned} d'A = dA = -d\Pi &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x} dx - \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy - \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz = \\ &= F_x dx + F_y dy + F_z dz, \end{aligned} \quad (18.2.2)$$

то есть выполняются условия, что

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \quad (18.2.3)$$

Тогда вместо (18.2.1) можно написать:

$$A_{01} = -\int_{M_0}^{M_1} d\Pi = \Pi(x_0, y_0, z_0) - \Pi(x, y, z),$$

так как интеграл от полного дифференциала некоторой функции равняется разности этой функции от верхнего и нижнего предела.

Следовательно, работа по переводу точки из начального в конечное положение не зависит от формы траектории.

Таким образом, доказана достаточность условий (18.2.3).

Иными словами, для того, **чтобы работа в силовом поле не зависела от формы траектории, а определялась только начальным и конечным положением точки, необходимо существование однозначной функции координат, частные производные которой равны соответствующим проекциям силы на оси координат.**

Для доказательства необходимости предположим, что

$$A_{01} = \int_{M_0}^{M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = -\Pi(x, y, z) + \Pi(x_0, y_0, z_0),$$

и затем докажем, что из этого условия следуют формулы (18.2.3).

Рассмотрим некоторую точку  $M_2$ , бесконечно близкую к  $M_1$ , и найдем работу  $A_{02}$ .

$$A_{02} = \int_{M_0}^{M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = -\Pi(x + dx, y + dy, z + dz) + \Pi(x_0, y_0, z_0).$$

Разность работ  $A_{02} - A_{01}$  представляет элементарную работу на бесконечно малом пути  $\overline{M_1 M_2} = d\vec{r}$ :

$$\begin{aligned} d'A &= F_x dx + F_y dy + F_z dz = \\ &= -\Pi(x + dx, y + dy, z + dz) + \Pi(x, y, z) = \\ &= -d\Pi = -\left( \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что дифференциалы  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  независимы друг от друга, остается принять, что справедливы условия (18.2.3).

Следовательно, условия (18.2.3) являются необходимыми и достаточными условиями независимости работы в силовом поле от формы траектории.

Система равенств (18.2.3) эквивалентна одному векторному равенству:

$$\vec{F} = -\text{grad}\Pi. \quad (18.2.4)$$

В выражении (18.2.4)  $\text{grad}\Pi$  – это вектор с проекциями

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \frac{\partial \Pi}{\partial z},$$

который называется градиентом функции  $\Pi$ .

Для сокращенной записи дифференциальных векторных операций вводится оператор (Набла).

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

Тогда равенство (18.2.4) можно переписать следующим образом:

$$\vec{F} = -\nabla \Pi.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z \partial y}.$$

Последние условия можно записать в символической форме:

$$\text{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0, \quad (18.2.5)$$

где  $\text{rot}\vec{F}$  – вихрь поля.

Равенство (18.2.5) также представляет собой условие потенциальности силового поля, так как оно является следствием соотношений (18.2.3).



В выражение работы потенциальная энергия входит в виде разности ее значений в начальной и конечной точках. Поэтому саму потенциальную энергию можно определить с точностью до постоянной и, в частности считать, что  $\Pi(x_0, y_0, z_0) = 0$ ,

$$A_{01} = -A_{10} = -\Pi(x, y, z).$$

Работа представляет собой работу по возвращению точки в начальное положение. Следовательно, при вышеуказанном выборе постоянной, потенциальная энергия  $\Pi(x, y, z)$  представляет собой работу по переводу точки из данного положения в начальное.

Рассмотрим поверхность

$$\Pi(x, y, z) = C,$$

где  $C$  – некоторая постоянная.

Поверхность, соответствующая фиксированному уровню потенциальной энергии, называется поверхностью уровня.

На поверхности уровня:

$$d\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Pi}{\partial z} dz = 0.$$

Последнее равенство есть скалярное произведение двух векторов:

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

и

$$d\text{grad}\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\Pi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\Pi}{\partial z}\vec{k},$$

причем вектор  $d\vec{r}$  представляет собой касательную к поверхности уровня в данной точке и ориентирован произвольным образом.

Следовательно, вектор  $\text{grad}\Pi$  направлен по нормали к поверхности уровня в сторону возрастания  $\Pi$ .

Поэтому сила  $\vec{F} = -\text{grad}\Pi$  направлена в сторону убывания потенциальной энергии.

В случае системы материальных точек потенциальная энергия является функцией  $x_i, y_i, z_i$  координат точек. При этом

$$F_{ix} = -\frac{\partial\Pi}{\partial x_i}; F_{iy} = -\frac{\partial\Pi}{\partial y_i}; F_{iz} = -\frac{\partial\Pi}{\partial z_i}.$$

Элементарная работа:

$$\begin{aligned} dA &= \sum_{i=1}^N (F_{ix} dx_i + F_{iy} dy_i + F_{iz} dz_i) = \\ &= -\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial\Pi}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial\Pi}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial\Pi}{\partial z_i} dz_i \right) = -d\Pi. \end{aligned}$$

Рассмотрим примеры вычисления потенциальной энергии.

1. Потенциальная энергия поля силы тяжести.

Пусть ось  $z$  направлена вертикально вверх. В случае одной точки веса  $\bar{P} = -m\bar{g}$  будем иметь:

$$d'A = -d\Pi = -Pdz = -mgdz.$$

Откуда

$$\Pi = Pz = mgz.$$

В случае системы материальных точек

$$\Pi = \sum_{i=1}^N m_i g z_i = mgz_c,$$

где  $z_c$  – координата центра масс системы;  $m$  – ее масса.

2. Потенциальная энергия упругого тела.

В случае пружины

$$\Pi = \frac{1}{2} cy^2,$$

где  $c$  – жесткость пружины;  $y$  – ее деформация положения статического равновесия.

В общем случае для упругого тела, подчиняющегося закону Гука, имеем:

$$F_x = -(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z); \quad F_y = -(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z); \\ F_z = -(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z).$$

Согласно условиям

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}.$$

получаем

$$a_{12} = a_{21}; \quad a_{13} = a_{31}; \quad a_{32} = a_{23},$$

то есть матрица

$$C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (18.2.6)$$

называемая матрицей упругих постоянных, является симметричной.

Потенциальная энергия найдется как интеграл:

$$\Pi = \int_{M_0}^M d\Pi = - \int_{M_0}^M (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \\ = \int_0^x (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) dx + \int_0^y (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) dy + \\ + \int_0^z (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) dz = \\ = \frac{1}{2} (a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz). \quad (18.2.7)$$

Следовательно, потенциальная энергия упругой системы является однородной квадратичной формой координат. При этом формула (18.2.7) может быть записана в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} U^T C U, \quad (18.2.8)$$

где  $U^T = |x, y, z|$  – вектор перемещений в точке приложения силы;  $C$  – матрица упругих постоянных (18.2.6).

3. Потенциальная энергия поля центральной силы тяготения.

Согласно закону всемирного тяготения,

$$\bar{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\bar{r}}{r},$$

где  $\gamma$  – гравитационная постоянная;  $m_1, m_2$  – массы притягивающихся точек,  $r$  – расстояние между ними.

Элементарная работа

$$d'A = dA = -d\Pi = \bar{F} d\bar{r} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\bar{r} d\bar{r}}{r} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr.$$

Если принять за начальную бесконечно удаленную точку  $r_0 = \infty$ , а в качестве конечной взять некоторое значение расстояния  $r$ , то получим

$$\Pi = \int_{\infty}^r \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (18.2.9)$$

### 18.3. Теорема об изменении механической энергии

#### Закон сохранения механической энергии

Рассмотрим систему материальных точек, на каждую точку которой действуют потенциальные силы и силы сопротивления, направленные в сторону, противоположную скорости движения.

Относительно характера сил сопротивления  $\bar{F}_v$  не будем делать никаких предположений. Это могут быть силы, зависящие или не зависящие от скорости движения. Единственный существенный признак этих сил – это то, что угол между силой и скоростью равен  $\pi$ .

Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$dT = d'A. \quad (18.3.1)$$

Здесь элементарная работа  $d'A$  состоит из двух слагаемых: элементарной работы потенциальных сил  $-d\Pi$  и элементарной работы непотенциальных сил сопротивления  $d'A^*$

$$d'A = -d\Pi + d'A^*.$$

Поэтому равенство (18.3.1) принимает вид

$$dT = -d\Pi + d'A^*$$

или

$$d(T + \Pi) = d'A^* . \quad (18.3.2)$$

Элементарная работа сил сопротивления отрицательна:

$$d'A^* = \sum_{i=1}^N \bar{F}_{v_i} d\bar{r}_i = \sum_{i=1}^N F_{v_i} dr_i \cos \pi = -\sum_{i=1}^N F_{v_i} dr_i . \quad (18.3.3)$$

Подставим (18.3.3) в равенство (18.3.2):

$$d(T + \Pi) = -\sum_{i=1}^N F_{v_i}^* dr_i . \quad (18.3.4)$$

В соотношении (18.3.4) под знаком дифференциала находится величина  $T + \Pi$ , которую естественно считать полной механической энергией системы  $E$ :

$$T + \Pi = E . \quad (18.3.5)$$

При этом величина  $d(T + \Pi) = dE$  при действии непотенциальных сил, согласно (18.3.3), всегда отрицательна, то есть полная энергия системы убывает.

Разделим обе части равенства (18.3.4) на  $dt$ , учитывая, что  $\frac{d\bar{r}_i}{dt} = \bar{v}_i$  и  $T + \Pi = E$ :

$$\frac{dE}{dt} = -\sum_{i=1}^N F_{v_i}^* v_i < 0 . \quad (18.3.6)$$

Величина справа в этом выражении представляет собой мощность непотенциальных сил

$$N^* = -\sum_{i=1}^N F_{v_i}^* v_i , \quad (18.3.7)$$

то есть производная по времени от полной энергии системы отрицательна.

Следовательно, полная механическая энергия системы под действием сил сопротивления убывает, переходя при этом в другие формы.

Рассмотрим случай, когда силы сопротивления  $F_v$  пропорциональны скорости движения. Это случай вязкого сопротивления:

$$\bar{F}_{v_i} = -b_i \bar{v}_i .$$

Подставляя значения модуля силы  $\bar{F}_{v_i}$  в выражение мощности непотенциальных сил  $N^*$  (18.3.7), найдем

$$N^* = -\sum_{i=1}^N b_i v_i^2 .$$

Если ввести функцию

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N b_i v_i^2 , \quad (18.3.8)$$

то окажется, что модуль силы  $F_{v_i}^*$  найдется по формуле

$$F_{v_i}^* = -\frac{\partial \Phi}{\partial v_i} .$$

Функция  $\Phi$  (18.3.8) называется функцией рассеяния энергии Релея и играет важную роль в механике. Используя понятие о функции Релея, формулу (18.3.6) можно переписать в виде

$$\frac{dE}{dt} = -2\Phi,$$

то есть скорость убывания полной механической энергии при наличии сил вязкого сопротивления равна удвоенной функции Релея.

При условии, что  $N^* = 0$ , имеем:

$$\frac{dE}{dt} = 0,$$

и, следовательно,

$$E = \text{const}.$$

Это равенство выражает закон сохранения полной механической энергии системы, который имеет место при движении системы в потенциальном силовом поле.

Рассмотрим примеры.

1. Определить высоту  $h$  над поверхностью Земли, на которую поднимается вертикально запущенная ракета, начальная скорость которой равна  $v_0$ . Найти скорость, при которой ракета не упадет на Землю. Силами сопротивления атмосферы пренебречь. Радиус Земли равен 6370 км.

Применим закон сохранения механической энергии

$$T_0 + \Pi_0 = T + \Pi = \text{const}.$$

Учтем, что конечная скорость ракеты  $v = 0$ , а для потенциальной энергии следует использовать формулу (18.2.9). Таким образом:

$$T_0 = \frac{mv_0^2}{2}; \quad \Pi_0 = -\gamma \frac{m_3 m}{R};$$

$$T = 0; \quad \Pi = -\gamma \frac{m_3 m}{R + h},$$

где  $m_3$  – масса земли;  $m$  – масса ракеты;  $R$  – радиус Земли;  $h$  – высота подъема ракеты.

Подставляя величины  $T_0$ ,  $\Pi_0$ ,  $T$ ,  $\Pi$  в исходное уравнение, получим

$$\frac{mv_0^2}{2} - \gamma \frac{m_3 m}{R} = -\gamma \frac{m_3 m}{R + h}$$

На поверхности Земли сила притяжения равна силе тяжести, то есть

$$mg = \gamma \frac{mm_3}{R^2},$$

поэтому  $\gamma m_3 = gR^2$ .

С учетом последнего равенства найдем  $h$ :

$$h = \frac{v_0^2 R}{2gR - v_0^2}.$$

Если ракета покидает Землю, то  $h = \infty$ , следовательно,  $2gR - v_0^2 = 0$  и  $v_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 6370 \cdot 10^3} = 11,2 \cdot 10^3$  м/с.

Это вторая космическая скорость.

2. Доказать, что при косом соударении бильiardных шаров, они разлетятся под прямым углом. Удар считать абсолютно упругим, силами сопротивления пренебречь.

Массы шаров одинаковы:  $m_1 = m_2 = m$ .

Выберем инерциальную систему координат  $Oxy$ , движущуюся со скоростью  $v_{10} = const$  (рис. 18.2).

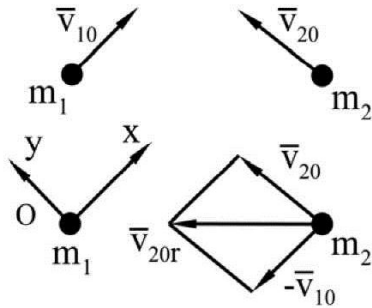


Рис. 18.2

Тогда относительные скорости шаров по отношению к осям  $Oxy$  до соударения будут:

$$\bar{v}_{10r} = 0;$$

$$\bar{v}_{20r} = \bar{v}_{20} - \bar{v}_{10}.$$

Законы механики справедливы в любой инерциальной системе координат. Поэтому, согласно закону сохранения количества движения,

$$m\bar{v}_{20r} = m\bar{v}_{1r} + m\bar{v}_{2r},$$

где  $\bar{v}_{1r}$  и  $\bar{v}_{2r}$  — относительные скорости шаров после соударения, а согласно закону сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_{20r}^2}{2} = \frac{mv_{1r}^2}{2} + \frac{mv_{2r}^2}{2}.$$

Поскольку массы шаров одинаковы, то

$$\bar{v}_{20r} = \bar{v}_{1r} + \bar{v}_{2r},$$

$$v_{20r}^2 = v_{1r}^2 + v_{2r}^2.$$

Но это возможно лишь при условии, что  $\bar{v}_1 \perp \bar{v}_{2r}$ , то есть, если шары разлетаются под прямым углом.

## 19. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

### 19.1 Основные определения. Связь принципа Даламбера с теоремой об изменении количества движения и момента количества движения

Если воспользоваться принципом освобождения от связей по отношению к несвободной системе материальных точек, то для каждой точки можно написать следующее дифференциальное уравнение:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (19.1.1)$$

где  $\vec{F}_i$  – равнодействующая внешних сил, действующих на точки системы;

$\vec{R}_i$  – равнодействующая внутренних сил, приложенных к точке.

Уравнения (19.1.1) можно переписать и в такой форме:

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i = 0.$$

Величина

$$\vec{S}_i = -m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

называется силой инерции, поэтому формально уравнения

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{S}_i = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad (19.1.2)$$

можно рассматривать как уравнения равновесия. В этом как раз и состоит суть принципа Даламбера.

То есть, *если к точкам несвободной системы наряду с внешними силами приложить силы инерции, то совокупность внешних сил уравновешивается реакциями связей и силами инерции.*

Принцип Даламбера, таким образом, в некоторых случаях позволяет сводить решение задач динамики к задачам статики.

Это имеет место при решении первой задачи динамики, когда по заданным кинематическим уравнениям движения определяется сила. При решении второй задачи динамики принцип Даламбера иногда позволяет упростить составление уравнений движения, то есть облегчает постановку задачи. Но необходимость интегрирования уравнений движения при этом сохраняется.

Использование понятия силы инерции и рассмотренная формулировка принципа Даламбера положены в основу *кинетостатики* – раздела механики, целью которого является применение методов статики, в том числе и принципа виртуальных перемещений, к решению задачи динамики машин и механизмов.

Из статики известно, что геометрическая сумма сил, находящихся в равновесии, и сумма их моментов относительно любого центра  $O$  равны нулю. Поэтому для системы в целом на основании принципа Даламбера можно написать:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{S}_i) &= 0; \\ \sum_{i=1}^N [\vec{M}_O(\vec{F}_i) + \vec{M}_O(\vec{R}_i) + \vec{M}_O(\vec{S}_i)] &= 0. \end{aligned} \quad (19.1.3)$$

В уравнениях (19.1.3) главный вектор и главный момент относительно центра  $O$  внутренних сил равны нулю, поэтому



$$\sum_{i=1}^N (\bar{F}_i + \bar{S}_i) = 0; \quad (19.1.4)$$

$$\sum_{i=1}^N [\bar{M}_o(\bar{F}_i) + \bar{M}_o(\bar{S}_i)] = 0.$$

Уравнения (19.1.4) не содержат внутренних сил и эквивалентны по существу теоремам об изменении количества движения и момента количества движения.

Рассмотрим главный вектор сил инерции:

$$\sum_{i=1}^N \bar{S}_i = -\sum_{i=1}^N m_i \bar{a}_i = -m \bar{a}_c, \quad (19.1.5)$$

где  $\bar{a}_i$  – ускорения точек системы;  $\bar{a}_c$  – ускорение центра масс;  $m$  – масса системы.

Таким образом, главный вектор сил инерции системы материальных точек, совершающей произвольное движение, равен произведению массы системы на ускорение центра масс и направлен противоположно этому ускорению. Однако точка приложения равнодействующей сил инерции не совпадает в общем случае с центром масс.

Главный момент сил инерции  $\bar{M}_o^S$  находим по формуле

$$\bar{M}_o^S = \sum_{i=1}^N \bar{M}_o(\bar{S}_i) = -\sum_{i=1}^N \bar{r}_i \times m_i \bar{a}_i. \quad (19.1.6)$$

Пример.

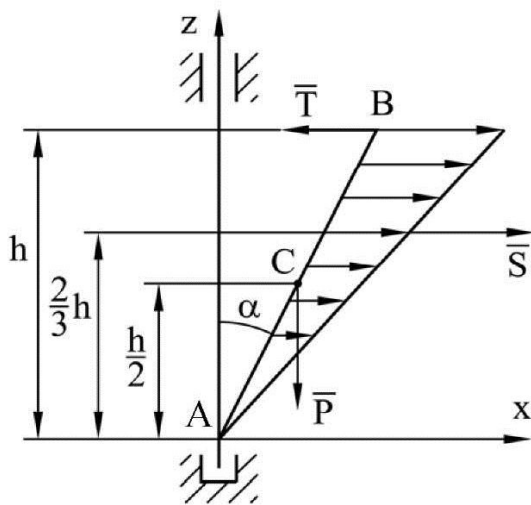


Рис. 19.1

Однородный стержень  $AB$  длиной  $l$  и весом  $\bar{P} = m\bar{g}$  прикреплен шарниром  $A$  к вертикальному валу, вращающемуся с угловой скоростью  $\omega$ . Найти натяжение  $\bar{T}$  горизонтальной нити, удерживающей стержень (рис. 19.1). Центробежная сила инерции для элемента стержня  $dm$  равна  $dm\omega^2 x$ , где  $x$  – расстояние до оси вращения. Таким образом, силы инерции распределены по линейному закону.

Главный вектор сил инерции определяется ускорением центра масс:

$$S = ma_c = m\omega^2 x_c = m\omega^2 \frac{l}{2} \sin \alpha.$$

Здесь  $m$  – масса стержня;

$$a_c = \omega^2 \frac{l}{2} \sin \alpha \text{ – ускорение центра масс.}$$

Однако равнодействующая сил инерции приложена на расстоянии  $\frac{2}{3}h$  от вершины треугольника.

В данном случае сумма моментов всех сил относительно шарнира  $A$  равна нулю:

$$-Th + S \frac{2}{3}h + P \frac{l}{2} \sin \alpha = 0$$

или 
$$-Tl \cos \alpha + m\omega^2 \frac{l}{2} \sin \alpha \frac{2}{3}l \cos \alpha + mg \frac{l}{2} \sin \alpha = 0.$$

Откуда 
$$T = m \left( \frac{g}{2} \operatorname{tg} \alpha + \frac{l}{3} \omega^2 \sin \alpha \right).$$

## 19.2. Уравнения плоско-параллельного движения твердого тела

В качестве примера рассмотрим уравнения кинестатики плоского движения твердого тела. Воспользуемся уравнениями (19.1.4).

В качестве полюса возьмем центр масс, точку  $C$ . Найдем главный момент сил инерции  $\bar{M}_0^S$ . В данном случае он вычисляется интегрированием:

$$\bar{M}_0^S = - \int_{(m)} \bar{r} \times d\bar{m}\bar{a}. \quad (19.2.1)$$

В формуле (19.2.1)  $\bar{a}$  – ускорения точек тела, которые определяются по формуле

$$\bar{a} = \bar{a}_c + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}).$$

Рассмотрим ряд соотношений:

$$\int_{(m)} \bar{r} \times d\bar{m}\bar{a}_c = -\bar{a}_c \times \int_{(m)} \bar{r} \cdot dm = -\bar{a}_c \times m\bar{r}_c = 0.$$

Здесь  $m$  – масса тела;  $\bar{r}_c$  – радиус-вектор центра масс. В данном случае он равен нулю, так как центр масс взят в качестве полюса.

$$\int_{(m)} \bar{r} \times (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}) dm = \bar{\varepsilon} \int_{(m)} r^2 dm - \int_{(m)} \bar{r} (\bar{r} \cdot \bar{\varepsilon}) dm.$$

При плоском движении радиус-векторы  $\bar{r}$  перпендикулярны векторам угловой скорости  $\bar{\omega}$  и углового ускорения  $\bar{\varepsilon}$ .

Поэтому,  $\bar{r} \cdot \bar{\varepsilon} = 0$ . Интеграл  $\int_{(m)} r^2 dm = J_c$  – момент инерции твердого тела

вокруг центра масс.

$$\text{Выражение } \int_{(m)} \bar{r} \times (\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})) dm = \int_{(m)} \bar{r} \times | \bar{\omega} (\bar{\omega} \cdot \bar{r}) - \bar{r} \omega^2 | dm = 0.$$

Так как здесь  $\bar{\omega} \cdot \bar{r} = 0$ ;  $\bar{r} \times \bar{r} = 0$ .

Следовательно,  $\bar{M}_0^S = -\bar{\varepsilon} J_c$ .

Таким образом, уравнения плоского движения твердого тела, например, в проекциях на декартовы оси, будут:

$$F_x - ma_x = 0; F_y - ma_y = 0; M_c - J_c \varepsilon = 0. \quad (19.2.2)$$

В проекциях на естественные оси уравнения плоского движения таковы:

$$F_\tau - ma_\tau = 0; F_n - ma_n = 0; M_c - J_c \varepsilon = 0. \quad (19.2.3)$$

Здесь  $F_\tau$ ,  $F_n$  – проекции главного вектора внешних сил на касательную и нормаль к траектории центра масс;  $a_\tau$  – касательное ускорение центра масс;  $a_n = v_c^2 / \rho$  – нормальное ускорение центра масс;  $v_c$  – скорость центра масс;  $\rho$  – радиус кривизны траектории.

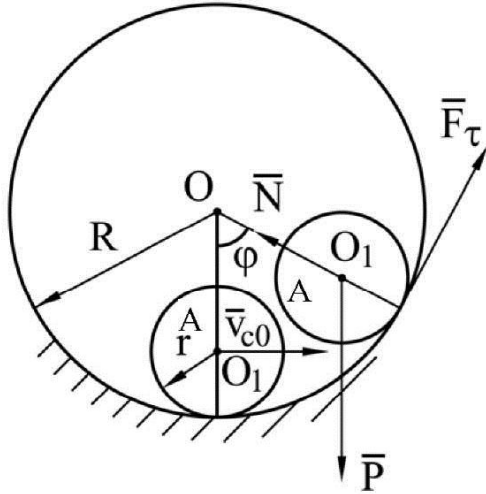


Рис. 19.2

Пример.

Цилиндрическое тело  $A$  радиуса  $r$ , находясь внутри цилиндра радиуса  $R$  в нижнем положении, получает начальную скорость  $\bar{v}_{c0}$  (рис. 19.2). Найти угол  $\varphi$ , на который поднимается тело  $A$  без проскальзывания. Коэффициент трения скольжения равен  $f$ , а коэффициент трения качения равен нулю.

Положение тела  $A$  будем определять углом  $\varphi$ , образованным вертикалью и радиусом, проведенным через центры обоих цилиндров. На тело  $A$  наряду с силой веса  $\bar{P}$  действуют реакции связей  $\bar{F}_\tau$  и  $\bar{N}$ .

Движение центра масс задано естественным образом. Поэтому воспользуемся уравнениями (19.2.3). В данном случае эти уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} m \frac{dv_c}{dt} &= F_\tau - mg \sin \varphi; \\ m \frac{v_c^2}{R-r} &= N - mg \cos \varphi; \\ \frac{mr^2}{2} \frac{R-r}{r} \ddot{\varphi} &= -F_\tau r. \end{aligned} \quad (19.2.4)$$

Здесь угловое ускорение тела  $A$  находится из следующих соображений:

$$v_c = (R-r)\dot{\varphi}; \quad \omega = \frac{v_c}{r} = \frac{(R-r)}{r}\dot{\varphi}.$$

Следовательно, 
$$\varepsilon = \frac{(R-r)}{r}\ddot{\varphi}.$$

Рассмотрим первое и третье уравнения системы (19.2.4).

Исключим силу  $F_\tau$ , учитывая, что  $\frac{dv_c}{dt} = (R-r)\ddot{\varphi}$ , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m(R-r)\ddot{\varphi} &= -F_\tau; \\ m(R-r)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}m(R-r)\ddot{\varphi} &= -mg \sin \varphi. \end{aligned}$$

Иначе 
$$\ddot{\varphi} = -\frac{2}{3} \frac{g}{R-r} \sin \varphi. \quad (19.2.5)$$

Пользуясь этими уравнениями, найдем соотношение между силой  $F_{\tau}^i$  и весом тела  $\bar{P} = m\bar{g}$  в зависимости от угла  $\varphi$ :

$$m(R-r)\ddot{\varphi} = F_{\tau}^i - mg \sin \varphi;$$

$$\frac{1}{2} m(R-r)\ddot{\varphi} = -F_{\tau}^i.$$

Очевидно, 
$$F_{\tau}^i = \frac{1}{3} mg \sin \varphi. \quad (19.2.6)$$

То есть сила трения, пока не началось проскальзывание, не зависит от коэффициента трения.

Проинтегрируем уравнение (19.2.5).

Угловое ускорение можно представить так:

$$\ddot{\varphi} = \frac{d}{dt} \omega.$$

Поэтому 
$$\ddot{\varphi} d\varphi = \frac{d\omega}{dt} d\varphi = \omega d\omega.$$

Далее 
$$\omega d\omega = -\frac{2}{3} \frac{g}{R-r} \sin \varphi d\varphi,$$

или 
$$\int_{\omega_0}^{\omega} \omega d\omega = -\frac{2}{3} \frac{g}{R-r} \int_0^{\varphi} \sin \varphi d\varphi.$$

Откуда 
$$\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2} = \frac{2}{3} \frac{g}{R-r} (\cos \varphi - 1).$$

Умножая на  $(R-r)^2$ , получим:

$$\frac{v_c^2 - v_{c0}^2}{2} = \frac{2}{3} g(R-r)(\cos \varphi - 1).$$

Иначе 
$$v_c^2 = v_{c0}^2 + \frac{4}{3} g(R-r)(\cos \varphi - 1).$$

$$N = mg \cos \varphi + \frac{m}{R-r} \left[ v_{c0}^2 + \frac{4}{3} g(R-r)(\cos \varphi - 1) \right].$$

Качение без проскальзывания будет до тех пор, пока

$$F_{\tau}^i < fN = fmg \left[ \cos \varphi + \frac{v_{c0}^2}{(R-r)g} + \frac{4}{3} (\cos \varphi - 1) \right].$$

Подставляя  $F_{\tau}^i$  по формуле (19.2.6), получаем:

$$\frac{1}{3} \sin \varphi < f \left[ \frac{7}{3} \cos \varphi - \frac{4}{3} + \frac{v_{c0}^2}{(R-r)g} \right].$$

## ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Материальные тела движутся в соответствии с законами Ньютона. Однако законы Ньютона можно заменить единым постулатом – вариационным принципом, который в ряде случаев, особенно при формулировке новых задач, оказывается гораздо удобнее. Возможны различные модификации вариационных принципов, эквивалентные законам Ньютона и содержащие физические соотношения, такие как закон Гука, соотношения пластичности и так далее. Схему постановки задач механики, основанную на непосредственном применении законов Ньютона, можно назвать *векторной механикой*, так как она имеет дело с такими величинами, как сила, скорость, ускорение. Другая схема, основанная на эквивалентной вариационной формулировке, связанная с именами Лейбница, Эйлера, Лагранжа, Гамильтона и Якоби, называется *аналитической механикой*. Основные величины здесь являются уже скалярными и динамические соотношения получаются в результате дифференцирования. Задачей данного раздела лекций является показать эффективность и универсальность упомянутых выше методов аналитической механики.

### 20. ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ЛАГРАНЖА И ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА-ДАЛАМБЕРА

#### 20.1. Классификация связей

Прежде чем перейти к обсуждению принципа виртуальных перемещений Лагранжа и принципа Лагранжа–Даламбера остановимся на описании систем материальных точек, на движение которых наложены ограничения. В механике материальные системы рассматриваются как совокупности материальных точек. Различные рода ограничения, наложенные на перемещения и скорости точек системы, называются связями. Эти ограничения считаются независимыми от закона движения, то есть они выполняются независимо от действующих в системе сил и начальных условий движения.

При наличии связей система материальных точек называется *несвободной системой*. Если же связи отсутствуют, то система называется *свободной*. Примером может служить солнечная система, поскольку размеры Солнца и планет весьма малы по сравнению с расстояниями между ними. В качестве другого примера можно привести упругое тело, бесконечно малые частицы которого считаются соединенными невесомыми пружинами. Примером несвободной системы является твердое тело, расстояние между любыми точками которого остаются неизменными при его движении.

Физически связи осуществляются в виде стержней или гибких тросов, соединяющих точки системы. Это могут быть поверхности, по которым принужденны двигаться точки системы. Математически действия связей выражаются уравнениями, которые устанавливают связь между координатами точек и их

скоростями. Простейшим и наиболее часто встречаемым видом связи являются позиционные или голономные связи.

Термин «голономная связь» – происходит от греческого «голос» – целый и «номос» – закон.

Позиционные связи осуществляют зависимости между координатами точек системы и выражаются уравнениями вида:

$$f_j(t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) = 0, \quad j = \overline{1, r}. \quad (20.1.1)$$

Здесь  $r$  – число уравнений связей.

При этом предполагается, что  $3N \geq r$ . В случае, если имеет место равенство, то движение системы заранее predetermined.

*Система материальных точек, в которых действуют только голономные связи, называется голономной.*

*Неголономные или кинематические связи выражают зависимости между скоростями точек системы, не сводящиеся к зависимостям между ее координатами.*

Ограничимся рассмотрением неголономных связей, линейных относительно скоростей точек системы.

Уравнения таких связей имеют вид:

$$D_m + \sum_{i=1}^N (A_{im} \dot{x}_i + B_{im} \dot{y}_i + C_{im} \dot{z}_i) = 0, \quad m = \overline{1, s}, \quad (20.1.2)$$

где  $s$  – число неголономных связей.

Величины  $A_{im}$ ,  $B_{im}$ ,  $C_{im}$ ,  $D_m$  – могут зависеть от координат и времени.

Эквивалентной (20.1.2) является форма записи

$$D_m dt + \sum_{i=1}^N (A_{im} dx_i + B_{im} dy_i + C_{im} dz_i) = 0. \quad (20.1.3)$$

Уравнение (20.1.3) интегрируемо, если

$$A_{im} = \frac{\partial f_m}{\partial x_i}; \quad B_{im} = \frac{\partial f_m}{\partial y_i}; \quad C_{im} = \frac{\partial f_m}{\partial z_i}; \quad D_m = \frac{\partial f_m}{\partial t},$$

где  $f_m$  – некоторая функция.

В этом случае коэффициенты удовлетворяют условиям:

$$\frac{\partial A_{im}}{\partial x_j} = \frac{\partial A_{jm}}{\partial x_i}; \quad \frac{\partial B_{im}}{\partial y_j} = \frac{\partial B_{jm}}{\partial y_i}; \quad \frac{\partial C_{im}}{\partial z_j} = \frac{\partial C_{jm}}{\partial z_i};$$

$$\frac{\partial A_{im}}{\partial t} = \frac{\partial D_m}{\partial x_i}; \quad \frac{\partial B_{im}}{\partial t} = \frac{\partial D_m}{\partial y_i}; \quad \frac{\partial C_{im}}{\partial t} = \frac{\partial D_m}{\partial z_i}.$$

При таких условиях уравнение (20.1.3) является полным дифференциалом функции  $f_m$ , которая имеет постоянное значение  $f_m$ . Следовательно, уравнение (20.1.3) интегрируемо. И этот интеграл имеет вид:

$$f_m(t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) = C_m. \quad (20.1.4)$$

Уравнение (20.1.4) представляет собой уравнение голономной связи. Следовательно, соотношение (20.1.3) лишь в том случае выражает неголономную связь, когда оно не интегрируемо.

Связи называются стационарными, если время явно не входит в их уравнения. В противном случае они называются нестационарными.

В качестве примера рассмотрим две материальные точки, соединенные абсолютно твердым стержнем длиной  $l$ .

Уравнение связи, выражающее неизменность расстояния между точками, будет

$$f = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0,$$

где  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$  – координаты первой и второй точек;  $l$  – длина стержня. Это уравнение стационарной голономной связи. Если точки соединены гибкой нитью, то

$$f = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 \leq 0.$$

В первом случае связь называется удерживающей, во втором – неудерживающей или односторонней связью.

Таким образом, связи, выражаемые уравнениями (20.1.1) и (20.1.2), являются удерживающими. Если бы имело место неравенство в этих уравнениях, то связи были бы неудерживающими или односторонними.

В дальнейшем ограничимся только удерживающими связями.

## 20.2. Виртуальные (возможные) перемещения системы

Важнейшим понятием теоретической механики является понятие о виртуальных (возможных) перемещениях механической системы.

*Виртуальными перемещениями механической системы называются воображаемые бесконечно малые перемещения, совместимые со связями, в некоторый фиксированный момент времени.*

Действительные элементарные перемещения происходят за бесконечно малый промежуток времени и определяются действующими на систему силами и наложенными связями. В отличие от действительных, виртуальные перемещения определяются только действующими связями, причем время в уравнениях связи фиксировано, иными словами *виртуальные перемещения – это такие элементарные перемещения, которые допускает система при «замороженных» связях.*

*С математической точки зрения элементарные действительные перемещения – это дифференциалы радиус-векторов точек системы  $d\vec{r}_i$ , которым соответствует дифференциал времени  $dt$ . Виртуальные перемещения системы характеризуются совокупностью элементарных изменений радиус-векторов  $\delta\vec{r}_i$ , которые происходят не за счет изменения времени, а за счет малого изменения вида функций  $\vec{r}_i$ . Эти бесконечно малые перемещения называются вариациями.*



В отличие от символа  $d$ , означающего операцию дифференцирования, символ  $\delta$  означает операцию варьирования. Таким образом, действительные перемещения вычисляются путем нахождения дифференциалов перемещений, а виртуальные – путем их варьирования. Причем варьирование осуществляется по тем же правилам, что и дифференцирование, но при фиксированном времени.

Рассмотрим траекторию точки  $M_i$  в ее истинном движении, определяемую радиус-вектором  $\bar{r}_i = \bar{r}_i(t)$  и отметим ее положения  $M_i$  и  $M'_i$  в моменты  $t$  и  $t+dt$ . Тогда  $\overline{M_i M'_i} = d\bar{r}_i$ . Радиус-вектор точки  $M'_i$  будет  $\bar{r}_i + d\bar{r}_i$ .

Наряду с истинной траекторией точки рассмотрим варьированную траекторию, определяемую радиус-вектором  $\bar{r}_i^* = \bar{r}_i + \delta\bar{r}_i$ , и две точки  $M_i^*$  и  $M'^*_i$ , определяемые теми же моментами времени (рис. 20.1).

Положение точек  $M_i^*$  и  $M'^*_i$  находим с помощью операции варьирования радиус-векторов  $\bar{r}_i$  и  $\bar{r}_i + d\bar{r}_i$ .

Поэтому

$$\overline{M_i M_i^*} = \delta\bar{r}_i;$$

$$\overline{M'_i M'^*_i} = \delta(\bar{r}_i + d\bar{r}_i) = \delta\bar{r}_i + \delta d\bar{r}_i.$$

С другой стороны, поскольку радиус-векторы точек  $M_i^*$  и  $M'^*_i$  отвечают моментам времени  $t$  и  $t+dt$ , то

$$\overline{M_i^* M'^*_i} = d(\bar{r}_i + \delta\bar{r}_i) = d\bar{r}_i + d\delta\bar{r}_i.$$

Учитывая равенство (рис. 20.1)

$$\overline{M_i M'_i} + \overline{M'_i M'^*_i} = \overline{M_i M_i^*} + \overline{M_i^* M'^*_i},$$

получаем

$$d\bar{r}_i + \delta\bar{r}_i + \delta d\bar{r}_i = \delta\bar{r}_i + d\bar{r}_i + d\delta\bar{r}_i,$$

или

$$\delta d\bar{r}_i = d\delta\bar{r}_i, i = \overline{1, n}. \quad (20.2.1)$$

Равенство (20.2.1) означает, что операции варьирования и дифференцирования перестановочны.

Символически это правило может быть записано так:

$$d\delta = \delta d. \quad (20.2.2)$$

Если использовать правило (20.2.2), то, например:

$$\frac{d}{dt}(\delta\bar{r}_i) = \delta\bar{v}_i. \quad (20.2.3)$$

При стационарных связях действительные перемещения принадлежат множеству виртуальных перемещений, а в случае нестационарных связей действительные перемещения не входят в число виртуальных.

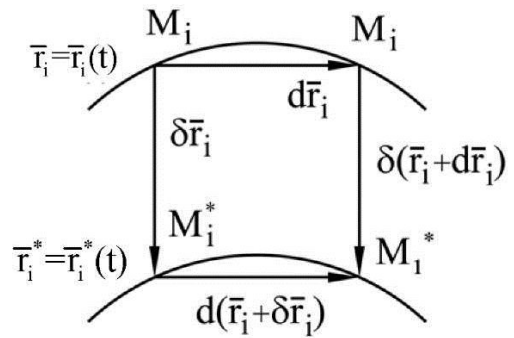


Рис. 20.1

Пусть на механическую систему из материальных точек наложено  $r$  голономных двусторонних связей

$$f_j(t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) = 0, \quad j = \overline{1, r},$$

или

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} dz_i \right) = 0, \quad (20.2.4)$$

и  $s$  неголономных двусторонних связей, куда скорости входят линейно:

$$D_m dt + \sum_{i=1}^N (A_{im} dx_i + B_{im} dy_i + C_{im} dz_i) = 0, \quad m = \overline{1, s}. \quad (20.2.5)$$

Виртуальные перемещения системы удовлетворяют уравнениям связи при фиксированном времени. Поэтому в уравнениях (20.2.4) и (20.2.5) следует положить  $dt=0$ , а символ дифференцирования «d» заменить на символ варьирования « $\delta$ »:

$$\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0, \quad j = \overline{1, r}, \quad (20.2.6)$$

$$\sum_{i=1}^N (A_{im} \delta x_i + B_{im} \delta y_i + C_{im} \delta z_i) = 0, \quad m = \overline{1, s}. \quad (20.2.7)$$

Выражения (20.2.6) и (20.2.7) представляют собой условия, налагаемые на вариации координат точек системы. Таким образом, вариации координат точек системы связаны между собой  $r+s$  соотношениями вида (20.2.6) и (20.2.7). Поэтому число независимых вариаций координат будет  $n=3N-r-s$ .

**Число независимых вариаций координат или число независимых виртуальных перемещений называется числом степеней свободы механической системы.**

Так, например, число степеней свободы плоской фигуры, движущейся в ее плоскости, равно трем, а число степеней свободы твердого тела, движущегося произвольно, равно шести.

### 20.3. Идеальные связи

Пользуясь принципом освобождаемости от связей, уравнение динамики несвободной системы материальных точек можно записать в виде

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (20.3.1)$$

где  $\vec{F}_i$  – активная сила, действующая на  $i$ -ю точку;  $\vec{R}_i$  – реакция связи.

Таким образом, несвободная система материальных точек формально рассматривается как свободная под действием внешних сил и реакций связей. Однако решение задачи динамики сложных механических систем в такой постановке часто сопряжено со значительными трудностями. Дело в том, что в результате применения принципа освобождаемости от связей возрастает число степеней свободы, что, естественно ведет к увеличению числа уравнений, в ко-

торые входят неизвестные реакции. Кроме того, уравнения вида (20.3.1) дополняются уравнениями связей.

Вместе с тем существует ряд задач, когда реакции связей не представляют большого интереса. Поэтому желателен такой метод решения задач динамики несвободной системы, при котором реакции связей, по крайней мере на первом этапе установления кинематического закона движения, исключались бы, и определялись в дальнейшем, если по роду задачи возникала такая необходимость. Этот метод был создан Лагранжем. Он основан на предположении, что элементарная работа реакций связей на любом виртуальном перемещении точек системы обращается в нуль. Такие связи – голономные и неголономные – называются идеальными или связями без трения.

Обозначим через  $\delta\vec{r}_i$  вектор виртуальных перемещений  $i$ -й точки системы. Условие идеальности связей запишем в виде

$$\delta A^* = \sum_{i=1}^N \bar{R}_i \delta\vec{r}_i = 0, \quad (20.3.2)$$

или в проекциях на оси координат

$$\delta A^* = \sum_{i=1}^N (R_{ix} \delta x_i + R_{iy} \delta y_i + R_{iz} \delta z_i) = 0. \quad (20.3.3)$$

Условие (20.3.2) выражает равенство нулю элементарной работы реакций связей  $\bar{R}_i$  на виртуальных перемещениях точек системы  $\delta\vec{r}_i$ .

К числу идеальных связей можно отнести связи, создаваемые контактом абсолютно гладких или абсолютно шероховатых недеформируемых поверхностей. Другим видом идеальных связей являются связи, обеспечивающие неизменность расстояний между точками системы. Реакция  $\bar{R}_i$  абсолютно гладкой поверхности на движущееся по ней тело направлена по нормали к поверхности. Поэтому она перпендикулярна к виртуальному перемещению  $\delta\vec{r}$ , которое направлено по касательной к поверхности. При качении твердого тела по шероховатой поверхности элементарная работа  $\bar{R}\delta\vec{r}$  равна нулю в силу того, что в точке касания равна нулю  $\delta\vec{r}$ .

В абсолютно твердом теле реакциями связей являются внутренние силы. Согласно третьему закону Ньютона главный вектор и главный момент внутренних сил равны нулю, поэтому равна нулю и их элементарная работа. Однако, встречаются связи, которые не могут считаться идеальными, например, связи с трением.

В этих случаях реакции неидеальных связей включаются в число внешних сил, а соответствующая система уравнений, чтобы устранить неопределенность, пополняется уравнениями, устанавливающими закон трения или физическими законами, в зависимости от характера соответствующих реакций.

#### 20.4. Принцип виртуальных перемещений

Принцип виртуальных перемещений является общим положением механики. В нем потенциально содержится полная информация о равновесии механи-

ческой системы, подчиненной идеальным стационарным голономным и неголономным связям.

При изучении условий равновесия сложных механических систем, состоящих из большого числа тел, геометрические методы, изложенные в статике твердого тела, становятся неэффективными, так как приводят к большому числу уравнений.

Для решения задач статики несвободных систем значительно более удобным является применение принципа виртуальных перемещений, сформулированного Лагранжем в 1788 г. Долгое время указанный принцип принимался без доказательств. Однако, он может быть доказан исходя из законов Ньютона.

Суть принципа виртуальных перемещений в следующем:

**Необходимое и достаточное условие равновесия системы, подчиненной стационарным идеальным связям, заключается в равенстве нулю элементарной работы внешних сил на множестве виртуальных перемещений из рассматриваемого положения равновесия.**

Обозначим через  $\bar{F}_i$  равнодействующую внешних сил, приложенных к  $i$ -й точке системы, через  $\delta\bar{r}_i$  – ее виртуальное перемещение и  $\delta A$  – сумму элементарных работ внешних сил на виртуальных перемещениях системы. Тогда аналитическое выражение принципа виртуальных перемещений будет

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \delta\bar{r}_i = 0 \quad (20.4.1)$$

или

$$\delta A = \sum_{i=1}^N (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i) = 0, \quad (20.4.2)$$

иначе

$$\delta A = \sum_{i=1}^N F_i \delta s_i \cos(\bar{F}_i, \delta\bar{r}_i) = 0. \quad (20.4.3)$$

В равенстве (20.4.3)  $\delta s_i$  – длина перемещения  $\delta\bar{r}_i$ ,  $(\bar{F}_i, \delta\bar{r}_i)$  – угол между силой  $\bar{F}_i$  и перемещением  $\delta\bar{r}_i$ .

Докажем необходимость принципа. Предположим, что несвободная система, подчиненная стационарным связям, находится в положении равновесия. Тогда каждая ее точка находится в равновесии и, согласно принципу освобожденности от связей, равнодействующая внешних сил  $\bar{F}_i$  и реакций связей  $\bar{R}_i$ , приложенная к какой-либо точке, должна равняться нулю:

$$\bar{F}_i + \bar{R}_i = 0.$$

Равна нулю и элементарная работа этой равнодействующей:

$$(\bar{F}_i + \bar{R}_i) \delta\bar{r}_i = 0.$$

Суммируя последние равенства, получим

$$\sum_{i=1}^N (\bar{F}_i + \bar{R}_i) \delta \bar{r}_i = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^N \bar{F}_i \delta \bar{r}_i + \sum_{i=1}^N \bar{R}_i \delta \bar{r}_i = 0.$$

Вторая сумма равна нулю по условию идеальности связей. Поэтому остается принять, что

$$\sum_{i=1}^N \bar{F}_i \delta \bar{r}_i = 0.$$

Следовательно, необходимость принципа доказана.

Для доказательства достаточности принципа, то есть наличия равновесия при выполнении условия  $\delta A = 0$ , предположим обратное, что

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \delta \bar{r}_i = 0,$$

но система не находится в равновесии, хотя скорости точек равны нулю.

На основании теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме сумма элементарных работ всех внешних сил и реакций связей на множестве виртуальных перемещений системы будет положительна, так как при переходе из состояния покоя в состояние движения система получит положительное приращение кинетической энергии. Поэтому:

$$\sum_{i=1}^N (\bar{F}_i + \bar{R}_i) \delta \bar{r}_i > 0.$$

По условию идеальности связей

$$\sum_{i=1}^N \bar{R}_i \delta \bar{r}_i = 0,$$

и, следовательно

$$\sum_{i=1}^N \bar{F}_i \delta \bar{r}_i > 0.$$

Это противоречит исходному положению (20.4.1). Поэтому остается принять, что система находится в равновесии, что доказывает достаточность принципа виртуальных перемещений.

Если внешние силы консервативны, то есть существует потенциальная энергия

$$\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N),$$

то

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \delta \bar{r}_i = \sum_{i=1}^N (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i) = \\ &= - \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} \delta z_i \right) = -\delta \Pi. \end{aligned}$$

Таким образом, принцип виртуальных перемещений выражается равенством

$$\delta\Pi = 0,$$

которое представляет собой необходимое условие экстремальности потенциальной энергии в положении равновесия.

Следовательно, необходимое и достаточное условие равновесия несвободной системы с идеальными связями под действием консервативных сил совпадает с необходимыми, но недостаточными условиями экстремума потенциальной энергии.

## 20.5. Применение принципа виртуальных перемещений

### Условия равновесия свободного твердого тела

Пусть твердое тело находится в равновесии под действием произвольной системы внешних сил. Элементарная работа этих сил выражается формулой

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \delta \bar{r}_i = \bar{F} \delta \bar{r}_O + \bar{M}_O \delta \bar{\varphi},$$

где  $\delta \bar{r}_O$  – виртуальные перемещения полюса  $O$ ;  $\delta \bar{\varphi}$  – виртуальный угол поворота вокруг произвольной мгновенной оси, проходящей через полюс  $O$ ;  $\bar{F}$  – главный вектор;  $\bar{M}_O$  – главный момент.

Поскольку здесь виртуальные перемещения тела включают в себя действительные перемещения, то

$$d\bar{r}_O \in \{\delta \bar{r}_O\} \text{ и } d\bar{\varphi} \in \{\delta \bar{\varphi}\}.$$

Согласно принципу виртуальных перемещений  $\delta A = 0$ .

Величины  $\delta \bar{r}_O$  и  $\delta \bar{\varphi}$  произвольны и независимы, то есть  $\forall \delta \bar{r}_O \neq 0$  и  $\forall \delta \bar{\varphi} \neq 0$ .

Поэтому равенство  $\delta A = 0$  можно обеспечить лишь в том случае, когда  $\bar{F} = 0$ ;  $\bar{M}_O = 0$ . А это условия статики твердого тела.

При выводе уравнений статики предполагалось, что твердое тело свободно. Однако на самом деле это не так. Используя принцип освобожденности от связей, включив реакции связей в число внешних сил, получаем возможность применять принцип виртуальных перемещений для нахождения реакций связей.

В качестве примера рассмотрим балку (рис. 20.2). Определим ее опорные реакции. Отбросим опору  $B$ . Балка получает возможность вращаться вокруг опоры  $A$ . Виртуальное перемещение – это угол поворота  $\delta \varphi$ .

Элементарная работа

$$\delta A = P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 - R_B \delta_B = 0,$$

где  $\delta_1, \delta_2$  – элементарные перемещения в точках приложения сил;  $\delta_B$  – элементарная работа перемещения опоры  $B$ .

Учитывая, что  $\delta_1 = a_1 \delta \varphi$ ;  $\delta_2 = a_2 \delta \varphi$ ;  $\delta_B = l \delta \varphi$ , получим:

$$R_B = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{l}.$$

Аналогично: 
$$R_A = \frac{P_1(l - a_1) + P_2(l - a_2)}{l}.$$

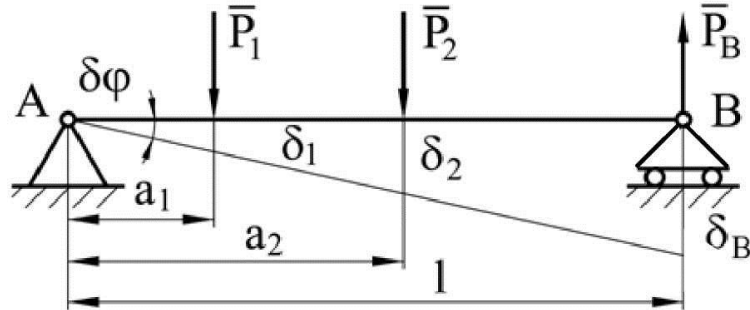


Рис. 20.2

### Определение реакций составных тел

Использование аналитических методов при решении задач статики составных конструкций с помощью принципа виртуальных перемещений часто приводит к вычислительным трудностям. Эти трудности возникают при составлении зависимостей виртуальных перемещений от вариаций координат. Однако в случае стационарных связей эта трудность может быть успешно преодолена.

Метод основан на эквивалентной формулировке принципа виртуальных перемещений в виде принципа виртуальных скоростей.

Скорости точек системы в действительном движении имеют направление  $d\vec{r}_k$ , а при стационарных связях действительные перемещения являются частным случаем виртуальных:

$$d\vec{r}_k \in \{\delta\vec{r}_k\}.$$

Поэтому можно дать частную формулировку принципа виртуальных перемещений, заменив виртуальные перемещения  $\delta\vec{r}_k$  на «виртуальные» скорости  $\vec{v}_k^0$ , пропорциональные действительным скоростям  $\frac{d\vec{r}_k}{dt}$ .

Принцип виртуальных скоростей дается формулой

$$\sum_{k=1}^N \vec{F}_k \vec{v}_k^0 = 0$$

или

$$\sum_{k=1}^N F_k v_k^0 \cos(\vec{F}_k, \vec{v}_k) = 0.$$

Формулировка принципа виртуальных скоростей практически дословно совпадает с формулировкой принципа виртуальных перемещений:

**Необходимым и достаточным условием равновесия механической системы, подчиненной стационарным идеальным связям, является условие равенства нулю виртуальной «мощности» внешних сил, действующих на точки системы.**

Здесь под виртуальной мощностью понимается величина

$$N^0 = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \bar{v}_k^0.$$

В качестве примера рассмотрим определение реакций составной конструкции, изображенной на рис. 20.3, а.

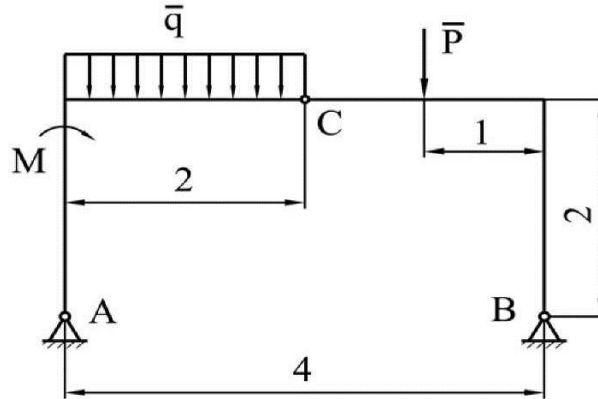


Рис. 20.3, а

Необходимо найти составляющие  $\bar{R}_{Ax}$  и  $\bar{R}_{Ay}$  реакции опоры  $A$ . Для этого отбрасываем ту связь, в которой эта реакция или ее составляющая возникает. Так, например, допуская подвижность опоры  $A$  в направлении оси  $y$  (рис. 20.3, б) и включив неизвестную  $\bar{R}_{Ay}$  в число внешних сил, следует построить виртуальное поле скоростей образовавшейся подвижной системы с одной степенью свободы. В данном случае мгновенный центр скоростей части  $AC$  и центра вращения  $CB$  совпадают, – это опора  $B$ . Поэтому виртуальные угловые скорости обеих частей равны:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega,$$

где  $\omega_1$  – виртуальная угловая скорость части  $AC$ ;  $\omega_2$  – виртуальная угловая скорость части  $CB$ .



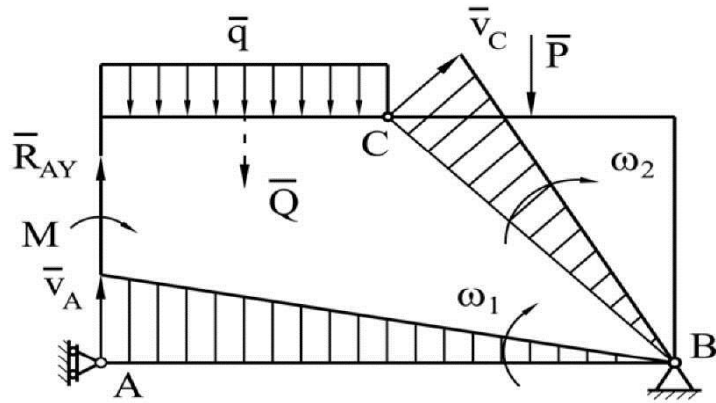


Рис. 20.3, б

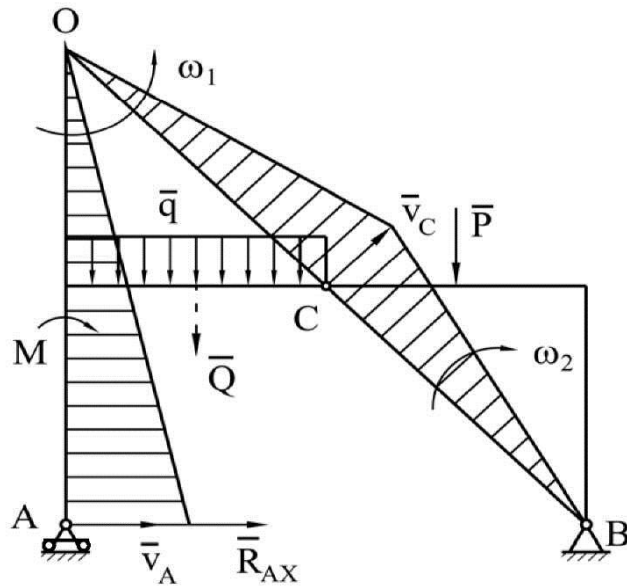


Рис. 20.3, в

Уравнение виртуальных мощностей

$$\bar{R}_{AY} \cdot 4\omega - q \cdot 2 \cdot 3\omega - P \cdot l\omega + M\omega = 0.$$

Здесь  $4\omega$  – виртуальная скорость точки A в направлении y;  $3\omega$  – проекция виртуальной скорости точки приложения равнодействующей распределенной нагрузки на направление ее действия;  $l\omega$  – проекция виртуальной скорости точки приложения силы  $P$  на направление ее действия;  $\omega$  – виртуальная угловая скорость вращения сосредоточенного момента  $M$ .

Из уравнения виртуальных мощностей получаем

$$\bar{R}_{AY} = \frac{q \cdot 6 + P \cdot l - M}{4}.$$

Аналогично составляем уравнения виртуальных мощностей для определения составляющей реакции  $\bar{R}_{AX}$  (рис. 20.3, в):

$$\bar{R}_{AX} \cdot 4\omega - M\omega - q \cdot 2 \cdot l\omega - P \cdot l = 0;$$

$$\bar{R}_{AX} = \frac{M + P + q \cdot 2}{4}.$$

Здесь мгновенный центр виртуальных скоростей для  $AC$  – точка  $O$ , а для части  $CB$  – точка  $B$ . Поэтому,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ .

### Рычаг Жуковского

Решение задач на равновесие плоских многосвязных механизмов с помощью принципа виртуальных перемещений так же, как и решение задач статики составных конструкций, связано с вычислительными трудностями. Эти трудности также возникают при составлении зависимостей виртуальных перемещений точек от вариаций координат. В 1912 г. Н. Е. Жуковский предложил графоаналитический метод решения задач на равновесие плоских многосвязных механизмов, основанный на принципе виртуальных скоростей. Этот метод получил название «рычаг Жуковского».

Принцип виртуальных скоростей в случае равновесия системы дается

$$\text{формулой} \quad \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \bar{v}_k = 0, \quad (20.5.1)$$

$$\text{или} \quad \sum_{k=1}^N F_k v_k \cos(\bar{F}_k, \bar{v}_k) = 0.$$

Если силы повернуть на угол  $\pi/2$ , то, чтобы сохранить выражение (20.5.1), необходимо написать

$$\sum_{k=1}^N F_k v_k \sin(\bar{F}_k^*, \bar{v}_k) = 0.$$

Но это уже моменты сил  $\bar{F}_k^*$ , повернутых на  $\pi/2$ , приложенных к концам вектора  $v_k$ , относительно полюса плана скоростей.

Поэтому решение задач можно проводить в следующей последовательности:

1. Вычертить схему механизма в рассматриваемом положении;
2. Изобразить на чертеже внешние силы;
3. Задавшись скоростью одной из точек механизма, построить для данного положения механизма план скоростей;
4. Приложить все внешние силы на плане скоростей к концам соответствующих векторов скоростей. Затем эти силы надо повернуть по часовой стрелке на угол  $90^\circ$ .
5. План скоростей считать жесткой фигурой (рычаг Жуковского) и написать уравнения ее равновесия. Из условия равновесия плоской фигуры находится неизвестная сила.

Недостаток «рычага Жуковского» в том, что построение приходится повторять для каждого положения механизма.

Рассмотрим примеры.

1. Рассмотрим шарнирный четырехзвенник (рис. 20.4).

Требуется найти силу  $\bar{F}_D$ .

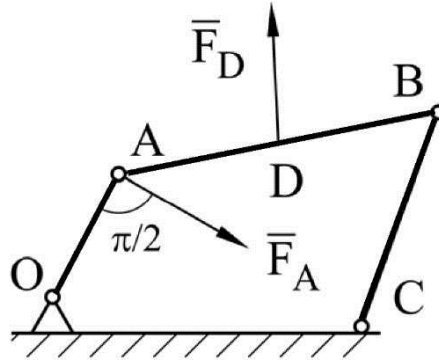


Рис. 20.4

Применение аналитического метода при решении этой задачи нецелесообразно, поэтому воспользуемся рычагом Жуковского. Найдем силу  $\bar{F}_D$ . Построим план скоростей (рис. 20.5).

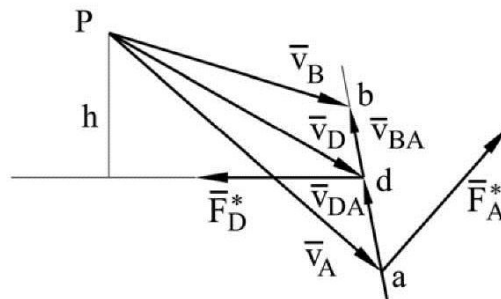


Рис. 20.5

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{v}_B &= \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}; \bar{v}_D = \bar{v}_A + \bar{v}_{DA}; \\ \frac{v_{DA}}{v_{BA}} &= \frac{ad}{ab} = \frac{AD}{AB}; \\ F_D &= \frac{F_A v_A}{h}. \end{aligned}$$

Для нового положения построение приходится повторять сначала.

2. Требуется найти силу  $\bar{F}_E$  для механизма, изображенного на рис. 20.6.

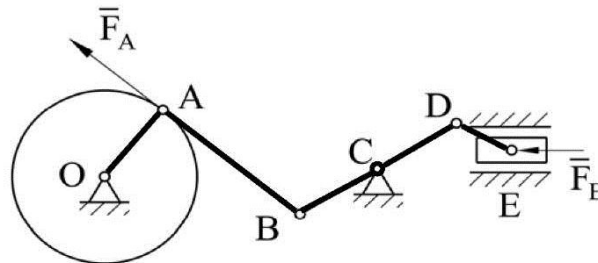


Рис. 20.6

Строим план скоростей, считая, что скорость точки А задана. Пользуемся формулами  $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$ ,  $\bar{v}_E = \bar{v}_D + \bar{v}_{ED}$ . Из равновесия «рычага Жуковского» (рис. 20.7) имеем

$$F_E = \frac{v_A}{v_E} F_A = \frac{Pa}{Pe} F_A.$$

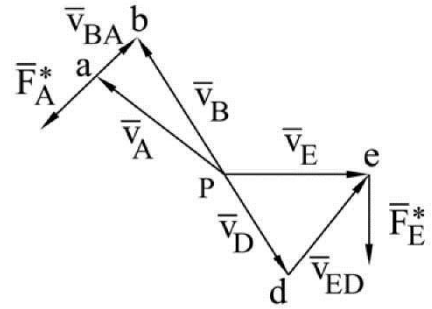


Рис. 20.7

## 20.6. Принцип Даламбера–Лагранжа. Общее уравнение динамики

Принцип Даламбера–Лагранжа представляет собой синтез принципа виртуальных перемещений Лагранжа и принципа Даламбера.

Рассмотрим механическую систему, подчиненную двусторонним идеальным связям. Для каждой точки системы, согласно принципу Даламбера, можно написать уравнение

$$\bar{F}_i + \bar{R}_i - m_i \ddot{\bar{r}}_i = 0, i = \overline{1, N}. \quad (20.6.1)$$

Умножив скалярно выражения (20.6.1) на виртуальные перемещения  $\delta \bar{r}_i$ , после суммирования, получим

$$\sum_{i=1}^N (\bar{F}_i - m_i \ddot{\bar{r}}_i) \delta \bar{r}_i + \sum_{i=1}^N \bar{R}_i \delta \bar{r}_i = 0. \quad (20.6.2)$$

С учетом условия идеальности связей  $\sum_{i=1}^N \bar{R}_i \delta \bar{r}_i = 0$ ,

из (20.6.2) следует

$$\sum_{i=1}^N (\bar{F}_i - m_i \ddot{\bar{r}}_i) \delta \bar{r}_i = 0. \quad (20.6.3)$$

То есть, *движение механической системы, подчиненной идеальным связям, происходит таким образом, что для каждого момента времени элементарная работа внешних сил и сил инерции на множестве виртуальных перемещений равна нулю.*

Уравнение (20.6.3) называется общим уравнением динамики и может служить средством для решения задач.

## 20.7. Обобщенные координаты. Тожества Лагранжа

Чтобы придать методам механики большую гибкость, общность и эффективность, вводят понятие об обобщенных координатах.

Обобщенными координатами механической системы называется совокупность параметров  $q_j$ , однозначно определяющих ее положение в пространстве.

В качестве обобщенных координат могут быть выбраны произвольные величины: расстояния, углы поворота, площади, объемы. Таким образом, размерности обобщенных координат могут быть любыми.

Декартовы координаты также могут играть роль обобщенных координат. Так, например, положение твердого тела в пространстве определяется тремя декартовыми координатами полюса  $x_0, y_0, z_0$  и тремя углами Эйлера  $\vartheta, \varphi, \psi$ .

Величины  $\dot{q}_j, \ddot{q}_j$  называются соответственно обобщенными скоростями и ускорениями механической системы.

При наличии голономных связей между радиус-векторами точек системы и обобщенными координатами существуют зависимости:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(t, q_j), \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (20.7.1)$$

Эти функции являются однозначными и непрерывными.

При наличии связей, выражаемых уравнениями (20.7.1), действительные перемещения находим из соотношений:

$$d\bar{r}_i = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} dq_j, \quad (20.7.2)$$

в то время как виртуальные перемещения выражаются через вариации обобщенных координат по формулам:

$$\delta \bar{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (20.7.3)$$

Найдем скорость  $i$ -й точки:

$$\bar{v}_i = \dot{\bar{r}}_i = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (20.7.4)$$

Скорости  $\bar{v}_i$  являются линейными формами от обобщенных скоростей  $\dot{q}_j$ .

Поэтому:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}. \quad (20.7.5)$$

Формула (20.7.5) представляет собой тождество Лагранжа. В символической форме она может быть переписана так:

$$\frac{\partial \frac{d}{dt} \bar{r}_i}{\partial \frac{d}{dt} q_j} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}.$$

То есть, как будто бы оператор дифференцирования по времени  $\frac{d}{dt}$  в левой части формулы можно сократить.

Найдем частную производную от скорости  $\bar{v}_i$ , определенной по формуле (20.7.4), по  $q_k$ :

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_k \partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_j. \quad (20.7.6)$$

Производная по времени от частной производной  $\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}$  будет:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial t \partial q_k} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_j. \quad (20.7.7)$$

Вторые смешанные производные радиус-векторов не зависят от порядка дифференцирования в силу предположений, наложенных на функциональные зависимости  $\bar{r}_i = \bar{r}_i(t, q_j)$ .

Поэтому, сравнивая выражения (20.7.6) и (20.7.7), приходим к выводу, что они равны между собой. То есть,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_k}. \quad (20.7.8)$$

Это второе тождество Лагранжа. Оно также может быть записано в символической форме:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \frac{d}{dt} \bar{r}_i}{\partial q_k}.$$

Иными словами, здесь оператор дифференцирования по времени  $\frac{d}{dt}$  допускает перестановку с оператором частного дифференцирования  $\frac{\partial}{\partial q_k}$ .

## 20.8. Принцип виртуальных перемещений в обобщенных координатах

Согласно принципу виртуальных перемещений в состоянии равновесия элементарная работа внешних сил  $\delta A$  на множестве виртуальных перемещений  $\delta \bar{r}_i$  равна нулю:

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \delta \bar{r}_i = 0. \quad (20.8.1)$$

Соотношение (20.8.1) эквивалентно уравнениям равновесия и содержит в себе всю информацию о равновесии механической системы. Осуществим в нем замену переменных, в качестве которых возьмем обобщенные координаты  $q_j$ . Виртуальные перемещения  $\delta \bar{r}_i$  выражаются через вариации обобщенных координат при помощи соотношений:

$$\delta \bar{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Подставляя их в равенство (20.8.1), получаем:

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \delta \bar{r}_i = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0. \quad (20.8.2)$$

Величины

$$\sum_{i=1}^N \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = Q_j \quad (20.8.3)$$

называются обобщенными силами.

Учитывая обозначения (20.8.3), вместо выражения (20.8.2) получим:

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \delta \bar{r}_i = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j = 0.$$

Следовательно, аналитическое выражение принципа виртуальных перемещений в обобщенных координатах записывается следующим образом:

$$\delta A = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j = 0. \quad (20.8.4)$$

Казалось бы, принципиальной разности между выражениями (20.8.1) и (20.8.4) нет. Однако, в силу того, что вариации обобщенных координат независимы друг от друга и произвольны, то есть  $\forall \delta q_j \neq 0$ , то равенство (20.8.4) гарантировано при условии, когда

$$Q_j = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (20.8.5)$$

Иными словами, принцип виртуальных перемещений в обобщенных координатах приводит к требованию обращения в нуль всех обобщенных сил в состоянии равновесия механической системы. При вычислении обобщенных сил совсем не обязательно пользоваться общей формулой (20.8.3). Часто гораздо удобнее выписать выражение элементарной работы. Коэффициенты при вариации обобщенных координат будут соответствующими обобщенными силами.

## 20.9. Примеры вычисления обобщенных сил

### Потенциальная сила

Потенциальные или позиционные силы определяются как соответствующие частные производные от потенциальной энергии:

$$F_{x_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}; \quad F_{y_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}; \quad F_{z_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_i}.$$

Иначе эти силы называются консервативными. Воспользуемся общей формулой для обобщенных сил (20.8.3):

$$\begin{aligned} Q_j^H &= \sum_{i=1}^N \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = \\ &= -\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}. \end{aligned} \quad (20.9.1)$$

В состоянии равновесия  $Q_j = 0$ , поэтому потенциальная энергия, если нет других сил, принимает экстремальные значения. Это необходимое условие экстремума.

### Силы, пропорциональные скорости

Предположим, что силы сопротивления, действующие на точки системы пропорциональны скоростям их движения:

$$\bar{F}_i = -b_i \bar{v}_i, \quad i = \overline{1, N},$$

где  $b_i > 0$  – коэффициенты сопротивления, являющиеся постоянными величинами.

Обобщенные силы, согласно общей формуле, будут:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N b_i \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} b_i \bar{v}_i \cdot \bar{v}_i = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^N \frac{b_i v_i^2}{2}.$$

Введем обозначение

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N b_i v_i^2. \quad (20.9.2)$$

Функция  $\Phi$  называется функцией рассеяния энергии или функцией Релея.

Таким образом, 
$$Q_j = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \Phi. \quad (20.9.3)$$

При стационарных голономных связях, когда  $\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_j), i = \overline{1, N}, j = \overline{1, n}$ , функция Релея – однородная квадратичная форма обобщенных скоростей.

Действительно, для скоростей  $\bar{v}_i$  имеем формулу

$$\bar{v}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (20.9.4)$$

Подставим (20.9.4) в выражение для функции Релея (20.9.3), получаем:

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} b_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \sum_{l=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l,$$

где  $b_{jl} = b_{lj} = \sum_{i=1}^N b_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l}$  – называются обобщенными коэффициентами сопротивления.

Согласно теореме об изменении механической энергии:

$$dE = \sum_{j=1}^n Q_j dq_j = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j.$$

То есть, убыль механической энергии равна элементарной работе непотенциальных сил. Иначе:

$$\frac{dE}{dt} = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j.$$

Но, поскольку функция Релея при стационарных связях является однородной квадратичной формой обобщенных скоростей, то по теореме Эйлера об однородных функциях

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2\Phi,$$

и, стало быть:

$$\frac{dE}{dt} = -2\Phi.$$

Таким образом, скорость уменьшения механической энергии равна удвоенной функции Релея.



## 21. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НЕСВОБОДНОЙ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

### 21.1. Уравнения Лагранжа первого рода

Рассмотрим систему  $N$  материальных точек, подчиненных  $r$  голономным связям:

$$f_k(t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) = 0, \quad k = \overline{1, r}, \quad (21.1.1)$$

и  $r'$  неголономным связям

$$d_k + \sum_{i=1}^N (a_{ki} \dot{x}_i + b_{ki} \dot{y}_i + c_{ki} \dot{z}_i) = 0, \quad k = \overline{1, r'}. \quad (21.1.2)$$

Поскольку связи сохраняются в варьированных состояниях, то есть наряду с (21.1.1) имеет место равенство

$$f_k(t, x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1, z_1 + \delta z_1, \dots, x_N + \delta x_N, y_N + \delta y_N, z_N + \delta z_N) = 0,$$

то обращается в нуль и вариация  $\delta f_k$  функции  $f_k$ :

$$\delta f_k = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_k}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_k}{\partial z_i} \delta z_i \right) = \sum_{i=1}^N \text{grad}_i f_k \cdot \delta \bar{r}_i = 0, \quad (21.1.3)$$

где

$$\text{grad}_i f_k = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \bar{i}_1 + \frac{\partial f_k}{\partial y_i} \bar{i}_2 + \frac{\partial f_k}{\partial z_i} \bar{i}_3, \quad k = \overline{1, r},$$

где  $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$  – координатные орты  $oxyz$ .

Кроме того, уравнения (21.1.2) накладывают на вариации еще  $r'$  условий

$$\sum_{i=1}^N (a_{ki} \delta x_i + b_{ki} \delta y_i + c_{ki} \delta z_i) = \sum_{i=1}^N \bar{e}_{ki} \delta \bar{r}_i = 0, \quad k = \overline{1, r'}, \quad (21.1.4)$$

где вектор

$$\bar{e}_{ki} = a_{ki} \bar{i}_1 + b_{ki} \bar{i}_2 + c_{ki} \bar{i}_3.$$

Умножим каждое уравнение (21.1.3) и (21.1.4) соответственно на неопределенные пока множители  $\lambda_k$  и  $\lambda'_k$ , сложим сначала между собой, а затем с общим уравнением динамики (20.6.3). Перегруппировав слагаемые, получим:

$$\sum_{i=1}^N \left( \bar{F}_i - m \ddot{\bar{r}}_i + \sum_{k=1}^r \lambda_k \text{grad}_i f_k + \sum_{k=1}^{r'} \lambda'_k \bar{e}_{ki} \right) \delta \bar{r}_i = 0. \quad (21.1.5)$$

Уравнение (21.1.5) в развернутом виде запишется так:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left[ \left( F_{ix} - m_i \ddot{x}_i + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{r'} \lambda'_k a_{ki} \right) \delta x_i + \right. \\ & + \left( F_{iy} - m_i \ddot{y}_i + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_i} + \sum_{k=1}^{r'} \lambda'_k b_{ki} \right) \delta y_i + \\ & \left. + \left( F_{iz} - m_i \ddot{z}_i + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_i} + \sum_{k=1}^{r'} \lambda'_k c_{ki} \right) \delta z_i \right] = 0. \end{aligned} \quad (21.1.6)$$

Подчиним  $r + r'$  неопределенных множителей  $\lambda_k$  и  $\lambda'_k$  условиям обращения в нуль  $r + r'$  выражений в каких-либо круглых скобках в соотношении (21.1.6). В целом выражение (21.1.6) должно обращаться в нуль при любых значениях вариаций  $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ , среди которых  $3N - r - r'$  уже можно считать независимыми. Поэтому выражения и в оставшихся  $3N - r - r'$  круглых скобках также должны обращаться в нуль.

Следовательно, все выражения в  $3N$  круглых скобках в формуле (20.7.6) должны обращаться в нуль. Это приводит к системе уравнений:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= F'_{ix} + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{r'} \lambda'_k a_{ki}, \\ m_i \ddot{y}_i &= F'_{iy} + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_i} + \sum_{k=1}^{r'} \lambda'_k b_{ki}, \\ m_i \ddot{z}_i &= F'_{iz} + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_i} + \sum_{k=1}^{r'} \lambda'_k c_{ki}, \end{aligned} \quad (21.1.7)$$

которые в векторном виде записываются так:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}'_i + \sum_{k=1}^r \lambda_k \text{grad}_i f_k + \sum_{k=1}^{r'} \lambda'_k \vec{e}_{ki}. \quad (21.1.8)$$

Это уравнения Лагранжа первого рода, которые совместно с  $r + r'$  уравнениями связей (21.1.1) и (21.1.2) образуют замкнутую систему  $3N + r + r'$  уравнений, содержащих неизвестные:

$$x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda'_1, \dots, \lambda'_{r'}.$$

Воспользуемся принципом освобождения от связей и составим уравнения динамики системы непосредственно исходя из второго закона Ньютона:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}'_i + \vec{R}_i. \quad (21.1.9)$$

Сопоставляя уравнения (21.1.9) и (21.1.8), приходим к выводу, что реакции связей находятся по формулам:

$$\vec{R}_i = \sum_{k=1}^r \lambda_k \text{grad}_i f_k + \sum_{k=1}^{r'} \lambda'_k \vec{e}_{ki}, \quad i = \overline{1, N} \quad (21.1.10)$$

или в проекциях

$$\begin{aligned} R_{ix} &= \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{r'} \lambda'_k a_{ki}, \\ R_{iy} &= \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_i} + \sum_{k=1}^{r'} \lambda'_k b_{ki}, \\ R_{iz} &= \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_i} + \sum_{k=1}^{r'} \lambda'_k c_{ki}. \end{aligned} \quad (21.1.11)$$

Уравнения Лагранжа первого рода обычно решают, выразив сначала  $r + r'$  множителей  $\lambda_k$  и  $\lambda'_k$  из каких-либо уравнений (21.1.7) и исключив их из  $3N - r - r'$  остальных уравнений. Затем, объединив эти  $3N - r - r'$  уравнений с

$r + r'$  уравнениями связей (21.1.1) и (21.1.2), получают систему  $3N$  уравнений, из которых находят  $3N$  координат, как функции времени, после чего определяют множители  $\lambda_k$  и  $\lambda'_k$  и реакции связей  $R_{ix}, R_{iy}, R_{iz}$ .

Уравнения Лагранжа первого рода приобретают особенно отчетливый смысл при движении материальной точки по поверхности или кривой. Пусть уравнение поверхности задано уравнением

$$f(t, x, y, z) = 0. \quad (21.1.12)$$

Поверхность считается идеально гладкой, но при этом она движется и деформируется. То есть связь (21.1.12) является идеальной. Поэтому реакция  $\bar{R}$  направлена по нормали к этой поверхности. Градиент

$$\text{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x} \bar{i}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{i}_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{i}_3 \quad (21.1.13)$$

представляет собой вектор, который также направлен по нормали к этой поверхности. Условие коллинеарности реакции  $\bar{R}$  и  $\text{grad}f$  записывается следующим образом

$$\frac{R_x}{\partial f / \partial x} = \frac{R_y}{\partial f / \partial y} = \frac{R_z}{\partial f / \partial z} = \lambda,$$

где  $\lambda$  – некоторая неизвестная величина, представляющая собой множитель связи. Таким образом:

$$R_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}; R_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}; R_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (21.1.14)$$

Формулы (21.1.14) являются частным случаем формул (21.1.11), а уравнения (20.7.7) в данном случае запишутся так:

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}; m\ddot{y} = F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}; m\ddot{z} = F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (21.1.15)$$

при этом очевидно, что  $\bar{R} = \lambda \text{grad}f$ .

Три уравнения (21.1.15) и уравнение связи (21.1.12) содержат четыре неизвестных. Аналогично получаются уравнения Лагранжа первого рода в случае движения по гладкой кривой. Уравнение кривой можно представить, как пересечение двух поверхностей:

$$f_1(t, x, y, z) = 0; f_2(t, x, y, z) = 0.$$

Согласно (21.1.7), получаем уравнения Лагранжа первого рода с двумя множителями связей:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ m\ddot{z} &= F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}, \end{aligned}$$

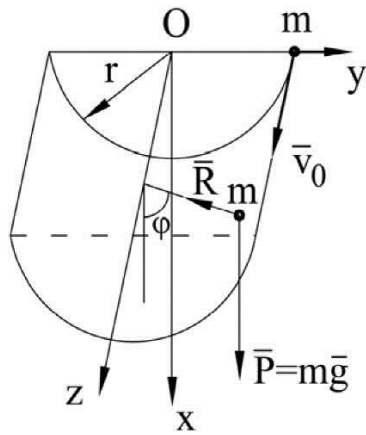


Рис. 21.1

при этом реакция кривой  $\bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2$ , где  $\bar{R}_1 = \lambda_1 \text{grad} f_1$ ,  $\bar{R}_2 = \lambda_2 \text{grad} f_2$ .

Пример: Рассмотрим движение тяжелой материальной точки массы  $m$  по внутренней поверхности цилиндра радиуса  $r$  (рис. 21.1). Ось цилиндра горизонтальна. Начало координат расположим на оси цилиндра в точке  $O$ . Ось  $x$  направим вертикально вниз, а ось  $z$  вдоль по оси цилиндра.

Начальное положение точки определяется координатами  $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$ . Начальная скорость  $\dot{x}_0 = v_{x0} = 0, \dot{y}_0 = v_{y0} = 0, \dot{z}_0 = v_{z0} = v_0$ . На материальную точку действует сила тяжести  $\bar{P} = m\bar{g}$  и реакция поверхности  $\bar{R}$ . Уравнение связи представляет собой уравнение цилиндрической поверхности:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Найдем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x; \frac{\partial f}{\partial y} = 2y; \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Учитывая, что  $F_x = mg, F_y = F_z = 0$ , согласно (21.1.15) получим:

$$m\ddot{x} = mg + 2\lambda x; m\ddot{y} = 2\lambda y; m\ddot{z} = 0. \quad (21.1.16)$$

Из третьего уравнения (21.1.16) с учетом начальных условий следует:

$$z = v_0 t.$$

Умножим первое уравнение (21.1.16) на  $y$ , а второе – на  $x$  и вычтем из первого второе:

$$m(\ddot{x}y - \ddot{y}x) = mgy. \quad (21.1.17)$$

Затем умножим первое уравнение на  $x$ , а второе – на  $y$  и сложим:

$$m(\ddot{x}x + \ddot{y}y) = mgx + 2\lambda(x^2 + y^2). \quad (21.1.18)$$

Перейдем к цилиндрическим координатам:

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z.$$

Найдем производные:

$$\dot{x} = -r\dot{\varphi} \sin \varphi, \dot{y} = r\dot{\varphi} \cos \varphi,$$

$$\ddot{x} = -r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi,$$

$$\ddot{y} = r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi.$$

Подставим соответствующие производные в уравнения (21.1.17):

$$m(-r^2\ddot{\varphi} \sin^2 \varphi - r^2\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \sin \varphi - r^2\ddot{\varphi} \cos^2 \varphi + r^2\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi) = mgr \sin \varphi.$$

Откуда следует:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{r} \sin \varphi = 0,$$

то есть известное уравнение колебаний математического маятника. Запишем это уравнение в виде:

$$\dot{\varphi} d\varphi = -\frac{g}{r} \sin \varphi d\varphi.$$

Интегрируя, получим:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{g}{r} \cos \varphi + C.$$

Воспользуемся начальными условиями:

$$\varphi_0 = \pi/2, \dot{\varphi}_0 = 0.$$

Тогда

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{r} \cos \varphi. \quad (21.1.19)$$

Движение ограничено областью  $\cos \varphi > 0$ , следовательно, угол  $\varphi$  будет находиться в интервале  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ . Воспользуемся уравнением (21.1.18) и подставим в него производные:

$$\begin{aligned} m(-r^2 \ddot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi - r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + r^2 \ddot{\varphi} \cos \varphi \sin \varphi - r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi) = \\ = mgr \cos \varphi + 2\lambda(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi). \end{aligned}$$

Откуда найдем:  $-mr^2 \dot{\varphi}^2 = mgr \cos \varphi + 2\lambda r^2$ .

Учитывая (21.1.19), получим формулу для множителя связи:

$$\lambda = -\frac{3mg}{2r} \cos \varphi.$$

В соответствии с формулами (21.1.14) находим реакции связи:

$$R_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = -3mg \cos^2 \varphi; R_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = -3mg \sin \varphi \cos \varphi; R_z = 0.$$

Модуль реакции  $R = 3mg \cos \varphi$ ,  $R = 0$  при  $\varphi = \pm\pi/2$ , максимальное значение реакции  $R = R_{\max} = 3mg$  при  $\varphi = 0$ .

## 21.2. Уравнения Лагранжа второго рода

Уравнения Лагранжа второго рода являются следствием принципа Лагранжа–Даламбера для механических систем, подчиненных идеальным голономным связям, то есть, когда радиус-векторы  $\bar{r}_i$  точек системы определяются соотношениями:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(t, q_j), i = \overline{1, N}, j = \overline{1, n}. \quad (21.2.1)$$

В соотношениях (21.2.1)  $q_j$  – обобщенные координаты. Зависимости (21.2.1) являются однозначными, непрерывными и, по крайней мере, дважды дифференцируемыми функциями обобщенных координат.

Виртуальные перемещения  $\delta \bar{r}_i$  выражаются через вариации обобщенных координат  $\delta q_j$  согласно формулам:

$$\delta \bar{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (21.2.2)$$

Уравнения Лагранжа второго рода есть результат замены переменных в общем уравнении динамики (20.6.3) на обобщенные координаты:

$$\sum_{i=1}^N (\bar{F} - m_i \ddot{\bar{r}}_i) \delta \bar{r}_i = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\bar{r}}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0. \quad (21.2.3)$$

Здесь величины  $\sum_{i=1}^N \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = Q_j$  – представляют собой обобщенные силы,

$$-\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\bar{r}}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = S_j \text{ – обобщенные силы инерции.}$$

Вопрос об обобщенных силах обсуждался ранее. Были получены формулы для потенциальных обобщенных сил:

$$Q_j^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j},$$

где  $\Pi$  – потенциальная энергия системы и обобщенных сил, обусловленных вязким сопротивлением:

$$Q_j^{\nu} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j},$$

где  $\Phi$  – функция Релея.

Рассмотрим преобразование второго слагаемого в выражении (21.2.3):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\bar{r}}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\bar{r}}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\bar{r}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_j} - \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}, \end{aligned}$$

где  $T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \bar{v}_i \bar{v}_i}{2} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2}$  – кинетическая энергия системы. Кроме того, здесь

мы воспользовались тождествами Лагранжа (20.7.5) и (20.7.8). По аналогии с обобщенной силой  $Q_j$ , данное слагаемое можно назвать обобщенной силой инерции. Итак, вместо (21.2.3) мы можем написать:

$$\sum_{i=1}^N (\bar{F} - m_i \ddot{\bar{r}}_i) \delta \bar{r}_i = \sum_{j=1}^n \left( Q_j - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0. \quad (21.2.4)$$

Но, поскольку  $\delta q_j$  – независимые величины и одновременно не обращаются в нуль, иначе  $\forall \delta q_j \neq 0$ , то равенство (21.2.4) может быть гарантировано лишь при условии, что:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (21.2.5)$$

Если в системе действуют потенциальные силы и силы вязкого сопротивления, то уравнение (21.2.5) можно записать так:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} + Q_j^*, \quad (21.2.6)$$

где  $Q_j^*$  – прочие обобщенные силы – непотенциальные и не вязкого сопротивления.

Дифференциальные уравнения (21.2.6) и есть дифференциальные уравнения Лагранжа второго рода.

Пусть механическая система в положении равновесия находится под действием только потенциальных сил. Если ограничиться рассмотрением малых отклонений системы от положения равновесия, то структура выражения ее потенциальной энергии существенно упрощается. Это, в свою очередь, ведет к упрощению процедуры вычисления обобщенных сил.

Рассмотрим, например, систему материальных точек и твердых тел под действием сил тяжести, соединенных невесомыми пружинами, находящуюся в равновесии.

В положении равновесия все обобщенные силы равны нулю, поэтому

$$Q_j^{\Pi} = - \left. \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \right|_{\forall q_j=0} = 0. \quad (21.2.7)$$

Потенциальная энергия вычисляется с точностью до постоянной, поэтому всегда можно считать

$$\Pi \Big|_{\forall q_j=0} = 0. \quad (21.2.8)$$

Сообщим системе малые отклонения от положения равновесия и разложим ее потенциальную энергию в ряд Тейлора по этим малым отклонениям:

$$\Pi(q_j) = \Pi \Big|_{\forall q_j=0} + \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \right|_{\forall q_j=0} q_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j \partial q_l} \right|_{\forall q_{j,l}=0} q_j q_l + \dots \quad (21.2.9)$$

Если учесть соотношения (21.2.7), (21.2.8), то оказывается, что ряд (21.2.9) начинается с членов второго порядка малости. Поэтому приближенное выражение потенциальной энергии таково:

$$\Pi(q_j) \approx \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n c_{jl} q_j q_l, \quad (21.2.10)$$

где  $c_{jl} = c_{lj} = \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j \partial q_l} \right|_{\forall q_{j,l}=0}$  – так называемые обобщенные жесткости системы.

Выражение (21.2.10) – однородная квадратичная форма обобщенных координат. Использование этого выражения существенно упрощает процедуру нахождения обобщенных потенциальных сил.

Рассмотрим сначала в качестве примеров колебания механических систем с одной степенью свободы.

### 1. Малые колебания физического маятника

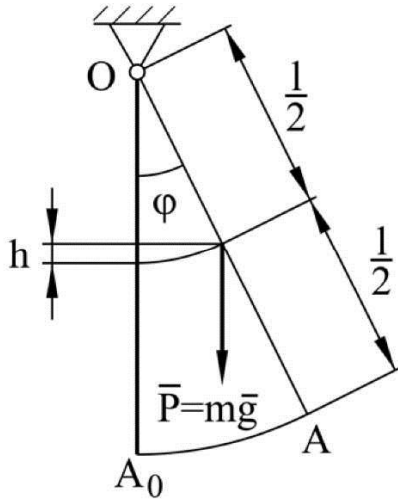


Рис. 21.2

Рассмотрим однородный стержень, подвешенный в точке  $O$  (рис. 21.2).

Силами сопротивления пренебрегаем. В качестве обобщенной координаты возьмем угол поворота относительно положения равновесия. Это консервативная система с одной степенью свободы. Поэтому уравнение Лагранжа одно:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}. \quad (21.2.11)$$

Здесь  $T = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2}$ , где  $J = \frac{ml^2}{3}$ ,  $m$  – масса стержня,  $l$  – его длина.

$$\Pi = mgh, \quad (21.2.12)$$

где  $h = \frac{l}{2}(1 - \cos \varphi)$  – высота подъема центра тяжести стержня. Найдем величины, входящие в уравнение (21.2.11)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} J\dot{\varphi} = J\ddot{\varphi} = \frac{ml^2}{3} \ddot{\varphi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0. \quad (21.2.13)$$

Представим потенциальную энергию (21.2.13) в виде ряда:

$$\Pi = mg \frac{l}{2} \left( 1 - 1 + \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^4}{4!} + \dots \right) \approx mg \frac{l}{2} \frac{\varphi^2}{2}. \quad (21.2.14)$$

Выражение потенциальной энергии (21.2.14) соответствует структуре, предсказанной из общих соображений. При этом

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mg \frac{l}{2} \varphi. \quad (21.2.15)$$

Согласно формулам (21.2.13) и (21.2.15) уравнение малых свободных колебаний таково:

$$\begin{aligned} \frac{ml^2}{3} \ddot{\varphi} + mg \frac{l}{2} \varphi &= 0, \\ \ddot{\varphi} + k^2 \varphi &= 0, \end{aligned} \quad (21.2.16)$$

где  $k = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$  – частота малых свободных колебаний.

Решение уравнения (21.2.16)



$$\varphi = \varphi_0 \cos kt + \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin kt,$$

где  $\varphi_0, \dot{\varphi}_0$  – соответственно начальное отклонение и начальная угловая скорость.

Пусть стержень оперт в точке  $A$  (рис. 21.3) на упругую пружину жесткости  $c$ . Выражение кинетической энергии будет то же самое.

Потенциальная энергия с точностью до малых высшего порядка:

$$\Pi = mg \frac{l}{2} \frac{\varphi^2}{2} + \frac{cl^2 \varphi^2}{2}. \quad (21.2.17)$$

Дифференциальное уравнение малых колебаний, согласно (21.2.13) и (21.2.17), будет

$$\frac{ml^2}{3} \ddot{\varphi} + \left( mg \frac{l}{2} + cl^2 \right) \varphi = 0. \quad (21.2.18)$$

Из (21.2.18) следует, что их частота  $k = \sqrt{\frac{3g}{2l} + \frac{3c}{m}}$ . (21.2.19)

В формуле (21.2.19) второе слагаемое под корнем обусловлено действием пружины. Расположим стержень, опирающийся в точке  $A$  на пружину, вертикально (рис. 21.4). Выражение потенциальной энергии, в связи с тем, что центр тяжести при отклонении от положения равновесия понижается, будет:

$$\Pi = -mg \frac{l}{2} \frac{\varphi^2}{2} + \frac{cl^2 \varphi^2}{2}. \quad (21.2.20)$$

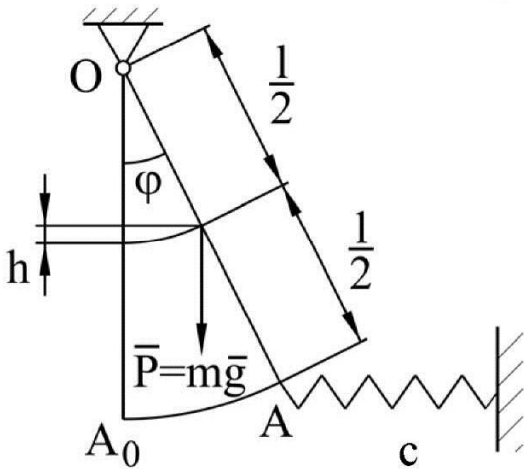


Рис. 21.3

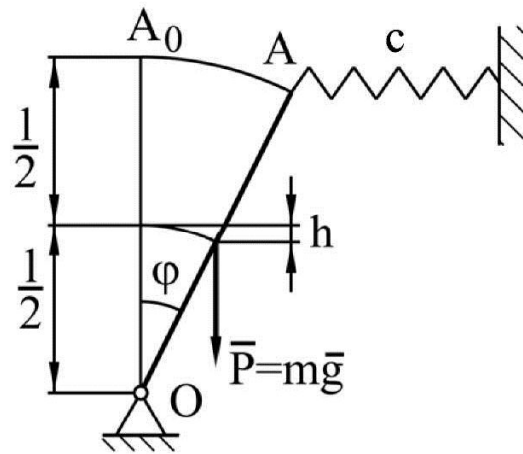


Рис. 21.4

Следовательно, согласно (21.2.20), уравнение малых свободных колебаний будет отличаться от уравнения (21.2.18) знаком величины, учитывающей смещение центра тяжести стержня:

$$\frac{ml^2}{3} \ddot{\varphi} + \left( -mg \frac{l}{2} + cl^2 \right) \varphi = 0. \quad (21.2.21)$$

При условии, что  $cl^2 > mg\frac{l}{2}$ , решение уравнения (21.2.21) такое же, как и решение уравнения (21.2.18). Если же  $cl^2 < mg\frac{l}{2}$ , то решение принципиально меняет свой вид и выражается через гиперболические функции:

$$\varphi = \varphi_0 chk^*t + \frac{\dot{\varphi}_0}{k^*} shk^*t, \quad (21.2.22)$$

где  $k^* = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{g}{l} - \frac{3c}{m}}$ .

Решение (21.2.22) неограниченно растет во времени, что говорит о том, что положение равновесия является неустойчивым.

## 2. Малые колебания сложной механической системы с одной степенью свободы

Рассматриваемая система приведена на рис. 21.5. Она состоит из сосредоточенной массы  $m_1$ , подвешенной на гибкой нити, перекинутой через идеальный блок массой  $m_2$ , являющейся однородным диском; из однородного стержня, расположенного вертикально, массой  $m_3$ , и однородного цилиндра, массой  $m_4$ , закрепленного пружиной жесткостью  $c_4$ , обладающей линейным внутренним трением с коэффициентом сопротивления  $b_1$ . Кроме того, стержень в центре имеет демпфер с коэффициентом сопротивления  $b_2$ . В точке  $B_3$  действует возмущающая сила

$$Q_3 = H_3 \sin pt.$$

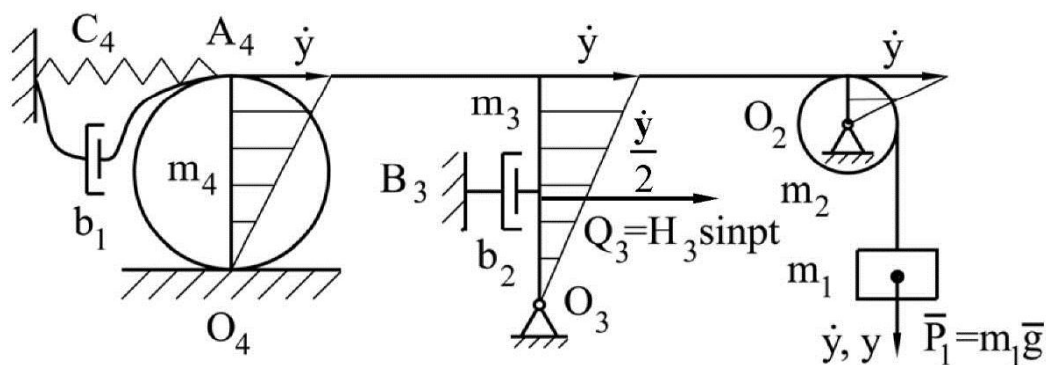


Рис. 21.5

Вначале строим поле скоростей. Поскольку малые перемещения  $y$  пропорциональны возможным скоростям  $\dot{y}$ , то можно ограничиться полем скоростей.

Рассмотрим малые свободные колебания. Это система с одной степенью свободы и, следовательно, уравнение Лагранжа одно:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (21.2.23)$$

Кинетическая энергия рассматриваемой системы:

$$T = \frac{m_1 \dot{y}^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2} + \frac{J_3 \omega_3^2}{2} + \frac{m_4 \left(\frac{\dot{y}}{2}\right)^2}{2} + \frac{J_4 \omega_4^2}{2}. \quad (21.2.24)$$

Здесь

$$J_2 = \frac{m R_2^2}{2}; \quad \omega_2 = \frac{\dot{y}}{R_2},$$

где  $R_2$  – радиус диска;

$$J_3 = \frac{m_3 l^2}{3}; \quad \omega_3 = \frac{\dot{y}}{l},$$

где  $l$  – длина стержня;

$$J_4 = \frac{m_4 R_4^2}{2}; \quad \omega_4 = \frac{\dot{y}}{2R_4},$$

где  $R_4$  – радиус однородного цилиндра.

Подставляя указанные величины в уравнение кинетической энергии (21.2.24), получим

$$T = \frac{1}{2} \left( m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{3} m_3 + \frac{3}{8} m_4 \right) \dot{y}^2. \quad (21.2.25)$$

Выражение потенциальной энергии:

$$\Pi = -m_1 g y - m_3 g \frac{l}{2} \left( 1 - \cos \frac{y}{l} \right) + \frac{c_4 (y + \lambda_{st})^2}{2} - \frac{c_4 \lambda_{st}^2}{2} \approx \frac{c_4 y^2}{2} - m_3 g \frac{y^2}{4l}. \quad (21.2.26)$$

Здесь  $\lambda_{st}$  – статическая деформация пружины, при этом  $m_1 g y = c_4 y \lambda_{st}$ ;  $\frac{y}{l}$  – угол поворота стержня. Приближенное выражение потенциальной энергии (21.2.26) имеет структуру, формулы (21.2.10), и могло быть написано сразу.

Функция рассеяния энергии Релея в данном случае такова:

$$\Phi = \frac{b_1 \dot{y}^2}{2} + \frac{b_2 \left(\frac{\dot{y}}{2}\right)^2}{2} = \frac{1}{2} \left( b_1 + \frac{b_2}{4} \right) \dot{y}^2. \quad (21.2.27)$$

Согласно выражениям (21.2.25), (21.2.26) и (21.2.27), дифференциальное уравнение малых свободных колебаний будет:

$$m \ddot{y} + b \dot{y} + c y = 0, \quad (21.2.28)$$

где  $m = m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{3} m_3 + \frac{3}{8} m_4$ ;  $b = b_1 + \frac{b_2}{4}$ ;  $c = c_4 - \frac{m_3 g}{2l}$ .

Если в уравнении (21.2.28)  $c > 0$ , то система устойчива, ее поведение описывается выражением

$$y = e^{-m} \left( y_0 \cos k_1 t + \frac{\dot{y}_0 + n y_0}{k_1} \sin k_1 t \right), \quad (21.2.29)$$

где  $n = \frac{b}{2m}$ ;  $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ ;  $k^2 = \frac{c}{m}$ , если  $k > n$ .

Здесь  $y_0$  и  $\dot{y}_0$  – начальное отклонение и начальная скорость массы  $m_1$ . При  $k < n$  тригонометрические функции в уравнении (21.2.29) превращаются в гиперболические:

$$y = e^{-m} \left( y_0 \operatorname{ch} k_1^* t + \frac{\dot{y}_0 + n y_0}{k_1^*} \operatorname{sh} k_1^* t \right), \quad (21.2.30)$$

где  $k_1^* = \sqrt{n^2 - k^2}$ .

В случае, когда  $k = n$ ,  $k_1^* = 0$ ,  $\operatorname{ch} k_1^* t = 1$  в (21.2.30). Предел  $\lim_{k_1^* \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} k_1^* t}{k_1^*} = t$ .

Поэтому вместо (21.2.30) или (21.2.29) получим

$$y = e^{-m} \left[ y_0 + (\dot{y}_0 + n y_0) t \right]. \quad (21.2.31)$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2 y = h \sin pt, \quad (21.2.32)$$

где  $h = \frac{H}{m}$  (см. рис. 21.5).

В рассматриваемом примере элементарная работа непотенциальных сил:

$$\delta' A = Q_3 \cdot \delta \left( \frac{y}{2} \right) = \frac{H_3}{2} \sin pt \cdot \delta y. \quad (21.2.33)$$

Поэтому, исходя из выражения (21.2.33), приходим к выводу, что в уравнении (21.2.32)  $h = \frac{H_3}{2m}$ . Решение уравнения (21.2.32) было рассмотрено ранее.

### 21.3. Построение математической модели сложной механической системы с одной степенью свободы

На практике при записи свободных колебаний сложных механических систем часто обнаруживается, что с незначительной погрешностью реализуется переходный процесс, соответствующий формуле (21.2.29), а при возбуждении вынужденных колебаний получается АФЧХ, соответствующая формуле

$$W(i\omega) = \frac{k}{-T_2^2 \omega^2 + i\omega T_1 + 1}, \quad (21.3.1)$$

где

$$T_2^2 = \frac{I}{\omega_l^2} = \frac{m}{c}; T_1 = \frac{b}{c}; \quad (21.3.2)$$

$k = \frac{l}{c}$  – статическая податливость. Величины  $k, T_2, T_1$  находятся непосредственно по графику. В этом случае говорят, что механическая система проявляет себя как система с одной степенью свободы. Затем, исходя из выражения (21.3.2), находится эквивалентная масса, коэффициент рассеяния энергии  $b$  и эквивалентная жесткость  $c$ , если в этом есть необходимость:

$$m = \frac{T_2^2}{k}; b = \frac{T_1}{k}; c = \frac{l}{k}. \quad (21.3.3)$$

Но дело в том, что, если чаще всего жесткость системы  $c$  линейна, то о силах трения этого сказать нельзя. Силы трения имеют сложную природу и носят нелинейный характер. Многие вопросы, связанные с силами трения, не ясны до сих пор, и поэтому их описание носит феноменологический характер. Чаще всего различают линейное трение (на самом деле не существующее в природе), силы сухого трения или Кулонова трения, силы гистерезисного трения, силы трения, пропорциональные квадрату скорости. Модель линейного трения весьма удобна, так как получаются решения в замкнутом виде. Поэтому возникает вопрос: каким образом сложный механизм трения заменить простой эквивалентной моделью? Именно на этом мы сейчас и остановимся.

Прежде всего рассмотрим некоторые соотношения для линейного трения или рассеяния энергии. Будем считать, что рассеяние энергии мало. Это условие необходимо, чтобы эффект нелинейного рассеяния энергии представить эквивалентным вязким демпфером.

Рассмотрим уравнения движения системы с одной степенью свободы:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = H \sin \omega t. \quad (21.3.4)$$

Если установившееся вынужденное колебание системы  $x = A \sin(\omega t - \varphi)$ , то рассеяние энергии  $\Delta E$  за один цикл движения:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int_{\sigma} H \sin \omega t dt = \int_0^T H \sin \omega t \dot{x} dt = \omega H A \int_0^T \sin \omega t \cos(\omega t - \varphi) dt = \\ &= H A \int_0^{2\pi} \sin \omega t \cos(\omega t - \varphi) d(\omega t) = H A \pi \sin \varphi. \end{aligned} \quad (21.3.5)$$

Здесь  $\sigma$  – путь, пройденный массой за цикл.

Уравнение (21.3.5) показывает, что если фазовый угол  $\varphi$  между силой и перемещением равен нулю, то работа за цикл  $\Delta E$  также равна нулю. Когда  $\varphi = \pi/2$ , то  $\Delta E$  равна максимуму. Таким образом, рассеяние энергии обусловлено силой, находящейся в фазе со скоростью.

Для системы с линейным рассеянием энергии, описываемой уравнением (21.2.28), имеем

$$\Delta E = \int_0^T (b\dot{x})\dot{x} dt = b\omega^2 A^2 \int_0^T \cos^2(\omega t - \varphi) dt = b\omega\pi A^2. \quad (21.3.6)$$

Если рассеяние энергии нелинейно, то для нахождения коэффициента эквивалентного демпфирования  $b_\gamma$  используется уравнение (21.3.6):

$$\Delta E = b_\gamma \omega \pi A^2. \quad (21.3.7)$$

При этом  $\Delta E$  находим по формуле

$$\Delta E = \int_0^T F_v \dot{x} dt, \quad (21.3.8)$$

где  $F_v$  – демпфирующая сила.

При сухом трении сила  $F_v$  записывается так:

$$\bar{F}_v = -F \frac{\bar{v}}{v} = -F \operatorname{sign} \bar{v}, \quad (21.3.9)$$

где символ  $\operatorname{sign}$  обозначает знак  $\bar{v}$ , то есть  $\bar{F}_v$  имеет знак, противоположный знаку скорости  $\bar{v} = \dot{x}$ . За цикл путь, пройденный массой, приближенно равен  $4A$ . Поэтому, согласно (21.3.9),

$$\Delta E = 4FA. \quad (21.3.10)$$

Следовательно, если принять во внимание (21.3.7) и (21.3.10), то

$$b_\gamma = 4 \frac{F}{\omega \pi A}. \quad (21.3.11)$$

Как видно  $b_\gamma$  – переменная величина, зависящая от величины  $F$ , частоты колебаний  $\omega$  и амплитуды перемещения  $A$ .

Рассмотрим конструкционное (гистерезисное) демпфирование.

Конструкционное демпфирование является следствием несовершенной упругости материала, из которого изготовлены колеблющиеся тела. Хорошее приближение к опыту дает предположение, что демпфирующие силы пропорциональны амплитуде деформаций и не зависят от частоты колебаний. В таком случае:

$$\bar{F}_v = -c_0 A \operatorname{sign} \bar{v}, \quad (21.3.12)$$

где  $c_0$  – коэффициент демпфирования.

Очевидно, здесь, в отличие от (21.3.11),

$$\Delta E = 4c_0 A^2, \quad (21.3.13)$$

откуда  $b_\gamma = \frac{4c_0}{\omega \pi}$ . Эта формула отличается от формулы (21.3.11) отсутствием  $A$  в

знаменателе. Обозначим  $\gamma = \frac{4c_0}{\pi c}$ . Тогда

$$b_\gamma = \frac{\gamma \cdot c}{\omega}. \quad (21.3.14)$$

Рассмотрим выражение (21.3.1), подставив в него  $\gamma$  согласно формуле (21.3.14). Тогда:

$$W(i\omega) = \frac{l}{-m\omega^2 + c(1 + i\gamma)}. \quad (21.3.15)$$

Согласно (21.3.15), для решения задачи о вынужденных колебаниях при конструкционном демпфировании необходимо все жесткостные характеристики заменить на комплексные по формуле

$$\bar{c} = c(1 + i\gamma).$$

Эта формула представляет суть гипотезы Е. С. Сорокина.

При этом формула (13.8.5) будет выглядеть так:

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{\omega_{1max}^2}{\omega_1^2} = \gamma. \quad (21.3.16)$$

#### 21.4 Свободные колебания при гистерезисном (конструкционном) рассеянии энергии

При гистерезисном рассеянии энергии, уравнение свободных колебаний может быть записано в виде

$$m\ddot{x} + c_0 \text{Asign}\dot{x} + cx = 0, \quad (21.4.1)$$

где  $A$  – переменная амплитуда колебаний.

Если демпфирование мало, то работа диссипативных сил выражается формулой (21.3.13). Решение уравнения (21.4.1) может быть получено методом энергетического баланса. Суть этого метода заключается в приравнивании работы сил сопротивления изменению потенциальной энергии системы за один период колебаний. При этом обе величины выражаются приближенно, предполагая, что процесс затухания колебаний не является слишком быстрым.

Рассмотрим потенциальную энергию в двух последовательных состояниях:

$$P_i = \frac{1}{2}cA_i^2; \quad P_{i+1} = \frac{1}{2}cA_{i+1}^2.$$

Уменьшение энергии за период

$$\Delta P = \frac{c}{2}(A_i^2 - A_{i+1}^2) = \frac{c}{2}(A_i + A_{i+1})(A_i - A_{i+1}) \approx cA_i \Delta A_i, \quad (21.4.2)$$

где  $\Delta A_i = A_i - A_{i+1}$ ,  $A_i = \frac{A_i + A_{i+1}}{2}$ .

Согласно рис. 21.6, 
$$\Delta A_i = -T \frac{dA}{dt}, \quad (21.4.3)$$

где  $T$  – период колебаний системы. Тогда, подставляя в (21.4.2) выражение для  $\Delta A_i$  (21.4.3), можно написать

$$\Delta P = -cAT \frac{dA}{dt}. \quad (21.4.4)$$

Приравняв работу сил гистерезисного сопротивления  $\Delta E$ , согласно формуле (21.3.13), к выражению (21.4.4), получим:

$$4c_0 A^2 = -cTA \frac{dA}{dt}. \quad (21.4.5)$$

Или, учитывая, что  $T = 2\pi/\omega$ , где  $\omega$  – частота колебаний, из (21.4.5), разделяя переменные, приходим к дифференциальному уравнению для амплитуды  $A$ :

$$\frac{2c_0\omega}{\pi c} dt = -\frac{dA}{A}. \quad (21.4.6)$$

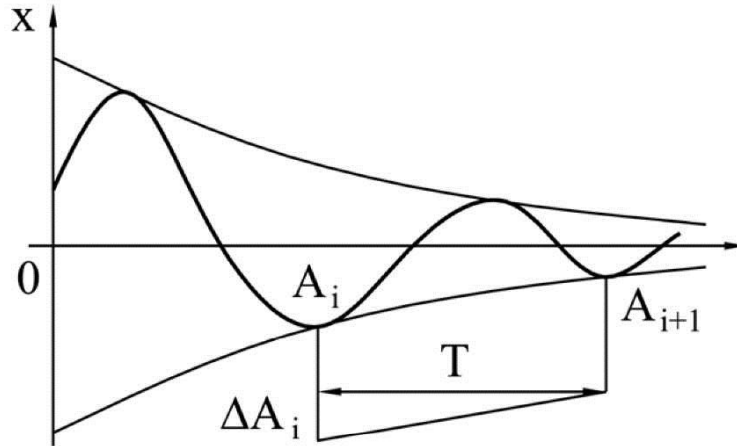


Рис. 21.6

Интегрируя (21.4.6), получаем

$$\ln \frac{A}{A_0} = -\frac{2c_0\omega}{\pi c} t.$$

Откуда

$$A = A_0 e^{-\frac{2c_0\omega}{\pi c} t},$$

или, согласно формуле (21.3.14),

$$A = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2} \omega t}. \quad (21.4.7)$$

Используя выражение (21.4.7), запишем формулу, описывающую затухающие колебания:

$$x = e^{-\frac{\gamma}{2} \omega_1 t} \left( x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + \frac{\gamma}{2} \omega_1 x_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right), \quad (21.4.8)$$

где  $\omega_1 = \omega \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}$ ;  $\omega$  – частота свободных колебаний, без учета затухания. Как видно из выражения (21.4.8) при гистерезисном рассеянии энергии процесс затухания ускоряется с ростом собственной частоты.

Если воспользоваться методом энергетического баланса для получения решения в случае вязкого рассеяния энергии, то получим формулу (21.2.29).

Величина  $\gamma^2/4$  имеет на практике порядок  $10^{-2}$ , поэтому ее можно не учитывать. Тот же результат, что и формула (21.4.8), следует из линеаризованного уравнения:

$$m\ddot{x} + \frac{\gamma \cdot c}{\omega} \dot{x} + cx = 0, \quad (21.4.9)$$

куда подставлено  $b_3$ , согласно формуле (21.3.14). При этом следует считать, что  $\omega \approx \omega_1$ . Тогда, согласно уравнению (21.4.9),  $2n = \gamma c / m\omega = \gamma\omega$ . Имея в распоря-



жении выражение (21.4.8), получаем следующую формулу для логарифмического декремента колебаний  $\delta$ :

$$\delta = \ln e^{n\gamma} \approx \frac{\gamma\omega}{2} \frac{2\pi}{\omega} = \gamma\pi. \quad (21.4.10)$$

В формуле (21.4.10) считается, что  $\omega = \omega_j$ , то есть частота свободных затухающих колебаний мало меняется в зависимости от сил трения. Постоянная времени  $T_l$  в передаточной функции (21.3.1), характеризующая рассеяние энергии, найдется по формуле

$$T_l \approx \delta/\omega\pi.$$

## 21.5. Дифференциальные уравнения малых колебаний произвольной системы твердых тел, соединенных упругими связями

### 1. Плоская система

Прежде всего отметим, что на систему наложены стационарные голономные связи, когда  $\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_j)$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Поэтому для скоростей точек имеем формулу

$$\bar{v}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (21.5.1)$$

Следовательно, кинетическая энергия – однородная квадратичная форма обобщенных скоростей:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \sum_{l=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n m_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l, \quad (21.5.2)$$

где  $m_{jl} = m_{lj} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l}$  – инерционные характеристики системы.

Так как рассматриваются малые колебания, а радиус-векторы точек системы непрерывные, однозначные и, по крайней мере, дважды дифференцируемые функции обобщенных координат, то можно считать частные производные  $\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}$  постоянными. Поэтому инерционные характеристики  $m_{jl}$  также можно считать постоянными.

Потенциальная энергия системы  $\Pi$  является однородной квадратичной формой обобщенных координат и берется согласно формуле (21.2.10).

Будем различать силы внешнего и внутреннего сопротивления. Часть функции Релея, которая обусловлена силами внешнего сопротивления, подобна структуре кинетической энергии.

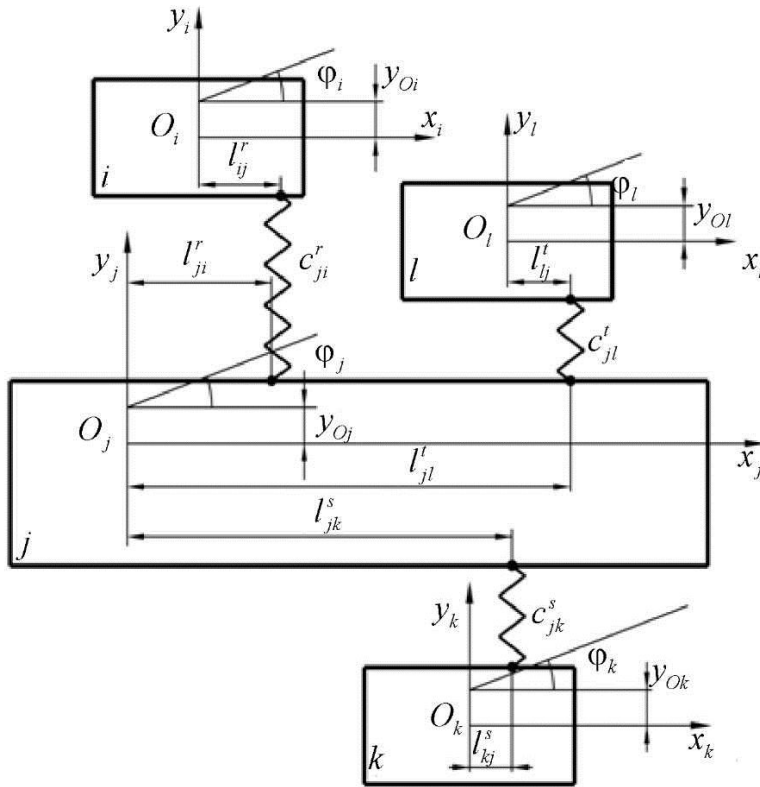


Рис. 21.7

Соответственно, часть функции Релея, которая обусловлена силами внутреннего трения, подобна по структуре потенциальной энергии.

В качестве примера рассмотрим систему твердых тел (рис. 21.7), центры масс которых имеют возможность перемещаться только вертикально. Кроме того, допускается вращение каждого из тел вокруг его центра масс.

Движение по горизонтали либо отсутствует, либо пренебрежимо мало. Количество твердых тел и количество

упругих элементов произвольно. Цепь, состоящая из тел, может быть разветвленной, то есть, каждое тело может быть соединено упругим элементом с любым другим. Кинетическая энергия  $j$ -го тела будет

$$T_j = \frac{m_j \dot{y}_j^2}{2} + \frac{J_j \dot{\phi}_j^2}{2}. \quad (21.5.3)$$

Кинетическая энергия системы в целом найдется суммированием выражений вида (21.5.3)

$$T = T_i + T_j + T_k + \dots + T_l + \dots \quad (21.5.4)$$

Потенциальная энергия пружин, соединяющих  $j$ -е и  $i$ -е твердое тело найдется по формуле

$$\Pi_{ji} = \frac{1}{2} \sum_r c_{ij}^r \left[ (y_i + l_{ij}^r \phi_i) - (y_j + l_{ji}^r \phi_j) \right]^2, \quad (21.5.5)$$

где  $r$  – число пружин, соединяющих  $j$ -е и  $i$ -е тело.

Полная потенциальная энергия упругих элементов будет суммой выражений (21.5.5) вида:

$$\Pi = \Pi_{ij} + \Pi_{jk} + \dots + \Pi_{jl} + \dots \quad (21.5.6)$$

Функция Релея повторяет структуру выражений (21.5.4) и (21.5.6):

$$\Phi = \Phi_i + \Phi_j + \Phi_k + \dots + \Phi_l + \Phi_{ij} + \Phi_{jk} + \dots + \Phi_{jl} + \dots \quad (21.5.7)$$

В формуле (21.5.7), например:

$$\Phi_j = \frac{b_j \dot{y}_j^2}{2} + \frac{b_{\varphi} \dot{\phi}_j^2}{2}, \quad (21.5.8)$$

$$\Phi_{ji} = \frac{1}{2} \sum_r b_{ij}^r \left[ (\dot{y}_i + l_{ij}^r \dot{\phi}_i) - (\dot{y}_j + l_{ji}^r \dot{\phi}_j) \right]^2, \quad (21.5.9)$$

где  $b_j, b_{\varphi}$  – коэффициенты внешнего рассеяния энергии,  $b_{ij}^r$  – коэффициенты внутреннего рассеяния энергии.

Как видно, выражение (21.5.8) подобно выражению (21.5.3), а выражение (21.5.9) – выражению (21.5.5).

Чтобы получить дифференциальное уравнение движения, необходимо рассмотреть два уравнения Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_j} - \frac{\partial T}{\partial y_j} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial y_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}_j} + F_{yj}(t); \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_j} - \frac{\partial T}{\partial \phi_j} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \phi_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\phi}_j} + M_j(t), \end{aligned} \quad (21.5.10)$$

где  $F_{yj}(t)$  – сумма проекций внешних возмущающих сил на ось  $y$ , приложенных к  $j$ -му телу;  $M_j(t)$  – суммарный момент внешних сил, приложенных к  $j$ -му телу относительно центра инерции.

В развернутом виде уравнения (21.5.10) таковы:

$$\begin{aligned} m_j \ddot{y}_j + b_j \dot{y}_j + \sum_r b_{ij}^r \left[ (\dot{y}_j + l_{ji}^r \dot{\phi}_j) - (\dot{y}_i + l_{ij}^r \dot{\phi}_i) \right] + \\ + \sum_r c_{ij}^r \left[ (y_j + l_{ij}^r \phi_j) - (y_i + l_{ji}^r \phi_i) \right] &= F_{yj}(t); \\ J_j \ddot{\phi}_j + b_{\varphi} \dot{\phi}_j + \sum_r b_{ij}^r l_{ji}^r \left[ (\dot{y}_j + l_{ji}^r \dot{\phi}_j) - (\dot{y}_i + l_{ij}^r \dot{\phi}_i) \right] + \\ + \sum_r c_{ij}^r l_{ji}^r \left[ (y_j + l_{ij}^r \phi_j) - (y_i + l_{ji}^r \phi_i) \right] &= M_j(t). \end{aligned} \quad (21.5.11)$$

Уравнениям (21.5.11) можно придать компактную матричную форму. Для этого введем матрицу инерции:

$$m^j = \begin{vmatrix} m_j & 0 \\ 0 & J_j \end{vmatrix}; \quad (21.5.12)$$

матрицу внешнего рассеяния энергии:

$$b^j = \begin{vmatrix} b_j & 0 \\ 0 & b_{\varphi} \end{vmatrix}; \quad (21.5.13)$$

матрицы внутреннего рассеяния энергии:

$$b_r^{ji} = \begin{vmatrix} b_{ij}^r & b_{ij}^r l_{ji}^r \\ b_{ij}^r l_{ji}^r & b_{ji}^r l_{ji}^2 \end{vmatrix}; \quad (21.5.14)$$

$$b_r^{ij} = \begin{vmatrix} b_{ij}^r; & b_{ij}^{r'} \\ b_{ij}^{r'} I_{ij}^r; & b_{ji}^{r'} I_{ji}^{r'} \end{vmatrix}, \quad (21.5.15)$$

а также матрицы жесткостей:

$$c_r^{ji} = \begin{vmatrix} c_{ij}^r; & l_{ij}^{r'} \\ c_{ij}^{r'} I_{ij}^r; & c_{ji}^{r'} I_{ji}^{r'} \end{vmatrix}, \quad (21.5.16)$$

$$c_r^{ij} = \begin{vmatrix} c_{ij}^r; & c_{ij}^{r'} \\ c_{ij}^{r'} I_{ij}^r; & c_{ji}^{r'} I_{ji}^{r'} \end{vmatrix}. \quad (21.5.17)$$

Введем вектор перемещений:

$$u_j^T = |y_j, \phi_j|$$

и возмущающих сил:

$$F_j^T(t) = |F_{yj}(t), M_j(t)|.$$

Тогда уравнения (21.5.11) запишутся так:

$$m^i \ddot{u}_j + \left( b_j + \sum_r b_r^{ji} \right) \dot{u}_j - \sum_r b_r^{ij} \dot{u}_i + \sum_r c_r^{jj} u_j - \sum_r c_r^{ij} u_i = F_j(t). \quad (21.5.18)$$

Если объединить все уравнения (21.4.11), то получим матричное уравнение:

$$m\ddot{u} + b\dot{u} + cu = F(t), \quad (21.5.19)$$

где  $m$  – матрица инерции,  $b$  – матрица рассеяния энергии,  $c$  – матрица жесткостей,  $u^T = |u_1^T, u_2^T, \dots, u_n^T|$  – вектор перемещений,  $F(t)^T = |F_1^T, F_2^T, \dots, F_n^T|$  – вектор возмущающих сил,  $n$  – число твердых тел.

Формирование матриц  $m, b, c$  в уравнении (21.5.19) осуществляется по формулам (21.5.12) – (21.5.17) согласно номерам твердых тел по правилам, которые следуют из уравнения (21.5.18).

Для этого поле, занимаемое, например, матрицей  $c$ , разбивается на квадратные блоки, число которых равно  $n$ . На диагонали с номером блочного элемента  $jj$  будет находиться матрица  $\sum_r c_r^{jj} + \sum_s c_s^{jk} + \dots + \sum_t c_t^{jl}$ . В эту сумму входят матрицы жесткостей всех упругих элементов, присоединенных к  $j$ -му узлу.

Внедиагональные элементы, например, с номером  $ji$ , представляют собой сумму  $-\sum_r c_r^{ij}$ . В эту сумму входят матрицы жесткостей всех упругих элементов, соединяющих элементы с номерами  $j$  и  $i$ .

## 2. Произвольная система твердых тел

Принципиально система дифференциальных уравнений малых колебаний произвольной системы твердых тел, соединенных произвольным образом произвольным числом пружин, строится так же как и система уравнений для плоского случая.

Анализируя уравнения (21.5.18) для плоской системы, нетрудно заметить, что все матрицы, которые в нее входят, формируются единообразно, поэтому достаточно было бы рассмотреть только два твердых тела, так как при любом их количестве соответствующие соотношения формально отличаются лишь индексами. При этом в начале формируется диагональный элемент, представляющий собой сумму матриц по всем соседним элементам. Затем строятся внедиагональные элементы в соответствии с номерами масс, присоединенных к основной массе.

Итак, рассматривается сложная механическая система, состоящая из произвольного количества твердых тел, соединенных между собой произвольным числом произвольно расположенных упругих элементов (рис. 21.8).

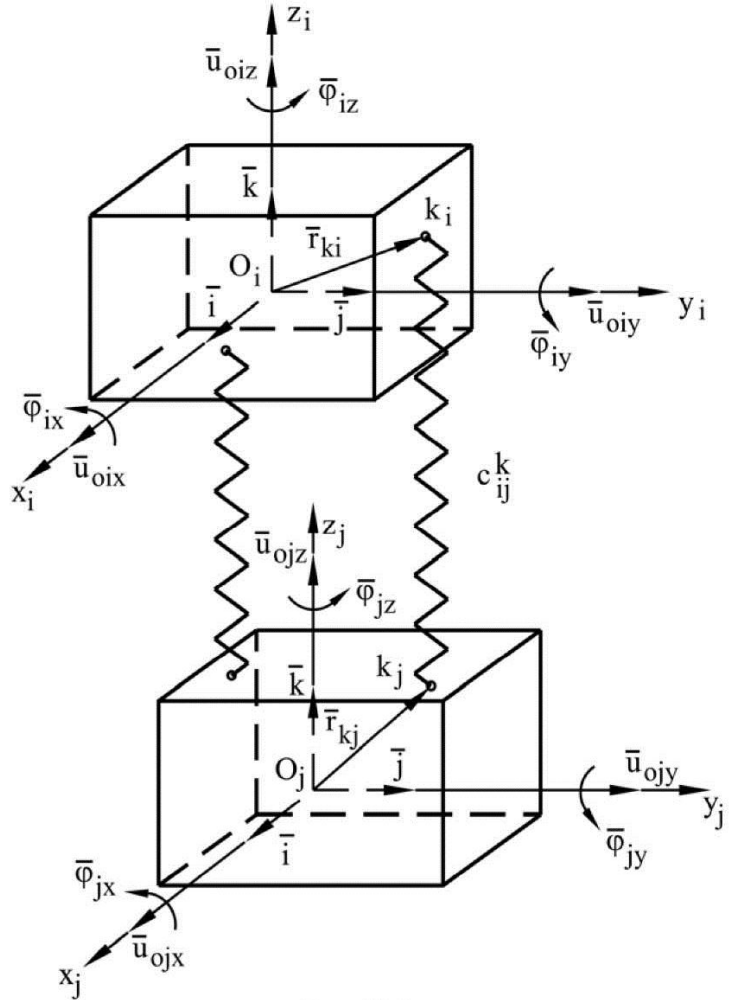


Рис. 21.8

Малое перемещение некоторой точки \$k\_i\$ \$i\$-го твердого тела можно записать в виде:

$$\bar{u}_{ki} = \bar{u}_{O_i} + \bar{\varphi}_i \times \bar{r}_{ki}, \quad (21.5.20)$$

где \$\bar{u}\_{ki} = u\_{kix}\bar{i} + u\_{kiy}\bar{j} + u\_{kiz}\bar{k}\$ – вектор малого перемещения точки \$k\_i\$;

\$\bar{u}\_{O\_i} = u\_{O\_ix}\bar{i} + u\_{O\_iy}\bar{j} + u\_{O\_iz}\bar{k}\$ – вектор малого перемещения полюса \$O\_i\$;

\$\bar{\varphi}\_i = \varphi\_{xi}\bar{i} + \varphi\_{yi}\bar{j} + \varphi\_{zi}\bar{k}\$ – вектор малого угла поворота \$i\$-го твердого тела;

\$\bar{r}\_{ki} = x\_{ki}\bar{i} + y\_{ki}\bar{j} + z\_{ki}\bar{k}\$ – вектор, определяющий положение точки \$k\_i\$ по отношению к полюсу \$O\_i\$.

Величина вектора \$\bar{r}\_{ki}\$ при малых перемещениях с точностью до этих малых величин является неизменной.

Формулу (21.5.20) можно записать в матричном виде. Для этого следует ввести матрицы-столбцы:

$$u_{ki}^T = |u_{kix}; u_{kiy}; u_{kiz}|;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{0i}^T &= |u_{0ix}; u_{0iy}; u_{0iz}|; \\ \Phi_i^T &= |\Phi_{ix}; \Phi_{iy}; \Phi_{iz}|, \end{aligned}$$

и матрицу переноса перемещений в твердом теле:

$$r_{ki} = \begin{vmatrix} 0 & z_{ki} & -y_{ki} \\ -z_{ki} & 0 & x_{ki} \\ y_{ki} & -x_{ki} & 0 \end{vmatrix}. \quad (21.5.21)$$

Тогда формулу (21.5.20) можно записать так:

$$\mathbf{u}_{ki} = \mathbf{u}_{0i} + r_{ki} \Phi_i. \quad (21.5.22)$$

Введем векторы перемещений:

$$U_{0i}^T = |u_{0ix}; u_{0iy}; u_{0iz}; \Phi_{ix}; \Phi_{iy}; \Phi_{iz}|; \quad (21.5.23)$$

$$U_{ki}^T = |u_{kix}; u_{kiy}; u_{kiz}; \Phi_{ix}; \Phi_{iy}; \Phi_{iz}| \quad (21.5.24)$$

и матрицу

$$L_{ki} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{ki} & -y_{ki} \\ 0 & 1 & 0 & -z_{ki} & 0 & x_{ki} \\ 0 & 0 & 1 & y_{ki} & -x_{ki} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (21.5.25)$$

Матрица (21.5.25) является комбинацией единичных матриц, матрицы (21.5.21) и нулевой матрицы. Тогда можем записать следующую зависимость между векторами (21.5.23) и (21.5.24)

$$U_{ki} = L_{ki} U_{0i}. \quad (21.5.26)$$

Не трудно проверить, что первые три строки матричного соотношения (21.5.26) соответствуют формуле (21.5.22). Остальные три строки дают тождество  $\Phi_i \equiv \Phi_i$ .

Геометрический смысл матрицы  $L_{ki}$  заключается в том, что с ее помощью определяется линейное поле малых перемещений точек твердого тела через три проекции малого перемещения полюса и три проекции малых углов поворота тела вокруг полюса.

Таким образом, с помощью матричного соотношения (21.5.26) можно найти разности перемещения и углов поворота концов упругих элементов, иными словами, найти деформации этих упругих элементов. А это, в свою очередь, позволяет найти потенциальную энергию упругого элемента, выраженную через перемещения полюсов и углы поворотов твердых тел.

В простейшем случае матрица жесткостей упругого элемента  $c_{ij}^k$  имеет диагональную структуру:

$$c_{ij}^k = \begin{vmatrix} c_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_x^\Phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_y^\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_z^\Phi \end{vmatrix}. \quad (21.5.27)$$

Здесь  $c_x, c_y, c_z$  – коэффициенты жесткости упругого элемента при линейных перемещениях;  $c_x^\Phi, c_y^\Phi, c_z^\Phi$  – коэффициенты жесткости при угловых перемещениях. Если два твердых тела соединены, например, невесомой балкой, то матрицу жесткости  $c_{ij}^k$  следует формировать по соответствующим формулам строительной механики. Потенциальная энергия упругого элемента  $c_{ij}^k$  будет:

$$P_{ij}^k = \frac{1}{2} (L_{ki} U_{oi} - L_{kj} U_{oj})^T c_{ij}^k (L_{ki} U_{oi} - L_{kj} U_{oj}). \quad (21.5.28)$$

Здесь соотношения  $L_{ki} U_{oi} - L_{kj} U_{oj}$  представляют векторы разностей перемещений точек крепления упругого элемента, иначе – векторы деформаций упругих элементов.

Если ввести матрицу инерции  $i$ -го твердого тела в виде

$$M_i = \begin{vmatrix} m_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{xi} & -J_{xyi} & -J_{xzi} \\ 0 & 0 & 0 & -J_{yxi} & J_{yi} & -J_{yzi} \\ 0 & 0 & 0 & -J_{zxi} & -J_{zyi} & J_{zi} \end{vmatrix}, \quad (21.5.29)$$

то для кинетической энергии получим формулу

$$T_i = \frac{1}{2} \dot{U}_{oi}^T M_i \dot{U}_{oi} = \frac{1}{2} \left[ m_i (\dot{u}_{oix}^2 + \dot{u}_{oiy}^2 + \dot{u}_{oiz}^2) + J_{xi} \dot{\phi}_{ix}^2 + J_{yi} \dot{\phi}_{iy}^2 + J_{zi} \dot{\phi}_{iz}^2 - 2J_{xy} \dot{\phi}_{ix} \dot{\phi}_{iy} - 2J_{xz} \dot{\phi}_{ix} \dot{\phi}_{iz} - 2J_{yz} \dot{\phi}_{iy} \dot{\phi}_{iz} \right]. \quad (21.5.30)$$

Формула (21.5.30) является следствием теоремы Кенига для свободного твердого тела. При этом считается, что полюс  $O_i$  является центром масс. В противном случае матрица (21.5.29) имеет более сложную структуру.

Если ограничиться внутренним рассеянием энергии, то функция Релея будет подобна по структуре потенциальной энергии системы. Например, для упругого элемента  $c_{ij}^k$  будем иметь

$$\Phi_{ij}^k = \frac{I}{2} (L_{ki} \dot{U}_{0i} - L_{kj} \dot{U}_{0j})^T b_{ij}^k (L_{ki} \dot{U}_{0i} - L_{kj} \dot{U}_{0j}). \quad (21.5.31)$$

Матрица коэффициентов внутреннего рассеяния  $b_{ij}^k$  подобна по структуре матрице  $c_{ij}^k$ . Характерная матричная строка для  $i$ -го элемента будет иметь вид

$$\begin{aligned} M_i \ddot{U}_{0i} + \sum_k L_{ki}^T b_{ij}^k L_{ki} \dot{U}_{0i} - \sum_k L_{ki}^T b_{ij}^k L_{kj} \dot{U}_{0j} + \\ + \sum_k L_{ki}^T c_{ij}^k L_{ki} U_{0i} - \sum_k L_{ki}^T c_{ij}^k L_{kj} U_{0j} = F_i, \end{aligned} \quad (21.5.32)$$

где  $F_i^T = |F_{xi}, F_{yi}, F_{zi}, M_{xi}, M_{yi}, M_{zi}|$  – вектор нагружения  $i$ -го тела. Каждая матричная строка (21.5.32) содержит шесть характерных уравнений. Уравнения (21.5.32) имеют структуру, характерную для метода конечных элементов. Система уравнений в целом имеет вид (21.5.19).

## 21.6. Динамическое гашение колебаний

Рассмотрим систему с двумя степенями свободы (рис. 21.9).

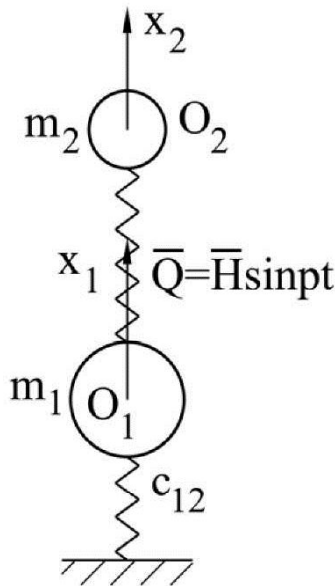


Рис. 21.9

Обе массы  $m_1$  и  $m_2$  могут перемещаться только в вертикальном направлении. К массе  $m_1$  приложена возмущающая сила  $Q_1 = H \sin pt$ . Оказывается, что при определенном значении жесткости  $c_{12}$  и массы  $m_2$  можно существенно уменьшить колебания массы  $m_1$ . Начало отсчета перемещения обеих масс расположим в положении статического равновесия, благодаря чему упрощается выражение потенциальной энергии. Обобщенные координаты системы – это  $x_1$  – перемещение первой массы и  $x_2$  – перемещение второй.

Уравнений Лагранжа у рассматриваемой системы два:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial T}{\partial x_1} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} + Q_1; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial T}{\partial x_2} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} + Q_2. \end{aligned} \quad (21.6.1)$$

Кинетическая энергия системы:

$$T = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2}. \quad (21.6.2)$$

Потенциальная энергия определяется деформациями пружин:

$$\Pi = \frac{c_{01} x_1^2}{2} + \frac{c_{12} (x_2 - x_1)^2}{2}. \quad (21.6.3)$$



Здесь  $(x_2 - x_1)$  – деформация пружины  $c_{12}$ , равная разности перемещений ее концов.

Найдем величины, входящие в уравнение (21.6.1). Согласно (21.6.2) и (21.6.3), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} &= \frac{d}{dt} m_1 \dot{x}_1 = m_1 \ddot{x}_1; \quad \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0; \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} &= c_{01} x_1 - c_{12} (x_2 - x_1); \quad Q_1 = H \sin pt; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} &= \frac{d}{dt} m_2 \dot{x}_2 = m_2 \ddot{x}_2; \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0; \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} &= c_{12} (x_2 - x_1); \quad Q_2 = 0. \end{aligned}$$

Тогда уравнения колебаний системы без учета сил сопротивления будут:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_{01} x_1 + c_{12} (x_1 - x_2) &= H \sin pt; \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_{12} (x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \quad (21.6.4)$$

Найдем частоту свободных колебаний. Для этого рассмотрим однородную систему дифференциальных уравнений (21.6.4), когда возмущающая сила отсутствует:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_{01} x_1 + c_{12} (x_1 - x_2) &= 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_{12} (x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \quad (21.6.5)$$

Будем искать решение системы (21.6.5) в виде:

$$x_1 = A_1 \sin kt; \quad x_2 = A_2 \sin kt, \quad (21.6.6)$$

где  $A_1, A_2$  – амплитуды свободных колебаний;  $k$  – частота свободных колебаний.

Подставляя ожидаемое решение (21.6.6) в уравнение (21.6.5), после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} (-m_1 k^2 + c_{01} + c_{12}) A_1 - c_{12} A_2 &= 0; \\ -c_{12} A_1 + (-m_2 k^2 + c_{12}) A_2 &= 0. \end{aligned}$$

Это однородная система алгебраических уравнений относительно амплитуд свободных колебаний  $A_1$  и  $A_2$  имеет нетривиальное решение в том случае, когда ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} -m_1 k^2 + c_{01} + c_{12} & -c_{12} \\ -c_{12} & -m_2 k^2 + c_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

Но определитель равен нулю только при определенных значениях частот, а именно, когда частоты представляют собой частоты свободных колебаний.

Таким образом, из условия равенства нулю определителя системы получаем частотное уравнение:

$$(-m_1 k^2 + c_{01} + c_{12})(-m_2 k^2 + c_{12}) - c_{12}^2 = 0.$$

Откуда имеем

$$k^4 - \left( \frac{c_{01} + c_{12}}{m_1} + \frac{c_{12}}{m_2} \right) k^2 + \frac{c_{01} c_{12}}{m_1 m_2} = 0. \quad (21.6.7)$$

Решая это биквадратное уравнение, получаем формулы для двух собственных частот колебаний:

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{c_{01} + c_{12}}{m_1} + \frac{c_{12}}{m_2} \right) \pm \sqrt{4 \left( \frac{c_{01} + c_{12}}{m_1} + \frac{c_{12}}{m_2} \right)^2 - \frac{c_{01} c_{12}}{m_1 m_2}}.$$

Под корнем находится положительная величина. Поэтому величина  $k^2$  всегда положительна и, следовательно, корни частотного уравнения (21.6.7) вещественны. Найдем амплитуды вынужденных колебаний. Для этого рассмотрим систему дифференциальных уравнений (21.6.4). Будем искать ее решение в виде:

$$x_1 = A_1 \sin pt; \quad x_2 = A_2 \sin pt, \quad (21.6.8)$$

где  $p$  – частота возмущающей силы.

Подставляя выражения (21.6.8) в уравнения (21.6.4) получим систему алгебраических уравнений для амплитуд колебаний:

$$\begin{aligned} (-m_1 p^2 + c_{01} + c_{12}) A_1 - c_{12} A_2 &= H; \\ -c_{12} A_1 + (-m_2 p^2 + c_{12}) A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (21.6.9)$$

Для решения системы (21.6.9) воспользуемся методом определителей:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{H(-m_2 p^2 + c_{12})}{\Delta}; \\ A_2 &= \frac{H c_{12}}{\Delta}, \end{aligned} \quad (21.6.10)$$

где  $\Delta = (-m_1 p^2 + c_{01} + c_{12})(-m_2 p^2 + c_{12}) - c_{12}^2$ .

Согласно (21.6.10) при  $c_{12} = m_2 p^2$  амплитуда колебаний первой массы обращается в нуль. Таким образом, при отсутствии рассеяния энергии в системе на частоте  $p = \sqrt{\frac{c_{12}}{m_2}}$  происходит гашение колебаний.

Если изобразить зависимость амплитуды колебаний  $A_1$  как функцию частоты возмущающей силы  $p$ , то получим картину, изображенную на рис. 21.10.

Это амплитудно-частотная характеристика. При прохождении через резонансы в точках  $k_1$  и  $k_2$ , когда частота возмущающей силы совпадает с собственными частотами, амплитуда обращается в бесконечность и скачкообразно меняет знак. На частоте гашения  $p = \sqrt{\frac{c_{12}}{m_2}}$ , как было отмечено выше, теорети-

чески  $A_1 = 0$ . Однако из-за наличия сил сопротивления амплитуда колебаний отлична от нуля. Если учесть силы сопротивления, то амплитудно-частотная характеристика имеет вид, показанный пунктиром. При этом возможно существенное снижение уровня вибрации в значительном диапазоне частот.

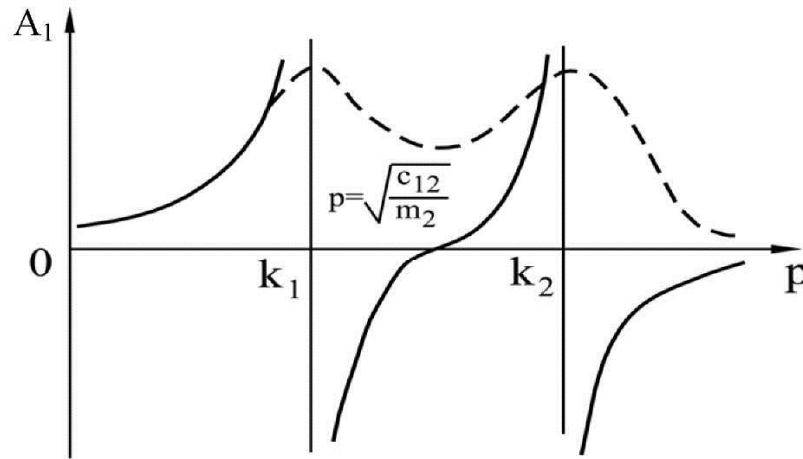


Рис. 21.10

Рассмотрим учет рассеяния энергии. Различают внешнее и внутреннее рассеяние энергии.

Ограничимся вязким сопротивлением. В этом случае рассеяние энергии характеризуется функцией Релея. Причем, часть функции Релея, которая характеризует внешнее рассеяние энергии, подобна по структуре кинетической энергии. Внутреннее рассеяние энергии зависит от разности скоростей движения концов упругих элементов. Поэтому часть функции Релея, которая характеризует внутреннее рассеяние энергии, подобна по структуре потенциальной энергии.

Таким образом, в рассматриваемом нами случае функция Релея такова:

$$\Phi = \frac{b_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{b_2 \dot{x}_2^2}{2} + \frac{b_{01} \dot{x}_2^2}{2} + \frac{b_{12} (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2}{2}.$$

И, если учесть рассеяние энергии, вместо уравнений (21.6.4) получим:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + b_{01} \dot{x}_1 + b_{12} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_{01} x_1 + c_{12} (x_1 - x_2) &= H \sin pt; \\ m_2 \ddot{x}_2 + b_2 \dot{x}_2 + b_{12} (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_{12} (x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \quad (21.6.11)$$

Уравнения (21.6.11) можно записать в матричном виде. Для этого введем вектор перемещений  $x^T = |x_1, x_2|$  и вектор возмущающих сил  $Q^T = |Q_1, Q_2| = |H \sin pt, 0|$ . Здесь индекс  $T$  означает транспонирование.

Введем матрицу масс  $m$ , матрицу рассеяния энергии  $b$  и матрицу жесткостей  $c$ :

$$m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} b_1 + b_{01} + b_{12} & -b_{12} \\ -b_{12} & b_2 + b_{12} \end{bmatrix}; c = \begin{bmatrix} c_{01} + c_{12} & -c_{12} \\ -c_{12} & c_{12} \end{bmatrix}.$$

Тогда система уравнений (21.6.11) запишется в виде:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = Q. \quad (21.6.12)$$

При этом все матрицы, которые входят в уравнение (21.6.12), имеют симметричную структуру.

## 21.7. Построение математической модели сложной механической системы

Дифференциальные уравнения динамики сложной механической системы в матричном виде записываются следующим образом:

$$m\ddot{u} + b\dot{u} + cu = F(t), \quad (21.7.1)$$

где  $u$  – вектор перемещений узловых точек системы  $n$ -го порядка,  $n$  – число степеней свободы системы,  $m$  – матрица масс,  $b$  – матрица рассеяния энергии,  $c$  – матрица жесткостей,  $F(t)$  – вектор возмущающих сил.

Собственные частоты и формы колебаний находятся из решения однородной системы уравнений:

$$m\ddot{u} + cu = 0. \quad (21.7.2)$$

Будем искать ее решение в виде:

$$u = A \sin \omega t, \quad (21.7.3)$$

где  $A$  – вектор амплитуд колебаний. Поставив (21.7.3) в уравнение (21.7.2), получим

$$(-m\omega^2 + c)A = 0. \quad (21.7.4)$$

Однородная система алгебраических уравнений (21.7.4) имеет нетривиальное решение, когда ее определитель равен нулю:

$$\| -m\omega^2 + c \| = 0. \quad (21.7.5)$$

Условие равенства нулю определителя (21.7.5) приводит к частному решению  $n$ -го порядка относительно  $\omega^2$ , которое имеет  $n$  корней, равное числу степеней свободы системы. Эта задача по существу является задачей на собственные значения. Задача по нахождению собственных форм колебаний является задачей по нахождению собственных векторов их системы уравнений:

$$(-m\omega_i^2 + c)A_i = 0, \quad (21.7.6)$$

где  $\omega_i^2$  – квадрат  $i$ -й собственной частоты;  $A_i$  – вектор амплитуд  $i$ -й формы колебаний. Собственные формы колебаний ортогональны. Действительно, если умножить соотношения

$$(-m\omega_i^2 + c)A_i = 0 \quad \text{и} \quad (-m\omega_j^2 + c)A_j = 0$$

для  $i$ -й и  $j$ -й форм соответственно, первое на  $A_j$ , а второе на  $A_i$ , то получим:

$$\begin{aligned} [(-m\omega_i^2 + c)A_i]^T A_j &= 0; \\ [(-m\omega_j^2 + c)A_j]^T A_i &= 0. \end{aligned} \quad (21.7.7)$$

В силу симметрии матрицы  $c$  и матрицы  $m$  имеем:

$$\begin{aligned} (cA_i)^T A_j &= (cA_j)^T A_i; \\ (mA_i)^T A_j &= (mA_j)^T A_i. \end{aligned}$$

Поэтому, если вычесть из первой строки (21.7.7) вторую, то окажется, что

$$(\omega_j^2 - \omega_i^2)(mA_i)^T A_j = 0.$$

Собственные частоты  $\omega_j$  и  $\omega_i$  считаем различными. Тогда остается принять, что

$$(mA_i)^T A_j = \begin{cases} 0, i \neq j; \\ \|A_i\|, i = j. \end{cases} \quad (21.7.8)$$

В выражении (21.7.8)  $\|A_i\| = \sqrt{(mA_i)^T A_i}$  называется энергетической нормой  $i$ -й форм колебаний. При этом очевидно, что:

$$\omega_i^2 (mA_i)^T A_i = (cA_i)^T A_i, \quad (21.7.9)$$

$$(cA_i)^T A_j = 0. \quad (21.7.10)$$

Будем искать решение уравнения (21.7.1) в виде ряда по формулам собственных колебаний:

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) A_i, \quad (21.7.11)$$

где  $\alpha_i(t)$  – неизвестные коэффициенты, являющиеся функциями времени.

Подставим выражение (21.7.11) в уравнение (21.7.1):

$$m \sum_{i=1}^n \ddot{\alpha}_i(t) A_i + b \sum_{i=1}^n \dot{\alpha}_i(t) A_i + c \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) A_i = F(t). \quad (21.7.12)$$

Умножим скалярно уравнение (21.7.12) на векторы  $A_j, j = \overline{1, n}$ . Тогда получим  $n$  уравнений вида:

$$\left[ m \sum_{i=1}^n \ddot{\alpha}_i(t) A_i + b \sum_{i=1}^n \dot{\alpha}_i(t) A_i + c \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) A_i \right]^T A_j = F^T(t) A_j. \quad (21.7.13)$$

Уравнение (21.7.13) существенно упрощается, если воспользоваться условиями (21.7.8):

$$\ddot{\alpha}_j(t) \|A_j\|^2 + \left[ b \sum_{i=1}^n \dot{\alpha}_i(t) A_i \right]^T A_j + \omega_j^2 \alpha_j(t) \|A_j\|^2 = F^T(t) A_j. \quad (21.7.14)$$

Если бы матрица  $b$  была подобна матрице  $m$  или  $c$ , то второе слагаемое также упростилось бы и система разбилась бы на независимые уравнения.

Обозначая  $\frac{(bA_j)^T A_j}{\|A_j\|^2} = 2n_{jj}$  и  $\frac{(bA_i)^T A_j}{\|A_j\|^2} = 2n_{ij}$ , запишем систему уравнений (21.7.14) в виде

$$\ddot{\alpha}_j(t) + 2n_{jj}\dot{\alpha}_j(t) + \omega_j^2\alpha_j(t)^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n 2n_{ij}\dot{\alpha}_i(t) = \frac{F^T(t)A_j}{\|A_j\|^2}. \quad (21.7.15)$$

Если структуры матриц  $b$  и  $c$  близки, то можно пренебречь слагаемыми с  $n_{ij}$ . Тогда вместо (21.7.15) получим:

$$\ddot{\alpha}_j(t) + 2n_{jj}\dot{\alpha}_j(t) + \omega_j^2\alpha_j(t)^2 = \frac{F^T(t)A_j}{\|A_j\|^2}. \quad (21.7.16)$$

Начальные условия для коэффициентов  $\alpha_i(t)$  получаются из соотношений:

$$u_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i(0)A_i,$$

$$\dot{u}_0 = \sum_{i=1}^n \dot{\alpha}_i(0)A_i.$$

Умножая их на матрицу  $m$ , а затем на  $A_j$ , получаем:

$$(mu_0)^T A_j = \alpha_j(0)\|A_j\|^2,$$

$$(m\dot{u}_0)^T A_j = \dot{\alpha}_j(0)\|A_j\|^2.$$

$$\text{Откуда следует: } \alpha_j(0) = \frac{(mu_0)^T A_j}{\|A_j\|^2}, \quad \dot{\alpha}_j(0) = \frac{(m\dot{u}_0)^T A_j}{\|A_j\|^2}.$$

Преобразуем (21.7.16) по Лапласу и найдем преобразованные коэффициенты  $\alpha_j(p)$ :

$$\alpha_j(p) = \frac{[F(p) + m(pu_0 + \dot{u}_0) + bu_0]^T A_j}{(p^2 + 2n_{jj}p + \omega_j^2)\|A_j\|^2} = \frac{[F(p) + m(pu_0 + \dot{u}_0) + bu_0]^T A_j}{\omega_j^2\|A_j\|^2 \cdot (T_{2j}^2 p^2 + T_{1j}p + I)}, \quad (21.7.17)$$

$$\text{где } T_{2j}^2 = \frac{1}{\omega_j^2}; T_{1j} = \frac{2n_{jj}}{\omega_j^2}.$$

Подставляя выражение (21.7.17) при нулевых начальных условиях в преобразованное по Лапласу решение (21.7.11), найдем:

$$u = \sum_{i=1}^n \frac{F^T(p)A_i A_j}{\omega_j^2\|A_j\|^2} \cdot \frac{1}{T_{2j}^2 p^2 + T_{1j}p + I}. \quad (21.7.18)$$

При этом  $\frac{F^T(p)A_jA_j}{\omega_j^2\|A_j\|^2} = \frac{(A_j^T A_j)F(p)}{\omega_j^2\|A_j\|^2} = k_j F(p)$ .

Величины  $k_j = \frac{A_j^T A_j}{\omega_j^2\|A_j\|^2}$  образуют матрицу коэффициентов усиления. Эта

матрица имеет диадную структуру. Тогда формула (21.7.18) переписывается так:

$$u = \sum_{j=1}^n \frac{k_j}{T_{2j}^2 p^2 + T_{1j} p + 1} F(p). \quad (21.7.19)$$

Рассмотрим действие на упругую систему сосредоточенной силы. Для нахождения динамического перемещения можно воспользоваться формулой (21.7.19), оставив в векторе  $F(p)$  одну составляющую. Положив  $p = i\omega$ , получим амплитудно-фазо-частотную характеристику (АФЧХ).

Типичный вид такой характеристики показан на рис. 21.11.

На рис. 21.11 показан график

$$W(i\omega) = \sum_{j=1}^n \frac{k_j}{-T_{2j}^2 \omega^2 + i\omega T_{1j} + 1}.$$

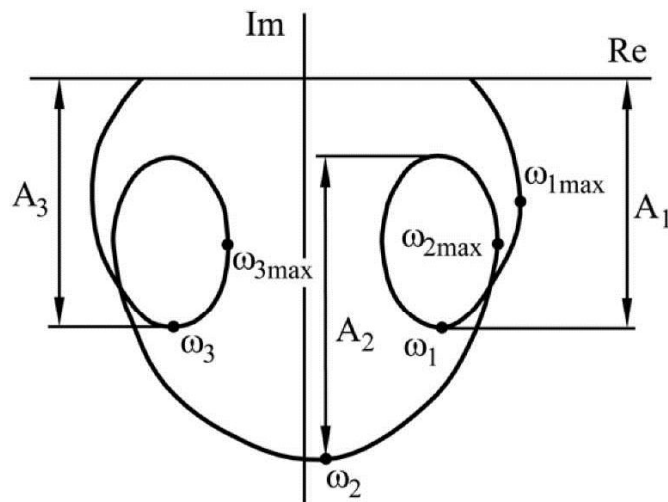


Рис. 21.11

Для получения математической модели упругой системы, предположим, что каждый виток АФЧХ соответствует одному члену ряда (21.7.19). Кроме того, будем считать, что соседние витки АФЧХ мало влияют на экстремальные точки  $\omega_{1max}$ ,  $\omega_1$  и т.д. Амплитуды  $A_1$ ,  $A_2$  и т.д. будем находить приближенно, экстраполируя витки АФЧХ, при этом воспользуемся формулами (13.8.5), (13.8.6), (21.3.1) и (21.3.16) для системы с одной степенью свободы. Тогда, например,

$$\frac{T_{11}}{T_{12}} = 1 - \frac{\omega_{1max}^2}{\omega_1}, k_1 = A_1 T_{11} \omega_1 \text{ и т.д.}$$

В формуле (21.7.19) оставляем столько членов ряда, сколько витков проявляют себя существенным образом на АФЧХ. На рис. 21.11 их три. Следовательно, в ряду (21.7.19) необходимо оставить три члена. После построения формулы (21.7.19) сравниваем теоретическую и экспериментальную АФЧХ. Обычно без труда удастся получить хорошее приближение модельной кривой, построенной по формуле (21.7.19) к экспериментальной кривой. Если АФЧХ сначала строится путем непосредственного решения системы (21.7.1), которая иногда имеет порядок несколько сотен и более, то обычно на АФЧХ также получается лишь несколько витков, например, для несущих систем металлорежущих станков их два, три и в редком случае – четыре. Поэтому в ряду (21.7.19) берется также два, три или четыре члена и они моделируют решение нескольких сотен или тысяч уравнений.

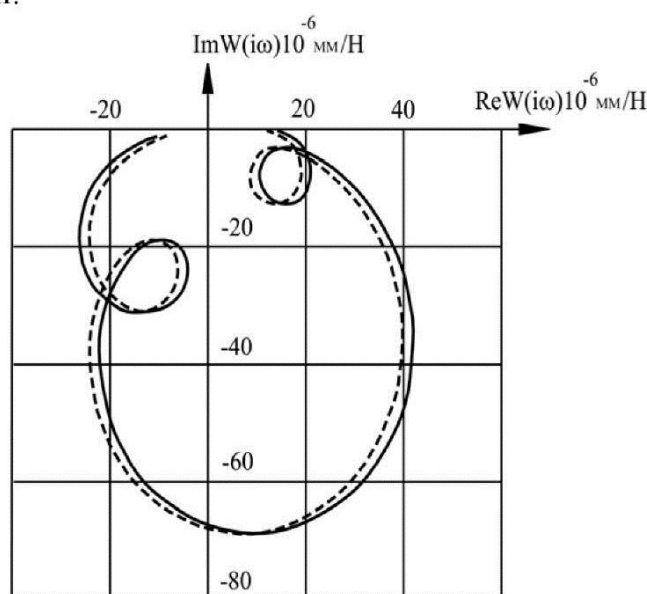


Рис. 21.12

В качестве примера приведем график АФЧХ для тяжелого фрезерного станка из работы [11] и ее представление по формуле (21.7.19):

$$\begin{aligned} W(\omega) = & 1.90 / \left[ - (3.3898 \cdot 10^{-2})^2 \omega^2 + i 5.5010 \cdot 10^{-3} \omega + 1 \right] + \\ & + 8.777 / \left[ - (1.6949 \cdot 10^{-2})^2 \omega^2 + i 2.2203 \cdot 10^{-3} \omega + 1 \right] + \\ & + 3.00 / \left[ - (-1.3513 \cdot 10^{-2})^2 \omega^2 + i 1.5 \cdot 10^{-3} \omega + 1 \right]. \end{aligned} \quad (21.7.20)$$

На рис. 21.12 сплошной линией показан график, соответствующий формуле (21.7.20). Пунктирная линия получена экспериментально. Для построения теоретической зависимости решалась система 72 порядка. Решение этой системы моделируется формулой (21.7.20) с высокой точностью.



## 21.8. Анализ выражения кинетической энергии для нестационарной голономной системы

Для того, что бы составить уравнения Лагранжа второго рода, нужно предварительно найти выражение кинетической энергии в виде зависимости от времени  $t$ , обобщенных координат  $q_j$  и обобщенных скоростей  $\dot{q}_j, i = \overline{1, n}$ . В случае нестационарной голономной системы выражения для скоростей точек записываются в виде

$$\bar{v}_i = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j.$$

Следовательно, для кинетической энергии получим формулу

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \left( \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n A_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l + \sum_{j=1}^n B_j \dot{q}_j + C. \end{aligned} \quad (21.8.1)$$

В выражении (21.8.1) коэффициенты  $A_{jl}, B_j$  и  $C$  – функции от времени  $t$  и обобщенных координат  $q_j, i = \overline{1, n}$ , определяются равенствами:

$$\begin{aligned} A_{jl} &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l}, \\ B_j &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}, \\ C &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right)^2, \quad j, l = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (21.8.2)$$

Формула (21.8.1) показывает, что кинетическая энергия голономной системы представляет собой многочлен второй степени относительно обобщенных скоростей:

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \quad (21.8.3)$$

где

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n A_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l, T_1 = \sum_{j=1}^n B_j \dot{q}_j, T_0 = C. \quad (21.8.4)$$

В случае стационарных связей время  $t$  явно не входит в зависимость  $\bar{r}_i$  и  $q_i$  и поэтому

$$\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} = 0, i = \overline{1, N}.$$

Но тогда, согласно равенствам (21.8.3),  $B_j = C = 0$  и

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^n A_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l. \quad (21.8.5)$$

Таким образом, кинетическая энергия голономной системы при стационарных связях представляет собой однородную квадратичную форму обобщенных скоростей. Квадратичная форма  $T_2$  для произвольной голономной системы, независимо от того, стационарны или нестационарны наложенные связи, всегда является невырожденной, то есть определитель, составленный из ее коэффициентов, отличен от нуля:

$$\det(A_{jl})_{j,l=\overline{1,n}} \neq 0. \quad (21.8.6)$$

Действительно, если это не так, то однородная система линейных уравнений

$$\sum_{l=1}^n A_{jl} \alpha_l = 0, \quad j = \overline{1,n} \quad (21.8.7)$$

имеет вещественное решение, отличное от нуля.

Умножая систему на  $\alpha_j$  и суммируя по  $j$  от 1 до  $n$ , с учетом формул (21.8.2) получим:

$$0 = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n A_{jl} \alpha_l \alpha_j = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \left( \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l} \right) \alpha_l \alpha_j = \sum_{i=1}^N m_i \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \alpha_j \right)^2.$$

Последнее равенство возможно лишь при условии, что

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \alpha_j = 0, \quad i = \overline{1,N}.$$

Эти  $N$  векторных равенств можно заменить  $3N$  скалярными:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \alpha_j = 0; \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \alpha_j = 0; \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \alpha_j = 0, \quad i = \overline{1,N}. \quad (21.8.8)$$

Равенства (21.8.8) показывают, что в якобиане

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial x_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y_1}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial y_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z_1}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial z_1}{\partial q_n} \\ \dots \\ \frac{\partial z_N}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial z_N}{\partial q_n} \end{vmatrix},$$

столбцы линейно зависимы, то есть ранг  $\rho$  этой функциональной матрицы меньше  $n$ . Тогда среди  $3N$  функций  $x_i, y_i, z_i, i = \overline{1,N}$  от  $n$  аргументов

$q_j, j = \overline{1, n}$ , при условии что  $t$  рассматривается как параметр, имеется лишь  $\rho$  независимых, через которые могут быть выражены все остальные декартовы координаты системы. Но минимальное число независимых координат системы равно числу степеней свободы  $n$ , а  $\rho < n$ . Следовательно, мы пришли к противоречию, и остается принять, что неравенство (21.8.6) выполняется.

Величина  $T_2$  представляет собой кинетическую энергию при «замороженных» связях. Поскольку  $T_2 \geq 0$ , то из неравенства (21.8.6) следует, что квадратичная форма  $T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n A_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l$  является положительно определенной, при этом  $T_2 = 0$  только тогда, когда  $\forall \dot{q}_j = 0, j = \overline{1, n}$ .

Поэтому для коэффициентов  $A_{jl}$  имеют место неравенства Сильвестра:

$$A_{11} > 0, \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (21.8.9)$$

В качестве примера рассмотрим составление уравнений движения математического маятника длиной  $l$ , точка  $O_1$  подвеса которого совершает гармонические колебания в вертикальной плоскости вдоль прямой, наклоненной под углом  $\alpha$  к горизонту. Эта система с нестационарной связью (рис. 21.13).

Пусть  $OO_1 = a \sin \omega t$ . Найдем координаты точки М:

$$x = l \cos \varphi - a \sin \alpha \sin \omega t;$$

$$y = l \sin \varphi + a \cos \alpha \sin \omega t.$$

Проекция скорости на оси координат:

$$\dot{x} = -l \sin \varphi \dot{\varphi} - a \omega \sin \alpha \cos \omega t;$$

$$\dot{y} = l \cos \varphi \dot{\varphi} + a \omega \cos \alpha \cos \omega t.$$

Квадрат скорости точки М будет:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l^2 \dot{\varphi}^2 + a^2 \omega^2 \cos^2 \omega t + 2la \omega \dot{\varphi} \cos(\varphi - \alpha) \cos \omega t.$$

Следовательно, кинетическая энергия:

$$T = \frac{1}{2} m \left[ l^2 \dot{\varphi}^2 + 2la \omega \dot{\varphi} \cos(\varphi - \alpha) \cos \omega t + a^2 \omega^2 \cos^2 \omega t \right].$$

Откуда

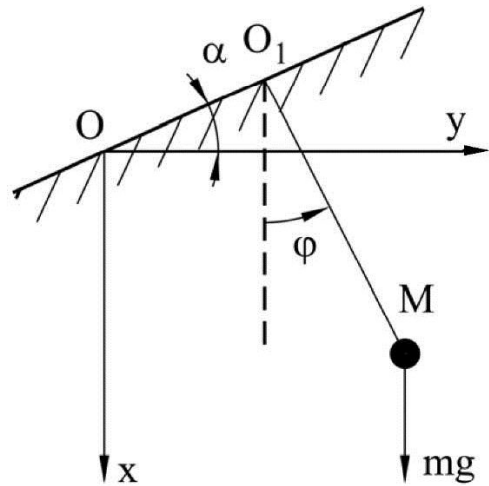


Рис. 21.13

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \ddot{\varphi} + mla\omega \cos(\varphi - \alpha) \cos \omega t;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -mla\omega \dot{\varphi} \sin(\varphi - \alpha) \cos \omega t.$$

Виртуальная работа

$$\delta A = mg\delta x = -mgl \sin \varphi \delta \varphi.$$

Откуда получаем выражение обобщенной силы:

$$Q = -mgl \sin \varphi.$$

Следовательно, уравнение Лагранжа будет:

$$\frac{d}{dt} [ml^2 \dot{\varphi} + mla\omega \cos \omega t \cos(\varphi - \alpha)] + mla\omega \dot{\varphi} \sin(\varphi - \alpha) \cos \omega t = -mgl \sin \varphi.$$

Откуда

$$ml^2 \ddot{\varphi} - mla\omega^2 \sin \omega t \cos(\varphi - \alpha) + mgl \sin \varphi = 0.$$

Или

$$\ddot{\varphi} - \frac{a}{l} \omega^2 \sin \omega t \cos(\varphi - \alpha) + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

При малых углах  $\varphi$  это уравнение имеет вид:

$$\ddot{\varphi} + \left( \frac{g}{l} - \frac{a}{l} \omega^2 \sin \alpha \sin \omega t \right) \varphi = \frac{a}{l} \omega^2 \cos \alpha \sin \omega t.$$

Диссипативная функция такова:

$$\Phi = \frac{1}{2} k [l^2 \dot{\varphi}^2 + 2la\omega \dot{\varphi} \cos(\varphi - \alpha) \cos \omega t + a^2 \omega^2 \cos^2 \omega t].$$

Здесь  $k$  – коэффициент сопротивления. Соответствующая обобщенная сила:

$$Q^v = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}} = -[kl^2 \dot{\varphi} + kla\omega \cos(\varphi - \alpha) \cos \omega t].$$

Уравнение колебаний с учетом рассеяния энергии:

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{m} \dot{\varphi} + \left[ \frac{g}{l} \sin \varphi - \frac{a}{l} \left( \omega^2 \sin \omega t + \frac{k}{m} \omega \cos \omega t \right) \cos(\varphi - \alpha) \right] \varphi = 0.$$

При малых углах  $\varphi$  получаем:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \frac{k}{m} \dot{\varphi} + \left[ \frac{g}{l} - \frac{a}{l} \left( \omega^2 \sin \omega t + \frac{k}{m} \omega \cos \omega t \right) \sin \alpha \right] \varphi = \\ = \frac{a}{l} \left( \omega^2 \sin \omega t + \frac{k}{m} \omega \cos \omega t \right) \cos \alpha. \end{aligned}$$

## 21.9 Диссипативная функция для сил сопротивления общего вида

До сих пор мы рассматривали силы сопротивления, пропорциональные скорости движения. Здесь будут рассмотрены силы сопротивления общего вида.

Диссипативными силами называются силы сопротивления движению точек системы, направленные противоположно их скорости.

Рассмотрим случай сил сопротивления, представленных в виде:

$$\vec{F}_i = -k_i f_i(v_i) \frac{\vec{v}_i}{v_i}, i = \overline{1, N}, \quad (21.9.1)$$

где  $v_i$  – величина скорости точки  $M$ ;  $k_i$  и  $f_i(v_i)$  положительные функции соответственно от обобщенных координат и от скоростей  $v_i$ .

Соответствующие этим силам обобщенные силы определяются равенствами:

$$Q_s = -\sum_{i=1}^N k_i f_i(v_i) \frac{\vec{v}_i}{v_i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} = -\sum_{i=1}^N k_i f_i(v_i) \frac{\vec{v}_i}{v_i} \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_s}.$$

Замечая, что

$$\vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_s} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \vec{v}_i \vec{v}_i = \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}_s} = v_i \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_s},$$

найдем:

$$Q_s = -\sum_{i=1}^N k_i f_i(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_s} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \sum_{i=1}^N k_i \int_0^{v_i} f_i(u) du = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_s}, s = \overline{1, n}, \quad (21.9.2)$$

где

$$\Phi = \sum_{i=1}^N k_i \int_0^{v_i} f_i(u) du \quad (21.9.3)$$

называется диссипативной функцией. Поскольку подинтегральная функция положительна, то  $\Phi \geq 0$ . При  $f_i(v_i) = v_i$  из (21.9.3) получаем диссипативную функцию Релея.

Диссипативная функция была введена Релеем в классическом труде «Теория звука» для сил сопротивления, пропорциональных первой степени скорости. Это понятие А. И. Лурье обобщил на силы общего вида.

При одночленной степенной зависимости для сил сопротивления  $f_i(v_i) = v_i^m$  и стационарных связях диссипативная функция

$$\Phi = \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^N k_i v_i^{m+1} = \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^N k_i \left| \sum_{s=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s \right|^{m+1} \quad (21.9.4)$$

будет однородной функцией  $m+1$  степени от обобщенных скоростей.

Мощность диссипативных сил в рассматриваемом случае будет:

$$N = \sum_{s=1}^n Q_s \dot{q}_s = -\sum_{s=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_s = -(m+1)\Phi. \quad (21.9.5)$$

При  $m=0$  формула (21.9.5) соответствует Кулонову (сыхому) трению, при  $m=1$  – силам вязкого трения, пропорциональным первой степени скорости,  $m=2$  – силам квадратичного сопротивления.

При выполнении операции дифференцирования в формуле (21.9.2) следует учесть, что в  $\Phi$  входят модули обобщенных скоростей.

Например, при сопротивлении, пропорциональном четной степени скорости и  $n = 1$ , получим:

$$\Phi = \frac{k}{2s+1} |\dot{q}|^{2s+1},$$

$$Q = -k\dot{q}^{2s} \frac{\partial |\dot{q}|}{\partial \dot{q}} = -k\dot{q}^{2s} \text{sign}\dot{q},$$

где  $\text{sign}\dot{q}$  означает знак скорости  $\dot{q}$ . Если  $\dot{q} > 0$ , то  $\text{sign}\dot{q} = +1$ , и если  $\dot{q} < 0$ , то  $\text{sign}\dot{q} = -1$ . Рассмотрим движение системы относительно движущихся осей  $Ox'y'z'$ , но будем считать, что время и выражения радиус-векторов  $\vec{r}_i$  точек системы по отношению к полюсу  $O$  явно не входят. Силы сопротивления, действующие на точки системы, определяются их скоростями относительно окружающей среды.

Пусть, например, рассматривается движение математических маятников, точки подвеса которых имеют по отношению к земле скорость  $\vec{v}_0$ . Скорость набегающего потока  $\vec{V}$ . Скорость маятника по отношению к подвижной системе  $Ox'y'z' - \vec{v}'_i$ . Абсолютная скорость  $i$ -го маятника будет:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_0 + \vec{v}'_i,$$

а его скорость относительно потока равна  $\vec{v}_0 + \vec{v}'_i - \vec{V}$ . Следовательно,

$$\vec{F}_i = -k_i f_i \left( |\vec{v}_0 + \vec{v}'_i - \vec{V}| \right) \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}'_i - \vec{V}}{|\vec{v}_0 + \vec{v}'_i - \vec{V}|}.$$

Обозначим  $\vec{v}_i^* = \vec{v}_0 - \vec{V}$ , вместо предыдущей формулы получим:

$$\vec{F}_i = -k_i f_i \left( |\vec{v}_i^* + \vec{v}'_i| \right) \frac{\vec{v}_i^* + \vec{v}'_i}{|\vec{v}_i^* + \vec{v}'_i|}.$$

Величина  $\vec{v}_i^*$  не зависит от обобщенных скоростей. Поэтому:

$$\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial v'_i}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} (\vec{v}_i^* + \vec{v}'_i),$$

и, следовательно,

$$Q_s = - \sum_{i=1}^N k_i f_i \left( |\vec{v}_i^* + \vec{v}'_i| \right) \frac{(\vec{v}_i^* + \vec{v}'_i)}{|\vec{v}_i^* + \vec{v}'_i|} \frac{\partial (\vec{v}_i^* + \vec{v}'_i)}{\partial \dot{q}_s} =$$

$$= - \sum_{i=1}^N k_i f_i \left( |\vec{v}_i^* + \vec{v}'_i| \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} |\vec{v}_i^* + \vec{v}'_i| = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_s},$$

где

$$\Phi = \sum_{i=1}^N k_i \int_0^{|\vec{v}_i^* + \vec{v}'_i|} f_i(u) du.$$

**21.10. Уравнения Лагранжа второго рода для системы, находящейся под действием потенциальных сил. Интеграл энергии. Гироскопические силы**

В этом случае уравнения, согласно (21.2.6), записываются в виде:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (21.10.1)$$

Учитывая, что потенциальная энергия при нестационарных связях является функцией только обобщенных координат и времени

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n, t),$$

и, следовательно

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j} = 0,$$

то уравнение (21.10.1) можно представить в иной форме:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_j} = 0.$$

Обозначая

$$T - \Pi = L, \quad (21.10.2)$$

окончательно получим:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (21.10.3)$$

Уравнения (21.10.3) являются уравнениями Лагранжа второго рода для голономных систем, находящихся под действием потенциальных сил. Функция  $L = T - \Pi$ , представляющая разность между кинетической и потенциальной энергией, называется функцией Лагранжа или кинетическим потенциалом. Эта разность, как и кинетическая энергия  $T$ , является функцией второй степени от обобщенных скоростей  $\dot{q}_j$ , то есть

$$L = L_2 + L_1 + L_0 = T_2 + T_1 - \Pi^*, \quad (21.10.4)$$

где  $\Pi^* = \Pi - T_0$ .

Величину  $\Pi^*$  можно называть измененной потенциальной энергией. Она зависит только от обобщенных координат и в общем случае от времени.

Рассмотрим так называемый интеграл энергии.

Уравнение Лагранжа второго рода представляют систему  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Это система линейна относительно обобщенных ускорений  $\ddot{q}_j$  и, поскольку  $\det(A_{jl})_{j,l=\overline{1,n}} \neq 0$ , то последние могут быть из нее определены через обобщенные координаты  $q_j$ , обобщенные скорости  $\dot{q}_j$  и время  $t$ :

$$\ddot{q}_s = f_s(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t), \quad s = \overline{1, n}. \quad (21.10.5)$$

Пусть дана некоторая функция обобщенных координат скоростей и времени:

$$\psi(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t). \quad (21.10.6)$$

Ее производной по времени в силу уравнений движения называется выражение:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \left( \frac{\partial\psi}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial\psi}{\partial \dot{q}_s} \ddot{q}_s \right),$$

в котором обобщенные ускорения  $\ddot{q}_s$  заменяются согласно уравнениям (21.10.5)

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \left( \frac{\partial\psi}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial\psi}{\partial \dot{q}_s} f_s \right). \quad (21.10.7)$$

Если производная функции  $\psi$  по времени, составленная в силу уравнений движения, окажется тождественно равной нулю, то это будет означать, что сама функция  $\psi$  будет сохранять постоянное значение. В этом случае функция  $\psi$  называется первым интегралом уравнений движения.

Составим производную по времени в силу уравнений движения от кинетического потенциала  $L$ :

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \ddot{q}_s + \frac{\partial L}{\partial q_s} \dot{q}_s \right) = \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \ddot{q}_s + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_s \right) - \\ &\quad - \sum_{s=1}^n Q_s^* \dot{q}_s + \sum_{s=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_s. \end{aligned} \quad (21.10.8)$$

В данном выражении производные  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}$  заменены их значениями из уравнения (21.2.6) с учетом того, что  $L = T - \Pi$ . Назовем величины

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = p_s \quad (21.10.9)$$

обобщенными импульсами. То есть обобщенный импульс – это производная кинетической энергии по обобщенной скорости. Учитывая (21.10.9), вместо (21.10.8) можно записать:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{s=1}^n p_s \dot{q}_s - L \right) = -\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{s=1}^n Q_s^* \dot{q}_s - \sum_{s=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_s. \quad (21.10.10)$$

Итак, согласно (21.10.10), уравнения движения допускают первый интеграл, если все активные силы потенциальны, а время  $t$  явно не входит в выражение кинетического потенциала. Тогда правая часть выражения (21.10.10) обращается в нуль. И, следовательно,

$$\sum_{s=1}^n p_s \dot{q}_s - L = \sum_{s=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_s - L = h, \quad (21.10.11)$$

где  $h$  – постоянная величина.



Учитывая, что  $T_2$  – однородная квадратичная функция, а  $T_1$  – однородная обобщенная форма скоростей, найдем:

$$\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_s = 2T_2, \quad \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_s = T_1.$$

После чего выражение (21.10.11), вспоминая формулу для  $L$ , можно переписать так:  $2T_2 + T_1 - (T_2 + T_1 + T_0) + \Pi = h$  или

$$T_2 + \Pi - T_0 = h. \quad (21.10.12)$$

Формула (21.10.12) и есть интеграл для нестационарной системы, подчиненной голономной связям. Если же связи стационарны, то (21.10.12) запишется так:

$$E = T + \Pi = h, \quad (21.10.13)$$

что выражает закон сохранения полной механической энергии системы. При стационарных связях  $L$  явно от времени не зависит. Тогда из равенства (21.10.10) с учетом обозначения (21.10.13) получим

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{j=1}^n Q_j^* \dot{q}_j - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j. \quad (21.10.14)$$

В первой части (21.10.14) находится мощность обобщенных сил  $Q_j^*$  и диссипативных сил  $Q_j^v$ . То есть изменение полной механической энергии системы, подчиненной стационарным связям, равна мощности непотенциальных сил.

Наличие в выражении кинетической энергии для нестационарной системы величины  $T_1$  приводит к появлению так называемых гироскопических сил.

Запишем уравнение Лагранжа второго рода в виде

$$\varepsilon_s(L) = Q_s, \quad s = \overline{1, n}, \quad (21.10.15)$$

где  $\varepsilon_s = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial q_s}$  – Эйлеров оператор;  $Q_s$  – обобщенные непотенциальные силы.

Уравнения движения (21.10.15) можно переписать так:

$$\varepsilon_s(T_2) = -\varepsilon_s(T_1) + Q_s - \frac{\partial \Pi^*}{\partial q_s}, \quad s = \overline{1, n}. \quad (21.10.16)$$

Поскольку  $T_2$  – положительно определенная квадратичная форма обобщенных скоростей, то ее можно рассматривать, как кинетическую энергию некоторой системы. Тогда все члены, стоящие справа, в том числе и  $-\varepsilon_s(T_1)$ , можно трактовать как обобщенные силы. Найдем

$$\begin{aligned} -\varepsilon_s(T_1) &= -\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \sum_{k=1}^n B_k \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial q_s} \sum_{k=1}^n B_k \dot{q}_k = \\ &= -\frac{dB_s}{dt} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial B_k}{\partial q_s} \dot{q}_k = -\frac{\partial B_s}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial B_k}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k. \end{aligned} \quad (21.10.17)$$

Величины

$$\gamma_{sk} = -\gamma_{ks} = \frac{\partial B_k}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial q_k} \quad (21.10.18)$$

образуют кососимметричную матрицу

$$\gamma = \begin{vmatrix} 0 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ -\gamma_{12} & 0 & \dots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\gamma_{1n} & -\gamma_{2n} & \dots & 0 \end{vmatrix}. \quad (21.10.19)$$

Выражение

$$\Gamma_s = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial B_k}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k = \sum_{k=1}^n \gamma_{sk} \dot{q}_k \quad (21.10.20)$$

называется обобщенной гироскопической силой, слагаемые  $\gamma_{sk} \dot{q}_k$  – гироскопическими силами и, соответственно,  $\gamma_{sk}$  – гироскопическим коэффициентом. Виртуальная мощность гироскопических сил равна нулю. Действительно, согласно (21.10.18),

$$N_\Gamma = \sum_{s=1}^n \Gamma_s \dot{q}_s = \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n \gamma_{sk} \dot{q}_k \dot{q}_s = 0.$$

Этим объясняется исчезновение величины  $T_1$  в интеграле энергии (21.10.12).

Уравнения движения (21.10.16) теперь можно представить так:

$$\varepsilon_s(T_2) = \Gamma_s + Q_s - \frac{\partial \Pi^*}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial t}, \quad s = \overline{1, n}. \quad (21.10.21)$$

Обобщенные скорости входят в это уравнение линейно, причем, поскольку  $\gamma_{ss} = 0$ , то в соответствующее уравнение не входит обобщенная скорость  $\dot{q}_s$ , а матрица, составленная из коэффициентов гироскопических сил, должна быть кососимметричной.

В качестве примера составим уравнения движения материальной точки массой  $m$ , которая движется в потенциальном силовом поле с потенциальной энергией  $\Pi(x, y, z)$ , относительно подвижной системы отсчета  $(O, x, y, z)$ , вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $z$ . Вращение происходит по отношению к инерциальной системе отсчета  $(O, x_1, y_1, z_1)$ , рис. 21.14, причем  $\varphi = \omega t$ .

Выберем в качестве обобщенных координат точки  $x, y, z$  в подвижной системе отсчета. Для составления уравнений Лагранжа вычислим проекции абсолютной скорости на подвижные оси:

$$v_x = \dot{x} - \omega y; \quad v_y = \dot{y} + \omega x; \quad v_z = \dot{z}.$$

Тогда кинетическая энергия точки будет:

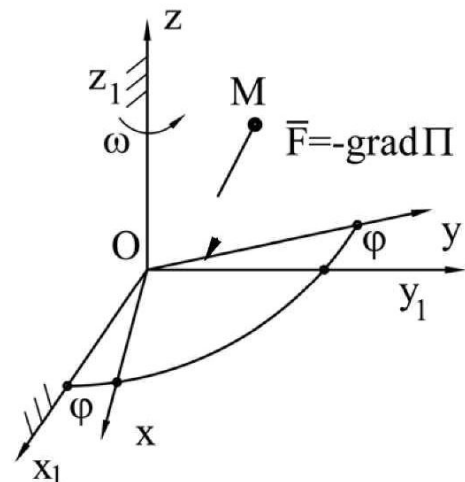


Рис. 21.14

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m[(\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2 + \dot{z}^2] = \\
&= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \\
&+ m\omega(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2).
\end{aligned}$$

Составим уравнения Лагранжа

$$\varepsilon_x(T) = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad \varepsilon_y(T) = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad \varepsilon_z(T) = -\frac{\partial \Pi}{\partial z},$$

где

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x(T) &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{d}{dt}(m\dot{x} - m\omega y) - m\omega \dot{y} - m\omega^2 x = m(\ddot{x} - 2\omega \dot{y} - \omega^2 x); \\
\varepsilon_y(T) &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{d}{dt}(m\dot{y} + m\omega x) + m\omega \dot{x} - m\omega^2 y = m(\ddot{y} + 2\omega \dot{x} - \omega^2 y); \\
\varepsilon_z(T) &= m\ddot{z}.
\end{aligned}$$

Следовательно

$$m(\ddot{x} - 2\omega \dot{y} - \omega^2 x) = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad m(\ddot{y} + 2\omega \dot{x} - \omega^2 y) = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Полученные уравнения представляют собой уравнения относительного движения точки. Первые два уравнения можно представить в виде:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + 2m\omega \dot{y} + m\omega^2 x; \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} + (-2m\omega \dot{x}) + m\omega^2 y.$$

Последние члены этих уравнений представляют собой проекции центробежной силы инерции, а предпоследние – проекции кориолисовой силы инерции.

В данном примере уравнения, дающие связь декартовых координат точки в инерциальной системе  $(O, x_1, y_1, z_1)$  с обобщенными координатами  $x, y, z$ , имеют вид:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x \cos \omega t - y \sin \omega t, \\
y_1 &= x \sin \omega t + y \cos \omega t, \\
z_1 &= z.
\end{aligned}$$

Эти уравнения содержат время  $t$  явно. Следовательно система не является стационарной. Поэтому кинетическая энергия имеет вид

$$T = T_1 + T_2 + T_0,$$

где

$$T_2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad T_1 = m\omega(x\dot{y} - y\dot{x}), \quad T_0 = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2).$$

Но поскольку  $T$  и  $\Pi$  явно от времени не зависят, то имеет место интеграл энергии:

$$T_2 - T_0 + \Pi = h,$$

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) + \Pi = h.$$

В интеграле энергии первый член представляет собой кинетическую энергию точки в относительном движении, а второй – потенциал центробежной силы инерции, который складывается с потенциальной энергией  $\Pi$ . Гироскопический член  $T_1 = m\omega(x\dot{y} - y\dot{x})$  в интеграл энергии не входит. Гироскопические силы будут:

$$Q_x^r = -\varepsilon_x(T_1) = -\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial T_1}{\partial x} = 2m\omega\dot{y};$$

$$Q_y^r = -\varepsilon_y(T_1) = -\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial T_1}{\partial y} = -2m\omega\dot{x}.$$

То есть гироскопической силой является кориолисова сила инерции. Ее мощность

$$N^r = Q_x^r \dot{x} + Q_y^r \dot{y} = 2m\omega(\dot{y}\dot{x} - \dot{x}\dot{y}) = 0,$$

что соответствует общим соображениям, высказанным ранее.

### 21.11. Уравнения Лагранжа второго рода, разрешенные относительно старших производных

Запишем в явном виде левые части уравнения (21.10.21):

$$\begin{aligned} \varepsilon_s(T_2) &= \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial q_s} \right) \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n A_{km} \dot{q}_k \dot{q}_m = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n A_{ks} \dot{q}_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \frac{\partial A_{km}}{\partial q_s} \dot{q}_k \dot{q}_m = \\ &= \sum_{k=1}^n A_{ks} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \left( \frac{\partial A_{ks}}{\partial q_m} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{km}}{\partial q_s} \right) \dot{q}_k \dot{q}_m + \sum_{k=1}^n \frac{\partial A_{ks}}{\partial t} \dot{q}_k. \end{aligned}$$

Преобразуем выражение

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \left( \frac{\partial A_{ks}}{\partial q_m} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{km}}{\partial q_s} \right) \dot{q}_k \dot{q}_m &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \left( \frac{\partial A_{ms}}{\partial q_k} + \frac{\partial A_{ks}}{\partial q_m} - \frac{\partial A_{km}}{\partial q_s} \right) \dot{q}_k \dot{q}_m = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n [k, m, s] \dot{q}_k \dot{q}_m, \end{aligned}$$

где величины  $[k, m, s]$  – называются символами Кристоффеля первого рода для матрицы  $(A_{ks})_{k,s=1,m} = A$  квадратичной формы  $T_2$ . Уравнения (21.10.21) теперь записываются так:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n A_{ks} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n [k, m, s] \dot{q}_k \dot{q}_m &= \Gamma_s + Q_s - \frac{\partial \Pi^*}{\partial q_s} - \\ &- \frac{\partial B_s}{\partial t} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial A_{ks}}{\partial t} \dot{q}_k, \quad s = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{21.11.1}$$

Матрица  $A$  является невырожденной. Элементы обратной матрицы найдутся по формуле:

$$A_{sl}^{-1} = \frac{\Delta_{sl}}{\|A\|},$$

где  $\Delta_{sl}$  – алгебраическое дополнение элемента  $A_{sl}$  определителя  $\|A\|$  матрицы  $A$ .

Умножив на  $A_{sl}^{-1}$  каждое уравнение (21.11.1) и просуммировав по всем  $s$  эти произведения, получим

$$\begin{aligned} \ddot{q}_l + \sum_{s=l}^n A_{sl}^{-1} \sum_{m=l}^n \sum_{k=l}^n [k, m, s] \dot{q}_k \dot{q}_m = \\ = \sum_{s=l}^n A_{sl}^{-1} \left( \Gamma_s + Q_s - \frac{\partial \Pi^*}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial t} - \sum_{k=l}^n \frac{\partial A_{ks}}{\partial t} \dot{q}_k \right). \end{aligned} \quad (21.11.2)$$

Здесь учтено, что

$$\sum_{s=l}^n A_{ks} A_{sl}^{-1} = \frac{1}{\|A\|} \sum_{s=l}^n A_{ks} A_{sl} = \delta_{kl} = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l. \end{cases}$$

Введем величины:

$$\sum_{s=l}^n A_{sl}^{-1} [k, m, s] = \begin{Bmatrix} l \\ k & m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l \\ m & k \end{Bmatrix}, \quad (21.11.3)$$

которые называются символами Кристоффеля второго рода для матрицы  $A$ . После чего уравнения (21.11.3) переписутся в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_l + \sum_{m=l}^n \sum_{k=l}^n \begin{Bmatrix} l \\ k & m \end{Bmatrix} \dot{q}_k \dot{q}_m = \\ = \sum_{s=l}^n A_{sl}^{-1} \left( \Gamma_s + Q_s - \frac{\partial \Pi^*}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial t} - \sum_{k=l}^n \frac{\partial A_{ks}}{\partial t} \dot{q}_k \right), l = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (21.11.4)$$

В случае стационарных связей уравнения (21.11.1) и (21.11.4) упрощаются и принимают вид:

$$\sum_{k=l}^n A_{ks} \ddot{q}_k + \sum_{k=l}^n \sum_{m=l}^n [k, m, s] \dot{q}_k \dot{q}_m = Q_s - \frac{\partial \Pi}{\partial q_s}, s = \overline{1, n}; \quad (21.11.5)$$

$$\ddot{q}_s + \sum_{k=l}^n \sum_{m=l}^n \begin{Bmatrix} s \\ k & m \end{Bmatrix} \dot{q}_k \dot{q}_m = \sum_{l=l}^n A_{ls}^{-1} \left( Q_l - \frac{\partial \Pi}{\partial q_l} \right), s = \overline{1, n}. \quad (21.11.6)$$

## 21.12. Циклические координаты

Обобщенную координату  $q_s$  голономной системы будем называть циклической, если соответствующая ей обобщенная сила равна нулю, а также кинетическая энергия  $T = T_2 + T_1 + T_0$  не зависит от этой координаты. Обобщенная скорость  $\dot{q}_s$  будет называться циклической обобщенной скоростью. Нециклические координаты называются позиционными.

Если система подчинена потенциальным силам, то циклическими координатами будут те координаты, которые не входят в выражение кинетического потенциала  $L$ .

Так, например, если материальная точка массы  $m$  движется в плоскости под действием ньютоновой центральной силы тяготения, то, пользуясь полярными координатами, можно записать:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2), \quad \Pi = \frac{-\gamma \cdot M}{r}m, \quad L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{\gamma \cdot M}{r}m,$$

где  $r$  – расстояние точки до центра тяготения;  $\gamma$  – гравитационная постоянная;  $M$  – масса центрального тела;  $\phi$  – угловая координата, которая является циклической.

Пусть в системе с  $n$  степенями свободы позиционными являются координаты  $q_1, \dots, q_k$ , а остальные  $q_{k+1}, \dots, q_n$  – циклическими.

Тогда

$$Q_s = Q_s(q_1, \dots, q_k), \quad s = \overline{1, k}, \quad Q_{k+1} = 0, \dots, Q_n = 0, \quad (21.12.1)$$

$$T = T(q_1, \dots, q_k; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t), \quad (21.12.2)$$

и в случае потенциальных сил

$$L = L(q_1, \dots, q_k; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t). \quad (21.12.3)$$

Выражение кинетической энергии может быть разбито следующим образом:

$$T = T_2 + T_1 + T_0 = T_2^* + V + T_2^{**} + T_1^* + T_1^{**} + T_0(q_1, \dots, q_k, t). \quad (21.12.4)$$

Здесь  $T_2^*$  и  $T_2^{**}$  – квадратичные формы соответственно позиционных и циклических скоростей,  $V$  – их билинейная форма:

$$\begin{aligned} T_2^* &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^k A_{sr} \dot{q}_s \dot{q}_r, \\ T_2^{**} &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-k} \sum_{s=1}^{n-k} A_{k+s, k+r} \dot{q}_{k+s} \dot{q}_{k+r}, \\ V &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^{n-k} A_{r, k+s} \dot{q}_r \dot{q}_{k+s}. \end{aligned} \quad (21.12.5)$$

Величины  $T_1^*$  и  $T_1^{**}$  представляют линейную часть кинетической энергии также определяемую соответственно позиционными и циклическими скоростями:

$$T_1^* = \sum_{s=1}^k B_s \dot{q}_s, \quad T_1^{**} = \sum_{s=1}^{n-k} B_{k+s} \dot{q}_{k+s}. \quad (21.12.6)$$

Квадратичные формы  $T_2^*$  и  $T_2^{**}$  образованы с помощью квадратных матриц

$$A^* = \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1k} \\ & \dots & \\ A_{k1} & \dots & A_{kk} \end{vmatrix}, A^{**} = \begin{vmatrix} A_{k+1,k+1} & \dots & A_{k+1,n} \\ & \dots & \\ A_{n,k+1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}. \quad (21.12.7)$$

Эти матрицы – невырожденные, так как определители этих матриц  $\|A^*\|$  и  $\|A^{**}\|$  представляют диагональные миноры определителя  $\|A\|$  и являются положительными, поскольку неравенства Сильвестра (21.8.9) выполнены. Дифференциальные уравнения движения разобьем на две группы:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s, \quad s = \overline{1, k}, \quad (21.12.8)$$

и для циклических

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k+s}} = 0, \quad s = \overline{1, n-k}. \quad (21.12.9)$$

Группа уравнений для циклических координат сразу интегрируется. В результате получаем  $n - k$  первых интегралов движения:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{k+s}} = p_{k+s} = \beta_{k+s}, \quad s = \overline{1, n-k}. \quad (21.12.10)$$

Эти  $n - k$  первых интегралов выражают тот факт, что обобщенные циклические импульсы сохраняют при движении постоянные значения, равные  $\beta_{k+s}$ . Заметим, что для линейной координаты  $r$  при движении точки в центральном поле обобщенный импульс будет

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},$$

то есть представляет собой проекцию количества движения на направление  $\bar{r}$ , а для угловой координаты

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi},$$

то есть равен моменту количества движения точки. Уравнения (21.12.10) в более подробной записи, с учетом (21.12.5) и (21.12.6), имеют вид:

$$\sum_{r=1}^{n-k} A_{k+s,k+r} \dot{q}_{k+r} = \beta_{k+s} - \sum_{r=1}^k A_{r,k+s} \dot{q}_r - B_{k+s}, \quad s = \overline{1, n-k}. \quad (21.12.11)$$

Эта система линейных уравнений относительно циклических обобщенных скоростей  $\dot{q}_{k+r}$ , вследствие положительности определителя  $\|A^{**}\|$ , может быть разрешена относительно последних:

$$\dot{q}_{k+r} = \sum_{s=1}^{n-k} (\beta_{k+s} - B_{k+s}) A^{k+r,k+s} - \sum_{r=1}^k \dot{q}_r \sum_{s=1}^{n-k} A_{r,k+s} A^{k+r,k+s}. \quad (21.12.12)$$

Здесь  $A^{k+r,k+s} = \Delta_{k+r,k+s} / \|A^{**}\|$ ,

где  $\Delta_{k+r, k+s}$  – алгебраическое дополнение элемента  $A_{k+s, k+r}$  определителя  $\|A^{**}\|$ .

Если подставить (21.12.12) в уравнение (21.12.8)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T'}{\partial q_s} = Q_s, \quad s = \overline{1, k},$$

то в них войдут позиционные обобщенные координаты и скорости, время  $t$  и постоянные циклические импульсы  $\beta_{k+s}, s = \overline{1, n-k}$ . Причем при выполнении указанных преобразований сохранится форма уравнений Лагранжа второго рода. Однако выполнение этих преобразований в общем виде весьма затруднительно и проще идти путем, предложенным Раусом.

### 21.13. Функция Рауса

Метод Рауса основан на введении вместо кинетической энергии  $T$  другой функции  $R$ , зависящей от позиционных координат и скоростей, времени  $t$  и циклических постоянных импульсов. Эта функция определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} R(q_1, \dots, q_k; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k; \beta_{k+1}, \dots, \beta_n t) = \\ = \left[ T - \sum_{s=1}^{n-k} \beta_{k+s} \dot{q}_{k+s} \right]_{\dot{q}_{k-r} = f_{k-r}}, \end{aligned} \quad (21.13.1)$$

где через  $f_{k+r}$  обозначены правые части уравнения (21.12.12).

Составим выражения производных

$$\frac{\partial R}{\partial q_s}, \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_s}, \frac{\partial R}{\partial \beta_{k+r}}, \quad s = \overline{1, k}, r = \overline{1, n-k}.$$

Учитывая, что правая часть является сложной функцией аргументов  $q_s, \dot{q}_s, \beta_{k+r}$ , получаем:

$$\frac{\partial R}{\partial q_s} = \frac{\partial T'}{\partial q_s} + \sum_{r=1}^{n-k} \frac{\partial T'}{\partial f_{k+r}} \frac{\partial f_{k+r}}{\partial q_s} - \sum_{r=1}^{n-k} \beta_{k+r} \frac{\partial f_{k+r}}{\partial q_s} = \frac{\partial T'}{\partial q_s}, \quad (21.13.2)$$

так как

$$\frac{\partial T'}{\partial f_{k+r}} = \beta_{k+r}$$

и, поэтому

$$\frac{\partial T'}{\partial f_{k+r}} \frac{\partial f_{k+r}}{\partial q_s} = \beta_{k+r} \frac{\partial f_{k+r}}{\partial q_s}. \quad (21.13.3)$$

Аналогично устанавливаем

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_s}, \quad s = \overline{1, k}.$$

Повторяя предыдущие выкладки для  $\beta_{k+s}$ , находим:

$$\frac{\partial R}{\partial \beta_{k+s}} = \sum_{r=1}^{n-k} \frac{\partial T'}{\partial f_{k+r}} \frac{\partial f_{k+r}}{\partial \beta_{k+s}} - \dot{q}_{k+s} - \sum_{r=1}^{n-k} \beta_{k+r} \frac{\partial f_{k+r}}{\partial \beta_{k+s}} = -\dot{q}_{k+s} \quad (21.13.4)$$



или

$$\frac{\partial R}{\partial \beta_{k+r}} = -\dot{q}_{k+s}.$$

Подставляя выражения для производных (21.13.3) и (21.13.4) в дифференциальные уравнения (21.12.8), получим:

$$\varepsilon_s(T) = \varepsilon_s(R) = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s, s = \overline{1, k}. \quad (21.13.5)$$

Уравнения (21.13.5), полученные Раусом, имеют структуру уравнений Лагранжа, причем роль кинетической энергии в них играет функция Рауса  $R$ . Эти уравнения содержат только позиционные координаты и соответствующие им обобщенные скорости и ускорения. Поэтому метод Рауса называется методом игнорирования циклических координат, а сами циклические координаты – игнорируемыми или скрытыми. В то время как позиционные координаты называются явными.

Проинтегрировав систему уравнений (21.13.5), получим выражение для обобщенных позиционных координат и скоростей как функции времени  $t$ ,  $n - k$  постоянных  $\beta_{k+s}$  и еще  $2k$  постоянных интегрирования:

$$\begin{aligned} q_s &= q_s(t, \beta_{k+1}, \dots, \beta_n, c_1, \dots, c_{2k}), \\ \dot{q}_s &= \dot{q}_s(t, \beta_{k+1}, \dots, \beta_n, c_1, \dots, c_{2k}), s = \overline{1, k}. \end{aligned} \quad (21.13.6)$$

Значения (21.13.6) следует подставить в выражения (21.13.4), после чего определение циклических координат сведется к квадратурам

$$q_{k+s} = -\int_{t_0}^t \frac{\partial R}{\partial \beta_{k+r}} dt + q_{k+s}^0, s = \overline{1, n-k}. \quad (21.13.7)$$

Уравнения (21.13.6), (21.13.7) и (21.13.4) представляют собой полную систему интегралов уравнений движения, содержащей  $2n$  постоянных интегрирования  $\beta_{k+1}, \dots, \beta_n, c_1, \dots, c_{2k}, q_{k+s}^0, s = \overline{1, n-k}$ . Наличие  $n - k$  циклических координат позволило понизить порядок интегрируемой системы уравнений до  $2k$ . Таким образом, задача свелась к интегрированию системы дифференциальных уравнений (21.13.5) и нахождению  $n - k$  квадратур (21.13.7). Следует добавить, что от рационального выбора обобщенных координат зависит число циклических координат. Например, при задании положения материальной точки в поле центральной силы декартовыми координатами  $x, y, z$  циклических координат не будет. Если же применяются сферические координаты, то одна из них будет циклической. В случае потенциальных сил вводится кинетический потенциал Рауса

$$L_R = R - \Pi = \left[ L - \sum_{s=1}^{n-k} \beta_{k+s} \dot{q}_{k+s} \right]_{\dot{q}_{k+r} = f_{k+r}}, \quad (21.13.8)$$

где  $\Pi = \Pi(q_1, \dots, q_k)$  – потенциальная энергия.

Дифференциальные уравнения (21.13.8) принимают вид:

$$\varepsilon_s(L_R) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L_R}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L_R}{\partial q_s} = 0, s = \overline{1, k}. \quad (21.13.9)$$

Если время  $t$  в выражение  $L_R$  явно не входит, то для уравнения (21.13.9) по аналогии с (21.13.7) имеет место следующий интеграл энергии:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\partial L_R}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_s - L_R = h. \quad (21.13.10)$$

Функция Рауса  $R$  может быть разбита на три слагаемых

$$R = R_2 + R_1 + R_0, \quad (21.13.11)$$

где  $R_2$  – квадратичная,  $R_1$  – линейная однородные формы обобщенных скоростей  $\dot{q}_s, s = \overline{1, k}$ , а  $R_0$  от последних не зависит. Поэтому и выражение интеграла энергии приводится к виду  $2R_2 + R_1 - R_2 - R_1 - R_0 + \Pi = h$

$$R_2 + \Pi - R_0 = h. \quad (21.13.12)$$

Как видно  $R_1$  и в данном случае исчезает из интеграла энергии. Учитывая представление (21.13.11), уравнения движения для позиционных координат приводятся к виду:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial R_2}{\partial q_k} = Q_k + \Gamma_k + \frac{\partial R_0}{\partial q_k}, k = \overline{1, n}, \quad (21.13.13)$$

где  $\Gamma_k$  – гироскопические силы, соответствующие линейной форме  $R_1$ . При этом  $R_2$  можно трактовать как кинетическую энергию, а  $R_0$  – как потенциальную.

#### 21.14. Уравнения движения неголономной системы в обобщенных координатах с множителями

Пусть на систему материальных точек наложено  $r$  голономных связей

$$f_k(t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) = 0, k = \overline{1, r} \quad (21.14.1)$$

и  $l$  неголономных связей

$$d_k + \sum_{i=1}^N (a_{ki} \dot{x}_i + b_{ki} \dot{y}_i + c_{ki} \dot{z}_i) = 0, k = \overline{1, l}. \quad (21.14.2)$$

Учитывая сначала только голономные связи и вводя  $n = 3N - r$  обобщенных координат  $q_i$ , преобразуем общее уравнение динамики (21.7.3) к виду:

$$\sum_{i=1}^N (\bar{F}_i - m_i \ddot{r}_i) \delta \bar{r}_i = \sum_{s=1}^N \left( Q_s - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} \right) \delta q_s = 0. \quad (21.14.3)$$

Однако в данном случае вариации  $\delta q_s$  зависимы и поэтому выражения в круглых скобках в формуле (21.14.3) вообще говоря не равны нулю. Для получение уравнений движения запишем уравнения неголономных связей в обобщенных координатах. Перепишем уравнение (21.14.2) в виде:

$$d_k + \sum_{i=1}^N \bar{e}_{ki} \bar{v}_i = 0, k = \overline{1, l}, \quad (21.14.4)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{v}_i &= \dot{x}_i \bar{i}_1 + \dot{y}_i \bar{i}_2 + \dot{z}_i \bar{i}_3, \\ \bar{e}_{ki} &= a_{ki} \bar{i}_1 + b_{ki} \bar{i}_2 + c_{ki} \bar{i}_3. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\bar{v}_i = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s,$$

вместо (21.14.4) можно написать

$$d_k + \sum_{i=1}^N \left( \bar{e}_{ki} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \bar{e}_{ki} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s \right) = 0,$$

или, меняя порядок суммирования:

$$\sum_{s=1}^n a_{ks} \dot{q}_s + a_k = 0, k = \overline{1, l}, \quad (21.14.5)$$

где

$$a_{ks} = \sum_{i=1}^N \bar{e}_{ki} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s}, \quad a_k = d_k + \sum_{i=1}^N \bar{e}_{ki} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}.$$

Уравнения (21.14.5) представляют уравнения неголономных связей в обобщенных координатах. Условия, налагаемые этими связями на вариации обобщенных координат, таковы:

$$\sum_{s=1}^n a_{ks} \delta q_s = 0, k = \overline{1, l}. \quad (21.14.6)$$

Умножая теперь обе части равенства (21.13.6) на множители  $\lambda_k$  и суммируя их с выражением (21.14.3), получаем:

$$\sum_{s=1}^n \left[ \left( Q_s + \sum_{k=1}^l \lambda_k a_{ks} \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} \right] \delta q_s = 0. \quad (21.14.7)$$

В равенстве (21.14.7) всего  $n-1$  независимых вариаций обобщенных координат  $\delta q_s$ . Однако можно всегда выбрать множители  $\lambda_k$  так, чтобы  $l$  квадратных скобок обратились в нуль. Остальные скобки также должны обращаться в нуль, так как  $n-l$  вариаций обобщенных координат, на которые они умножаются, уже можно считать независимыми. В итоге получим  $n$  уравнений движения системы:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s + \sum_{k=1}^l \lambda_k a_{ks}, s = \overline{1, n}. \quad (21.14.8)$$

Присоединив к ним уравнения связей (21.14.5) получим замкнутую систему  $n+l$  уравнений с  $n+l$  неизвестными:  $q, \dots, q_n, \lambda_1, \dots, \lambda_l$ . Уравнения (12.14.8), предложенные Раусом, включают обобщенные реакции связей

$$R_s = \sum_{k=1}^l \lambda_k a_{ks}$$

и благодаря этому утрачивают преимущества уравнений Лагранжа второго рода.

В качестве примера рассмотрим движение двухколесного экипажа при малых отклонениях от прямолинейного пути (рис. 21.15).

Переднее колесо находится на расстоянии  $l_1$  от шарнира  $O$ , заднее – на расстоянии  $l_2$ . Предположим, что центр массы тележки располагается в точке  $O$ . Пружины  $c_\phi$  стремятся распрямить тележку. Величина  $c_\phi$  имеет размерность момента, деленного на угол поворота, который измеряется в радианах. Колеса независимы и катятся только в плоскости своего расположения без скольжения. Неподвижная тележка, если деформировать пружины, может совершать колебательное движение. При этом центр тяжести  $O$  будет двигаться по направлению  $x$ . Предположим, что реакции  $\bar{R}_1$  и  $\bar{R}_2$  со стороны плоскости качения нормальны к плоскостям колес, а угол излома мал.

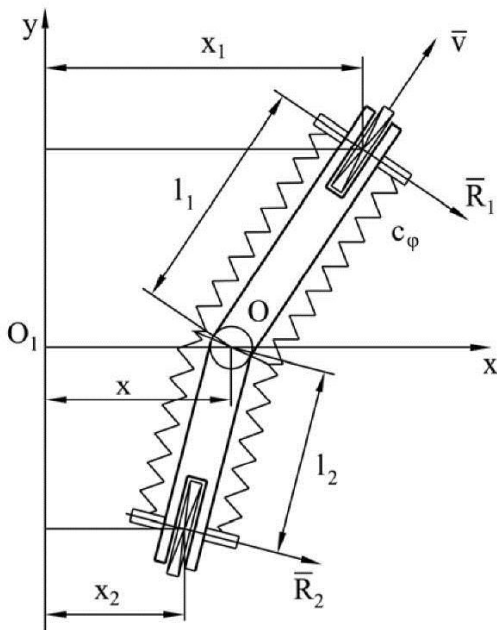


Рис. 21.15

качения нормальны к плоскостям колес, а угол излома мал.

Рассмотрим в начале связи, наложенные на данную систему. Сообщим тележке скорость  $\bar{v}$ . За время  $dt$  переднее колесо пройдет путь  $vdt$ . Проекция этой величины  $dx_1$  на направление  $x_1$  будет равна:

$$dx_1 = vdt \frac{x_1 - x}{l_1}. \quad (21.14.9)$$

Аналогичное соотношение получим для второго колеса:

$$dx_2 = vdt \frac{x - x_2}{l_2}. \quad (21.14.10)$$

В результате из (21.1.29) и (21.14.10) получаем уравнение неголономных связей:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{v}{l_1} (x_1 - x), \quad (21.14.11)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{v}{l_2} (x - x_2). \quad (21.14.12)$$

В качестве обобщенных координат возьмем координату центра масс  $x$  и координат колес  $x_1$  и  $x_2$ . Для того чтобы составить уравнение динамики этой неголономной системы, найдем кинетическую энергию  $T$  и потенциальную энергию  $\Pi$ :

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}, \quad \Pi = \frac{c_\varphi\varphi^2}{2},$$

где  $\varphi$  – угол излома тележки, равный

$$\varphi = \frac{x_1 - x}{l_1} - \frac{x - x_2}{l_2}.$$

Следовательно,

$$\Pi = \frac{l}{2}c_\varphi \left( \frac{x_1 - x}{l_1} - \frac{x - x_2}{l_2} \right)^2.$$

Соответствующие уравнения будут:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad (21.14.13)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial T}{\partial x_1} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} + \lambda_1; \quad (21.14.14)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial T}{\partial x_2} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} + \lambda_2. \quad (21.14.15)$$

В уравнения (21.14.11) и (21.14.12) неголономных связей обобщенная скорость  $\dot{x}$  не входит. Поэтому коэффициенты при  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  равны нулю в уравнении (21.14.13). Коэффициент при обобщенной скорости  $\dot{x}_1$  в первом уравнении связей равен единице, а во втором уравнении – равен нулю. Поэтому в правой части уравнения (21.14.14) имеем лишь  $\lambda_1$ . Аналогично для уравнения (21.14.15) имеем коэффициенты при  $\dot{x}_2$  в первом уравнении связей (21.14.11), равный нулю и единицу во втором уравнении связей. Следовательно, в правую часть уравнения добавляем  $\lambda_2$ . Вычислим соответствующие производные кинетической и потенциальной энергии и подставим их в уравнения (21.14.13), (21.14.14) и (21.14.15). Добавим к полученным уравнениям уравнения неголономных связей (21.14.11) и (21.14.12). В итоге будем иметь:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} + c_{\varphi} \left( \frac{l}{l_1} + \frac{l}{l_2} \right) \left( \frac{x_1 - x}{l_1} - \frac{x - x_2}{l_2} \right) &= 0; \\
-\frac{c_{\varphi}}{l_1} \left( \frac{x_1 - x}{l_1} + \frac{x_2 - x}{l_2} \right) + \lambda_1 &= 0; \\
-\frac{c_{\varphi}}{l_2} \left( \frac{x_1 - x}{l_1} + \frac{x_2 - x}{l_2} \right) + \lambda_2 &= 0; \\
\dot{x}_1 &= \frac{v}{l_1} (x_1 - x); \\
\dot{x}_2 &= \frac{v}{l_2} (x - x_2).
\end{aligned} \tag{21.14.16}$$

Два вторых уравнения системы (21.14.16) являются алгебраическими. Из них определяются реакции неголономных связей:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = R_1 &= \frac{c_{\varphi}}{l_1} \left( \frac{x_1 - x}{l_1} + \frac{x_2 - x}{l_2} \right); \\
\lambda_2 = R_2 &= \frac{c_{\varphi}}{l_2} \left( \frac{x_1 - x}{l_1} + \frac{x_2 - x}{l_2} \right).
\end{aligned} \tag{21.14.17}$$

Выражения (21.14.17) для реакций связей могут быть получены непосредственно из условия обращения в нуль момента в шарнире. Действительно, восстанавливающий момент найдется по формуле  $M = c_{\varphi} \left( \frac{x_1 - x}{l_1} - \frac{x - x_2}{l_2} \right)$ .

Этот момент с одной стороны равен  $R_1 l_1$ , а с другой  $-R_2 l_2$ , так как в шарнире суммарный момент равен нулю. Поэтому из условий  $M = R_1 l_1$  и  $M = R_2 l_2$  получаем формулы (21.14.17). Нетрудно видеть, что сумма

$$R_1 + R_2 = -c_{\varphi} \left( \frac{l}{l_1} + \frac{l}{l_2} \right) \left( \frac{x_1 - x}{l_1} + \frac{x - x_2}{l_2} \right),$$

поэтому первое уравнение системы (21.14.16) можно переписать так:

$$m\ddot{x} = R_1 + R_2. \tag{21.14.18}$$

Уравнение (21.14.18) можно считать результатом применения теоремы о движении центра масс к рассматриваемой механической системе. Таким образом, вид уравнения (21.14.18) не является неожиданным.

Итак, после ряда преобразований мы имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} + c\left(\frac{l}{l_1} + \frac{l}{l_2}\right)^2 x - c\left(\frac{l}{l_1} + \frac{l}{l_2}\right)\left(\frac{x_1}{l_1} + \frac{x_2}{l_2}\right) &= 0; \\
\frac{v}{l_1}x - \frac{v}{l_1}x_1 + \dot{x}_1 &= 0; \\
\frac{v}{l_2}x - \frac{v}{l_2}x_2 + \dot{x}_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{21.14.19}$$

Если координаты  $x_1$  и  $x_2$  постоянны, то получаем уравнение гармонических колебаний для системы с одной степенью свободы.

Уравнения (21.14.19) имеют несимметричные связи, которые могут привести к появлению характеристических чисел с положительной вещественной составляющей и, следовательно, к неустойчивости. Ограничимся нахождением характеристических чисел этой линейной системы дифференциальных уравнений. Для этого рассмотрим характеристический определитель

$$\left\| \begin{array}{ccc}
mr + c_\Phi\left(\frac{l}{l_1} + \frac{l}{l_2}\right)^2 & -\frac{c_\Phi}{l_1}\left(\frac{l}{l_1} + \frac{l}{l_2}\right) & -\frac{c_\Phi}{l_2}\left(\frac{l}{l_1} + \frac{l}{l_2}\right) \\
\frac{v}{l_1} & -\frac{v}{l_1} + r & 0 \\
\frac{v}{l_2} & 0 & -\frac{v}{l_2} - r
\end{array} \right\| = 0.$$

Если развернуть определитель, то получим характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned}
\left[ mr^2 + c_\Phi\left(\frac{l}{l_1} + \frac{l}{l_2}\right)^2 \right] \left( -\frac{v}{l_1} + r \right) \left( -\frac{v}{l_2} - r \right) - \frac{c_\Phi}{l_1}\left(\frac{l}{l_1} + \frac{l}{l_2}\right) \frac{v}{l_1} \left( \frac{v}{l_2} + r \right) + \\
+ \frac{c_\Phi}{l_2}\left(\frac{l}{l_1} + \frac{l}{l_2}\right) \frac{v}{l_2} \left( -\frac{v}{l_1} + r \right) = 0,
\end{aligned}$$

которое после ряда преобразований приводится к виду:

$$-r^2 \left[ mr^2 + vm\left(\frac{l}{l_2} - \frac{l}{l_1}\right)r + c_\Phi\left(\frac{l}{l_1} + \frac{l}{l_2}\right)^2 - \frac{mv^2}{l_1 l_2} \right] = 0.$$

Множитель  $r^2$  означает наличие двух нулевых корней. Следовательно, в общем решении будут члены  $c_1 t + c_2$ , где  $c_1$  и  $c_2$  – постоянные. Если движение прямолинейно и параллельно оси  $O_1 y$ , то  $c_1$  и  $c_2$  равны нулю. То есть начальное положение и начальное направление движения тележки безразличны для исследования устойчивости. Об устойчивости и характере колебаний судим по уравнению:

$$mr^2 + vm \left( \frac{l}{l_2} - \frac{l}{l_1} \right) r + c_\phi \left( \frac{l}{l_1} + \frac{l}{l_2} \right)^2 - \frac{mv^2}{l_1 l_2} = 0.$$

Демпфирование колебаний определяется членом  $vm \left( \frac{l}{l_2} - \frac{l}{l_1} \right)$ . Если  $vm \left( \frac{l}{l_2} - \frac{l}{l_1} \right) > 0$ , то движение устойчиво при положительном свободном члене, а это значит, что  $\frac{l}{l_2} > \frac{l}{l_1}$  или  $l_1 > l_2$  и, следовательно центр тяжести должен быть смещен назад. Если  $v$  настолько велико, что

$$c_\phi \left( \frac{l}{l_1} + \frac{l}{l_2} \right)^2 - \frac{mv^2}{l_1 l_2} < 0,$$

то характеристическое уравнение имеет положительные корни и решение нарастает по экспоненциальному закону. Рассмотрим приложение к самолетному шасси. На рис. 21.16 – классический тип.

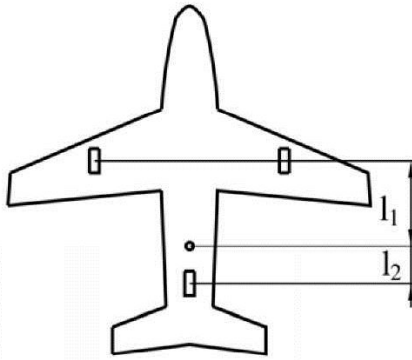


Рис. 21.16

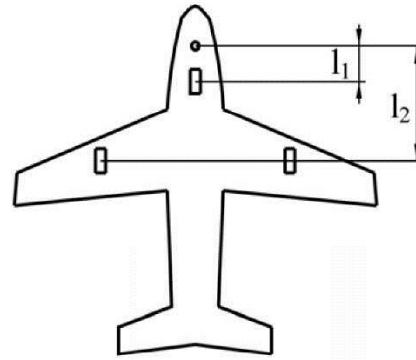


Рис. 21.17

Здесь  $l_2 \ll l_1, c_\phi = 0$ ;

$$mr^2 + vm \left( \frac{l}{l_2} - \frac{l}{l_1} \right) r - \frac{mv^2}{l_1 l_2} = 0. \quad (21.14.20)$$

Согласно характеристическому уравнению движение всегда неустойчиво.

На рис. 21.17 – новый вариант расположения колес. Здесь  $l_1 < 0$ , поэтому имеем:

$$mr^2 + vm \left( \frac{l}{l_2} + \frac{l}{|l_1|} \right) r + \frac{mv^2}{|l_1| l_2} = 0.$$

Так как коэффициенты характеристического уравнения положительны, то движение устойчиво всегда.



## 21.15. Дифференциальные уравнения Аппеля

Уравнения Аппеля близки к уравнениям Лагранжа второго рода и применимы к неголономным системам, а, следовательно, и к голономным, которые являются частным случаем неголономных. Эти уравнения также являются следствием общего уравнения динамики, в котором осуществляется переход к обобщенным координатам, но при этом, с учетом неголономных связей виртуальные перемещения  $\delta \bar{r}_i$  выражаются только через независимые вариации обобщенных координат. Итак, нами рассматривается система материальных точек, конфигурация которых задается  $n$  независимыми координатами  $q_s, s = \overline{1, n}$ . Уравнения неголономных связей, выраженные через обобщенные координаты, записываются в виде:

$$\sum_{s=1}^n a_{ks} \dot{q}_s + a_k = 0, k = \overline{1, l}, \quad (21.15.1)$$

где  $a_{ks}$  и  $a_k$  – функции обобщенных координат и времени.

Уравнения (21.15.1) должны быть разрешены относительно  $l$  обобщенных скоростей  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l$ . То есть необходимо иметь систему равенств:

$$\dot{q}_r = b_{r,l+1} \dot{q}_{l+1} + \dots + b_{rn} \dot{q}_n + b_r, r = \overline{1, l}. \quad (21.15.2)$$

Уравнения, связывающие вариации обобщенных координат, следующие из (21.15.1):

$$\sum_{s=1}^n a_{ks} \delta q_s = 0, k = \overline{1, l}, \quad (21.15.3)$$

позволяют выразить  $\delta q_1, \dots, \delta q_l$  через  $n - l$  вариаций  $\delta q_{l+1}, \dots, \delta q_n$ , которые будут независимыми. Очевидно,

$$\delta q_r = b_{r,l+1} \delta q_{l+1} + \dots + b_{rn} \delta q_n, r = \overline{1, l}. \quad (21.15.4)$$

Дифференцируя (21.15.2), найдем выражения обобщенных ускорений:

$$\ddot{q}_r = \sum_{s=1}^{n-l} b_{r,l+s} \ddot{q}_{l+s} + \sum_{s=1}^{n-l} \dot{b}_{r,l+s} \dot{q}_{l+s} + \dot{b}_r. \quad (21.15.5)$$

Найдем выражение вектора ускорения  $\bar{a}_i$  через обобщенные координаты. Для этого продифференцируем вектор скорости точки  $M_i$

$$\bar{v}_i = \sum_{s=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}$$

по времени:

$$\bar{a}_i = \dot{\bar{v}}_i = \sum_{s=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \ddot{q}_s + \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_k \partial q_s} \dot{q}_k \dot{q}_s + 2 \sum_{s=1}^n \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_s \partial t} \dot{q}_s + \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial t^2}.$$

Подставим (21.15.5) в формулу для ускорений. Имеем:

$$\bar{a}_i = \sum_{m=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m} \ddot{q}_m + \dots = \sum_{r=1}^l \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_r} \ddot{q}_r + \sum_{s=1}^{n-l} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_{l+s}} \ddot{q}_{l+s} + \dots \quad (21.15.6)$$

В формуле (21.15.6) многоточием отмечены слагаемые, не зависящие от обобщенных скоростей, и которые в дальнейшем не потребуются. Воспользовавшись соотношениями (21.15.5), исключим  $\ddot{q}_r$  из (21.15.6):

$$\begin{aligned}\bar{a}_i &= \sum_{r=l}^l \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_r} \sum_{s=l}^{n-l} b_{r,l+s} \ddot{q}_{l+s} + \sum_{s=l}^{n-l} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_{l+s}} \ddot{q}_{l+s} + \dots = \\ &= \sum_{s=l}^{n-l} \left( \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_{l+s}} + \sum_{r=l}^l \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_r} b_{r,l+s} \right) \ddot{q}_{l+s} + \dots\end{aligned}\quad (21.15.7)$$

Обозначим

$$\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_{l+s}} + \sum_{r=l}^l \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_r} b_{r,l+s} = \bar{c}_{i,l+s}, \quad i = \overline{1, N}, \quad s = \overline{l, n-l}.\quad (21.15.8)$$

После чего имеем

$$\bar{a}_i = \sum_{s=l}^{n-l} \bar{c}_{i,l+s} \ddot{q}_{l+s} + \dots$$

Здесь многоточием также обозначены слагаемые, независимые от обобщенных ускорений. Поэтому:

$$\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial \ddot{q}_{l+s}} = \bar{c}_{i,l+s}.\quad (21.15.9)$$

Виртуальные перемещения  $\delta \bar{r}_i$  выражаются через независимые вариации  $\delta q_{l+s}$  с помощью линейных соотношений, подобных (21.15.7), если отбросить слагаемые, обозначенные многоточием:

$$\begin{aligned}\delta \bar{r}_i &= \sum_{k=l}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{r=l}^l \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_r} \delta q_r + \sum_{s=l}^{n-l} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_{l+s}} \delta q_{l+s} = \\ &= \sum_{s=l}^{n-l} \left( \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_{l+s}} + \sum_{r=l}^l \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_r} b_{r,l+s} \right) \delta q_{l+s},\end{aligned}$$

или, согласно (21.15.8) и (21.15.9),

$$\delta \bar{r}_i = \sum_{s=l}^{n-l} \bar{c}_{i,l+s} \delta q_{l+s} = \sum_{s=l}^{n-l} \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial \ddot{q}_{l+s}} \delta q_{l+s}.\quad (21.15.10)$$

Перейдем теперь к преобразованию общего уравнения динамики. Начнем со второго слагаемого:

$$\sum_{i=l}^N m_i \bar{a}_i \delta \bar{r}_i = \sum_{i=l}^N m_i \bar{a}_i \sum_{s=l}^{n-l} \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial \ddot{q}_{l+s}} \delta q_{l+s} = \delta q_{l+s} \sum_{i=l}^N m_i \bar{a}_i \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial \ddot{q}_{l+s}}.$$

Как видно

$$\sum_{i=l}^N m_i \bar{a}_i \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial \ddot{q}_{l+s}} = \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_{l+s}} \frac{1}{2} \sum_{i=l}^N m_i \bar{a}_i^2 = \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_{l+s}},\quad (21.15.11)$$

где  $S = \frac{1}{2} \sum_{i=l}^N m_i \bar{a}_i^2$  – энергия ускорений.

При этом из выражения  $S$  при помощи уравнений неголономных связей исключены ускорения  $\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_l$ . Итак, имеет место равенство:

$$\sum_{i=1}^N m_i \bar{a}_i \delta \bar{r}_i = \sum_{s=1}^{n-l} \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_{l+s}} \delta q_{l+s}. \quad (21.15.12)$$

Преобразуем первое слагаемое в общем уравнении динамики:

$$\delta' A = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \delta \bar{r}_i = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \sum_{s=1}^{n-l} c_{i,l+s} \delta q_{l+s} = \sum_{s=1}^{n-l} \tilde{Q}_{l+s} \delta q_{l+s}, \quad (21.15.13)$$

где

$$\tilde{Q}_{l+s} = \sum_{i=1}^N \bar{c}_{i,l+s} \bar{F}_i, \quad s = \overline{1, n-l} \quad (21.15.14)$$

– обобщенные силы для независимых вариаций обобщенных координат. Общее уравнение динамики теперь преобразуется к виду:

$$\sum_{s=1}^{n-l} \left( \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_{l+s}} - \tilde{Q}_{l+s} \right) \delta q_{l+s} = 0. \quad (21.15.15)$$

Откуда вследствие независимости вариаций  $\delta q_{l+s}$  следуют уравнения движения неголономных систем в форме Аппеля:

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_{l+s}} = \tilde{Q}_{l+s}, \quad s = \overline{1, n-l}, \quad (21.15.16)$$

число уравнений (21.15.16) равно числу степеней свободы системы. В общем случае в них входят все обобщенные координаты и скорости. Поэтому их следует дополнить уравнениями неголономных связей в форме (21.15.1) или (21.15.2). Тогда получим систему  $n$  дифференциальных уравнений, содержащую столько же неизвестных. Порядок для такой системы равен  $2(n-l)+l = 2n-l$ , в то время как порядок системы дифференциальных уравнений неголономной системы с множителями равен  $2n+l$ .

Уравнения Аппеля применимы и при отсутствии неголономных связей, при этом, когда составляется выражение  $S$ , то следует учитывать лишь члены, содержащие обобщенные ускорения. Для энергии ускорений имеет место теорема, аналогичная теореме Кенига. Представим  $\bar{r}_i$  в виде суммы

$$\bar{r}_i = \bar{r}_c + \bar{\rho}_i,$$

где  $\bar{r}_c$  – радиус-вектор центра масс системы,  $\bar{\rho}_i$  – радиус-вектор точки  $M_i$  по отношению к центру масс. По определению

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i a_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \bar{r}_i}{dt^2} \frac{d^2 \bar{r}_i}{dt^2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2}{dt^2} (\bar{r}_c + \bar{\rho}_i) \frac{d^2}{dt^2} (\bar{r}_c + \bar{\rho}_i) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} \right)^2 + \sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} \frac{d^2 \bar{\rho}_i}{dt^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{d^2 \bar{\rho}_i}{dt^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Здесь  $\frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = \bar{a}_c$  – ускорение центра масс,  $\frac{d^2 \bar{\rho}_i}{dt^2} = \bar{a}_i$  – ускорение точки  $M_i$

по отношению к центру масс.

Величины  $\sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} \frac{d^2 \bar{\rho}_i}{dt^2} = \bar{a}_c \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^N m_i \bar{\rho}_i = 0$ , так как  $\sum_{i=1}^N m_i \bar{\rho}_i = 0$  по определению. Следовательно

$$S = \frac{1}{2} M a_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i a_i^2, \quad (21.15.17)$$

где  $M = \sum_{i=1}^N m_i$  – масса системы.

Формула (21.15.17) является аналогом соответствующей формулы, выражающей суть теоремы Кенига. Выражением (21.15.17) удобно пользоваться для вычисления энергии ускорений твердых тел.

В качестве примера применения уравнений Аппеля рассмотрим движение саней по наклонной плоскости, пренебрегая трением (рис. 21.18). Система является неголономной, если считать, что сани не могут перемещаться в направлении, перпендикулярном полозьям. Положение саней в плоскости движения  $Oxy$  определяется тремя координатами: центра масс  $x, y$  и углом  $\varphi$ , который полозья образуют с линией наибольшего ската.

Следовательно, обобщенные координаты будут:

$$q_1 = x, q_2 = y, q_3 = \varphi.$$

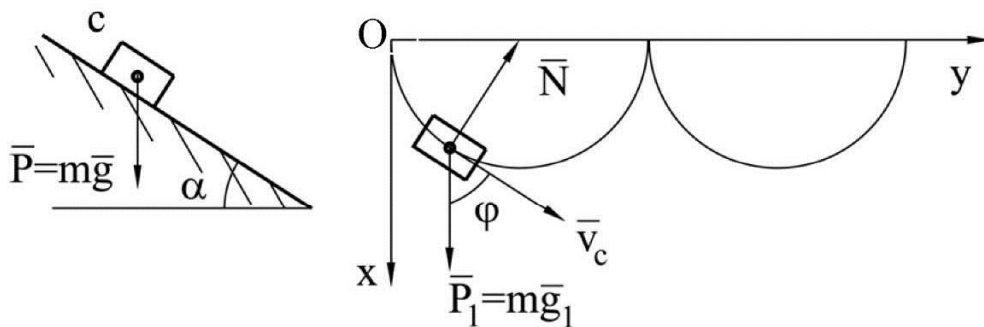


Рис. 21.18

Вектор скорости центра масс саней всегда направлен параллельно полозьям, что налагает на его проекции  $\dot{x}, \dot{y}$  условие:

$$\frac{v_y}{v_x} = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{или} \quad \dot{y} = \dot{x} \operatorname{tg} \varphi. \quad (21.15.18)$$

Это уравнение неинтегрируемой связи. На сани в плоскости движения действует составляющая силы тяжести  $P_1 = mg_1$ , где  $g_1 = g \sin \alpha$ . Сила  $P_1$  параллельна оси  $x$ . Кроме того, будем считать, что к саням в центре масс  $C$  приложена постоянная сила  $F = ma$ , параллельная оси  $y$ .

Для составления энергии ускорений используем теорему Кенига и соответствующие формулы для плоско-параллельного движения. Ускорение точки  $M$  во вращательном движении относительно центра масс будет:

$$a_M = h_M \sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4},$$

где  $h_M$  – расстояние точки  $M$  до центра масс;  $\ddot{\varphi}$  – угловое ускорение;  $\dot{\varphi}$  – угловая скорость. Энергия ускорения в относительном вращении вокруг точки  $C$  будет:

$$S_c = \frac{1}{2} \int_{(m)} a_M^2 dm = \frac{1}{2} (\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4) \int_{(m)} h^2 dm = \frac{J_c}{2} (\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4).$$

Следовательно,

$$S = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{J_c}{2} (\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4).$$

Исключим  $\dot{y}$  и оставим только члены, зависящие от вторых производных координат  $x$  и  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} S &= \frac{m}{2} \left[ \ddot{x}^2 (1 + tg^2 \varphi) + 2 \dot{x} \ddot{\varphi} tg \varphi \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right] + \frac{1}{2} J_c \ddot{\varphi}^2 + \dots = \\ &= \frac{m \ddot{x}}{2} \left( \frac{\ddot{x}}{\cos^2 \varphi} + \dot{\varphi} \frac{2tg \varphi}{\cos^2 \varphi} \right) + \frac{J_c}{2} \ddot{\varphi}^2, \end{aligned}$$

где многоточием обозначены слагаемые, не зависящие от вторых производных.

Для нахождения обобщенных сил  $Q'_i$  воспользуемся выражением элементарной работы:

$$\delta A = mg_1 \delta x + m a \delta y + \theta \delta \varphi.$$

Учитывая, что  $\delta y = tg \varphi \delta x$  получим:

$$\delta A = (mg_1 + m a tg \varphi) \delta x.$$

Следовательно,  $Q'_x = m(g_1 + a tg \varphi)$ ;  $Q'_\varphi = 0$ .

Составим, теперь уравнения Аппеля:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{x}} = Q'_x; \quad \frac{\partial S}{\partial \ddot{\varphi}} = Q'_\varphi;$$

$$m \left( \frac{\ddot{x}}{\cos^2 \varphi} + \dot{\varphi} \frac{tg \varphi}{\cos^2 \varphi} \right) = m(g_1 + a tg \varphi); \quad (21.15.19)$$

$$J_c \ddot{\varphi} = 0.$$

Рассмотрим интегрирование уравнений движения. Пусть при  $t = 0, x = 0, y = 0, \varphi = 0, \dot{x} = v_0, \dot{\varphi} = \omega_0$ . Величина  $\dot{y}_0$  не может быть задана, так как связана с  $\dot{x}_0$  соотношением:

$$\dot{y}_0 = \dot{x}_0 tg \varphi.$$

Кроме того, положим  $a = 0$ . Тогда из второго уравнения системы (21.15.19) получаем:

$$\varphi = \omega_0 t,$$

а первое уравнение принимает вид:

$$\ddot{x} + \omega_0 \dot{x} t g \omega_0 t = g_1 \cos^2 \omega_0 t. \quad (21.15.20)$$

Найдем интеграл этого уравнения. Решение будем искать подстановкой  $\dot{x} = pq$ , где  $p$  и  $q$  – неизвестные функции времени. Дифференцируя  $\dot{x}$ , найдем:

$$\ddot{x} = \dot{p}q + p\dot{q}.$$

Подставим  $\ddot{x}$  в уравнение (21.15.20):

$$\dot{p}q + p\dot{q} + \omega_0 pqtg\omega_0 t = g_1 \cos^2 \omega_0 t.$$

Потребуем, чтобы

$$\dot{p}q + \omega_0 pqtg\omega_0 t = 0.$$

Тогда получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\dot{p} + \omega_0 ptg\omega_0 t = 0$$

или

$$\frac{dp}{p} = -\omega_0 t g \omega_0 t dt.$$

Интеграл этого уравнения:

$$\ln p = \ln \cos \omega_0 t + \ln c_1$$

или  $p = c_1 \cos \omega_0 t$ . Потребуем, чтобы

$$p\dot{q} = g_1 \cos^2 \omega_0 t.$$

Но, тогда

$$\dot{q} = \frac{g_1}{c_1} \cos \omega_0 t.$$

Интеграл этого уравнения:

$$q = \frac{g_1}{\omega_0 c_1} \sin \omega_0 t + c_2.$$

Следовательно:

$$\dot{x} = pq = \frac{g_1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t + c_2 c_1 \cos \omega_0 t.$$

Так как  $\dot{x}|_{t=0} = v_0$ , то  $v_0 = c_2 c_1$  и, следовательно,

$$\dot{x} = \frac{g_1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t + v_0 \cos \omega_0 t. \quad (21.15.21)$$

Для  $\dot{y}$ , учитывая уравнения связи, получаем:

$$\dot{y} = \frac{g_1}{\omega_0} \sin^2 \omega_0 t + v_0 \sin \omega_0 t. \quad (21.15.22)$$

Интегрируя уравнения (21.15.21) и (21.15.22) еще раз, получаем:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{g_l}{2\omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \\
 y &= \frac{g_l}{2\omega_0} \left( t - \frac{\sin 2\omega_0 t}{2\omega_0} \right) + \frac{v_0}{\omega_0} (1 - \cos \omega_0 t),
 \end{aligned}
 \tag{21.15.23}$$

где постоянная интегрирования  $l = c_3$ .

В частном случае, когда  $v_0 = 0$ , центр масс описывает циклоиду

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{g_l}{4\omega_0^2} (1 - \cos 2\omega_0 t); \\
 y &= \frac{g_l}{4\omega_0^2} (2\omega_0 t - \sin 2\omega_0 t).
 \end{aligned}$$

Если  $g_l = 0$ , то движение происходит по горизонтальной плоскости, и мы имеем:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t; \\
 y &= \frac{v_0}{\omega_0} (1 - \cos \omega_0 t),
 \end{aligned}$$

а это уравнения окружности. Если же  $\omega_0 = 0$ , то уравнения (21.15.23) дают тривиальный результат:

$$x = v_0 t + \frac{gt^2}{2}; \quad y = 0.$$

Реакции неголономных связей будут:

$$N_x = \lambda g \omega_0 t; \quad N_y = -\lambda,$$

где  $\lambda = -m\ddot{y}$  (см. уравнения (21.14.8)).

### 21.16. Уравнение Аппеля в квазискоростях

Составление уравнений Аппеля значительно упрощается, если при вычислении энергии ускорений использовать так называемые квазиускорения.

Пусть конфигурация системы задается  $n$  независимыми параметрами  $q_1, \dots, q_n$ . При определении скоростей точек системы часто оказывается удобнее пользоваться не обобщенными скоростями  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ , а некоторыми их линейными комбинациями с коэффициентами, зависящими от обобщенных координат:

$$\omega_s = a_{s1} \dot{q}_1 + \dots + a_{sn} \dot{q}_n, \quad s = \overline{1, n}. \tag{21.16.1}$$

Величины  $\omega_s$  называются квазискоростями. В качестве примера можно привести проекции вектора угловой скорости твердого тела  $\bar{\omega}$  на оси  $(Ox_1 y_1 z_1)$  связанные с телом:

$$\begin{aligned}\omega_{x_l} &= \dot{\vartheta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi, \\ \omega_{y_l} &= -\dot{\vartheta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi, \\ \omega_{z_l} &= \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \vartheta,\end{aligned}\quad (21.16.2)$$

где  $\psi, \vartheta, \varphi$  – углы Эйлера.

Величины  $\omega_s$ , как правило, имеют вполне определенный смысл. При этом выражения (21.16.1), как видно на примере соотношений (21.16.2), могут быть и не быть полными производными по времени от каких-либо функций обобщенных координат и времени. Наряду с (21.16.1) рассмотрим линейные формы дифференциалов обобщенных координат

$$d\pi_s = a_{s1}dq_1 + \dots + a_{sn}dq_n, \quad s = \overline{1, n}. \quad (21.16.3)$$

Величины  $d\pi_s$  называются дифференциалами квазиординат. Однако в общем случае соотношения (21.16.3) неинтегрируемы и поэтому  $\pi_s$  как функции обобщенных координат не существуют. Вместе с тем условное введение величины  $\pi_s$  и наименование их квазиординатами позволяет сократить запись и формулировки и поэтому оправдано. Таким образом, можно условно также обозначить

$$\omega_s = \frac{d\pi_s}{dt}. \quad (21.16.4)$$

Предположим, что найдены соотношения, обратные (21.16.1):

$$\dot{q}_r = b_{r1}\omega_1 + \dots + b_{rn}\omega_n, \quad r = \overline{1, n}. \quad (21.16.5)$$

Из (21.16.5) следует:

$$dq_r = \sum_{s=1}^n b_{rs} d\pi_s. \quad (21.16.6)$$

Рассмотрим выражение полного дифференциала некоторой функции  $\varphi(q_1, \dots, q_n)$  обобщенных координат. Учитывая (21.16.6), получим:

$$d\varphi = \sum_{r=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial q_r} dq_r = \sum_{r=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial q_r} \sum_{s=1}^n b_{rs} d\pi_s = \sum_{s=1}^n d\pi_s \sum_{r=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial q_r} b_{rs} = \sum_{s=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial \pi_s} d\pi_s, \quad (21.16.7)$$

где также условно обозначено

$$\sum_{r=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial q_r} b_{rs} = \frac{\partial \varphi}{\partial \pi_s}. \quad (21.16.8)$$

Теперь можно выписать ряд следующих соотношений

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \pi_s} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_i} b_{is}, \quad (21.16.9)$$

$$\bar{v}_i = \dot{\bar{r}}_i = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \pi_s} \omega_s, \quad (21.16.10)$$

откуда следует:



$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \omega_s} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \pi_s}. \quad (21.16.11)$$

Аналогично получаем обратные соотношения:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_r} = \sum_{k=l}^n a_{kr} \frac{\partial \varphi}{\partial \pi_k}; \quad \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_r} = \sum_{k=l}^n a_{kr} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \pi_k} \quad (21.16.12)$$

Если вместо (21.16.1) принять выражение, содержащее свободный член  $a_{s,n+l}$ , то можно ввести дополнительно  $\omega_{n+l} = \dot{q}_{n+l} = l$ , то есть добавить в (21.16.1) еще одну скорость. При этом все вышеприведенные рассуждения остаются в силе, то есть указанное расширение числа квазискоростей не ведет к увеличению общности. Запишем уравнение неголономных связей в виде:

$$\omega_s = 0, \quad s = \overline{l, l}, \quad (21.16.13)$$

то есть сами по себе линейные формулы обобщенных скоростей, выражающие неголономные связи, назовем квазискоростями.

Вектор скорости  $i$  точки системы, согласно (21.16.10), найдется по формуле

$$\bar{v}_i = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} + \sum_{s=l}^{n-l} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \pi_{l+s}} \omega_{l+s}. \quad (21.16.14)$$

Дифференцируя (21.16.14), найдем вектор ускорений:

$$\bar{a}_i = \sum_{s=l}^{n-l} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \pi_{l+s}} \dot{\omega}_{l+s} + \dots \quad (21.16.15)$$

Здесь точками обозначены члены, не зависящие от обобщенных ускорений. Следствием (21.16.15) будет соотношение:

$$\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial \dot{\omega}_{l+s}} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \pi_{l+s}}. \quad (21.16.16)$$

Согласно уравнению неголономных связей (21.16.13) имеем:

$$\delta \pi_s = 0, \quad s = \overline{l, l}. \quad (21.16.17)$$

Далее, исходя из (21.16.14) с учетом (21.16.16), можно записать

$$\delta \bar{r}_i = \sum_{s=l}^{n-l} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \pi_{l+s}} \delta \pi_{l+s} = \sum_{s=l}^{n-l} \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial \dot{\omega}_{l+s}} \delta \pi_{l+s}. \quad (21.16.18)$$

Теперь можно преобразовать общее уравнение динамики. Начнем со второго слагаемого.

$$\begin{aligned} \sum_{i=l}^N m_i \bar{a}_i \delta \bar{r}_i &= \sum_{i=l}^N m_i \bar{a}_i \sum_{s=l}^{n-l} \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial \dot{\omega}_{l+s}} \delta \pi_{l+s} = \sum_{s=l}^{n-l} \delta \pi_{l+s} \sum_{i=l}^N m_i \bar{a}_i \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial \dot{\omega}_{l+s}} = \\ &= \sum_{s=l}^{n-l} \delta \pi_{l+s} \frac{\partial}{\partial \dot{\omega}_{l+s}} \frac{1}{2} \sum_{i=l}^N m_i \bar{a}_i \bar{a}_i, \end{aligned}$$

-----

$$\sum_{i=1}^N m_i \bar{a}_i \delta \bar{r}_i = \sum_{s=1}^{n-l} \frac{\partial S}{\partial \dot{\omega}_{l+s}} \delta \pi_{l+s}, \quad (21.16.19)$$

где  $S$  – энергия ускорений. Элементарная работа внешних сил может быть записана в виде

$$\delta' A = \sum_{s=1}^{n-l} P_{l+s} \delta \pi_{l+s}, \quad (21.16.20)$$

где  $P_{l+s}$  – обобщенные силы, соответствующие квазикоординатам, и которые вычисляются с учетом неголономных связей.

Общее уравнение динамики преобразуется к виду:

$$\sum_{s=1}^{n-l} \left( \frac{\partial S}{\partial \dot{\omega}_{l+s}} - P_{l+s} \right) \delta \pi_{l+s} = 0, \quad (21.16.21)$$

из которого, вследствие независимости вариаций  $\delta \pi_{l+s}$ , следуют уравнения Аппеля в квазискоростях:

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\omega}_{l+s}} = P_{l+s}, \quad s = \overline{1, l}. \quad (21.16.22)$$

К системе  $n-l$  уравнений, содержащей квазискорости  $\omega_{l+s}$  и квазиускорения  $\dot{\omega}_{l+s}$ , а также, в общем случае, обобщенные координаты  $q_1, \dots, q_n$  – следует присоединить  $n$  уравнений первого порядка

$$\dot{q}_r = \sum_{k=1}^{n-l+1} b_{r,l+k} \omega_{l+k}, \quad s = \overline{1, l}, \quad (21.16.23)$$

где  $\omega_{n+l} = 1$ , выражающей обобщенные скорости через псевдоскорости.

Составим уравнения Аппеля в квазискоростях для тяжелого однородного шара, катящегося по наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтальной плоскостью (рис. 21.19).

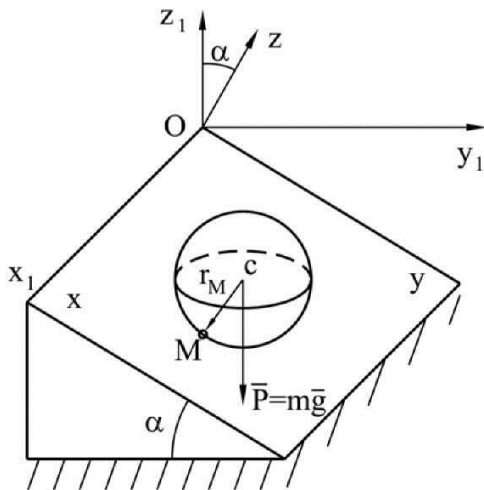


Рис. 21.19

За независимые обобщенные координаты примем  $q_1 = x_c$ ,  $q_2 = y_c$ ,  $q_3 = \psi$ ,  $q_4 = \vartheta$ ,  $q_5 = \varphi$ , где  $x_c, y_c$  – координаты центра масс:  $\psi, \vartheta, \varphi$  – углы Эйлера.

Уравнение голономной связи выражает тот факт, что расстояние центра шара точки  $C$  до точки касания с плоскостью всегда постоянно, то есть

$$z_c = a.$$

Уравнения неголономных связей получаются из условия равенства нулю скорости точки  $M$ :

$$\bar{v}_M = \bar{v}_c + \bar{\omega} \times \bar{r}_M = 0, \quad (21.16.24)$$

где  $\bar{r}_M = 0\bar{i} + 0\bar{j} - a\bar{k}$ , то есть  $r_M = a$ .

Раскрывая условие (21.16.24), получаем:

$$\dot{x}_c - a\omega_y = 0; \dot{y}_c + a\omega_x = 0. \quad (21.16.25)$$

Проекции угловой скорости шара на оси ( $Oxyz$ ):

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \vartheta \sin \psi, \\ \omega_y &= \dot{\vartheta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \vartheta \cos \psi, \\ \omega_z &= \dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (21.16.26)$$

Примем за независимые квазискорости выражения (21.16.26)

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_1 &= \omega_x = \dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \vartheta \sin \psi, \\ \dot{\pi}_2 &= \omega_y = \dot{\vartheta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \vartheta \cos \psi, \\ \dot{\pi}_3 &= \omega_z = \dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (21.16.27)$$

Определим обобщенные скорости через независимые квазискорости (21.16.25) и (21.16.27)

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= a\dot{\pi}_2; \dot{y}_c = -a\dot{\pi}_1; \\ \dot{\phi} &= \frac{\sin \psi}{\sin \vartheta} \dot{\pi}_1 - \frac{\cos \psi}{\sin \vartheta} \dot{\pi}_2; \\ \dot{\vartheta} &= \cos \psi \dot{\pi}_1 + \sin \psi \dot{\pi}_2; \\ \dot{\psi} &= -\sin \psi \operatorname{ctg} \vartheta \dot{\pi}_1 + \cos \psi \operatorname{ctg} \vartheta \dot{\pi}_2 + \dot{\pi}_3. \end{aligned} \quad (21.16.28)$$

Найдем энергию ускорений. Воспользуемся теоремой Кенига:

$$S = \frac{I}{2} m a_c^2 + S_1, \quad (21.16.29)$$

где  $S_1 = \frac{I}{2} \int_{(m)} (\bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}))^2 dm$ ;  $\bar{\omega}$  – вектор угловой скорости шара;  $\bar{\varepsilon}$  – его угловое ускорение;  $\bar{r}$  – расстояние элемента массы  $dm$  до центра масс.

В выражении  $S_1$  следует сохранить только члены, зависящие от ускорений:

$$S_1 = \frac{I}{2} \int_{(m)} (\bar{\varepsilon} \times \bar{r})^2 dm + \int_{(m)} (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}) \cdot (\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})) dm + \dots \quad (21.16.30)$$

В формуле (21.16.30) члены, обозначенные точками, от ускорений не зависят. Первое слагаемое в выражении  $S_1$  вычислим, пользуясь аналогией с выражением для кинетической энергии тела, вращающегося вокруг неподвижной точки:

$$\begin{aligned} T &= \frac{I}{2} \int_{(m)} v^2 dm = \frac{I}{2} \int_{(m)} (\bar{\omega} \times \bar{r})^2 dm = \frac{J \omega^2}{2} = \\ &= \frac{I}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 - 2J_{xy} \omega_x \omega_y - 2J_{yz} \omega_x \omega_z - 2J_{yz} \omega_y \omega_z). \end{aligned}$$

В главных осях, когда  $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$ , остаются только три первых слагаемых. В случае шара  $J_x = J_y = J_z = J$ , поэтому имеем:

$$T = \frac{1}{2} J (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2).$$

Следовательно,

$$\int_{(m)} (\bar{\varepsilon} \times \bar{r})^2 dm = J (\dot{\omega}_x^2 + \dot{\omega}_y^2 + \dot{\omega}_z^2). \quad (21.16.31)$$

В дальнейшем будем считать, что второе слагаемое (21.16.30) рассматривается в главных осях:

$$\int_{(m)} (\bar{\varepsilon} \times \bar{r})(\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})) dm = \int_{(m)} (\bar{\varepsilon} \times \bar{r})(\bar{\omega} \times \bar{v}) dm, \quad (21.16.32)$$

где  $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$  – скорости точек тела.

В дальнейшем потребуется тождество:

$$\bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{v}) + (\bar{\omega} \times (\bar{v} \times \bar{r}) + \bar{v} \times (\bar{r} \times \bar{\omega})) = 0. \quad (21.16.33)$$

В этом соотношении последнее слагаемое равно нулю, так как  $\bar{r} \times \bar{\omega} = -\bar{v}$ . Воспользовавшись тождеством (21.16.33), преобразуем выражение (21.16.32):

$$\begin{aligned} \int_{(m)} (\bar{\varepsilon} \times \bar{r})(\bar{\omega} \times \bar{v}) dm &= \int_{(m)} [(\bar{\omega} \times \bar{v}) \times \bar{\varepsilon}] \bar{r} dm = \bar{\varepsilon} \int_{(m)} (\bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{v})) dm = \\ &= -\bar{\varepsilon} \int_{(m)} \bar{\omega} \times (\bar{v} \times \bar{r}) dm = \bar{\varepsilon} \left[ \bar{\omega} \times \int_{(m)} \bar{r} \times \bar{v} dm \right]. \end{aligned}$$

Интеграл  $\int_{(m)} \bar{r} \times \bar{v} dm = \bar{L}_c$  представляет собой момент количества движения

твёрдого тела во вращательном движении вокруг неподвижной точки, который в главных осях записывается следующим образом:

$$\bar{L}_c = J_x \omega_x \bar{i} + J_y \omega_y \bar{j} + J_z \omega_z \bar{k}.$$

В итоге выражение (21.16.32) будет:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} \left[ \bar{\omega} \times (J_x \omega_x \bar{i} + J_y \omega_y \bar{j} + J_z \omega_z \bar{k}) \right] &= \\ = \bar{\varepsilon} \left[ (J_z - J_y) \omega_y \omega_z \bar{i} + (J_x - J_z) \omega_x \omega_y \bar{j} + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y \bar{k} \right] &= \\ = (J_z - J_y) \omega_y \omega_z \varepsilon_x + (J_x - J_z) \omega_x \omega_y \varepsilon_y + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y \varepsilon_x. \end{aligned}$$

Если  $J_x = J_y = J_z = J$ , что имеет место для шара, то выражение (21.16.32) равно нулю. Следовательно, энергия ускорений, согласно (21.16.29), а также (21.16.31), будет:

$$S = \frac{1}{2} m (\ddot{x}_c^2 + \ddot{y}_c^2) + \frac{1}{2} J (\dot{\omega}_x^2 + \dot{\omega}_y^2 + \dot{\omega}_z^2) + \dots \quad (21.16.34)$$

Если воспользоваться выражением квазискоростей (21.16.28), то получим:

$$S = \frac{1}{2} (J + ma^2) \ddot{\pi}_1^2 + \frac{1}{2} (J + ma^2) \ddot{\pi}_2^2 + \frac{1}{2} J \ddot{\pi}_3^2. \quad (21.16.35)$$

Вычислим виртуальную работу:

$$\delta A = X \delta x_c + Y \delta y_c + Z \delta z_c,$$

но  $X = 0$ ;  $Y = mg \sin \alpha$ ;  $Z = -mg \cos \alpha$ .

Согласно формулам (21.16.25),  $\delta x_c = a \delta \pi_2$ ;  $\delta y_c = -a \delta \pi_1$ ;  $\delta z_c = 0$ , и, следовательно,

$$\delta A = -mga \sin \alpha \delta \pi_1. \quad (21.16.36)$$

Таким образом, с учетом (21.16.36)

$$P_1 = -mga \sin \alpha, P_2 = 0, P_3 = 0.$$

Уравнения Аппеля

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_1} = P_1; \quad \frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_2} = P_2; \quad \frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_3} = P_3$$

в рассматриваемом случае будут иметь вид:

$$\begin{aligned} (J + ma^2) \ddot{\pi}_1 &= -mg \sin \alpha; \\ (J + ma^2) \ddot{\pi}_2 &= 0; \\ J \ddot{\pi}_3 &= 0, \end{aligned} \quad (21.16.37)$$

откуда

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_1 &= \frac{-mg \sin \alpha}{J + ma^2} t + c_1; \\ \dot{\pi}_2 &= c_2; \\ \dot{\pi}_3 &= c_3, \end{aligned} \quad (21.16.38)$$

где  $c_1, c_2, c_3$  – постоянные интегрирования. Для обобщенных скоростей имеем формулы:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= ac_2; \quad \dot{y}_c = \frac{-mga^2 \sin \alpha}{J + ma^2} t - ac_1, \\ \dot{\varphi} &= \frac{-mga \sin \alpha \sin \psi}{J + ma^2 \sin \vartheta} + c_1 \frac{\sin \psi}{\sin \vartheta} - c_2 \frac{\cos \psi}{\sin \vartheta}, \\ \dot{\vartheta} &= -\cos \psi \frac{mga \sin \alpha}{J + ma^2} t + c_1 \cos \psi + c_2 \sin \psi, \\ \dot{\psi} &= \sin \psi \operatorname{ctg} \varphi \frac{mg \sin \alpha}{J + ma^2} t - \sin \psi \operatorname{ctg} \vartheta c_1 + c_2 \cos \psi \operatorname{ctg} \vartheta + c_3. \end{aligned} \quad (21.16.39)$$

Интегрируя два первых уравнения (21.16.39), находим:

$$\begin{aligned} x_c &= ac_2 + c_4; \\ y_c &= \frac{-mga^2 \sin \alpha}{J + ma^2} \frac{t^2}{2} - ac_1 t + c_5. \end{aligned}$$

Как видим, в общем случае центр масс шара движется по параболе, расположенной в плоскости, параллельной наклонной плоскости.

В качестве другого примера рассмотрим, как с помощью уравнений Аппеля могут быть получены динамические уравнения Эйлера для твердого тела с

закрепленной точкой  $O$ . Пусть  $\omega_{xI}, \omega_{yI}, \omega_{zI}$  – проекции угловой скорости  $\bar{\omega}$  на главные оси инерции  $(O, x_I, y_I, z_I)$ , связанные с телом. Они являются линейными комбинациями обобщенных скоростей  $\dot{\psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}$ , где  $\psi, \vartheta, \varphi$  – углы Эйлера:

$$\omega_{xI} = \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi,$$

$$\omega_{yI} = \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi,$$

$$\omega_{zI} = \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}.$$

Энергия ускорений была найдена нами ранее

$$S = \frac{I}{2} (J_{xI} \dot{\omega}_{xI}^2 + J_{yI} \dot{\omega}_{yI}^2 + J_{zI} \dot{\omega}_{zI}^2) + (J_{zI} - J_{yI}) \omega_{yI} \omega_{zI} \dot{\omega}_{xI} + \\ + (J_{xI} - J_{zI}) \omega_{xI} \omega_{zI} \dot{\omega}_{yI} + (J_{yI} - J_{xI}) \omega_{xI} \omega_{yI} \dot{\omega}_{zI} + \dots$$

Величины  $\omega_{xI}, \omega_{yI}, \omega_{zI}$  мы принимаем за псевдоскорости:

$$\omega_{xI} = \dot{\pi}_1, \omega_{yI} = \dot{\pi}_2, \omega_{zI} = \dot{\pi}_3.$$

Элементарная работа внешних сил:

$$\delta A = \bar{M}_O \cdot \delta \bar{\varphi} = M_x \delta \pi_1 + M_y \delta \pi_2 + M_z \delta \pi_3,$$

где  $\delta \bar{\varphi} = \delta \varphi_x \bar{i} + \delta \varphi_y \bar{j} + \delta \varphi_z \bar{k}$ , причем  $\delta \varphi_x = \delta \pi_1; \delta \varphi_y = \delta \pi_2; \delta \varphi_z = \delta \pi_3$ , поэтому  $P_1 = M_x; P_2 = M_y; P_3 = M_z$  – составляющие внешнего момента.

Уравнения Аппеля будут:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_1} = P_1; \frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_2} = P_2; \frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_3} = P_3.$$

Учитывая предыдущие обозначения, получаем:

$$\left. \begin{aligned} J_{xI} \dot{\omega}_{xI} + (J_{zI} - J_{yI}) \omega_{yI} \omega_{zI} &= M_{xI} \\ J_{yI} \dot{\omega}_{yI} + (J_{xI} - J_{zI}) \omega_{xI} \omega_{zI} &= M_{yI} \\ J_{zI} \dot{\omega}_{zI} + (J_{yI} - J_{xI}) \omega_{xI} \omega_{yI} &= M_{zI} \end{aligned} \right\}.$$

## 22. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ТЕОРЕМА ЯКОБИ

### 22.1. Центральное уравнение Лагранжа

Рассмотрим общее уравнение динамики:

$$\sum_{i=1}^N (\bar{F}_i - m_i \bar{a}_i) \delta \bar{r}_i = 0, \quad (22.1.1)$$

которое является синтезом принципа виртуальных перемещений Лагранжа и принципа Даламбера. Вывод его основан на принципе освобожденности от связей и на предположении, что последние, независимо от их вида, являются идеальными. Существует другая форма записи уравнения динамики (22.1.1), называемая центральным уравнением Лагранжа. Преобразуем второе слагаемое уравнения (22.1.1):

$$\begin{aligned} m_i \bar{a}_i \delta \bar{r}_i &= m_i \dot{\bar{v}}_i \delta \bar{r}_i = \frac{d}{dt} [m_i \bar{v}_i \delta \bar{r}_i] - m_i \bar{v}_i (\delta \bar{r}_i)' = \\ &= \frac{d}{dt} (m_i \bar{v}_i \delta \bar{r}_i) - m_i \bar{v}_i \delta \bar{v}_i + m_i \bar{v}_i [\delta \bar{v}_i - (\delta \bar{r}_i)']. \end{aligned} \quad (22.1.2)$$

Последнее слагаемое исчезает, если применить правило перестановки действий варьирования и дифференцирования. Учитывая, что

$$\bar{v}_i \delta \bar{v}_i = \frac{1}{2} \delta (\bar{v}_i \cdot \bar{v}_i) = \frac{1}{2} \delta v_i^2,$$

общее уравнение динамики (22.1.1) приведем к виду:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i \delta \bar{r}_i = \frac{1}{2} \delta \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 + \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \delta \bar{r}_i,$$

или

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i \delta \bar{r}_i = \delta T + \delta' A, \quad (22.1.3)$$

где  $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2$  – кинетическая энергия системы,  $\delta T$  – ее вариация,

$\delta' A = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \delta \bar{r}_i$  – элементарная работа активных сил.

Соотношение (22.1.3), являющееся по сути дела преобразованным общим уравнением динамики, называется центральным уравнением Лагранжа.

### 22.2. Преобразование центрального уравнения Лагранжа

Осуществим переход к обобщенным координатам в центральном уравнении Лагранжа. Учитывая, что

$$\delta \bar{r}_i = \sum_{s=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \delta q_s,$$

имеем

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i \cdot \sum_{s=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \delta q_s = \frac{d}{dt} \sum_{s=1}^n \left( \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \right) \delta q_s.$$

Величины

$$p_s = \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \quad (22.2.1)$$

по аналогии с тем как определялись обобщенные силы можно назвать обобщенными импульсами. Используя тождество Лагранжа, преобразуем (22.2.1):

$$p_s = \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} = \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i \bar{v}_i$$

или

$$p_s = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}, \quad s = \overline{1, n}. \quad (22.2.2)$$

Таким образом имеется равенство:

$$\sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i \delta \bar{r}_i = \sum_{s=1}^n p_s \delta q_s. \quad (22.2.3)$$

Наконец, вспоминая определение обобщенной силы

$$Q_s = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s},$$

запишем центральное уравнение Лагранжа в виде:

$$\frac{d}{dt} \sum_{s=1}^n p_s \delta q_s = \delta T + \sum_{s=1}^n Q_s \delta q_s. \quad (22.2.4)$$

Если силы потенциальны, то

$$\delta T + \delta' A = \delta T - \delta \Pi = \delta (T - \Pi). \quad (22.2.5)$$

Величина  $L = T - \Pi$  называется кинетическим потенциалом Лагранжа. В общем случае  $L$  является функцией обобщенных скоростей, обобщенных координат и времени. В случае потенциальных сил центральное уравнение Лагранжа записывается в виде:

$$\frac{d}{dt} \sum_{s=1}^n p_s \delta q_s = \delta L. \quad (22.2.6)$$

Не трудно видеть, как в случае голономных связей из формулы (22.2.4) следуют уравнения Лагранжа второго рода. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{s=1}^n p_s \delta q_s &= \sum_{s=1}^n (\dot{p}_s \delta q_s + p_s \delta \dot{q}_s) = \sum_{s=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s + p_s \delta \dot{q}_s \right) = \\ &= \sum_{s=1}^n \left( \frac{\partial T}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s + Q_s \delta q_s \right). \end{aligned}$$

После чего имеем:



$$\sum_{s=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s \right) \delta q_s = 0.$$

Откуда в силу независимости  $\delta q_s$  получаем уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s, s = \overline{1, n}.$$

Однако система  $n$  дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода отнюдь не всегда является оптимальной. Существует весьма совершенная запись уравнений движения, когда, например, активные силы потенциальны в виде системы  $2n$  уравнений первого порядка, к изучению которой мы сейчас перейдем. Прежде всего, рассмотрим один из важнейших вспомогательных приемов, которым является преобразование Лежандра.

### 22.3. Преобразование Лежандра

Преобразование Лежандра позволяет осуществлять переход от старых переменных к новым при помощи так называемой производящей функции. Это преобразование, как будет показано ниже, позволяет записать уравнения динамики системы материальных точек, находящейся под действием потенциальных сил, в особо совершенной форме.

Рассмотрим функцию  $\Phi(x_1, \dots, x_n)$  переменных  $x_1, \dots, x_n$  непрерывную, однозначную, имеющую непрерывные частные производные первого и второго порядков по всем переменным. При помощи функции  $\Phi$ , которую далее будем называть производящей, осуществим преобразование от переменных  $x_1, \dots, x_n$  к новым переменным, определяемым формулами:

$$y_s = \frac{\partial \Phi}{\partial x_s}, s = \overline{1, n}. \quad (22.3.1)$$

При помощи системы уравнений (22.3.1) старые переменные могут быть выражены через новые:

$$x_s = x_s(y_1, \dots, y_n), s = \overline{1, n}. \quad (22.3.2)$$

Однако формулы обратного преобразования (22.3.2) могут быть получены, если якобиан системы функций  $y_s$  будет отличен от нуля. Якобиан для функций  $y_s$  называется гессианом функции  $\Phi$  и обозначается  $H(\Phi)$ :

$$H(\Phi) = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_n \partial x_1} \\ & \dots & & \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_n^2} \end{array} \right\|. \quad (22.3.3)$$

Таким образом, условием разрешимости системы (22.3.1) относительно старых переменных  $x_s$  является условие необращения в нуль гессиана  $H$  (22.3.3).

Это преобразование можно записать в форме (22.3.1), при этом производящая функция  $\psi(y_1, \dots, y_n)$  новых переменных определяется равенством:

$$\psi(y_1, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^n x_k y_k - \Phi(x_1, \dots, x_n), \quad (22.3.4)$$

в котором старые переменные  $x_s$  заменены их значениями согласно (22.3.2). То есть процедура получения соотношений (22.3.2) в явном виде считается выполненной. Вычислим частную производную  $\psi$  по  $y_s$ . Учитывая (22.3.1), найдем:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_s} = x_s + \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial y_s} y_k - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_s} = x_s,$$

то есть

$$x_s = \frac{\partial \psi}{\partial y_s}, \quad s = \overline{1, n}, \quad (22.3.5)$$

что и требовалось доказать.

Формулы (22.3.1) и (22.3.5) определяют прямое и обратное преобразование Лежандра.

Рассмотрим частный случай, когда производящая функция  $\Phi$  – квадратичная форма.

$$\Phi = \frac{1}{2} x^T a x, \quad (22.3.6)$$

где  $x = |x_1, \dots, x_n|^T$  – вектор переменных  $x_s$ ,  $a = |a_{ik}|_{i,k=\overline{1,n}}$  – симметричная матрица коэффициентов квадратичной формы.

Гессианом квадратичной формы (22.3.6) является определитель  $\|a\|$  матрицы  $a$ . Если  $a$  невыраженная матрица, то система линейных уравнений:

$$y_s = \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = \frac{\partial}{\partial x_s} \left( \frac{1}{2} x^T a x \right) = \frac{\partial}{\partial x_s} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k \right) = \sum_{k=1}^n a_{ks} x_k \quad (22.3.7)$$

разрешима относительно старых переменных. Систему (22.3.7) можно записать так:

$$a x = y, \quad (22.3.8)$$

где  $y = |y_1, \dots, y_n|^T$  – вектор новых переменных  $y_s$ . Решение системы (22.3.8) записывается в виде:

$$x = b y, \quad (22.3.9)$$

где  $b = a^{-1} = |b_{sk}|_{s,k=\overline{1,n}}$  – матрица, обратная  $a$ . Иначе выражение (22.3.9) можно переписать так:

$$x_s = \sum_{k=1}^n b_{sk} y_k. \quad (22.3.10)$$

Вспоминая теорему Эйлера об однородных функциях, имеем:

$$\psi = \sum_{k=1}^n x_k y_k - \Phi = \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} - \Phi = 2\Phi - \Phi = \Phi. \quad (22.3.11)$$

Следовательно, выражение для производящей функции получается, если в (22.3.6) подставить (22.3.9):

$$\psi = \frac{1}{2} (\alpha^{-1} y)^T a (\alpha^{-1} y) = \frac{1}{2} y^T \alpha^{-1} y. \quad (22.3.12)$$

Так как

$$\Phi = \psi = \sum_{k=1}^n x_k y_k, \quad (22.3.13)$$

то есть поскольку мы получили одну и ту же квадратичную форму для  $\Phi$  и  $\psi$ , то ее можно представить в билинейной форме. Говорят, что квадратичная форма  $\Phi$  союзна квадратичной форме  $\psi$ . Примером преобразования Лежандра может служить теорема Кастильяно.

Пусть система материальных точек, подчиненная идеальным связям, находится в равновесии под действием внешних сил  $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_N$  и потенциальных сил, определяемых потенциальной энергией  $\Pi(q_1, \dots, q_n)$ . Сумма элементарных работ всех сил на виртуальных перемещениях точек системы из положения равновесия должна равняться нулю:

$$\delta'A = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \delta \bar{r}_k - \delta \Pi = \sum_{s=1}^n \left( Q_s - \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} \right) \delta q_s,$$

где  $Q_s$  – обобщенные силы, обусловленные нагрузкой. Откуда в силу независимости  $\delta q_s$  следует:

$$Q_s = \frac{\partial \Pi}{\partial q_s}, \quad s = \overline{1, n}. \quad (22.3.14)$$

Преобразование (22.3.14) представляет собой вариант преобразования (22.3.1), в котором новые переменные  $Q_s$  выражаются через старые  $q_s$ . Производящей функцией обратного преобразования будет функция

$$\Pi^*(Q_1, \dots, Q_n) = \sum_{s=1}^n Q_s q_s - \Pi, \quad (22.3.15)$$

называемая дополнительной работой. Тогда соотношение, аналогичное (22.3.5), будет

$$q_s = \frac{\partial \Pi^*}{\partial Q_s}, \quad s = \overline{1, n}. \quad (22.3.16)$$

Формулы (22.3.14) и (22.3.16) носят более общий характер по сравнению со случаем, когда  $\Pi$  является квадратичной формой. В частном случае, когда  $\Pi$

является квадратичной формой, дополнительная работа  $\Pi^*$  является союзным выражением для  $\Pi$ .

#### 22.4. Канонические уравнения движения

Рассматривается голономная система с  $n$  степенями свободы. Уравнения Лагранжа этой системы представляют систему  $n$  дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат, разрешимую относительно вторых производных  $\ddot{q}_s$ . Эту систему уравнений можно заменить системой  $2n$  уравнений множеством способов. Например, обозначив  $\dot{q}_s = r_s$ , можно внести в рассмотрение  $2n$  переменных  $q_s, r_s$ , которые в дальнейшем полагаются независимыми переменными, определяющими поведение системы. Конечно, никакой существенной роли такое тривиальное преобразование не играет.

Однако, если, например, в качестве  $2n$  переменных взять обобщенные координаты  $q_s$  и обобщенные импульсы

$$p_s = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}, s = \overline{1, n}, \quad (22.4.1)$$

то при таком выборе переменных уравнения движения, когда активные силы потенциальны, записываются в весьма совершенной форме, называемой канонической. Эта форма уравнений, компактная и симметричная, облегчает исследование общих свойств движения и допускает сведение задачи интегрирования канонических уравнений к разысканию полного интеграла некоторых уравнений в частных производных первого порядка (теорема Якоби).

Кинетическая энергия  $T$ , являющаяся функцией обобщенных скоростей, берется в качестве производящей функции для перехода от старых переменных  $\dot{q}_s$  к новым переменным  $p_s$ . Ее гессианом будет определитель матрицы  $A$  коэффициентов положительно определенной квадратичной формы  $T_2$ , входящей в  $T$ . Этот определитель положительный, отличный от нуля. Поэтому уравнения (22.4.1), линейные относительно обобщенных скоростей  $\dot{q}_i$ , разрешимы относительно них:

$$\dot{q}_s = \dot{q}_s(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t). \quad (22.4.2)$$

Уравнения (22.4.2) линейны относительно обобщенных импульсов и представляют первую группу канонических уравнений. Эта группа состоит из уравнений первого порядка, определяющих производные по времени от обобщенных координат через обобщенные импульсы, обобщенные координаты и время  $t$ . Преобразование Лежандра позволяет весьма просто записать уравнения (22.4.2). Для этого составим, согласно (22.3.4), производящую функцию обратного преобразования:

$$\tilde{T} = \sum_{s=1}^n p_s \dot{q}_s - T = \tilde{T}(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t), \quad (22.4.3)$$

в которой обобщенные скорости выражены через обобщенные импульсы. Тогда, согласно (22.3.5), получим:

$$\dot{q}_s = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial p_s}, s = \overline{1, n}. \quad (22.4.4)$$

С помощью функции  $\tilde{T}$  составляется вторая группа уравнений движения, при этом уравнения второй группы являются результатом преобразования общего уравнения динамики.

Запишем общее уравнение динамики в форме центрального уравнения Лагранжа (22.2.4):

$$\frac{d}{dt} \sum_{s=1}^n p_s \delta q_s = \delta T + \sum_{s=1}^n Q_s \delta q_s. \quad (22.4.5)$$

Учитывая, что

$$\tilde{T} = \sum_{s=1}^n p_s \dot{q}_s - T,$$

и что

$$\delta \tilde{T} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial p_s} \delta p_s,$$

из (22.4.5) получим:

$$\frac{d}{dt} \sum_{s=1}^n p_s \delta q_s = \delta \left( \sum_{s=1}^n p_s \dot{q}_s - \tilde{T} \right) + \sum_{s=1}^n Q_s \delta q_s$$

или

$$\sum_{s=1}^n \left[ \dot{p}_s \delta q_s + p_s (\delta q_s)' \right] = \sum_{s=1}^n \left( p_s \delta \dot{q}_s + \dot{q}_s \delta p_s - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_s} \delta q_s - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial p_s} \delta p_s + Q_s \delta q_s \right). \quad (22.4.6)$$

Откуда, перегруппировав слагаемые, получаем:

$$\sum_{s=1}^n \left\{ \left( \dot{p}_s + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_s} - Q_s \right) \delta q_s + p_s \left[ (\delta q_s)' - \delta \dot{q}_s \right] - \left( \dot{q}_s - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial p_s} \right) \delta p_s \right\} = 0.$$

Предпоследняя группа слагаемых исчезает согласно правилу переставимости операций дифференцирования и варьирования (правило  $d\delta = d\alpha$ ), а последняя – согласно уравнениям (22.4.4). Следовательно

$$\sum_{s=1}^n \left( \dot{p}_s + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_s} - Q_s \right) \delta q_s = 0. \quad (22.4.7)$$

Из соотношения (22.4.7) вследствие независимости вариаций находим:

$$\dot{p}_s = -\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_s} + Q_s, s = \overline{1, n}. \quad (22.4.8)$$

Это вторая группа канонических уравнений движения для системы переменных  $q_s, p_s$ . Если силы потенциальны, то подобно тому, как уравнения Лагранжа второго рода могут быть записаны с помощью одной функции  $L$  кинетического потенциала, достаточно одной функции  $H$ , называемой

функцией Гамильтона, что бы записать уравнения (22.4.4) и (22.4.8). В этом случае соответствующие уравнения называются каноническими уравнениями Гамильтона. Функция Гамильтона, чтобы составить каноническую систему, определяется так:

$$H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t) = \tilde{T} + \Pi = \sum_{s=1}^n p_s \dot{q}_s - T + \Pi = \sum_{s=1}^n p_s \dot{q}_s - L. \quad (22.4.9)$$

В выражении (22.4.9) обобщенные скорости исключены с помощью соотношений (22.4.2).

Время  $t$  может войти явно в функцию Гамильтона  $H$  через выражение  $\tilde{T}$  при нестационарных связях и через обобщенную потенциальную энергию  $\Pi$ .

Учитывая, что потенциальная энергия не зависит от обобщенных импульсов, вместо (22.4.4) и (22.4.8) имеем:

$$\dot{q}_s = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial p_s} = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = -\frac{\partial H}{\partial q_s}.$$

В итоге получаем системы канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}, \quad s = 1, n. \quad (22.4.10)$$

Переменные  $q_s$  и  $p_s$ , удовлетворяющие системе канонических уравнений (22.4.10), называются каноническими. Если связи стационарны, то  $T$  – положительно определенная квадратичная форма обобщенных скоростей. Тогда  $\tilde{T}$  является союзным выражением кинетической энергии. Обозначим его  $T'$ . Тогда при стационарных связях функция Гамильтона представляет полную механическую энергию

$$H = T' + \Pi.$$

При этом, согласно (22.3.12),

$$T' = \frac{1}{2} p^T A^{-1} p, \quad (22.4.11)$$

где  $p^T = [p_1, \dots, p_n]$  – вектор, компонентами которого являются обобщенные импульсы;  $A$  – матрица квадратичной формы  $T$ .

При нестационарных связях

$$p_s = \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_s}, \quad \sum_{s=1}^n p_s \dot{q}_s = 2T_2 + T_1,$$

и, следовательно

$$H = \sum_{s=1}^n p_s \dot{q}_s - L = 2T_2 + T_1 - (T_2 + T_1 + T_0 - \Pi) = T_2 + (\Pi - T_0). \quad (22.4.12)$$

При этом  $T_2$  должно быть выражено через импульсы.

В случае стационарных связей  $T'$  – квадратичная форма импульсов, поэтому и  $H$  также квадратичная форма. При нестационарных связях  $H$  разбивается на квадратичное, линейное и независящее от импульсов слагаемое.

Составим полную производную функции Гамильтона по времени в силу канонических уравнений (22.4.10)

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial H}{\partial p_s} \dot{p}_s \right) = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_s} \frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial H}{\partial q_s} \right) = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (22.4.13)$$

Если  $t$  явно не входит в выражение функции Гамильтона, то она остается постоянной во время движения. Тогда получаем интеграл уравнений движения

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = h, \quad (22.4.14)$$

называемый интегралом энергии. В случае стационарных связей выражение (22.4.14) означает постоянство кинетической и потенциальной энергии системы.

Если координаты  $q_{m+1}, \dots, q_n$  циклические, то и соответствующие обобщенные импульсы сохраняют при движении постоянные значения. Действительно, так как

$$\dot{p}_{m+l} = -\frac{\partial H}{\partial q_{m+l}} = 0, l = \overline{1, n-m}, \quad (22.4.15)$$

то

$$p_{m+l} = \beta_{m+l}, l = \overline{1, n-m}. \quad (22.4.16)$$

Поэтому система  $2n$  уравнений первого порядка

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}, s = \overline{1, m}, \quad (22.4.17)$$

оказывается замкнутой, то есть содержит такое же количество неизвестных.

Если же система (22.4.17) решена, то определение циклических координат сводится к квадратурам, так как правые части соответствующих уравнений

$$\dot{q}_{m+l} = \frac{\partial H}{\partial p_{m+l}} = \frac{\partial H}{\partial \beta_{m+l}} = 0, l = \overline{1, n-m}, \quad (22.4.18)$$

окажутся известными функциями.

Рассмотрим пример составления канонических уравнений движения. Механическая система (рис. 22.1) представляет собой однородный цилиндр, который скатывается по призме без проскальзывания. Призма, в свою очередь, может двигаться без трения по горизонтальной плоскости. Масса цилиндра  $m$ , а масса призмы  $M$ . Обозначим расстояние центра масс цилиндра АВ от верхнего края призмы через  $s$ , а перемещение центра призмы – через  $x$ .

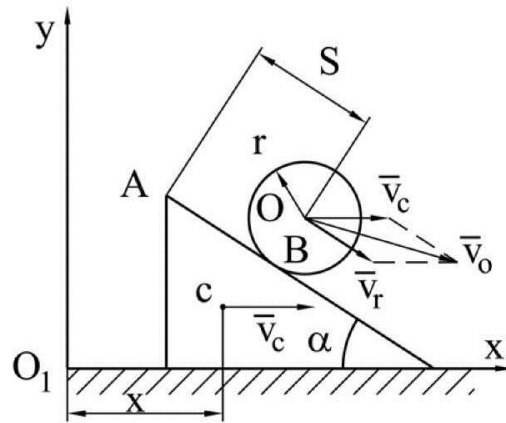


Рис. 22.1

Абсолютная скорость центра масс цилиндра равна сумме переносной скорости  $\bar{v}_c$ , которая представляет собой скорость призмы, и относительной скорости  $\bar{v}_r$ , которая представляет собой скорость центра масс цилиндра по отношению к призме:

$$\bar{v}_0 = \bar{v}_r + \bar{v}_c,$$

при этом

$$\bar{v}_r = \dot{s}, \bar{v}_c = \dot{x}.$$

Воспользовавшись теоремой косинусов, найдем:

$$v_0^2 = \dot{x}^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{x}\dot{s} \cos \alpha.$$

Кинетическая энергия системы:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{x}\dot{s} \cos \alpha) + \frac{1}{4} m r^2 \frac{\dot{s}^2}{r^2} = \\ &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{x}\dot{s} \cos \alpha) + \frac{1}{4} m \dot{s}^2 = \\ &= \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + m \dot{x}\dot{s} \cos \alpha + \frac{3}{4} m \dot{s}^2. \end{aligned}$$

Составим матрицу

$$\begin{vmatrix} a_{11}; a_{12} \\ a_{21}; a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M + m; m \cos \alpha \\ m \cos \alpha; \frac{3}{2} m \end{vmatrix}.$$

Определитель этой матрицы:

$$\Delta = \frac{3}{2} (M + m) m - m^2 \cos^2 \alpha.$$

Выражение союзной матрицы:

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2} m & -m \cos \alpha \\ -m \cos \alpha & M + m \end{vmatrix}.$$

Следовательно, союзное выражение кинетической энергии:

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2\Delta} |p_x, p_s| \begin{vmatrix} \frac{3}{2} m; -m \cos \alpha \\ -m \cos \alpha; M + m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_x \\ p_s \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{2\Delta} \left\{ \left( \frac{3}{2} m p_x - m \cos \alpha p_s \right) p_x + \left[ -m \cos \alpha p_x + (M + m) p_s \right] p_s \right\} = \\ &= \frac{1}{2\Delta} \left[ \frac{3}{2} m p_x^2 - 2 m \cos \alpha p_x p_s + (M + m) p_s^2 \right]. \end{aligned}$$

Потенциальная энергия системы:



$$\Pi = -mgs \sin \alpha,$$

Функция Гамильтона

$$H = T' + \Pi,$$

так как связи стационарны. Первая группа канонических уравнений будет:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{1}{\Delta} \left( \frac{3}{2} m p_x - m \cos \alpha p_s \right); \\ \dot{s} &= \frac{\partial H}{\partial p_s} = \frac{1}{\Delta} \left[ -m \cos \alpha p_x + (M + m) p_s \right].\end{aligned}$$

Вторая группа канонических уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{p}_x &= \frac{-\partial H}{\partial x} = 0, \\ \dot{p}_s &= \frac{-\partial H}{\partial s} = mg \sin \alpha.\end{aligned}\tag{22.4.19}$$

То есть  $x$  является циклической координатой. Следовательно,

$$p_x = p_{x0},$$

то есть проекция количества движения на ось  $x$  постоянна. Но,

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M + m) \dot{x} + m \dot{s} \cos \alpha = p_{x0}.$$

Проинтегрируем второе уравнение (22.4.19):

$$p_s = tmg \sin \alpha + p_{s0}.$$

Подставим  $p_x$  и  $p_s$  в первую группу канонических уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{3}{2} m p_{x0} - m \cos \alpha (tmg \sin \alpha + p_{s0}) \right]; \\ \dot{s} &= \frac{1}{\Delta} \left[ -m \cos \alpha p_{x0} + (M + m) (tmg \sin \alpha + p_{s0}) \right].\end{aligned}$$

Пусть  $x_0 = s_0 = 0$  и  $p_{x0} = p_{s0} = 0$ , то есть система в начальный момент времени была в покое. Тогда получим:

$$\begin{aligned}x &= -\frac{m^2 g \sin 2\alpha}{2\Delta} \frac{t^2}{2} = -\frac{g \sin 2\alpha}{4 \left( \frac{3}{2} \frac{M+m}{m} - \cos^2 \alpha \right)} t^2, \\ s &= \frac{(M+m) mg \sin \alpha}{2\Delta} t^2 = \frac{g \sin \alpha}{2 \left( \frac{3}{2} - \frac{m}{M+m} \cos^2 \alpha \right)} t^2.\end{aligned}$$

В качестве еще одного примера составления канонических уравнений рассмотрим движение материальной точки в поле центральной силы. Введем сферические координаты  $r, \vartheta, \varphi$  (рис. 22.2). Составляющие скорости:

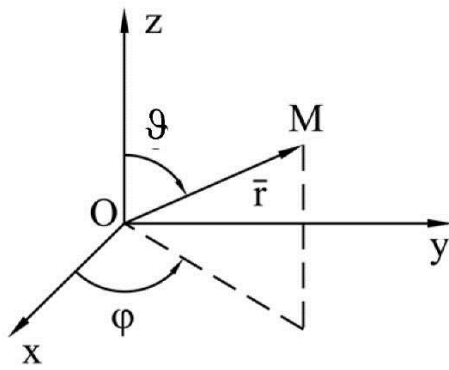


Рис. 22.2

$$v_r = \dot{r}, v_\vartheta = r\dot{\vartheta}, v_\varphi = r \sin \vartheta \dot{\varphi}.$$

Кинетическая энергия точки

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2).$$

Соответствующие обобщенные импульсы:

$$p_r = m\dot{r}, p_\vartheta = mr^2\dot{\vartheta}, p_\varphi = mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}. \quad (22.4.20)$$

Для того, что бы составить функцию Гамильтона  $H$ , необходимо найти сумму  $H = T' + \Pi$ . Причем выражение  $T' = T$

должно быть записано через обобщенные импульсы (22.4.20):

$$H = T' + \Pi = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) + \Pi(r). \quad (22.4.21)$$

Первая группа канонических уравнений представляют собой уравнения (22.4.20), разрешенные относительно обобщенных скоростей:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}; \quad \dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial p_\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{mr^2}; \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2 \vartheta}. \quad (22.4.22)$$

Вторая группа уравнений, согласно (22.4.21), будет:

$$\begin{aligned} \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{mr^3} \left( p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} \right) - \frac{\partial \Pi}{\partial r}; \\ \dot{p}_\vartheta &= -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = \frac{1}{mR^2 \sin^3 \vartheta} p_\varphi^2 \cos \vartheta; \\ \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned} \quad (22.4.23)$$

Из последнего уравнения получаем циклический интеграл  $p_\varphi = const$ . Кроме того, имеется интеграл энергии.

## 22.5. Метод Якоби

### Уравнение Якоби

Уравнение в частных производных первого порядка в общем виде можно записать так:

$$F(x_1, \dots, x_n; z; p_1, \dots, p_n) = 0, \quad (22.5.1)$$

где  $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$ . Функция

$$z = z(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_n),$$

удовлетворяющая уравнению (22.5.1), зависящая от стольких неаддитивных произвольных постоянных, сколько уравнение содержит независимых

переменных, называется полным интегралом уравнения (22.5.1). Если функция  $F$  не содержит явно  $z$ , то есть уравнение в частных производных имеет вид:

$$F(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n) = 0, \quad (22.5.2)$$

то одна из произвольных постоянных будет аддитивной, то есть полный интеграл уравнения (22.5.2) будет иметь вид:

$$z = z(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_n) + a_n.$$

Если часть независимых переменных, например,  $x_1, x_2, \dots, x_k, k < n$ , будут входить в функцию  $F$  не явно, а только через частные производные  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , то число независимых переменных уравнения

$$F(x_{k+1}, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n) = 0, \quad (22.5.3)$$

можно сделать равным  $(n-k)$ , то есть понизить на  $k$  единиц.

Действительно, положим

$$z = a_1 x_1 + \dots + a_k x_k + \xi(x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Найдем дифференцированием:

$$p_1 = a_1, \dots, p_k = a_k, p_{k+1} = \frac{\partial \xi}{\partial x_{k+1}}, \dots, p_n = \frac{\partial \xi}{\partial x_n},$$

и, следовательно, уравнение (22.5.3) примет вид:

$$F\left(x_{k+1}, \dots, x_n; a_1, \dots, a_k; \frac{\partial \xi}{\partial x_{k+1}}, \dots, \frac{\partial \xi}{\partial x_n}\right) = 0. \quad (22.5.4)$$

Уравнение (22.5.4) имеет  $n-k$  независимых переменных. Полный интеграл этого уравнения запишется в виде:

$$\xi = \xi(x_{k+1}, \dots, x_n; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}, \dots, a_{n-1}) + a_n.$$

и, следовательно,

$$z = a_1 x_1 + \dots + a_k x_k + \xi(x_{k+1}, \dots, x_n; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}, \dots, a_{n-1}) + a_n.$$

Уравнения характеристик для уравнения (22.5.2) представляют следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{p_1} = \dots = \frac{dx_n}{p_n} = -\frac{dp_1}{x_1} = \dots = -\frac{dp_n}{x_n},$$

где  $p_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}, x_i = -\frac{\partial F}{\partial x_i}$ .

Каноническую систему уравнений движения

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}, s = \overline{1, n} \quad (22.5.5)$$

можно представить в виде:

$$\frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \dots = \frac{dq_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} = \frac{dp_1}{-\frac{\partial H}{\partial q_1}} = \dots = \frac{dp_n}{-\frac{\partial H}{\partial q_n}} = \frac{dt}{1},$$

где  $H = H(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t)$  – функция Гамильтона.

Необходимо разыскать полную систему интегралов уравнений (22.5.5):

$$\begin{aligned} q_s &= q_s(t; \alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n); \\ p_s &= p_s(t; \alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n). \end{aligned}$$

Оказывается, что эта задача эквивалентна задаче интегрирования следующего уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_n}; t\right) = 0, \quad (22.5.6)$$

при этом каноническая система уравнений (22.5.5) может рассматриваться как уравнения характеристик этого уравнения.

Уравнение (22.5.6) называется уравнением Якоби и во многих случаях оказывается проще найти полный интеграл этого уравнения, а затем уже и сами интегралы системы (22.5.5).

Неизвестная функция  $V$  называется главной функцией Гамильтона. Очевидно, независимыми переменными для функции  $V$  будут  $q_1, q_2, \dots, q_n, t$ , и поэтому полный интеграл уравнения (22.5.6) будет содержать  $n+1$  произвольных постоянных, из которых одна, поскольку  $V$  явно не входит в уравнения Якоби, будет аддитивной:

$$\tilde{V} = V(q_1, \dots, q_n; t; c_1, \dots, c_n) + c_{n+1}.$$

Постоянная  $c_{n+1}$  может не приниматься во внимание, так как во всех соотношениях фигурируют только производные функции  $\tilde{V}$ . Поэтому в дальнейшем будем иметь в виду выражение

$$V = V(q_1, \dots, q_n; t; \alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (22.5.7)$$

### **Теорема Якоби**

Предположим, что полный интеграл (22.5.7) уравнения Якоби (22.5.6) найден. Составим  $n$  соотношений

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_s} = \beta_s; \quad \frac{\partial V}{\partial q_s} = p_s, \quad (22.5.8)$$

где  $\beta_s$  – произвольная постоянная.

Теорема Якоби состоит в том, что, **если известен полный интеграл уравнений Якоби:**

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_n}; t\right) = 0, \quad (22.5.9)$$

**то есть найдена функция  $V = V(q_1, \dots, q_n; t; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , тождественно удовлетворяющая уравнению (22.5.9), то уравнения (22.5.8) будут интегралами канонической системы (22.5.5).**

Дифференцируя первые  $n$  уравнений (22.5.8) по времени, получим:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \alpha_s} = 0 = \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \alpha_s} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial q_m \partial \alpha_s} \dot{q}_m = \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \alpha_s} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial q_m \partial \alpha_s} \frac{\partial H}{\partial p_m}. \quad (22.5.10)$$

Докажем, что полученное уравнение (22.5.10) является тождеством. Поскольку функция  $V$  является полным интегралом уравнения Якоби, то она ему удовлетворяет, то есть

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t) = 0, \quad (22.5.11)$$

так как  $\frac{\partial V}{\partial q_s} = p_s$ . Дифференцируя (22.5.11), найдем

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_s \partial t} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_m} \frac{\partial p_m}{\partial \alpha_s} = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_s \partial t} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_s \partial q_m} \frac{\partial H}{\partial p_m} = 0,$$

что совпадает с выражением (22.5.10). Следовательно, соотношение (22.5.10) представляет собой производную от уравнения Якоби:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_s} \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + H \left( t; q_1, \dots, q_n; \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_n} \right) \right] = 0$$

и является тождеством.

Таким образом, первая группа уравнений (22.5.8) тождественно удовлетворяет канонической системе (22.5.5).

Аналогично докажем это же и для второй группы уравнений (22.5.8), то есть, что величины  $p_s, q_s$ , определенные из канонических уравнений, тождественно удовлетворяют уравнениям (22.5.8).

Дифференцируя по  $t$  вторую группу уравнений (22.5.8) найдем:

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial q_s} = \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial q_s} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial q_m \partial q_s} \dot{q}_m.$$

Предположим, что  $p_s$  и  $q_s$  удовлетворяют канонической системе и перенесем все члены этого равенства в левую сторону:

$$\frac{\partial H}{\partial q_s} + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial q_s} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial q_m \partial q_s} \frac{\partial H}{\partial p_m} = 0.$$

Не трудно видеть, что это равенство можно переписать в виде:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_s} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_m} \frac{\partial p_m}{\partial q_s} = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial q_s} \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + H \left( t; q_1, \dots, q_n; \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_n} \right) \right] = 0, \quad (22.5.12)$$

то есть (22.5.12) есть частная производная уравнения Якоби по  $q_s$  и, следовательно, представляет собой тождественный нуль.

Таким образом, если полный интеграл уравнения Якоби (22.5.7) известен, то по теореме Якоби канонические переменные  $q_s, p_s$  определяются как функции времени  $t$  и  $2n$  произвольных постоянных  $\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n$  из уравнений (22.5.8), представляющих собой по отношению к  $q_s, p_s$  систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} q_s &= q_s(\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n); \\ p_s &= p_s(\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n). \end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай, когда  $H$  не зависит явно от времени  $t$ :

$$H = H(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n).$$

Уравнение Якоби будет иметь вид:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = 0. \quad (22.5.13)$$

Поскольку  $t$  в уравнение явно не входит, то число независимых переменных можно уменьшить на единицу. Для этого положим:

$$V = -ht + W(q_1, \dots, q_n),$$

где  $h$  – постоянная. Функция  $W$  называется характеристической функцией. Подставим в уравнение Якоби вместо  $V$  ее производные:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -h, \quad \frac{\partial V}{\partial q_s} = \frac{\partial W}{\partial q_s}, \quad s = \overline{1, n}.$$

Тогда получим:

$$H\left(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = h, \quad (22.5.14)$$

не содержащее переменной  $t$ . Предположим, что полный интеграл уравнения (22.5.14) найден:

$$W = W(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n; h) + \alpha_n.$$

Тогда полный интеграл уравнения (22.5.13) будет:

$$V = -ht + W(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n; h) + \alpha_n. \quad (22.5.15)$$

Отсюда получаем систему интегралов канонических уравнений. Принимая во внимание, что  $\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}$ , получим:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (22.5.16)$$

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (22.5.17)$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = -t + \frac{\partial W}{\partial h} = t_0$$

или

$$\frac{\partial W}{\partial h} = t + t_0, \quad (22.5.18)$$

где  $t_0$  – произвольная постоянная. Первые  $n - l$  интегралов называются геометрическими и отделяют траекторию в фазовом пространстве. Они не содержат времени. Последний интеграл (22.5.18), содержащий время, называется кинематическим, так как он дает закон движения изображающей точки по траектории. Интегралы (22.5.17) называются промежуточными и служат для определения импульсов  $p_s$  и постоянных интегрирования.

Рассмотрим применение метода Якоби в задаче о движении волчка.

Пусть оси  $Oxyz$  связаны с волчком, вращающимся вокруг неподвижной точки  $O$ . Система осей  $Ox_1y_1z_1$  считается неподвижной.  $\psi, \vartheta, \varphi$  – углы Эйлера.  $\psi$  – угол прецессии,  $\vartheta$  – угол нутации,  $\varphi$  – угол собственного вращения. Оси  $Oxyz$  – главные оси инерции; пусть  $J_x = J_1, J_y = J_2, J_z = J_3$  – главные моменты инерции;  $J_1 = J_2$  в силу симметрии.

Найдем проекции абсолютной угловой скорости на оси  $Oxyz$  (рис. 22.3):

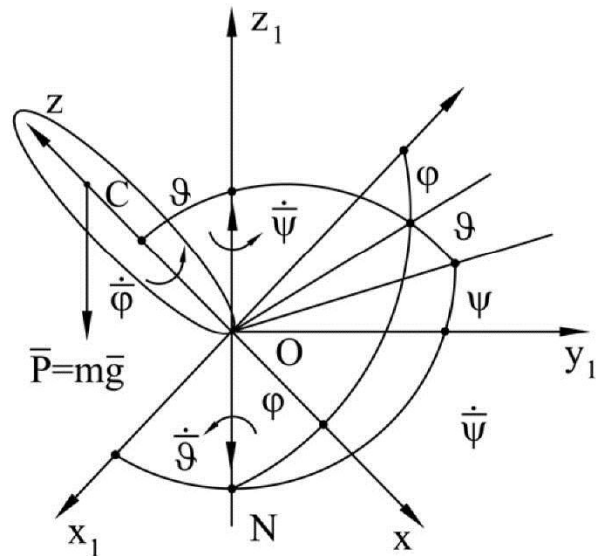


Рис. 22.3

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\vartheta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi; \\ \omega_y &= -\dot{\vartheta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi; \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta.\end{aligned}\tag{22.5.19}$$

Кинетическая энергия волчка, согласно (22.5.19), будет:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} (J_1 \omega_x^2 + J_2 \omega_y^2 + J_3 \omega_z^2) = \\ &= \frac{1}{2} J_1 (\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{1}{2} J_3 \omega_z^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left[ J_1 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{1}{2} J_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta)^2 \right].\end{aligned}$$

Потенциальная энергия:

$$\Pi = P \cdot OC \cos \vartheta = Pl \cos \vartheta,$$

где  $OC = l$ .

Найдем обобщенные импульсы:

$$P_{\psi} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = J_1 \dot{\psi} \sin^2 \vartheta + J_3 (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) \cos \vartheta;$$

$$P_{\vartheta} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = J_1 \dot{\vartheta};$$

$$P_{\phi} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = J_3 (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \vartheta).$$

Для того чтобы построить союзное выражение кинетической энергии  $T^*$ , выразим угловые скорости прецессии  $\dot{\psi}$ , нутации  $\dot{\vartheta}$  и собственного вращения  $\dot{\phi}$  через импульсы:

$$\dot{\vartheta} = \frac{P_{\vartheta}}{J_1}; \quad \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \vartheta = \frac{P_{\phi}}{J_3}; \quad \dot{\psi} = \frac{P_{\psi} - P_{\phi} \cos \vartheta}{J_3 \sin^2 \vartheta}.$$

Очевидно,

$$T^* = \frac{1}{2} \frac{P_{\vartheta}^2}{J_1} + \frac{1}{2} \frac{(P_{\psi} - P_{\phi} \cos \vartheta)^2}{J_3 \sin^2 \vartheta} + \frac{1}{2} \frac{P_{\phi}^2}{J_3}.$$

Функция Гамильтона:

$$H = T^* + \Pi = \frac{1}{2} \frac{P_{\vartheta}^2}{J_1} + \frac{1}{2} \frac{(P_{\psi} - P_{\phi} \cos \vartheta)^2}{J_3 \sin^2 \vartheta} + \frac{1}{2} \frac{P_{\phi}^2}{J_3} + Pl \cos \vartheta.$$

Координаты  $\psi$  и  $\vartheta$  являются циклическими. Выпишем канонические уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \frac{P_{\vartheta}}{J_1}; \\ \dot{\phi} &= \frac{P_{\psi} - P_{\phi} \cos \vartheta}{J_3 \sin^2 \vartheta} (-\cos \vartheta) + \frac{P_{\phi}}{J_3} = -\frac{P_{\psi} \cos \vartheta}{J_3 \sin^2 \vartheta} + \frac{P_{\phi} (J_3 \cos^2 \vartheta + J_1 \sin^2 \vartheta)}{J_1 J_3 \sin^2 \vartheta}; \\ \dot{\psi} &= \frac{P_{\psi} - P_{\phi} \cos \vartheta}{J_3 \sin^2 \vartheta}. \end{aligned} \tag{22.5.20}$$

Вместо громоздкого второго уравнения первой группы (22.5.20) лучше иметь дело с уравнением:  $\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \vartheta = \frac{P_{\phi}}{J_3}$ , которое получается, если воспользоваться третьим уравнением и подставить его во второе.

Вторая группа уравнений будет следующей:

$$\begin{aligned} \dot{P}_{\phi} &= 0; \\ \dot{P}_{\psi} &= 0; \\ \dot{P}_{\vartheta} &= -\frac{\partial H}{\partial \vartheta}. \end{aligned} \tag{22.5.21}$$



Поскольку  $\varphi$  и  $\psi$  – циклические переменные, то

$$P_\varphi = P_{\varphi 0}, P_\psi = P_{\psi 0}.$$

Выразим импульсы через функцию  $W$ :

$$P_\varphi = \frac{\partial W}{\partial \varphi}; P_\psi = \frac{\partial W}{\partial \psi}; P_\vartheta = \frac{\partial W}{\partial \vartheta}.$$

Уравнение (22.5.14) для волчка будет:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2J_1} \left( \frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{1}{2J_1 \sin^2 \vartheta} \left( \frac{\partial W}{\partial \psi} - \frac{\partial W}{\partial \varphi} \cos \vartheta \right)^2 + \\ + \frac{1}{2J_3} \left( \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 + Pl \cos \vartheta = h. \end{aligned} \quad (22.5.22)$$

Будем искать  $W$  в виде

$$W = \alpha_\varphi \varphi + \alpha_\psi \psi + \theta(\vartheta).$$

Подставляя  $W$  в (22.5.22), найдем:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} (\alpha_\psi - \alpha_\varphi \cos \vartheta)^2 + \frac{J_1}{J_3} \alpha_\varphi^2 + 2J_1 Pl \cos \vartheta = 2J_1 h, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \vartheta} = \sqrt{2J_1 h - 2J_1 Pl \cos \vartheta - \frac{(\alpha_\psi - \alpha_\varphi \cos \vartheta)^2}{\sin^2 \vartheta} - \frac{J_1}{J_3} \alpha_\varphi^2} = \sqrt{f(\vartheta)}. \end{aligned}$$

То есть  $\theta = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sqrt{f(\xi)} d\xi$  и, следовательно,  $W = \alpha_\varphi \varphi + \alpha_\psi \psi + \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sqrt{f(\xi)} d\xi$ .

$$t - t_0 = \frac{\partial W}{\partial h} = J_1 \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}}; \quad (22.5.23)$$

$$\beta_\psi = \frac{\partial W}{\partial \alpha_\psi} = \psi - \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{(\alpha_\psi - \alpha_\varphi \cos \xi)}{\sin^2 \xi} \frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}};$$

$$\beta_\varphi = \frac{\partial W}{\partial \alpha_\varphi} = \varphi - \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \left[ \frac{(\alpha_\psi - \alpha_\varphi \cos \xi) \cos \xi}{\sin^2 \xi} - \frac{J_1}{J_3} \alpha_\varphi^2 \right] \frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}}.$$

Кроме того, мы имеем:

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi} = \alpha_\varphi = P_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta),$$

$$\frac{\partial W}{\partial \psi} = \alpha_\psi = P_\psi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = J_1 \dot{\psi} \sin^2 \vartheta + J_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) \cos \vartheta,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \vartheta} = P_\vartheta = \frac{\partial \theta}{\partial \vartheta} = \sqrt{f(\vartheta)} = J_1 \dot{\vartheta}.$$

Перепишем уравнение (22.5.23) в виде:

$$dt = \frac{J_1 d\vartheta}{\sqrt{f(\vartheta)}}$$

или

$$J_1^2 \dot{\vartheta}^2 = f(\vartheta). \quad (22.5.24)$$

Обозначим  $\cos \vartheta = s$  и найдем производную  $-\sin \vartheta \dot{\vartheta} = \dot{s}$ . После чего уравнение (22.5.24) перепишется в виде:

$$\frac{J_1^2 \dot{s}^2}{1-s^2} = 2J_1 h - 2J_1 P l s - \frac{(\alpha_\psi - \alpha_\phi s)^2}{1-s^2} - \frac{J_1}{J_3} \alpha_\phi^2$$

или

$$\dot{s}^2 = 2 \left( \frac{h}{J_1} - \frac{Pl}{J_1} s - \frac{\alpha_\phi^2}{2J_1 J_3} \right) (1-s^2) - \frac{(\alpha_\psi - \alpha_\phi s)^2}{J_1^2}.$$

Это уравнение может быть записано в форме (16.4.11) см. пункт 16.4. Его решение достаточно полно исследовано и приводится в курсах аналитической механики<sup>1</sup>.

## 22.6. Скобки Пуассона и скобки Лагранжа

Рассмотрим две функции  $u, v$  от двух групп независимых переменных, каждая из которых содержит  $n$  переменных

$$\begin{aligned} u &= u(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = u(q|p), \\ v &= v(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = v(q|p). \end{aligned} \quad (22.6.1)$$

Выражение

$$\frac{\partial u}{\partial q_1} \frac{\partial v}{\partial p_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial q_n} \frac{\partial v}{\partial p_n} - \left( \frac{\partial u}{\partial p_1} \frac{\partial v}{\partial q_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial p_n} \frac{\partial v}{\partial q_n} \right)$$

называется скобками Пуассона от этих функций и обозначается

$$(u, v) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial v}{\partial q_k} \right). \quad (22.6.2)$$

Из определения скобок Пуассона следует:

$$(u, v) = -(v, u), (u, u) = 0, (u, c) = 0, \quad (22.6.3)$$

если  $c$  – не зависит от рассматриваемых переменных. Кроме того,

$$(u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2). \quad (22.6.4)$$

Частные производные  $u$  по  $q_s$  и  $p_s$  можно представить в форме скобок Пуассона:

$$\frac{\partial u}{\partial q_s} = -(p_s, u), \quad \frac{\partial u}{\partial p_s} = (q_s, u). \quad (22.6.5)$$

Это позволяет записать канонические уравнения Гамильтона в виде:

<sup>1</sup> см. Л. Парс. Аналитическая динамика. – М.: Наука, 636 с.

$$\dot{q}_s = (q_s, H), \dot{p}_s = (p_s, H), s = \overline{1, n}. \quad (22.6.6)$$

Имеют место следующие частные значения скобок Пуассона:

$$(q_s, q_t) = 0, (p_s, p_t) = 0, (q_s, p_t) = \delta_{st}, \quad (22.6.7)$$

где  $\delta_{st}$  – символ Кронекера. Эти скобки называются фундаментальными.

В дальнейшем потребуется тождество Якоби:

$$(u, (v, w)) + (v, (w, u)) + (w, (u, v)) = 0. \quad (22.6.8)$$

Каждое слагаемое левой части этого тождества содержит вторую производную одной из функций  $u, v, w$ . Например, вторая производная  $w$  входит в сумму двух первых скобок и не входит в третью скобку. Эту сумму можно, согласно (22.6.3), записать в виде:

$$(u, (v, w)) - (v, (u, w)). \quad (22.6.9)$$

Скобки  $(v, w)$  и  $(u, w)$  представим в виде линейных форм первых

производных от  $w$ :

$$(v, w) = B(w) = \sum_{k=1}^n \left( B_k \frac{\partial w}{\partial p_k} + B_{n+k} \frac{\partial w}{\partial q_k} \right),$$

$$(u, w) = A(w) = \sum_{k=1}^n \left( A_k \frac{\partial w}{\partial p_k} + A_{n+k} \frac{\partial w}{\partial q_k} \right), \quad (22.6.10)$$

где

$$B_k = \frac{\partial v}{\partial q_n}, B_{k+n} = -\frac{\partial v}{\partial p_n}, A_k = \frac{\partial u}{\partial q_k}, A_{n+k} = -\frac{\partial u}{\partial p_k}. \quad (22.6.11)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} & (u, (v, w)) - (v, (u, w)) = A[B(w)] - B[A(w)] = \\ & = \sum_{s=1}^n \left( A_s \frac{\partial}{\partial p_s} + A_{n-s} \frac{\partial}{\partial q_s} \right) \sum_{k=1}^n \left( B_k \frac{\partial w}{\partial p_k} + B_{n+k} \frac{\partial w}{\partial q_k} \right) - \\ & - \sum_{s=1}^n \left( B_s \frac{\partial}{\partial p_s} + B_{n-s} \frac{\partial}{\partial q_s} \right) \sum_{k=1}^n \left( A_k \frac{\partial w}{\partial p_k} + A_{n+k} \frac{\partial w}{\partial q_k} \right) = \\ & = \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n \left[ (A_s B_k - A_k B_s) \frac{\partial^2 w}{\partial p_s \partial p_k} + (A_s B_{n+k} - A_{n+k} B_s) \frac{\partial^2 w}{\partial p_s \partial q_k} + \right. \\ & \left. + (A_{n+s} B_k - B_{n+s} A_k) \frac{\partial^2 w}{\partial q_s \partial p_k} + (A_{n+s} B_{n+k} - A_{n+k} B_{n+s}) \frac{\partial^2 w}{\partial q_s \partial q_k} \right] + \dots \end{aligned}$$

Здесь под многоточием подразумеваются члены, не содержащие вторых производных  $w$ . Выражение в квадратных скобках меняет знак при замене индексов суммирования  $s$  на  $k$ , но поскольку равенство при этом не должно меняться, то остается принять, что оно равно нулю.

Следовательно, в выражении (22.6.9) вторая производная  $w$  сокращается. Повторив рассуждения для  $u, v$ , приходим к выводу, что должны сокращаться вторые производные всех функций. Но, поскольку каждое слагаемое содержит

вторые производные одной из трех функций, значит сократятся попарно все слагаемые.

Имеет место еще одно свойство скобок Пуассона, которое следует из определения:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u, v) = \left( \frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + \left( u, \frac{\partial v}{\partial t} \right). \quad (22.6.12)$$

Наряду со скобками Пуассона в дальнейшем потребуются выражения:

$$\frac{\partial q_l}{\partial u} \frac{\partial p_l}{\partial v} + \dots + \frac{\partial q_n}{\partial u} \frac{\partial p_n}{\partial v} - \left( \frac{\partial q_l}{\partial v} \frac{\partial p_l}{\partial u} + \dots + \frac{\partial q_n}{\partial v} \frac{\partial p_n}{\partial u} \right),$$

называемые скобками Лагранжа и обозначаемые

$$[u, v] = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial q_k}{\partial u} \frac{\partial p_k}{\partial v} - \frac{\partial q_k}{\partial v} \frac{\partial p_k}{\partial u} \right). \quad (22.6.13)$$

Кроме того, по аналогии с (22.6.7), имеем:

$$[q_s, q_k] = 0, [p_s, p_k] = 0, [q_s, p_k] = \delta_{sk}, \quad s, k = \overline{1, n}. \quad (22.6.14)$$

Это фундаментальные скобки Лагранжа. Пусть

$$u_1, v_1, \dots, u_n, v_n \quad (22.6.15)$$

–  $n$  пар функций от  $n$  пар переменных

$$q_1, p_1, \dots, q_n, p_n. \quad (22.6.16)$$

Логично также считать величины (22.6.16) функциями переменных (22.6.15). Рассмотрим  $4n^2$  скобок Пуассона

$$(u_k, u_s), (u_k, v_s), (v_k, u_s), (v_k, v_s), \quad k, s = \overline{1, n},$$

являющихся элементами квадратной матрица Пуассона  $P$ :

$$P = \begin{vmatrix} (u_1, u_1) & (u_1, u_n) & (u_1, v_1) & (u_1, v_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_n, u_1) & (u_n, u_n) & (u_n, v_1) & (u_n, v_n) \\ (v_1, u_1) & (v_1, u_n) & (v_1, v_1) & (v_1, v_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (v_n, u_1) & (v_n, u_n) & (v_n, v_1) & (v_n, v_n) \end{vmatrix}. \quad (22.6.17)$$

Аналогично определяется матрица  $L$ , элементами которой служат скобки Лагранжа:

$$[u_k, u_s], [u_k, v_s], [v_k, u_s], [v_k, v_s]. \quad (22.6.18)$$

Обе матрицы  $P$  и  $L$  являются кососимметричными и могут быть записаны в форме симметричных  $2 \times 2$  матриц от  $n \times n$  матриц:

$$P = \begin{vmatrix} ((u, u)) & ((u, v)) \\ ((v, u)) & ((v, v)) \end{vmatrix}, \quad L = \begin{vmatrix} [[u, u]] & [[u, v]] \\ [[v, u]] & [[v, v]] \end{vmatrix}, \quad (22.6.19)$$

где  $((u, u)), ((v, v))$  – матрицы, определенные в (22.6.17) пунктиром.

Матрицы  $P$  и  $L$  меняют знак при транспонировании

$$P^T = -P \text{ и } L^T = -L. \quad (22.6.20)$$

Произведение матриц

$$PL = LP = -E_{2n}, \quad (22.6.21)$$

где  $E_{2n}$  – единичная матрица.

Эта запись эквивалентна четырем матричным равенствам:

$$\begin{aligned} ((u, u))[[u, u]] + ((u, v))[[v, u]] &= -E_n, \\ ((v, u))[[u, u]] + ((v, v))[[v, u]] &= 0, \\ ((u, u))[[u, v]] + ((u, v))[[v, v]] &= 0, \\ ((v, u))[[u, v]] + ((v, v))[[v, v]] &= -E_n, \end{aligned} \quad (22.6.22)$$

где  $E_n$  – единичная матрица.

Одна из строк первого равенства (22.6.22) в развернутом виде записывается так:

$$\sum_{k=1}^n \{(u_s u_k)[u_k, u_r] + (u_s v_k)[v_k, u_r]\} = \delta_{sr}. \quad (22.6.23)$$

## 22.7. Теорема Пуассона

Запишем производную некоторой функции  $\varphi = \varphi(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  по времени в силу канонических уравнений движения Гамильтона

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \left( \frac{\partial \varphi}{\partial q_s} \frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} \frac{\partial H}{\partial q_s} \right)$$

с помощью скобок Пуассона

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\varphi, H). \quad (22.7.1)$$

Если  $\varphi = \varphi(q|p; t)$  представляет первый интеграл уравнений движения, то  $\varphi$  сохраняет при движении постоянное значение, то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\varphi, H) = 0. \quad (22.7.2)$$

Это равенство удовлетворяется при всех значениях аргументов  $q_s, p_s, t$ , то есть является тождеством. Основываясь на тождестве Якоби и на соотношении (22.6.12), докажем теорему Пуассона.

**Если:**

$$\varphi_1(q|p; t) \text{ и } \varphi_2(q|p; t) \quad (22.7.3)$$

**два первых интеграла канонических уравнений, тогда скобка Пуассона**

$$\psi = (\varphi_1, \varphi_2) \quad (22.7.4)$$

сохраняет при движении системы постоянное значение  $c$ .

Действительно, согласно (22.7.2), имеем:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + (\varphi_1, H) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + (\varphi_2, H) = 0. \quad (22.7.5)$$

Проверим, что

$$\frac{\partial (\varphi_1, \varphi_2)}{\partial t} + ((\varphi_1, \varphi_2), H) = 0. \quad (22.7.6)$$

Воспользовавшись соотношением (22.6.12), преобразуем выражение (22.7.6):

$$\left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}, \varphi_2 \right) + \left( \varphi_1, \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right) + ((\varphi_1, \varphi_2), H) = 0.$$

Подставляя в него  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}$  и  $\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}$  из соотношения (22.7.5), найдем:

$$\begin{aligned} & -((\varphi_1, H), \varphi_2) - (\varphi_1, (\varphi_2, H)) + ((\varphi_1, \varphi_2), H) = \\ & = (\varphi_2, (\varphi_1, H)) + ((\varphi_2, H), \varphi_1) + (H, (\varphi_2, \varphi_1)) = 0, \end{aligned}$$

согласно тождеству Якоби (22.6.8), что и требовалось доказать.

Величина  $\psi$  может представлять новый интеграл канонических уравнений, но может таковыми и не являться. В частности она может оказаться функцией известных интегралов  $\varphi_1(q|p;t) = c_1$  и  $\varphi_2(q|p;t) = c_2$ , то есть

$$\psi = \psi(\varphi_1, \varphi_2) = \psi(c_1, c_2), \quad (22.7.7)$$

или тождественно обращаться в постоянную, которая может быть и нулем.

Пусть  $H$  не содержит  $t$  явно. Тогда имеется интеграл энергии

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = h,$$

комбинируя который с интегралом

$$\varphi = \varphi(q|p;t),$$

на основании теоремы Пуассона, получаем

$$(H, \varphi) = a,$$

где  $a$  – постоянная величина. Но, согласно равенству (22.7.2),

$$(H, \varphi) = -(\varphi, H) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = a,$$

что представляет собой новый интеграл.

Продолжив это рассуждение, найдем еще интеграл

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a_1.$$

Но, если  $\varphi = c$  и не содержит время явно, то  $(H, \varphi)$  не дает нового интеграла.

## 22.8. Канонические преобразования

Рассматриваются новые переменные

$$Q_s(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t) = Q_s(q|p; t), \quad (22.8.1)$$

$$P_s(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t) = P_s(q|p; t), \quad s = \overline{1, n},$$

являющиеся функциями старых. Эти соотношения разрешимы относительно старых переменных:

$$q_k = q_k(Q|P; t), \quad p_k = p_k(Q|P; t), \quad k = \overline{1, n}. \quad (22.8.2)$$

Преобразование (22.8.1) называется каноническим, если соблюдено условие, что выражение

$$\sum_{k=1}^n p_k \delta q_k - \sum_{i=1}^n P_i \delta Q_i \quad (22.8.3)$$

является вариацией некоторой функции старых и новых переменных и времени  $t$ , которое при варьировании считается фиксированным.

Исключим из (22.8.3) вариации  $\delta q_k$ . Из первого соотношения (22.8.2) имеем:

$$\delta q_k = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} \delta Q_i + \frac{\partial q_k}{\partial P_i} \delta P_i \right). \quad (22.8.4)$$

После чего выражение (22.8.3) может быть представлено в виде:

$$\sum_{i=1}^n \left[ \left( \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} - P_i \right) \delta Q_i + \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial q_k}{\partial P_i} \delta P_i \right]. \quad (22.8.5)$$

Выражение (22.8.5) будет вариацией некоторой функции новых переменных, если выполняются три варианта соотношений:

во-первых, производная по  $Q_i$  коэффициента при  $\delta Q_i$  в выражении (22.8.5) должна быть равной производной по  $Q_i$  коэффициента при  $\delta Q_i$ :

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial p_k}{\partial Q_i} \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} + p_k \frac{\partial^2 q_k}{\partial Q_i \partial Q_i} \right) - \frac{\partial P_i}{\partial Q_i} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial p_k}{\partial Q_i} \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} + p_k \frac{\partial^2 q_k}{\partial Q_i \partial Q_i} \right) - \frac{\partial P_i}{\partial Q_i};$$

во-вторых, должны быть равны производные по  $P_i$  и  $P_i$  коэффициентов  $\delta P_i$  и

$$\delta P_i:$$

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial p_k}{\partial P_i} \frac{\partial q_k}{\partial P_i} + p_k \frac{\partial^2 q_k}{\partial P_i \partial P_i} \right) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial p_k}{\partial P_i} \frac{\partial q_k}{\partial P_i} + p_k \frac{\partial^2 q_k}{\partial P_i \partial P_i} \right);$$

и, наконец, в третьих, требуется равенство производных по  $P_i$  и  $Q_i$  коэффициентов  $\delta Q_i$  и  $\delta P_i$ :

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial p_k}{\partial P_i} \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} + p_k \frac{\partial^2 q_k}{\partial P_i \partial Q_i} \right) - \frac{\partial P_i}{\partial P_i} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial p_k}{\partial Q_i} \frac{\partial q_k}{\partial P_i} + p_k \frac{\partial^2 q_k}{\partial Q_i \partial P_i} \right).$$

Учитывая, что новые переменные  $P_i, Q_i$  независимы, то есть

$$\frac{\partial P_i}{\partial Q_l} = 0, \quad \frac{\partial P_i}{\partial P_l} = \delta_{il},$$

и определение скобок Лагранжа, приходим к равенствам:

$$[Q_l, Q_i] = 0, [P_l, P_i] = 0, [Q_l, P_i] = \delta_{il}, i, l = \overline{1, n}. \quad (22.8.6)$$

В новых переменных  $P_i, Q_i$  равенства (22.6.14) для фундаментальных скобок Лагранжа могут быть представлены в виде:

$$[Q_l, Q_i]_{QP} = 0, [P_l, P_i]_{QP} = 0, [Q_l, P_i]_{QP} = \delta_{il}. \quad (22.8.7)$$

Таким образом, согласно (22.8.6) и (22.8.7), имеются соотношения:

$$[Q_l, Q_i]_{qp} = [Q_l, Q_i]_{QP}, [P_l, P_i]_{qp} = [P_l, P_i]_{QP}, [Q_l, P_i]_{qp} = [Q_l, P_i]_{QP}. \quad (22.8.8)$$

Эти соотношения выражают инвариантность фундаментальных скобок Лагранжа при канонических преобразованиях.

Матрица Лагранжа  $H$  системы функций  $Q_s, P_s$  от старых переменных в соответствии с (22.8.6) записывается в виде

$$H = \begin{vmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{vmatrix}, \quad (22.8.9)$$

где  $0$  обозначает  $n \times n$  матрицу. Такую же структуру (22.8.9) имеет и матрица Пуассона, поэтому наряду с (22.8.6) имеют место равенства:

$$(Q_l, Q_i) = 0, (P_l, P_i) = 0, (Q_l, P_i) = \delta_{il}, i, l = \overline{1, n}. \quad (22.8.10)$$

Это другая запись необходимых и достаточных условий каноничности уравнений (22.8.4). Фундаментальные скобки Пуассона (22.6.7) также являются инвариантами канонического преобразования.

Более общим является предложение: функции  $u, v$  рассматриваются сначала как зависящие от старых переменных, затем от новых, связанных со старым каноническим преобразованием. Тогда:

$$[u, v]_{qp} = [u, v]_{QP}. \quad (22.8.11)$$

Это проверяется подстановкой. Выразим в скобках Пуассона

$$(u, v)_{qp} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial v}{\partial q_k} \right)$$

частные производные по старым координатам с помощью формул вида:

$$\frac{\partial}{\partial q_k} = \sum_{r=1}^n \left( \frac{\partial Q_r}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial Q_r} + \frac{\partial P_r}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial P_r} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial p_k} = \sum_{s=1}^n \left( \frac{\partial Q_s}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial Q_s} + \frac{\partial P_s}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial P_s} \right).$$

После подстановки и суммирования по  $k$  приходим к равенству:



$$(u, v)_{qp} = \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n \left[ \frac{\partial u}{\partial Q_r} \frac{\partial v}{\partial Q_s} (Q_r, Q_s)_{qp} + \frac{\partial u}{\partial Q_r} \frac{\partial v}{\partial P_s} (Q_r, P_s)_{qp} + \frac{\partial u}{\partial P_r} \frac{\partial v}{\partial Q_s} (P_r, Q_s)_{qp} + \frac{\partial u}{\partial P_r} \frac{\partial v}{\partial P_s} (P_r, P_s)_{qp} \right], \quad (22.8.12)$$

которое в случае канонического преобразования, то есть при соблюдении условий (22.8.10), дает:

$$(u, v)_{qp} = \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial Q_r} \frac{\partial v}{\partial P_s} - \frac{\partial u}{\partial P_r} \frac{\partial v}{\partial Q_s} \right) \delta_{rs} = \sum_{r=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial Q_r} \frac{\partial v}{\partial P_r} - \frac{\partial u}{\partial P_r} \frac{\partial v}{\partial Q_r} \right) = (u, v)_{QP}. \quad (22.8.13)$$

### 22.9. Производящие функции

По определению канонического преобразования существует функция, вариация которой дает выражение (22.8.3):

$$\sum_{k=1}^n p_k \delta q_k - \sum_{i=1}^n P_i \delta Q_i. \quad (22.9.1)$$

В принципе она может зависеть от всех  $4n$  аргументов  $q_s, p_s, Q_s, P_s$  и  $t$ . Но, поскольку имеются соотношения

$$Q_s = Q_s(q|p; t),$$

$$P_s = P_s(q|p; t), \quad s = \overline{1, n},$$

и

$$q_k = q_k(Q|P; t), \quad p_k = p_k(Q|P; t), \quad k = \overline{1, n},$$

достаточно считать ее зависящей от  $2n$  аргументов и времени  $t$ . При этом  $n$  аргументов должны быть старыми и  $n$  новыми. Следовательно, возможны четыре типа производящих функций:

$$V_1(q, Q; t), V_2(q, P; t), V_3(p, Q; t), V_4(p, P; t). \quad (22.9.2)$$

Взяв за основу формулу (22.9.1), условие каноничности преобразования можно записать в одном из четырех видов:

$$1. \sum_{i=1}^n (p_i \delta q_i - P_i \delta Q_i) = \delta V_1(q, Q; t), \quad (22.9.3)$$

$$2. \sum_{i=1}^n (p_i \delta q_i + Q_i \delta P_i) = \delta \left[ V_1(q, Q; t) + \sum_{i=1}^n Q_i P_i \right] = \delta V_2(q, P; t), \quad (22.9.4)$$

$$3. \sum_{i=1}^n (-q_i \delta p_i - P_i \delta Q_i) = \delta \left[ V_1(q, Q; t) + \sum_{i=1}^n p_i q_i \right] = \delta V_3(p, Q; t), \quad (22.9.5)$$

$$4. \sum_{i=1}^n (-q_i \delta p_i + Q_i \delta P_i) = \delta \left[ V_3(q, Q; t) + \sum_{i=1}^n Q_i P_i \right] = \delta V_4(p, P; t). \quad (22.9.6)$$

---

Согласно (22.9.3)–(22.9.6) получаем системы канонических преобразований, осуществляемых производящими функциями каждого из типов:

$$p_i = \frac{\partial V_1}{\partial q_i}, P_i = -\frac{\partial V_1}{\partial Q_i}, i = \overline{1, n}, \quad (22.9.7)$$

$$p_i = \frac{\partial V_2}{\partial q_i}, Q_i = \frac{\partial V_2}{\partial P_i}, i = \overline{1, n}, \quad (22.9.8)$$

$$q_i = -\frac{\partial V_3}{\partial p_i}, P_i = -\frac{\partial V_3}{\partial Q_i}, i = \overline{1, n}, \quad (22.9.9)$$

$$q_i = -\frac{\partial V_4}{\partial p_i}, Q_i = \frac{\partial V_4}{\partial P_i}, i = \overline{1, n}. \quad (22.9.10)$$

Рассмотрим, например, преобразование (22.9.7). Для этого задаемся функцией

$$V_1(q_1, \dots, q_n; Q_1, \dots, Q_n; t)$$

и составляем формулы (22.9.7), разрешив первую группу уравнений (22.9.7) относительно  $Q_i$ . Это возможно при неравенстве нулю якобиана

$$\left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 V_1}{\partial Q_1 \partial q_1} & \dots & \frac{\partial^2 V_1}{\partial Q_1 \partial q_n} \\ \dots & & \dots \\ \frac{\partial^2 V_1}{\partial Q_n \partial q_1} & \dots & \frac{\partial^2 V_1}{\partial Q_n \partial q_n} \end{array} \right\| \neq 0. \quad (22.9.11)$$

Выражение новых переменных  $Q_s$  через старые  $q_i, p_i$ , найденные из первой группы уравнений (22.9.7), должны быть подставлены во вторую группу уравнений. Это даст вторую группу равенств (22.9.1), определяющую  $P_s$  через старые переменные.

Соотношения, связывающие производящие функции (22.9.4)–(22.9.6), могут быть записаны так:

$$V_1(q, Q; t) = V_2(q, P; t) - \sum_{i=1}^n Q_i P_i, \quad (22.9.12)$$

$$V_3(p, Q; t) = V_2(q, P; t) - \sum_{i=1}^n (Q_i P_i + q_i p_i), \quad (22.9.13)$$

$$V_4(p, P; t) = V_2(q, P; t) - \sum_{i=1}^n q_i p_i. \quad (22.9.14)$$

Не трудно видеть, что если  $V_2(q, P; t)$  может быть рассматриваема как производящая функция преобразования Лежандра от переменных  $q$  и  $P$  и переменных  $p$  и  $Q$ , то  $V_3(p, Q; t)$ , наоборот, является производящей

функцией для преобразования от  $p, Q$  и  $q, P$ . Аналогично можно рассматривать и другие соотношения (22.9.12) и (22.9.14).

### 22.10. Инвариантность канонических переменных

Переменные, удовлетворяющие системе канонических уравнений, обобщенные координаты  $q_s$  и обобщенные импульсы  $p_s$  называются каноническими переменными. Переменные  $Q_s, P_s$ , связанные с каноническими переменными  $q_s, p_s$  каноническим преобразованием, являются каноническими:

$$\dot{Q}_s = \frac{\partial K}{\partial P_s}, \quad \dot{P}_s = -\frac{\partial K}{\partial Q_s}, \quad (22.10.1)$$

где  $K$  – новая функция Гамильтона. Причем

$$K = H + \frac{\partial V_1}{\partial t}, \quad (22.10.2)$$

где  $V_1$  – производящая функция канонического преобразования. В частности, если  $V_1$  явно от  $t$  не зависит, то:

$$K = H. \quad (22.10.3)$$

Рассмотрим преобразование с производящей функцией  $V_1(q, Q, t)$ . Переменные  $q_s, Q_s, t$  рассматриваются как независимые и поэтому:

$$\frac{\partial Q_s}{\partial t} = 0. \quad (22.10.4)$$

Вместе с тем:

$$\frac{\partial P_s}{\partial t} = -\frac{\partial^2 V_1}{\partial t \partial Q_s}. \quad (22.10.5)$$

Переменные  $Q_s, P_s$  являются функциями времени и старых переменных.

Найдем  $\dot{Q}_s$  и  $\dot{P}_s$  в силу канонических уравнений движения:

$$\dot{Q}_s = (Q_s, H)_{qp}, \quad (22.10.6)$$

$$\dot{P}_s = -\frac{\partial^2 V_1}{\partial t \partial Q_s} + (P_s, H)_{qp}. \quad (22.10.7)$$

Вследствие инвариантности скобок Пуассона при канонических преобразованиях и вследствие их свойств имеем:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_s &= (Q_s, H)_{qp} = \frac{\partial H}{\partial P_s}, \\ \dot{P}_s &= -\frac{\partial^2 V_1}{\partial t \partial Q_s} + (P_s, H)_{qp} = -\frac{\partial}{\partial Q_s} \left( \frac{\partial V_1}{\partial t} + H \right). \end{aligned} \quad (22.10.8)$$

Но, поскольку  $V_1$  не зависит от  $P_s$ , то

$$\frac{\partial H}{\partial P_s} = \frac{\partial}{\partial P_s} \left( \frac{\partial V_1}{\partial t} + H \right).$$

Обозначая

$$K = \frac{\partial V_l}{\partial t} + H,$$

приходим к системе канонических уравнений

$$\dot{Q}_s = \frac{\partial K}{\partial P_s}, \dot{P}_s = -\frac{\partial K}{\partial Q_s}, s = \overline{1, n},$$

что и требовалось доказать.

### 22.11. Теория возмущений. Метод вариации постоянных

Наряду с заданной системой уравнений движения

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} + Q_s, s = \overline{1, n}, \quad (22.11.1)$$

рассматривается вспомогательная, более простая каноническая система:

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H_0}{\partial p_s}, \dot{p}_s = -\frac{\partial H_0}{\partial q_s}, s = \overline{1, n}, \quad (22.11.2)$$

общее решение которой найдено:

$$\begin{aligned} q_s &= q_s(t; \alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n), \\ p_s &= p_s(t; \alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n), s = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (22.11.3)$$

Здесь  $\alpha_k, \beta_k$  – постоянные. Их общее число равно  $2n$ . Система (22.11.3) разрешима относительно  $\alpha_k, \beta_k$ :

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \alpha_k(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t), \\ \beta_k &= \beta_k(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t), k = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (22.11.4)$$

Любая из скобок Пуассона

$$(\alpha_k, \alpha_s), (\alpha_k, \beta_s), (\beta_k, \beta_s), \quad (22.11.5)$$

согласно теореме Пуассона, или постоянна, например, равна нулю, или выражается через эти же величины  $\alpha_k, \beta_k$ . Ни одна из скобок не содержит явно  $t$ , ни переменные  $q_s, p_s$ , так как в противном случае в числе скобок (22.11.5) содержался бы  $(2n+1)$ -й независимый интеграл, что невозможно. Кроме того, можно записать  $2n$  тождеств:

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial t} + (\alpha_s, H_0) = 0, \frac{\partial \beta_s}{\partial t} + (\beta_s, H_0) = 0. \quad (22.11.6)$$

Идея метода вариации постоянных состоит в том, что общее решение исходных уравнений (22.11.1) разыскивается в той же форме (22.11.3), но предполагается, что  $\alpha_s$  и  $\beta_s$  являются непостоянными функциями времени. Тогда уравнения (22.11.3) можно рассматривать как формулы преобразования новых переменных  $\alpha_i, \beta_i$  в старые  $q_s, p_s$ , а уравнения (22.11.4) – как формулы обратного преобразования.

Теперь надо составить систему дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять новые переменные, в предположении, что старые переменные являются решением уравнений (22.11.1), а не (22.11.2). Тогда «новые переменные» были бы постоянными по условию. Тождества (22.11.6) при этом сохраняются, так как форма уравнений (22.11.4), в силу которых они являются тождествами, не изменилась. Не изменяют своего вида и скобки Пуассона (22.11.5).

Составим выражение производных по времени в силу системы дифференциальных уравнений (22.11.1). Дифференцируя выражения для  $\alpha_s$ , получим:

$$\dot{\alpha}_s = \frac{\partial \alpha_s}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial \alpha_s}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \alpha_s}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) = -(\alpha_s, H_0) + (\alpha_s, H) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \alpha_s}{\partial p_k} Q_k.$$

Здесь учтены тождества (22.11.6), и  $\dot{q}_k$  и  $\dot{p}_k$  заменены их значениями из уравнений (22.11.1). Аналогично находим и производную  $\dot{\beta}_s$ . После несложного преобразования получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_s &= (\alpha_s, H - H_0) + \sum_{k=1}^n Q_k \frac{\partial \alpha_s}{\partial p_k}, \\ \dot{\beta}_s &= (\beta_s, H - H_0) + \sum_{k=1}^n Q_n \frac{\partial \beta_s}{\partial p_k}, \quad s = 1, n. \end{aligned} \quad (22.11.7)$$

Уравнения (22.11.7) называются уравнениями возмущенного движения, при этом их правые части должны быть записаны с помощью формул (22.11.3) через  $\alpha_k$  и  $\beta_k$ . Приведем уравнения (22.11.7) к другому виду, воспользовавшись формулой (22.8.13) преобразования скобок Пуассона. В ней надо заменить  $Q_s, P_s$  на  $\alpha_s, \beta_s$ , а  $u, v$  – на  $\alpha_s$  и  $H - H_0$ . Тогда получим:

$$\begin{aligned} (\alpha_s, H - H_0) &= \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \left[ \frac{\partial \alpha_s}{\partial \alpha_r} \frac{\partial (H - H_0)}{\partial \alpha_k} (\alpha_r, \alpha_k) + \frac{\partial \alpha_s}{\partial \alpha_r} \frac{\partial (H - H_0)}{\partial \beta_k} (\alpha_r, \beta_k) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \alpha_s}{\partial \beta_k} \frac{\partial (H - H_0)}{\partial \alpha_r} (\beta_k, \alpha_r) + \frac{\partial \alpha_s}{\partial \beta_r} \frac{\partial (H - H_0)}{\partial \beta_k} (\beta_r, \beta_k) \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $\frac{\partial \alpha_s}{\partial \alpha_r} = \delta_{sr}$ ,  $\frac{\partial \alpha_s}{\partial \beta_r} = 0$ . Поэтому приходим к равенству:

$$(\alpha_s, H - H_0) = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial (H - H_0)}{\partial \alpha_k} (\alpha_s, \alpha_k) + \frac{\partial (H - H_0)}{\partial \beta_k} (\alpha_s, \beta_k) \right], \quad (22.11.8)$$

и, аналогично,

$$(\beta_s, H - H_0) = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial (H - H_0)}{\partial \beta_k} (\beta_s, \beta_k) + \frac{\partial (H - H_0)}{\partial \alpha_k} (\beta_s, \alpha_k) \right]. \quad (22.11.9)$$

Система дифференциальных уравнений возмущенного движения (22.11.7) приводится к виду:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_s &= \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial(H-H_0)}{\partial\alpha_k}(\alpha_s, \alpha_k) + \frac{\partial(H-H_0)}{\partial\beta_k}(\alpha_s, \beta_k) + \frac{\partial\alpha_s}{\partial p_k} Q_k \right], \\ \dot{\beta}_s &= \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial(H-H_0)}{\partial\beta_k}(\beta_s, \beta_k) + \frac{\partial(H-H_0)}{\partial\alpha_k}(\beta_s, \alpha_k) + \frac{\partial\beta_s}{\partial p_k} Q_k \right].\end{aligned}\quad (22.11.10)$$

Скобки Пуассона, фигурирующие в этих уравнениях, либо постоянны, либо выражаются через  $\alpha_k, \beta_k$ . Если система (22.11.10) решена, то решение системы (22.11.1) находим по формулам (22.11.3). При этом, если система (22.11.10) решена приближенно, то и решение системы (22.11.1), найденное по формулам (22.11.3), будет также приближенным. Точность приближенного решения будет тем выше, чем меньше отличается вспомогательная система (22.11.2) от системы (22.11.1). Это означает, что  $H-H_0$  и  $Q_k$  должны быть малыми. Тогда и производные  $\dot{\alpha}_s, \dot{\beta}_s$  будут малыми, а сами функции  $\alpha_s$  и  $\beta_s$  будут мало отличаться от постоянных. В этих условиях для решения системы (22.11.10) становятся применимыми различного рода приближенные методы.

Обозначим для краткости правые части уравнений (22.11.10) через  $\Phi_s(\alpha|\beta;t)$  и  $\Psi_s(\alpha|\beta;t)$ . Тогда, если время  $t$  мало, можно в правых частях уравнений (22.11.10)  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  заменить их значениями при  $t=0$ , то есть заменить на  $\alpha_k^0$  и  $\beta_k^0$ . Тогда задача сводится к квадратурам:

$$\begin{aligned}\alpha_s &= \alpha_s^0 + \int_0^t \Phi_s(\alpha^0|\beta^0;t) dt, \\ \beta_s &= \beta_s^0 + \int_0^t \Psi_s(\alpha^0|\beta^0;t) dt.\end{aligned}\quad (22.11.11)$$

Для разыскания периодических решений весьма удобен метод усреднения. Первое приближение находится из усредненных уравнений:

$$\alpha_s = \bar{\Phi}_s(\alpha|\beta), \beta_s = \bar{\Psi}_s(\alpha|\beta), \quad (22.11.12)$$

где

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_s(\alpha|\beta) &= \frac{1}{T} \int_0^T \Phi_s(\alpha^0|\beta^0;t) dt, \\ \bar{\Psi}_s(\alpha|\beta) &= \frac{1}{T} \int_0^T \Psi_s(\alpha^0|\beta^0;t) dt,\end{aligned}$$

$T$  – некоторый промежуток времени.

## 22.12. Канонические уравнения возмущенного движения

Система уравнений возмущенного движения упрощается, когда решение (22.11.3) вспомогательной системы уравнений (22.11.2) представляет каноническое преобразование величин  $\alpha_k, \beta_k$  в  $q_s, p_s$ .

Это может быть в случае, если (22.11.3) представляет интеграл Коши для системы уравнений (22.11.2), то есть  $\alpha_s, \beta_s$  – начальные значения переменных  $q_s, p_s$  и если решение (22.11.3) представляет общий интеграл канонической системы (22.11.2), полученный из полного интеграла уравнения в частных производных Якоби-Гамильтона.

Для канонического преобразования

$$(\alpha_s, \alpha_k) = 0, (\alpha_s, \beta_k) = \delta_{sk}, (\beta_s, \beta_k) = 0 \quad (22.12.1)$$

уравнения возмущенного движения приобретают вид:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_s &= \frac{\partial(H - H_0)}{\partial\beta_s} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial\alpha_s}{\partial p_k} Q_k, s = \overline{1, n}, \\ \dot{\beta}_s &= -\frac{\partial(H - H_0)}{\partial\alpha_s} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial\beta_s}{\partial p_k} Q_k, s = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (22.12.2)$$

Если  $Q_k = 0, k = \overline{1, n}$ , то есть когда уравнение (22.12.1) – каноническое, то есть каноническими будут уравнения возмущенного движения:

$$\dot{\alpha}_s = \frac{\partial(H - H_0)}{\partial\beta_s}, \dot{\beta}_s = -\frac{\partial(H - H_0)}{\partial\alpha_s}, s = \overline{1, n}. \quad (22.12.3)$$

Ранее было рассмотрено каноническое преобразование с производящей функцией третьего рода:

$$\sum_{i=1}^n (-q_i \delta p_i - P_i \delta Q_i) = \delta V_3(p, Q, t),$$

согласно которому

$$-q_i = \frac{\partial V_3}{\partial p_i}, -P_i = \frac{\partial V_3}{\partial Q_i}.$$

Если в нем заменить  $Q_i$  на  $\alpha_i$  и  $P_i$  на  $\beta_i$ , то получим:

$$\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \beta_k}{\partial p_i}. \quad (22.12.4)$$

Аналогично, если исходить из канонического преобразования с производящей функцией четвертого вида:

$$\sum_{i=1}^n (-q_i \delta p_i + P_i \delta Q_i) = \delta V_4(p, P, t)$$

согласно которому

$$q_i = \frac{\partial V_4}{\partial p_i}, Q_i = \frac{\partial V_4}{\partial P_i},$$

то получим

$$-\frac{\partial q_i}{\partial \beta_k} = \frac{\partial \alpha_k}{\partial p_i}. \quad (22.12.5)$$

Учитывая (22.12.4) и (22.12.5), вместо (22.12.2) получим:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_s &= \frac{\partial(H - H_0)}{\partial \beta_s} - \sum_{k=1}^n Q_k \frac{\partial q_k}{\partial \beta_s}, \\ \dot{\beta}_s &= -\frac{\partial(H - H_0)}{\partial \alpha_s} + \sum_{k=1}^n Q_k \frac{\partial q_k}{\partial \alpha_s}, \quad s = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (22.12.6)$$

Для получения уравнений (22.12.6) уже не требуется знание обратного преобразования (22.11.4). Если обобщенные силы зависят только от времени, то уравнения (22.12.6) запишутся в канонической форме:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_s &= \frac{\partial}{\partial \beta_s} \left( H - H_0 - \sum_{k=1}^n Q_k q_k \right), \\ \dot{\beta}_s &= -\frac{\partial}{\partial \alpha_s} \left( H - H_0 + \sum_{k=1}^n Q_k q_k \right), \quad s = \overline{1, n}. \end{aligned}$$



## 23. ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА–ОСТРОГРАДСКОГО

### 23.1. Действие по Гамильтону

Исходные положения динамики – законы Ньютона и принцип Даламбера – позволяют сформулировать законы движения в виде дифференциальных уравнений движения. Однако равноправными оказываются вариационные формулировки, устанавливающие стационарные свойства некоторых величин и позволяющие не только заменить вышеупомянутые положения, но и расширить возможности решения задач.

Пусть  $q_1(t), \dots, q_n(t)$  (23.1.1)

являются обобщенными координатами материальной системы, подчиненной идеальным голономным связям. Пусть активные силы потенциальны. Будем говорить, что совокупность функций (23.1.1) определяет истинный путь системы, а любая из  $\infty^n$ , допускаемых связями конфигураций, бесконечно близких к истинному пути

$$q_1^* = q_1(t) + \delta q_1, \dots, q_n^* = q_n(t) + \delta q_n, \quad (23.1.2)$$

где вариации  $\delta q_s$  являются произвольными бесконечно малыми дифференцируемыми функциями времени, определяет окольный путь.

Рассмотрим кинетический потенциал  $L$ , представляющий разность кинетической и потенциальной энергии. На истинном пути

$$L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) \quad (23.1.3)$$

является вполне определенной функцией времени.

Вариация кинетического потенциала при переходе к одному из  $\infty^n$  окольных путей будет:

$$\delta L = \sum_{s=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \right) = \sum_{s=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} (\delta \dot{q}_s) \right]. \quad (23.1.4)$$

Из всей совокупности мыслимых окольных путей выделим такие, которые в два фиксированных, произвольно выбранных момента времени  $t_0$  и  $t_1$  совпадают с истинным путем:

$$\delta q_s(t_0) = 0, \delta q_s(t_1) = 0, s = \overline{1, n}. \quad (23.1.5)$$

Введем в рассмотрение величину  $S$ , называемую действием по Гамильтону за промежуток  $(t_0, t_1)$  и определяемую выражением

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt. \quad (23.1.6)$$

Действие по Гамильтону представляет функционал, определяемый выбором  $n$  функций времени  $q_s(t)$ .

На истинном пути  $S$  принимает вполне определенное числовое значение, при этом  $q_s(t)$  и  $\dot{q}_s(t)$  являются обобщенными координатами и скоростями в действительном движении.

Рассмотрим приращение, которое приобретает действие  $S$  при переходе от истинного пути к одному из  $\infty^n$  окольных. Тогда:

$$S + \delta S = \int_{t_0}^{t_1} (L + \delta L) dt = \int_{t_0}^{t_1} L dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt.$$

Согласно (23.1.4), получаем

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} (\delta \dot{q}_s) \right] dt. \quad (23.1.7)$$

Интегрируя по частям с учетом (23.1.5), получаем:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} (\delta \dot{q}_s) dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \delta q_s \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} dt = - \int_{t_0}^{t_1} \delta q_s \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} dt. \quad (23.1.8)$$

Вариация действия, таким образом,

$$\delta S = \sum_{s=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s dt = - \sum_{s=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \epsilon_s(L) q_s dt, \quad (23.1.9)$$

где  $\epsilon_s(L)$  – Эйлерав оператор от  $L$ .

## 23.2. Принцип Гамильтона–Остроградского

Выражение (23.1.9) для вариации действия, если считать, что выполняются уравнения Лагранжа

$$\epsilon_s(L) = 0, s = \overline{1, n}, \quad (23.2.1)$$

должно обращаться в нуль:

$$\delta S = 0. \quad (23.2.2)$$

Это означает, что решение динамической задачи соответствует законам Ньютона и принципу Даламбера.

Однако возможен иной подход, когда равенство (23.2.2) выставляется как самостоятельное требование. Но тогда необходимо доказать, что законы Ньютона и принцип Даламбера являются его следствием. То, что это имеет место и будет доказано ниже. Подобный подход к формулировке принципа Гамильтона-Остроградского, устанавливающего некоторое свойство происходящих в действительности движений и отличающего их от всех мыслимых движений, совместимых со связями, и есть это самостоятельные требования.

Если вариация функционала  $S$ , вычисленная с точностью до вариаций первого порядка, равна нулю, то говорят, что функционал приобретает стационарное значение.

Таким образом, принцип Гамильтона–Остроградского формулируется следующим образом: действие по Гамильтону  $S$  имеет стационарное значение на истинном пути системы, если к сравнению с ним привлекается многообразие околных путей, совпадающих с истинным в начальный и конечный моменты времени  $t_0$  и  $t_1$ .

Докажем, что принцип Гамильтона–Остроградского содержит в себе исходное положение динамики. Для этого следует показать, что уравнение Лагранжа (23.2.1) является следствием уравнения (23.2.2). Доказательство осуществляется следующим образом. В силу независимости вариаций  $\delta q_s$ , причем за околный путь такой, в котором

$$\delta q_1 = 0, \dots, \delta q_{k-1} = 0, q_{k+1} = 0, \dots, \delta q_n = 0,$$

а  $\delta q_k \neq 0$ , тогда уравнение (23.1.9) примет вид:

$$-\int_{t_0}^{t_1} \varepsilon_k(L) q_k dt = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt = 0. \quad (23.2.3)$$

Допустим, что величина

$$\varepsilon_s(L) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \neq 0, \quad (23.2.4)$$

при  $t = t_*$ . Тогда определим промежуток  $(t_{*0}, t_{*1})$ , содержащий  $t_*$ , такой, что в нем  $\varepsilon_k(L)$  сохраняет знак. Поскольку  $\delta q_k$  – произвольная функция времени, выберем ее так, что бы она обращалась в нуль при  $t_0 < t_{*0}$  и при  $t_{*1} < t_1$  и также сохраняла знак в указанном промежутке. Тогда:

$$\int_{t_0}^{t_1} \varepsilon_k(L) q_k dt = \int_{t_{*0}}^{t_{*1}} \varepsilon_k(L) q_k dt.$$

Таким образом, выражение под знаком интеграла, по условию, сохраняет знак и интеграл не может быть равен нулю. Это противоречит неравенству (23.2.4), поэтому

$$\varepsilon_k(L) = 0.$$

Приведенное рассуждение пригодно для любого  $k = \overline{1, n}$ , что и требовалось доказать.

Из принципа Гамильтона–Остроградского следуют также и канонические уравнения движения. Будем исходить из равенства

$$L = \sum_{s=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_s - H = \sum_{s=1}^n p_s \dot{q}_s - H. \quad (23.2.5)$$

Найдем вариацию

$$\delta L = \sum_{s=1}^n \left( \dot{q}_s - \frac{\partial H}{\partial p_s} \right) \delta p_s + \sum_{s=1}^n \left[ p_s (\delta \dot{q}_s) - \frac{\partial H}{\partial q_s} \delta q_s \right]. \quad (23.2.6)$$

Соотношения:

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad s = \overline{1, n}, \quad (23.2.7)$$

представляющие первую группу канонических уравнений, являются лишь формой записи соотношения между обобщенными скоростями и импульсами и поэтому не связаны с положениями механики. Следовательно,

$$\delta L = \sum_{s=1}^n \left[ p_s (\delta \dot{q}_s) - \frac{\partial H}{\partial q_s} \delta q_s \right]. \quad (23.2.8)$$

Учтем, что

$$\int_{t_0}^{t_1} p_s (\delta \dot{q}_s) dt = p_s \delta q_s \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \dot{p}_s \delta q_s dt = - \int_{t_0}^{t_1} \dot{p}_s \delta q_s dt.$$

Поэтому:

$$\delta S = \int_{t_0}^t \delta L dt = - \int_{t_0}^t \sum_{s=1}^n \left( \dot{p}_s + \frac{\partial H}{\partial q_s} \right) \delta q_s dt = 0. \quad (23.2.9)$$

Повторив рассуждения, которые позволили из равенства (23.2.2) получить уравнения Лагранжа, приходим ко второй группе канонических уравнений:

$$\dot{p}_s = - \frac{\partial H}{\partial q_s}, \quad s = \overline{1, n}. \quad (23.2.10)$$

При наличии непотенциальных сил, соотношение, аналогичное принципу Гамильтона–Остроградского, записывается в виде

$$\delta S + \int_{t_0}^{t_1} \delta A' dt = \delta S + \sum_{s=1}^n \int_{t_0}^{t_1} Q_s \delta q_s dt = 0. \quad (23.2.11)$$

Но  $\delta S = \int_{t_0}^t \delta L dt = \sum_{s=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s dt$ , и поэтому имеем равенство:

$$\sum_{s=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + Q_s \right) \delta q_s dt = 0. \quad (23.2.12)$$

Оттуда следуют уравнения Лагранжа. Следует отметить, что между соотношениями (23.2.2) или (23.2.9) и соотношением (23.2.11) есть принципиальное отличие, заключающееся в том, что имеют место требования об обращении в нуль величины

$$\delta'R = \delta S + \int_{t_0}^{t_1} \delta A' dt = \int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta \Pi + \delta A') dt \quad (23.2.13)$$

не означает, что существует функционал  $R$ . То есть в общем случае нет функционала, вариация которого бы равнялась  $\delta'R$ .

Таким образом, следует отличать вариационный принцип Гамильтона–Остроградского от более общей точки зрения, выраженной равенством (23.2.13), которое справедливо и для неголономных систем.

В качестве примера применения принципа Гамильтона–Остроградского рассмотрим колебания висящей цепи (А. И. Лурье).

Рассматривается гибкая, нерастяжимая однородная тяжелая цепь длиной  $l$ , конец  $O$  которой неподвижен; положение точки  $M_0$  на цепи задается ее абсциссой  $x$  в положении равновесия (рис. 23.1).

Рассмотрим плоские колебания цепи. Обозначим через  $u = -u(x, t)$  и  $v = v(x, t)$  проекции перемещения точки  $M_0$  при колебаниях на оси  $OX$  и  $OY$  соответственно. Через  $\xi$  и  $\eta$  обозначим координаты положения точки  $M$ , в которое переходит точка  $M_0$  при колебаниях. Очевидно:

$$\begin{aligned} \xi &= x + u, \\ \eta &= v. \end{aligned} \quad (23.2.14)$$

Уравнения (23.2.14) представляют собой параметрическое уравнение кривой  $OA$  при фиксированном  $t$ . Дифференциал дуги  $dS$  этой кривой по условию нерастяжимости цепи равен  $dx$ , поэтому

$$\delta S = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} dx = dx.$$

Отсюда находим:

$$\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \right]. \quad (23.2.15)$$

Будем считать величины  $u, v$  и их производные по  $x$  и  $t$  малыми величинами. Тогда, считая  $v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial t}$  малыми первого порядка, на основании

(23.2.15) следует принять  $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}$  малыми второго порядка.

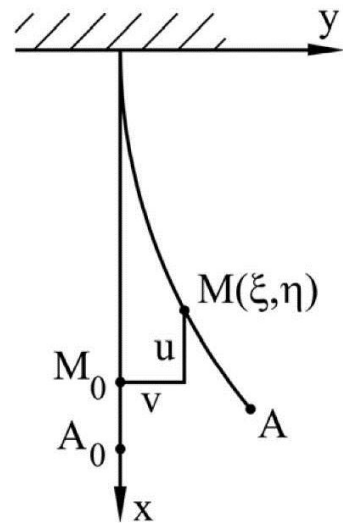


Рис. 23.1

Поэтому в выражении (23.2.15)  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$  будет четвертого порядка малости, и уравнение (23.2.15) следует записать в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{l}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2. \quad (23.2.16)$$

Это условие нерастяжимости цепи, представляющее собой уравнение связи. Кинетическая энергия системы в таком же приближении равна:

$$T = \frac{l}{2} \rho \int_0^l \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 \right] dx = \frac{l}{2} \rho \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dx, \quad (23.2.17)$$

где  $\rho$  – масса единицы длины цепи.

Потенциальная энергия силы веса дается выражением

$$П = -l\rho g \left( \xi_c - \frac{l}{2} \right),$$

где  $\xi_c$  – координата центра масс кривой  $OA$ . Знак минус принят в связи с тем, что ось  $Ox$  направлена вертикально вниз.

По определению, координата центра масс находится из выражения

$$\xi_c = \frac{1}{l} \int_0^l \xi dx = \frac{1}{l} \int_0^l (x + u) dx = \frac{l}{2} + \frac{1}{l} \int_0^l u dx.$$

Интеграл в последнем выражении проинтегрируем по частям:

$$\frac{1}{l} \int_0^l u dx = \frac{1}{l} ux \Big|_0^l - \frac{1}{l} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} x dx = u(l, t) - \frac{1}{l} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} x dx.$$

Воспользовавшись уравнением связи (23.2.16), найдем:

$$u(l, t) = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} dx = -\frac{1}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx,$$

$$\int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} x dx = -\frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 x dx.$$

После чего выражение для  $\xi_c$  можно записать в виде:

$$\xi_c = \frac{l}{2} - \frac{1}{2l} \int_0^l (l-x) \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx,$$

и, следовательно,

$$П = \frac{l}{2} \rho g \int_0^l (l-x) \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx. \quad (23.2.18)$$

Таким образом, кинетический потенциал Лагранжа будет записан так:

$$L = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 - g(l-x) \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx, \quad (23.2.19)$$

а действия по Гамильтону

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \frac{1}{2} \rho \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 - g(l-x) \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx \right\}. \quad (23.2.20)$$

Вариационная задача, к которой приводит принцип Гамильтона–Остроградского формулируется так: из всех функций  $v(x, t)$ , непрерывных и имеющих непрерывные производные по  $x$  и  $t$  при  $0 \leq x \leq l$  и при  $t > 0$ , удовлетворяющих краевому условию:

$$v(0, t) = 0, \quad (23.2.21)$$

определить такую, которая сообщает стационарное значение выражению действия (23.2.20).

«Истинный путь» здесь определяется функцией  $v(x, t)$ , а окольный – функцией  $v + \delta v(x, t)$ , при чем выражение  $\delta v(x, t)$  представляет произвольно задаваемую при  $0 < a \leq l$  и  $t_0 < t < t_1$  непрерывную, вместе с  $\frac{\partial(\delta v)}{\partial t}$  и  $\frac{\partial(\delta v)}{\partial x}$  функцию, удовлетворяющую условиям:

$$\delta v(x, t_0) = 0, \delta v(x, t_1) = 0, \delta v(0, t) = 0. \quad (23.2.22)$$

Из условий (23.2.22) два первых выражают условие выбора окольных путей в принципе Гамильтона–Остроградского, а последнее является следствием краевого условия.

Вариация действия равна:

$$\delta S = \rho \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \int_0^l \left[ \frac{\partial v}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) - g(l-x) \frac{\partial v}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx \right\}.$$

Затем с помощью интегрирования по частям избавимся от производных  $\delta v$  по  $x$  и по  $t$ , используя правило  $d\delta = \delta d$  для обеих переменных. Получим с учетом (22.2.22):

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \delta v &= \frac{\partial v}{\partial t} \delta v \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v dt, \\ \int_0^l g(l-x) \frac{\partial v}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx &= g(l-x) \frac{\partial v}{\partial x} \delta v \Big|_0^l - \int_0^l g \delta v \frac{\partial}{\partial x} \left[ (l-x) \frac{\partial v}{\partial x} \right] dx = \\ &= -g \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left[ (l-x) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \delta v dx. \end{aligned}$$

Учитывая проведенные выкладки, находим:

$$\delta S = \rho \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \int_0^l \left[ -\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + g \frac{\partial}{\partial x} \left\langle (l-x) \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle \right] \delta v dx \right\}.$$

Поскольку вариация  $\delta v$ , рассматриваемая как функция,  $t$  – произвольна, то выражение под знаком интеграла должно быть нулем:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} \left[ (l-x) \frac{\partial v}{\partial x} \right].$$

При этом должны выполняться условия:

при  $x = 0$ ,  $v(0, t) = 0$ ; при  $x = l$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=l}$  и  $\frac{\partial v}{\partial t}$  конечны.

Кроме того, должны быть заданы начальное смещение и скорости:

$$v(x, 0) = f(x),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x).$$

Решение получившейся краевой задачи математической физики ищется в виде суммы частных решения  $v_k(x, t)$ , каждое из которых представляет гармоническое колебание пока неизвестной частоты  $\omega_k$ :

$$v_k(x, t) = \Phi_k(x) (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t). \quad (23.2.23)$$

Функция  $\Phi_k$ , определяющая форму колебаний, удовлетворяет уравнению:

$$\omega_k^2 \Phi_k + g \frac{\partial}{\partial x} \left[ (l-x) \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \right] = 0, \quad k = \overline{1, \infty}, \quad (23.2.24)$$

при краевых условиях

$$\Phi_k(0) = 0; \quad \frac{\partial \Phi_k(l)}{\partial x} < \infty, \quad k = \overline{1, \infty}.$$

При замене независимой переменной  $x$  с помощью подстановки:

$$l-x = \frac{g}{4\omega_k^2} \sigma^2$$

дифференциальное уравнение (23.2.24) приводится к уравнению Бесселя. Действительно, перепишем уравнение (23.2.24) в виде:

$$\frac{d^2 \Phi_k}{dx^2} - \frac{l}{l-x} \frac{d\Phi_k}{dx} + \frac{\omega_k^2}{g(l-x)} \Phi_k = 0.$$

Осуществим переход к новой переменной:

$$\sigma = \frac{2\omega_k}{\sqrt{g}} \sqrt{l-x}.$$

Первая производная преобразуется следующим образом:



$$\frac{d\Phi_k}{dx} = \frac{d\Phi_k}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dx} = -\frac{d\Phi_k}{d\sigma} \frac{2\omega_k}{\sqrt{g}2\sqrt{l-x}} = -\frac{d\Phi_k}{d\sigma} \frac{2\omega_k^2}{g\sigma}.$$

Вторая производная:

$$\frac{d^2\Phi_k}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( -\frac{d\Phi_k}{d\sigma} \frac{2\omega_k^2}{g\sigma} \right) = \frac{d^2\Phi_k}{d\sigma^2} \frac{4\omega_k^4}{g^2\sigma^2} - \frac{d\Phi_k}{d\sigma} \frac{4\omega_k^4}{g^2\sigma^3}.$$

Кроме того, учитывая, что

$$\frac{l}{l-x} \frac{d\Phi_k}{dx} = -\frac{d\Phi_k}{d\sigma} \frac{2\omega_k^2}{g\sigma} \frac{4\omega_k^2}{g\sigma^2} = -\frac{8\omega_k^4}{\sigma^3 g^2} \frac{d\Phi_k}{d\sigma},$$

окончательно получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2\Phi_k}{d\sigma^2} + \frac{l}{\sigma} \frac{d\Phi_k}{d\sigma} + \Phi_k = 0.$$

Общее решение этого уравнения:

$$\Phi_k = c_{1k} J_0(\sigma) + c_{2k} N_0(\sigma),$$

где  $J_0(\sigma)$  и  $N_0(\sigma)$  – функции Бесселя первого и второго рода. Замечая, что функция  $N_0(\sigma)$  – функция Бесселя второго рода (функция Неймана) при  $\sigma = 0$ , то есть при  $x = l$  обращается в бесконечность, возьмем решение в виде:

$$\Phi_k = J_0(\sigma) = J_0 \left( 2\omega_k \sqrt{\frac{l-x}{g}} \right).$$

Уравнения частот получаем из краевого условия

$$\Phi_k(0) = 0,$$

или

$$J_0 \left( 2\omega_k \sqrt{\frac{l}{g}} \right) = 0.$$

Его корни

$$2\omega_1 \sqrt{\frac{l}{g}} = 2.4048;$$

$$2\omega_2 \sqrt{\frac{l}{g}} = 5.520,$$

откуда:

$$\omega_1 = 1.2024 \sqrt{\frac{l}{g}}, \omega_2 = 2.760 \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Выражение для форм колебаний записывается в виде:

$$\Phi_k(x) = J_0 \left( 2\omega_k \sqrt{\frac{l-x}{g}} \right), k = 1, \infty.$$

Решение выражается рядом

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0 \left( 2\omega_k \sqrt{\frac{l-x}{g}} \right) (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t),$$

причем

$$A_k = \frac{1}{N_k} \int_0^l f(x) J_0 \left( 2\omega_k \sqrt{\frac{l-x}{g}} \right) dx;$$

$$B_k = \frac{1}{\omega_k N_k} \int_0^l g(x) J_0 \left( 2\omega_k \sqrt{\frac{l-x}{g}} \right) dx,$$

где  $N_k = \int_0^l J_0 \left( 2\omega_k \sqrt{\frac{l-x}{g}} \right)^2 dx.$

При получении решения используется условие ортогональности:

$$\int_0^l J_0 \left( 2\omega_k \sqrt{\frac{l-x}{g}} \right) J_0 \left( 2\omega_m \sqrt{\frac{l-x}{g}} \right) dx = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ N_k, & k = m. \end{cases}$$

Нами рассмотрено точное решение задачи. Однако преимуществом принципа Гамильтона–Остроградского является то, что можно получать приближенные решения, задавая приближенное выражение функции Лагранжа. С этой целью в рассматриваемом случае задаются приближенным выражением для  $v(x, t)$  в виде отрезка некоторого функционального ряда:

$$v(x, t) = q_1 f_1(x) + q_2 f_2(x) + \dots + q_n f_n(x),$$

при этом величины  $q_1, q_2, \dots, q_n$  подбираются так, что бы наилучшим образом удовлетворялся принцип Гамильтона–Остроградского.

Задавшись функцией  $v(x, t)$ , получаем приближенное выражение

$$L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n),$$

как функцию конечного числа параметров. И, поскольку,

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt,$$

а  $\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt$ , то необходимо, чтобы:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0, \quad s = \overline{1, n}.$$

Пусть  $f_1 = x, f_2 = x^3$ . Тогда

$$L = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left[ (\dot{q}_1 x + \dot{q}_2 x^3)^2 - g(l-x)(q_1 + 3x^2 q_2)^2 \right] dx.$$

Интегрируя, найдем

$$L = \frac{M}{2} \left[ \frac{\dot{S}_1^2}{3} + \frac{2\dot{S}_1\dot{S}_2}{5} + \frac{\dot{S}_2^2}{7} - \frac{g}{l} \left( \frac{S_1^2}{2} + \frac{S_1 S_2}{2} + \frac{3S_2^2}{10} \right) \right],$$

где обозначено  $q_1 l = S_1, q_2 l^3 = S_2, M = \rho l$ . Таким образом, систему с бесконечным числом степеней свободы заменили на систему с двумя степенями свободы.

Сначала ограничимся системой с одной степенью свободы:

$$L = \frac{M}{2} \left( \frac{\dot{S}_1^2}{3} - \frac{g}{l} \frac{S_1^2}{2} \right).$$

То есть цепь заменена стержнем:

$$\varepsilon(L) = M \frac{\ddot{S}_1}{3} + \frac{g}{l} \frac{S_1}{2} = 0,$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{2l}} \approx 1.2205 \sqrt{\frac{g}{l}},$$

что отличается от точного решения на величину примерно 2%.

Если рассмотреть более точное решение для двух степеней свободы, то получим:

$$\frac{\ddot{S}_1}{3} + \frac{\ddot{S}_2}{5} + \frac{g}{l} \left( \frac{S_1}{2} + \frac{S_2}{4} \right) = 0,$$

$$\frac{\ddot{S}_1}{5} + \frac{\ddot{S}_2}{7} + \frac{g}{l} \left( \frac{S_1}{4} + \frac{3S_2}{10} \right) = 0.$$

Собственные частоты:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} 1.204,$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}} 2.822.$$

Важность принципа Гамильтона–Остроградского в том, что он позволяет приближенно решать задачи динамики механических систем и задачи математической физики.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики. Т.1. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – М. : Наука, 1985. – 250 с.; Т. 2. – 1985. – 496 с.
2. Лойцянский, Л. Г. Курс теоретической механики. Ч. 1. / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – М. : Наука, 1982. – 350 с.; Ч. 2. – 1983. – 640 с.
3. Кильчевский, Н. А. Курс теоретической механики. Ч. 1. / Н. А. Кильчевский. – М. : Наука, 1977. – 480 с.; Ч. 2. – 1977. – 544 с.
4. Бухгольц, Н. Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 1. / Н. Н. Бухгольц. – М. : Наука, 1965. – 467 с.; Ч. 2. – 1969. – 332 с.
5. Лурье, А. И. Аналитическая механика / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1961. – 824 с.
6. Гантмахер, Ф. Р. Аналитическая механика / Ф. Р. Гантамхер. – М. : Наука, 1960. – 296 с.
7. Маркеев, А. П. Теоретическая механика / А. П. Маркеев. – М. : Наука, 1990. – 416 с.
8. Мещерский, И. В. Сборник задач по теоретической механике / И. В. Мещерский. – М. : Наука, 1981. – 480 с.
9. Бать, М. Л. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 1. / М. Л. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – М. : Наука, 1967. – 510 с.; Т. 2. – 1968. – 624 с.; Т. 3. – 1973. – 486 с.
10. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учеб. пособие для техн. вузов / под ред. А. А. Яблонского. – М. : Высшая школа, 1985. – 367 с.
11. Санкин, Ю. Н. Динамика несущих систем металлорежущих станков / Ю. Н. Санкин. – М. : Машиностроение, 1986. – 96 с.
12. Рокар, И. Неустойчивость в механике / И. Рокар. – М. : Издательство иностранной литературы, 1959. – 287 с.
13. Санкин, Ю. Н. Лекции по теоретической механике. Ч. 1. Статика, кинематика : учебное пособие / Ю. Н. Санкин. – 2-е изд. – Ульяновск : УлГТУ, 2010. – 124 с.