

**ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**  
Краткий курс

## ПРЕДИСЛОВИЕ

*Известен целый ряд отличных монографий, учебников по теоретической механике, в которых достаточно полно излагаются все разделы классической механики. Авторы их – известные российские ученые Сулов Г.К., Лойцянский А.Г., Лурье А.И., Николаи Е.А., Бутенин Н.В., Яблонский А.А., Тарг С.М., Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Поляхов Н.Н. и др. В этих работах все положения, теоремы, принципы имеют полные и точные математические доказательства. Уделяется много внимания аналитической механике. Содержатся подробные исследования специальных разделов механики (теория колебаний, теория гироскопов, движение систем переменной массы, теория устойчивости движения, гидро- и аэродинамика, теория упругости и др.).*

*В наших же ВУЗах, готовящих инженеров, где на изложение курса теоретической механики отводится порой очень мало времени, практически удается дать студентам лишь необходимый минимум материала. Некоторым, даже механическим специальностям, отводится лишь 34 лекционных часа на весь курс.*

*Поэтому учебники полного курса теоретической механики оказываются не очень удобными пособиями для студентов.*

*Мы предлагаем лекции краткого курса теоретической механики. Он приспособлен к учебному плану, предусматривающему от 34 до 54 лекционных часов, и содержащий при этом основные разделы.*

*В целях экономии лекционного времени пришлось несколько изменить традиционные формы изложения материала, последовательность изложения, предложить другие, более компактные доказательства. А некоторые утверждения и теоремы, которые кажутся довольно очевидными, вообще даются без доказательств. В надежде, что студенты при необходимости сумеют найти их в любых учебниках. Например, в тех, авторы которых указаны выше.*

*Кроме того, у некоторых теорем и принципов доказывається только необходимость сделанных выводов, а доказательство достаточности опускается. И математические преобразования даются не очень подробно. Предполагается, что студент не плохо знает школьную и высшую математику, сумеет самостоятельно довести их до конца. Кстати, эти самостоятельные действия студента помогут ему лучше понять ход доказательства и грамотно использовать их потом при решении задач.*

*Этот курс лекций предназначен и для дистанционной формы обучения, для самостоятельной работы студентов. К нему прилагаются специально подготовленные учебные материалы, содержащие контрольные вопросы, сборники задач, контрольных работ и курсовых проектов.*

# СТАТИКА

---

## I. Основные определения и понятия

В разделе «Статика» исследуется равновесное состояние тел, устанавливаются условия, обеспечивающие такое состояние.

Для этого потребуются ввести несколько определений и понятий, которые позволят сформулировать такие условия.

1. *Твердое тело.* В статике и вообще в теоретической механике все тела считаются абсолютно твердыми. То есть предполагается, что эти тела не деформируются, не изменяют свою форму и объем, какое бы действие на них не было оказано.

Исследованием движения нетвердых тел – упругих, пластичных, жидких, газообразных, занимаются другие науки (сопротивление материалов, теория упругости, гидродинамика и т.д.).

2. Будем рассматривать тела находящимися в *равновесии*. Это такое состояние тела, при котором все его точки все время остаются неподвижными.

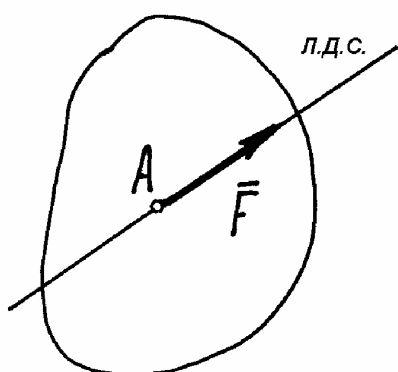


Рис. 1.1.

3. *Сила.* Силой будем называть действие одного тела на другое, которое стремится вывести тело из состояния равновесия или, наоборот, сохранить его.

Сила – есть вектор (рис. 1.1). Действие силы на тело характеризуется: а) величиной, которая измеряется в ньютонах, а на чертеже изображается отрезком прямой в определенном масштабе; б) линией действия – прямой, вдоль которой направлено

действие силы; в) направлением действия, которое указывается стрелкой; г) точкой приложения силы – обычно начало вектора.

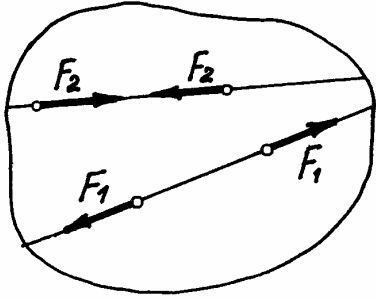


Рис. 1.2.

(конечно – твердого тела). Поэтому вектор силы называют *скользящим вектором*. Если силу перенести в точку, не расположенную на этой линии, действие ее на тело будет совсем другим.

4. Две силы считаются *уравновешивающимися*, если они равны по величине, направлены по одной прямой в противоположные стороны и приложены к одному и тому же телу (рис. 1.2). Под действием таких сил тело находится в равновесии. Естественно, если к телу приложить еще другие уравновешивающиеся силы или убрать их, равновесие тела не нарушится.

5. *Равнодействующая*. Равнодействующей будем называть такую силу  $\vec{R}$ , которая может заменить несколько сил, то есть оказывает на тело такое же действие, как эти силы. Таким образом, равнодействующая – это сила, эквивалентная нескольким силам.

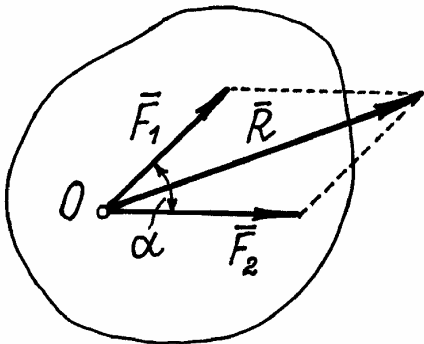


Рис. 1.3.

Равнодействующая двух сил, приложенных к одной точке тела, находится построением параллелограмма на этих силах (рис. 1.3), и определяется как векторная сумма их:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Величина равнодействующей

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}.$$

\* Если на чертеже сила изображена вектором, то иногда достаточно рядом указать лишь модуль этой силы, без черточки наверху (рис. 1.2).

Конечно,  $R \neq F_1 + F_2$ . Такое равенство будет соблюдаться только при условии, что эти силы направлены по одной прямой в одну сторону. Если же векторы сил окажутся перпендикулярными, то  $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ .

6. Нам потребуется третий закон Ньютона, который запишем так:

*При действии одного тела на другое возникают две силы равные по величине, направленные по одной прямой в противоположные стороны и приложенные к телам в точке касания.*

Конечно, эти силы не уравниваются, потому что они приложены к разным телам.

7. *Свободное и несвободное тело.* Свободным телом будем называть тело, которое может быть перемещено из данного положения в любом направлении. Если хотя бы в одном направлении движение тела ограничено, то оно называется несвободным.

Те устройства, которые ограничивают перемещение тела, называются *связями*.

Например, тело лежащее на столе – несвободное тело. Связью его является плоскость стола, которая препятствует перемещению тела вниз.

Очень важен так называемый *принцип освобождаемости*, которым будем пользоваться в дальнейшем. Записывается он так.

*Любое несвободное тело можно сделать свободным, если связи убрать, а действие их на тело заменить силами, такими, чтобы тело оставалось в равновесии.*

Эти силы, заменяющие связи, называются *реакциями этих связей*.

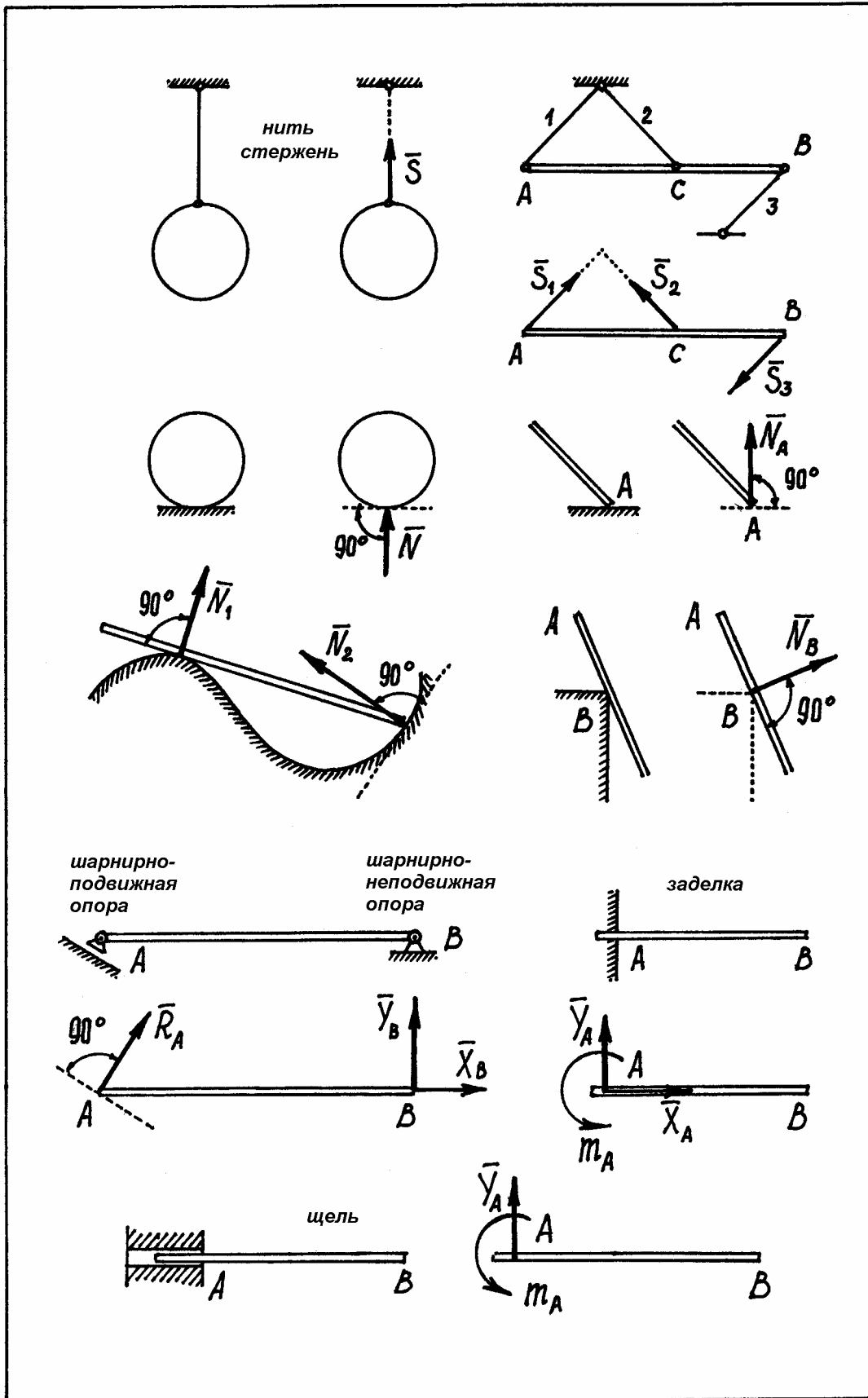
Так у тела, лежащего на столе, связь – стол. Тело несвободное. Сделаем его свободным – стол уберем, а чтобы тело осталось в равновесии, заменим стол силой, направленной вверх и равной, конечно, весу тела.

В таблице 1.1 даны наиболее типичные виды связей и их реакции.

Несколько замечаний к этой таблице.

а) Реакцию нити (или стержня, прикрепленного к телам шарнирами) обозначают  $\vec{S}$  и направляют по нити (или стержню) *от тела*. Если даже заранее можно догадаться, что реакция направлена к телу, все равно ее надо направить от тела. Таково правило. Оно избавляет от лишних и ненужных предположений и, как убедимся далее, помогает установить сжат стержень или растянут.

б) Реакцию поверхности (нормальная реакция  $\vec{N}$ ) всегда надо направлять *к телу* перпендикулярно касательной к этой поверхности и прикладывать к точке соприкосновения.



Если поверхности не гладкие, надо добавить еще одну силу – силу трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , которая направлена перпендикулярно нормальной реакции  $\vec{N}$  в сторону, противоположную возможному скольжению тела.

в) Шарнирно-подвижная опора  $A$  препятствует движению тела только в направлении перпендикулярном плоскости скольжения опоры. Поэтому реакция направляется перпендикулярно этой плоскости.

г) Направление реакции шарнирно-неподвижной опоры  $B$  предугадать трудно. Поэтому рассматривают ее как сумму взаимно перпендикулярных сил  $\vec{X}_B$  и  $\vec{Y}_B$ .

д) Тело неподвижно прикрепленное к поверхности (заделка). Эта связь препятствует и перемещению во всех направлениях, и повороту тела. Поэтому ее реакция состоит из двух взаимно перпендикулярных сил и пары, которая препятствует вращению. (понятие о паре будет дано ниже.)

е) При определении реакций связи других конструкций надо установить, разрешает ли она двигаться вдоль трех взаимно перпендикулярных осей и вращаться вокруг этих осей. Если препятствует какому-либо движению – показать соответствующую силу, если препятствует вращению – пару с соответствующим моментом.

8. Иногда приходится исследовать равновесие нетвердых тел. При этом будем пользоваться предположением, что если это нетвердое тело находится в равновесии под действием сил, то его можно рассматривать как твердое тело, используя все правила и методы статики.

## II. Система сходящихся сил

Система сходящихся сил – это силы, приложенные к телу, линии действия которых пересекаются в одной точке.

### §1. Сложение системы сходящихся сил

Пусть на тело действует несколько сил, линии действия которых пересекаются в одной точке  $O$  (ограничимся тремя силами, чтобы чертеж получился попроще). Силы приложены в точках  $A_1, A_2, A_3$  и расположены не в одной плоскости, а, как говорят, в пространстве (рис. 2.1). Перенесем все силы по линиям действия в точку  $O$ . Получим «пучок» сил.

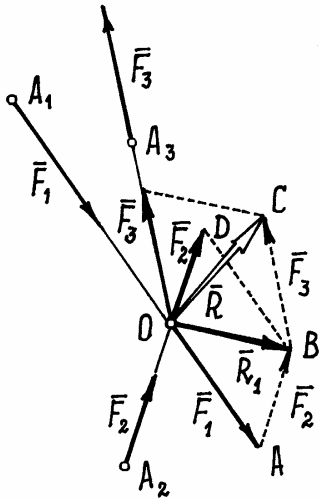


Рис. 2.1.

Сложим сначала две силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , приложенные к одной точке (см. I, п.3), построением параллелограмма  $OABD$ . равнодействующая их  $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ . Затем эту силу  $\vec{R}_1$  складываем так же с силой  $\vec{F}_3$ . Найдём их равнодействующую  $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ . Это будет равнодействующая всех заданных здесь сил. Если бы сил было больше, то и их равнодействующую можно найти таким же способом.

Таким образом, делаем вывод: в результате сложения сходящихся сил получится сила, равнодействующая их, линия действия которой проходит через точку пересечения линий действия заданных сил, и равная векторной сумме всех сил:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad (2.1)$$

где  $n$  – число сил.

Из рис.2.1 видно, что равнодействующую двух сил  $\vec{R}_1$  можно было не определять, а находить равнодействующую сразу всех сил построением многоугольника  $OABC$ , стороны которого равны и параллельны векторам заданных сил. Этот пространственный многоугольник, сторонами которого являются векторы сил, называется *многоугольником сил*.

Нетрудно заметить, что если конец последней силы (точка  $C$  в нашем примере) окажется в точке  $O$ , равнодействующая будет равна нулю. Это



будет означать, что эти сходящиеся силы уравниваются, и тело, к которому они приложены, будет находиться в равновесии. А так как  $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$ , то условием, при котором сходящиеся силы уравниваются, или проще – *условием равновесия системы сходящихся сил, является необходимость и достаточность замкнутости многоугольника сил или равенство нулю векторной суммы всех сил:*

$$\sum \vec{F}_i = 0. \quad (2.2)$$

## §2. Аналитический способ определения равнодействующей системы сходящихся сил. Уравнения равновесия

Дадим сначала определение проекции вектора силы на ось.

Если вектор силы  $\vec{F}_1$  и ось  $x$  расположены в одной плоскости (рис.2.2), то как видно из рисунка, проекцией силы на ось будет отрезок оси  $X_1$ , равный

$$X_1 = F_1 \cdot \cos \alpha.$$

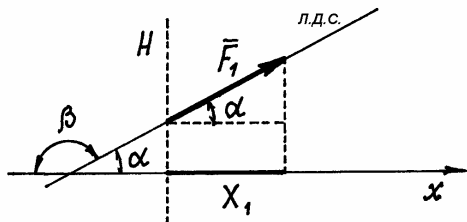


Рис. 2.2.

Так как между линией действия силы и осью имеются два угла  $\alpha$  и  $\beta$ , то чтобы правильно вычислить проекцию, следует пользоваться таким правилом.

*Проекция силы на ось определяется как произведение модуля силы на косинус острого угла между осью и*

*линией действия силы. Проекция считается положительной, если вектор силы и ось направлены в одну сторону от перпендикуляра  $H$  к оси (рис. 2.2).*

Конечно, если вектор силы перпендикулярен оси ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ), проекция

силы равна нулю.

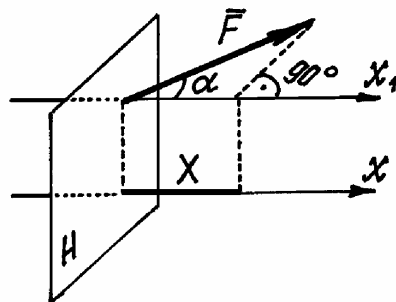


Рис. 2.3.

Если вектор силы  $\vec{F}$  и ось  $x$  не лежат в одной плоскости (рис. 2.3), то чтобы определить проекцию силы на ось  $x$ , надо силу спроектировать на ось  $x_1$ , параллельную оси  $x$  и проходящую через начало вектора силы, по предыдущему правилу. А знак проекции определять в зависимости от того в какую сторону направлены ось и вектор силы от

плоскости  $H$ , перпендикулярной оси.

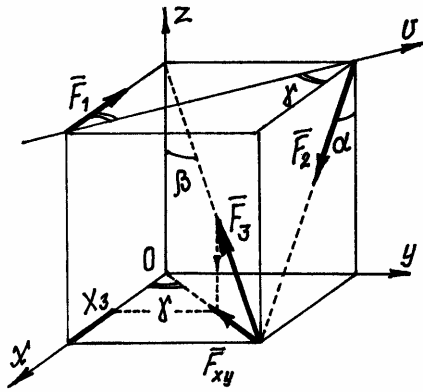


Рис. 2.4.

двойного проектирования.

Проектируем силу сначала на плоскость  $xOy$ , в которой расположена ось  $x$  (рис. 2.4), получим вектор  $\vec{F}_{xy}$ , величиной  $F_{xy} = F_3 \sin \beta$ , а затем его проектируем на ось  $x$ :  $X_3 = -F_{xy} \cos \gamma = -F_3 \sin \beta \cdot \cos \gamma$ .

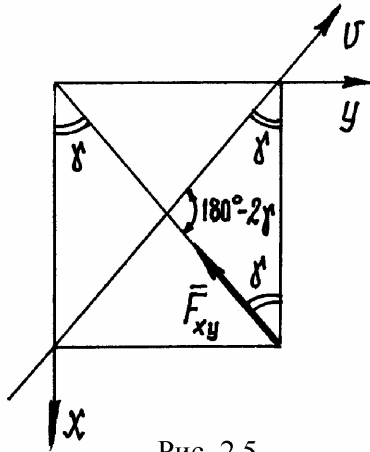


Рис. 2.5.

Аналогично действуя, найдём проекцию на ось  $y$ :  $Y_3 = -F_{xy} \sin \gamma = -F_3 \sin \beta \cdot \sin \gamma$ .

Проекция на ось  $z$  находится проще:  $Z_3 = F_3 \cos \beta$ .

Нетрудно убедиться, что проекции сил на ось  $v$  равны:

$$V_1 = F_1 \cos \gamma; \quad V_2 = -F_2 \sin \alpha \cdot \cos \gamma;$$

$$V_3 = F_{xy} \cos(180^\circ - 2\gamma) = -F_3 \sin \beta \cdot \cos 2\gamma.$$

При определении этих проекций удобно воспользоваться рис.2.5, видом сверху на расположение сил и осей.

Вернёмся к системе сходящихся сил (рис. 2.6). Проведём оси координат с началом в точке пересечения линий действия сил, в точке  $O$ .

Мы уже знаем (2.1), что равнодействующая сил  $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$ . Спроектируем это векторное равенство на оси. Получим проекции равнодействующей  $\vec{R}$  на оси  $x, y, z$ :

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \sum X_i, \\ R_y &= \sum Y_i, \\ R_z &= \sum Z_i. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Они равны алгебраическим суммам проекций сил на соответствующие оси. А зная проекции равнодействующей, можно

Заметим, что проекция силы на ось равна нулю, если вектор силы расположен в плоскости перпендикулярной оси.

Пример 2.1. На рис. 2.4 показаны три силы. Проекции сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  на оси  $x, y, z$  очевидны:

$$X_1 = -F_1; \quad Y_1 = 0; \quad Z_1 = 0; \quad X_2 = F_2 \sin \alpha; \\ Y_2 = 0; \quad Z_2 = -F_2 \cos \alpha.$$

А чтобы найти проекцию силы  $\vec{F}_3$  на ось  $x$  нужно использовать *правило*

определить и величину её как диагональ прямоугольного параллелепипеда

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \text{ или}$$

$$R = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2 + (\sum Z_i)^2}. \quad (2.4)$$

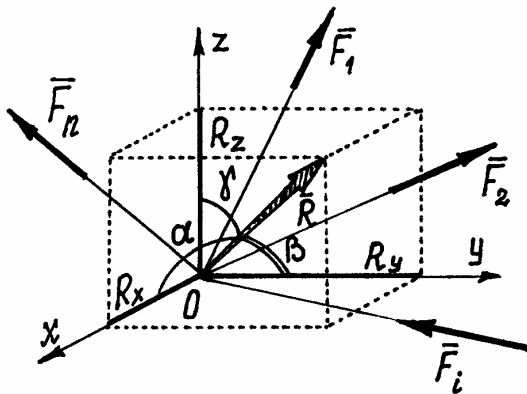


Рис. 2.6.

Направление вектора  $\vec{R}$  найдём с помощью направляющих косинусов (рис. 2.6):

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}.$$

Система сходящихся сил уравнивается, если их равнодействующая  $R=0$ , а это возможно только при выполнении условий:

$$\sum X_i = 0; \quad \sum Y_i = 0; \quad \sum Z_i = 0. \quad (2.5)$$

Эти условия, алгебраические суммы проекций сил на оси равна нулю, называются *уравнениями равновесия системы сходящихся сил, расположенных в пространстве*.

Конечно, если все силы расположены в одной плоскости, например  $xOy$ , третье уравнение обратится в тождество и останутся лишь два уравнения:

$$\sum X_i = 0; \quad \sum Y_i = 0.$$

Следовательно, среди уравновешенных сил, расположенных в пространстве, можно найти три неизвестные величины; среди сил расположенных в плоскости – две.

Пример 2.2. На шар, вес которого  $P$ , лежащий на горизонтальной плоскости и привязанный к ней нитью  $AB$ , действует сила  $F$  (рис. 2.7). Определим реакции связей.

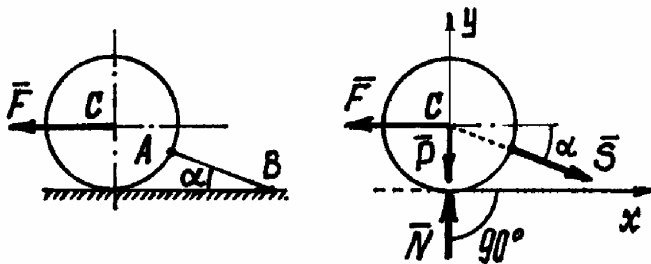


Рис. 2.7.

Следует сразу заметить, что все задачи статики решаются по одной схеме, в определённом порядке.

Продemonстрируем ее на примере решения этой задачи.

1. Надо выбрать (назначить) объект равновесия – тело, равновесие которого следует рассмотреть, чтобы найти неизвестные.

В этой задаче, конечно, объект равновесия – шар.

2. Построение расчётной схемы. Расчётная схема – это объект равновесия, изображённый отдельно, свободным телом, без связей, со всеми силами, действующими на него: реакциями и остальными силами.

Воспользовавшись таблицей 1.1, показываем реакцию нити  $\vec{S}$  и нормальную реакцию плоскости –  $\vec{N}$  (рис. 2.7). Кроме них на шар действуют заданные силы  $\vec{F}$  и  $\vec{P}$ .

3. Надо установить какая получилась система сил и составить соответствующие уравнения равновесия.

Здесь получилась система сходящихся сил, расположенных в плоскости, для которой составляем два уравнения (оси можно проводить произвольно):

$$\begin{aligned} \sum X_i = 0; \quad -F + S \cos \alpha = 0, \\ \sum Y_i = 0; \quad -P + N - S \sin \alpha = 0. \end{aligned}$$

4. Решаем систему уравнений и находим неизвестные.

$$S = \frac{F}{\cos \alpha}, \quad N = S \sin \alpha + P = F \operatorname{tg} \alpha + P.$$

По условию задачи требовалось найти давление шара на плоскость. А мы нашли реакцию плоскости на шар. Но, по определению (I, п.6) следует, что эти силы равны по величине, только давление на плоскость будет направлено в противоположную сторону, вниз.

Пример 2.3. Тело весом  $P$  прикреплено к вертикальной плоскости тремя стержнями (рис. 2.8). Определим усилия в стержнях.

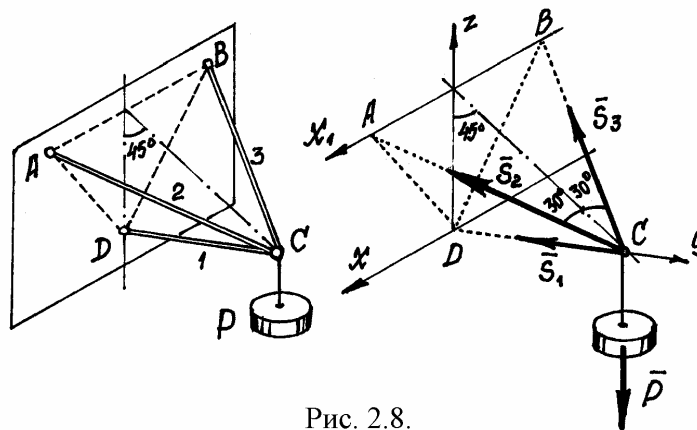


Рис. 2.8.

В этой задаче объект равновесия – узел  $C$  вместе с грузом. Он нарисован отдельно с реакциями, усилиями в стержнях  $\vec{S}_1$ ,  $\vec{S}_2$ ,  $\vec{S}_3$ , и весом  $\vec{P}$ . Силы образуют пространственную систему сходящихся сил. Составляем три уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0; S_2 \cos 60^\circ - S_3 \cos 60^\circ = 0; \\ \sum Y_i &= 0; -S_1 - S_2 \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ - S_3 \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ = 0; \\ \sum Z_i &= 0; S_2 \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + S_3 \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ - P = 0.\end{aligned}$$

Из первого уравнения следует:  $S_2 = S_3$ . Тогда из третьего:  $S_2 = S_3 = \frac{P}{2 \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ} = \frac{2}{\sqrt{6}}P$ , а из второго:  $S_1 = -2S_2 \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ = -P$ .

Когда мы направляли усилие в стержне от узла, от объекта равновесия, предполагали, что стержни работают на растяжение. Усилие в стержне  $CD$  получилось отрицательным. Это значит – стержень сжат. Так что знак усилия в стержне указывает как работает стержень: на растяжение или на сжатие.

### III. Момент силы

#### §1. Момент силы относительно точки

Если к телу приложить силу  $\vec{F}$  в точке  $A$  (рис. 3.1), оно начнёт вращаться вокруг шарнира  $O$ . Вращательный эффект будет определяться величиной силы и расстоянием от точки  $O$  до линии действия силы, т.е. от произведения

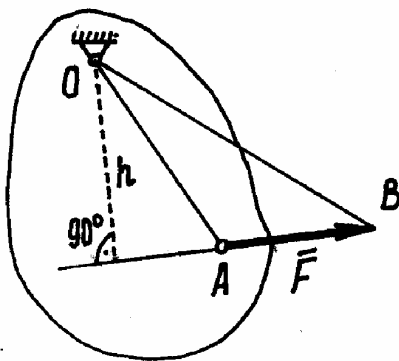


Рис. 3.1.

$$M_O(\vec{F}) = F \cdot h, \quad (3.1)$$

которое называется моментом силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$ , а кратчайшее расстояние  $h$  от точки до линии действия силы – плечом силы.

Чтобы момент силы определял не только эффективность вращательного действия, но и направление вращения,

условились ставить знак (+) или (-). Если сила стремится повернуть тело против часовой стрелки, (+); если по направлению вращения часовой стрелки, (-).

Если плечо  $h = 0$ , то есть линия действия силы проходит через точку  $O$ , момент силы равен нулю.

Заметим, что площадь треугольника  $\Delta OAB$  равна

$$S = \frac{1}{2} F \cdot h = \frac{1}{2} M_O(\vec{F}).$$

Значит момент силы относительно точки численно равен двум площадям такого треугольника:

$$M_O(\vec{F}) = 2 \text{пл.} \Delta OAB, \quad (3.2)$$

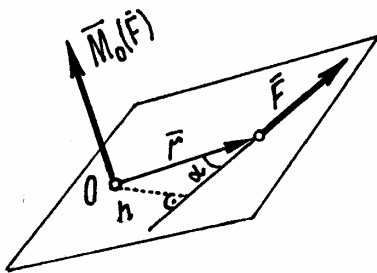


Рис. 3.2.

Для того, чтобы момент силы определял ещё и плоскость, в которой происходит вращение, будем изображать его вектором, направленным перпендикулярно плоскости, в которой расположены точка и сила. И в такую сторону, что если смотреть на силу с той стороны, увидим вращение её вокруг точки – против часовой стрелки (рис. 3.2).

Нетрудно доказать, что вектор момента силы относительно точки есть векторное произведение радиуса-вектора  $\vec{r}$  точки приложения силы на вектор силы  $\vec{F}$ :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (3.3)$$

(радиус-вектор  $\vec{r}$  – это вектор, определяющий положение точки, расположенной на его конце).

Действительно, модуль векторного произведения  $|\vec{r} \times \vec{F}| = r \cdot F \cdot \sin \alpha = Fh = M_O(\vec{F})$ , и направлен этот вектор  $\vec{r} \times \vec{F}$  (по правилу определения направления вектора векторного произведения) так же как вектор  $\vec{M}_O(\vec{F})$ .

## §2. Момент силы относительно оси

Пусть на тело, которое может вращаться вокруг оси  $z$ , действует сила  $\vec{F}$  (рис. 3.3).

Если через начало вектора силы, точку  $A$ , провести плоскость, перпендикулярную оси и разложить силу на две составляющие  $\vec{F}'$  и  $\vec{F}''$ , то нетрудно будет заметить, что сила  $\vec{F}''$ , параллельная оси, будет только сдвигать тело вдоль оси. А вращать тело будет лишь сила  $\vec{F}'$ ,

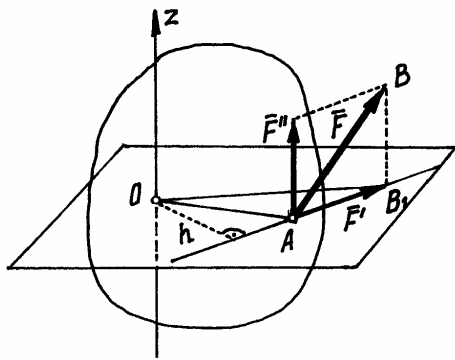


Рис. 3.3.

расположенная в плоскости. И вращательное действие будет определяться моментом этой силы  $\vec{F}'$  относительно точки  $O$ , точки пересечения оси с плоскостью. Значит момент силы  $\vec{F}$  относительно оси  $z$

$$M_z(\vec{F}) = M_0(\vec{F}') = F' \cdot h.$$

Так как составляющая силы  $\vec{F}''$  при определении момента относительно оси не потребовалась, то правило определения этого момента можно сформулировать так:

Чтобы найти момент силы относительно оси, надо спроектировать вектор силы на плоскость перпендикулярную оси и определить момент этой проекции относительно точки пересечения оси с плоскостью.

Заметим, что если вектор силы параллелен оси или линия действия силы пересекает ось, момент силы относительно оси равен нулю. Или, иначе, если вектор силы и ось расположены в одной плоскости, момент силы равен нулю.

Чтобы момент силы относительно оси указывал и направление вращения, будем использовать знак (+) или (-).

Если смотреть на силу со стороны стрелки оси и увидим, что сила стремится вращать тело против часовой стрелки, момент будем считать положительным. В противном случае он будет отрицательным.

Обратим внимание на то, что знак момента зависит не только от направления силы, но и от направления оси.

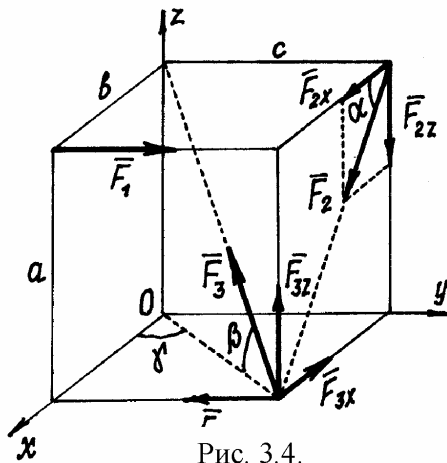


Рис. 3.4.

И ещё. Из рис. 3.3 видно, что площадь треугольника  $OAB_1$  равна

$$S = \frac{1}{2} F' \cdot h = \frac{1}{2} M_z(\vec{F}).$$

Поэтому момент силы относительно оси равен двум площадям этого треугольника

$$M_z(\vec{F}) = 2 \text{пл.} \Delta OAB_1. \quad (3.4)$$

**Пример 3.1.** Определим моменты сил  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_3$  относительно осей (рис. 3.4).

Моменты силы  $\vec{F}_1$  находятся просто:

$$M_z(\vec{F}_1) = -F_1 \cdot a; \quad M_y(\vec{F}_1) = 0; \quad M_x(\vec{F}_1) = F_1 \cdot b.$$

Моменты сил  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_3$  - посложнее.

В тех случаях, когда вектор силы направлен под углом к осям, полезно разложить вектор силы на составляющие параллельные осям и, затем, находить сумму моментов этих составляющих.

Так моменты силы  $\vec{F}_2$ :

$$M_x(\vec{F}_2) = M_x(\vec{F}_{2x}) + M_x(\vec{F}_{2z}) = 0 - F_{2z} \cdot c = -F_2 \sin \alpha \cdot c;$$

$$M_y(\vec{F}_2) = M_y(\vec{F}_{2x}) = F_2 \cdot a = F_2 \cos \alpha \cdot a;$$

$$M_z(\vec{F}_2) = -F_{2x} \cdot c = -F_2 \cos \alpha \cdot c.$$

И силы  $\vec{F}_3$ :

$$M_x(\vec{F}_3) = F_{3z} \cdot c = F_3 \sin \beta \cdot c;$$

$$M_y(\vec{F}_3) = -F_{3z} \cdot b = -F_3 \sin \beta \cdot b;$$

$$M_z(\vec{F}_3) = 0 \text{ (линия действия силы } \vec{F}_3 \text{ пересекает ось } z\text{)}.$$

### §3. Зависимость между моментами силы относительно точки и относительно оси

Найдём моменты силы  $\vec{F}$  (рис. 3.5) относительно точки  $O$  и относительно оси  $z$ , проходящей через эту точку.

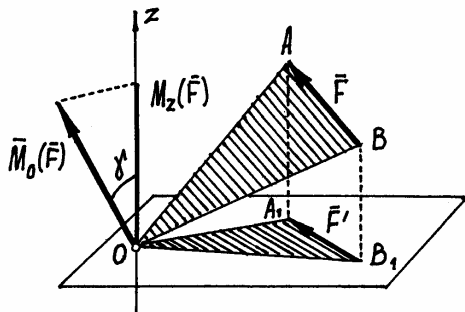


Рис. 3.5.

Как было установлено (3.2 и 3.4),

$$M_O(\vec{F}) = 2\text{пл.}\triangle OAB,$$

$$M_z(\vec{F}) = 2\text{пл.}\triangle OA_1B_1.$$

Из рисунка видно, что  $\triangle OA_1B_1$  является проекцией  $\triangle OAB$  на плоскость, перпендикулярную оси.

Известно, что в этом случае

$$\text{пл.}\triangle OA_1B_1 = \text{пл.}\triangle OAB \cdot \cos \gamma \quad (*),$$

где  $\gamma$  – угол между плоскостями этих

треугольников. Его можно определить как угол между перпендикулярами к плоскостям, между вектором  $\vec{M}_O(\vec{F})$  и осью  $z$ .

Умножив левую и правую части равенства (\*) на 2, получим

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}) \cos \gamma = [\vec{M}_O(\vec{F})]_z. \quad (3.5)$$

Момент силы относительно оси – есть проекция вектора момента силы относительно точки, расположенной на оси, на эту ось.



## IV. Пара сил

### §1. Пара сил. Момент пары

Парой сил (или просто парой) называются две силы, равные по величине, параллельные и направленные в противоположные стороны (рис. 4.1). Очевидно,  $F_1 = F_2$ ,  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ .

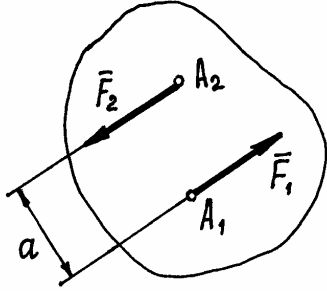


Рис. 4.1.

Несмотря на то, что сумма сил равна нулю, эти силы не уравновешиваются. Под действием этих сил, пары сил, тело начнёт вращаться. И вращательный эффект будет определяться моментом пары:

$$m = F_1 \cdot a = F_2 \cdot a.$$

Расстояние  $a$  между линиями действия сил называется *плечом пары*.

Если пара вращает тело против часовой стрелки, момент её считается положительным (как на рис. 4.1), если по часовой стрелке – отрицательным.

Для того, чтобы момент пары указывал и плоскость, в которой происходит вращение, его представляют вектором.

Вектор момента пары  $\vec{m}$  направляется перпендикулярно плоскости, в которой расположена пара, в такую сторону, что если посмотреть оттуда, увидим вращение тела против часовой стрелки (рис. 4.2).

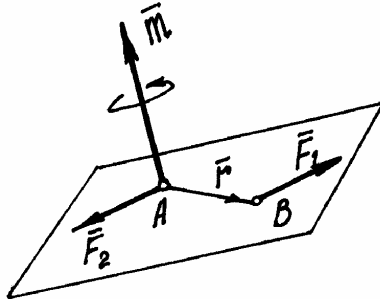


Рис. 4.2.

Нетрудно доказать, что вектор момента пары  $\vec{m} = \vec{r} \times \vec{F}_1$  – есть вектор этого векторного произведения (рис. 4.2). И заметим, что он равен вектору момента силы  $\vec{F}_1$  относительно точки  $A$ , точки приложения второй силы:

$$\vec{m} = \vec{M}_A(\vec{F}_1).$$

О точке приложения вектора  $\vec{m}$  будет сказано ниже. Пока приложим его к точке  $A$ .

## §2. Свойства пар

1) Проекция пары на любую ось равна нулю. Это следует из определения пары сил.

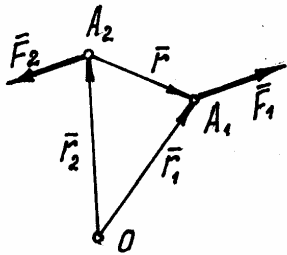


Рис. 4.3.

2) Найдём сумму моментов сил  $\vec{F}_1$ , и  $\vec{F}_2$  составляющих пару, относительно какой-либо точки  $O$  (рис. 4.3).

Покажем радиусы-векторы точек  $A_1$  и  $A_2$  и вектор  $\vec{r}$ , соединяющий эти точки. Тогда момент пары сил относительно точки  $O$

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2.$$

Но  $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{r}$ . Поэтому  $\vec{M}_O(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = (\vec{r}_2 + \vec{r}) \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_2 \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \vec{r} \times \vec{F}_1$ . Но  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ , а  $\vec{r} \times \vec{F}_1 = \vec{m}$ . Значит

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \vec{m}.$$

Момент пары сил относительно любой точки равен моменту этой пары.

Отсюда следует, что, во-первых, где бы не находилась точка  $O$  и, во-вторых, где бы не располагалась эта пара в теле и как бы она не была повёрнута в своей плоскости, действие её на тело будет одинаково. Так как момент сил, составляющих пару, в этих случаях один и тот же, равный моменту этой пары  $\vec{m}$ .

Поэтому можно сформулировать ещё два свойства.

3). Пару можно перемещать в пределах тела по плоскости действия и переносить в любую другую параллельную плоскость.

4). Так как действие на тело сил, составляющих пару, определяется лишь её моментом, произведением одной из сил на плечо, то у пары можно изменять силы и плечо, но так, чтобы момент пары остался прежним. Например, при силах  $F_1 = F_2 = 5$  Н и плече  $a = 4$  см момент пары  $m = 20$  Н·см. Можно силы сделать равными 2 Н, а плечо  $a = 10$  см. При этом момент останется прежним 20 Н·см и действие пары на тело не изменится.

Все эти свойства можно объединить и, как следствие, сделать вывод, что пары с одинаковым вектором момента  $\vec{m}$  и неважно где расположенные на теле, оказывают на него равное действие. То есть такие пары эквивалентны.

Исходя из этого, на расчётных схемах пару изображают в виде дуги со стрелкой, указывающей направление вращения, и рядом пишут величину момента  $m$ . Или, если это пространственная конструкция, показывают

только вектор момента этой пары. И вектор момента пары можно прикладывать к любой точке тела. Значит вектор момента пары  $\vec{m}$  – свободный вектор.

И ещё одно дополнительное замечание. Так как момент пары равен вектору момента одной из сил её относительно точки приложения второй силы, то, по аналогии с гл. III, §3, момент пары сил относительно какой-либо оси  $z$  – есть проекция вектора момента пары  $\vec{m}$  на эту ось:

$$m_z = m \cdot \cos \gamma, \quad (4.1)$$

где  $\gamma$  – угол между вектором  $\vec{m}$  и осью  $z$ .

### §3. Сложение пар

Пусть даны две пары с моментами  $m_1$  и  $m_2$ , расположенные в пересекающихся плоскостях (рис. 4.4).

Сделаем у пар плечи одинаковыми, равными  $a = AB$ . Тогда модули сил, образующих первую пару, должны быть равны:  $F_1 = F'_1 = \frac{m_1}{a}$ , а образующих вторую пару:  $F_2 = F'_2 = \frac{m_2}{a}$ .

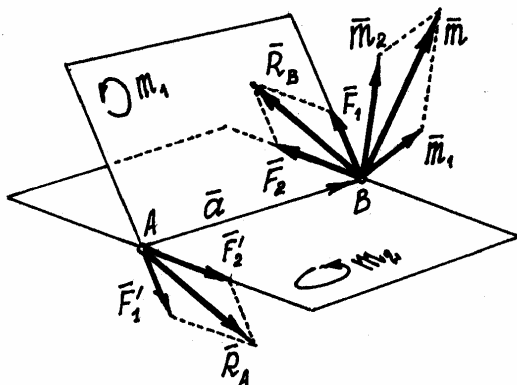


Рис. 4.4.

Эти пары показаны на рис.4.4, где  $\vec{F}'_1 = -\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}'_2 = -\vec{F}_2$ . И расположены они в своих плоскостях так, что плечи пар совпадают с прямой  $AB$  на линии пересечения плоскостей.

Сложив силы, приложенные к точкам  $A$  и  $B$ , построением параллелограммов, получим их равнодействующие  $\vec{R}_B = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  и  $\vec{R}_A = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2$ . Так как  $\vec{R}_B = -\vec{R}_A$ , то эти силы  $\vec{R}_A$  и  $\vec{R}_B$  будут образовывать

пару, момент которой  $\vec{m} = \vec{a} \times \vec{R}_B$ , где  $\vec{a}$  – радиус-вектор точки  $B$ , совпадающий с  $AB$ .

Так как  $\vec{R}_B = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , то момент полученной пары

$$\vec{m} = \vec{a} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{a} \times \vec{F}_1 + \vec{a} \times \vec{F}_2 = \vec{m}_1 + \vec{m}_2.$$

Следовательно, в результате сложения пар, расположенных в пересекающихся плоскостях, получится пара сил. Момент её будет равен векторной сумме моментов слагаемых пар.

При сложении нескольких пар, действующих в произвольных плоскостях, получим пару с моментом

$$\vec{m} = \sum \vec{m}_i. \quad (4.2)$$

Конечно, эта результирующая пара будет располагаться в плоскости перпендикулярной вектору  $\vec{m}$ .

Равенство нулю результирующей пары будет означать, что пары, действующие на тело, уравниваются. Следовательно, условие равновесия пар

$$\sum \vec{m}_i = 0. \quad (4.3)$$

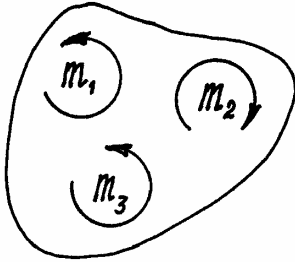


Рис. 4.5.

Если пары расположены в одной плоскости, векторы моментов их будут параллельны. И момент результирующей пары можно определить как алгебраическую сумму моментов пар.

Например, пары, показанные на рис. 4.5, расположены в одной плоскости и моменты их:  $m_1=2 \text{ Н}\cdot\text{см}$ ,  $m_2=5 \text{ Н}\cdot\text{см}$ ,  $m_3=3 \text{ Н}\cdot\text{см}$ . Пары уравниваются, потому что алгебраическая сумма их

моментов равна нулю:

$$\sum m_i = m_1 - m_2 + m_3 = 2 - 5 + 3 = 0.$$

## V. Произвольная система сил

### §1. Приведение силы к точке

Ранее мы установили, что вектор силы можно переносить по линии действия в любую точку тела.

Попробуем силу  $\vec{F}$  (рис. 5.1) перенести в какую-нибудь точку  $O$ , не расположенную на линии действия.

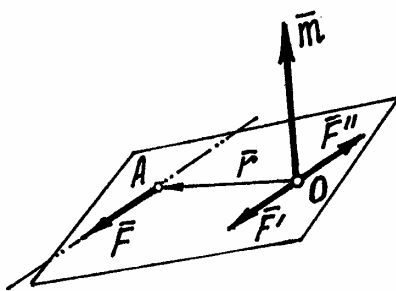


Рис. 5.1.

Приложим к этой точке две уравнивающиеся силы  $\vec{F}'$  и  $\vec{F}''$ , параллельные силе  $\vec{F}$  и равные ей по величине:  $F' = F'' = F$

В результате получим силу  $\vec{F}' = \vec{F}$ , приложенную к точке  $O$ . То есть мы как бы перенесли заданную силу  $\vec{F}$  из точки  $A$  в точку  $O$ , но при этом появилась пара, образованная силами  $\vec{F}$  и  $\vec{F}''$ . Момент этой

пары  $\vec{m} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_O(\vec{F})$ , равен моменту заданной силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$ .

Этот процесс замены силы  $\vec{F}$  равной ей силой  $\vec{F}'$  и парой называется приведением силы к точке  $O$ .

Точка  $O$  называется точкой приведения; сила  $\vec{F}'$ , приложенная к точке приведения, – приведённой силой. Появившаяся пара – присоединённой парой.

## §2. Сложение сил, произвольно расположенных в пространстве

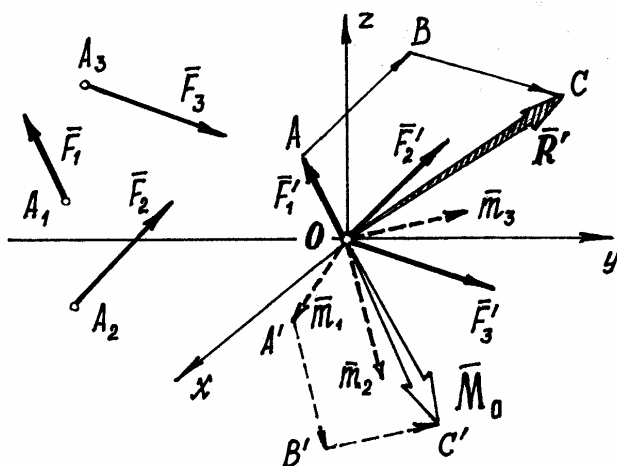


Рис. 5.2.

Пусть дана система, состоящая из нескольких произвольно расположенных сил (на рис. 5.2 показаны три силы  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ ). Требуется сложить эти силы и посмотреть что в результате получится.

Приведём все силы к произвольно выбранной точке  $O$ , центру приведения. Получим систему приведённых сил, приложенных к точке  $O$ ,

равных заданным силам:  $\vec{F}'_1 = \vec{F}_1, \vec{F}'_2 = \vec{F}_2, \vec{F}'_3 = \vec{F}_3$ , и систему присоединённых пар, моменты которых равны векторам моментов заданных сил относительно центра приведения  $O$ :  $\vec{m}_1 = \vec{M}_O(\vec{F}_1), \vec{m}_2 = \vec{M}_O(\vec{F}_2), \vec{m}_3 = \vec{M}_O(\vec{F}_3)$ , (на рис. 5.2 самих пар нет, показаны только векторы их моментов).

Сложив первую систему, систему сходящихся приведённых сил, например, построением многоугольника сил  $OABC$ , получим их равнодействующую  $\vec{R}'$ , которая равна векторной сумме этих приведённых сил, а, значит, и заданных сил, потому что они одинаковы:

$$\vec{R}' = \sum \vec{F}'_i = \sum \vec{F}_i. \quad (5.1)$$

А сложив систему пар, например, построением многоугольника векторов моментов  $OA'B'C'$ , получим пару, момент которой  $\vec{M}_0$  равен векторной сумме моментов присоединённых пар или сумме моментов заданных сил относительно центра приведения

$$\vec{M}_0 = \sum \vec{m}_i = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i). \quad (5.2)$$

Сила  $\vec{R}'$ , равная векторной сумме заданных сил, называется *главным вектором* этих сил. Приложена эта сила к центру приведения.

Момент  $\vec{M}_O$ , равный векторной сумме моментов заданных сил относительно центра приведения, называется *главным моментом* этих сил относительно центра приведения.

Главный вектор  $\vec{R}'$  можно найти как равнодействующую сходящихся сил (см. гл. II, §2, 2.4).

Проекция его на оси (рис. 5.2):

$$R'_x = \sum X'_i = \sum X_i; R'_y = \sum Y'_i = \sum Y_i; R'_z = \sum Z'_i = \sum Z_i.$$

Поэтому модуль главного вектора

$$R' = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2 + (\sum Z_i)^2}. \quad (5.3)$$

Направление вектора  $\vec{R}'$  определяется с помощью направляющих косинусов:

$$\cos \alpha = \frac{R'_x}{R'}, \quad \cos \beta = \frac{R'_y}{R'}, \quad \cos \gamma = \frac{R'_z}{R'},$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  - углы между вектором  $\vec{R}'$  и осями  $x, y, z$ .

Так как векторы моментов присоединённых пар также образуют систему сходящихся векторов, то и главный момент  $M_O$  находим аналогичным способом

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}, \quad (5.4)$$

где  $M_x, M_y, M_z$  – проекции вектора  $\vec{M}_O$  на оси. Проектируя его (5.2) на оси, получим, вспоминая, что проекция вектора момента силы относительно точки на ось, проходящую через эту точку – есть момент относительно оси (см. 3.5),

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \sum [\vec{M}_O(\vec{F}_i)]_x = \sum M_x(\vec{F}_i), \\ M_y &= \sum [\vec{M}_O(\vec{F}_i)]_y = \sum M_y(\vec{F}_i), \\ M_z &= \sum [\vec{M}_O(\vec{F}_i)]_z = \sum M_z(\vec{F}_i). \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Эти проекции  $M_x, M_y, M_z$  вектора главного момента  $\vec{M}_O$  на оси, равные алгебраическим суммам моментов заданных сил относительно осей, проходящих через центр приведения, называются *главными моментами сил* относительно соответствующих осей.

Модуль главного момента  $\vec{M}_O$  находится по (5.4) или, с учётом (5.5),

$$M_O = \sqrt{[\sum M_x(\vec{F}_i)]^2 + [\sum M_y(\vec{F}_i)]^2 + [\sum M_z(\vec{F}_i)]^2}. \quad (5.6)$$

Направление этого вектора можно найти с помощью направляющих косинусов:

$$\cos \alpha_1 = \frac{M_x}{M_O}, \quad \cos \beta_1 = \frac{M_y}{M_O}, \quad \cos \gamma_1 = \frac{M_z}{M_O}, \quad (5.7)$$

где  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  - углы между вектором  $\vec{M}_O$  и осями  $x, y, z$ .

Итак. При сложении сил, произвольно расположенных в пространстве, в общем случае получается сила  $\vec{R}'$ , приложенная к центру приведения, и пара с моментом  $\vec{M}_O$ .

Два важных замечания. Первое, главный вектор  $\vec{R}'$  не является равнодействующей  $\vec{R}$  заданных сил, т.к. он не может один заменить действие всех сил, а только вместе с парой.

Второе – главный вектор  $\vec{R}'$ , как векторная сумма заданных сил, не зависит от положения центра приведения. А главный момент  $\vec{M}_O$  – зависит, так как моменты заданных сил относительно центра приведения изменятся, если этот центр будет в другом месте.

Конечно, возможны различные результаты сложения сил.

1) Может оказаться, что главный момент относительно выбранного центра приведения  $O$  окажется равным нулю  $\vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i) = 0$ , а главный вектор  $\vec{R}' \neq 0$ .

Это значит, в результате сложения получится только сила, равная главному вектору. И она, эта сила, в данном частном случае является равнодействующей  $\vec{R}$  всей системы сил. Линия действия равнодействующей будет проходить через этот центр приведения.

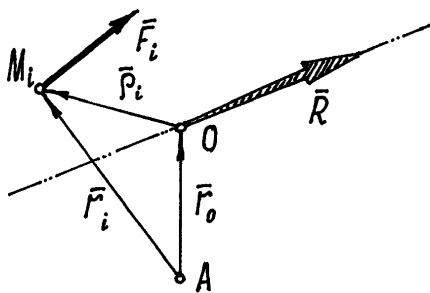


Рис. 5.3.

В этом частном случае имеет место очень важная и полезная теорема – теорема Вариньона.

Пусть на тело действует несколько сил  $\vec{F}_i$  и у них существует равнодействующая  $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$ , приложенная к центру приведения  $O$  (рис. 5.3).

Покажем радиусы-векторы, проведённые из некоторой точки  $A$ :  $\vec{r}_O$  – радиус-вектор точки приложения равнодействующей;  $\vec{r}_i$  – точки  $M_i$ , точки приложения сил  $\vec{F}_i$ . И добавим векторы  $\vec{\rho}_i$ , соединяющие точку  $O$  с точками  $M_i$ .

Момент сил  $\vec{F}_i$  относительно точки  $A$ :  $\vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ . А так как  $\vec{r}_i = \vec{r}_O + \vec{\rho}_i$ , то  $\vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{r}_O \times \vec{F}_i + \vec{\rho}_i \times \vec{F}_i = \vec{r}_O \times \vec{F}_i + \vec{M}_O(\vec{F}_i)$ .

Сумма моментов всех сил  $\vec{F}_i$  относительно точки  $A$ :

$\sum \vec{M}_A(\vec{F}_i) = \sum (\vec{r}_O \times \vec{F}_i) + \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i)$ . Но  $\sum (\vec{r}_O \times \vec{F}_i) = \vec{r}_O \times \sum \vec{F}_i = \vec{r}_O \times \vec{R} = \vec{M}_A(\vec{R})$ , а  $\sum \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{M}_O$ , равна главному моменту сил относительно точки  $O$ , который в этом частном случае равен нулю. Поэтому  $\sum \vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{M}_A(\vec{R})$ .

*Если у системы сил имеется равнодействующая, то момент равнодействующей относительно любой точки  $A$  равен векторной сумме моментов всех сил относительно этой точки:*

$$\vec{M}_A(\vec{R}) = \sum \vec{M}_A(\vec{F}_i). \quad (5.8)$$

*Следствие.* Если спроектировать это векторное равенство на какую-нибудь ось, например  $z$ , проходящую через точку  $A$ , то, имея в виду доказанный ранее результат (3.5), получим теорему Вариньона в другой форме.

*Если у системы сил имеется равнодействующая, то момент её относительно любой оси равен алгебраической сумме моментов всех сил относительно этой оси*

$$M_z(\vec{R}) = \sum M_z(\vec{F}_i). \quad (5.9)$$

2) Возможен и другой случай, при котором, наоборот, главный вектор равен нулю ( $\vec{R}' = 0$ ), а главный момент относительно данного центра  $O$  не равен нулю ( $\vec{M}_O \neq 0$ ). Это означает, что в результате сложения сил получится только пара с моментом  $\vec{M}_O$ .

А так как момент пары сил относительно любой точки равен моменту этой пары (гл. IV, §2), то в этом случае, когда  $\vec{R}' = 0$ , главный момент не зависит от выбора центра приведения. Относительно любой точки  $O$  он будет одинаков и равен  $\vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i)$ .

3) И, наконец, возможно когда и главный вектор  $\vec{R}'$ , и главный момент  $\vec{M}_O$  будут равны нулю. В этом случае силы уравниваются, а тело под действием этих сил находится в равновесии.



А так как  $R' = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2 + (\sum Z_i)^2}$  и главный момент  $M_O = \sqrt{[\sum M_x(\vec{F}_i)]^2 + [\sum M_y(\vec{F}_i)]^2 + [\sum M_z(\vec{F}_i)]^2}$ . (см. 5.3 и 5.6), то для равновесия тела необходимо выполнение шести условий:

$$\left. \begin{array}{l} \sum X_i = 0; \\ \sum Y_i = 0; \\ \sum Z_i = 0; \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \sum M_x(\vec{F}_i) = 0; \\ \sum M_y(\vec{F}_i) = 0; \\ \sum M_z(\vec{F}_i) = 0. \end{array} \right\} \quad (5.10)$$

Эти условия называются *уравнениями равновесия сил произвольно расположенных в пространстве*.

В частности, если силы расположены в одной плоскости, то, направив оси так, чтобы ось  $z$  стала перпендикулярна этой плоскости, третье уравнение  $\sum Z_i = 0$ , четвертое  $\sum M_x(\vec{F}_i) = 0$  и пятое  $\sum M_y(\vec{F}_i) = 0$  обратятся в тождества, а в шестом – моменты сил относительно оси  $z$  будут равны моментам относительно точки  $O$ , точки пересечения оси и плоскости.

Останутся только три уравнения из шести:

$$\left. \begin{array}{l} \sum X_i = 0; \\ \sum Y_i = 0; \\ \sum M_O(\vec{F}_i) = 0. \end{array} \right\} \quad (5.11)$$

Так как в системе уравнений (5.10) уравнения моментов удовлетворяются относительно любой оси, то таких уравнений моментов можно составить больше трёх, хоть все шесть.

Точно так же в системе уравнений (5.11) для плоской системы сил можно составить и два, и три уравнения моментов. Поэтому возможны три варианта:

$$\left. \begin{array}{l} \sum X_i = 0, \\ \sum Y_i = 0, \\ \sum M_{A_i} = 0. \end{array} \right\} I \quad \left. \begin{array}{l} \sum X_i = 0, \\ \sum M_{A_i} = 0, \\ \sum M_{B_i} = 0. \end{array} \right\} II \quad \left. \begin{array}{l} \sum M_{A_i} = 0, \\ \sum M_{B_i} = 0, \\ \sum M_{C_i} = 0. \end{array} \right\} III \quad (5.12)$$

Правда, имеются ограничения на выбор точек и осей. Например, при использовании II варианта точки  $A$  и  $B$  не должны лежать на прямой, перпендикулярной оси; а в III варианте – точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  не должны располагаться на одной прямой.

**Пример 5.1.** Рама  $AB$  (рис. 5.4) удерживается в равновесии шарниром  $A$  и стержнем  $BC$ . На краю рамы находится груз весом  $P$ . Определим реакции шарнира и усилие в стержне.

Порядок решения задач остаётся прежним (см. пример 2.2).

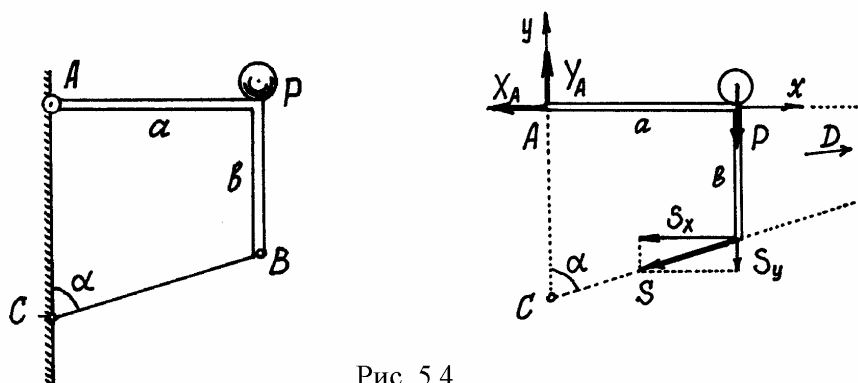


Рис. 5.4.

Рассматриваем равновесие рамы вместе с грузом.

Строим расчётную схему, изобразив раму свободным телом и показав все силы, действующие на неё: реакции связей и вес груза  $P$ . Эти силы образуют систему сил, произвольно расположенных на плоскости.

Каким вариантом уравнений (5.12) нужно воспользоваться? Желательно составить такие уравнения, чтобы в каждом было по одной неизвестной силе.

Поэтому рекомендуется пользоваться III вариантом, составляя уравнения моментов относительно трёх точек, точек пересечения линий действия неизвестных сил.

В нашей задаче это точка  $A$ , где приложены неизвестные  $\vec{X}_A$  и  $\vec{Y}_A$ ; точка  $C$ , где пересекаются линии действия неизвестных сил  $\vec{Y}_A$  и  $\vec{S}$ ; точка  $D$  – точка пересечения линий действия сил  $\vec{X}_A$  и  $\vec{S}$ . Но, поскольку точка  $D$  находится довольно далеко, воспользуемся II вариантом. Составим уравнение проекций сил на ось  $y$  (на ось  $x$  проектировать нельзя, т.к. она перпендикулярна прямой  $AC$ ).

И, прежде чем составлять уравнения, сделаем еще одно полезное замечание. Если на расчётной схеме имеется сила, расположенная так, что плечо её находится непросто, то при определении момента рекомендуется предварительно разложить вектор этой силы на две, более удобно направленные. В данной задаче разложим силу  $\vec{S}$  на две:  $\vec{S}_x$  и  $\vec{S}_y$  (рис. 5.4) такие, что модули их  $S_x = S \sin \alpha$ ,  $S_y = S \cos \alpha$ .

Составляем уравнения:  $\sum Y_i = 0; Y_A - P - S \cos \alpha = 0;$   
 $\sum M_{Ai} = 0; -Pa - S_y a + S_x b = 0;$   
 $\sum M_{Ci} = 0; X_A \cdot AC - Pa = 0.$

Из второго уравнения находим  $S = -P \frac{a}{a \cos \alpha + b \sin \alpha}$ . Из третьего

$$X_A = P \frac{a}{AC} = P \frac{a}{b + a \operatorname{ctg} \alpha}. \text{ И из первого } Y_A = P + S \cos \alpha =$$

$$= P \left( 1 - \frac{a}{a \cos \alpha + b \sin \alpha} \right).$$

Так как получилось  $S < 0$ , то стержень  $BC$  будет сжат.

**Пример 5.2.** Прямоугольная полка весом  $P$  удерживается в горизонтальном положении двумя стержнями  $CE$  и  $CD$ , прикрепленными к стене в точке  $E$ . Стержни одинаковой длины,  $AB = 2a$ ,  $EO = a$ . Определим усилия в стержнях и реакции петель  $A$  и  $B$ .

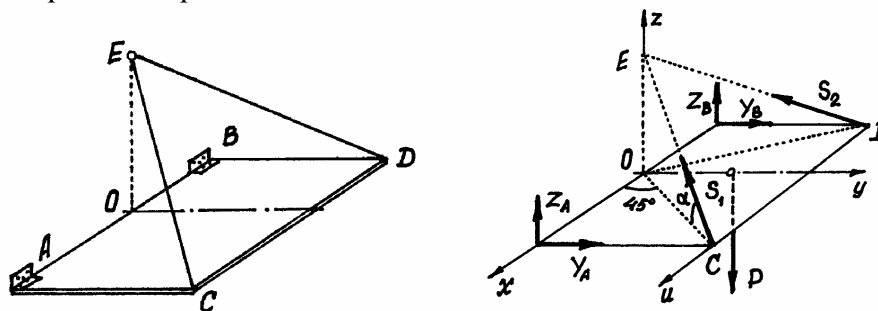


Рис. 5.5.

Рассматриваем равновесие плиты. Строим расчётную схему (рис. 5.5). Реакции петель принято показывать двумя силами перпендикулярными оси петли:  $\vec{Y}_A, \vec{Z}_A$  и  $\vec{Y}_B, \vec{Z}_B$ .

Силы образуют систему сил, произвольно расположенных в пространстве. Можем составить 6 уравнений. Незвестных - тоже шесть.

Какие уравнения составлять – надо подумать. Желательно такие, чтобы они были попроще и чтобы в них было поменьше неизвестных.

Составим такие уравнения:

- (1)  $\sum X_i = 0; -S_1 \cos \alpha \cdot \cos 45^\circ + S_2 \cos \alpha \cdot \cos 45^\circ = 0;$
- (2)  $\sum M_{ui} = 0; -Z_A \cdot a - Z_B \cdot a + P \cdot 0,5a = 0;$
- (3)  $\sum M_{zi} = 0; Y_A \cdot a - Y_B \cdot a = 0;$
- (4)  $\sum M_{xi} = 0; S_1 \sin \alpha \cdot a + S_2 \sin \alpha \cdot a - P \cdot 0,5a = 0;$
- (5)  $\sum Y_i = 0; Y_A + Y_B - S_1 \cos \alpha \cdot \cos 45^\circ - S_2 \cos \alpha \cdot \cos 45^\circ = 0;$
- (6)  $\sum M_{yi} = 0; -Z_A \cdot a + Z_B \cdot a - S_1 \sin \alpha \cdot a + S_2 \sin \alpha \cdot a = 0.$

Из уравнения (1) получим:  $S_1 = S_2$ . Тогда из (4):  $S_1 = S_2 = \frac{1}{4} \frac{P}{\sin \alpha}$ .

Из (3):  $Y_A = Y_B$  и, по (5),  $2Y_A = 2S_1 \cos \alpha \cdot \cos 45^\circ$ . Значит  $Y_A = Y_B = \frac{1}{4} P \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos 45^\circ$ . Из уравнения (6), т.к.  $S_1 = S_2$ , следует  $Z_A = Z_B$ .

Тогда по (2)  $Z_A = Z_B = \frac{1}{4} P$ . Из треугольника  $\triangle OEC$ , где  $EC = \sqrt{OC^2 + OE^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = a\sqrt{3}$ , следует  $\sin \alpha = \frac{EO}{EC} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\cos \alpha = \frac{OC}{EC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2}$ . Поэтому  $S_1 = S_2 = 0,25\sqrt{3}P$ ,  $Y_A = Y_B = 0,25P$ ,  $Z_A = Z_B = 0,25P$ .

Для проверки решения можно составить ещё одно уравнение и посмотреть, удовлетворяется ли оно при найденных значениях реакций:

$$\sum Z_i = Z_A + Z_B - P + S_1 \sin \alpha - S_2 \sin \alpha = 0,25P + 0,25P - P + 0,25\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 0,25\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 0. \text{ Задача решена правильно.}$$

## VI. Центр тяжести

### § 1. Сложение параллельных сил. Центр параллельных сил

Пусть даны две параллельные силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , направленные в одну сторону и приложенные к точкам  $A_1$  и  $A_2$  (рис. 6.1).

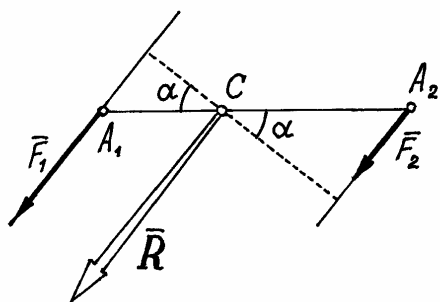


Рис. 6.1.

Конечно, величина их равнодействующей  $R = F_1 + F_2$ . Вектор её параллелен силам и направлен в ту же сторону. С помощью теоремы Вариньона (5.8) найдём точку приложения равнодействующей – точку  $C$ . По этой теореме  $M_C(\vec{R}) = \sum M_C(\vec{F}_i)$ . Значит

$$0 = F_1 \cdot A_1C \cdot \cos \alpha - F_2 \cdot A_2C \cdot \cos \alpha.$$

Отсюда  $\frac{A_1C}{A_2C} = \frac{F_2}{F_1}$ . То есть точка

приложения равнодействующей делит расстояние между точками  $A_1$  и  $A_2$  на части обратно пропорциональные силам.

Если параллельные силы направлены в противоположные стороны (рис. 6.2), то аналогично можно доказать, что равнодействующая по величине будет равна разности сил:  $R = F_2 - F_1$  (если  $F_2 > F_1$ ), параллельна им, направлена в сторону большей силы и расположена за большей силой – в точке  $C$ . А расстояния от точки  $C$  до точек приложения сил обратно пропорциональны силам:  $\frac{A_1C}{A_2C} = \frac{F_2}{F_1}$ .

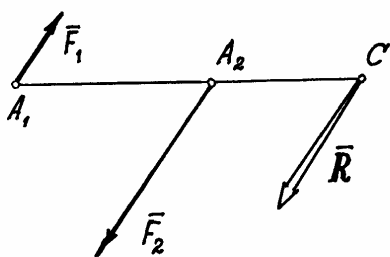


Рис. 6.2.

Следует заметить, что если точка приложения равнодействующей расположена на одной прямой с точками  $A_1$  и  $A_2$ , точками приложения сил, то, при повороте этих сил в одну сторону на одинаковый угол, равнодействующая также повернётся вокруг точки приложения  $C$  в том же направлении, и останется параллельной им.

Такая точка приложения равнодействующей называется *центром параллельных сил*.

Конечно, если хотя бы одну из сил перенести по своей линии действия в другую точку, то и точка приложения равнодействующей, центр параллельных сил, тоже переместится по линии действия.

Следовательно, положение центра параллельных сил зависит от координат точек приложения сил.

Центром нескольких параллельных сил, найденный последовательным сложением каждой двух сил, будем называть точку  $C$ , радиус-вектор которой определяется формулой

$$\vec{r}_c = \frac{\sum F_i \cdot \vec{r}_i}{\sum F_i} = \frac{\sum F_i \cdot \vec{r}_i}{R}, \quad (6.1)$$

где  $\vec{r}_i$  - радиусы-векторы точек приложения сил;  $R = \sum F_i$  - величина равнодействующей параллельных сил, равная алгебраической сумме этих сил (знак силы определяется направлением, которое заранее выбирается и считается положительным).

Используя (6.1), нетрудно найти координаты центра параллельных сил. Если радиусы-векторы откладывать из начала координат, то проекции радиусов-векторов точек на оси будут равны их координатам. Поэтому, проектируя векторное равенство (6.1) на оси, получим

$$x_c = \frac{\sum F_i x_i}{R}; \quad y_c = \frac{\sum F_i y_i}{R}; \quad z_c = \frac{\sum F_i z_i}{R}, \quad (6.2)$$

где  $x_i, y_i, z_i$  - координаты точек приложения сил.

## §2. Центр тяжести тел

На все точки тела, находящегося вблизи поверхности Земли, действуют силы - силы тяжести этих точек или их вес  $\vec{P}_i$ . Вообще эти силы будут сходящимися - линии действия их пересекаются в центре Земли. Но, если пренебречь размерами тела в сравнении с размерами Земли, то можно считать их параллельными.

Центр этих параллельных сил, сил тяжести точек, называется *центром тяжести* тела.

Значит находить центр тяжести тел можно как центр параллельных сил, по формулам (6.1) или (6.2). Например, координаты его

$$x_c = \frac{\sum P_i x_i}{P}; \quad y_c = \frac{\sum P_i y_i}{P}; \quad z_c = \frac{\sum P_i z_i}{P}, \quad (6.3)$$

где  $P_i$  - вес каждой точки тела, а  $P = \sum P_i$  - вес всего тела.

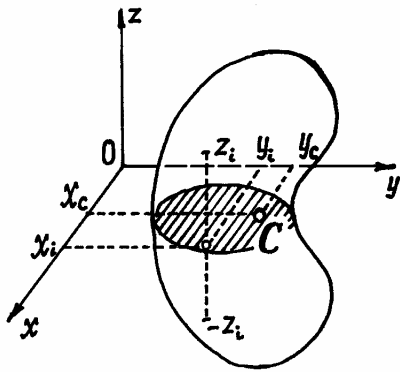


Рис. 6.3.

При определении центра тяжести полезны несколько теорем.

1) Если однородное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести его находится в этой плоскости.

Если оси  $x$  и  $y$  расположить в этой плоскости симметрии (рис. 6.3), то для каждой точки с координатами  $x_i, y_i, z_i$  можно отыскать точку с координатами  $x_i, y_i, -z_i$ . И координата  $z_c$  по (6.3), бу-

дет равна нулю, т.к. в сумме  $\sum P_i \cdot z_i$  все члены имеющие противоположные знаки, попарно уничтожаются. Значит центр тяжести расположен в плоскости симметрии.

2) Если однородное тело имеет ось симметрии, то центр тяжести тела находится на этой оси.

Действительно, в этом случае, если ось  $z$  провести по оси симметрии, для каждой точки с координатами  $x_i, y_i, z_i$  можно отыскать точку с координатами  $-x_i, -y_i, z_i$  и координаты  $x_c$  и  $y_c$ , вычисленные по формулам (6.3), окажутся равными нулю.

Аналогично доказывается и третья теорема.

3) Если однородное тело имеет центр симметрии, то центр тяжести тела находится в этой точке.

И ещё несколько замечаний.

*Первое.* Если тело можно разделить на части, у которых известны вес и положение центра тяжести, то незачем рассматривать каждую точку, а в формулах (6.3)  $P_i$  – определять как вес соответствующей части и  $x_i, y_i, z_i$  – как координаты её центра тяжести.

*Второе.* Если тело однородное, то вес отдельной части его  $P_i = V_i \cdot \gamma$ , где  $\gamma$  - удельный вес материала, из которого сделано тело, а  $V_i$  - объём этой части тела. И формулы (6.3) примут более удобный вид. Например,

$$x_c = \frac{\sum P_i x_i}{P} = \frac{\sum V_i \cdot \gamma \cdot x_i}{V \cdot \gamma} = \frac{\sum V_i x_i}{V}. \quad \text{И аналогично,} \quad y_c = \frac{\sum V_i y_i}{V},$$

$$z_c = \frac{\sum V_i z_i}{V}, \quad \text{где } V = \sum V_i \text{ - объём всего тела.}$$

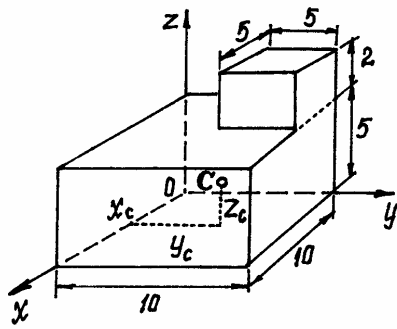


Рис. 6.4.

**Пример 6.1.** Определим центр тяжести однородного тела, изображённого на рис. 6.4.

Тело однородное, состоящее из двух частей, имеющих симметричную форму. Координаты центров тяжести их:

$$x_1 = 5 \text{ см}; y_1 = 5 \text{ см}; z_1 = 2,5 \text{ см};$$

$$x_2 = 2,5 \text{ см}; y_2 = 7,5 \text{ см}; z_2 = 6 \text{ см}.$$

$$\text{Объёмы их: } V_1 = 5 \cdot 10 \cdot 10 = 500 \text{ см}^3;$$

$V_2 = 5 \cdot 5 \cdot 2 = 50 \text{ см}^3$ . Поэтому координаты центра тяжести тела

$$x_c = \frac{\sum V_i x_i}{V} = \frac{500 \cdot 2,5 + 50 \cdot 6}{500 + 50} = 4,77 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\sum V_i y_i}{V} = \frac{500 \cdot 5 + 50 \cdot 7,5}{550} = 5,23 \text{ см};$$

$$z_c = \frac{\sum V_i z_i}{V} = \frac{500 \cdot 2,5 + 50 \cdot 6}{550} = 2,82 \text{ см}.$$

*Третье замечание.* Если тело состоит из однородных пластин одинаковой, малой толщины, то объём каждой пластины  $V_i = S_i \cdot d$ , где  $S_i$  – площадь пластины,  $d$  – толщина. И координаты центра тяжести будут определяться только с помощью площадей:

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{S}; \quad y_c = \frac{\sum S_i y_i}{S}; \quad z_c = \frac{\sum S_i z_i}{S},$$

где  $x_i, y_i, z_i$  – координаты центра тяжести отдельных пластин;  $S = \sum S_i$  – общая площадь тела.

**Пример 6.2.** Найдём центр тяжести пластины, согнутой под прямым углом. Размеры – на чертеже (рис. 6.5). Координаты центров тяжести:

$$x_1 = 20 \text{ см}, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 2,5 \text{ см},$$

$$x_2 = 7,5 \text{ см}, \quad y_2 = 2,5 \text{ см}, \quad z_2 = 0.$$

$$\text{Площади: } S_1 = 5 \cdot 10 = 50 \text{ см}^2, \quad S_2 = 5 \cdot 15 = 75 \text{ см}^2.$$

Поэтому:

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{S} = \frac{50 \cdot 20 + 75 \cdot 7,5}{50 + 75} = 12,5 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\sum S_i y_i}{S} = \frac{50 \cdot 0 + 75 \cdot 2,5}{125} = 1,5 \text{ см};$$

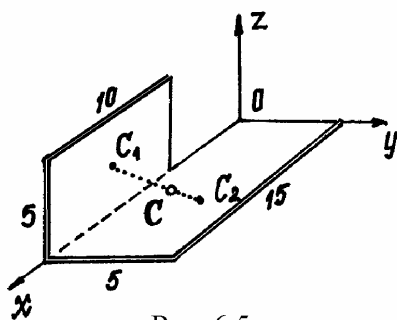


Рис. 6.5.



$$z_c = \frac{\sum S_i z_i}{S} = \frac{50 \cdot 2,5}{125} = 1,0 \text{ см.}$$

**Пример 6.3.** У квадратного листа  $20 \times 20$  см вырезано квадратное отверстие  $5 \times 5$  см (рис. 6.6). Найдём центр тяжести листа.

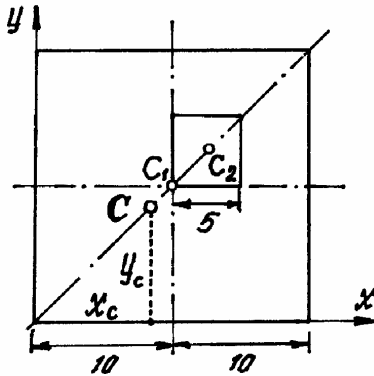


Рис. 6.6.

В этой задаче удобнее разделить тело на две части: большой квадрат и квадратное отверстие. Только площадь отверстия надо считать отрицательной. Тогда координаты центра тяжести листа с отверстием:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum S_i x_i}{S} = \frac{S_1 \cdot x_1 - S_2 \cdot x_2}{S_1 - S_2} = \\ &= \frac{20 \cdot 20 \cdot 10 - 5 \cdot 5 \cdot 12,5}{400 - 25} = 9,83 \text{ см} \end{aligned}$$

координата  $y_c = x_c = 9,83$  см, так как тело имеет ось симметрии (диагональ).

*Четвёртое замечание.* Если тело состоит из стержней, прямых или криволинейных, однородных и постоянного сечения, то вес их  $P_i = l_i \cdot \rho$ , где  $l_i$  – длина,  $\rho$  – вес единицы длины (погонного метра), а координаты центра тяжести будут определяться с помощью длин отдельных участков:

$$x_c = \frac{\sum l_i x_i}{L}; \quad y_c = \frac{\sum l_i y_i}{L}; \quad z_c = \frac{\sum l_i z_i}{L},$$

где  $x_i; y_i; z_i$  – координаты центра тяжести  $i$ -того участка;  $L = \sum l_i$ .

**Пример 6.4.** Проволочная скобка (рис. 6.7) состоит из трёх участков одинаковой длины  $l$ .

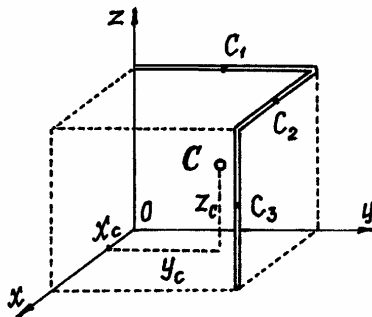


Рис. 6.7.

Координаты центров тяжести участков:  $x_1 = 0, y_1 = 0,5l, z_1 = l$ ;  $x_2 = 0,5l, y_2 = l, z_2 = l$ ;  $x_3 = l, y_3 = l, z_3 = 0,5l$ . Поэтому координаты центра тяжести всей скобки:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum l_i x_i}{L} = \frac{l \cdot 0 + l \cdot 0,5l + l \cdot l}{3l} = 0,5l, \\ y_c &= \frac{\sum l_i y_i}{L} = \frac{l \cdot 0,5l + l \cdot l + l \cdot l}{3l} = 0,83l, \\ z_c &= \frac{\sum l_i z_i}{L} = \frac{l \cdot l + l \cdot l + l \cdot 0,5l}{3l} = 0,83l. \end{aligned}$$

## VII. Трение

Трением называется сопротивление движению тела. Оно бывает нескольких видов: трения скольжения, качения, верчения, вязкое трение. Рассмотрим первые два.

### §1. Трение скольжения

Известно, что поверхности, с которыми соприкасаются тела, не являются абсолютно гладкими. Чтобы сдвинуть тело приходится приложить к нему определённую силу. Это сопротивление, препятствующее скольжению тела, называется *трением скольжения*. А сила, возникающая при этом – силой трения скольжения  $-\vec{F}_{\text{тр}}$ .

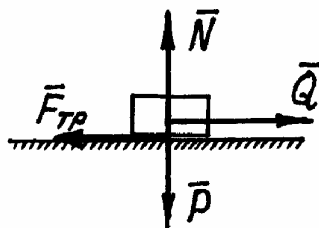


Рис. 7.1.

Основные закономерности, позволяющие оценить это сопротивление, установлены опытным путём.

Если к телу, лежащему на горизонтальной плоскости, приложить силу  $\vec{Q}$  (рис. 7.1), можно обнаружить, что при достаточно малой силе тело ещё остаётся неподвижным. Сила  $\vec{Q}$  будет уравниваться силой трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , т.е.  $F_{\text{тр}} = Q$ . Но в некоторый момент, когда сила  $Q$  достигнет определённого значения  $Q^*$ , начнётся скольжение тела.

Дальнейшее увеличение силы  $Q$  не изменит величину силы трения.

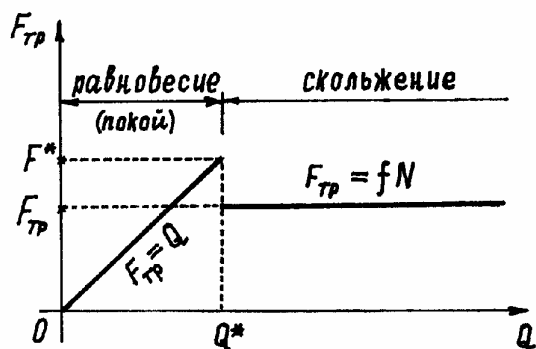


Рис. 7.2.

График зависимости силы трения  $F_{\text{тр}}$  от  $Q$  дан на рис. 7.2. Замечено, что до начала скольжения сила трения (сила трения покоя) достигнет некоторого значения  $F^*$ , большего чем при последующем скольжении.

Это хорошо знают профессионалы-шоферы, которые не допускают пробуксовки колёс при торможении или при трогании с места.

Установлено, что при скольжении сила трения пропорциональна величине нормальной реакции  $N$ :

$$F_{\text{тр}} = f \cdot N. \quad (7.1.)$$

Коэффициент пропорциональности  $f$  называется *коэффициентом трения скольжения*. Этот коэффициент определяется опытным путём. Величина его оказывается  $0 < f \leq 1$ . Считается, что он зависит только от материала, из которого изготовлены трущиеся поверхности и от физического состояния их (чистоты обработки, смазки и т.п.). При необходимости провести точные расчёты, стараются учесть известные зависимости коэффициента трения  $f$  от скорости, от температуры и пр. Методику таких расчётов можно найти в специальной литературе.

Естественно, трение скольжения увеличивает область устойчивости равновесного состояния конструкции. Хотя решение задач несколько усложняется появлением дополнительной неизвестной реакции поверхности –  $\vec{F}_{\text{тр}}$ .

Обычно исследуют равновесное состояние системы на границе между покоем и скольжением, полагая силу трения  $F_{\text{тр}} = f \cdot N$ , и решают задачу обычным, известным методом – составлением уравнений равновесия.

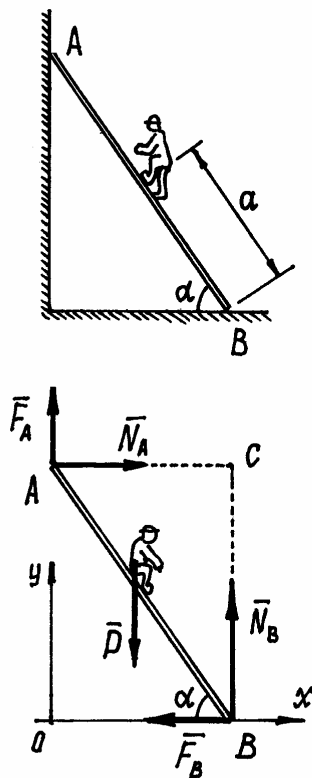


Рис. 7.3.

Пример 7.1. На какое максимальное расстояние  $a$  может подняться человек по лестнице, приставленной к стене (рис. 7.3)? Если вес человека –  $P$ , коэффициент трения скольжения между лестницей и стеной –  $f_1$ , между лестницей и полом –  $f_2$ .

Рассматриваем равновесие лестницы с человеком. Показываем силу  $\vec{P}$ , нормальные реакции  $\vec{N}_A$  и  $\vec{N}_B$  и добавляем силы трения:  $F_A = f_1 \cdot N_A$  и  $F_B = f_2 \cdot N_B$ . Полагаем, что человек находится на расстоянии  $a = a_{\text{max}}$ , при большем значении которого начнётся движение лестницы. Составляем уравнения равновесия.

$$\sum X_i = 0; N_A - F_B = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; F_A - P + N_B = 0;$$

$$\sum Z_i = 0; -F_A l \cos \alpha + P a \cos \alpha - F_B l \sin \alpha = 0.$$

Подставив значения сил трения и решив систему уравнений, получим

$$a = l \frac{f_2}{1 + f_1 \cdot f_2} (f_1 + \operatorname{tg} \alpha).$$

Теперь можно определить и угол под которым надо поставить лестницу, чтоб добраться до стены. Полагая  $a=l$ , получим, после преобразований,  $\operatorname{ctg}\alpha = f_2$  и  $\alpha = \operatorname{arctg} f_2$ .

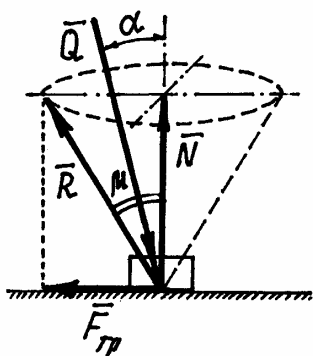


Рис. 7.4.

При исследовании равновесия тел с учётом трения скольжения иногда бывает полезным воспользоваться понятием угла трения и конуса трения.

Углом трения называется угол  $\mu$  между нормальной реакцией  $\vec{N}$  и полной реакцией плоскости  $\vec{R} = \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N}$  (рис. 7.4). Если направление вектора силы трения на плоскости меняется, то вектор  $\vec{R}$  будет направлен по

соответствующей образующей конуса, который называется *конусом трения*.

$$\text{Очевидно } \operatorname{tg}\mu = \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{f \cdot N}{N} = f.$$

Заметим, что если равнодействующая  $\vec{Q}$  всех активных сил (всех кроме реакций) направлена под углом  $\alpha$  (рис. 7.4), то нормальная реакция  $N = Q \cos \alpha$ , а сила трения  $F_{\text{тр}} = fN = fQ \cos \alpha$ . Для того, чтобы началось скольжение должно выполняться условие  $Q \sin \alpha > fQ \cos \alpha$ , или  $\operatorname{tg}\alpha > f$ . И так как  $f = \operatorname{tg}\mu$ , то  $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\mu$ . Значит угол  $\alpha$  должен быть больше угла  $\mu$ . Следовательно, если сила  $\vec{Q}$  действует внутри угла или конуса трения ( $\alpha < \mu$ ), то как бы не была велика эта сила, скольжение тела не произойдёт. Такое условие называется условием заклинивания, самоторможения.

Мы рассмотрели скольжение твёрдых тел по поверхности. Но нередко встречается скольжение гибких тел по неплоской поверхности. Например, нежелательное проскальзывание в ременной передаче ремня по шкиву, или троса, каната, намотанного на неподвижный цилиндр.

Пусть имеется нить, перекинутая через неподвижную цилиндрическую поверхность (рис. 7.5). За счёт сил трения натяжение левого и правого концов этой нити будут различными.

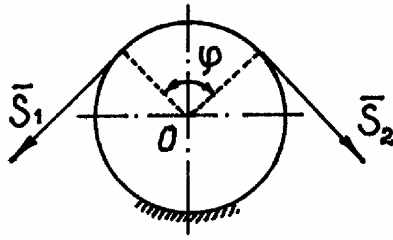


Рис. 7.5.

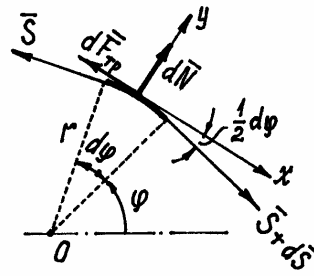


Рис. 7.6.

Предположим, что нормальная реакция и сила трения распределяются равномерно по дуге контакта нити на цилиндре. Рассмотрим равновесие участка нити длиной  $dl = r \cdot d\varphi$ . (рис. 7.6). На левом конце этого участка натяжение  $\vec{S}$ , на правом  $\vec{S} + d\vec{S}$ . Составляем уравнения равновесия, проектируя силы на оси:

$$\sum X_i = 0; -S \cos\left(\frac{1}{2} d\varphi\right) - dF_{\text{тр}} + (S + dS) \cos\left(\frac{1}{2} d\varphi\right) = 0,$$

$$\sum Y_i = 0; -S \sin\left(\frac{1}{2} d\varphi\right) + dN - (S + dS) \sin\left(\frac{1}{2} d\varphi\right) = 0.$$

Так как угол  $d\varphi$  - малая величина, то полагаем  $\sin\left(\frac{1}{2} d\varphi\right) = \frac{1}{2} d\varphi$ ,  $\cos\left(\frac{1}{2} d\varphi\right) = 1$ . С учётом этого из уравнений находим  $dF_{\text{тр}} = dS$ ,  $dN = S d\varphi$  и, так как  $dF_{\text{тр}} = f dN$ , имеем  $dS = f \cdot S d\varphi$  или  $\frac{dS}{S} = f \cdot d\varphi$ . Интегрируя, получим  $\ln S \Big|_{S_2}^{S_1} = f\varphi \Big|_0^\varphi$ . Или

$$\frac{S_2}{S_1} = e^{-f\varphi}. \quad (7.2.)$$

Этот результат называется формулой Эйлера.

Например, если нить перекинута через неподвижный шкив и  $\varphi = \pi$ , а коэффициент трения  $f = 0,2$ , то отношение натяжений  $\frac{S_2}{S_1} = e^{-0,2\pi} = 0,533$ . А, обернув цилиндр один раз ( $\varphi = 2\pi$ ),  $\frac{S_2}{S_1} = e^{-0,2 \cdot 2\pi} = 0,285$ , то есть можно удержать груз на другом конце нити силой почти в три раза меньшей веса тела.

## §2. Трение качения

Сопrotивление движению тела по поверхности появляется не только при скольжении, но и при качении, например, колеса (рис. 7.7). Конечно, сила трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$  не может препятствовать движению, качению колеса (момент сил относительно точки касания не равен нулю даже при совсем малой силе  $\vec{Q}$ ). Сила трения, образуя с силой  $\vec{Q}$  пару, будет вращать тело,

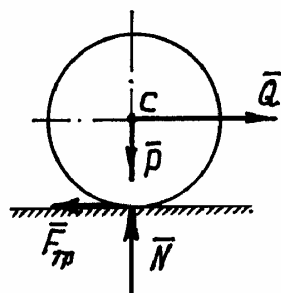


Рис. 7.7.

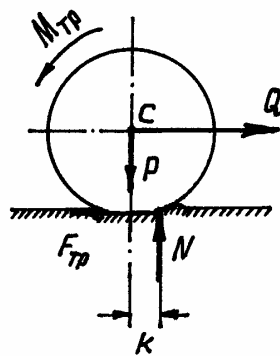


Рис. 7.8.

заставит его катиться по поверхности.

Сопrotивление качению можно объяснить тем, что поверхность и колесо – это не абсолютно твёрдые тела. Они деформируются и поэтому реакция поверхности окажется распределённой силой, равнодействующая которой  $\vec{N}$  окажется приложенной не под центром колеса, а смещённой

вперёд на расстояние  $k$  (рис. 7.8). Силы  $\vec{N}$  и  $\vec{P}$  будут теперь образовывать пару, которая и препятствует качению тела. Момент этой пары  $M_{\text{тр}} = k \cdot N$  называется *моментом трения качения*. Он оказывается пропорциональным нормальной реакции. Коэффициент пропорциональности  $k$  – называется коэффициентом трения качения. Размерность его – размерность длины (см). Считается, что он зависит только от радиуса колеса и материалов колеса и поверхности.

Следует ещё раз, специально заметить, что сопротивление качению характеризуется не силой, а парой – моментом этой пары (моментом трения качения) (рис. 7.8).

Если колесо катится без скольжения, то сила трения  $F_{\text{тр}} < fN$ . А так как при равновесии (рис. 7.8)  $\sum M_{Ci} = 0$ ;  $-F_{\text{тр}} \cdot r + N \cdot k = 0$ , то

$$F_{\text{тр}} = N \frac{k}{r}.$$

Поэтому условием качения без скольжения является неравенство  $N \frac{k}{r} < fN$  или  $f < \frac{k}{r}$ , где  $r$  – радиус колеса.

# КИНЕМАТИКА

## VIII. Кинематика точки

### §1. Способы задания движения точки

Прежде чем заняться исследованием движения точки, определением характеристик этого движения, надо научиться определять положение точки в пространстве в нужный момент времени.

Для этого существует несколько способов задания движения.

#### 1) Естественный способ.

Чтобы определить движение точки естественным способом должно быть заранее задано (рис. 8.1): траектория движения точки ( линия, по которой точка движется); начало отсчёта (точка  $O$ , от которой по траектории отсчитывается расстояние  $s$  до движущейся точки  $M$ ); направление, в котором откладываются положительные значения характеристик движения (указывается стрелкой, либо знаками  $+$  и  $-$ ); закон движения  $s = s(t)$ .

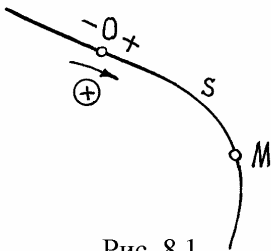


Рис. 8.1.

Пример 8.1. Точка движется по прямой линии, по закону  $s = 2t + 3$  (см) (рис. 8.2).

В начале движения, при  $t = 0$   $s = OM_0 = s_0 = 3$  см. Положение точки  $M_0$  называется *начальным положением*.

При  $t = 1$ с,  $s = OM_1 = 5$  см.

Конечно, за 1с точка прошла расстояние  $M_0M_1 = 2$  см. Так что  $s$  – это не путь пройденный точкой, а расстояние от начала отсчёта до точки.

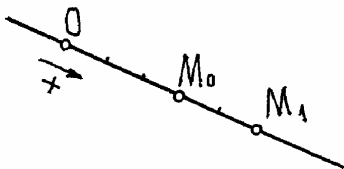


Рис. 8.2.

## 2) Координатный способ.

Этим способом положение точки в какой либо системе координат определяется её координатами  $x, y, z$  (рис. 8.3). При движении точки эти координаты изменяются. Поэтому, чтобы определить положение точки в нужный момент времени, должны быть заданы координаты как функции времени  $t$ :

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (8.1)$$

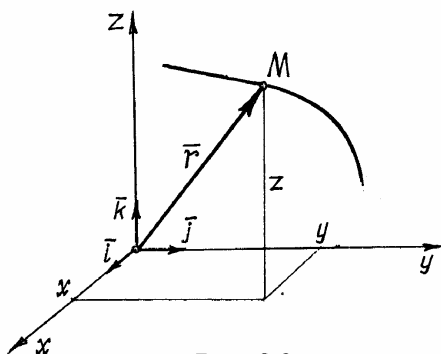


Рис. 8.3.

Эти функции называются *уравнениями движения точки*.

Уравнения движения позволяют определить не только положение точки в любой момент времени, но и все характеристики движения, в том числе и траекторию движения.

Чтобы получить уравнение траектории надо из уравнений движения исключить параметр  $t$ .

Пример 1.2. Движение точки задано уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 \sin 2t, \\ y &= 3 \cos 2t. \end{aligned} \right\}$$

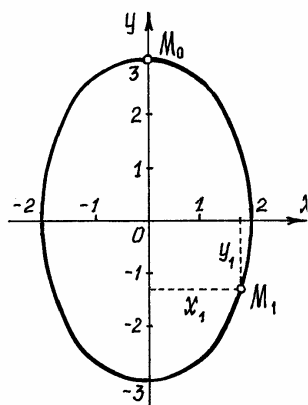


Рис. 8.4.

Чтобы исключить время, параметр  $t$ , найдём из первого уравнения  $\sin 2t = \frac{x}{2}$ , из второго  $\cos 2t = \frac{y}{3}$ . Затем возведём в квадрат и сложим. Так как  $\sin^2 2t + \cos^2 2t = 1$ , получим  $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ . Это уравнение эллипса с полуосями 2 см и 3 см (рис. 8.4).

Начальное положение точки  $M_0$  (при  $t = 0$ ) определяется координатами  $x_0 = 0, y_0 = 3$  см. Че-

рез 1с точка будет в положении  $M_1$  с координатами

$$x_1 = 2 \sin 2 = 2 \cdot 0,91 = 1,82 \text{ см}, \quad y_1 = 3 \cos 2 = 3 \cdot (-0,42) = -1,25 \text{ см}.$$

### Примечание.

Движение точки может быть задано с помощью и других координат. Например, цилиндрических или сферических. Среди них будут не только линейные размеры, но и углы. При необходимости, с заданием движения цилиндрическими и сферическими координатами можно познакомиться по учебникам.



### 3) Векторный способ.

Положение точки можно определить заданием вектора  $\vec{r}$ , проведённого из неподвижной точки  $O$ , предполагая, что точка  $M$  находится на конце этого вектора (рис. 8.3). Этот вектор называется *радиусом-вектором точки  $M$* . Конечно, чтобы определить положение точки в любой момент времени, радиус-вектор должен быть задан как функция времени  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ .

Нетрудно установить зависимость между векторным и координатным способами задания движения.

Разложим вектор  $\vec{r}$  на составляющие по осям координат:

$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$ , где  $r_x, r_y, r_z$  - проекции вектора на оси;  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  - единичные векторы направленные по осям, орты осей. Так как начало  $\vec{r}$  вектора находится в начале координат, то проекции вектора будут равны координатам точки  $M$ . Поэтому

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}. \quad (8.2)$$

Траектория движения точки  $M$  - это линия, которую описывает конец изменяющегося радиуса-вектора. Эта линия называется *годографом вектора  $\vec{r}$* .

## §2. Скорость точки

Известно, что при движении точки по прямой линии с постоянной скоростью, равномерно, скорость её определяется делением пройденного расстояния  $s$  на время:  $v = \frac{s}{t}$ . При неравномерном движении эта формула не годится. И метод определения скорости зависит от способа задания движения.

### 1) Определение скорости точки при векторном способе задания движения.

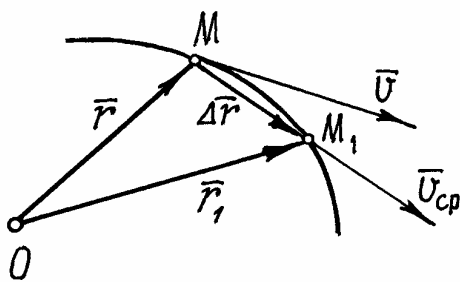


Рис. 8.5.

Пусть точка  $M$  за малое время  $\Delta t$  перешла из положения  $M$  в  $M_1$ . При этом радиус-вектор её изменится на  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$  (рис. 8.5). Так как время  $\Delta t$  мало, можно предположить, что часть траектории  $MM_1$  почти прямая, равна хорде  $\Delta r$ , и движение близко к равномерному. Тогда приближённо скорость

точки можно найти так  $\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$  (так как  $\Delta \vec{r}$  - вектор, то и  $\vec{v}_{cp}$  - вектор).

Конечно, чем меньше время  $\Delta t$  тем ближе будет значение скорости к истинному. Поэтому

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Итак. Скорость точки есть производная от радиуса-вектора точки по времени:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (8.3)$$

Направление вектора скорости  $\vec{v}$  находим как предельное направление  $\vec{v}_{\text{cp}}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ , т.е. при приближении точки  $M_1$  к точке  $M$ . Но такой процесс определяет касательную в точке  $M$ . Следовательно, вектор скорости  $\vec{v}$  направлен по касательной к траектории и в сторону движения. И наоборот, вектор скорости определяет направление движения точки в данный момент времени.

2) *Определение скорости точки при координатном способе задания движения.*

Как уже установлено,  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ . Учитывая (8.2), получим

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \quad (8.4)$$

Вектор скорости как всякий вектор можно разложить на составляющие по осям:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}. \quad (8.5)$$

Сравнивая (8.4) и (8.5), устанавливаем, что проекции вектора скорости на оси есть первые производные от соответствующих координат по времени:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \quad (8.6)$$

И модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (8.7)$$

Направление вектора скорости можно определить графическим способом, откладывая в масштабе соответствующие составляющие вектора,

или с помощью направляющих косинусов:  $\cos\alpha = \frac{v_x}{v}$ ;  $\cos\beta = \frac{v_y}{v}$ ;

$\cos\gamma = \frac{v_z}{v}$ , где  $\alpha, \beta, \gamma$  – углы между вектором  $\vec{v}$  и осями  $x, y, z$ , соответственно.

3) *Определение скорости точки при естественном способе задания движения.*

Величину скорости (см. п.1) можно определить как предел ( $\Delta r$  – длина хорды  $MM_1$ ):

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где  $\Delta s$  – длина дуги  $MM_1$ . Первый предел равен единице, второй предел – производная  $\frac{ds}{dt}$ .

Следовательно, скорость точки есть первая производная по времени от закона движения:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}. \quad (8.8)$$

Направлен вектор скорости, как было установлено ранее, по касательной к траектории. Если величина скорости в данный момент будет больше нуля, то вектор скорости направляется в положительном направлении (см. §1, п.1).

### §3. Ускорение точки

Ускорение точки – это характеристика движения точки, которая определяет изменение вектора скорости по величине и по направлению.

Если точка движется равнопеременно и по прямой линии, то величина ускорения определяется делением изменения скорости на время  $W = \frac{\Delta v}{t}$ . В общем же случае определение ускорения зависит от способа задания движения точки.

1) *Определение ускорения точки при векторном способе задания движения.*

Пусть за время  $\Delta t$  точка перешла из положения  $M$  в  $M_1$  и за это время вектор скорости изменился на  $\Delta \vec{v}$  (рис.8.6).

Полагая, из-за малости времени  $\Delta t$ , дугу  $MM_1$  почти прямой, а движение – близким к равнопеременному, найдём приближенное, среднее

ускорение  $\vec{W}_{\text{cp}} = \frac{\Delta \vec{v}}{dt}$  (так как  $\Delta \vec{v}$  – вектор, то и  $\vec{W}_{\text{cp}}$  – вектор, направленный параллельно  $\Delta \vec{v}$ ).

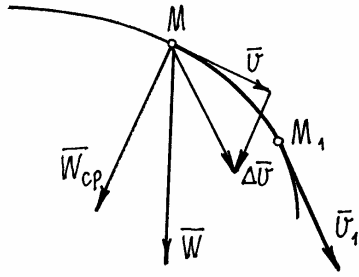


Рис 8.6.

Конечно, чем меньше  $\Delta t$  тем точнее будет определено ускорение. Поэтому точное ускорение

$$\vec{W} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{W}_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Следовательно, ускорение точки есть производная от вектора скорости или вторая производная от радиуса-вектора точки по времени:

$$\vec{W} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (8.9)$$

Направление вектора ускорения  $\vec{W}$  можно определить как предельное положение вектора  $\vec{W}_{cp}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Нетрудно обнаружить, что ускорение не направлено по касательной, а направлено вероятно в сторону вогнутости траектории (рис. 8.6).

2) *Определение ускорения при координатном способе задания движения.*

Подставив в (8.9) выражение радиуса-вектора  $\vec{r}$  через координаты (8.2), получим

$$\vec{W} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}) = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k}.$$

Отсюда следует, что проекции вектора ускорения на оси равны вторым производным по времени от соответствующих координат точки:

$$W_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}; \quad W_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}; \quad W_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}. \quad (8.10)$$

Поэтому модуль вектора ускорения

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

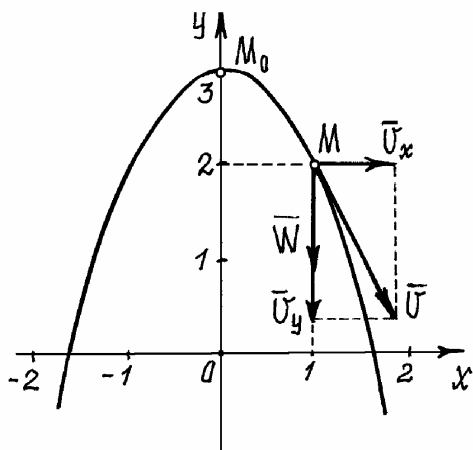
Направление вектора можно найти или графическим способом, откладывая в масштабе составляющие параллельно осям с учётом знака, или

с помощью направляющих косинусов:  $\cos \alpha = \frac{W_x}{W}$ ;  $\cos \beta = \frac{W_y}{W}$ ;  $\cos \gamma = \frac{W_z}{W}$

( $\alpha, \beta, \gamma$  – углы между вектором  $\vec{W}$  и осями  $x, y, z$ , соответственно).

**Пример 8.3.** Движение точки задано уравнениями  $x = 2t$ ,  $y = 3 - 4t^2$ .

Из первого уравнения  $t = \frac{x}{2}$ . Подставив во второе, получим уравнение



траектории:  $y = 3 - x^2$ .

Это уравнение параболы (8.7). В начале движения, при  $t = 0$ , точка находилась на самом верху, в положении  $M_0$  ( $x_0 = 0, y_0 = 3$  см).

А, например, при  $t = 0,5$  с она будет в положении  $M$  с координатами  $x_1 = 1$  см;  $y_1 = 2$  см.

Проекции скорости на оси  $v_x = \dot{x} = 2$  см  $\cdot$  с $^{-1}$ ,  $v_y = \dot{y} = -8t$  см  $\cdot$  с $^{-1}$ .

Рис 8.7.

При  $t = 0,5$  с,  $v_x = 2$  см  $\cdot$  с $^{-1}$ ,  $v_y = -4$  см  $\cdot$  с $^{-1}$ . И модуль скорости  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4,47$  см  $\cdot$  с $^{-1}$ . Составляющие скорости по осям и вектор её показаны в масштабе на рис. 8.7.

Проекции ускорения  $W_x = \ddot{x} = 0$ ,  $W_y = \ddot{y} = -8$  см  $\cdot$  с $^{-2}$ . Так как проекция вектора  $\vec{W}$  на ось  $x$  равна нулю, а на ось  $y$  – отрицательна, то вектор ускорения направлен вертикально вниз, и величина его постоянна, не зависит от времени.

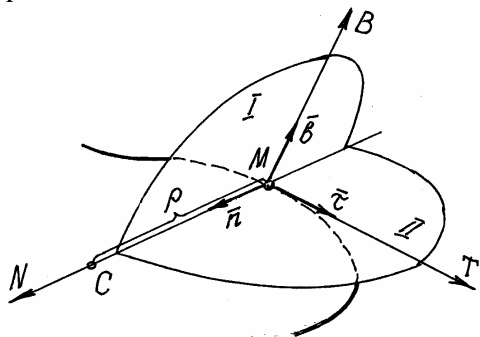


Рис. 8.8.

8.8). Оси  $N$  и  $B$  – в плоскости, перпендикулярной оси  $T$  (в нормальной плоскости I). Ось  $N$ , которая называется главной нормалью, направлена по линии пересечения нормальной плоскости I и соприкасающейся плоскости II в сторону вогнутости линии.

Плоскость II названа соприкасающейся потому, что она как бы приставлена сбоку к кривой, соприкасается с ней.

Ось  $B$ , перпендикулярная  $N$  и  $T$ , называется бинормалью (“вторая” нормаль).

3) *Определение ускорения точки при естественном способе задания движения.*

Прежде всего – несколько сведений из дифференциальной геометрии.

Покажем в точке  $M$  на пространственной линии три взаимно перпендикулярные оси. Ось  $T$  направим по касательной к линии (рис.

При движении точки  $M$  эти оси движутся вместе с нею. Называются эти оси *естественными осями*. Единичные векторы  $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$ , направленные по осям, являются ортами соответствующих осей.

Производная  $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k \cdot \vec{n}$  характеризует крутизну, кривизну линии в точке  $M$ ,  $k$  – кривизна линии. А величина обратная кривизне  $\rho = 1/k$  называется *радиусом кривизны* в точке  $M$ . Точка  $C$ , расположенная на главной нормали  $N$ , на расстоянии  $CM = \rho$ , называется *центром кривизны*.

Вектор скорости точки направлен по оси  $T$ . Поэтому его можно записать так:  $\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}$  ( $v$  – алгебраическая величина скорости  $\vec{v}$ ).

Ускорение точки

$$\vec{W} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{\tau}) = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \quad (8.11)$$

Следовательно, ускорение состоит из двух векторов. Первый вектор  $\vec{W}_1 = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}$ . Величина его равна  $\frac{dv}{dt}$ , а направлен он по оси  $T$ .

Чтобы определить величину и направление второй составляющей, надо найти производную

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = k \vec{n} v = \frac{v}{\rho} \vec{n}.$$

Поэтому второй вектор  $\vec{W}_2 = v \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$ .

Теперь становится понятно, что вектор  $\vec{W}_2$  по величине будет равен  $\frac{v^2}{\rho}$ , а направлен по главной нормали, по оси  $N$ , как единичный вектор  $\vec{n}$ .

Так как первая составляющая ускорения направлена по касательной к траектории, это ускорение называют касательным ускорением,  $\vec{W}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}$ ; вторую составляющую, соответственно её направлению – нормальным ускорением,  $\vec{W}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$ . Поэтому полное ускорение

$$\vec{W} = \vec{W}_\tau + \vec{W}_n. \quad (8.12)$$

Величина этих составляющих ускорения:

$$W_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad W_n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (8.13)$$

Обратим внимание на то, что вектор ускорения  $\vec{W}$  находится в соприкасающейся плоскости, проекция его на бинормаль  $B$  равна нулю,  $\vec{W}_b = 0$ .

Так как векторы  $\vec{W}_\tau$  и  $\vec{W}_n$  перпендикулярны друг другу, то

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2}. \quad (8.14)$$

Рассмотрим два частных случая.

Первый. Точка движется по прямой линии с переменной скоростью. Нормальное ускорение  $W_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0$ , так как радиус кривизны прямой линии равен бесконечности. А касательное  $W_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$ . Поэтому,  $\vec{W} = \vec{W}_\tau$ .

Второй случай. Точка движется по кривой линии, но с постоянной по величине скоростью. В этом случае  $W_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$ , а  $W_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0$ , так как радиус кривизны  $\rho$  конечная величина. Значит  $\vec{W} = \vec{W}_n$ .

Сравнение этих двух случаев, позволяет сделать вывод, что касательное ускорение характеризует изменение вектора скорости по величине, а нормальное ускорение – изменение вектора скорости по направлению.

**Пример 8.4** Точка движется по окружности радиуса  $R = 3$  см по закону  $s = 4t - t^2 - 2$  (см). При  $t = 0$   $s_0 = -2$  см. Значит, движение началось из  $M_0$  (рис. 8.9). При:  $t = 2$  с  $s_2 = 2$  см;  $t = 1$  с  $s_1 = 1$  см;  $t = 4$  с  $s_4 = 2$  см;  $t = 3$  с  $s_3 = 1$  см.

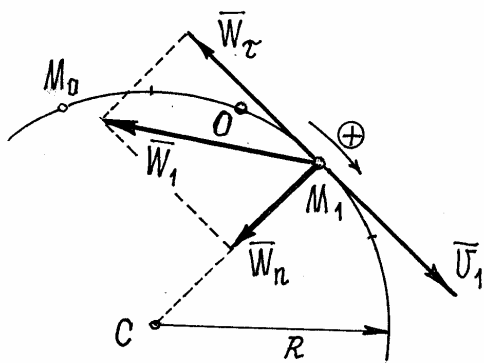


Рис. 8.9.

Судя по этим результатам, точка сначала двигалась в положительном направлении, а затем пошла обратно. В крайнем положении скорость точки станет равной нулю.

Так как  $v = \frac{ds}{dt} = 4 - 2t$ , то положив  $v = 0$ , найдём время  $t_*$  когда точка окажется в этом крайнем положении:  $t_* = 2$  с. Значит  $s_2$  определяет это положение точки.

Найдём скорость и ускорение точки при  $t=1\text{с}$ . Скорость  $v_1 = 4 - 2 \cdot 1 = 2 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ . Направлен вектор скорости в положительном направлении ( $v_1 > 0$ ).

Касательное ускорение  $W_\tau = \frac{dv}{dt} = -2 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$ . Вектор  $\vec{W}_\tau$  направлен в отрицательном направлении. Нормальное ускорение  $W_n = \frac{v_1^2}{\rho} = \frac{2^2}{3} = 1,33 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$  (радиус кривизны дуги окружности равен её радиусу  $\rho = R$ ). Полное ускорение  $W_1 = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2} = 2,4 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$ .

Так как вектор скорости  $\vec{v}_1$  и вектор касательного ускорения  $\vec{W}_\tau$  направлены в противоположные стороны, точка в этот момент движется замедленно.

## IX. Основные виды движения твёрдого тела

### §1. Поступательное движение тела

Поступательным движением тела называется такое движение, при котором любая прямая, проведённая в теле, всё время перемещается параллельно своему первоначальному положению (рис. 9.1).

Конечно, траектории точек при поступательном движении тела могут быть и кривыми линиями.

Проведём в теле радиус-вектор  $\vec{r}$ , определяющий положение какой-нибудь точки  $B$  относительно  $A$  (рис. 9.1). Так как этот вектор при поступательном движении твёрдого тела всё время перемещается параллельно и длина его неизменна ( $\vec{r} = \text{const}$ ), то траектория точки  $B$  получается параллельным переносом траектории точки  $A$ , определяемом вектором  $\vec{r}$ . Следовательно траектории этих точек  $A$  и  $B$ , а, значит, и всех точек тела, будут тождественны, одинаковы.

Если положение точек  $A$  и  $B$  определять радиусами-векторами  $\vec{r}_A$  и  $\vec{r}_B$  такими, что  $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}$  (рис.9.1),

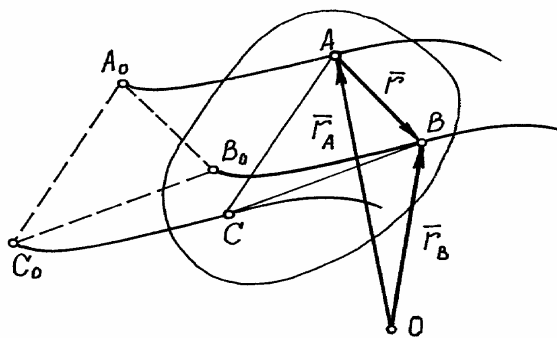


Рис. 9.1.



то, взяв производную по времени, получим (при  $\vec{r} = \text{const}$ ):  $\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt}$  или  $\vec{v}_B = \vec{v}_A$ . Дифференцируя ещё раз, получим  $\vec{W}_B = \vec{W}_A$ .

Из доказательства следует, что все точки тела движутся одинаково: по тождественным траекториям и в каждый момент времени имеют равные скорости и равные ускорения.

Поэтому для исследования поступательного движения тела достаточно определить лишь движение какой-нибудь одной его точки. Что мы уже умеем делать (гл. I, Кинематика точки).

## §2. Вращение тела вокруг неподвижной оси

Вращением тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором можно указать у тела хотя бы две точки, всё время остающиеся неподвижными.

Прямая, проведённая через эти точки является осью вращения, неподвижной осью. Этой оси задаётся направление стрелкой (рис. 9.2).

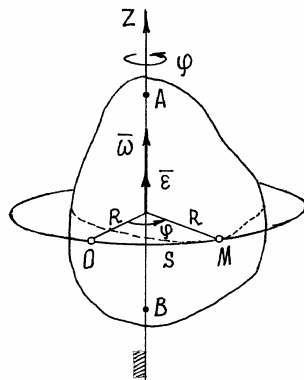


Рис. 9.2.

Положение тела вполне определяется углом поворота  $\varphi$  вокруг оси относительно какого-либо заранее выбранного положения.

Этот угол измеряется в радианах. Чтобы определить положение тела в любой момент времени, должен быть задан угол поворота как функция времени  $\varphi = \varphi(t)$ .

Эта функция называется *уравнением вращения тела*.

Если в данный момент времени угол  $\varphi$  положительный ( $\varphi > 0$ ), то он откладывается против часовой стрелки. При этом надо смотреть на тело со стороны стрелки оси.

Конечно, траектории всех точек тела – окружности, так как расстояния от точек до оси всё время остаются неизменными. Эти окружности расположены в плоскостях перпендикулярных оси.

Поскольку траектории точек известны, то можно задать движение точек естественным способом. Закон движения точки по траектории, по окружности, получится таким

$$s = R\varphi = s(t). \quad (9.1)$$

Пусть за время  $\Delta t$  угол изменился на  $\Delta\varphi$ . Тогда отношение их будет характеризовать скорость вращения. Эта величина  $\omega_{\text{cp}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$  называется

средней угловой скоростью тела. Конечно, чем меньше  $\Delta t$ , тем точнее будет определена эта скорость. Поэтому точное значение угловой скорости

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Следовательно, угловая скорость есть первая производная по времени от уравнения вращения, от угла поворота:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (9.2)$$

Размерность угловой скорости – радианы в секунду. Так как радиан безразмерная величина, то обозначают просто –  $\text{с}^{-1}$ . В технике скорость вращения определяют числом оборотов в минуту  $n$ . Зависимость между этими размерностями:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}.$$

Если в данный момент времени окажется  $\omega > 0$ , то это будет означать, что вращение происходит против часовой стрелки (если смотреть на тело со стороны стрелки оси). Угловая скорость указывает направление вращения тела.

Угловую скорость можно изобразить вектором  $\vec{\omega}$ , отложенным по оси вращения из какой-нибудь точки в такую сторону, что, если смотреть с его конца, увидим вращение тела против часовой стрелки (рис.9.2).

Пусть за время  $\Delta t$  угловая скорость изменилась на величину  $\Delta \omega$ . Тогда отношение  $\frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \varepsilon_{\text{ср}}$  будет определять среднее, приближенное ускорение вращения, угловое ускорение. Точным значением его будет предел среднего при  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}.$$

Угловое ускорение есть первая производная от угловой скорости или вторая производная от угла поворота по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \quad (9.3)$$

Угловое ускорение также изображают вектором, отложенным по оси вращения. Направление вектора определяется знаком (+) или (–) величины ускорения  $\varepsilon$  в данный момент времени.

Комбинация знаков угловой скорости  $\omega$  и углового ускорения  $\varepsilon$  характеризует вид движения тела. Если их знаки одинаковы, тело вращается ускоренно. Если разные – замедленно.

Так при  $\omega > 0$  и  $\varepsilon > 0$  тело вращается против часовой стрелки ускоренно. При  $\omega < 0$  и  $\varepsilon < 0$  – по часовой стрелке ускоренно. При  $\omega < 0$  и

$\varepsilon > 0$  – по часовой стрелке замедленно. При  $\omega > 0$  и  $\varepsilon < 0$  – против часовой стрелки замедленно.

Поскольку движение точек вращающегося тела задано естественным способом, то нетрудно найти скорости этих точек. Например, скорость точки  $M$  (рис.9.3):

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega) = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega. \quad (9.4)$$

Направлен вектор скорости по касательной к траектории, к окружности, т.е. перпендикулярно её радиусу, в сторону вращения.

Используя правило определения векторного произведения двух векторов, можно доказать, что вектор скорости

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (9.5)$$

есть векторное произведение вектора угловой скорости  $\vec{\omega}$  на радиус – вектор точки. Которое, действительно, совпадает с вектором скорости и по направлению, и по модулю:  $v = \omega r \sin \alpha = \omega R$ .

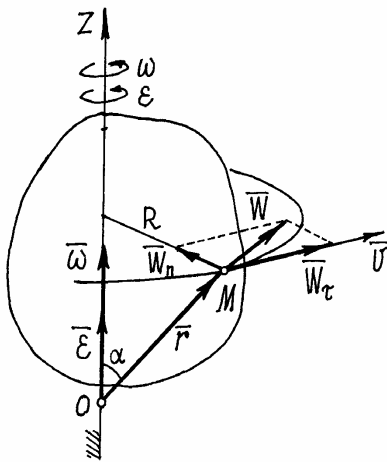


Рис. 9.3.

Ускорение точки тела, см.(8.12),  $\vec{W} = \vec{W}_n + \vec{W}_\tau$ . Где нормальное ускорение

$$W_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{R^2 \omega^2}{R} = R\omega^2, \quad (9.6)$$

а касательное ускорение

$$W_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega) = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon. \quad (9.7)$$

Направляются векторы этих ускорений, соответственно, по нормали, т.е. по радиусу окружности, к оси и по касательной к окружности в сторону направления углового ускорения  $\varepsilon$ .

**Пример 9.1.** Маятник  $OM$  качается в вертикальной плоскости так, что  $\varphi = 0,5 \sin 2t$ . Длина  $OM = l = 1$  м. (Рис. 9.4.) Маятник вращается вокруг горизонтальной оси  $O$ , перпендикулярной вертикальной плоскости. Угловая скорость  $\omega = \dot{\varphi} = \cos 2t \text{ с}^{-1}$ , угловое ускорение  $\varepsilon = \ddot{\varphi} = 2 \sin 2t \text{ с}^{-2}$ .

Например, при  $t = 1 \text{ с}$   $\varphi = 0,5 \sin 2 = 0,45 \text{ рад} \cong 26^\circ$ ;  $\omega = \cos 2 = -0,42 \text{ с}^{-1}$  (вращение по часовой стрелке);  $\varepsilon = -2 \sin 2 = -1,82 \text{ с}^{-2}$  (угловое ускорение направлено также по часовой стрелке). Вращение в этом положении ускоренное.

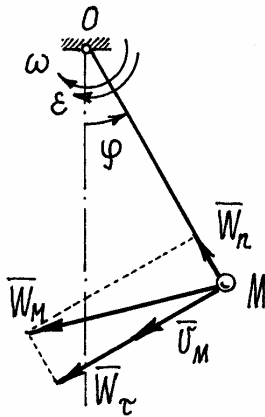


Рис. 9.4

Скорость точки  $M$   $v_M = l\omega = 1 \cdot 0,42 = 0,42 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$  (определяется модуль скорости). Направлен вектор скорости соответственно направлению угловой скорости – в сторону вращения.

Нормальное ускорение  $W_n = l\omega^2 = 1 \cdot 0,42^2 = 0,176 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ , касательное ускорение

$W_\tau = l\varepsilon = 1 \cdot 1,82 = 1,82 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ . (Определён

опять модуль вектора ускорения. Направлен вектор  $\vec{W}_\tau$  вниз, как указывает угловое ускорение).

Величина полного ускорения точки  $W_M = \sqrt{W_n^2 + W_\tau^2} = 1,828 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ .

### §3. Вращение тела вокруг неподвижной точки

Название такого вида движения довольно точно его определяет. Часто это движение называют сферическим движением потому, что все точки тела движутся по сферическим поверхностям.

Наглядным примером такого движения является волчок, закономерности движения которого лежат в основе гироскопических приборов.

1) Углы Эйлера. Уравнения вращения тела с одной неподвижной точкой.

Положение тела определяется тремя углами. Используются различные системы углов. Например, корабельные углы, самолётные углы и др. Но самыми распространёнными являются углы Эйлера:  $\psi$  (пси),  $\theta$  (те-та),  $\varphi$  (фи).

Положение тела определяется следующим образом. Назначаются две системы декартовых осей. Первая система – неподвижные оси  $x, y, z$ . Начало которых берётся в неподвижной точке  $O$  тела (рис. 9.5). Вторая система, оси  $x_1, y_1, z_1$ , связывается с телом. Поэтому положение тела будет

определяются как положение этих осей относительно неподвижных.

Когда углы Эйлера равны нулю, подвижные оси совпадают с неподвижными. Чтобы определить положение тела, соответствующее заданным

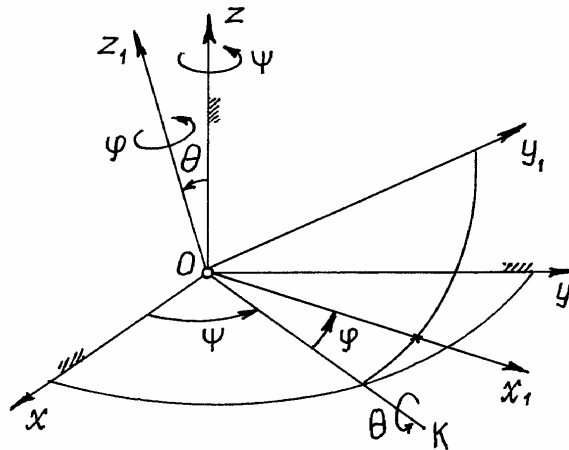


Рис. 9.5.

углам Эйлера, производим следующие действия.

Сначала подвижные оси, а значит и тело, поворачиваем на угол  $\psi$  вокруг оси  $z$ . При этом оси  $x_1$  и  $y_1$  отойдут от осей  $x$  и  $y$  в горизонтальной плоскости и ось  $x_1$  займёт положение  $OK$  (рис.9.5).

Затем тело вращаем вокруг нового положения оси  $x_1$  (прямой  $OK$ ) на угол  $\theta$ . Ось  $z_1$  отойдёт от оси  $z$  на этот

угол  $\theta$ , а ось  $y_1$  приподнимется над горизонтальной плоскостью. Наконец, тело (и подвижные оси) вращаем вокруг нового положения оси  $z_1$  на угол  $\varphi$ . Ось  $x_1$  отойдёт от положения  $OK$  в наклонной плоскости, перпендикулярной оси  $z_1$ . Это положение тела и будет соответствовать углам Эйлера (на рисунке само тело не показано).

Линия пересечения неподвижной плоскости  $xOy$  и подвижной  $x_1Oy_1$ , прямая  $OK$ , называется *линией узлов*. Угол  $\psi$  называется *углом прецессии*, угол  $\theta$  – *углом нутации*, угол  $\varphi$  – *углом собственного вращения*. Эти на-

звания углов пришли из теории гироскопов.

При движении тела углы Эйлера изменяются по определённым законам

$$\psi = \psi(t); \quad \theta = \theta(t); \quad \varphi = \varphi(t), \quad (9.8)$$

которые называются уравнениями вращения.

На примере вращающегося волчка можно лучше разобраться в этих углах Эйлера (рис. 9.6). Ось волчка  $z_1$  описывает конус вокруг неподвижной оси  $z$ . Это вращение определяется углом  $\psi$  (говорят: волчок совершает прецессию). Отклонение оси волчка от вертикали – угол нутации  $\theta$ .

А вращение волчка вокруг своей оси  $z_1$ ,

определяемое углом  $\varphi$  – собственное вращение.

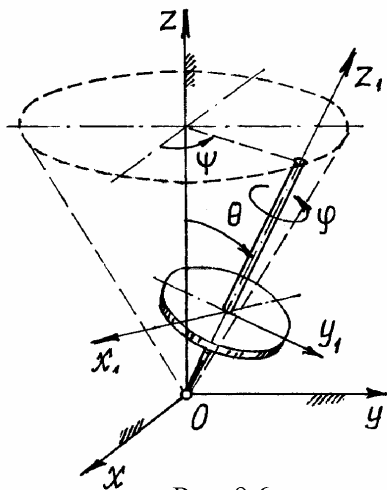


Рис. 9.6.

2) Теорема Даламбера – Эйлера. Мгновенная ось вращения.

Проведём в теле сферическую поверхность произвольного радиуса с центром в неподвижной точке  $O$  (рис. 9.7). Покажем у тела какие-нибудь две точки  $A$  и  $B$ , расположенные на этой сфере. Соединим их по сфере

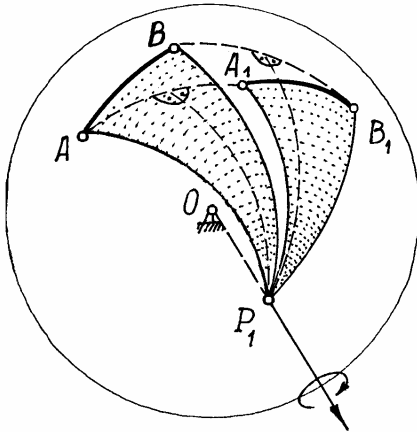


Рис. 9.7.

дугой наибольшего радиуса (кратчайшее расстояние между точками). Переместим тело в новое положение. Точки, а значит и дуга, займут положение  $A_1$  и  $B_1$ . Соединим точки  $A$  и  $A_1$ ,  $B$  и  $B_1$  дугами большого радиуса  $AA_1$  и  $BB_1$ . Посередине этих дуг проведём им перпендикулярные дуги и найдём их точку пересечения  $P_1$ . Соединим эту точку  $P_1$  с точками  $A, B, A_1, B_1$ . Получим два сферических треугольника  $\triangle ABP_1$  и  $\triangle A_1B_1P_1$ , расположенных на этой сфере. Эти два

треугольника равны, как треугольники с равными сторонами ( $AB = A_1B_1$ , а  $AP_1 = A_1P_1$  и  $BP_1 = B_1P_1$  – как дуги равноудалённые от перпендикуляров). Так как эти два треугольника расположены на одной сфере и имеют общую вершину  $P_1$ , то их можно совместить поворотом сферы, а значит и тела, вокруг прямой  $OP_1$ .

Поэтому можно сделать вывод, что *тело с одной неподвижной точкой можно переместить из одного положения в другое поворотом вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку  $O$* . Это утверждение – есть теорема Даламбера-Эйлера.

Конечно, такое перемещение не является истинным движением тела. На самом деле тело переходило из первого положения в другое каким-то другим, наверное более сложным путём. Но, если время  $\Delta t$  такого перехода мало, то это перемещение будет близко к действительному. А при  $\Delta t \rightarrow 0$  можно предположить, что для данного момента времени тело поворачивается вокруг некоторой оси  $P$ , проходящей через неподвижную точку  $O$ , вращаясь вокруг неё с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ . Конечно, для каждого другого момента времени эта ось расположена иначе. Поэтому ось  $P$  называют *мгновенной осью вращения*, а угловую скорость  $\vec{\omega}$  – *мгновенной угловой скоростью*, вектор которой направлен по оси.

### 3) Скорость точек тела.

По теореме Даламбера-Эйлера за малое время  $\Delta t$  движение тела можно представить как вращение вокруг неподвижной оси  $OP_1$  с некоторой угловой скоростью  $\bar{\omega}_{cp}$  (рис.9.8). Тогда скорость точки  $M$ , по (9.5),

$\vec{v}_{cp} = \bar{\omega}_{cp} \times \vec{r}$ . В пределе, при  $\Delta t \rightarrow 0$ , угловая скорость  $\bar{\omega}_{cp}$  будет прибли-

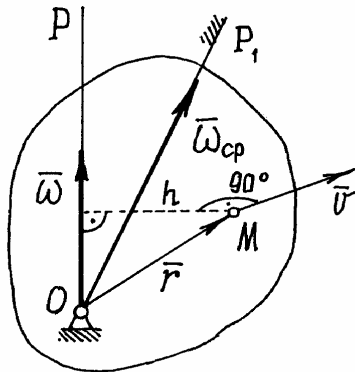


Рис. 9.8.

жаться к мгновенной угловой скорости  $\bar{\omega}$ , направленной по мгновенной оси вращения  $P$ , а скорость точки  $\vec{v}_{cp}$  - к истинному значению:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\bar{\omega}_{cp} \times \vec{r}) = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\omega}_{cp} \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{r} = \bar{\omega} \times \vec{r}. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Но таким же образом находится скорость точки при вращении тела вокруг оси, по которой направлен вектор  $\bar{\omega}$ , в нашем случае - по мгновенной оси

вращения  $P$ . Поэтому скорость точки можно определить как скорость её при вращении тела вокруг мгновенной оси  $P$ . Величина скорости  $v = h \cdot \omega$  (рис. 9.8).

Определение скоростей точек тела значительно упрощается, если известна мгновенная ось вращения  $P$ . Иногда её можно найти, если удастся обнаружить у тела хотя бы ещё одну точку, кроме  $O$ , скорость которой в данный момент равна нулю, и провести ось  $P$  из неподвижной точки  $O$  через эту точку. Так как мгновенная ось вращения - геометрическое место точек, скорости которых равны нулю в данный момент времени.

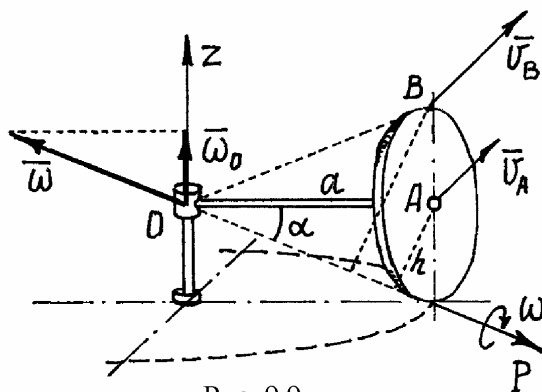


Рис. 9.9.

Пример 9.2. Водило  $OA = a$ , вращаясь вокруг вертикальной оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega_0$ , заставляет диск радиуса  $R$  кататься по горизонтальной плоскости (рис. 9.9).

Если представить диск как основание конуса с вершиной в неподвижной точке  $O$ , то движение диска можно назвать вращением вокруг этой неподвижной точки  $O$ .

Так как скорость точки касания диска с плоскостью равна нулю, то мгновенная ось вращения  $P$  проходит через эту точку. И вектор мгновенной угловой скорости  $\vec{\omega}$  будет направлен по этой оси.

Точка  $A$  вместе с водилом  $OA$  вращается вокруг оси  $z$ . Поэтому её скорость  $v_A = a\omega_0$  (рис. 9.9). Эта скорость определяет направление вращения диска вокруг оси  $P$  и направление вектора  $\vec{\omega}$ . Величина угловой скорости  $\omega = \frac{v_A}{h}$  ( $h$  – расстояние от  $A$  до оси  $P$ ). Теперь можно найти скорость любой точки диска, рассматривая его движение как вращение вокруг оси  $P$ . Так, например, скорость точки  $B$   $v_B = 2h \cdot \omega$ . Так как  $h = R \cos \alpha$  и  $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}$ ,  $\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{a^2 + R^2}}$ , то  $\omega = \frac{v_A}{h} = \frac{a\omega_0}{R \cos \alpha} = \frac{1}{R} \sqrt{a^2 + R^2} \omega_0$  и  $v_B = 2a\omega_0$ .

#### 4) Ускорение точек тела.

Сначала определим угловое ускорение тела  $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ . При движении

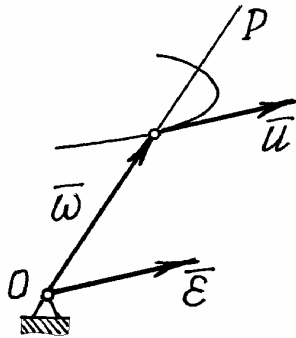


Рис 9.10.

тела вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$  изменяется и по величине, и по направлению. Точка расположенная на его конце будет двигаться по некоторой траектории со скоростью  $\vec{u}$  (рис. 9.10). Если рассматривать вектор  $\vec{\omega}$  как радиус-вектор этой точки, то  $\vec{u} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$

Итак. Угловое ускорение тела можно определить как скорость точки, расположенной на конце вектора угловой скорости:

$$\vec{\varepsilon} = \vec{u}. \quad (9.10)$$

Этот результат называется *теоремой Резаля*.

Теперь обратимся к определению ускорения точек. Ускорение какой-либо точки  $M$  тела

$$\vec{W} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}, \quad (9.11)$$

есть сумма двух векторов.



Первый вектор  $\vec{W}_1 = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ . Модуль его  $W_1 = \varepsilon r \sin \alpha_1 = \varepsilon h_1$ , где  $h_1$  – расстояние от точки  $M$  до вектора  $\vec{\varepsilon}$ . Направлен он перпендикулярно  $\vec{\varepsilon}$  и  $\vec{r}$ .

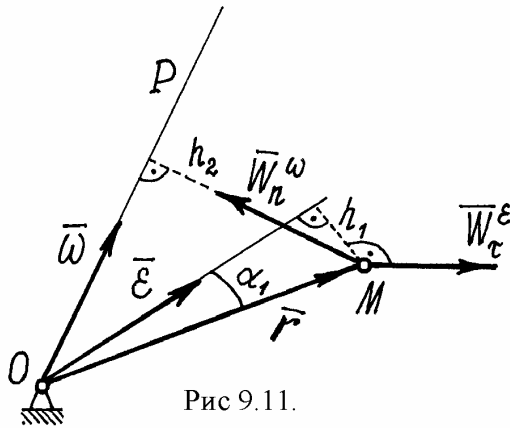


Рис 9.11.

Но таким же способом определяется касательное ускорение. Поэтому первую составляющую ускорения определяют как касательное ускорение, предполагая, что тело вращается вокруг оси, совпадающей с вектором  $\vec{\varepsilon}$ . И обозначается этот вектор ускорения так

$$\vec{W}_\tau^\varepsilon = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}. \quad (9.12)$$

Второй вектор  $\vec{W}_2 = \vec{\omega} \times \vec{v}$ .

Модуль его  $W_2 = \omega v \sin \alpha_2$ , но  $\alpha_2 = 90^\circ$ , т.к. векторы  $\vec{\omega}$  и  $\vec{v}$  перпендикулярны друг другу.

Значит  $W_2 = \omega v = \omega h_2 \omega = h_2 \omega^2$ , где  $h_2$  – расстояние от точки  $M$  до мгновенной оси  $P$ , до вектора  $\vec{\omega}$ .

Направлен вектор  $\vec{W}_2$  перпендикулярно  $\vec{\omega}$  и  $\vec{v}$ , т.е. так же как вектор нормального ускорения при вращении вокруг оси  $P$ , или вектора  $\vec{\omega}$ . Поэтому этот вектор ускорения и обозначают, соответственно, так:

$$\vec{W}_n^\omega = \vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (9.13)$$

Итак, ускорение точек тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, определяется как сумма двух ускорений:

$$\vec{W} = \vec{W}_\tau^\varepsilon + \vec{W}_n^\omega. \quad (9.14)$$

Этот результат называется *теоремой Ривальса*.

Заметим, что в общем случае векторы  $\vec{\omega}$  и  $\vec{\varepsilon}$  не совпадают и угол между  $\vec{W}_\tau^\varepsilon$  и  $\vec{W}_n^\omega$  не равен  $90^\circ$ , векторы не перпендикулярны друг другу, как это было при вращении тела вокруг неподвижной оси.

Пример 9.3. Продолжим исследование движения диска (пример 9.2).

Модуль угловой скорости  $\omega = \frac{v_A}{h} = \frac{a}{R \cos \alpha} \omega_0 = \text{const}$ . Значит вектор  $\vec{\omega}$  вместе с осью  $P$ , которая всегда проходит через точку касания диска с плоскостью, вращается вокруг оси  $z$  и описывает конус. Точка  $M$  на конце вектора  $\vec{\omega}$  движется по окружности радиуса  $r = \omega \cdot \cos \alpha$  с угловой скоростью  $\omega_0$ . Поэтому угловое ускорение диска  $\varepsilon = u_M = \omega \cos \alpha \cdot \omega_0 = \frac{a}{R} \omega_0^2$ .

Откладывается вектор  $\vec{\varepsilon}$  из неподвижной точки  $O$ . Направлен он, как скорость  $\vec{u}_M$ , перпендикулярно водилу  $OA$ , параллельно оси  $x$  (рис. 9.12).

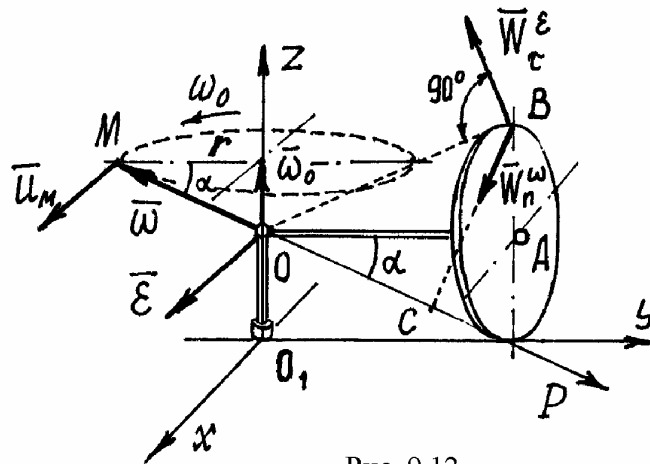


Рис. 9.12

Найдём ускорение точки  $B$ .

Ускорение  $W_\tau^\varepsilon = OB \cdot \varepsilon = \frac{a}{R} \sqrt{a^2 + R^2} \omega_0^2$ . Направлен вектор  $\vec{W}_\tau^\varepsilon$  перпендикулярно  $OB$  и расположен в плоскости  $zO_1y$ .

$$\text{Ускорение } W_n^\omega = BC \cdot \omega^2 = 2h\omega^2 = 2h \frac{v_A^2}{h^2} = 2 \frac{a^2 \omega_0^2}{R \cos \alpha} = 2 \frac{a}{R} \sqrt{a^2 + R^2} \cdot \omega_0^2.$$

Вектор  $\vec{W}_n^\omega$  направлен по  $BC$ , перпендикулярно мгновенной оси  $P$ . Модуль вектора  $\vec{W}_B$  найдём с помощью проекций, проектируя равенство (9.14) на оси  $x, y, z$ :

$$W_{Bx} = 0,$$

$$W_{By} = -W_\tau^\varepsilon \sin \alpha - W_n^\omega \sin \alpha = -3 \frac{a}{R} \sqrt{a^2 + R^2} \omega_0^2 \sin \alpha = -3a\omega_0^2,$$

$$W_{Bz} = W_\tau^\varepsilon \cos \alpha - W_n^\omega \cos \alpha = -\frac{a}{R} \sqrt{a^2 + R^2} \omega_0^2 \cos \alpha = -\frac{a^2}{R} \omega_0^2.$$

$$\text{Значит } W_B = \sqrt{W_{Bx}^2 + W_{By}^2 + W_{Bz}^2} = a\omega_0^2 \sqrt{9 + \frac{a^2}{R^2}}.$$

#### §4. Плоскопараллельное движение тела

Плоскопараллельным движением называется такое движение, при котором все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных одной

неподвижной плоскости. Называется эта плоскость плоскостью движения (рис. 9.13).

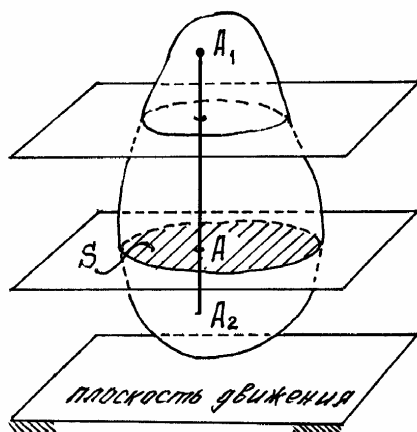


Рис. 9.13

Все точки прямой  $A_1A_2$ , перпендикулярной этой плоскости, движутся одинаково, т.к. прямая перемещается поступательно. Поэтому для исследования движения точек тела достаточно определить движение, расположенных в каком-нибудь сечении  $S$ , параллельном плоскости движения.

В дальнейшем на чертеже будем изображать лишь это сечение  $S$ , точки которого движутся в плоскости чертежа (рис. 9.14).

Положение сечения  $S$  и его точек будем определять в системе двух осей  $x$  и  $y$ . Сечение  $S$ , при движении тела, перемещаясь по плоскости, ещё и поворачивается. Поэтому положение сечения будем определять с

помощью координат  $x_C$  и  $y_C$  какой-нибудь точки  $C$  (полюса) и углом  $\varphi$  между произвольно проведённой прямой  $CA$  и осью  $x$  (рис. 9.14).

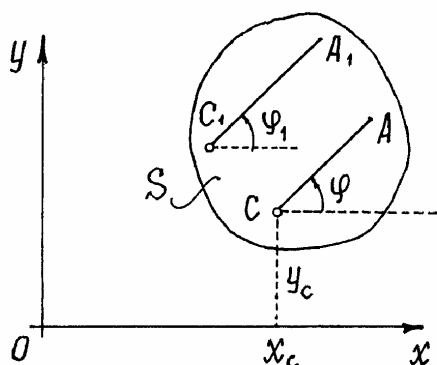


Рис. 9.14

Чтобы определить положение сечения  $S$  и его точек в любой момент времени достаточно задать функции времени

$$\left. \begin{aligned} x_C &= x_C(t), \\ y_C &= y_C(t), \\ \varphi &= \varphi(t). \end{aligned} \right\} \quad (9.15)$$

Эти функции называются *уравнениями плоскопараллельного движения*. Конечно, если полюсом назвать другую точку, например –  $C_1$ , то первые два уравнения изменятся, так как точка  $C_1$  движется иначе и по другой траектории.

А третье уравнение не зависит от выбора полюса. Действительно, если поворот тела определять углом  $\varphi_1$  между осью  $x$  и прямой  $C_1A_1$ , параллельной  $CA$ , то углы будут всегда равны,  $\varphi_1 = \varphi$ , и законы их изменения – одинаковы.

В качестве примера рассмотрим движение колеса, которое катится без скольжения по прямой (рис. 9.15). Это движение будет плоскопараллельным, потому что все его точки движутся в одной вертикальной плоскости.

У полюса  $O$ , центра колеса, траектория – прямая. А у полюса  $C_1$  траектория – циклоида. Уравнения движения этих двух точек разные. А

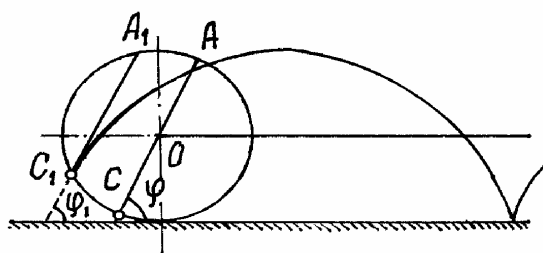


Рис. 9.15

углы  $\varphi$  и  $\varphi_1$ , которые составляют диаметр  $CA$  и хорда  $C_1A_1$ , параллельная диаметру, с горизонтальной прямой, всегда равны.

Значит и угловые скорости  $\omega = \dot{\varphi}$  и  $\omega_1 = \dot{\varphi}_1$  и угловые ускорения  $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ ,

$\varepsilon_1 = \ddot{\varphi}_1$  будут соответственно одинаковы.

Нетрудно заметить, что плоскопараллельное движение тела можно представить как сумму двух движений: движения полюса по некоторой траектории и вращения вокруг оси, проходящей через этот полюс перпендикулярно плоскости движения (вращения вокруг полюса).

1) *Скорости точек тела при плоскопараллельном движении. Мгновенный центр скоростей.*

Пусть известны уравнения плоскопараллельного движения

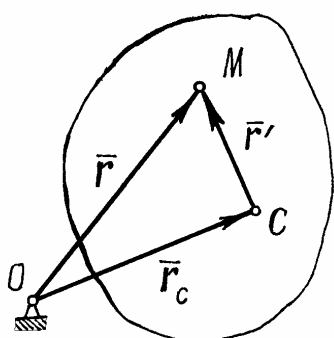


Рис. 9.16

$$\left. \begin{aligned} x_C &= x_C(t), \\ y_C &= y_C(t), \\ \varphi &= \varphi(t). \end{aligned} \right\}$$

Найдём скорость какой-нибудь точки  $M$  (рис. 9.16).

Положение точки  $M$  определяется радиусом-вектором  $\vec{r}$ , положение полюса  $C$  – вектором  $\vec{r}_C$ . Проведём ещё один вектор  $\vec{r}'$  из полюса  $C$  в точку  $M$ . Тогда  $\vec{r} = \vec{r}_C + \vec{r}'$ .

Скорость точки  $M$   $\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_C}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$ . Первое слагаемое этой суммы  $\frac{d\vec{r}_C}{dt} = \vec{v}_C$ . Чтобы найти второе, условно остановим движение полюса, положим  $\vec{r}_C = \text{const}$ . Тогда получится  $\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}'}{dt}$ . Значит этот второй член

определяет скорость точки  $M$  при вращении тела вокруг как бы неподвижного полюса  $C$  и обозначается так:  $\vec{v}_{MC}$ .

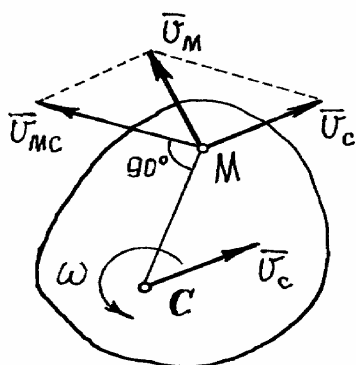


Рис. 9.17.

Итак, скорость точки  $M$  тела есть векторная сумма скорости полюса и скорости точки при вращении тела вокруг полюса (рис. 9.17):

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + \vec{v}_{MC}. \quad (9.16)$$

Скорость полюса можно определить, например, с помощью уравнений движения, с помощью производных  $\dot{x}_C$  и  $\dot{y}_C$ , см. (9.7). А скорость  $\vec{v}_{MC}$  - как скорость при вращении

вокруг оси:  $v_{MC} = MC \cdot \omega = MC \cdot \dot{\phi}$

Найдём скорость ещё одной точки тела, точки  $C_v$ , положение которой определяется так (рис. 9.18). Повернём вектор скорости полюса  $v_C$  на  $90^\circ$  по направлению угловой скорости  $\omega$ . И в этом направлении отложим отрезок  $CC_v = \frac{v_C}{\omega}$ .

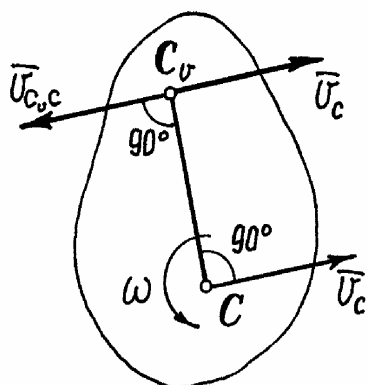


Рис. 9.18.

Скорость этой точки  $\vec{v}_{C_v} = \vec{v}_C + \vec{v}_{C_vC}$ , но  $v_{C_vC} = CC_v \cdot \omega = v_C$ , а вектор её перпендикулярен  $CC_v$  и направлен в сторону противоположную вектору  $\vec{v}_C$ . Значит скорость точки  $C_v$ , как сумма векторов  $\vec{v}_C$  и  $\vec{v}_{C_vC}$  будет равна нулю,  $\vec{v}_{C_v} = 0$ .

Следовательно, при плоскопараллельном движении тела всегда можно найти такую точку, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Эта точка  $C_v$  называется мгновенным центром скоростей.

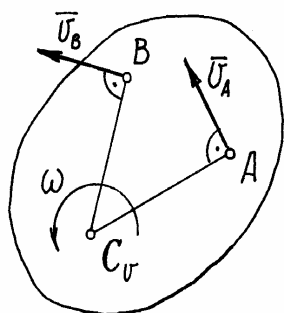


Рис. 9.19.

Положение её на теле всё время меняется, т.к. скорость полюса в общем случае может изменяться и по величине, и по направлению; и угловая скорость  $\omega$  также переменна.

Пусть положение мгновенного центра скоростей  $C_v$  известно (рис. 9.19). Назовем его полюсом. Тогда скорость точки  $A$ , по (9.16):

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{C_v} + \vec{v}_{AC_v}$$

Но  $\vec{v}_{C_v} = 0$ . Значит  $\vec{v}_A = \vec{v}_{AC_v}$  и величина

$$v_A = AC_{\nu} \cdot \omega.$$

Аналогично, скорость другой точки В  $\vec{v}_B = \vec{v}_{BC_{\nu}}$  и  $v_B = BC_{\nu} \cdot \omega$ .

Следовательно, если известен мгновенный центр скоростей, то определение скоростей точек значительно упрощается. Предполагаем, что тело просто вращается вокруг оси, проходящей через мгновенный центр скоростей, и находим скорости при таком вращении.

Существует несколько способов определения мгновенного центра скоростей.

а) Если известны скорости двух точек, то положение мгновенного центра скоростей  $C_{\nu}$  находится как точка пересечения перпендикуляров к векторам этих скоростей, проведённых в данных точках (см. рис. 9.19).

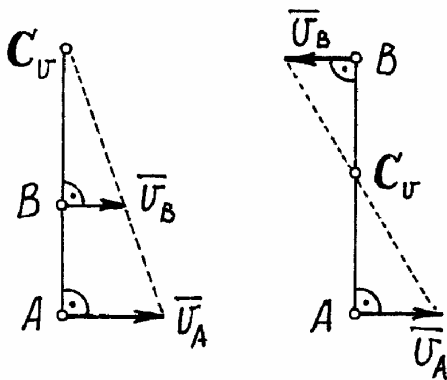


Рис. 9.20.

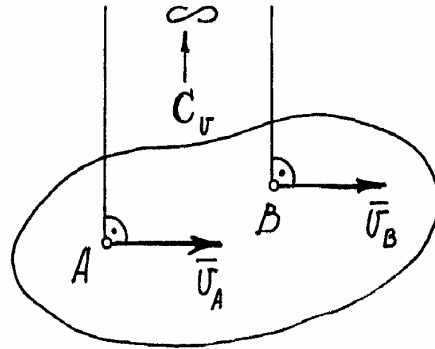


Рис. 9.21.

При этом может оказаться, что точки расположены на одном перпендикуляре к скоростям (рис. 9.20). В этом случае надо искать  $C_{\nu}$  как точку пересечения этого перпендикуляра с прямой, соединяющей концы векторов скоростей. Этот способ следует из того, что скорости пропорциональны расстояниям от точек до  $C_{\nu}$ , и полученные треугольники подобны.

Может получиться и так, как показано на рис.9.21. В этом случае мгновенный центр скоростей находится в бесконечности и угловая скорость

$$\omega = \frac{v_A}{AC_{\nu}} = 0.$$

А при  $\omega = 0$ , как при поступательном движении, скорости всех точек тела равны  $\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C = \dots$

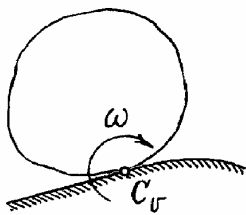


Рис. 9.22

б) Если тело катится без скольжения по неподвижной поверхности (рис.9.22), то мгновенный центр скоростей находится в точке касания, т.к. проскальзывания нет и скорость этой точки тела в данный момент равна нулю.

Пример 9.4. Тело, имеющее форму катушки, катится своим средним цилиндром по неподвижной плоскости так, что  $x_C = 3t$  (см). Радиусы цилиндров:  $R = 4$  см и  $r = 2$  см (рис.9.23). Определим скорости точек  $A, B$  и  $C$ .

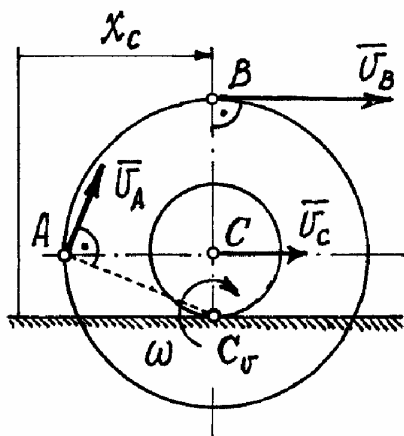


Рис. 9.23.

Мгновенный центр скоростей находится в точке касания катушки с плоскостью. Скорость полюса  $C$

$$v_C = \dot{x}_C = 3 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Угловая скорость катушки

$$\omega = \frac{v_C}{CC_v} = \frac{v_C}{r} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ с}^{-1}.$$

Скорости точек  $A$  и  $B$  направлены перпендикулярно отрезкам прямым, соединяющих эти точки с мгновенным центром скоростей. Величина скоростей:

$$v_A = AC_v \cdot \omega = \sqrt{r^2 + R^2} \cdot \omega = 6,71 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$$

$$v_B = BC_v \cdot \omega = (R + r)\omega = 9,0 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$$

Пример 9.5. Стержень  $AB$  скользит концами по взаимно перпендикулярным прямым так, что при угле  $\alpha$  скорость  $v_B = u$ . Длина стержня  $AB = l$ . Определим скорость конца  $A$  и угловую скорость стержня.

Нетрудно определить направление вектора скорости точки  $A$ , скользящей по вертикальной прямой. Тогда  $C_v$  находится на пересечении перпендикуляров к  $\vec{v}_A$  и  $\vec{v}_B$  (рис. 9.24).

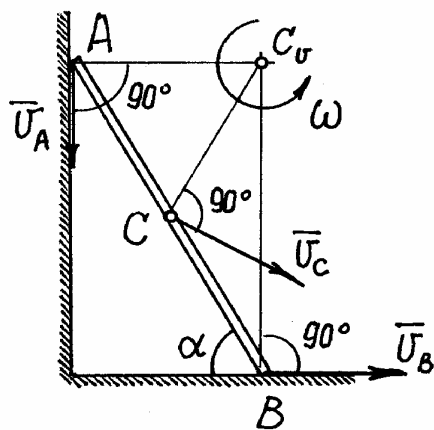


Рис. 9.24.

$$\text{Угловая скорость } \omega = \frac{v_B}{BC_v} = \frac{u}{l \sin \alpha}.$$

Скорость точки  $A$

$$v_A = AC_v \cdot \omega = l \cos \alpha \cdot \frac{u}{l \sin \alpha} = u \operatorname{ctg} \alpha.$$

А скорость центра стержня  $C$ , например, направлена перпендикулярно

$$CC_v \text{ и равна: } v_C = CC_v \omega = \frac{l}{2} \omega = \frac{u}{2 \sin \alpha}.$$

При решении задач бывает полезна теорема о проекции скоростей точек на ось (рис. 9.25).

Зависимость между скоростями двух точек  $A$  и  $B$ :  $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$ .

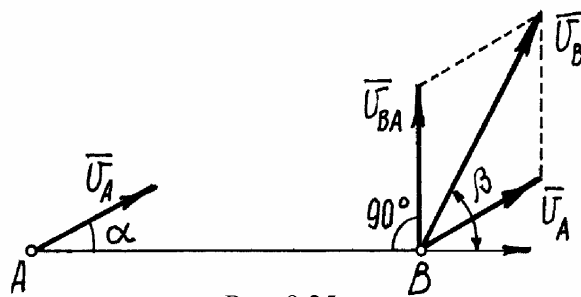


Рис. 9.25.

Спроектируем это равенство на ось, проведённую по  $AB$ :

$\text{пр}\vec{v}_B = \text{пр}\vec{v}_A + \text{пр}\vec{v}_{BA}$ . Но проекция  $\vec{v}_{BA}$  на ось равна нулю. Поэтому  $\text{пр}\vec{v}_B = \text{пр}\vec{v}_A$  или

$$v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta.$$

Вывод. *Проекции скоростей двух точек на ось, проведённую по этим точкам, равны.*

Так в примере 9.5 скорость точки  $A$  можно найти проще, используя эту теорему. Проектируя векторы скоростей на ось, проведённую по стержню  $AB$ , получим:

$$v_A \sin \alpha = v_B \cos \alpha \quad \text{и} \quad v_A = v_B \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = v_B \text{ctg} \alpha.$$

## 2) План скоростей.

Пусть известны скорости нескольких точек плоского сечения тела (рис. 9.26). Если эти скорости отложить в масштабе из некоторой точки  $O$  и соединить их концы прямыми, то получится картинка, которая называется планом скоростей.

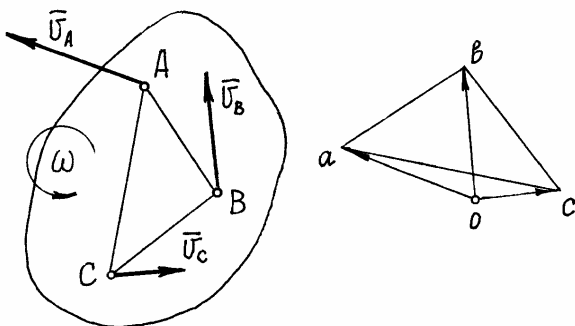


Рис. 9.26.

(На рисунке  $\vec{oa} = \vec{v}_A$ ,  $\vec{oc} = \vec{v}_C$ ,  $\vec{ob} = \vec{v}_B$ ).

Свойства плана скоростей.

а) Стороны треугольников на плане скоростей перпендикулярны соответствующим прямым на плоскости тела.

Действительно, по (9.16)  $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$ . Но на плане скоростей  $\vec{v}_B = \vec{ob}$ ,  $\vec{v}_A = \vec{oa}$ . Значит  $\vec{v}_{BA} = \vec{ab}$ ; причём  $\vec{v}_{BA}$  перпендикулярна  $AB$ , поэтому и  $ab \perp AB$ . Точно так же  $bc \perp BC$  и  $ac \perp AC$ .



б) Стороны плана скоростей пропорциональны соответствующим отрезкам прямых на плоскости тела.

Так как  $v_{BA} = AB \cdot \omega = ab$ ,  $v_{BC} = BC \cdot \omega = bc$ ,  $v_{AC} = AC \cdot \omega = ac$ , то отсюда и следует, что стороны плана скоростей пропорциональны отрезкам прямых на плоскости тела.

Объединив оба свойства, можно сделать вывод, что план скоростей подобен соответствующей фигуре на теле и повернут относительно её на  $90^\circ$  по направлению вращения. Эти свойства плана скоростей позволяют определять скорости точек тела графическим способом.

Пример 9.6. На рисунке 9.27 в масштабе изображён механизм. Известна угловая скорость  $\omega_0$  звена  $OA$ .

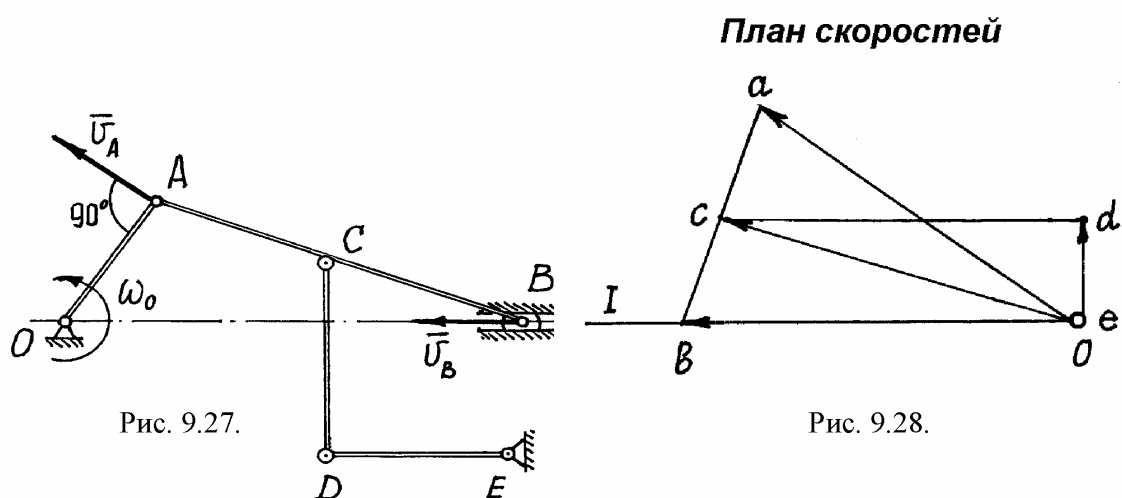


Рис. 9.27.

Рис. 9.28.

Чтобы построить план скоростей должна быть известна скорость какой-нибудь одной точки и хотя бы направление вектора скорости другой. В нашем примере можно определить скорость точки  $A$ :

$v_A = OA \cdot \omega_0$  и направление её вектора  $\vec{v}_A$ .

Откладываем (рис. 9.28) из точки  $o$  в масштабе  $\vec{oa} = \vec{v}_A$ . Известно направление вектора скорости ползуна  $B$  – горизонтальное. Проводим на плане скоростей из точки  $o$  прямую  $I$  по направлению скорости  $\vec{v}_B$ , на которой должна находиться точка  $b$ , определяющая скорость этой точки  $B$ . Так как стороны плана скоростей перпендикулярны соответствующим звеньям механизма, то из точки  $a$  проводим прямую перпендикулярно  $AB$  до пересечения с прямой  $I$ . Точка пересечения определит точку  $b$ , а значит и скорость точки  $B$ :  $\vec{v}_B = \vec{ob}$ . По второму свойству плана скоростей его стороны подобны звеньям механизма. Точка  $C$  делит  $AB$  пополам, зна-

чит и  $c$  должна делить  $ab$  пополам. Точка  $c$  определит на плане скоростей величину и направление скорости  $\vec{v}_c = \vec{oc}$  (если  $c$  соединить с точкой  $o$ ).

Скорость точки  $E$  равна нулю, поэтому точка  $e$  на плане скоростей совпадает с точкой  $o$ .

Далее. Должно быть  $cd \perp CD$  и  $de \perp DE$ . Проводим эти прямые, находим их точку пересечения  $d$ . Отрезок  $od$  определит вектор скорости  $\vec{v}_D = \vec{od}$ .

3) Ускорение точек тела при плоскопараллельном движении. Мгновенный центр ускорений.

Скорость точек тела находится как векторная сумма двух скоростей. Например, скорость точки  $A$   $\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{v}_{AC}$ .

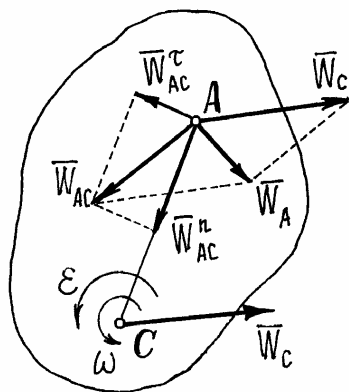


Рис. 9.29.

Ускорение её  $\vec{W}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\vec{v}_C}{dt} + \frac{d\vec{v}_{AC}}{dt}$ . Первое слагаемое этой суммы есть ускорение полюса  $\frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{W}_C$ . Если остановить движение полюса  $C$ , положив  $\vec{v}_C = 0$ , оставив лишь вращение тела, то окажется, что производная  $\frac{d\vec{v}_{AC}}{dt} = \vec{W}_A$ , то есть равна ускорению точки  $A$ , предполагая, что тело вращается вокруг неподвижного полюса –  $\vec{W}_{AC}$ . Следовательно  $\vec{W}_A = \vec{W}_C + \vec{W}_{AC}$ . Но, так как при вращении ускорение точки – сумма нормального и касательного ускорений, то

$$\vec{W}_A = \vec{W}_C + \vec{W}_{AC}^n + \vec{W}_{AC}^{\tau}, \quad (9.17)$$

где  $W_{AC}^n = AC \cdot \omega^2$ , а вектор  $\vec{W}_{AC}^n$  направлен к полюсу  $C$  (рис. 9.29);

$W_{AC}^{\tau} = AC \cdot \epsilon$  и вектор его направлен перпендикулярно  $AC$  в сторону, соответствующую направлению углового ускорения  $\epsilon$ .

**Пример 9.7.** Диск катится без скольжения по прямой. Центр его  $C$  имеет скорость  $v_C$  и ускорение  $W_C$  (рис. 9.30). Найдем ускорение точки  $A$ .

Угловую скорость находим с помощью мгновенного центра скоростей:

$$\omega = \frac{v_c}{CC_v} = \frac{v_c}{R}.$$

Угловое ускорение при таком движении можно найти как производную от угловой скорости. Имея в виду, что  $CC_0 = R = \text{const}$ , а точка  $C$  движется по прямой, получим

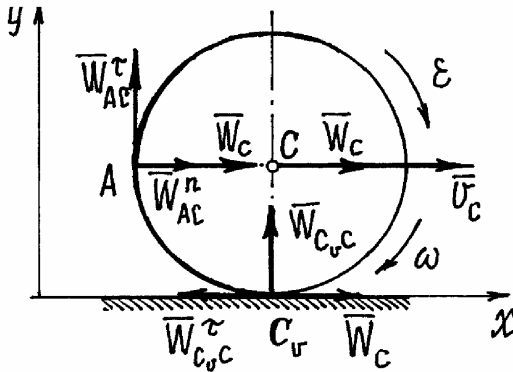


Рис. 9.30.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{v_C}{CC_0} = \frac{1}{R} \frac{dv_C}{dt} = \frac{W_C}{R}.$$

Если  $C$  – полюс, то

$$\vec{W}_A = \vec{W}_C + \vec{W}_{AC}^n + \vec{W}_{AC}^\tau, \text{ где}$$

$$W_{AC}^n = AC \cdot \omega^2 = R \frac{v_C^2}{R^2} = \frac{v_C^2}{R};$$

$$W_{AC}^\tau = AC \cdot \varepsilon = R \frac{W_C}{R} = W_C.$$

Величину ускорения найдём с

помощью проекций на оси  $x$  и  $y$ :

$$W_{Ax} = W_{AC}^n + W_C = \frac{v_C^2}{R} + W_C, \quad W_{Ay} = W_{AC}^\tau = W_C.$$

Тогда 
$$W_A = \sqrt{W_{Ax}^2 + W_{Ay}^2} = \frac{1}{R} \sqrt{(v_C^2 + RW_C)^2 + R^2 W_C^2}.$$

Ускорение мгновенного центра скоростей  $C_0$ :  $\vec{W}_{C_0} = \vec{W}_C + \vec{W}_{C_0C}^n + \vec{W}_{C_0C}^\tau$ ,

где  $W_{C_0C}^n = R\omega^2 = \frac{v_C^2}{R}$ ;  $W_{C_0C}^\tau = R\varepsilon = W_C$ . И, так как  $\vec{W}_{C_0C}^\tau = -\vec{W}_C$ , ускоре-

ние  $\vec{W}_{C_0} = \vec{W}_{C_0C}^n$  и  $W_{C_0} = \frac{v_C^2}{R} \neq 0$ .

Таким образом, ускорение мгновенного центра скоростей не равно нулю.

**Пример 9.8.** Вернёмся к примеру 9.5 (рис. 9.31). Найдём ускорение точки  $A$ , полагая  $\vec{v}_B = \vec{u} = \text{const}$ , т.е.  $\vec{W}_B = 0$ .

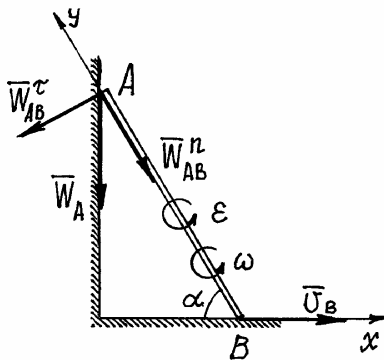


Рис. 9.31.

По (9.17) имеем:

$$\vec{W}_A = \vec{W}_B + \vec{W}_{AB}^n + \vec{W}_{AB}^\tau, \quad (9.18)$$

где  $W_{AB}^n = l\omega^2 = \frac{u^2}{l \sin^2 \alpha}$ ;  $W_{AB}^\tau = l\varepsilon$ , но направ-

ление вектора  $\vec{W}_{AB}^\tau$  неизвестно, неизвестно и угловое ускорение  $\varepsilon$ .

Предположим, что вектор  $\vec{W}_{AB}^\tau$  направлен перпендикулярно  $AB$ , влево.

Ускорение  $\vec{W}_A$ , конечно, направлено по траектории прямолинейного движения точки  $A$ , предположим вниз. Спроектируем векторное равенство (9.18) на оси  $x$  и  $y$ , получим :

$$0 = W_{AB}^n \cos \alpha - W_{AB}^\tau \sin \alpha \quad \text{и} \quad -W_A \sin \alpha = -W_{AB}^n.$$

Из второго уравнения сразу находим ускорение точки  $A$

$$W_A = \frac{W_{AB}^n}{\sin \alpha} = \frac{u^2}{l \sin^3 \alpha}.$$

Положительное значение  $W_A$  указывает на то, что направление вектора  $\vec{W}_A$  выбрано правильно.

Из первого уравнения можно найти ускорение  $W_{AB}^\tau = W_{AB}^n \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{u^2}{l \sin^3 \alpha} \cos \alpha$  и угловое ускорение  $\varepsilon = \frac{W_{AB}^\tau}{l} = \frac{u^2}{l^2 \sin^3 \alpha} \cos \alpha$  (направления  $\vec{W}_{AB}^\tau$  и  $\varepsilon$  также угаданы верно).

Рассмотрим ещё раз плоскопараллельное движение тела (рис.9.32). Пусть известны ускорение полюса  $\vec{W}_C$ , угловая скорость  $\omega$  и угловое ускорение  $\varepsilon$  тела.

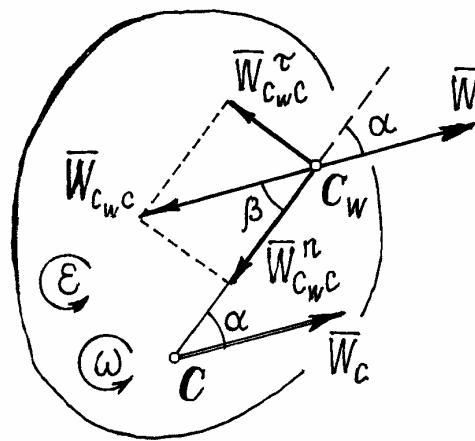


Рис. 9.32.

Докажем, что ускорение этой точки  $C_w$  равно нулю.

$$\vec{W}_{C_w} = \vec{W}_C + \vec{W}_{C_w C} = \vec{W}_C + \vec{W}_{C_w C}^n + \vec{W}_{C_w C}^\tau, \quad \text{где} \quad W_{C_w C}^n = CC_w \cdot \omega^2,$$

$$W_{C_w C}^\tau = CC_w \cdot \varepsilon \quad \text{и} \quad W_{C_w C} = \sqrt{(W_{C_w C}^n)^2 + (W_{C_w C}^\tau)^2} = CC_w \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = W_C.$$

Найдём угол  $\beta$  между вектором  $\vec{W}_{C_w C}$  и прямой  $CC_w$ .

Проведём из полюса  $C$  прямую под углом  $\alpha$  таким, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \quad (9.19)$$

отложив его от вектора  $\vec{W}_C$  по направлению  $\varepsilon$ .

И на этой прямой найдём точку  $C_w$  на расстоянии от  $C$  равном

$$CC_w = \frac{W_C}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \quad (9.20)$$

Тангенс его  $\operatorname{tg}\beta = \frac{W_{C_W C}^\tau}{W_{C_W C}^n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \operatorname{tg}\alpha$ . Значит  $\beta = \alpha$ . И сумма векторов

$\vec{W}_C$  и  $\vec{W}_{C_W C}$  равна нулю, то есть ускорение точки  $C_W$  равно нулю.

Следовательно, при плоскопараллельном движении у тела можно отыскать точку, ускорение которой в этот момент времени равно нулю. Такая точка  $C_W$  называется мгновенным центром ускорений.

Если у тела удастся найти эту точку, то определение ускорения точек тела значительно упрощается. Действительно, назначив точку  $C_W$  полюсом, ускорение которого равно нулю, формула сложения ускорений получится проще:

$$\vec{W}_A = \vec{W}_{AC_W}^n + \vec{W}_{AC_W}^\tau.$$

То есть ускорение точек тела определяется как при вращении вокруг оси, проходящей через мгновенный центр ускорений перпендикулярно плоскости движения. Например, в примере 9.8 мгновенный центр ускорений находится в точке  $B$  и ускорение точки  $A$  будет определяться как при вращении её вокруг оси  $C_W$ , проходящей через точку  $B$ .

Так как угол  $\alpha$  между вектором ускорения точки и прямой, соединяющей её с мгновенным центром ускорений определяется лишь угловым ускорением  $\varepsilon$  и угловой скоростью  $\omega$  (9.19), одинаковыми для всех точек, то эти углы, определяющие направление ускорений, для всех точек будут равными.

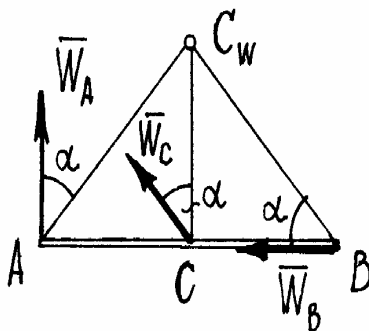


Рис. 9.33.

Например, на рисунке 9.33 показано распределение ускорений точек стержня  $AB$  (при  $W_A = W_B$  угол  $\alpha = 45^\circ$ ).

Следует заметить, что мгновенный центр ускорений  $C_W$  и мгновенный центр скоростей  $C_v$  тела – это, как правило, разные точки.

## Х. Сложное движение точки

### §1. Абсолютное, относительное и переносное движения точки

Довольно часто встречается движение точки, состоящее из нескольких движений. Вот два наглядных примера.

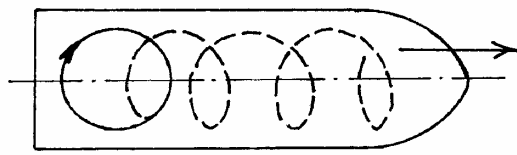


Рис. 10.1.

Первый. Наблюдатель, стоящий на высоком берегу реки, смотрит на прямолинейно движущийся теплоход, на верхней палубе которого по окружности ходит пассажир (рис. 10.1). Наблюдатель же видит довольно сложную «загогулину» (пунктирная линия), как результат сложения прямолинейного движения

и движения по окружности.

Второй пример. Стержень вращается в плоскости вокруг оси  $O$ , а по нему движется колечко  $M$  (рис. 10.2). Неподвижный наблюдатель увидит движение колечка по спирали.

Эти движения имеют соответствующие названия: абсолютное, относительное и переносное.

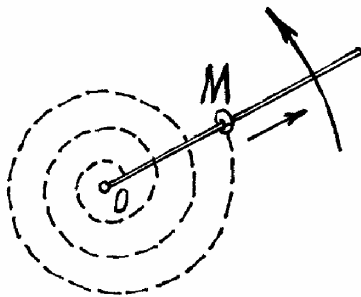


Рис. 10.2.

*Абсолютным движением* называется движение точки, которое видит неподвижный наблюдатель («загогулина» и спираль в наших примерах).

*Относительным движением* — движение точки, которое увидел бы наблюдатель, двигаясь вместе со средой (с теплоходом и со стержнем). В наших примерах — это движение пассажира по окружности на палубе теплохода и прямолинейное

скольжение колечка по стержню.

*Переносное движение* — это движение среды по которой движется точка (прямолинейное движение теплохода и вращение стержня).

При исследовании сложного движения точки полезно применять «Правило остановки». Для того, чтобы неподвижный наблюдатель увидел относительное движение точки, надо остановить переносное движение. Тогда будет происходить только относительное движение. Относительное движение станет абсолютным. И наоборот, если остановить относительное движение, переносное станет абсолютным и неподвижный наблюдатель увидит только это переносное движение.

В последнем случае, при определении переносного движения точки, обнаруживается одно очень важное обстоятельство. Переносное движение точки зависит от того в какой момент будет остановлено относительное движение, от того, где точка находится на среде в этот момент. Так как,

вообще говоря, все точки среды движутся по-разному. Поэтому логичнее определять *переносное движение точки* как *абсолютное движение той точки среды, с которой совпадает в данный момент движущаяся точка*.

Так переносное движение пассажира – это движение той точки палубы, на которой находится пассажир. И в примере с колечком – это движение той точки стержня, где находится колечко в данный момент (движение по окружности радиуса  $OM$ ).

Ещё несколько определений.

Абсолютной скоростью и абсолютным ускорением точки  $(\vec{v}, \vec{W})$  будем называть скорость и ускорение при абсолютном движении.

Относительной скоростью и относительным ускорением  $(\vec{v}_r, \vec{W}_r)$  – скорость и ускорение точки в относительном движении.

Переносная скорость и переносное ускорение точки  $(\vec{v}_e, \vec{W}_e)$  – это абсолютная скорость и абсолютное ускорение той точки среды, с которой совпадает движущаяся точка в данный момент времени.

Все эти движения можно попробовать определить с помощью координат и векторным способом.

На рисунке 10.3 показаны неподвижные оси  $x, y, z$  и движущиеся оси  $x_1, y_1, z_1$ . Конечно, абсолютное движение точки  $M$  определяется уравнениями

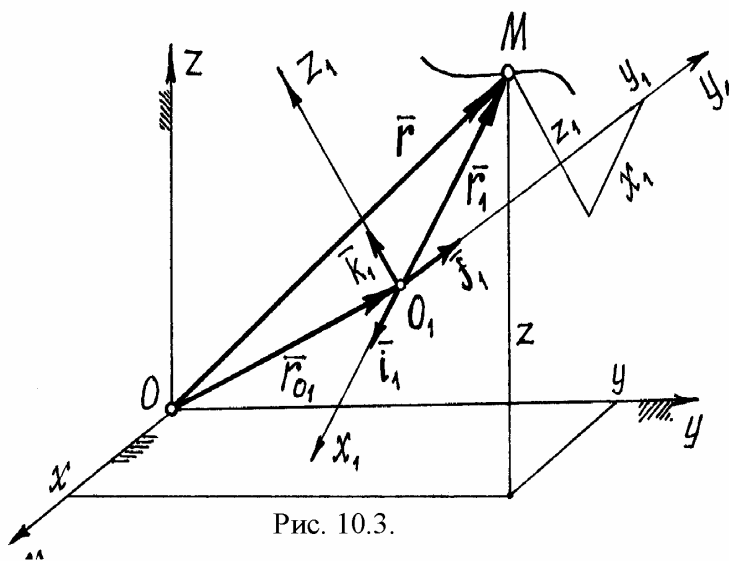


Рис. 10.3.

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

Относительное движение – в движущихся осях уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1(t), \\ y_1 &= y_1(t), \\ z_1 &= z_1(t). \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

Уравнений, определяющих переносное движение точки, не может быть вообще.

Так как, по определению, переносное движение точки  $M$  – это движение относительно неподвижных осей той точки системы  $O_1x_1y_1z_1$ , с которой совпадает точка в данный момент. Но все точки под-

вижной системы движутся по-разному.

Абсолютное движение точки  $M$  определяется радиусом-вектором  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , а относительное движение радиусом-вектором  $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t)$ . Радиус-вектор  $\vec{r}_{O_1}$  определяет движение начала подвижных осей  $O_1$  (но не переносное движение точки  $M!$ ).

## §2. Определение абсолютной скорости точки

Абсолютная скорость точки  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ . Но  $\vec{r} = \vec{r}_{O_1} + \vec{r}_1$  (см. рис. 10.3), где  $\vec{r}_1 = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1$ , а  $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$  – орты подвижных осей. Поэтому

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}_{O_1}}{dt} + \frac{d}{dt}(x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1) = \\ &= \frac{d\vec{r}_{O_1}}{dt} + \frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1 + x_1\frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1\frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1\frac{d\vec{k}_1}{dt} \end{aligned} \quad (10.3)$$

(орты  $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$  – переменные, т.к. направление их меняется, функции времени  $t$ ).

Используя метод остановки, с помощью (10.3) можно определить относительную скорость точки и переносную. Действительно, остановив переносное движение, движение осей  $x_1, y_1, z_1$ , т.е. положив  $\vec{r}_{O_1} = \text{const}$ ,  $\vec{i}_1 = \text{const}$ ,  $\vec{j}_1 = \text{const}$ ,  $\vec{k}_1 = \text{const}$ , из уравнения (10.3) получим

$$\vec{v}_e = \frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1. \quad (10.4)$$

А остановив относительное движение точки  $M$  ( $x_1 = \text{const}$ ,  $y_1 = \text{const}$ ,  $z_1 = \text{const}$ ), получим её переносную скорость

$$\vec{v}_e = \frac{d\vec{r}_{O_1}}{dt} + x_1\frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1\frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1\frac{d\vec{k}_1}{dt}.$$

Поэтому из формулы (10.3) следует, что абсолютная скорость точки есть векторная сумма двух скоростей – переносной и относительной:

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r. \quad (10.5)$$

**Пример 10.1.** Колечко  $M$  движется по вращающемуся стержню так, что  $OM = s = 3t^2$  (см) и  $\varphi = 2t$  (рад). Рис. 10.4.

Ранее было установлено, что траектория относительного движения – прямая линия, совпадающая со стержнем, и движение это определяется



уравнением  $s = s(t)$ . Траектория переносного движения точки  $M$  в момент времени  $t$  – окружность радиуса  $OM = s$ .

Поэтому относительная скорость

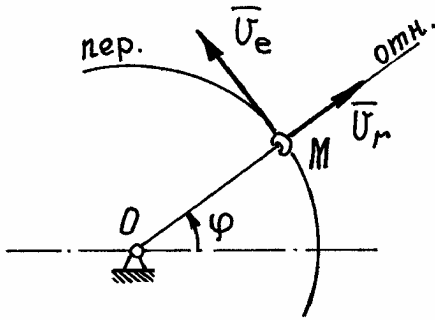


Рис. 10.4.

$v_r = \dot{s} = 6t \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ . И направлена по касательной к траектории вдоль стержня (рис. 10.4). Переносная скорость колечка, как при вращении вокруг оси,

$$v_e = OM \cdot \omega = s \dot{\varphi} = 3t^2 \cdot 2 = 6t^2 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Направлен вектор этой скорости по касательной к траектории переносного

движения, перпендикулярно стержню.

Абсолютная скорость колечка  $\vec{v}_M = \vec{v}_e + \vec{v}_r$ . Величина ее, т.к.  $\vec{v}_e \perp \vec{v}_r$ ,

$$v_M = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = 6t\sqrt{1+t^2} \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}.$$

### § 3. Определение абсолютного ускорения точки. Ускорение Кориолиса

Ускорение точки – первая производная по времени от вектора скорости. Поэтому абсолютное ускорение, используя формулу (10.3),

$$\begin{aligned} \vec{W} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_{O_1}}{dt^2} + \frac{d^2x_1}{dt^2}\vec{i}_1 + \frac{d^2y_1}{dt^2}\vec{j}_1 + \frac{d^2z_1}{dt^2}\vec{k}_1 + 2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{i}_1}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{j}_1}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right) + \\ + x_1\frac{d^2\vec{i}_1}{dt^2} + y_1\frac{d^2\vec{j}_1}{dt^2} + z_1\frac{d^2\vec{k}_1}{dt^2}. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Воспользовавшись правилом остановки, можем найти относительное и переносное ускорения точки.

Положим в (10.6)  $\vec{r}_{O_1} = \text{const}$ ,  $\vec{i}_1 = \text{const}$ ,  $\vec{j}_1 = \text{const}$ ,  $\vec{k}_1 = \text{const}$ . Получим относительное ускорение:

$$\vec{W}_r = \frac{d^2x_1}{dt^2}\vec{i}_1 + \frac{d^2y_1}{dt^2}\vec{j}_1 + \frac{d^2z_1}{dt^2}\vec{k}_1. \quad (10.7)$$

При  $x_1 = \text{const}$ ,  $y_1 = \text{const}$ ,  $z_1 = \text{const}$  получим переносное ускорение:

$$\vec{W}_e = \frac{d^2\vec{r}_{O_1}}{dt^2} + x_1\frac{d^2\vec{i}_1}{dt^2} + y_1\frac{d^2\vec{j}_1}{dt^2} + z_1\frac{d^2\vec{k}_1}{dt^2}.$$

Поэтому из формулы (10.6) следует, что абсолютное ускорение состоит не из двух, а из трех ускорений:

$$\vec{W} = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_c. \quad (10.8)$$

Дополнительное ускорение называется ускорением Кориолиса (по имени ученого, впервые обнаружившего это ускорение), которое равно:

$$\vec{W}_c = 2 \left( \frac{dx_1}{dt} \frac{d\vec{i}_1}{dt} + \frac{dy_1}{dt} \frac{d\vec{j}_1}{dt} + \frac{dz_1}{dt} \frac{d\vec{k}_1}{dt} \right). \quad (10.9)$$

Это дополнительное ускорение появилось из-за того, что переносная скорость зависит от относительного движения, от положения точки на среде, а относительная скорость изменяется за счет переносного движения.

Проще всего определить ускорение Кориолиса в двух частных случаях.

1. Переносное движение – поступательное движение (система подвижных осей  $x_1, y_1, z_1$  перемещается поступательно).

Так как подвижные оси при таком движении не поворачиваются, то орты  $\vec{i}_1 = \text{const}$ ,  $\vec{j}_1 = \text{const}$ ,  $\vec{k}_1 = \text{const}$ . И тогда по (10.9) ускорение Кориолиса  $\vec{W}_c = 0$ , а абсолютное ускорение станет суммой лишь двух ускорений:

$$\vec{W} = \vec{W}_e + \vec{W}_r$$

Это понятно, так как переносное движение точки не будет зависеть от относительного, а переносное не изменяет направление вектора относительной скорости.

2. Переносное движение – вращение вокруг неподвижной оси.

Пусть подвижная система осей  $O_1x_1y_1z_1$  вращается вокруг неподвижной оси  $\xi$  с угловой скоростью  $\vec{\omega}_e$ . (рис. 10.5).

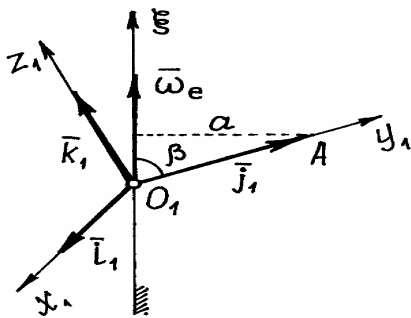


Рис. 10.5.

Представим орты осей как радиусы-векторы точек, расположенных на их концах. Тогда производные от орта по времени можно рассматривать как скорости этих точек.

Например, скорость точки  $A$  на конце вектора  $\vec{j}_1$   $\vec{v}_A = \frac{d\vec{j}_1}{dt}$ . Но, так как модуль ее  $v_A = \omega_e a = \omega_e \cdot j_1 \sin \beta$ , а вектор скорости  $\vec{v}_A$  направлен перпендикулярно  $\vec{\omega}_e$  и  $\vec{j}_1$  в сторону вращения, то  $\vec{v}_A = \vec{\omega}_e \times \vec{j}_1$ . Поэтому

$$\frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{j}_1, \text{ аналогично, } \frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{i}_1 \text{ и } \frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{k}_1. \quad (10.10)$$

Для доказательства этого можно было воспользоваться и формулой (10.5).

Тогда по (10.9) ускорение Кориолиса

$$\vec{W}_c = 2\vec{\omega}_e \times \left( \frac{dx_1}{dt} \vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt} \vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt} \vec{k}_1 \right).$$

И, учитывая (10.4), получим

$$\vec{W}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r. \quad (10.11)$$

Ускорение Кориолиса есть удвоенное векторное произведение вектора угловой скорости переносного движения на вектор относительной скорости точки.

Величина его

$$W_c = 2\omega_e v_r \sin \alpha, \quad (10.12)$$

где  $\alpha$  - острый угол между векторами  $\vec{\omega}_e$  и  $\vec{v}_r$ .

Замечание: Можно доказать, что этот результат верен при любом переносном движении. Не только при вращении вокруг неподвижной оси.

Пример 10.2. Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси  $z$ . По поверхности его движется точка  $M$  (рис. 10.6). Конечно, скорость этого движения точки – относительная скорость  $\vec{v}_r$ , а скорость вращения тела – угловая скорость переносного движения  $\vec{\omega}_e$ .

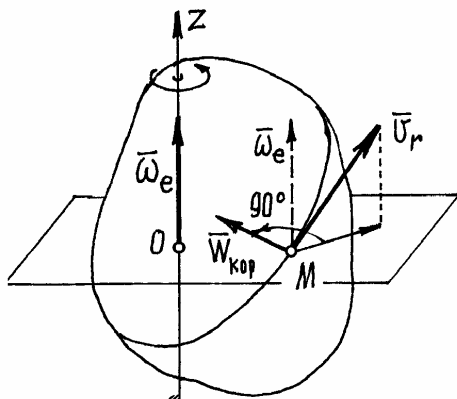


Рис. 10.6.

Ускорение Кориолиса  $\vec{W}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$ , направлено перпендикулярно этим двум векторам, по правилу направления вектора векторного произведения. Так, как показано на рис. 10.6.

Нетрудно сформулировать более удобное правило определения направления вектора  $\vec{W}_c$ : нужно спроектировать вектор относительной скорости  $\vec{v}_r$  на плоскость перпендикулярную оси переносного вращения и затем повернуть эту проекцию на 90 градусов в плоскости по направлению переносного вращения. Конечное положение проекции вектора  $\vec{v}_r$  укажет направление кориолисова ускорения. (Это правило было предложено Н.Е. Жуковским).

Пример 10.3: (Вернемся к примеру 10.1). Найдём абсолютное ускорение колечка  $M$ :

$$\vec{W}_M = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_c. \quad (10.13)$$

Переносное ускорение при движении колечка по окружности радиусом  $OM = s$ :  $\vec{W}_e = \vec{W}_e^n + \vec{W}_e^\tau$ , где  $W_e^n = s \cdot \omega_e^2 = 12t^2 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$ ,

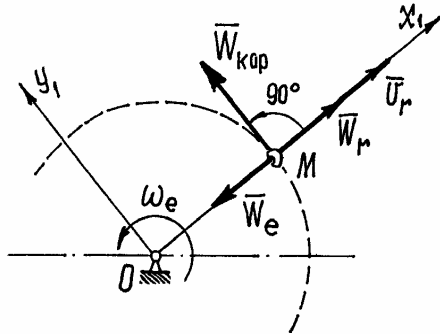


Рис. 10.7.

$W_e^\tau = s\epsilon_e = s \cdot \ddot{\phi} = 0$ . Значит  $\vec{W}_e = \vec{W}_e^n$  (рис.10.7). Относительное ускорение

$W_r = \ddot{s} = 6 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$ . Ускорение Кориолиса  $W_c = 2\omega_e v_r \sin 90^\circ = 2 \cdot 2 \cdot 6t = 24t \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$ .

Вектор  $\vec{W}_c$  направлен перпендикулярно стержню в сторону вращения (по правилу Жуковского).

Величину абсолютного ускорения колечка  $M$  найдем с помощью проекций на

подвижные оси  $x_1$  и  $y_1$  проектируя равенство (10.13) на оси, получим:

$$W_{x_1} = W_r - W_e = 6 - 12t^2 = 6(1 - 2t^2), \quad W_{y_1} = W_c = 24t.$$

$$\text{Тогда } W_M = \sqrt{(W_{x_1})^2 + (W_{y_1})^2} = 6\sqrt{(1 - 2t^2)^2 + 16t^2} \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}.$$

## XI. Сложное движение твердого тела

Так же как при сложном движении точки нередко и движение тела можно рассматривать как сумму нескольких движений. Например, состоящее из двух поступательных движений или поступательного движения и вращения в округ оси. Часто встречаются движения, состоящие из двух вращений вокруг осей или поступательного движения и вращения вокруг точки. Исследование движения точек принадлежащих телу, совершающему сложное движение, можно проводить методами, изложенными в главе X и никаких особых трудностей не вызывает. Но анализ сложного движения тела, состоящего из нескольких вращений, обнаруживает некоторые особенности, которые следует рассмотреть специально.

## §1. Сложение вращений тела вокруг двух осей

На рис. 11.1 изображено тело, которое совершает сложное движение – вращение вокруг оси, которая сама вращается вокруг другой, неподвижной оси. Естественно, первое вращение следует назвать относительным движением тела, второе – переносным, а соответствующие оси обозначить  $z_r$  и

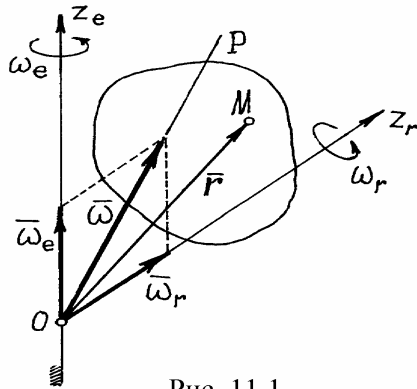


Рис. 11.1.

$z_e$ .

Абсолютным движением будет вращение вокруг точки пересечения осей  $O$ . (Если тело имеет большой размер, то его точка, совпадающая с  $O$ , все время будет неподвижной). Угловые скорости переносного вращения и относительного вращения изображаются векторами  $\vec{\omega}_e$  и  $\vec{\omega}_r$ , отложенными из неподвижной точки  $O$ , точки пересечения осей, по соответствующим осям.

Найдем абсолютную скорость какой-нибудь точки  $M$  тела, положение которой определяется радиусом-вектором  $\vec{r}$  (рис 11.1).

Как известно, она складывается из двух скоростей, относительной и переносной (11.5):  $\vec{v}_M = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ . Но относительное движение точки (используя правило остановки в главе X, §1), есть вращение с угловой скоростью  $\vec{\omega}_r$  вокруг оси  $z_r$ , определяется радиусом-вектором  $\vec{r}$ . Поэтому, по (11.5),  $\vec{v}_r = \vec{\omega}_r \times \vec{r}$ .

Переносное движение точки в данный момент времени, опять используя правило остановки, тоже есть вращение, но вокруг оси  $z_e$  с угловой скоростью  $\vec{\omega}_e$  и будет определяться тем же радиусом-вектором  $\vec{r}$ . Поэтому и переносная скорость  $\vec{v}_e = \vec{\omega}_e \times \vec{r}$ .

Абсолютная же скорость, скорость при вращении вокруг неподвижной точки  $O$ , при сферическом движении, определяется аналогично (по 9.9)  $\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , где  $\vec{\omega}$  - абсолютная угловая скорость, направленная по мгновенной оси вращения  $P$ .

По формуле сложения скоростей получим:  $\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega}_r \times \vec{r} + \vec{\omega}_e \times \vec{r}$  или  $\vec{\omega} \times \vec{r} = (\vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e) \times \vec{r}$ . Отсюда

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r \quad (11.1)$$

То есть мгновенная угловая скорость, угловая скорость абсолютного движения, есть векторная сумма угловых скоростей переносного и относи-

тельного движений. А мгновенная ось вращения  $P$ , направленная по вектору  $\vec{\omega}$ , совпадает с диагональю параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{\omega}_e$  и  $\vec{\omega}_r$  (рис 11.1).

Частные случаи:

1. Оси вращения  $z_e$  и  $z_r$  параллельны, направления вращений одинаковы (рис 11.2).

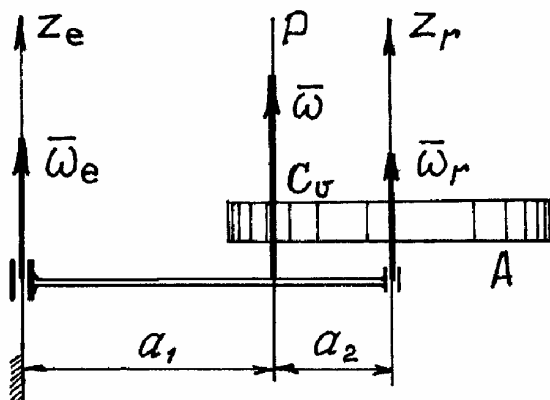


Рис. 11.2.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\omega_r}{\omega_e}. \quad (\text{Аналогично равнодействующей параллельных сил}).$$

В этом частном случае тело  $A$  совершает плоскопараллельное движение. Мгновенный центр скоростей  $C_v$  находится на оси  $P$ .

2. Оси вращения параллельны, направления вращений противоположны (рис.11.3).

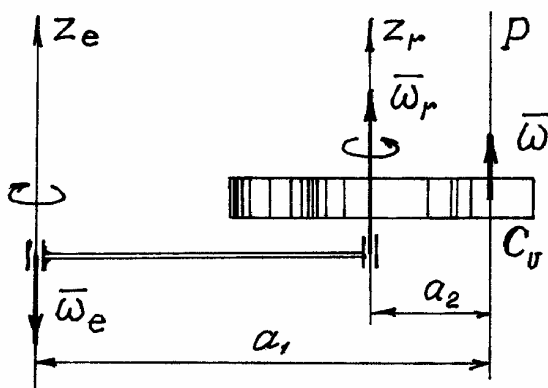


Рис. 11.3.

3. Оси вращения параллельны, направления вращений противоположны и угловые скорости равны.

Так как векторы  $\vec{\omega}_e$  и  $\vec{\omega}_r$  параллельны и направлены в одну сторону, то абсолютная угловая скорость по величине равна сумме их модулей  $\omega = \omega_e + \omega_r$  и вектор ее направлен в ту же сторону. Мгновенная ось вращения  $P$  делит расстояние между осями на части обратно пропорциональные  $\omega_e$  и  $\omega_r$ :

В этом случае  $\omega = \omega_r - \omega_e$  (при  $\omega_r > \omega_e$ ). Мгновенная ось вращения и мгновенный центр скоростей находятся за вектором большей угловой скорости на расстояниях таких, что  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{\omega_r}{\omega_e}$  (опять по аналогии определения равнодействующей параллельных сил).

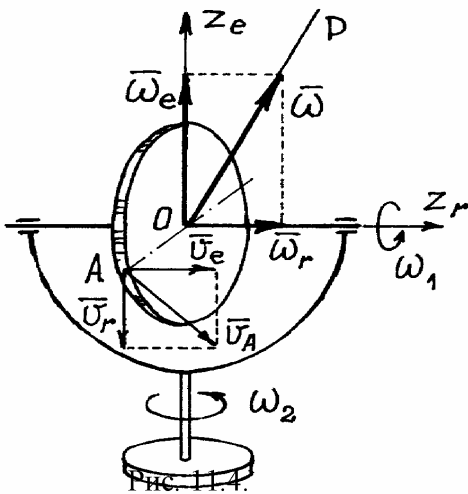
Угловая скорость абсолютного движения  $\omega = 0$  и, следовательно, тело совершает поступательное движение. Этот случай называется *парой вращений*, по аналогии с парой сил.

**Пример 11.1:** Диск радиусом  $R$  вращается вокруг горизонтальной оси с угловой скоростью  $\omega_1$ , а эта ось вместе с рамкой вращается вокруг вертикальной неподвижной оси с угловой скоростью  $\omega_2$  (рис.11.4).

Горизонтальная ось – это ось относительного вращения  $z_r$ ; вертикальная ось – ось переносного вращения  $z_e$ . Соответственно угловые скорости  $\omega_r = \omega_1$ ,  $\omega_e = \omega_2$ , векторы их направлены по осям  $z_r$  и  $z_e$ .

Абсолютная угловая скорость  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r$ , а величина ее, так как  $\vec{\omega}_e \perp \vec{\omega}_r$ ,

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$



Скорость точки  $A$ , например, можно найти или как сумму переносной и относительной скоростей:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_e + \vec{v}_r, \text{ где } v_e = R\omega_e = R\omega_2, \\ v_r = R\omega_r = R\omega_1 \text{ и}$$

$$v_A = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = R\sqrt{\omega_2^2 + \omega_1^2},$$

или как при абсолютном движении, при вращении вокруг мгновенной оси  $P$ ,  $v_A = R\omega = R\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$

Вектор скорости  $\vec{v}_A$  будет расположен в плоскости

перпендикулярной вектору  $\vec{\omega}$  и оси  $P$ .

**Пример 11.2:** Водило  $OA$  с укрепленными на нем двумя колесами 2 и 3 вращается вокруг оси  $O$  с угловой скоростью  $\omega_0$ . Колесо 2 при этом будет обкатываться по неподвижному колесу 1 и заставит вращаться колесо 3.

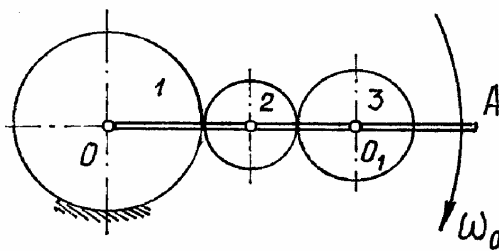


Рис. 11.5.

Найдем угловую скорость  $\omega_3$ , этого колеса. Радиусы колес  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  (рис. 11.5).

Колесо 3 участвует в двух движениях. Вращаться вместе с водилом вокруг оси  $O$  и относительно оси  $O_1$ . Ось  $O$  будет

переносной осью, ось  $O_1$  – относительной. Переносная угловая скорость колеса 3 – это угловая скорость водила  $\omega_e = \omega_0$ , направленная по часовой стрелке, как  $\omega_0$ .

Чтобы определить угловую скорость относительного движения, наблюдателю нужно находиться на водиле. Он увидит водило неподвижным, колесо 1 вращающимся против часовой стрелки со скоростью  $\omega_0$  (рис. 11.6), а колесо 3 – вращающимся с относительной угловой скоростью  $\omega_r$ , против часовой стрелки. Так как

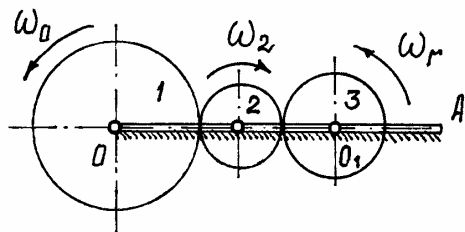


Рис. 11.6.

Так как  $\frac{\omega_0}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$ ;  $\frac{\omega_r}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_3}$ , то  $\omega_r = \frac{R_1}{R_3} \omega_0$ .

Оси вращения параллельны, направления вращений противоположны. Поэтому  $\omega_3 = \omega_r - \omega_e = (\frac{R_1}{R_3} - 1)\omega_0$  и

направлена так же как  $\omega_r$ , против часовой стрелки. В частности, если  $R_3 = R_1$ , то  $\omega_r = \omega_e$  и  $\omega_3 = 0$ . Колесо 3 будет двигаться поступательно.

Исследование движения других подобных конструкций (планетарных и дифференциальных редукторов, передач) ведется аналогичным способом.

Переносной угловой скоростью является угловая скорость водила (рамки, крестовины и т.п.), а чтобы определить относительную скорость какого-либо колеса, нужно водило остановить, а неподвижное колесо заставить вращаться с угловой скоростью водила, но в противоположную сторону.

Угловые ускорения тела в абсолютном движении можно искать как производную  $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ , где  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r$ . Покажем (рис. 11.7) единичные векторы  $\vec{k}_e$  и  $\vec{k}_r$  (орты осей  $z_e$  и  $z_r$ ), а векторы угловых скоростей запишем так:  $\vec{\omega}_e = \omega_e \cdot \vec{k}_e$ ,  $\vec{\omega}_r = \omega_r \cdot \vec{k}_r$ .

Тогда  $\vec{\omega} = \omega_e \vec{k}_e + \omega_r \vec{k}_r$  и угловое ускорение, при  $\vec{k}_e = \text{const}$ ,

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_e}{dt} \cdot \vec{k}_e + \frac{d\omega_r}{dt} \cdot \vec{k}_r + \omega_r \cdot \frac{d\vec{k}_r}{dt}.$$



Здесь  $\frac{d\omega_e}{dt} = \varepsilon_e$ ,  $\frac{d\omega_r}{dt} = \varepsilon_r$  и, по (10.10),  $\frac{d\vec{k}_r}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{k}_r$ . Поэтому

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_e \vec{k}_e + \varepsilon_r \vec{k}_r + \omega_r (\vec{\omega}_e \times \vec{k}_r) \quad \text{или}$$

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_e + \vec{\varepsilon}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r \quad \text{и} \quad \vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_e + \vec{\varepsilon}_r + \vec{\varepsilon}_*, \quad (11.2)$$

где  $\vec{\varepsilon}_e$  – угловое ускорение переносного вращения;  $\vec{\varepsilon}_r$  – угловое ускорение относительного вращения;  $\vec{\varepsilon}_* = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r$  – добавочное угловое ускорение, которое определяет изменение относительной угловой скорости  $\vec{\omega}_r$  при переносном движении. Направлен этот вектор перпендикулярно осям  $z_e$  и  $z_r$ , как скорость конца вектора  $\vec{\omega}_r$ . Модуль добавочного углового ускорения  $\varepsilon_* = \omega_e \cdot \omega_r \sin \alpha$ , где  $\alpha$  – угол между осями.

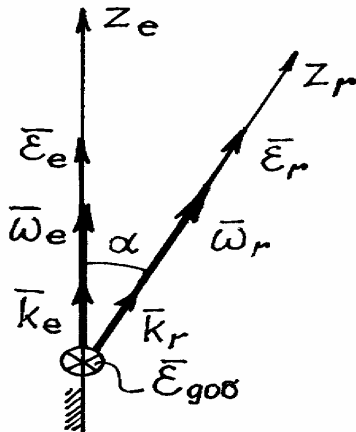


Рис. 11.7.

Конечно, если оси вращения параллельны, это угловое ускорение  $\vec{\varepsilon}_*$  будет равно нулю, так как  $\alpha = 0$ .

## §2. Общий случай движения тела

Произвольное движение тела – это общий случай движения. Его можно рассматривать как сумму двух движений: поступательного вместе с произвольно выбранным полюсом  $C$  и вращения вокруг этого полюса. Первое движение определяется уравнениями движения полюса, точки  $C$ :

$$\left. \begin{aligned} x_C &= x_C(t), \\ y_C &= y_C(t), \\ z_C &= z_C(t). \end{aligned} \right\}$$

А второе движение – уравнениями вращения вокруг точки  $C$  с помощью углов Эйлера:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi(t), \\ \theta &= \theta(t), \\ \varphi &= \varphi(t). \end{aligned} \right\}$$

Скорости и ускорения точек тела в общем случае, при произвольном движении, определяются такими же методами, как при сложном движении точки (см. главу X).

# ДИНАМИКА

---

## ХII. Аксиомы динамики

В разделе кинематики исследовалось движение тел без учета причин, обеспечивающих это движение. Рассматривалось движение, заданное каким-либо способом и определялись траектории, скорости и ускорения точек этого тела.

В разделе динамики решается более сложная и важная задача. Определяется движение тела под действием сил приложенных к нему, с учетом внешних и внутренних условий, влияющих на это движение.

В основе динамики лежит несколько аксиом. Это известные законы Ньютона.

Чтобы их сформулировать, введем несколько понятий.

Первое – *материальная точка*. Материальной точкой будем называть тело, обладающее массой, размеры которого можно не учитывать при определении его движения. Так что материальная точка на самом деле может оказаться довольно солидных размеров. Все зависит от масштабов пространства, в котором тело движется, и от других обстоятельств.

Второе. Точку будем называть *изолированной*, если на точку не оказывается никакого влияния, никакого действия со стороны других тел и среды, в которой точка движется. Конечно, трудно привести пример подобного состояния. Но представить такое можно.

Теперь можно сформулировать первую аксиому.

### §1. Первая аксиома

В основе этой аксиомы лежит первый закон Ньютона. Запишем ее так:

*Изолированная материальная точка движется прямолинейно и равномерно, либо находится в покое, в равновесии.*

Правда при этом возникает вопрос: а относительно чего совершается такое движение? Конечно, наблюдение за таким движением должно вестись из системы отсчета, которая сама движется равномерно и прямолинейно.

Такая система, относительно которой изолированные материальные точки движутся равномерно и прямолинейно, называется *инерциальной системой отсчета*.

Если материальная точка в такой инерциальной системе не находится в равновесии, то эта точка не будет изолированной. Значит на нее оказывается действие со стороны других тел, которое выводит ее из состояния равновесия, то есть на нее действуют силы.

## §2. Вторая аксиома. Основное уравнение динамики

Из второго закона Ньютона следует, что сила, действующая на точку, изменяет ее движение. Это изменение, как известно из кинематики, характеризуется ускорением. Поэтому вторую аксиому сформулируем так:

*При действии на материальную точку силы у точки появляется ускорение, пропорциональное силе и имеющее ее направление.*

Эту зависимость можно записать в виде формулы:  $\vec{F} = m\vec{W}$ . Коэффициент пропорциональности  $m$  называется массой точки.

Если на точку действует несколько сил, то их можно заменить одной силой, равнодействующей  $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$ , и предыдущее равенство записать так:

$$m\vec{W} = \sum \vec{F}_i. \quad (12.1)$$

Это векторное равенство называется *основным уравнением динамики*.

При свободном падении тела вблизи поверхности Земли на него действует сила  $P$ , сила тяжести, которую будем называть весом тела. Если не учитывать другие силы, например сопротивление воздуха, то это будет единственная сила, приложенная к телу. Тогда по (12.1) получим  $mW = P$ . Но при этом движении  $W=g$ , равно ускорению свободного падения. Поэтому массу тела будем определять так:  $m = \frac{P}{g}$ .

## §3. Третья аксиома. Сила инерции

*При действии одного тела на другое возникают две силы, равные по величине, направленные по одной прямой в противоположные стороны и приложенные к телам в точке касания.*

Конечно, нельзя сказать, что эти две силы уравновешиваются, так как они приложены к разным телам.

Проведём небольшой эксперимент. Попробуем перемещать тяжёлое тело по некоторой криволинейной траектории. Сразу обнаружим, что тело сопротивляется изменению направления движения, изменению скорости. Возникает сила со стороны тела, противодействующая силе  $\vec{F}$ , той, которую мы прикладываем к нему.

Эту силу, с которой материальная точка сопротивляется изменению своего движения, будем называть *силой инерции* этой точки -  $\vec{F}^{\text{ин}}$ . По третьей аксиоме она равна и противоположна действующей на точку силе  $\vec{F}$ ,  $\vec{F}^{\text{ин}} = -\vec{F}$ . Но на основании второй аксиомы  $\vec{F} = m\vec{W}$ . Поэтому  $\vec{F}^{\text{ин}} = -m\vec{W}$ .

Итак, сила инерции материальной точки по величине равна произведению её массы на ускорение

$$F^{\text{ин}} = mW. \quad (12.2.)$$

И направлена эта сила инерции в сторону противоположную вектору ускорения.

Например, при движении точки по кривой линии ускорение  $\vec{W} = \vec{W}_n + \vec{W}_\tau$ . Поэтому сила инерции

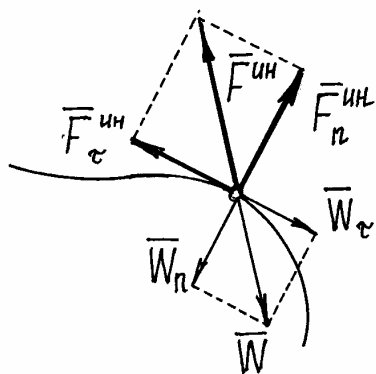


Рис. 12.1.

$$\vec{F}^{\text{ин}} = -m\vec{W} = -m\vec{W}_n - m\vec{W}_\tau = \vec{F}_n^{\text{ин}} + \vec{F}_\tau^{\text{ин}}.$$

То есть её можно находить как сумму двух сил: нормальной силы инерции и касательной силы инерции (рис. 12.1). Причём

$$F_n^{\text{ин}} = m \frac{v^2}{\rho}, \quad F_\tau^{\text{ин}} = m \frac{dv}{dt}.$$

Необходимо заметить, что сила инерции материальной точки, как сила противодействия, приложена не к точке, а к тому телу, которое изменяет её движение. Это очень важно помнить.

### ХIII. Динамика материальной точки

Исследование движения тел начнём с анализа движения материальной точки. При этом приходится решать две задачи. Первая задача – известно как точка движется, нужно определить силы вызывающие это движение; вторая, обратная задача – известны силы, действующие на точку, определить как она будет двигаться.

Первая задача обычно решается методом кинетостатистики.

### §1. Метод кинетостатистики

Пусть на точку действует несколько сил. Составим для неё основное уравнение динамики:  $m\vec{W} = \Sigma\vec{F}_i$ . Перенесём все члены в одну сторону уравнения и запишем так:  $\Sigma\vec{F}_i - m\vec{W} = 0$  или  $\Sigma\vec{F}_i + \vec{F}_i^{\text{ин}} = 0$ .

Это уравнение напоминает условие равновесия сходящихся сил. Поэтому можно сделать вывод, что, если к движущейся материальной точке приложить её силу инерции, то точка будет находиться в равновесии. (Вспомним, что на самом деле сила инерции не приложена к материальной точке и точка не находится в равновесии.) Отсюда следует метод решения таких задач, который называется методом кинетостатистики:

*Если к силам, действующим на точку, добавить её силу инерции, то задачу можно решать методами статики, составлением уравнений равновесия.*

**Пример 13.1.** При движении автомобиля с постоянным ускорением  $\vec{W}$ , маятник (материальная точка подвешенная на нити) отклоняется от вертикали на угол  $\alpha$  (рис. 13.1). Определим с каким ускорением движется автомобиль и натяжение нити.

Рассмотрим «динамическое равновесие» точки. Его так называют потому, что на самом деле точка не находится в равновесии, она движется с ускорением.

На точку действуют силы: вес  $\vec{P}$  и натяжение нити  $\vec{S}$ , реакция нити. Приложим к точке её силу инерции  $F^{\text{ин}} = mW = \frac{P}{g}W$ , направленную в сторону противоположную ускорению точки и автомобиля, и составим уравнение равновесия:

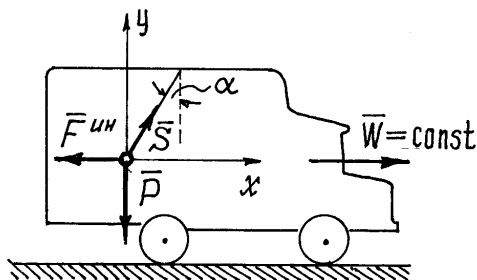


Рис. 13.1.

$$\sum X_i = 0; \quad -F^{\text{ин}} + S \sin \alpha = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad S \cos \alpha - P = 0.$$

Из второго уравнения следует  $S = \frac{P}{\cos \alpha}$ .

Из первого  $-\frac{P}{g}W + S \sin \alpha = 0$  и

$$W = \frac{g}{P} S \sin \alpha = \frac{g}{P} \frac{P}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha = g \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

## §2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

С помощью дифференциальных уравнений движения решается вторая задача динамики. Правила составления таких уравнений зависят от того, каким способом хотим определить движение точки.

### 1) Определение движения точки координатным способом.

Пусть точка  $M$  движется под действием нескольких сил (рис. 13.2). Составим основное уравнение динамики  $m\vec{W} = \sum \vec{F}_i$  и спроектируем это векторное равенство на оси  $x, y, z$ :

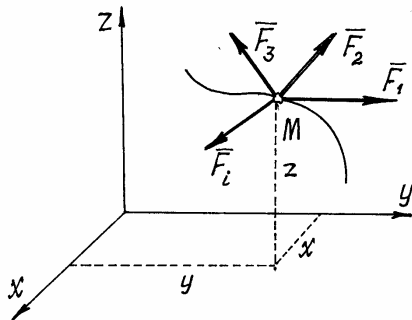


Рис. 13.2.

$$\left. \begin{aligned} mW_x &= \sum X_i, \\ mW_y &= \sum Y_i, \\ mW_z &= \sum Z_i. \end{aligned} \right\}$$

Но проекции ускорения на оси есть вторые производные от координат точки по времени. Поэтому получим

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum X_i, \\ m\ddot{y} &= \sum Y_i, \\ m\ddot{z} &= \sum Z_i. \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

Эти уравнения и являются *дифференциальными уравнениями движения материальной точки*. Решив их, с учётом начальных условий, получим уравнения движения точки:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ .

Пример 13.2. Из пушки, установленной на высоте  $h$ , произвели выстрел под углом  $\alpha$  к горизонту (рис. 13.3.). Ядро вылетело из ствола орудия со скоростью  $u$ . Определим уравнения движения ядра.

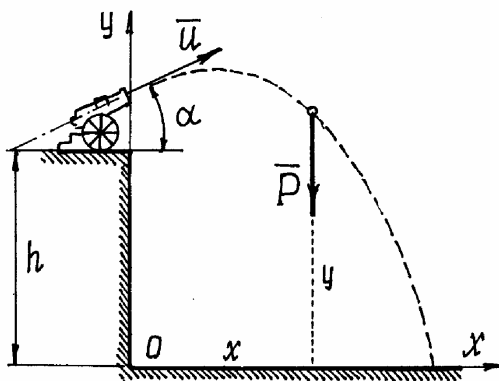


Рис. 13.3.

Чтобы правильно составить дифференциальные уравнения движения, надо решать подобные задачи по определённой схеме.

а) Назначить систему координат (количество осей, их направление и начало координат). Удачно выбранные оси упрощают решение.

б) Показать точку в промежуточном положении. При этом надо проследить за тем, чтобы координаты такого положения обязательно были положительными (рис. 13.3.).

в) Показать силы действующие на точку в этом промежуточном положении (силы инерции не показывать!).

В примере 13.2 – это только сила  $\vec{P}$ , вес ядра. Сопротивление воздуха учитывать не будем.

г) Составить дифференциальные уравнения по формулам (13.1):  $\frac{P}{g}\ddot{x} = 0$ ,  $\frac{P}{g}\ddot{y} = -P$ . Отсюда получим два уравнения:  $\ddot{x} = 0$  и  $\ddot{y} = -g$ .

д) Решить дифференциальные уравнения.

Полученные здесь уравнения – линейные уравнения второго порядка, в правой части – постоянные. Решение этих уравнений элементарно.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= C_1, \\ \dot{y} &= -gt + D_1, \end{aligned} \right\} \text{ и } \left. \begin{aligned} x &= C_1t + C_2, \\ y &= -\frac{1}{2}gt^2 + D_1t + D_2. \end{aligned} \right\}$$

Осталось найти постоянные интегрирования. Подставляем начальные условия (при  $t = 0$   $x = 0$ ,  $y = h$ ,  $\dot{x} = v_x = u \cos \alpha$ ,  $\dot{y} = v_y = u \sin \alpha$ ) в эти четыре уравнения:  $u \cos \alpha = C_1$ ,  $u \sin \alpha = D_1$ ,  $0 = C_2$ ,  $h = D_2$ .

Подставляем в уравнения значения постоянных и записываем уравнения движения точки в окончательном виде

$$\left. \begin{aligned} x &= ut \cos \alpha, \\ y &= -\frac{1}{2}gt^2 + ut \sin \alpha + h. \end{aligned} \right\}$$

Имея эти уравнения, как известно из раздела кинематики, можно определить и траекторию движения ядра, и скорость, и ускорение, и положение ядра в любой момент времени.

Как видно из этого примера, схема решения задач довольно проста. Сложности могут возникнуть только при решении дифференциальных уравнений, которые могут оказаться непростыми.

## 2) Определение движения точки естественным способом.

Координатным способом обычно определяют движение точки, не ограниченные какими-либо условиями, связями. Если на движение точки наложены ограничения, на скорость или координаты, то определить такое движение координатным способом совсем не просто. Удобнее использовать естественный способ задания движения.

Определим, например, движение точки по заданной неподвижной линии, по заданной траектории (рис. 13.4.).

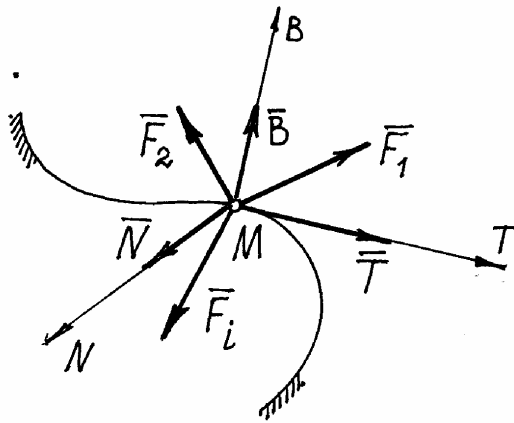


Рис. 13.4.

На точку  $M$  кроме заданных активных сил  $\vec{F}_i$ , действует реакция линии. Показываем составляющие реакции  $\vec{R}$  по естественным осям  $\vec{N}$ ,  $\vec{T}$ ,  $\vec{B}$ .

Составим основное уравнение динамики  $m\vec{W} = \sum \vec{F}_i + \vec{N} + \vec{T} + \vec{B}$  и спроектируем его на естественные оси

$$\left. \begin{aligned} mW_n &= \sum F_{in} + N, \\ mW_\tau &= \sum F_{i\tau} + T, \\ mW_B &= \sum F_{ib} + B. \end{aligned} \right\}$$

Так как  $W_n = \frac{v^2}{\rho}$ ,  $W_\tau = \frac{dv}{dt} = \ddot{s}$ ,  $W_B = 0$ , то получим дифференциальные уравнения движения, такие

$$\left. \begin{aligned} m \frac{v^2}{\rho} &= \sum F_{in} + N, \\ m\ddot{s} &= \sum F_{i\tau} + T, \\ 0 &= \sum F_{ib} + B. \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

Здесь сила  $\vec{T}$  - сила трения. Если линия, по которой движется точка, гладкая, то  $T=0$  и тогда второе уравнение будет содержать только одну неизвестную - координату  $s$ :

$$m\ddot{s} = \sum F_{i\tau}.$$

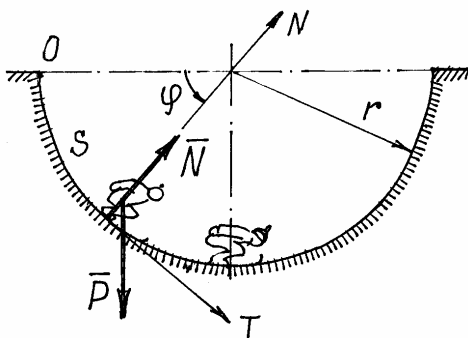


Рис. 13.5.

Решив это уравнение, получим закон движения точки  $s=s(t)$ , а значит, при необходимости, и скорость и ускорение. Первое и третье уравнения (13.2) позволят найти реакции  $\vec{N}$  и  $\vec{B}$ .

**Пример 13.3.** Лыжник спускается по цилиндрической поверхности радиуса  $r$ . Определим его движение, пренебрегая сопротивлениями движению (рис. 13.5).



Схема решения задачи та же, что и при координатном способе (пример 13.2). Отличие лишь в выборе осей. Здесь оси  $N$  и  $T$  движутся вместе с лыжником. Так как траектория – плоская линия, то ось  $B$ , направленную по бинормали, показывать не нужно (проекции на ось  $B$  действующих на лыжника сил будут равны нулю).

Дифференциальные уравнения по (13.2) получим такие

$$\frac{P}{g}\ddot{s} = P \cos \varphi; \quad \frac{P}{g} \frac{v^2}{r} = N - P \sin \varphi. \quad (13.3)$$

Первое уравнение получилось нелинейным:  $\ddot{s} = g \cos \varphi$ . Так как  $s = r\varphi$ , то его можно переписать так:  $\ddot{\varphi} - \frac{g}{r} \cos \varphi = 0$ . Такое уравнение мож-

но один раз проинтегрировать. Запишем  $\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varphi}^2}{d\varphi}$ . Тогда

в дифференциальном уравнении переменные разделятся:  $d\dot{\varphi}^2 = 2 \frac{g}{r} \cos \varphi \cdot d\varphi$ . Интегрирование дает решение  $\dot{\varphi}^2 = 2 \frac{g}{r} \sin \varphi + C_1$ . Так

как при  $t=0$   $\varphi=0$  и  $\dot{\varphi} = \omega_0 = 0$ , то  $C_1=0$  и  $\dot{\varphi} = \sqrt{2 \frac{g}{r} \sin \varphi}$ , а

$\dot{s} = r\dot{\varphi} = \sqrt{2gr \sin \varphi}$ .

К сожалению, в элементарных функциях второй интеграл найти невозможно. Но и полученное решение позволяет сделать некоторые выводы. Можно найти скорость лыжника в любом положении как функцию угла  $\varphi$ . Так в нижнем положении, при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $v = \dot{s} = \sqrt{2gr}$ . А из второго

уравнения (13.3) при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  можно определить давление:  $N = P + \frac{P}{g} \frac{v^2}{r} =$

$= P + \frac{P}{g} \frac{2gr}{r} = 3P$ . То есть давление на лыжника в нижнем положении рав-

но его трехкратному весу.

### §3. Относительное движение материальной точки

В предыдущем параграфе показано было как определяется движение точки относительно неподвижной системы отсчета, абсолютное движение. Нередко приходится исследовать движение материальной точки относительно системы, которая сама движется и довольно сложным образом.

Точка  $M$  (рис. 13.6) под действием некоторых сил  $\vec{F}_i$  совершает сложное движение. Абсолютное определяется координатами  $x, y, z$ , относительное – координатами  $x_1, y_1, z_1$ .

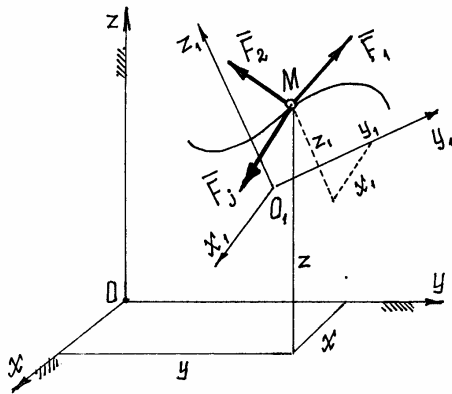


Рис. 13.6.

Составим основное уравнение динамики для точки  $m\vec{W} = \sum \vec{F}_i$ , где абсолютное ускорение  $\vec{W} = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_c$ . Поэтому уравнение будет таким  $m(\vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_c) = \sum \vec{F}_i$  или  $m\vec{W}_r = \sum \vec{F}_i - m\vec{W}_e - m\vec{W}_c$ .

Но  $(-m\vec{W}_e) = \vec{F}_e^{\text{ин}}$  – переносная сила инерции,  $(-m\vec{W}_c) = \vec{F}_c^{\text{ин}}$  – кориолисова сила инерции. Поэтому основное уравнение динамики для относительного движения запишем так

$$m\vec{W}_r = \sum \vec{F}_i + \vec{F}_e^{\text{ин}} + \vec{F}_c^{\text{ин}}. \quad (13.4)$$

Спроектировав это векторное равенство на подвижные оси  $x_1, y_1, z_1$ , имея в виду, что проекции вектора ускорения на оси – есть вторые производные от соответствующих координат по времени, получим дифференциальные уравнения относительного движения

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= \sum X_i + X_e^{\text{ин}} + X_c^{\text{ин}}, \\ m\ddot{y}_1 &= \sum Y_i + Y_e^{\text{ин}} + Y_c^{\text{ин}}, \\ m\ddot{z}_1 &= \sum Z_i + Z_e^{\text{ин}} + Z_c^{\text{ин}}. \end{aligned} \right\} \quad (13.5)$$

Сравнивая эти уравнения с дифференциальными уравнениями абсолютного движения (13.1), замечаем, что *относительное движение материальной точки определяется такими же методами, что и абсолютное, надо лишь кроме обычных сил учесть переносную силу инерции и кориолисову силу инерции.*

Если переносное движение поступательное, равномерное и прямолинейное, т.е. подвижная система инерциальная, то ускорение  $\vec{W}_e = 0$  и  $\vec{W}_c = 0$ . Значит  $\vec{F}_e^{\text{ин}} = 0$ ,  $\vec{F}_c^{\text{ин}} = 0$  и дифференциальное уравнение (13.5) будет точно совпадать с дифференциальным уравнением абсолютного движения (13.1). Следовательно, движение точки во всех инерциальных системах описывается аналогичными законами (отличаются только постоянными интегрирования, зависящими от начальных условий).

Поэтому невозможно установить, наблюдая за движением точки, движется система поступательно, равномерно и прямолинейно или находится в покое. Этот вывод впервые был сделан Г. Галилеем и называется его именем – принцип относительности Галилея.

**Пример 13.4.** Вагон движется с постоянным ускорением  $\vec{W}$ . Определим траекторию движения предмета  $M$ , упавшего с полки высотой  $h$ , которую увидит наблюдатель, пассажир, сидящий в вагоне (рис. 13.7).

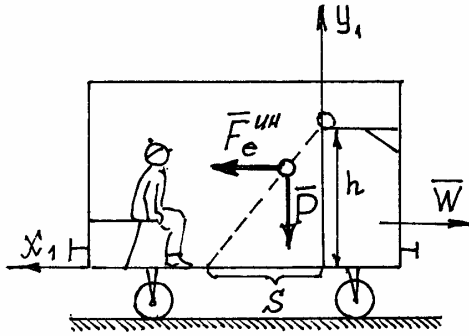


Рис. 13.7.

Порядок решения задачи тот же, что и при определении абсолютного движения. Только оси надо провести по вагону и учесть кроме веса предмета  $\vec{P}$  переносную силу инерции

$$F_e^{\text{инн}} = m \cdot W_e = \frac{P}{g} W \quad (\text{кориолисова сила}$$

инерции  $\vec{F}_c^{\text{инн}} = 0$  – переносное движение поступательное).

Дифференциальные уравнения относительного движения получаются такими

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{g} \ddot{x}_1 &= F_e^{\text{инн}}, \\ \frac{P}{g} \ddot{y}_1 &= -P, \end{aligned} \right\} \quad \text{или} \quad \left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 &= W, \\ \ddot{y}_1 &= -g. \end{aligned} \right\}$$

Решение этих уравнений

$$\dot{x}_1 = Wt + C_1, \quad x_1 = \frac{1}{2} Wt^2 + C_1 t + C_2,$$

$$\dot{y}_1 = -gt + D_1, \quad y_1 = -\frac{1}{2} gt^2 + D_1 t + D_2.$$

Используя начальные условия (при  $t = 0$   $x_1 = 0$ ,  $y_1 = h$ ,  $\dot{x}_1 = 0$ ,  $\dot{y}_1 = 0$ , т.к.  $v_r = 0$ ), найдем постоянные интегрирования:  $C_1 = C_2 = D_1 = 0$ ,  $D_2 = h$ .

Поэтому уравнения движения:  $x_1 = \frac{1}{2} Wt^2$ ,  $y_1 = h - \frac{1}{2} gt^2$ . Траекторию

движения получим, исключив параметр  $t$ :  $y_1 = h - \frac{g}{W} x_1$ . Это уравнение

прямой (рис. 13.7). Предмет  $M$  упадет на пол вагона на расстоянии  $s = h \frac{W}{g}$

от края полки (при  $y_1 = 0$   $x_1 = s$ ).

Если вагон будет двигаться равномерно ( $W = 0$ ), то  $s = 0$ . Наблюдатель увидит траекторию – вертикальную прямую, такую же, как и при неподвижном вагоне.

**Пример 13.5.** Внутри трубки, вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\omega = \text{const}$  вокруг вертикальной оси, находится шарик  $M$ , привязанный нитью длиной  $a$  к оси вращения (рис. 13.8). Определим движение шарика в трубке после того, как нить оборвется. Сопротивление воздуха учитывать не будем.

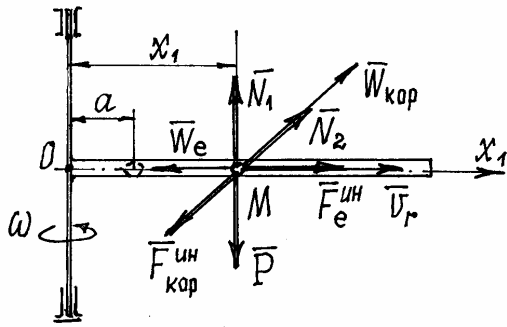


Рис. 13.8.

Траектория движения шарика в трубке – прямая. Поэтому для определения этого движения достаточно одной координаты  $x_1$ . Начало координат, точка  $O$ , – на оси вращения. В промежуточном положении на шарик действуют силы: вес  $\vec{P}$ , две составляющие реакции трубки  $\vec{N}_1$  и  $\vec{N}_2$ . Добавляем переносную силу

$$\text{инерции } F_e^{\text{ин}} = \frac{P}{g} W_e = \frac{P}{g} W_e^n = \frac{P}{g} x_1 \omega^2,$$

кориолисову силу инерции  $F_c^{\text{ин}} = \frac{P}{g} W_c = \frac{P}{g} \cdot 2\omega_e v_r \sin 90^\circ = 2 \frac{P}{g} \omega \dot{x}_1$  и со-

ставляем дифференциальное уравнение движения:  $\frac{P}{g} \ddot{x}_1 = F_e^{\text{ин}}$ . Или, после

подстановки значения силы инерции и преобразований:  $\ddot{x}_1 - \omega^2 x_1 = 0$ .

Решение такого дифференциального уравнения, как известно, имеет вид:  $x_1 = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$  и  $\dot{x}_1 = \omega(C_1 e^{\omega t} - C_2 e^{-\omega t})$ . Так как при  $t = 0$   $x_1 = 0$ ,  $v_r = \dot{x}_1 = 0$ , то  $C_1 + C_2 = a$ ,  $C_1 - C_2 = 0$ . Значит  $C_1 = C_2 = \frac{a}{2}$  и уравнение

движения станет таким  $x_1 = \frac{1}{2} a (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = a \cdot \text{ch} \omega t$ .

Относительная скорость  $v_r = \dot{x}_1 = a\omega \cdot \text{sh} \omega t$ . А т.к.  $\text{ch}^2 \omega t - \text{sh}^2 \omega t = 1$ , то  $v_r = a\omega \sqrt{\text{ch}^2 \omega t - 1} = a\omega \sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} - 1} = \omega \sqrt{x_1^2 - a^2}$ . Можно теперь определить относительную скорость шарика в любом положении. Так шарик вылетит из трубки длиной  $l$  со скоростью  $v_r = \omega \sqrt{l^2 - a^2}$ .

## XIV. Материальная система

### §1. Основные определения и характеристики

*Материальной системой* будем называть совокупность материальных точек, связанных между собой определенным образом (стержнями, нитями, винтами, пружинами и т.п. в том числе и силами взаимодействия).

*Абсолютно твердое тело* также является материальной системой, у которой точек бесконечное множество и связаны они между собой так, что расстояния между ними не изменяются, все время остаются постоянными.

*Центром масс* материальной системы называется геометрическая точка  $C$ , положение которой определяется радиусом-вектором  $\vec{r}_c$  таким, что

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}, \quad (14.1)$$

где  $\vec{r}_i$  – радиусы-векторы отдельных точек с массами  $m_i$ ;  $M = \sum m_i$  – масса всей системы.

Координаты центра масс:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{M}; \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{M}; \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{M}. \quad (14.2)$$

Умножив числитель и знаменатель в (14.1) и (14.2) на  $g$  (ускорение свободного падения) убедимся, что вблизи поверхности Земли ( $g = \text{const}$ ) центр масс совпадает с центром тяжести материальной системы, так как  $m_i g = P_i$  – вес точек системы, сила тяжести их.

При исследовании движения материальной системы силы, действующие на ее точки, иногда приходится делить на классы. Или на внешние и внутренние или, те же силы, на активные (задаваемые) и реакции связей.

*Внешними силами* (обозначать будем  $\vec{F}^{(e)}$ ) являются силы, действующие на точки системы со стороны точек, принадлежащих другим системам.

*Внутренние силы* ( $\vec{F}^{(i)}$ ) – силы взаимодействия между точками системы. Эти силы попарно равны по величине и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Поэтому их главный вектор и главный

момент относительно любой точки равны нулю:  $\vec{R}' = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{(i)} = 0$  и

$$\vec{M}_0 = \sum_{j=1}^n \vec{M}_0(\vec{F}_j^{(i)}) = 0.$$

Конечно, при этом внутренние силы не всегда уравниваются: под действием этих сил отдельные точки системы могут перемещаться относительно друг друга.

*Реакции связей* или просто – *реакции*, это силы которые ограничивают движение точек системы (их координаты, скорость и др.). В статике это были силы заменяющие связи. В динамике для них вводится более общее определение.

*Активными или задаваемыми силами* называются все остальные силы, все кроме реакций.

Необходимость этой классификации сил выяснится в следующих главах.

## §2. Моменты инерции тел

Инерционные свойства твердого тела характеризуются не только его массой  $M$ , определяющей инерционность при поступательном движении, но и моментом инерции, определяющим инерционность вращательного движения тела.

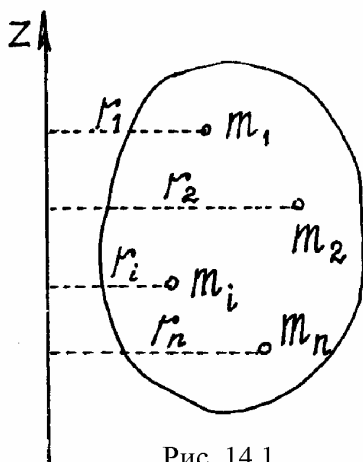


Рис. 14.1.

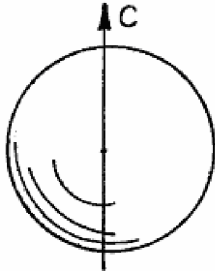
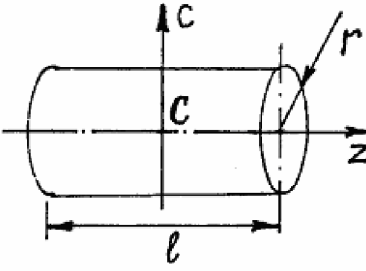
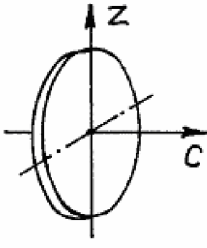
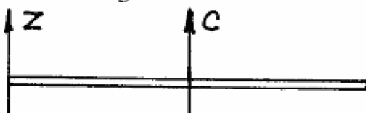
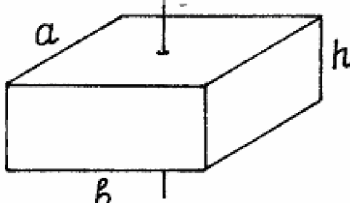
*Моментом инерции тела относительно оси* называется сумма произведений массы каждой точки на квадрат расстояния от точки до оси (рис. 14.1).

$$J_z = \sum m_i r_i^2. \quad (14.3)$$

Заметим сразу, что момент инерции тела – это геометрическая характеристика тела, не зависящая от его движения.

Для однородных тел простой симметричной формы момент инерции можно найти в справочниках. А моменты инерции некоторых тел, которые чаще всего встречаются при исследовании движения материальных систем, даны в таблице 14.1.

Таблица 14.1

 Шар $J_C = \frac{2}{5}Mr^2$	 Цилиндр $J_Z = \frac{1}{2}Mr^2$	 Диск $J_Z = \frac{1}{4}Mr^2$
Сфера $J_C = \frac{2}{3}Mr^2$	$J_C = \frac{1}{12}M(l^2 + 3r^2)$	$J_Z = \frac{1}{2}Mr^2$
 Стержень $J_C = \frac{1}{12}Ml^2$	 Прямоугольный параллелепипед $J_C = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$	
$J_Z = \frac{1}{3}Ml^2$		

В таблице даны моменты инерции тел относительно осей симметрии. Но нередко при исследовании движения реальных механизмов приходится определять моменты инерции относительно осей, не совпадающих с осями симметрии. Этому помогают следующие теоремы.

*Теорема Гюйгенса-Штейнера о моментах инерции тела относительно параллельных осей.*

Найдем зависимость между моментами инерции тела относительно параллельных осей  $z$  и  $C$  (рис. 14.2). Ось  $C$ , проходящая через центр масс тела называется центральной осью. Расстояние между осями –  $a$ .

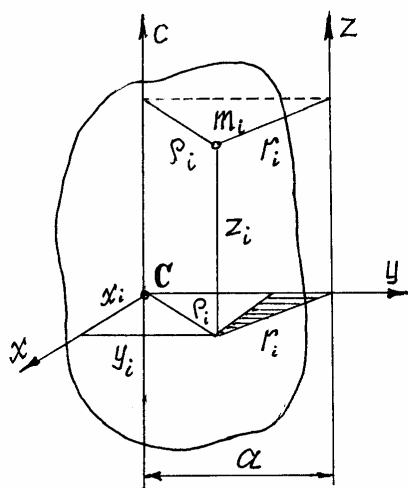


Рис. 14.2.

По определению (14.3)  $J_z = \sum m_i r_i^2$ . Но из заштрихованного прямоугольного треугольника (рис. 14.2) следует, что

$$r_i^2 = x_i^2 + (a - y_i)^2 = x_i^2 + y_i^2 + a^2 - 2ay_i = \rho_i^2 + a^2 - 2ay_i.$$

Поэтому

$$J_z = \sum m_i \rho_i^2 + \sum m_i a^2 - \sum m_i 2ay_i = J_c + Ma^2 - 2a \sum m_i y_i.$$

Но, по (14.2), сумма  $\sum m_i y_i = My_C$  и равна нулю, т.к. начало оси  $y$  выбрано в центре масс  $C$  ( $y_C=0$ ).

Следовательно, момент инерции тела относительно оси  $z$  равен сумме момента инерции тела относительно центральной оси  $C$ , параллельной оси  $z$ , и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями

$$J_z = J_c + Ma^2. \quad (14.4)$$

Так, например, момент инерции стержня относительно оси  $z$  (табл. 14.1)

$$J_z = \frac{1}{12} Ml^2 + M \left( \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} Ml^2. \text{ А момент инерции прямоугольного параллелепипеда относительно оси } z,$$

проведенной по какому-нибудь вертикальному ребру

$$J_z = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2) + M \left( \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right) = \frac{1}{3} M(a^2 + b^2).$$

*Момент инерции тела относительно произвольной оси.*

Найдем момент инерции тела относительно оси  $u$ , проходящей через некоторую точку  $O$  (рис. 14.3).

По определению момент инерции  $J_u = \sum m_i \rho_i^2$ .

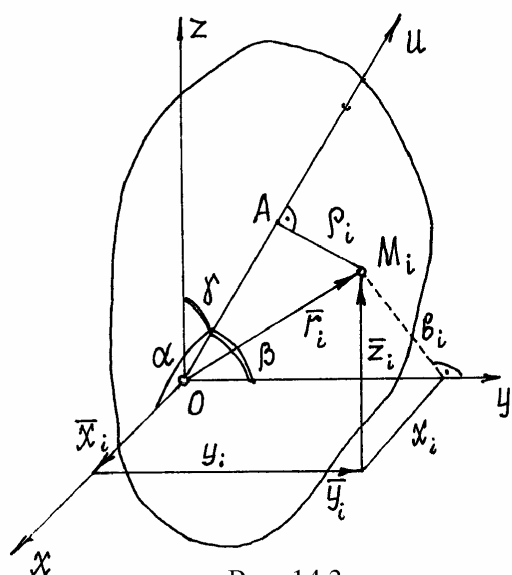


Рис. 14.3.



Поместим в точку  $O$  начало координатных осей  $x, y, z$ . Из прямоугольного треугольника  $OAM_i$  следует  $\rho_i^2 = r_i^2 - OA^2$ , где  $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$ . И так как радиус-вектор точки  $M_i$   $\vec{r}_i = \vec{x}_i + \vec{y}_i + \vec{z}_i$ , то, проектируя это равенство на ось  $u$ , получим  $AO = x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma$  ( $\alpha, \beta, \gamma$  - углы между осью  $u$  и осями  $x, y, z$ ).

Как известно из тригонометрии  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .

Поэтому

$$\begin{aligned} \rho_i^2 &= r_i^2 - OA^2 = r_i^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - (x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma)^2 = \\ &= x_i^2 \cos^2 \alpha + x_i^2 \cos^2 \beta + x_i^2 \cos^2 \gamma + y_i^2 \cos^2 \alpha + y_i^2 \cos^2 \beta + y_i^2 \cos^2 \gamma + z_i^2 \cos^2 \alpha + \\ &+ z_i^2 \cos^2 \beta + z_i^2 \cos^2 \gamma - x_i^2 \cos^2 \alpha - y_i^2 \cos^2 \beta - z_i^2 \cos^2 \gamma - 2x_i y_i \cos \alpha \cos \beta - \\ &- 2y_i z_i \cos \beta \cos \gamma - 2x_i z_i \cos \alpha \cos \gamma. \end{aligned}$$

И, группируя подобные члены, содержащие косинусы одинаковых углов, получим:

$$\rho_i^2 = (y_i^2 + z_i^2) \cos^2 \alpha + (x_i^2 + z_i^2) \cos^2 \beta + (x_i^2 + y_i^2) \cos^2 \gamma - 2x_i y_i \cos \alpha \cos \beta - 2y_i z_i \cos \beta \cos \gamma - 2x_i z_i \cos \alpha \cos \gamma.$$

Но  $y_i^2 + z_i^2 = a_i^2$ ;  $x_i^2 + z_i^2 = b_i^2$ ;  $x_i^2 + y_i^2 = c_i^2$ ; где  $a_i, b_i, c_i$  - расстояния от точки  $M_i$  до осей  $x, y, z$ , соответственно. Поэтому

$$J_u = \sum m_i \rho_i^2 = \left( \sum m_i a_i^2 \right) \cos^2 \alpha + \left( \sum m_i b_i^2 \right) \cos^2 \beta + \left( \sum m_i c_i^2 \right) \cos^2 \gamma - 2 \left( \sum m_i x_i y_i \right) \cos \alpha \cos \beta - 2 \left( \sum m_i y_i z_i \right) \cos \beta \cos \gamma - 2 \left( \sum m_i x_i z_i \right) \cos \alpha \cos \gamma$$

$$\begin{aligned} \text{или} \quad J_u &= J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cdot \cos \beta - \\ &- 2J_{yz} \cos \beta \cdot \cos \gamma - 2J_{xz} \cos \alpha \cdot \cos \gamma, \end{aligned} \quad (14.5)$$

где  $J_x, J_y, J_z$  - моменты инерции тела относительно осей координат;  $J_{xy}, J_{yz}, J_{xz}$  - центробежные моменты инерции относительно осей отмеченных в индексах.

Если два центробежных момента инерции, оба содержащих в индексах названия какой-нибудь одной оси, равны нулю, то эта ось называется *главной осью инерции*. Например, если  $J_{yz} = 0$  и  $J_{xz} = 0$ , то ось  $z$  - главная ось инерции.

Так как все моменты инерции зависят от того, где находится точка  $O$ , от выбора начала координат, то обязательно надо указать для какой точки определены эти моменты инерции. Если начало координат взято в центре масс  $S$ , то все главные оси инерции называются *главными центральными осями инерции*.

Если в данной точке координатные оси являются главными осями инерции (центробежные моменты инерции относительно их равны нулю), то формула (14.5) упрощается:

$$J_u = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma. \quad (14.6)$$

Иногда по некоторым признакам нетрудно найти главные оси инерции тела.

1. Если у однородного тела имеется ось симметрии, то эта ось является главной центральной осью инерции.

Действительно. Направим координатную ось  $z$  по оси симметрии. Тогда для каждой точки тела с координатами  $(x_i, y_i, z_i)$  можно отыскать точку с координатами  $(-x_i, -y_i, -z_i)$  и поэтому центробежные моменты инерции  $J_{xz} = \sum m_i x_i z_i = 0$  и  $J_{yz} = \sum m_i y_i z_i = 0$ . Значит ось  $z$  – главная ось инерции, и центральная ось, т.к. центр масс, как известно, находится на оси симметрии. Причём, эта ось будет главной для любой точки расположенной на оси симметрии.

2. Если у однородного тела имеется плоскость симметрии, то любая ось перпендикулярная ей будет главной осью инерции для всех точек этой плоскости.

Направим ось  $z$  перпендикулярно плоскости симметрии из любой её точки  $O$ , назначив там начало координат. Тогда для каждой точки тела с координатами  $(x_i, y_i, z_i)$  можно найти симметричную ей точку с координатами  $(x_i, y_i, -z_i)$ . Поэтому центробежные моменты инерции  $J_{xz}$  и  $J_{yz}$  будут равны нулю. Значит ось  $z$  – главная ось инерции.

Пример 14.1. Определим момент инерции диска относительно оси  $u$ , расположенной под углом  $\gamma$  к оси симметрии диска  $z$  (рис. 14.4).

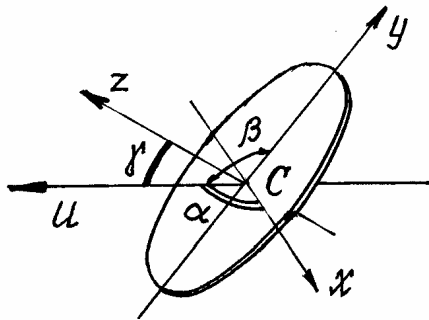


Рис. 14.4.

Оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  – главные центральные оси инерции, т.к. они являются осями симметрии.

Тогда  $J_u = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma$ , где  $\gamma$  - угол между осями  $u$  и  $z$ ; угол  $\beta$  - угол между осями  $u$  и  $y$ , равный  $(90^\circ + \gamma)$ ; угол  $\alpha$  - угол между осями  $u$  и  $x$ , равный  $90^\circ$ . Поэтому

$$\begin{aligned} J_u &= J_x \cos^2 90^\circ + J_y \cos^2 (90^\circ + \gamma) + J_z \cos^2 \gamma = J_y \sin^2 \gamma + J_z \cos^2 \gamma = \\ &= \frac{1}{4} Mr^2 \sin^2 \gamma + \frac{1}{2} Mr^2 \cos^2 \gamma = \frac{1}{4} Mr^2 (\sin^2 \gamma + 2 \cos^2 \gamma). \end{aligned}$$

## XV. Энергия материальной системы

### §1. Работа силы

Если точка приложения силы движется по прямолинейной траектории, то работой постоянной по величине и направлению силы  $\vec{F}$  на перемещении  $s$  (рис. 15.1) называется выражение

$$A = F \cdot s \cdot \cos \alpha. \quad (15.1)$$

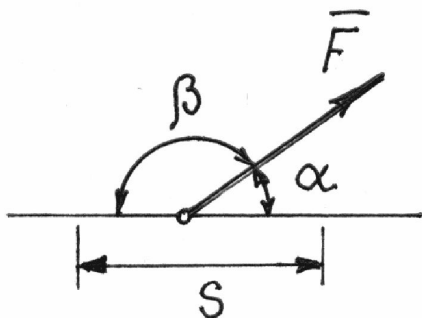


Рис. 15.1

Поскольку от выбора угла  $\alpha$  или  $\beta$  зависит знак работы, то договоримся брать всегда острый угол  $\alpha$  между вектором силы и траекторией. И будем считать работу положительной, если направление силы совпадает с направлением перемещения точки приложения силы из начального положения в конечное.

Из (15.1) следует, что если вектор силы перпендикулярен траектории, работа силы равна нулю.

Если вектор силы изменяется и точка приложения ее движется по кривой линии, то формула (15.1) неприменима. В этом случае надо сначала вычислить элементарную работу силы на перемещении  $ds$  (рис. 15.2)

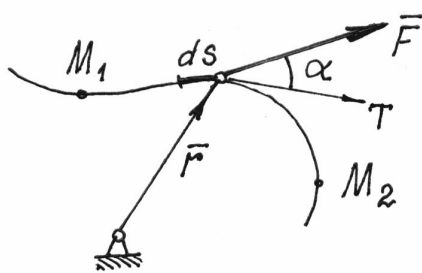


Рис. 15.2

$$dA = F ds \cdot \cos \alpha, \quad (15.2)$$

где  $\alpha$  – угол между касательной осью  $T$  и вектором силы  $\vec{F}$ . А затем, предполагая силу  $F$  и угол  $\alpha$  функциями  $s$ , найти криволинейный интеграл на перемещении по дуге из положения  $M_1$  в положение  $M_2$ :

$$A = \int_{(s)} F ds \cos \alpha.$$

Выражение элементарной работы  $dA$  можно преобразовать, полагая  $ds = v dt$  и  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ :

$$dA = F \cdot v dt \cdot \cos \alpha = \vec{F} \cdot \vec{v} \cdot dt = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (15.3)$$

Определим далее радиус-вектор точки  $M$  с помощью ее координат:  $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$  и  $d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$ , а вектор силы – с помощью

проекций на оси:  $\vec{F} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k}$ . Тогда скалярное произведение двух векторов  $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ , то есть элементарная работа силы:

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz. \quad (15.4)$$

Конечно, чтобы проинтегрировать это выражение, надо проекции силы определять как функции координат точки приложения силы.

Пример 15.1. Работа веса тела (силы тяжести).

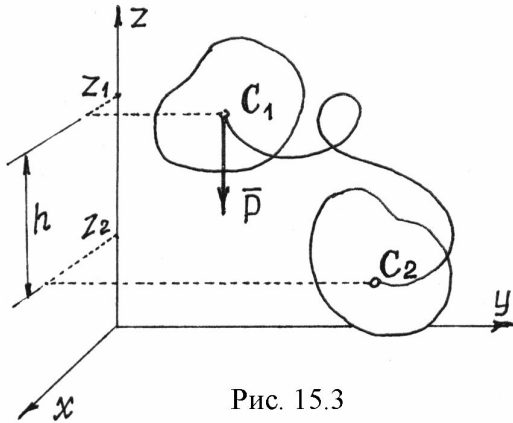


Рис. 15.3

Пусть тело перемещается вблизи поверхности Земли из одного положения в другое так, что центр тяжести его движется по кривой линии (рис.15.3).

Элементарная работа силы  $\vec{P}$ , постоянной и направленной вертикально вниз, по (15.4),  $dA = -Pdz$ .

Поэтому

$$A = - \int_{z_1}^{z_2} Pdz = -P(z_2 - z_1) = P(z_1 - z_2)$$

или  $A = Ph. \quad (15.5)$

Следовательно работа веса тела (постоянной силы тяжести) не зависит от траектории движения центра тяжести. Определяется лишь высотой, на которую опустится или поднимется центр тяжести.

Пример 5.12. Работа силы, приложенной к телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси.

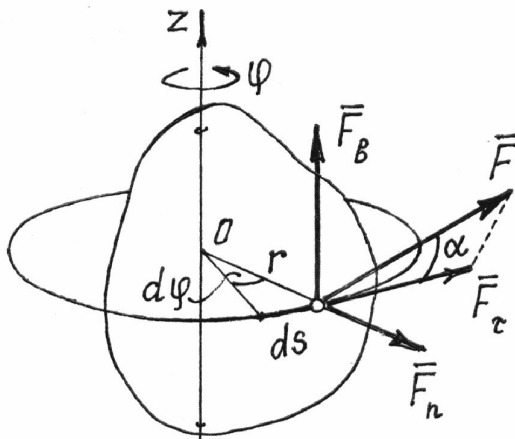


Рис. 15.4.

В этом случае (рис.15.4) точка приложения силы  $\vec{F}$  движется по окружности радиуса  $r$ . Элементарная работа, по (15.2),  $dA = Fds \cdot \cos \alpha$ , где  $ds = r \cdot d\phi$ .

Поэтому  $dA = Fr \cdot d\phi \cdot \cos \alpha$ .

Но  $F \cdot r \cdot \cos \alpha = F_\tau \cdot r = M_z(\vec{F})$ .

Это нетрудно установить, разложив силу на три составляющие (рис. 15.4). (Моменты сил  $\vec{F}_b$  и  $\vec{F}_n$  равны нулю). Значит,

$$dA = M_z(\vec{F}) \cdot d\phi \quad (15.6)$$

В частности, если момент силы относительно оси  $M_z(\vec{F}) = \text{const}$ , работа силы при повороте тела на угол  $\varphi$  равна

$$A = \pm M_z(\vec{F}) \cdot \varphi. \quad (15.7)$$

Знак работы определяется знаками момента силы и угла поворота. Если они одинаковы, работа положительная.

Из формулы (15.7) следует и правило определения работы пары сил. Если пара с моментом  $m$  расположена в плоскости перпендикулярной оси вращения тела, то ее работа при повороте тела на угол  $\varphi$

$$A = \pm m\varphi. \quad (15.8)$$

Если же пара сил действует в плоскости не перпендикулярной оси вращения, то ее надо заменить двумя парами. Одну расположить в плоскости перпендикулярной оси, другую – в плоскости параллельной оси. Моменты их определяются разложением вектора момента  $\vec{m}$  по соответствующим направлениям:  $\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2$ . Конечно работу будет совершать только первая пара с моментом  $m_1 = m \cdot \cos\gamma$ , где  $\gamma$  – угол между вектором  $\vec{m}$  и осью вращения  $z$ ,

$$A = \pm m\varphi \cdot \cos\gamma. \quad (15.9)$$

Пример 15.3. Работа силы упругости.

Такая сила возникает при деформации упругого тела. Если она подчиняется закону Гука, то ее величина будет пропорциональна деформации.

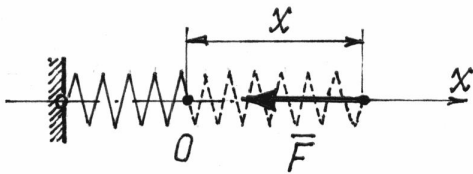


Рис. 15.5

Так при удлинении, например, пружины, на величину  $x$  сила равна  $F = cx$ . (Постоянная, коэффициент  $c$ , называется жесткостью пружины). Сила эта переменная. Поэтому по (15.4)  $dA = -F \cdot dx = -cx \cdot dx$  и тогда при перемещении конца пружины от положения  $x_1$  до  $x_2$  работа

$$A = - \int_{x_1}^{x_2} cx \cdot dx = -\frac{1}{2}c(x_2 - x_1)^2. \text{ И вообще}$$

$$A = \pm \frac{1}{2}cs^2, \quad (15.10)$$

где  $s$  – изменение величины деформации. Знак (–) ставится при увеличении деформации, (+) – при уменьшении.

Этот результат верен для любого упругого тела. И деформацией может быть не только линейное перемещение, но и угол поворота, и объем тела и др. Соответственно изменится и размерность коэффициента жесткости.

## §2. Потенциальная энергия

Часть пространства, в которой на помещенную туда материальную точку действует сила, зависящая от места положения точки, называется *силовым полем*.

Причем, эта сила определяется с помощью силовой функции  $u = u(x, y, z)$ . Если она не зависит от времени, то такое поле называется *стационарным*. Если во всех точках она одинакова, то поле – *однородное*.

Если же проекции силы на декартовы оси есть частные производные от силовой функции по соответствующим координатам

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (15.11)$$

то такое поле называется *потенциальным*.

Вычислим работу силы потенциального поля при перемещении точки из положения  $M_1$  в положение  $M_2$ . (рис. 15.6).

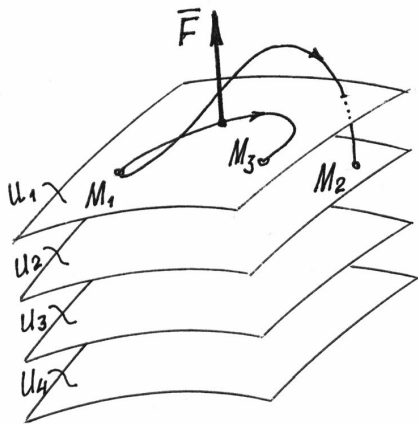


Рис. 15.6

Элементарная работа, по (15.4),  $dA = Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz = du$

Это есть полный дифференциал силовой функции.

Работа на конечном перемещении

$$A = \int_{u_1}^{u_2} du = u_2 - u_1, \quad (15.12)$$

где  $u_2$  и  $u_1$  – значения силовой функции в точках  $M_2$  и  $M_1$ .

Следовательно, работа силы потенциального поля не зависит от траектории движения точки, а определяется лишь значениями силовой функции в начальном и конечном положениях точки.

Естественно, если точка вернется в начальное положение, работа силы  $\vec{F}$  будет равна нулю. Работа окажется равной нулю и при переходе в другую точку  $M_3$ , если там значение силовой функции будет такое же, как и в начальном положении.

Нетрудно догадаться, что точки с одинаковыми значениями силовой функции будут образовывать целую поверхность. И что силовое поле – это слоеное пространство, состоящее из таких поверхностей (рис.15.6). Эти поверхности называются *поверхностями уровня* или *эквипотенциальными поверхностями*. Уравнения их:  $u(x, y, z) = C$  ( $C$  – постоянная, равная зна-

чению  $u$  в точках этой поверхности). А силовую функцию называют, соответственно, *потенциалом* поля.

Конечно, эквипотенциальные поверхности не пересекаются. Иначе существовали бы точки поля с неопределенным потенциалом.

Поскольку, при перемещении точки по эквипотенциальной поверхности работа силы  $\vec{F}$  равна нулю, то вектор силы перпендикулярен поверхности.

Выберем среди этих поверхностей какую-нибудь одну и назовем ее нулевой поверхностью (положим у нее  $u = u_0$ ).

*Работа, которую совершит сила  $\vec{F}$  при переходе точки из определенного места  $M$  на нулевую поверхность, называют потенциальной энергией точки в этом определенном месте  $M$ :*

$$\Pi = A = u_0 - u. \quad (15.13)$$

Заметим, что потенциальная энергия в одной и той же точке поля зависит от выбора нулевой поверхности.

По (15.13) силовая функция  $u = u_0 - \Pi$ . Поэтому проекции силы на декартовы оси, по (15.11), так как  $u_0 = \text{const}$ ,

$$X = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} \quad (15.14)$$

и вектор силы  $\vec{F} = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \cdot \vec{k}\right) = -\text{grad } \Pi$ .

Рассмотрим несколько потенциальных полей.

### 1) Поле силы тяжести.

Вблизи поверхности Земли сила тяжести во всех точках одинакова

$\vec{F} = \vec{P}$ , равна весу тела. Значит, это силовое поле однородное. Так как при перемещении точки в горизонтальной плоскости работа силы равна нулю, то эквипотенциальными поверхностями будут горизонтальные плоскости (рис. 15.7), а уравнения их:  $u = z = C$ .

Если нулевой поверхностью назначить плоскость  $xOy$ , то потенциальная энергия точки в положении  $M$  будет равна работе силы тяжести (15.5):

$$\Pi = A = Ph.$$

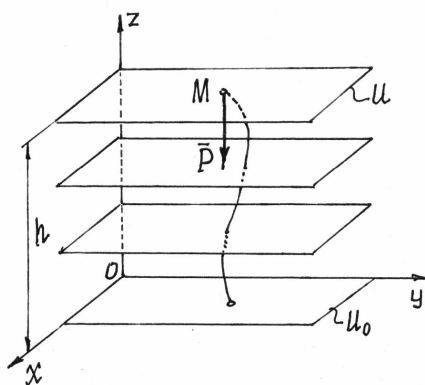


Рис. 15.7

## 2) Поле упругой силы.

При деформации упругого тела, например пружины, появляется сила (см. пример 15.3). То есть около этого тела возникает силовое поле, силы которого пропорциональны деформации тела и направлены в сторону недеформированного состояния. У пружины – в точку  $M_0$ , где находится конец недеформированной пружины (рис. 15.8).

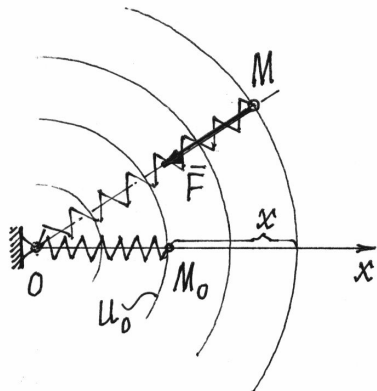


Рис. 15.8

Если перемещать конец пружины так, чтобы длина ее не изменялась, то работа упругой силы  $\vec{F}$  будет равна нулю. Значит эквипотенциальными поверхностями являются сферические поверхности с центром в точке  $O$ .

Назначим нулевой поверхностью сферу, проходящую через точку  $M_0$ , через конец недеформированной пружины. Тогда потенциальная энергия пружины в положении  $M$ :

$$\Pi = A = \frac{1}{2} cx^2, \quad \text{по (15.10).}$$

При таком выборе нулевой поверхности потенциальная энергия всегда будет положительной ( $\Pi > 0$ ), и в растянутом, и в сжатом состоянии.

## §3. Кинетическая энергия

Кинетическая энергия материальной точки – это половина произведения ее массы на квадрат скорости:  $\frac{1}{2}mv^2$ . Кинетическая энергия материальной системы – сумма кинетических энергий всех ее точек

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (15.15)$$

Кинетическая энергия – скалярная и всегда положительная величина,  $(\vec{v}_i)^2 = v_i^2$ .

Для твердого тела формула (15.15) принимает более конкретный вид.

### 1. Кинетическая энергия тела при поступательном движении.

Так как при поступательном движении все точки тела имеют равные скорости  $\vec{v}_i = \vec{v}$ , то его кинетическая энергия

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i v^2}{2} = \frac{1}{2} v^2 \sum m_i = \frac{1}{2} v^2 M \quad \text{или}$$



$$T = \frac{1}{2} M v^2, \quad (15.16)$$

где  $M$  – масса тела,  $v$  – скорость любой его точки.

## 2. Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

При вращении тела вокруг неподвижной оси скорости его точек  $v_i = r_i \omega$  (рис. 15.9). Поэтому кинетическая энергия

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} J_z \quad \text{или}$$

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2, \quad (15.17)$$

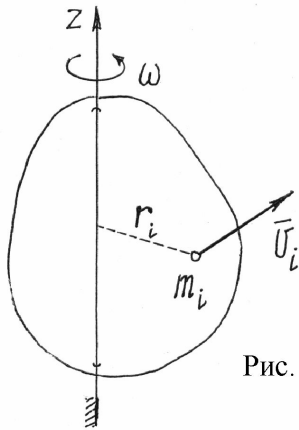


Рис. 15.9

где  $J_z$  – момент инерции тела относительно оси вращения  $z$ .

## 3. Кинетическая энергия тела при плоскопараллельном движении.

С помощью мгновенного центра скоростей  $C_v$  скорость точки тела определяется как произведение расстояния  $a_i$  от точки до  $C_v$  на угловую скорость:  $v_i = a_i \omega$  (рис. 15.10). Поэтому кинетическая энергия

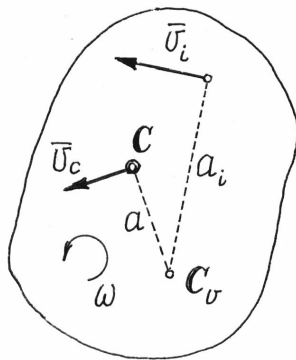


Рис. 15.10

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i a_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i a_i^2 = \frac{1}{2} J_{C_v} \omega^2,$$

где  $J_{C_v}$  – момент инерции тела относительно оси  $C_v$ , проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно плоскости движения. Так как положение  $C_v$  на теле меняется, то полученный результат не очень удобен. С помощью теоремы Гюйгенса-Штейнера (14.4) можно получить более удобное выражение кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2} J_{C_v} \omega^2 = \frac{1}{2} (J_c + M a^2) \omega^2 = \frac{1}{2} J_c \omega^2 + \frac{1}{2} M (a \omega)^2$$

или, т.к.  $a \omega = v_c$  (рис. 15.10),

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2, \quad (15.18)$$

где  $v_c$  — скорость центра масс тела,  $J_c$  — момент инерции тела относительно центральной оси, оси  $C$ , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

#### 4. Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.

При таком движении скорости точек тела определяются как при вращении вокруг мгновенной оси  $P$ :  $v_i = h_i \omega$  (рис. 15.11).

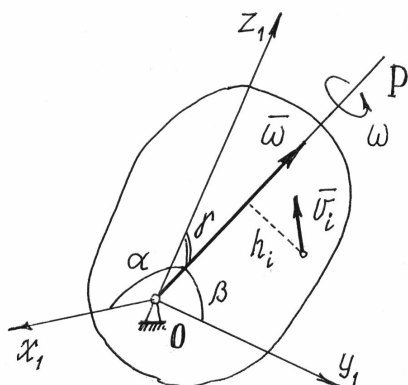


Рис. 15.11

Поэтому кинетическая энергия тела

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i h_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i h_i^2 = \frac{1}{2} J_P \omega^2, \quad (15.19)$$

где  $J_P$  — момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения  $P$ . Конечно, полученный результат не очень удобен, так как ось  $P$  все время меняет свое положение в теле.

Если у тела в точке  $O$  можно отыскать главные оси инерции, то по формуле

(14.6) получим  $J_P = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma$ . Тогда кинетическая энергия, по (15.19) получится

$$T = \frac{1}{2} [J_x (\omega \cos \alpha)^2 + J_y (\omega \cos \beta)^2 + J_z (\omega \cos \gamma)^2]$$

или, окончательно, 
$$T = \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2), \quad (15.20)$$

где  $J_x, J_y, J_z$  — моменты инерции тела относительно главных осей инерции  $x_1, y_1, z_1$  в неподвижной точке  $O$ ;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  — проекции вектора мгновенной угловой скорости  $\vec{\omega}$  на эти оси.

Для самого общего случая движения материальной системы кинетическую энергию помогает вычислить *теорема Кенига*.

Рассмотрим движение материальной системы как сумму двух движений (рис. 15.12). Переносного — поступательного движения вместе с центром масс  $C$  и относительного — движения относительно поступательно движущихся вместе с центром масс осей  $x_1, y_1, z_1$ . Тогда скорость точек  $\vec{v}_i = \vec{v}_{ei} + \vec{v}_{ri}$ . Но переносное движение — поступательное. Поэтому переносные скорости всех точек равны, равны  $\vec{v}_c$ . Значит,  $\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ri}$  и кинетическая энергия будет

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}_c + \vec{v}_{ri})^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (v_c^2 + 2\vec{v}_c \cdot \vec{v}_{ri} + v_{ri}^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum m_i v_c^2 + \sum m_i \vec{v}_c \cdot \vec{v}_{ri} + \frac{1}{2} \sum m_i v_{ri}^2 = \frac{1}{2} M v_c^2 + \vec{v}_c \cdot \sum m_i \vec{v}_{ri} + T_r.$$

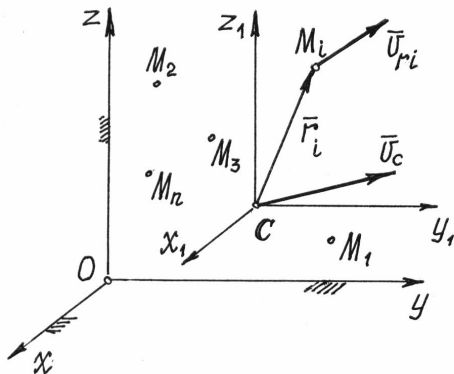


Рис. 15.12

По определению центра масс (14.1) его радиус-вектор в подвижной системе

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} = 0 \quad (\text{центр масс находится в начале координат}), \text{ значит, и } \sum m_i \vec{r}_i = 0.$$

Производная по времени от этой суммы также равна нулю:

$$\frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_i = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum m_i \vec{v}_{ri} = 0.$$

Поэтому, окончательно, кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + T_r. \quad (15.21)$$

*Кинетическая энергия материальной системы равна сумме кинетической энергии при поступательном движении вместе с центром масс и кинетической энергии ее при движении относительно координатных осей, поступательно движущихся вместе с центром масс.*

Так при плоскопараллельном движении, по доказанной теореме Кенига, формула (15.18) получается сразу, т.к. относительное движение есть вращение вокруг центральной оси  $C$ .

В общем случае движения тела, которое можно рассматривать как сумму двух движений (переносного – поступательного вместе с центром масс  $C$  и относительного – вращения вокруг точки  $C$ ), по теореме Кенига (15.21) получим

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_P \omega^2 \quad \text{или} \quad T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2),$$

где  $J_x, J_y, J_z$  – главные центральные оси инерции тела.

#### §4. Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы

Так как ускорение точек материальной системы  $\vec{W}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt}$ , то основные уравнения динамики для этих точек будут  $m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i$ , где  $\vec{F}_i$  – рав-

нодействующая сил, приложенных к  $i$ -той точке. Умножим скалярно левую и правую части этого равенства на  $\vec{v}_i$ :  $\vec{v}_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$  и введем слева вектор  $\vec{v}_i$  под знак дифференциала, а справа учтем, что  $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ . Получим  $m_i \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v_i^2 \right) = \vec{F}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ . Или, окончательно,  $d \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = dA_i$ .

Сложив такие равенства, составленные для всех точек системы, получим:  $d \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum dA_i$  или  $dT = \sum dA_i$ .

Проинтегрируем затем на переходе системы из одного положения в другое:  $\int_{T_1}^{T_2} dT = \sum \int_S dA_i$ . Получим  $T_2 - T_1 = \sum A_i$ .

Запишем результат в виде

$$T_2 - T_1 = A. \quad (15.22)$$

Это значит, *изменение кинетической энергии движущейся материальной системы при переходе ее из одного положения в другое равно сумме работ сил, приложенных к системе, на этом переходе.*

Замечания к теореме.

1. Нетрудно убедиться, что реакции связей без трения работу не совершают. Поэтому при использовании теоремы в этом случае учитываются только активные, задаваемые, силы (гл. XIV, §1).

2. Внутренние силы, вообще говоря, учитывать надо, несмотря на то, что сумма их равна нулю. Простой пример: две точки, соединенные пружиной. При изменении расстояния между точками упругие силы, приложенные к точкам, будут совершать работу. Но если система состоит из абсолютно твердых тел и связи между ними неизменяемые, не упругие, идеальные, то работа внутренних сил будет равна нулю и их можно не учитывать и вообще не показывать на расчетной схеме.

Теорему об изменении кинетической энергии удобно использовать при решении задач, в которых требуется установить зависимость между скоростями и перемещениями тел.

Пример 15.4. Какую скорость надо сообщить точке  $M$  стержня, прикрепленного верхним концом с помощью шарнира  $O$  к неподвижной поверхности (рис. 15.13), чтобы стержень совершил четверть оборота?

В первом, вертикальном, положении кинетическая энергия стержня, начавшего вращаться вокруг оси  $O$ ,

$$T_1 = \frac{1}{2} J_O \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2 \frac{v_M^2}{l^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{P}{g} v_M^2.$$

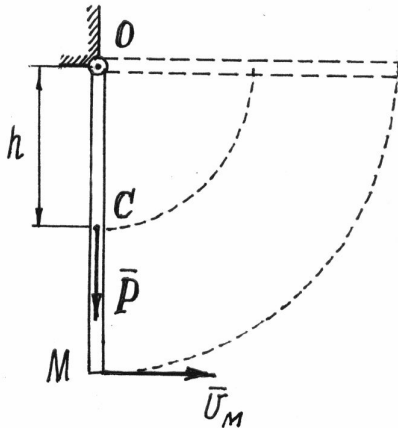


Рис. 15.13

Во втором положении, где стержень достигнет горизонтального положения и остановится на мгновение,  $T_2 = 0$ .

Работу совершит только вес стержня  $P$ :

$A = -Ph = -P \frac{l}{2}$ . По теореме получим

уравнение  $-\frac{1}{6} \cdot \frac{P}{g} v_M^2 = -P \frac{l}{2}$ , из которого

следует  $v_M = \sqrt{3gl}$ .

### §5. Закон сохранения энергии

Рассмотрим движение материальной системы в потенциальном поле под действием только сил этого поля. В каком либо одном положении потенциальная энергия системы, по (15.13),  $\Pi_1 = u_0 - u_1$ . В другом каком-то положении  $\Pi_2 = u_0 - u_2$ . Разность потенциальных энергий  $\Pi_1 - \Pi_2 = u_2 - u_1$ , что равно работе  $A$ , совершенной силами поля на переходе системы из первого положения во второе. Но эта работа по теореме об изменении кинетической энергии  $A = T_2 - T_1$ . Значит,  $\Pi_1 - \Pi_2 = T_2 - T_1$  или  $\Pi_1 + T_1 = \Pi_2 + T_2$ .

А так как положения системы выбраны произвольно, можно утверждать, что *при движении системы в потенциальном поле механическая энергия ее (сумма потенциальной и кинетической) все время остается неизменной, постоянной:*

$$\Pi + T = \text{const.} \quad (15.23)$$

Это и есть закон сохранения механической энергии.

Такую материальную систему, при движении которой действует этот закон, называют *консервативной системой* (энергия ее как бы законсервирована, не изменяется).

## XVI. Принцип Даламбера

### §1. Принцип Даламбера

Метод кинетостатики, сформулированный ранее (XIII, §1), позволяет рассматривать движущуюся материальную точку как бы находящейся в состоянии равновесия, если приложить к ней ее силу инерции. Применяв этот метод ко всем точкам материальной системы, можно сказать, что, если к точкам системы приложить их силы инерции, то система будет находиться в равновесии, а главный вектор всех сил (внешних, внутренних и сил инерции точек) и главный момент их будут равны нулю:

$$\vec{R}' = \sum \vec{F}_j^{(e)} + \sum \vec{F}_j^{(i)} + \sum \vec{F}_j^{\text{ин}} = 0,$$
$$\vec{M}'_o = \sum \vec{M}_o(\vec{F}_j^{(e)}) + \sum \vec{M}_o(\vec{F}_j^{(i)}) + \sum \vec{M}_o(\vec{F}_j^{\text{ин}}) = 0.$$

Сразу заметим, что главный вектор и главный момент внутренних сил равны нулю (XIV, §1). Поэтому внутренние силы исключаются при исследовании движения материальной системы этим методом.

Из сказанного выше следует метод решения задач динамики, который называют принципом Даламбера. Он заключается в том, что *задачу динамики, исследования движения материальной системы, можно решать методами статики, составлением известных уравнений равновесия, учитывая силы инерции точек системы.*

Но этот удобный метод усложняется определением сил инерции твердых тел. Поэтому следует научиться складывать силы инерции точек тела, находить их главный вектор  $\vec{R}'_{\text{ин}}$ , главный момент  $\vec{M}'_{o\text{ин}}$  и, если удастся, равнодействующую  $\vec{R}$ .

### §2. Силы инерции твердого тела

Главный вектор сил инерции точек тела  $\vec{R}'_{\text{ин}} = \sum \vec{F}_i^{\text{ин}} = -\sum m_i \vec{W}_i$ . Но из определения радиуса-вектора центра масс,  $\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$ , следует  $M \vec{r}_c = \sum m_i \vec{r}_i$ . Взяв вторую производную по времени, получим  $M \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = \sum m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$  или  $\sum m_i \vec{W}_i = M \vec{W}_c$ . Поэтому *главный вектор сил инерции точек тела, при любом его движении,*

$$\vec{R}'_{\text{ин}} = -M \vec{W}_c. \quad (16.1)$$

То есть величина главного вектора равна произведению массы тела на ускорение центра масс его:  $R'_{ин} = MW_c$  и направлен  $\vec{R}'_{ин}$  в сторону противоположную ускорению центра масс.

Прикладывается главный вектор к точке приведения, которую можно назначить в любом месте, т.е. он не зависит от выбора этой точки.

С определением главного момента сил инерции возникает немало сложностей. Рассмотрим несколько частных случаев.

1. *Твердое тело движется поступательно.*

При таком движении главный момент сил инерции можно не определять, а находить сразу равнодействующую этих сил.

Как известно, она равна главному вектору  $\vec{R}_{ин} = \vec{R}'_{ин} = -M\vec{W}_c$ , но имеет определенную точку приложения.

Поскольку при поступательном движении все точки тела имеют равные и параллельные векторы ускорений  $\vec{W}_i = \vec{W}_c$ , то силы инерции их также будут параллельными и направленными в одну сторону. Но равнодействующая таких параллельных сил приложена к точке, радиус-вектор

$$\vec{r} = \frac{\sum F_i^{ин} \vec{r}_i}{\sum F_i^{ин}} = \frac{\sum m_i W_i \vec{r}_i}{\sum m_i W_i} = \frac{\sum m_i W_c \vec{r}_i}{\sum m_i W_c} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} = \vec{r}_c,$$

равен радиус-вектору центра масс.

Следовательно, равнодействующая сил инерции точек тела при поступательном движении приложена к центру масс тела, как к центру параллельных сил.

2. *Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси.*

Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси  $z$  (рис. 16.1).

Проведем в теле, в какой-нибудь точке  $O$  на оси  $z$ , еще две оси  $x$  и  $y$ , перпендикулярные друг другу и оси  $z$ , которые вращаются вместе с телом.

Определим касательное и нормальное ускорения некоторой точки  $M_i$ :  $W_i^\tau = r_i \varepsilon$ ,  $W_i^n = r_i \omega^2$  и соответствующие им силы инерции,  $F_{i\tau}^{ин} = m_i W_i^\tau$ ,  $F_{in}^{ин} = m_i W_i^n$ , направленные противоположно ускорениям.

Тогда главный момент сил инерции всех точек тела относительно оси  $z$

$$\begin{aligned} M_z^{ин} &= \sum M_z(\vec{F}_{i\tau}^{ин}) + \sum M_z(\vec{F}_{in}^{ин}) = \sum M_z(\vec{F}_{i\tau}^{ин}) = -\sum F_{i\tau}^{ин} \cdot r_i = \\ &= -\sum m_i W_i^\tau r_i = -\sum m_i r_i \varepsilon \cdot r_i = -\varepsilon \sum m_i r_i^2 = -\varepsilon \cdot J_z. \end{aligned}$$

Итак, главный момент сил инерции точек тела относительно неподвижной оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на модуль углового ускорения

$$M_z^{\text{ин}} = J_z \cdot \varepsilon. \quad (16.2)$$

Направляется он в сторону, противоположную угловому ускорению.

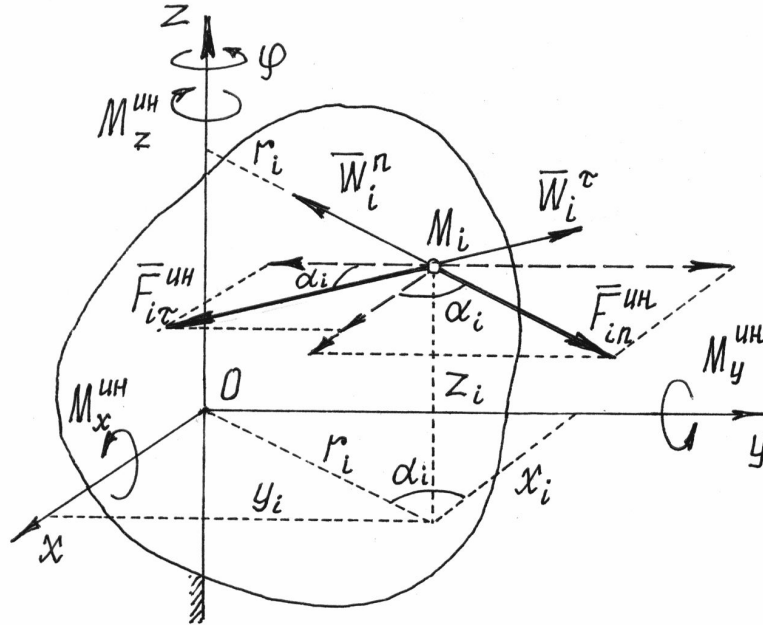


Рис. 16.1

Главный момент сил инерции точек тела относительно оси  $x$ , раскладывая силы инерции на две составляющие параллельные и перпендикулярные оси  $x$  (рис.16.1),  $M_x^{\text{ин}} = \sum M_x(\vec{F}_{i\tau}^{\text{ин}}) + \sum M_x(\vec{F}_{in}^{\text{ин}}) =$   
 $= \sum F_{i\tau}^{\text{ин}} \cos \alpha_i \cdot z_i - \sum F_{in}^{\text{ин}} \sin \alpha_i \cdot z_i = \sum m_i W_i^\tau \cos \alpha_i \cdot z_i -$   
 $- \sum m_i W_i^n \sin \alpha_i \cdot z_i = \sum m_i r_i \varepsilon \cdot \cos \alpha_i \cdot z_i - \sum m_i r_i \omega^2 \cdot \sin \alpha_i \cdot z_i.$   
 А так как  $r_i \cos \alpha_i = x_i$  и  $r_i \sin \alpha_i = y_i$ , то

$$M_x^{\text{ин}} = \varepsilon \sum m_i x_i z_i - \omega^2 \sum m_i y_i z_i = \varepsilon J_{xz} - \omega^2 J_{yz}.$$

Итак, главный момент сил инерции относительно оси  $x$

$$M_x^{\text{ин}} = J_{xz} \varepsilon - J_{yz} \omega^2, \quad (16.3)$$

где  $J_{xz}, J_{yz}$  – центробежные моменты инерции тела относительно соответствующих осей в точке  $O$  (см. XIV, §2).



В частности, если тело имеет плоскость материальной симметрии, перпендикулярную оси вращения  $z$ , то эта ось  $z$  будет главной осью инерции,  $J_{xz} = J_{yz} = 0$  и  $M_x^{\text{ин}} = 0$ .

Осталось вычислить главный момент сил инерции относительно оси  $y$ :

$$\begin{aligned} M_y^{\text{ин}} &= \sum M_y(\vec{F}_{i\tau}^{\text{ин}}) + \sum M_y(\vec{F}_{in}^{\text{ин}}) = \sum F_{i\tau}^{\text{ин}} \sin \alpha_i \cdot z_i - \sum F_{in}^{\text{ин}} \cos \alpha_i \cdot z_i = \\ &= \sum m_i W_i^\tau \sin \alpha_i \cdot z_i - \sum m_i W_i^n \cos \alpha_i \cdot z_i = \sum m_i r_i \varepsilon \cdot \sin \alpha_i \cdot z_i - \\ &- \sum m_i r_i \omega^2 \cdot \cos \alpha_i \cdot z_i = \varepsilon \sum m_i y_i z_i - \omega^2 \sum m_i x_i z_i = \varepsilon J_{yz} - \omega^2 J_{xz}. \end{aligned}$$

Следовательно, главный момент сил инерции точек тела относительно оси  $y$

$$M_y^{\text{ин}} = J_{yz} \varepsilon - J_{xz} \omega^2. \quad (16.4)$$

Опять, если тело имеет плоскость симметрии, перпендикулярную оси вращения  $M_y^{\text{ин}} = 0$ .

### Примечания

а) Определив главные моменты сил инерции точек тела относительно взаимно перпендикулярных осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , можно найти главный момент относительно точки  $O$ , начала координат,

$$M_O^{\text{ин}} = \sqrt{(M_x^{\text{ин}})^2 + (M_y^{\text{ин}})^2 + (M_z^{\text{ин}})^2}, \quad (16.5)$$

так как главные моменты относительно осей  $M_x^{\text{ин}}, M_y^{\text{ин}}, M_z^{\text{ин}}$  - являются проекциями вектора  $\vec{M}_O^{\text{ин}}$  на оси.

б) Если у тела имеется плоскость материальной симметрии, перпендикулярная оси вращения  $z$ , то нетрудно отыскать равнодействующую сил инерции точек тела  $\vec{R}_{\text{ин}}$ .

Она будет расположена в этой плоскости и равна главному вектору  $\vec{R}_{\text{ин}} = \vec{R}'_{\text{ин}} = -M\vec{W}_c$ . Центр масс также находится в этой плоскости.

На рис.16.2 дано сечение тела плоскостью симметрии (точка  $O$  – точка пересечения оси вращения и этой плоскости) и показаны центр масс  $C$ , ускорение центра масс  $\vec{W}_c$  и направление вектора равнодействующей  $\vec{R}_{\text{ин}}$ .

Легко находится расстояние  $h$  от оси  $z$  до линии действия равнодействующей  $h = \frac{M_z^{\text{ин}}}{R'_{\text{ин}}} = \frac{J_z \varepsilon}{M W_c}$ .

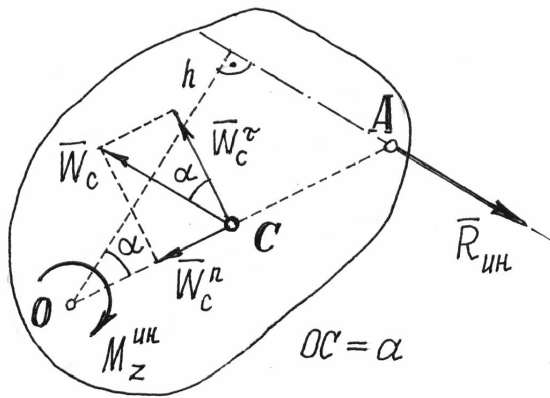


Рис. 16.2

тела, определяется только геометрией его. Следовательно, в этом случае у тела имеется такая точка  $A$ , к которой всегда приложена равнодействующая сил инерции точек тела (направление линии действия вектора  $\vec{R}_{инн}$ , конечно, может быть различным, зависящим от закона вращения).

1. Тело совершает плоскопараллельное движение.

При плоскопараллельном движении ускорение точки тела есть сумма трех ускорений: ускорения полюса, нормального ускорения и касательного ускорения точки при вращении вокруг полюса. Если полюс – центр масс  $C$ , то ускорение  $i$ -той точки  $\vec{W}_i = \vec{W}_c + \vec{W}_{ic}^n + \vec{W}_{ic}^{\tau}$ . Соответственно у точки будут три составляющие силы инерции:  $\vec{F}_{ie}^{инн}$ ,  $\vec{F}_{in}^{инн}$ ,  $\vec{F}_{i\tau}^{инн}$  (рис.16.3).

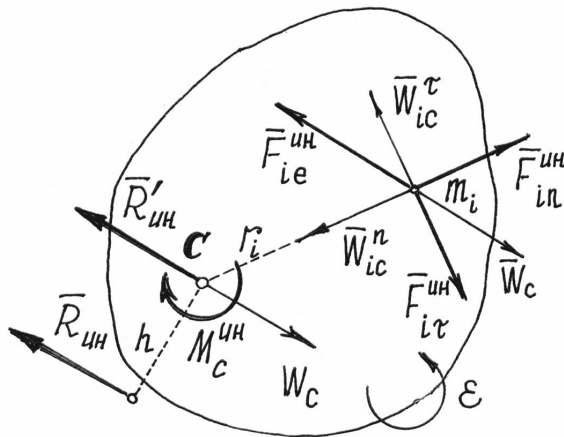


Рис. 16.3

Но лучше найти расстояние  $OA$  от оси до линии действия равнодействующей, проведенной через центр масс  $C$ :

$$OA = \frac{h}{\cos \alpha} = \frac{J_z \epsilon}{M W_c \cos \alpha} = \frac{J_z \epsilon}{M W_c^{\tau}} = \frac{J_z \epsilon}{M a \epsilon} = \frac{J_z}{M a} \quad (16.6)$$

Это расстояние удобнее тем, что оно не зависит от закона вращения

тела, определяется только геометрией его. Следовательно, в этом случае у тела имеется такая точка  $A$ , к которой всегда приложена равнодействующая сил инерции точек тела (направление линии действия вектора  $\vec{R}_{инн}$ , конечно, может быть различным, зависящим от закона вращения).

Тогда главный момент сил инерции точек тела относительно оси  $C$ , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения,  $M_c^{инн} = \sum M_c (\vec{F}_{ie}^{инн}) + \sum M_c (\vec{F}_{in}^{инн}) + \sum M_c (\vec{F}_{i\tau}^{инн})$ .

Но первая сумма равна нулю, т.к. по теореме Вариньона она равна моменту равнодействующей этих сил  $\vec{F}_{ie}^{инн}$ , которая приложена к центру масс, потому что переносное движение тела при плоскопараллельном движении – поступательное.

Вторая сумма также равна нулю, т.к. линии действия этих сил  $\vec{F}_{in}^{ин}$  пересекают ось  $C$ .

$$\begin{aligned} \text{Тогда } M_c^{ин} &= \sum M_c(\vec{F}_{i\tau}^{ин}) = -\sum F_{i\tau}^{ин} \cdot r_i = -\sum m_i W_{ic}^\tau \cdot r_i = \\ &= -\sum m_i \cdot r_i \varepsilon \cdot r_i = -\varepsilon \sum m_i r_i^2 = -\varepsilon \cdot J_c. \end{aligned}$$

Итак, главный момент сил инерции точек тела при плоскопараллельном движении относительно центральной оси  $C$ , перпендикулярной плоскости движения, равен произведению момента инерции относительно этой оси на модуль углового ускорения

$$M_c^{ин} = J_c \varepsilon. \quad (16.7)$$

Направляется этот момент в сторону, противоположную направлению углового ускорения  $\varepsilon$ .

При желании можно найти равнодействующую сил инерции. Она будет равна главному вектору  $\vec{R}'_{ин} = \vec{R}'_{ин} = -M\vec{W}_c$ , параллельна ему, а ли-

ния действия ее будет находиться на расстоянии  $h = \frac{M_c^{ин}}{R'_{ин}}$  от центра масс, отложенном перпендикулярно  $\vec{R}'_{ин}$  в сторону, определяемую направлением момента  $M_c^{ин}$  (рис.16.3).

Принцип Даламбера удобно использовать при решении задач, в которых требуется определить неизвестные силы и, иногда, ускорение.

**Пример 16.1.** Шар весом  $P$  скатывается без скольжения по наклонной плоскости. Определим реакции плоскости и ускорение центра масс  $C$ .

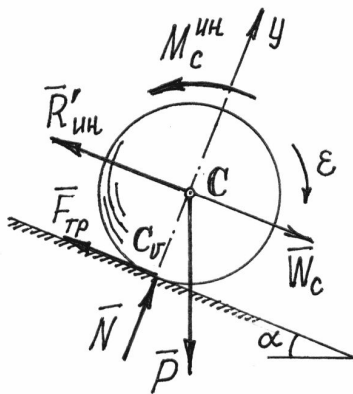


Рис. 16.4

Показываем внешние силы, действующие на шар: вес  $\vec{P}$ , реакции  $\vec{N}$  и  $\vec{F}_{тр}$  (трение качения учитывать не будем). Добавляем силы инерции: главный вектор  $\vec{R}'_{ин}$ , приложенный к центру масс, и главный момент сил инерции относительно центральной оси (рис.16.4). Величина их

$$R'_{ин} = MW_c = \frac{P}{g} W_c;$$

$$M_c^{ин} = J_c \varepsilon = \frac{2}{5} \frac{P}{g} r^2 \frac{W_c}{r} = \frac{2}{5} \frac{P}{g} r W_c.$$

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum M_{ic_v} = 0; R'_{ин} \cdot r - Pr \cdot \sin \alpha + M_c^{ин} = 0;$$

$$\sum M_{ic} = 0; -F_{тр} \cdot r + M_c^{ин} = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; N - P \cos \alpha = 0.$$

Из первого уравнения находим ускорение центра масс.

Так как  $\frac{P}{g} W_c r - P \cdot r \cdot \sin \alpha + \frac{2}{5} \frac{P}{g} W_c r = 0$ , то  $W_c = \frac{5}{7} g \cdot \sin \alpha$ .

Из второго уравнения – силу трения  $F_{тр} = \frac{2}{7} P \cdot \sin \alpha$ ; из третьего – нормальную реакцию  $N = P \cos \alpha$ .

Так как при движении без скольжения сила трения  $F_{тр} \leq fN$ , то шар будет скатываться без скольжения, если выполняется условие  $\frac{2}{7} P \sin \alpha \leq fP$  или  $f \geq \frac{2}{7} \operatorname{tg} \alpha$ .

**Пример 16.2.** Однородный стержень весом  $P$  и длиной  $l$  качается как маятник в вертикальной плоскости, вращаясь вокруг оси  $O$  (рис.16.5). Определим движение стержня и реакции оси.

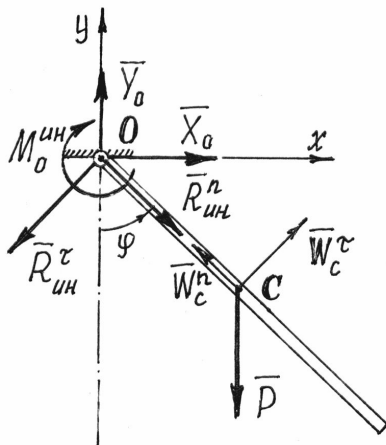


Рис. 16.5

На стержень действуют сила  $\vec{P}$  и реакции оси  $\vec{X}_O$  и  $\vec{Y}_O$ . Добавляем силы инерции. Приводим их к точке  $O$  на оси вращения. Главный вектор сил инерции, составляющие его,

$$R_{ин}^n = MW_c^n = \frac{P}{g} \frac{l}{2} \omega^2 = \frac{P}{g} \frac{l}{2} \dot{\phi}^2;$$

$$R_{ин}^\tau = MW_c^\tau = \frac{P}{g} \frac{l}{2} \varepsilon = \frac{P}{g} \frac{l}{2} \ddot{\phi}.$$

Главный момент сил инерции относительно оси вращения  $O$

$$M_O^{ин} = J_O \varepsilon = \frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2 \varepsilon = \frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2 \ddot{\phi}.$$

Направляем его в сторону противоположную предполагаемому положительному направлению углового ускорения  $\varepsilon$ . Составляем уравнение равновесия, уравнение моментов сил относительно оси  $O$ :

$$\sum M_{io} = 0; -M_O^{ин} - P \frac{l}{2} \sin \phi = 0.$$

Подставив значение  $M_o^{\text{ин}}$ , получим дифференциальное уравнение вращения

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{3} \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (16.8)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение. Решение его в элементарных функциях не существует. Но первый интеграл можно найти.

Так как  $\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} \frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{\dot{\varphi} d\dot{\varphi}}{d\varphi}$ , то в уравнении (16.8) переменные разделяются:

$$\dot{\varphi} d\dot{\varphi} = -\frac{2}{3} \frac{g}{l} \sin \varphi \cdot d\varphi. \text{ Проинтегрировав, получим } \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 = \frac{2}{3} \frac{g}{l} \cos \varphi + C_1.$$

Если движение началось из горизонтального положения (при  $t=0$   $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ ), то постоянная  $C_1 = 0$ . И тогда  $\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{g}{l} \cos \varphi}$ .

Составив уравнения проекций сил на оси  $x$  и  $y$ ,

$$\sum X_i = 0; X_o - R_{\text{ин}}^{\tau} \cos \varphi + R_{\text{ин}}^n \sin \varphi = 0,$$

$$\sum Y_i = 0; Y_o - P - R_{\text{ин}}^{\tau} \sin \varphi - R_{\text{ин}}^n \cos \varphi = 0,$$

найдем реакции

$$\begin{aligned} X_o &= R_{\text{ин}}^{\tau} \cos \varphi - R_{\text{ин}}^n \sin \varphi = \frac{P l}{g 2} \ddot{\varphi} \cos \varphi - \frac{P l}{g 2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = \\ &= \frac{1}{2} \frac{P}{g} l \cdot \left( -\frac{2}{3} \frac{g}{l} \sin \varphi \cdot \cos \varphi - \frac{4}{3} \frac{g}{l} \cos \varphi \sin \varphi \right) = -\frac{1}{2} P \sin 2\varphi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_o &= P + R_{\text{ин}}^{\tau} \sin \varphi + R_{\text{ин}}^n \cos \varphi = P + \frac{P l}{g 2} \ddot{\varphi} \sin \varphi + \frac{P l}{g 2} \dot{\varphi}^2 \cos \varphi = \\ &= P + \frac{P l}{g 2} \cdot \left( -\frac{2}{3} \frac{g}{l} \sin^2 \varphi + \frac{4}{3} \frac{g}{l} \cos^2 \varphi \right) = \frac{1}{3} P (2 + 3 \cos^2 \varphi). \end{aligned}$$

Так, например, в начале движения, при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $X_o = 0$  и  $Y_o = \frac{2}{3} P$ .

А в нижнем положении, при  $\varphi = 0$ ,  $X_o = 0$  и  $Y_o = \frac{5}{3} P$ .

Заметим, что при решении этой задачи вместо главного вектора и главного момента сил инерции можно было показать только равнодействующую сил инерции, равную, конечно, главному вектору и приложенную

(см. 16.6) к точке  $A$ , на расстоянии  $OA = \frac{J_o}{M \cdot OC} = \frac{M l^2}{3M \cdot 0,5l} = \frac{2}{3} l$ .

## XVII. Принцип возможных перемещений

### §1. Возможные перемещения. Классификация связей

Рассмотрим возможные перемещения точки  $M$  на стержне, прикрепленном к неподвижной поверхности шарниром  $O$  (рис.17.1а). Конечно, стержень позволяет точке двигаться по сферической поверхности в любом направлении и на любое расстояние. Все эти перемещения возможны. Возможно, кстати, перемещение и вниз. Но такое перемещение не стоит называть возможным, потому что нарушается связь, стержень.

Кроме того, возможным перемещением будем называть только малое перемещение, настолько малую часть траектории, что ее можно заменить прямой, отрезком касательной.

Теперь можно сформулировать определение возможного перемещения.

*Возможным перемещением  $\delta s$  точки материальной системы будем называть ее бесконечно малое перемещение, допускаемое связями этой системы.*

К этому определению следует добавить несколько замечаний.

Первое. Само название таких перемещений показывает, что они только возможны, но не обязательны; что этих перемещений из данного положения системы может быть много; что среди них только одно есть действительное\*; что эти перемещения происходят не под действием сил, приложенных к системе, а, так сказать, по нашему желанию.

Второе. За счет малости таких перемещений направляются они по касательной к траектории и имеют, таким образом, направление, совпадающее с вектором скорости. Эту скорость в данном случае также называют *возможной скоростью*, а не действительной.

Третье. При наличии связей между точками материальной системы, возможные перемещения этих точек связаны между собой определенными зависимостями, уравнениями связей.

На рисунке 17.1 дано несколько примеров возможных перемещений точек некоторых материальных систем.

Из этих примеров следует, что возможным перемещением всего тела, вращающегося вокруг оси, является малый угол поворота  $\delta\varphi$ . И возможные перемещения точек его можно определить с помощью этого угла. Так, например,  $\delta s_M = OM \cdot \delta\varphi$ ;  $\delta s_A = OA \cdot \delta\varphi$ ;  $\delta s_B = OB \cdot \delta\varphi$  (рис. 17.1а и 17.1б).

---

\*Если связи – не стационарные, изменяются с течением времени, то действительное перемещение может не быть одним из возможных.

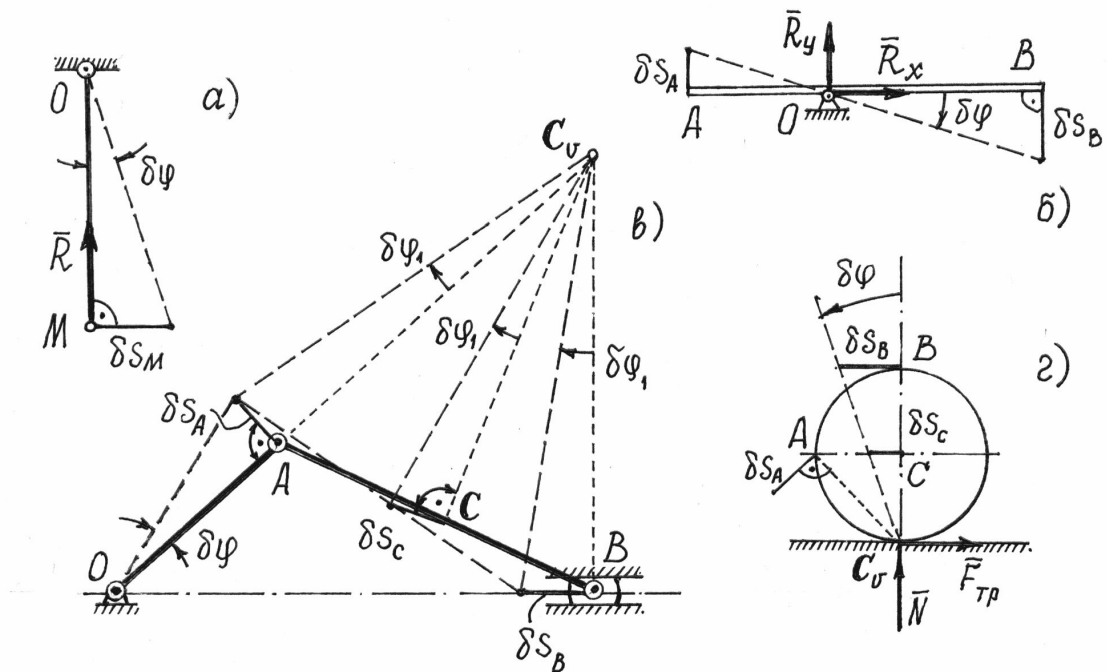


Рис. 17.1

Так как направления возможных перемещений имеют направления скоростей, то перемещения точек звена  $AB$  (рис.17.1в) определяются с помощью мгновенного центра скоростей  $C_v$  этого звена. А возможное перемещение всего тела при плоскопараллельном движении – есть поворот на малый угол  $\delta\varphi_1$  вокруг оси, проходящей через мгновенный центр скоростей. Этот угол можно определить.

Так как  $\delta s_A = OA \cdot \delta\varphi$ , то  $\delta\varphi_1 = \frac{\delta s_A}{AC_v} = \frac{OA}{AC_v} \delta\varphi$ , а перемещение ползуна  $B$   $\delta s_B = BC_v \cdot \delta\varphi_1 = BC_v \frac{OA}{AC_v} \delta\varphi$  и точки  $C$   $\delta s_C = CC_v \delta\varphi_1 = CC_v \frac{OA}{AC_v} \delta\varphi$ . То есть перемещения всех точек механизма можно определить через одно возможное перемещение, перемещение звена  $OA$ , через угол  $\delta\varphi$ .

Аналогично, поворотом на малый угол  $\delta\varphi$  вокруг мгновенного центра скоростей  $C_v$ , определяются возможные перемещения точек колеса, которое может катиться без скольжения по неподвижной прямой (рис.17.2 з).

Работу сил, приложенных к материальной системе, на возможном перемещении будем называть *возможной работой*.

Если рассмотреть различные типы материальных систем, можно обнаружить, что элементарная работа реакций многих связей на возможном перемещении окажется равной нулю. Такие связи, сумма возможных работ реакций которых на любом возможном перемещении равна нулю, называются *идеальными связями*. К таким связям относятся, например, все связи без трения. Кстати, об этом сказано было еще в гл. XV, §4.

Связи, которые не изменяются со временем, называются *стационарными*.

Есть связи, которые называют или *удерживающими*, или *односторонними*, в зависимости от того препятствуют они перемещению точки во взаимно противоположных направлениях или только в одном.

У некоторых материальных систем встречаются и довольно сложные связи, ограничивающие или только положение системы, координаты ее точек, или еще и скорость их, производные от координат по времени. Первые называют *голономными*, геометрическими, связями; вторые – *неголономными*, кинематическими, неинтегрируемыми. Мы в дальнейшем будем рассматривать системы только с голономными связями.

## §2. Принцип возможных перемещений при равновесии материальной системы. Общее уравнение статики

Пусть материальная система находится в равновесии. Силы, действующие на каждую ее точку, уравновешиваются. Если  $\vec{F}_i$  – равнодействующая всех активных сил, приложенных к  $i$ -той точке, а  $\vec{R}_i$  – реакция связей этой точки, то (рис.17.2)

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0.$$

Дадим системе какое-нибудь возможное перемещение. Все точки ее получат перемещения  $\delta s_1, \delta s_2, \delta s_3, \dots, \delta s_n$ .

Затем вычислим работу всех сил на этих перемещениях.

Так как силы, приложенные к каждой точке уравновешиваются и  $\vec{F}_i = -\vec{R}_i$ , то сумма работ этих сил на

перемещении  $\delta s_i$  будет равна нулю:  $F_i \delta s_i \cos \alpha_i - R_i \delta s_i \cos \alpha_i = 0$ . Значит и сумма работ всех сил, приложенных ко всем точкам, будет равна нулю

$$\sum_{i=1}^n F_i \delta s_i \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n R_i \delta s_i \cos \alpha_i = 0.$$

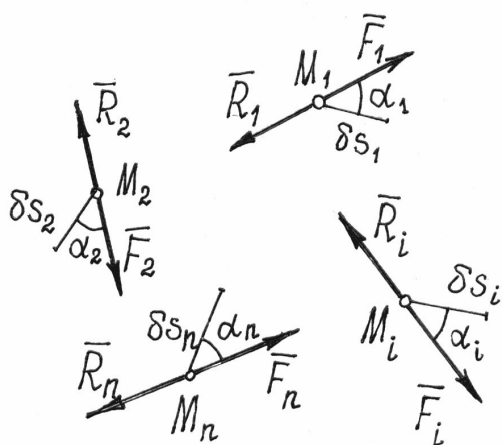


Рис. 17.2



Если связи идеальные, то вторая сумма всегда равна нулю. Значит,

$$\sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i = 0. \quad (17.1)$$

Этот результат, *уравнение работ*, называют *общим уравнением статики*.

*При равновесии материальной системы с идеальными и стационарными связями сумма работ всех активных, задаваемых, сил на любом возможном перемещении системы из положения равновесия равна нулю.*

Конечно, если у системы есть неидеальные связи, например, с трением, или упругие, вроде пружины, то в уравнение работ надо добавить возможную работу реакций этих связей.

Принцип возможных перемещений можно записать в другой форме.

Если возможные перемещения точек определить с помощью возможных скоростей:  $\delta s_i = v_i \delta t$ , где время  $\delta t$  - произвольная бесконечно малая величина, то уравнение работ (17.1) запишется так  $\sum F_i v_i \delta t \cos \alpha_i = 0$ , а, поделив его на  $\delta t$  получим

$$\sum F_i v_i \cos \alpha_i = 0, \quad (17.2)$$

где  $\alpha_i$  – углы между направлениями сил и направлениями векторов возможных скоростей точек приложения сил.

Равенство (17.2) можно назвать *принципом возможных скоростей*, уравнением мощностей. Оно иногда бывает более удобным, так как используются конечные величины скоростей, а не бесконечно малые перемещения.

Этот принцип, общее уравнение статики, позволяет решать задачи на исследование равновесного состояния системы, в частности – находить неизвестные реакции связей. Естественно, при этом возникает вопрос: как же так, ведь реакции идеальных связей не входят в уравнение работ? Выход прост – надо сделать тело свободным, реакции отнести к разряду активных сил и затем назначать такие возможные перемещения, чтобы эти неизвестные силы совершали работу.

Общее уравнение статики – довольно эффективный метод и применять его, конечно, надо для исследования равновесия сложных систем; хотя и при решении обычных задач статики он оказывается тоже выгодным.

Пример 17.1. Какую силу  $F$  надо приложить к желобу с грузом весом  $P$ , чтобы удержать его в равновесии (рис.17.3)?

Эту задачу можно решить известными методами статики, составляя уравнения равновесия. Но при этом придется прежде отыскать усилия в

стержнях. Принцип возможных перемещений позволяет найти силу  $F$  проще, с помощью общего уравнения статики.

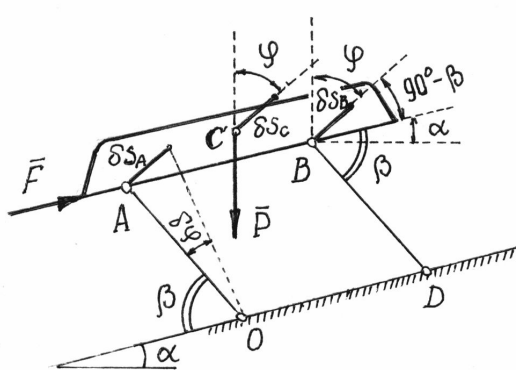


Рис. 17.3

Показываем активные силы  $\vec{P}$  и  $\vec{F}$ . Даем системе возможное перемещение, повернув стержень  $AO$  на угол  $\delta\varphi$  (рис.17.3). Так как желоб совершит поступательное движение, то перемещения всех его точек будут одинаковы:

$$\delta s_A = \delta s_B = \delta s_C = AO \cdot \delta\varphi = a \cdot \delta\varphi,$$

где  $a = AO = BD$ .

Составляем уравнение работ:  $F\delta s_A \cdot \cos(90^\circ - \beta) - P\delta s_C \cdot \cos\varphi = 0$ . Угол  $\varphi = 90^\circ - \alpha - (90^\circ - \beta) = \beta - \alpha$ . Поэтому получим  $Fa\delta\varphi \cdot \sin\beta - Pa\delta\varphi \cdot \cos(\beta - \alpha) = 0$ . Отсюда  $F = P \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\sin\beta}$ .

**Пример 17.2.** На рис.17.4 изображена конструкция, состоящая из четырех одинаковых Т-образных рам, соединенных шарнирами  $K, M, Q$ . Опоры  $A$  и  $E$  – шарнирно-неподвижные,  $B$  и  $D$  – шарнирно-подвижные. Определим горизонтальную составляющую  $\bar{X}_E$  реакции опоры  $E$ , вызванную силой  $\vec{F}$ , приложенной к левой раме.

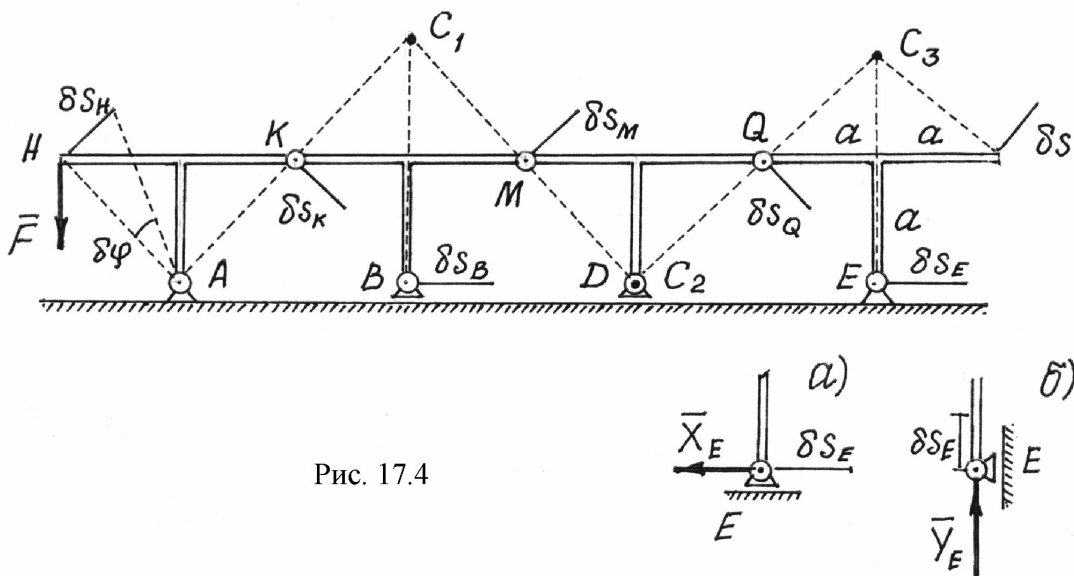


Рис. 17.4

Методы статики дадут довольно сложное и длинное решение, так как придется рассматривать равновесие четырех рам и решать систему из 12 уравнений с 12-ю неизвестными.

Принцип возможных перемещений дает более простое и короткое решение.

Надо изменить конструкцию опоры  $E$ . Сделаем ее подвижной, а чтобы система осталась в равновесии, приложим к опоре силу  $\vec{X}_E$ , ту силу, которую нужно определить (рис.17.4а).

Даем затем системе возможное перемещение, повернув левую раму вокруг опоры  $A$  на угол  $\delta\varphi$ . С помощью мгновенных центров скоростей  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  каждой рамы, обнаруживаем, что  $\delta s_H = \delta s_K = \delta s_M = \delta s_Q$ , а  $\frac{\delta s_E}{\delta s_Q} = \frac{EC_3}{QC_3}$  или  $\delta s_E = \frac{EC_3}{QC_3} \delta s_Q = \frac{2a}{a\sqrt{2}} \delta s_Q = \delta s_Q \cdot \sqrt{2}$ . Составляем уравнение

работ, общее уравнение статики,  $-F\delta s_H \cos 45^\circ - X_E \delta s_E = 0$  или  $-F\delta s_H \frac{\sqrt{2}}{2} - X_E \delta s_Q \sqrt{2} = 0$ . Отсюда  $X_E = -\frac{1}{2}F$ .

Чтобы определить вертикальную составляющую  $\vec{Y}_E$  реакции опоры  $E$ , ее надо вновь переделать (рис. 17.4б), дать системе соответствующее возможное перемещение и составить уравнение работ.

### §3. Принцип возможных перемещений при движении материальной системы. Общее уравнение динамики

По принципу Даламбера материальную систему, движущуюся под действием некоторых сил, можно рассматривать находящейся в равновесии, если ко всем точкам системы приложить их силы инерции. Значит можно воспользоваться и принципом возможных перемещений.

В уравнение работ (17.1) добавится еще сумма работ сил инерции точек на их возможных перемещениях:

$$\sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i + \sum F_i^{\text{ИН}} \delta s_i \cos \beta_i = 0. \quad (17.3)$$

Или по принципу возможных скоростей (17.2):

$$\sum F_i v_i \cos \alpha_i + \sum F_i^{\text{ИН}} v_i \cos \beta_i = 0. \quad (17.4)$$

Эти уравнения называют *общим уравнением динамики*. Оно позволяет решать большой класс задач на исследование движения довольно сложных материальных систем.

Силы инерции точек и твердых тел, составляющих систему, определять уже умеем (гл. XVI, §2).

Стоит подчеркнуть еще одно важное достоинство этого метода, общего уравнения динамики, – реакции связей (идеальных) исключаются при исследовании движения системы.

Пример 17.3. Определим ускорение груза  $G$  (рис.17.5). Вес цилиндра  $-P$ , радиус  $-r$ . Цилиндр катится по плоскости без скольжения.

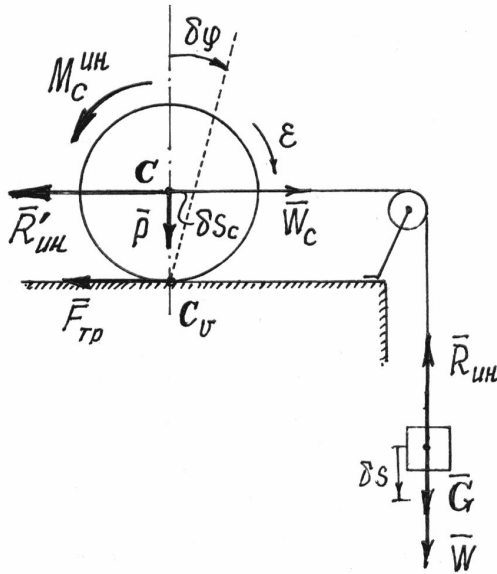


Рис. 17.5

Показываем задаваемые силы  $-\vec{P}$ ,  $\vec{G}$ ,  $\vec{F}_{тр}$ . Добавляем силы инерции. Сила инерции груза, движущегося поступательно,

$$R_{ин} = \frac{G}{g}W.$$

Цилиндр совершает плоскопараллельное движение. Главный вектор сил инерции точек его

$$R'_{ин} = \frac{P}{g}W_c = \frac{P}{g}W.$$

Главный момент сил инерции относительно центральной оси  $C$ :

$$M_c^{ин} = J_c \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{P}{g} r^2 \frac{W_c}{r} = \frac{1}{2} \frac{P}{g} r W,$$

так как  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{v_c}{r} = \frac{1}{r} \frac{dv_c}{dt} = \frac{W_c}{r}$ .

Даем системе возможное перемещение, сдвинув груз вниз на малую величину  $\delta s$ . Центр цилиндра сместится вправо на величину  $\delta s_c = \delta s$ , а весь цилиндр повернется вокруг мгновенного центра скоростей  $C_v$  на угол

$$\delta\varphi = \frac{\delta s_c}{r} = \frac{\delta s}{r}.$$

Вычисляем работу сил на этих перемещениях и составляем уравнение работ, общее уравнение динамики,

$$G \cdot \delta s - R_{ин} \cdot \delta s - R'_{ин} \cdot \delta s_c - M_c^{ин} \cdot \delta\varphi = 0.$$

Так как  $\delta s = \delta s_c = r\delta\varphi$ , то, подставив значения сил инерции, получим уравнение

$$Gr\delta\varphi - \frac{G}{g}Wr \cdot \delta\varphi - \frac{P}{g}Wr \cdot \delta\varphi - \frac{1}{2} \frac{P}{g}Wr \cdot \delta\varphi = 0,$$

из которого находим

$$W = \frac{2G}{2G + 3P} g.$$

# XVIII. Уравнения Лагранжа

## §1. Обобщенные координаты

Обобщенными координатами мы будем называть параметры, которые определяют положение материальной системы.

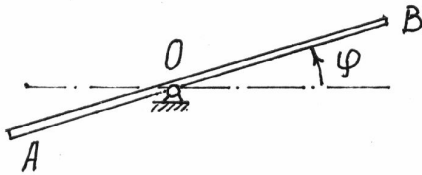


Рис. 18.1

Это могут быть обычные декартовы координаты точек, углы поворота, расстояния, площади, объемы и т.д.

Так на рис.18.1 положение балочки  $AB$  и всех ее точек вполне определяется углом  $\varphi$ .

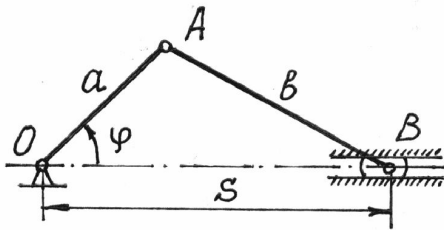


Рис. 18.2

Положение точек кривошипно-шатунного механизма (рис.18.2) можно определить заданием угла поворота  $\varphi$  кривошипа или расстоянием  $s$ , определяющим положение ползуна  $B$  (при  $0 < \varphi < \pi$ ).

Положение сферического маятника (рис.18.3) определяется заданием двух параметров, углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

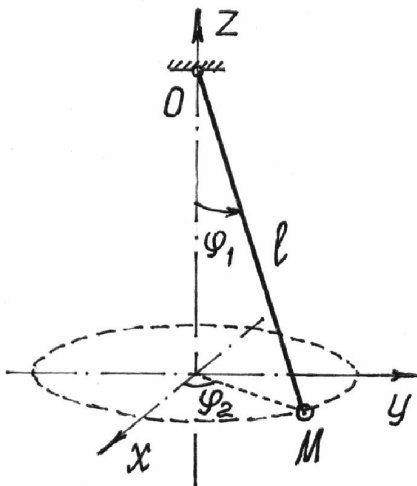


Рис. 18.3

Минимальное количество независимых друг от друга обобщенных координат, которых достаточно, чтобы полностью и однозначно определить положение всех точек системы, называют *числом степеней свободы* этой системы.

Вообще для любой материальной системы можно назначить несколько обобщенных координат. Например, у кривошипно-шатунного механизма (рис.18.2) указаны две обобщенные координаты  $\varphi$  и  $s$ . Но это не значит, что у механизма две степени свободы, так как одну координату можно определить через другую:

$$s = a \cdot \cos \varphi + \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \varphi}$$

А вот у маятника (рис.18.3) две степени свободы, т.к. определяется его положение двумя независимыми обобщенными координатами. Кстати,

если длина маятника изменяется, то для определения положения точки М потребуется еще один параметр – обобщенная координата  $l$ , длина нити. И у маятника станут три степени свободы.

Обобщенные координаты в общем случае будем обозначать буквой  $q$ .

Пусть материальная система имеет  $s$  степеней свободы. Положение ее определяется обобщенными координатами:  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k, \dots, q_s$ .

Нетрудно убедиться, что декартовы координаты  $n$  точек системы можно определить как функции обобщенных координат и времени:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t), \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \end{aligned} \quad (18.1)$$

Так у маятника (рис.18.3) координаты точки М

$$\begin{aligned} x_M &= l \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ y_M &= l \sin \varphi_1 \sin \varphi_2, \\ z_M &= l \cos \varphi_1 \end{aligned}$$

есть функции координат  $l, \varphi_1, \varphi_2$ , и времени  $t$ , если  $l = l(t)$ .

Соответственно, и радиус-вектор точек системы можно определить как функцию обобщенных координат и времени:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t), \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (18.2)$$

## §2. Обобщенные силы

Каждой обобщенной координате  $q_k$  можно вычислить соответствующую ей обобщенную силу  $Q_k$ .

Вычисление производится по такому правилу.

Чтобы определить обобщенную силу  $Q_k$ , соответствующую обобщенной координате  $q_k$ , надо дать этой координате приращение  $\delta q_k$  (увеличить координату на эту величину), оставив все другие координаты неизменными, вычислить сумму работ всех сил, приложенных к системе, на соответствующих перемещениях точек и разделить ее на приращение координаты  $\delta q_k$ :

$$Q_k = \frac{1}{\delta q_k} \sum_{i=1}^n F_i \delta s_i \cos \alpha_i, \quad (18.3)$$

где  $\delta s_i$  перемещение  $i$ -той точки системы, полученное за счет изменения  $k$ -той обобщенной координаты.

Обобщенная сила определяется с помощью элементарных работ. Поэтому эту силу можно вычислить иначе (см. 15.3 и 15.4):

$$Q_k = \frac{1}{\delta q_k} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q_k}.$$

И так как  $\delta \vec{r}_i$  есть приращение радиуса-вектора  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t)$  за счет приращения координаты  $q_k$  при остальных неизменных координатах и времени  $t$ , отношение  $\frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q_k}$  можно определять как частную производную

$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$ . Тогда

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n \left( X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right), \quad (18.4)$$

где координаты точек – функции обобщенных координат (18.1).

Если система консервативная, то есть движение происходит под действием сил потенциального поля (15.14), проекции которых  $X_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}$ ,

$Y_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}$ ,  $Z_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_i}$ , где  $\Pi = \Pi(x_i, y_i, z_i)$ , а координаты точек – функции

обобщенных координат, то

$$Q_k = -\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}. \quad (18.5)$$

*Обобщенная сила консервативной системы есть частная производная от потенциальной энергии по соответствующей обобщенной координате со знаком минус.*

Конечно, при вычислении этой обобщенной силы потенциальную энергию следует определять как функцию обобщенных координат

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s).$$

**Замечания.**

Первое. При вычислении обобщенных сил реакции идеальных связей не учитываются.

Второе. Размерность обобщенной силы зависит от размерности обобщенной координаты. Так если размерность  $[q]$  – метр, то размерность

$[Q] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}} = \text{Ньютон}$ ; если  $[q]$  – радиан, то  $[Q] = \text{Н} \cdot \text{м}$ ; если  $[q] = \text{м}^2$ , то  $[Q] = \frac{\text{Н}}{\text{м}}$  и т.п.

**Пример 18.1.** По качающемуся в вертикальной плоскости стержню скользит колечко  $M$  весом  $P$  (рис. 18.4). Стержень считаем невесомым.

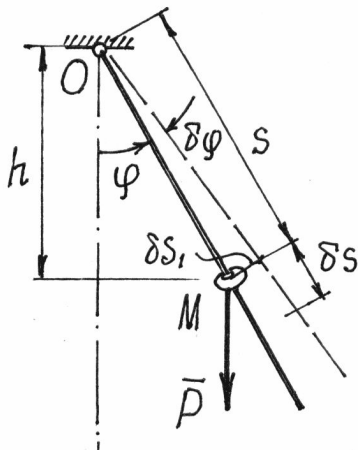


Рис. 18.4

Определим обобщенные силы.

Система имеет две степени свободы. Назначаем две обобщенные координаты  $s$  и  $\varphi$ .

Найдем обобщенную силу, соответствующую координате  $s$ . Даем приращение  $\delta s$  этой координате, оставляя координату  $\varphi$  неизменной, и вычислив работу единственной активной силы  $P$ , получим обобщенную силу

$$Q_s = \frac{1}{\delta s} (P \cdot \delta s \cdot \cos \varphi) = P \cos \varphi.$$

Затем даем приращение  $\delta \varphi$  координате  $\varphi$ , полагая  $s = \text{const}$ . При повороте стержня на угол  $\delta \varphi$

точка приложения силы  $P$ , колечко  $M$ , переместится на  $\delta s_1 = s \cdot \delta \varphi$ . Обобщенная сила получится

$$Q_\varphi = \frac{1}{\delta \varphi} (-P \cdot \delta s_1 \cdot \sin \varphi) = -\frac{1}{\delta \varphi} P s \delta \varphi \sin \varphi = -P s \sin \varphi.$$

Так как система консервативная, обобщенные силы можно найти и с помощью потенциальной энергии  $\Pi = -Ph = -Ps \cdot \cos \varphi$ . Получим

$Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial s} = -P \cos \varphi$  и  $Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -Ps \cdot \sin \varphi$ . Получается гораздо проще.

### §3. Уравнения равновесия Лагранжа

По определению (18.3) обобщенные силы  $Q_k = \frac{1}{\delta q_k} \sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i$ ,

$k = 1, 2, 3, \dots, s$ , где  $s$  – число степеней свободы.

Если система находится в равновесии, то по принципу возможных перемещений (17.1)  $\sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i = 0$ . Здесь  $\delta s_i$  – перемещения, допускаемые связями, возможные перемещения. Поэтому при равновесии материальной системы все ее обобщенные силы равны нулю:

$$Q_k = 0, \quad (k=1, 2, 3, \dots, s). \quad (18.6)$$



Эти уравнения, *уравнения равновесия в обобщенных координатах* или *уравнения равновесия Лагранжа*, позволяют решать задачи статики еще одним методом.

Если система консервативная, то  $Q_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}$ . Значит, в положении равновесия  $\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0$ . То есть в положении равновесия такой материальной системы ее потенциальная энергия либо максимальна, либо минимальна, т.е. функция  $\Pi(q)$  имеет экстремум.

Это очевидно из анализа простейшего примера (рис.18.5). Потенциальная энергия шарика в положении  $M_1$  имеет минимум, в положении  $M_2$  – максимум. Можно заметить, что в положении  $M_1$  равновесие будет устойчивым; в положении  $M_2$  – неустойчивым.

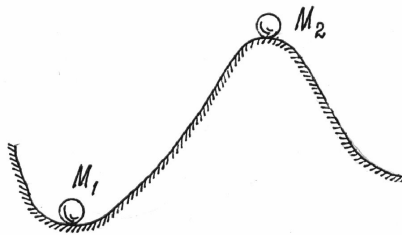


Рис. 18.5

Равновесие считается устойчивым, если телу в этом положении сообщить малую скорость или сместить на малое расстояние и эти отклонения в дальнейшем не увеличатся.

Можно доказать (теорема Лагранжа-Дирихле), что если в положении равновесия консервативной системы ее потенциальная энергия имеет минимум, то это положение равновесия устойчиво.

Для консервативной системы с одной степенью свободы условие минимума потенциальной энергии, а значит и устойчивости положения равновесия, определяется, второй производной, ее значением в положении равновесия,

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} > 0. \quad (18.7)$$

**Пример 18.2.** Стержень  $OA$  весом  $P$  может вращаться в вертикальной плоскости вокруг оси  $O$  (рис.18.6). Найдём и исследуем устойчивость положений равновесия.

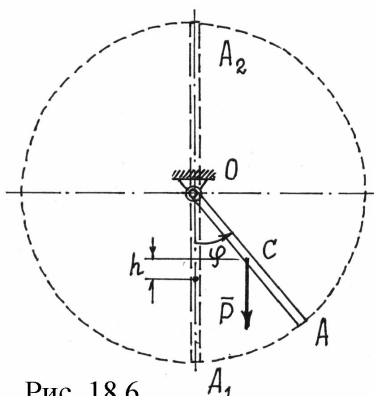


Рис. 18.6

Стержень имеет одну степень свободы. Обобщенная координата – угол  $\varphi$ . Относительно нижнего, нулевого, положения потенциальная энергия  $\Pi = Ph$  или

$$\Pi = P \left( \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \cos \varphi \right) = \frac{1}{2} Pl (1 - \cos \varphi).$$

В положении равновесия должно быть  $\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} Pl \sin \varphi = 0$ . Отсюда имеем два положения равновесия, соответствующие углам  $\varphi_1 = 0$  и  $\varphi_2 = \pi$  (положения  $OA_1$  и  $OA_2$ ). Исследуем их устойчивость. Находим вторую производную  $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{2} Pl \cos \varphi$ . Конечно, при  $\varphi = \varphi_1 = 0$ ,  $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{2} Pl > 0$ . Положение равновесия устойчиво. При  $\varphi = \varphi_2 = \pi$ ,  $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{2} Pl < 0$ . Второе положение равновесия – неустойчиво. Результаты очевидны.

#### §4. Обобщенные силы инерции

По той же методике (18.4), по которой вычислялись обобщенные силы  $Q_k$ , соответствующие активным, задаваемым, силам, определяются и обобщенные силы  $S_k$ , соответствующие силам инерции точек системы:

$$S_k = \frac{1}{\delta q_k} \sum F_i^{\text{ин}} \delta s_i \cos \beta_i = \frac{1}{\delta q_k} \sum \vec{F}_i^{\text{ин}} \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{ин}} \cdot \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q_k} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{ин}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \quad (18.8a)$$

И, так как  $\vec{F}_i^{\text{ин}} = -m_i \vec{W}_i = -m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$ , то  $S_k = -\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \quad (18.8)$

Немного математических преобразований.

Очевидно,  $\frac{d}{dt} \left( \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{d\vec{v}_i}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} + \vec{v}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$ . Отсюда

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left( \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - \vec{v}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \quad (18.9)$$

Так как  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s, t)$ , а  $q_k = q_k(t)$ , ( $k = 1, 2, 3, \dots, s$ ), то

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \text{ где } \dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}.$$

Значит, частная производная скорости  $\vec{v}_i$  по  $\dot{q}_k$

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \quad (18.10)$$

Кроме того, в последнем члене (18.9) можно поменять порядок дифференцирования:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k}. \quad (18.11)$$

Подставляя (18.10) и (18.11) в (18.9), а потом (18.9) в (18.8), получим

$$S_k = -\sum_{i=1}^n m_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} \right] = -\sum_{i=1}^n m_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial q_k} \right].$$

Разделив последнюю сумму на две и, имея ввиду, что сумма производных равна производной от суммы, получим

$$S_k = -\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k}, \quad (18.12)$$

где  $T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}$  – кинетическая энергия системы,  $\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}$  – обобщенная скорость.

## §5. Уравнения Лагранжа

По определению (18.3) и (18.8а) обобщенные силы

$$Q_k = \frac{1}{\delta q_k} \sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i; \quad S_k = \frac{1}{\delta q_k} \sum F_i^{\text{ин}} \delta s_i \cos \beta_i.$$

Сумма их  $Q_k + S_k = \frac{1}{\delta q_k} (\sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i + \sum F_i^{\text{ин}} \delta s_i \cos \beta_i)$  или

$$(Q_k + S_k) \delta q_k = \sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i + \sum F_i^{\text{ин}} \delta s_i \cos \beta_i.$$

Но на основании общего уравнения динамика (17.3), правая часть равенства равна нулю. И так как все  $\delta q_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, s$ ) отличны от нуля, то  $Q_k + S_k = 0$ . Подставив значение обобщенной силы инерции (18.12), получим уравнение

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad (k = 1, 2, 3, \dots, s). \quad (18.13)$$

Эти уравнения называются *дифференциальными уравнениями движения в обобщенных координатах, уравнениями Лагранжа второго рода* или просто – *уравнениями Лагранжа*.

Количество этих уравнений равно числу степеней свободы материальной системы.

Если система консервативная и движется под действием сил потенциального поля, когда обобщенные силы  $Q_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}$ , уравнения Лагранжа можно составить по форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0 \quad (18.14)$$

или

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \dots, s), \quad (18.15)$$

где  $L = T - \Pi$  называется *функцией Лагранжа* (предполагается, что потенциальная энергия  $\Pi$  не зависит от обобщенных скоростей).

Нередко при исследовании движения материальных систем оказывается, что некоторые обобщенные координаты  $q_j$  не входят явно в функцию Лагранжа (или в  $T$  и  $\Pi$ ). Такие координаты называют *циклическими*. Уравнения Лагранжа, соответствующие этим координатам, получаются проще.

Так как  $\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0$  и  $\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0$ , то  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 0$ .

Первый интеграл таких уравнений находится сразу. Он называется *циклическим интегралом*:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = C_j = \text{const}. \quad (18.16)$$

Дальнейшие исследования и преобразования уравнений Лагранжа составляют предмет специального раздела теоретической механики – «Аналитическая механика».

Уравнения Лагранжа обладают целым рядом достоинств в сравнении с другими способами исследования движения систем. Основные достоинства: методика составления уравнений одинакова во всех задачах, реакции идеальных связей не учитываются при решении задач.

И еще одно – эти уравнения можно использовать для исследования не только механических, но и других физических систем (электрических, электромагнитных, оптических и др.).

**Пример 18.3.** Продолжим исследование движение колечка  $M$  на качающемся стержне (пример 18.1).

Обобщенные координаты назначены –  $\varphi$  и  $s$  (рис.18.7). обобщенные силы определены:  $Q_s = P \cos \varphi$  и  $Q_\varphi = -Ps \cdot \sin \varphi$ .

Кинетическая энергия колечка  $T = \frac{1}{2}mv^2$ . Где  $\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r$ , а  $v^2 = v_e^2 + v_r^2$  и  $v_e = s\omega = s\dot{\varphi}$ ,  $v_r = \dot{s}$ . Поэтому  $T = \frac{1}{2} \frac{P}{g} (s^2\dot{\varphi}^2 + \dot{s}^2)$ .

Составляем два уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_s \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi.$$

Так как  $\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{P}{g} \dot{s}$ ,  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{P}{g} \ddot{s}$ ,

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{P}{g} s\dot{\varphi}^2; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{P}{g} s^2\dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{P}{g} (2s\dot{s}\dot{\varphi} + s^2\ddot{\varphi}), \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$$

то уравнения получаются такими:

$$\frac{P}{g} \ddot{s} - \frac{P}{g} s\dot{\varphi}^2 = P \cos \varphi,$$

$$\frac{P}{g} (2\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi})s = -Ps \cdot \sin \varphi$$

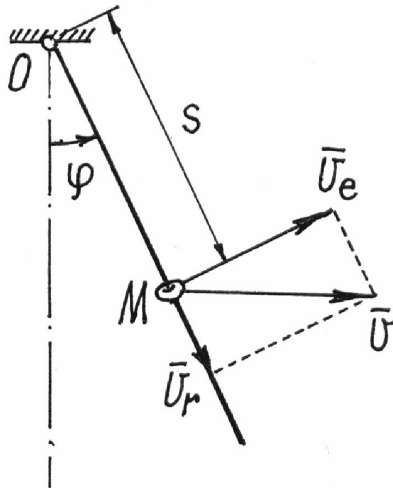


Рис. 18.7

или  $\left. \begin{aligned} \ddot{s} - s\dot{\varphi}^2 - g \cdot \cos \varphi &= 0, \\ s\ddot{\varphi} + 2\dot{s}\dot{\varphi} + g \cdot \sin \varphi &= 0. \end{aligned} \right\}$  Получили два нелинейных дифференциальных уравнения второго порядка, для решения которых нужны специальные методы.

**Пример 18.4.** Составим дифференциальное уравнение движения балочки  $AB$ , которая перекачивается без скольжения по цилиндрической поверхности (рис.18.8). Длина балочки  $AB = l$ , вес  $-P$ .

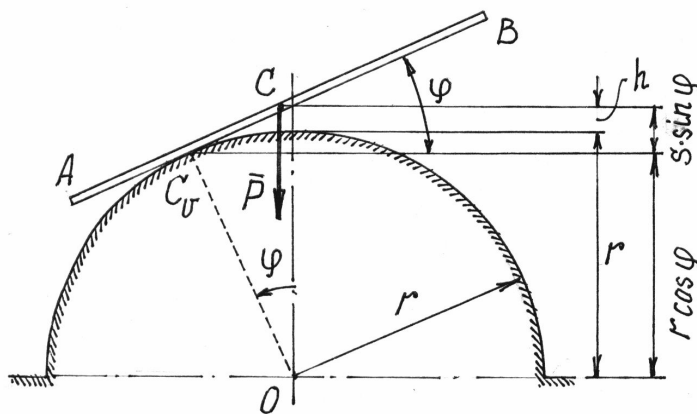


Рис. 18.8

В положении равновесия балочка располагалась горизонтально и центр тяжести  $C$  ее находился на верхней точке цилиндра. Балочка имеет одну степень свободы. Положение ее определяется обобщенной координатой — углом  $\varphi$  (рис.18.8).

Система консерватив-

ная. Поэтому уравнение Лагранжа составим с помощью потенциальной энергии  $\Pi = mgh$ , вычисленной относительно горизонтального положения. В точке касания находится мгновенный центр скоростей и  $CC_v = s = r\varphi$  ( $CC_v$  равно длине дуги окружности с углом  $\varphi$ ). Поэтому

$$h = r \cos \varphi + s \sin \varphi - r \quad (\text{см. рис.18.8})$$

$$\text{и } \Pi = mgr(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi - 1).$$

Кинетическая энергия (балка совершает плоскопараллельное движение)

$$T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2 = \frac{1}{2}ms^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m(r^2\varphi^2 + \frac{1}{12}l^2)\dot{\varphi}^2.$$

Находим необходимые производные для уравнения  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0$ :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m(r^2\varphi^2 + \frac{1}{12}l^2)\dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m \left[ 2r^2\varphi\dot{\varphi}^2 + (r^2\varphi^2 + \frac{1}{12}l^2)\ddot{\varphi} \right];$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = mr^2\varphi\dot{\varphi}^2; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mgr(-\sin \varphi + \sin \varphi + \varphi \cos \varphi) = mgr\varphi \cos \varphi.$$

Составляем уравнение

$$m \left[ 2r^2\varphi\dot{\varphi}^2 + (r^2\varphi^2 + \frac{1}{12}l^2)\ddot{\varphi} \right] - mr^2\varphi\dot{\varphi}^2 + mgr\varphi \cos \varphi = 0$$

или, окончательно,

$$(r^2\varphi^2 + \frac{1}{12}l^2)\ddot{\varphi} + r^2\varphi\dot{\varphi}^2 + gr\varphi \cos \varphi = 0.$$

## XIX. Общие теоремы динамики

В предыдущих главах излагались методы определения движения материальной системы, которые сводились к составлению дифференциальных уравнений, как правило, второго порядка. И решение их оказывалось не всегда простым.

Если ввести новые обобщенные понятия, характеризующие свойства и движение системы в целом, то эти трудности нередко можно обойти. К ним относятся понятия о центре масс и кинетической энергии, которые уже нам знакомы, понятия о количестве движения материальной системы и моменте количества движения.

Теоремы, определяющие изменение этих характеристик, позволяют получить более полное представление о движении материальной системы.

Одна из теорем, теорема об изменении кинетической энергии, уже доказана в гл. XV, §4.

## §1. Закон движения центра масс

Иногда, чтобы оценить движение материальной системы в целом, достаточно определить движение какой-нибудь одной ее точки. Например, если бросить камень в цель, совсем не нужно знать как он будет кувыряться во время полета, важно установить попадет он в цель или нет. Для этого достаточно рассмотреть движение какой-нибудь точки этого тела.

Оказывается, довольно просто можно определить движение центра масс материальной системы.

Составим для каждой  $j$ -той точки материальной системы основное уравнение динамики (12.2), разделив силы, действующие на точки, на внешние и внутренние:  $m_j \vec{W}_j = \vec{F}_j^{(e)} + \vec{F}_j^{(i)}$ . Затем сложим эти уравнения:

$\sum m_j \vec{W}_j = \sum \vec{F}_j^{(e)} + \sum \vec{F}_j^{(i)}$  (\*). Вторую сумму в правой части равенства можно отбросить, так как векторная сумма внутренних сил равна нулю. Левую часть можно записать иначе. Так как радиус-вектор центра масс (14.1)

$\vec{r}_C = \frac{\sum m_j \vec{r}_j}{M}$ , то  $\sum m_j \vec{r}_j = M \vec{r}_C$ . Взяв вторую производную по времени

(полагая массу постоянной), получим  $\sum m_j \frac{d^2 \vec{r}_j}{dt^2} = M \frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2}$  или

$\sum m_j \vec{W}_j = M \vec{W}_C$ . Подставив эту сумму в левую часть равенства (\*), получим

$$M \vec{W}_C = \sum \vec{F}_j^{(e)}. \quad (19.1)$$

Спроектируем это векторное равенство на оси координат  $x$ ,  $y$ , и  $z$ . Вспоминая, что проекции вектора ускорения  $\vec{W}_C$  на оси есть вторые производные по времени от координат точки, получим дифференциальные уравнения движения центра масс

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{x}_C &= \sum X_j^{(e)}, \\ M \ddot{y}_C &= \sum Y_j^{(e)}, \\ M \ddot{z}_C &= \sum Z_j^{(e)}. \end{aligned} \right\} \quad (19.2)$$

Сравнивая эти уравнения с дифференциальными уравнениями движения материальной точки (13.1), и уравнение (19.1) с основным уравнением динамики (12.1) можно сформулировать закон движения центра масс.

Движение центра масс материальной системы определяется так же, как движение материальной точки, масса которой равна массе всей системы, под действием внешних сил, приложенных ко всем точкам системы.

Закон движения центра масс позволяет сделать несколько важных замечаний.

Первое. Внутренние силы не могут изменить движение центра масс системы. Они вызывают движение лишь отдельных тел и точек системы.

Так движение автомобиля по горизонтальной плоскости может происходить только под действием внешних сил, сил трения, действующих на колеса со стороны дороги. И торможение автомобиля тоже возможно только этими силами, а не трением между тормозными колодками и тормозным барабаном. Если дорога гладкая, то как бы не затормаживали колеса, они будут скользить и не остановят автомобиль.

Или после взрыва летящего снаряда (под действием внутренних сил) части, осколки его, разлетятся так, что центр масс их будет двигаться по прежней траектории.

Второе. Если внешние силы на систему не действуют или действуют, но сумма их равна нулю, то центр масс системы будет либо находиться в покое, либо двигаться равномерно и прямолинейно. Так как ускорение центра масс равно нулю,  $\vec{W}_C = 0$ .

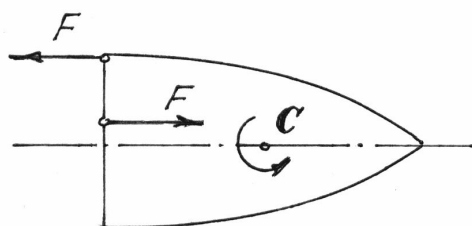


Рис. 19.1

Например, если на тело начнут действовать две силы, образующие пару сил (рис.19.1), то центр масс  $C$  его будет двигаться по прежней траектории. А само тело будет вращаться вокруг центра масс. И неважно, где приложена пара сил.

Кстати, в статике мы доказывали, что действие пары на тело не зависит от того, где она приложена. Здесь мы показали, что вращение тела будет вокруг центральной оси  $C$ .

Пример 19.1. Человек перешел с кормы лодки на нос. Определим перемещение лодки  $s$  (рис.19.2). Вес лодки –  $P_1$ , человека –  $P_2$ , длина лодки –  $l$ . Сопротивление движению не учитываем.

Определим движение центра масс  $C$  системы, состоящей из человека и лодки.

Составляем дифференциальное уравнение движения центра масс по оси  $x$  (19.2):  $M\ddot{x}_C = \sum X_i^{(e)}$ . Но так как проекции внешних сил  $\vec{P}_1$ ,  $\vec{P}_2$ , и  $\vec{N}$  на ось  $x$  равны нулю, то  $\ddot{x}_C = 0$ . Проинтегрировав дважды это уравнение,



получим  $\dot{x}_C = C_1$  и  $x_C = C_1 t + C_2$ . Но в начале движения система была неподвижна  $v_C = \dot{x}_C = 0$ . Значит,  $x_C = \text{const}$ .

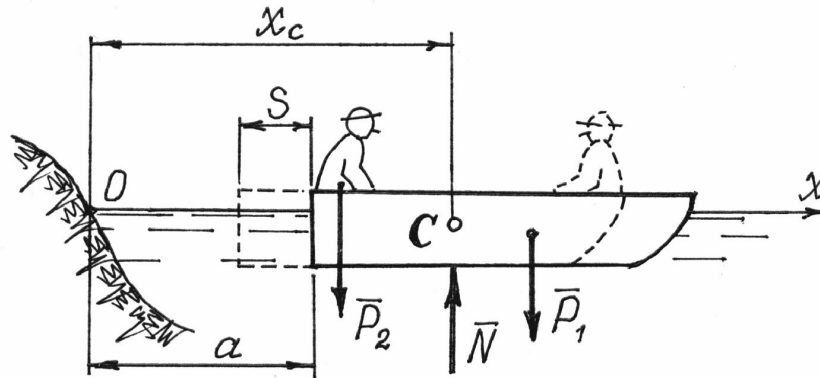


Рис. 19.2

Найдем координату  $x_C$  в первом положении системы, когда человек находился на корме, как координату центра тяжести:

$$x_C = \frac{P_1(a + 0,5l) + P_2 a}{P_1 + P_2} = a + \frac{1}{2} \frac{P_1}{P_1 + P_2} l.$$

И во втором положении, когда человек перейдет на нос лодки:

$$x_C = \frac{P_1(a - s + 0,5l) + P_2(a - s + l)}{P_1 + P_2} = a - s + \frac{P_1 + 2P_2}{2(P_1 + P_2)} l.$$

Приравниваем координаты, т.к.  $x_C = \text{const}$ ,

$$a + \frac{1}{2} \frac{P_1}{P_1 + P_2} l = a - s + \frac{P_1 + 2P_2}{2(P_1 + P_2)} l.$$

Из этого равенства находим перемещение лодки

$$s = \frac{P_1 + 2P_2}{2(P_1 + P_2)} l - \frac{1}{2} \frac{P_1}{P_1 + P_2} l = \frac{P_2}{P_1 + P_2} l.$$

## §2. Теорема об изменении количества движения

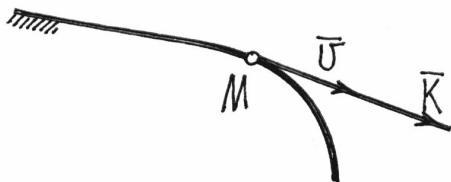


Рис. 19.3

Количеством движения материальной точки называется произведение массы точки на ее скорость  $\vec{k} = \sum m_i \vec{v}_i$ . Это есть вектор, который направляется как скорость, по касательной к траектории (рис. 19.3).

Количеством движения материальной системы будем называть векторную сумму количеств движения всех точек системы:

$$\vec{K} = \sum m_i \vec{v}_i. \quad (19.3)$$

Как известно (14.1), радиус-вектор центра масс  $\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$  или  $\sum m_i \vec{r}_i = M \vec{r}_C$ .

Найдем производную по времени от этого равенства  $\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = M \frac{d\vec{r}_C}{dt}$  или  $\sum m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_C$ . Значит, по (19.3), количество движения материальной системы, при любом ее движении, определяется довольно просто, как произведение массы системы на скорость центра масс ее:

$$\vec{K} = M \vec{v}_C. \quad (19.4)$$

Направляется вектор количества движения также, как вектор скорости центра масс  $C$ .

Количество движения точки – связанный вектор, он приложен к этой точке. Поэтому и для вектора количества движения системы можно ввести понятие точки приложения. Правда найти ее не всегда просто.

При поступательном движении твердого тела это сделать несложно.

Так как при поступательном движении все точки тела имеют равные, параллельные векторы скорости, то и векторы количества движения их будут параллельны. Поэтому точку приложения вектора  $\vec{K}$  можно определять как центр параллельных векторов (см. раздел «Статика»), радиус-вектор которого  $\vec{r} = \frac{\sum k_i \vec{r}_i}{K} = \frac{\sum m_i v_i \vec{r}_i}{M v_C}$ . Но  $v_i = v_C$ , значит  $\vec{r} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} = \vec{r}_C$ , равен радиусу-вектору центра масс, т.е. вектор количества движения тела при поступательном движении приложен к центру масс.

При других движениях тела определить точку приложения вектора  $\vec{K}$  сложнее.

Введем еще одно понятие – *импульс силы*. Импульсом  $\vec{S}$  постоянной силы  $\vec{F}$  за время ее действия  $t$  называется произведение

$$\vec{S} = \vec{F} \cdot t. \quad (19.5)$$

Если же сила переменна, то определяют сначала элементарный импульс за время  $dt$ :  $d\vec{S} = \vec{F} \cdot dt$ , а потом интегрируют на интервале от  $t_1$  до  $t_2$ :

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt. \quad (19.6)$$

Перейдем теперь к выводу теоремы.

Запишем для каждой  $j$ -той точки материальной системы основное уравнение динамики, разделив силы на внешние и внутренние,

$$m_j \vec{W}_j = \vec{F}_j^{(e)} + \vec{F}_j^{(i)} \quad \text{или} \quad m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} = \vec{F}_j^{(e)} + \vec{F}_j^{(i)}.$$

Введем массу  $m_j$  под знак дифференциала  $\frac{d}{dt}(m_j \vec{v}_j) = \vec{F}_j^{(e)} + \vec{F}_j^{(i)}$ .

Сложим все эти равенства. Получим  $\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n (m_j \vec{v}_j) = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{(e)} + \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{(i)}$  или

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{(e)} + \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{(i)}.$$

Но последняя сумма, векторная сумма внутренних сил, равна нулю. Поэтому

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j^{(e)}. \quad (19.7)$$

*Производная по времени от вектора количества движения материальной системы равна векторной сумме внутренних сил, приложенных к точкам системы.*

Чтобы получить уравнения, удобные для исследования движения системы, спроектируем векторное равенство (19.7) на оси

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum X_i^{(e)}; \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum Y_i^{(e)}; \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum Z_i^{(e)}. \quad (19.8)$$

Проинтегрируем уравнение (19.7) за время перехода системы из какого-нибудь одного положения в другое.

$$\int_{\vec{K}_1}^{\vec{K}_2} d\vec{K} = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i^{(e)} \cdot dt.$$

Получим теорему об изменении количества движения записанную в другой форме:

$$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \sum_{i=1}^n \vec{S}_i^{(e)}. \quad (19.9)$$

*Изменение количества движения материальной системы при переходе ее из одного положения в другое равно векторной сумме импульсов внешних сил за время перехода.*

Спроектировав векторное равенство (19.9) на оси, получим скалярные уравнения, которые используются при решении задач:

$$\left. \begin{aligned} K_{2x} - K_{1x} &= \sum S_{ix}^{(e)}, \\ K_{2y} - K_{1y} &= \sum S_{iy}^{(e)}, \\ K_{2z} - K_{1z} &= \sum S_{iz}^{(e)}. \end{aligned} \right\} \quad (19.10)$$

Разность проекций вектора количества движения в конечном и начальном положениях системы на ось равна сумме проекций импульсов внешних сил на эту ось.

Теорему об изменении количества движения обычно используют для решения задач, по условию которых требуется установить зависимость между изменениями массы, перемещением тел системы, и их скорости.

Пример 19.2. Груз весом  $P$  спускается по кузову автомобиля со скоростью  $u$  (рис.19.4). При этом сам автомобиль начнет движение. Определим его скорость  $v_1$ . Вес автомобиля –  $G$ . Сопротивления движению не учитываем.

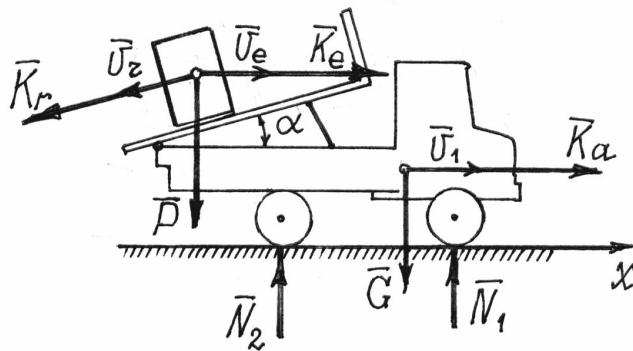


Рис. 19.4

Составим уравнение (19.10) для оси  $x$ :

$$K_{2x} - K_{1x} = \sum S_{ix}^{(e)}.$$

В начале движения количество движения всей системы равно нулю  $\vec{K}_1 = 0$ , т.к. система была неподвижна. Во втором положении количество движения системы складывается из количества движения автомобиля  $K_a = \frac{G}{g} v_1$  (предполагается, что он движется вправо) и количества движения груза. Абсолютная скорость груза  $\vec{v}_{гр} = \vec{v}_e + \vec{v}_r$ . Относительная скорость  $\vec{v}_r = \vec{u}$ , переносная  $\vec{v}_e = \vec{v}_1$ . Соответственно этим скоростям показываем две составляющие вектора количества движения груза:  $\vec{K}_r$  и  $\vec{K}_e$ .

Все внешние силы (вес  $\vec{P}$  и  $\vec{G}$ , реакции плоскости  $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ ) направлены вертикально, и импульсы их будут вертикальными.

Составляем уравнение, проектируя все векторы на ось  $x$ :

$$K_a + K_e - K_r \cos \alpha = 0.$$

Подставляем их значения:  $\frac{G}{g}v_1 + \frac{P}{g}v_1 - \frac{P}{g}u \cdot \cos\alpha = 0$ . Отсюда

$$v_1 = \frac{P}{P+G}u \cdot \cos\alpha.$$

**Пример 19.3.** Определим давление трубы на опору  $A$  (рис.19.5). В трубе движется жидкость со скоростью  $v$ . Диаметр трубы –  $d$ .

По теореме (19.9)  $\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \sum \vec{S}_i^{(e)}$ .

Рассмотрим движение жидкости, заключенной между сечениями 1 и 1'. Через время  $t$  сечения окажутся в положениях 2 и 2', соответственно (рис. 19.5).

В первом положении количество движения  $\vec{K}_1$  складывалось из количеств движения объемов I и II:

$$\vec{K}_1 = \vec{K}_I + \vec{K}_{II}.$$

Во втором положении  $\vec{K}_2 = \vec{K}_{II} + \vec{K}_{III}$ .

Тогда изменение количества движения

$$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \vec{K}_{II} + \vec{K}_{III} - \vec{K}_I - \vec{K}_{II} = \vec{K}_{III} - \vec{K}_I.$$

И уравнение (19.9) запишется

$$\text{так: } \vec{K}_{III} - \vec{K}_I = \sum \vec{S}_i^{(e)} \quad (*).$$

Единственными внешними силами будут – вес жидкости, вес трубы и реакция опоры  $\vec{N}$ .

Проектироваться на ось  $x$  бу-

дут только вектор импульса реакции  $\vec{S} = \vec{N}t$  и вектор  $\vec{K}_{III}$ .

Проектируя равенство (\*) на ось  $x$ , получим  $K_{III} = Nt$  (\*\*). Так как

объем жидкости  $V_{III} = \frac{\pi d^2}{4}l = \frac{\pi d^2}{4}vt$  и плотность ее  $\rho$ , то  $K_{III} = \rho V_{III} \cdot v =$

$= \rho \frac{\pi d^2}{4}v^2t$ . Тогда по (\*\*) получим уравнение  $\rho \frac{\pi d^2}{4}v^2t = Nt$ , из которого

$$N = \frac{1}{4}\pi d^2 \rho v^2.$$

Давление на опору равно  $N$ , но будет направлено, конечно, в противоположную сторону.

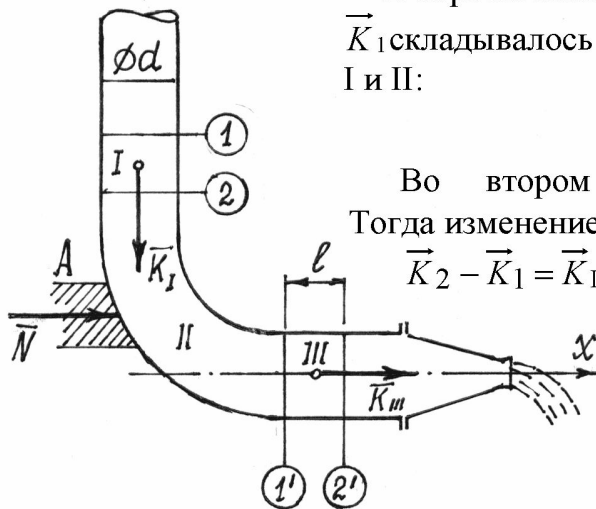


Рис. 19.5

### §3. Закон моментов

#### 1). Момент количества движения.

Так как количество движения – вектор, имеющий определенную линию действия (и даже определенную точку приложения), то можно найти момент этого вектора относительно точки и оси так же, как определяли соответствующие моменты силы.

Сначала о моменте количества движения материальной точки.

Ее момент количества движения  $\vec{k}$  относительно точки  $O$  по величине равен  $l_O = kh$ , где  $h$  – плечо вектора  $\vec{k}$ , с соответствующим знаком (+) или (-). Как вектор он определяется векторным произведением

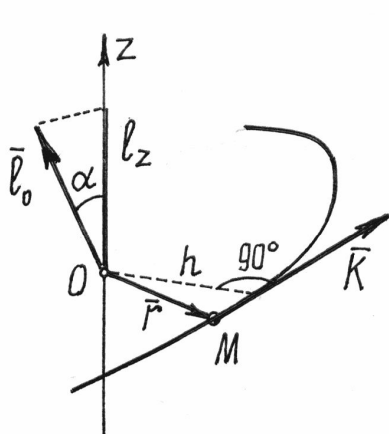


Рис. 19.6

$$\vec{l}_O = \vec{r} \times \vec{k} \quad (\text{рис.19.6}).$$

Момент количества движения  $l_z$  относительно оси также определяется аналогично тому, как находили ранее момент силы.

И зависимость между моментами относительно точки и оси аналогична:

$$l_z = l_O \cos \alpha.$$

То есть момент количества движения материальной точки относительно оси равен проекции вектора момента количества движения относительно какой-либо точки  $O$ , расположенной на оси, на эту ось.

Для движущейся материальной системы вводится понятие *главного момента количеств движения относительно центра  $O$*  как векторной суммы моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра  $O$ :

$$\vec{L}_O = \sum \vec{l}_{O_i}. \quad (19.11)$$

Вводится и понятие *главного момента количеств движения относительно оси* – как алгебраической суммы моментов количеств движения точек системы относительно этой оси  $z$ :

$$L_z = \sum l_{z_i}. \quad (19.12)$$

Зависимость между ними аналогична зависимости между соответствующими главными моментами сил.

$$L_z = L_O \cos \gamma. \quad (19.13)$$

Главный момент количеств движения относительно оси равен проекции вектора главного момента относительно точки, расположенной на оси, на эту ось.

Для твердого тела, как материальной системы, при некоторых движениях главный момент относительно оси определяется довольно просто.

Так если тело вращается вокруг неподвижной оси  $z$  (рис.19.7), главный момент количеств движения относительно оси вращения

$$L_z = \sum l_{zi} = \sum k_i h_i = \sum m_i v_i h_i = \sum m_i h_i \omega \cdot h_i = \omega \sum m_i h_i^2 = \omega \cdot J_z.$$

То есть, равен произведению момента инерции тела относительно оси вращения на угловую скорость

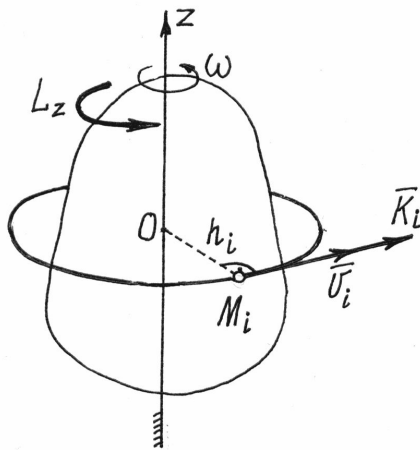


Рис. 19.7

$$L_z = J_z \omega \quad (19.14)$$

и направлен он по направлению вращения тела.

Если однородное тело имеет плоскость симметрии, перпендикулярную оси вращения, то вектор количества движения тела  $\vec{K}$  расположен в этой плоскости на расстоянии  $h$  от оси, равном

$$h = OA = \frac{L_z}{K} = \frac{J_z \omega}{M v_C} = \frac{J_z \omega}{M a \omega} = \frac{J_z}{M a}. \quad (19.14a)$$

На рис.19.8 показано сечение тела этой плоскостью симметрии и положение вектора количества движения  $\vec{K}$ .

Заметим, что этот вектор приложен к той же точке  $A$ , к которой приложена равнодействующая сил инерции тела  $\vec{R}_{ин}$  (16.6).

Нетрудно найти и главный момент количеств движения тела относительно центральной оси  $C$  при плоскопараллельном движении (рис.19.9).

Скорость произвольно выбранной точки

$M_i$   $\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_{MC}$ , а соответствующие скоростям модули векторов количества движения равны  $k_{ei} = m_i v_C$  и  $k_{ri} = m_i v_{MC} = m_i r_i \omega$ .

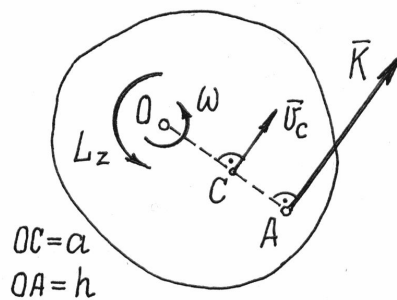


Рис. 19.8

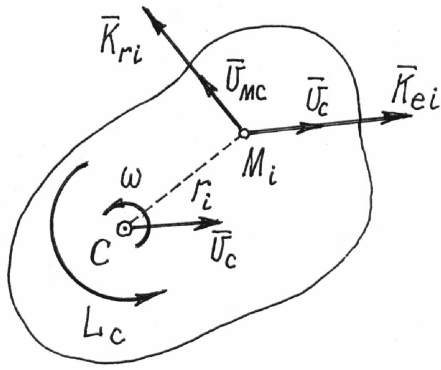


Рис. 19.9

Главный момент количеств движения точек тела относительно оси  $C$ , перпендикулярной плоскости движения,

$$L_C = \sum l_{ei} + \sum l_{ri}$$

Но первая сумма равна нулю, так как по теореме Вариньона эта сумма моментов векторов  $\vec{K}_{ei}$  равна моменту «равнодействующей» их, которая приложена к центру масс  $C$ , потому что переносное движение при плоскопараллельном движении – поступательное (XIX, §2).

Главный момент количеств движения

$$L_C = \sum l_{ri} = \sum k_{ri} \cdot r_i = \sum m_i r_i \omega \cdot r_i = \omega \sum m_i r_i^2 = \omega \cdot J_C$$

Значит главный момент количеств движения точек тела при плоскопараллельном движении относительно центральной оси  $C$ , перпендикулярной плоскости движения, равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость

$$L_C = J_C \omega \quad (19.15)$$

и имеет направление, совпадающее с направлением вращения, с направлением угловой скорости.

Аналогичный результат получается и для главного момента количеств движения относительно оси  $C_v$ , проходящей через мгновенный центр скоростей.

Действительно, скорость точек тела  $v_i = a_i \omega$  (рис.19.10) и главный момент

$$L_{C_v} = \sum l_{C_v i} = \sum k_i a_i = \sum m_i v_i a_i = \sum m_i a_i \omega \cdot a_i = \omega \sum m_i a_i^2 = \omega \cdot J_{C_v}$$

$$\text{Итак, } L_{C_v} = J_{C_v} \omega, \quad (19.16)$$

где  $J_{C_v}$  - момент инерции тела относительно оси  $C_v$ , проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно плоскости движения.

При плоскопараллельном движении также можно найти положение вектора количества движения  $\vec{K}$  (рис.19.10). Он будет направлен параллельно скорости центра масс  $\vec{v}_C$  и находиться на расстояниях: от центральной

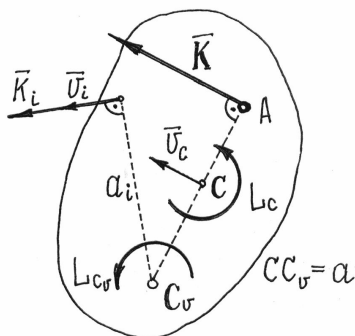


Рис.19.10



$$\text{оси } C \quad AC = \frac{L_c}{K} = \frac{J_c \omega}{Mv_c} = \frac{J_c \omega}{Ma\omega} = \frac{J_c}{Ma} \quad \text{и от мгновенного центра}$$

$$\text{скоростей } C_v \quad AC_v = \frac{L_{C_v}}{K} = \frac{J_{C_v} \omega}{Mv_c} = \frac{J_{C_v} \omega}{Ma\omega} = \frac{J_{C_v}}{Ma}.$$

Очень похоже на результат, полученный при вращении тела вокруг неподвижной оси. Но разница в том, что здесь положение точки  $A$  меняется, так как меняется положение мгновенного центра скоростей  $C_v$ .

2). *Закон моментов.*

Рассмотрим движение материальной системы под действием внешних  $\vec{F}_j^{(e)}$  и внутренних  $\vec{F}_j^{(i)}$  сил.

Определим момент количеств движения каждой точки этой системы относительно некоторого неподвижного центра  $O$ ,  $\vec{l}_{Oj} = \vec{r}_j \times \vec{k}_j$ , и найдем его производную во времени:

$$\frac{d}{dt} \vec{l}_{Oj} = \frac{d}{dt} (\vec{r}_j \times \vec{k}_j) = \frac{d\vec{r}_j}{dt} \times \vec{k}_j + \vec{r}_j \times \frac{d\vec{k}_j}{dt} = \vec{v}_j \times \vec{k}_j + \vec{r}_j \times \frac{d\vec{k}_j}{dt}.$$

Первый член равен нулю, т.к. векторы  $\vec{v}_j$  и  $\vec{k}_j$  совпадают по направлению.

Так как по (19.7)  $\frac{d\vec{k}_j}{dt} = \vec{F}_j^{(e)} + \vec{F}_j^{(i)}$ , то второй член

$$\vec{r}_j \times \frac{d\vec{k}_j}{dt} = \vec{r}_j \times (\vec{F}_j^{(e)} + \vec{F}_j^{(i)}) = \vec{M}_O(\vec{F}_j^{(e)}) + \vec{M}_O(\vec{F}_j^{(i)})$$

Поэтому  $\frac{d}{dt} \vec{l}_{Oj} = \vec{M}_O(\vec{F}_j^{(e)}) + \vec{M}_O(\vec{F}_j^{(i)})$ . Сложим правые и левые части

этих равенств, составленных для всех точек системы:

$$\sum \frac{d}{dt} \vec{l}_{Oj} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_j^{(e)}) + \sum \vec{M}_O(\vec{F}_j^{(i)}). \quad \text{Вторая сумма в правой части}$$

равна нулю, т.к. главный момент внутренних сил относительно любой точки равен нулю. Оставшуюся часть равенства перепишем так

$$\frac{d}{dt} \sum \vec{l}_{Oj} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_j^{(e)}) \quad \text{или}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_O = \vec{M}_O^{(e)}. \quad (19.17)$$

*Производная по времени главного момента количеств движения материальной системы относительно неподвижной точки  $O$  равна глав-*

ному моменту внешних сил, приложенных к системе, относительно той же точки  $O$ .

Оказывается, точно также формулируется закон моментов и относительно центра масс произвольно движущейся материальной системы.

Действительно. Рассмотрим движение системы как сумму двух движений: переносного – поступательного движения системы осей вместе с центром масс и относительного – относительно этих осей.

В главе XIII, §3 мы установили, что движение точек, а значит и всей материальной системы, относительно движущейся системы координатных осей можно определять также как относительно неподвижных, если учесть переносные и кориолисовы силы инерции.

Значит таким способом можно записать закон моментов относительно движущегося центра масс  $C$ :

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{(e)} + \sum \vec{M}_C \left( \vec{F}_{ei}^{\text{ин}} \right) + \sum \vec{M}_C \left( \vec{F}_{\text{кор},i}^{\text{ин}} \right).$$

Но сумма моментов кориолисовых сил инерции равна нулю, т.к. при переносном поступательном движении эти силы отсутствуют.

И первая сумма, сумма моментов переносных сил инерции, тоже равна нулю. Потому что по теореме Вариньона она равна моменту равнодействующей  $\vec{R}_e^{\text{ин}}$  этих сил, которая при переносном поступательном движении приложена к центру масс (XVI, §1).

Поэтому закон моментов относительно центра масс  $C$  движущейся системы записывается также как относительно неподвижной точки:

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{(e)}. \quad (19.18)$$

Спроектировав векторные уравнения (19.17) и (19.18) на какую-нибудь ось, проходящую через точку  $O$  или точку  $C$ , получим уравнения, с помощью которых и решаются задачи динамики:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{(e)}, \quad (19.19)$$

$$\frac{dL_C}{dt} = M_C^{(e)}, \quad (19.20)$$

где  $L_z$  и  $L_C$  – главные моменты количества движения системы относительно неподвижной оси  $z$  и оси  $C$ , см. (19.13), а  $M_z^{(e)}$  и  $M_C^{(e)}$  – главные моменты внешних сил относительно этих осей.

К закону моментов следует сделать очень важные и полезные замечания.

Если внешние силы на систему не действуют или действуют, но сумма моментов их относительно неподвижной точки  $O$  или центра масс  $C$  равна нулю, то (19.17 и 19.18)  $\vec{L}_O = \text{const}$  и  $\vec{L}_C = \text{const}$ . То есть главные моменты количеств движения относительно этих точек все время остаются постоянными.

То же самое можно сказать и о моментах относительно осей: если главный момент внешних сил относительно какой-нибудь оси  $z$ , проходящей через неподвижную точку  $O$ , или относительно какой-нибудь оси  $C$ , проходящей через центр масс системы, равны нулю, то главные моменты количеств движения системы относительно этих осей остаются все время постоянными,  $L_z = \text{const}$  и  $L_C = \text{const}$ .

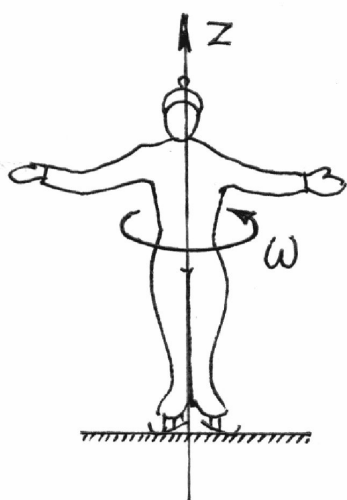


Рис. 19.11

Например, на фигуриста, вращающегося на льду (рис.19.11) вокруг оси  $z$ , действуют внешние силы – вес и реакция гладкого льда. Моменты их относительно оси  $z$  равны нулю. Поэтому  $L_z = \text{const}$ .

Но  $L_z = J_z \omega$ , значит  $J_z \omega = \text{const}$ . Отсюда следует, что если уменьшится момент инерции  $J_z$  (фигурист прижмет руки к туловищу), увеличится скорость вращения.

Еще пример. Вертолет, неподвижно висящий в воздухе (рис.19.12). Лопасты винта вращаются с угловой скоростью  $\omega_B$ . Вес вертолета  $\vec{P}$  уравновешивается подъемной силой  $\vec{F}$ . Момент их относительно вертикальной оси  $C$  равен нулю. Поэтому  $L_C = \text{const}$ .

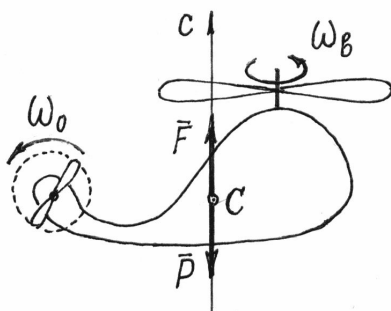


Рис. 19.12

Если изменится скорость вращения винта  $\omega_B$ , изменится и момент количества движения винта  $L_B = J_B \omega_B$ . А чтобы общий момент количеств движения вертолета остался прежним, начнет вращаться корпус вертолета с угловой скоростью  $\omega_K$  и так, чтобы выполнялось условие  $L_C = J_B \omega_B + J_K \omega_K = \text{const}$ .

Значит, если винт увеличит угловую скорость, корпус начнет вращаться в противоположном направлении; уменьшит – корпус начнет вращаться в том же направлении.

Чтобы не произошло этого нежелательного явления у некоторых типов вертолетов предусмотрен еще один винт, на хвосте, вращающийся в вертикальной плоскости и создающий горизонтальную внешнюю силу.

Эта сила и будет ликвидировать вращение корпуса изменением момента  $L_c$ .

Несколько примеров на решение задач с помощью закона моментов.

Пример 19.4. Однородный сплошной цилиндр, вращается вокруг горизонтальной оси  $O$  под действием намотанной на него нити с грузом на конце (рис.19.13). Вес цилиндра –  $P_1$ , груза –  $P_2$ . Радиус цилиндра –  $r$ .

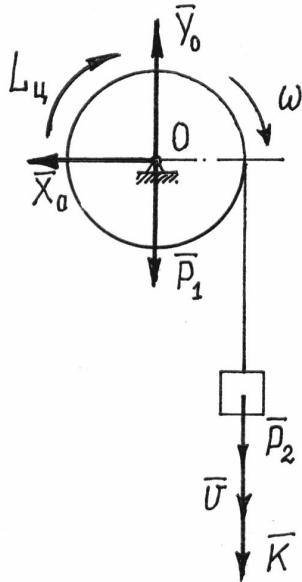


Рис. 19.13

По закону моментов (19.19)  $\frac{dL_o}{dt} = M_o^{(e)}$ . Так как  $L_o = L_{ц} + L_{гр} = -J_o\omega - Kr = -\frac{1}{2}P_1r^2\omega -$

$$-\frac{P_2}{g}vr = -\frac{P_1 + 2P_2}{2g}r^2\omega, \text{ где } v = r\omega, \text{ то, взяв про-}$$

изводную и приравняв ее к  $M_o^{(e)} = -P_2r$ , полу-

чим:  $-\frac{P_1 + 2P_2}{2g}r^2 \frac{d\omega}{dt} = -P_2r$ . Отсюда угловое

ускорение  $\varepsilon = \frac{2P_2}{P_1 + 2P_2} \frac{g}{r}$ , а ускорение груза

$$W = r\varepsilon = \frac{2P_2}{P_1 + 2P_2} g.$$

Пример 19.5. Внутри трубки, вращающейся вокруг вертикальной оси (рис.19.14), движется шарик  $M$ . Вначале, когда шарик находился на расстоянии  $a$  от оси, угловая скорость трубки была  $\omega_0$ . Определим угловую скорость в зависимости от положения шарика, от расстояния  $s$ . Вес шарика –  $P_1$ ; трубки –  $P_2$ , длина ее –  $l$ .

Главный момент внешних сил (веса, реакций подшипников) относительно оси вращения равен нулю. Значит,  $L_z = \text{const}$  или  $L_z^{(1)} = L_z^{(2)}$ .

В первом положении, в начальном,

$$L_z^{(1)} = L_{\text{трубки}} + L_{\text{шарика}} = J_z\omega_0 + K_e a,$$

где момент инерции трубки относительно оси вращения, как стержня,

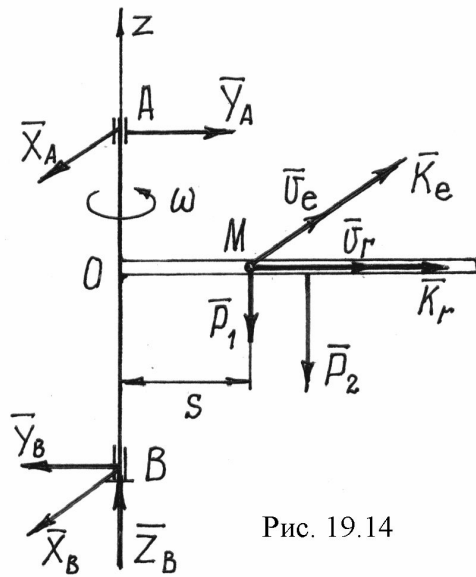


Рис. 19.14

$$J_z = \frac{1}{3} \frac{P_2}{g} l^2.$$

Количество движения шарика в переносном движении

$$K_e = \frac{P_1}{g} v_e = \frac{P_1}{g} a \omega_0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} L_z^{(1)} &= \frac{1}{3} \frac{P_2}{g} l^2 \omega_0 + \frac{P_1}{g} a^2 \omega_0 = \\ &= \frac{1}{3g} (P_2 l^2 + 3P_1 a^2) \omega_0. \end{aligned}$$

Во втором положении

$$L_z^{(2)} = J_z \omega + K_e s = \frac{1}{3} \frac{P_2}{g} l^2 \omega + \frac{P_1}{g} s^2 \omega = \frac{1}{3g} (P_2 l^2 + 3P_1 s^2) \omega.$$

(Момент вектора количества движения шарика в относительном движении  $\vec{K}_r$  относительно оси вращения равен нулю.)

Приравнявая  $L_z^{(1)}$  и  $L_z^{(2)}$ , получим уравнение

$$\frac{1}{3g} (P_2 l^2 + 3P_1 a^2) \omega_0 = \frac{1}{3g} (P_2 l^2 + 3P_1 s^2) \omega,$$

из которого находим  $\omega = \frac{P_2 l^2 + 3P_1 a^2}{P_2 l^2 + 3P_1 s^2} \omega_0.$

Скорость вращения трубки будет уменьшаться с увеличением расстояния  $s$ .

#### §4. Дифференциальные уравнения вращения твердого тела

Закон моментов очень удобен при исследовании вращения твердого тела.

1) Дифференциальное уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси.

Тело вращается вокруг неподвижной оси  $z$  под действием внешних сил, в том числе и реакций подшипников  $A$  и  $B$  (рис.19.15).

По закону моментов (19.19)

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{(e)}.$$

Так как

$$L_z = J_z \omega = J_z \frac{d\varphi}{dt} = J_z \dot{\varphi},$$

то получается дифференциальное уравнение вращения тела

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum M_z \left( \vec{F}_i^{(e)} \right). \quad (19.21)$$

Заметим, что реакции подшипников в уравнение не входят.

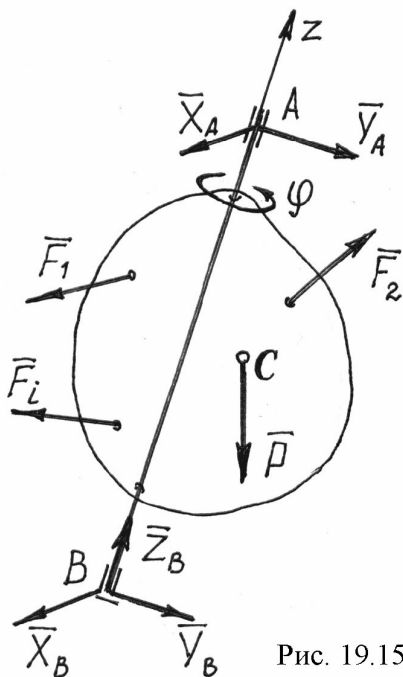


Рис. 19.15

**Пример 19.6.** Стержень весом  $P$  и длиной  $l$  качается как маятник в вертикальной плоскости, вращаясь вокруг горизонтальной оси  $O$  (рис.19.16).

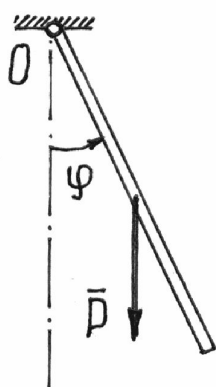


Рис. 19.16

Составим уравнение качаний стержня.

Так как  $J_O = \frac{1}{3} P l^2$  и реакции оси не учитываются, то по (19.21) получим

$$\frac{1}{3} P l^2 \ddot{\varphi} = -P \frac{l}{2} \sin \varphi$$

или 
$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

2) *Дифференциальное уравнение вращения тела при плоскопараллельном движении.*

Как известно плоскопараллельное движение тела состоит из двух: поступательного движения вместе с произвольно выбранным полюсом и вращения вокруг оси, проходящей через этот полюс перпендикулярно плоскости движения. Причем, это вращение не зависит от выбора полюса.

Если полюсом назначить центр масс тела, то с помощью закона моментов, по формуле (19.20), сразу получим дифференциальное уравнение вращения ( $L_C = J_C \omega = J_C \dot{\phi}$ ):

$$J_C \ddot{\phi} = \sum M_C \left( \vec{F}_i^{(e)} \right), \quad (19.22)$$

где -  $J_C$  - момент инерции тела относительно центральной оси  $C$ , перпендикулярной плоскости движения.

Иногда полезно и выгодно составить дифференциальное уравнение вращения относительно оси  $C_v$ , проходящей через мгновенный центр скоростей.

Это уравнение проще получить, воспользовавшись принципом Даламбера.

Приведем силы инерции точек тела к центру масс  $C$  (рис. 19.17).

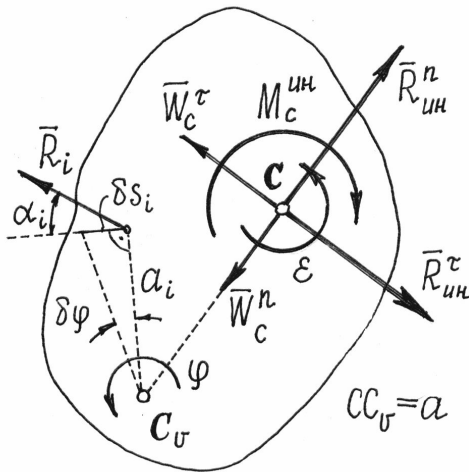


Рис. 19.17

Внешние силы на рисунке не показаны.

По принципу Даламбера, составив уравнение моментов относительно оси  $C_v$ , проходящей через мгновенный центр скоростей, получим

$$-M_C^{\text{ин}} - R_{\text{ин}}^{\tau} a + \sum M_{C_v} \left( \vec{F}_i^{(e)} \right) = 0.$$

И, так как  $R_{\text{ин}}^{\tau} = M W_C^{\tau} = M \frac{dv_C}{dt} = M \frac{d}{dt} (a\omega) = M (\dot{a}\omega + a\dot{\omega}) = M (\dot{a}\dot{\phi} + a\ddot{\phi})$ , то

уравнение получится таким:  $-J_C \ddot{\phi} - M \dot{a} \dot{\phi} a - M a \ddot{\phi} a + \sum M_{C_v} \left( \vec{F}_i^{(e)} \right) = 0.$

Но  $M \dot{a} \dot{\phi} a = M (a\omega) \dot{a} = M v_C \dot{a} = K \dot{a}$ . Подставим, получим

Главный вектор сил инерции найдем как сумму касательной составляющей  $\vec{R}_{\text{ин}}^{\tau}$ , направленной так же, как и скорость, перпендикулярно  $CC_v$ , и нормальной составляющей  $\vec{R}_{\text{ин}}^n$ , направленной перпендикулярно  $\vec{R}_{\text{ин}}^{\tau}$ , т.е. по  $CC_v$ .

Главный момент сил инерции  $M_C^{\text{ин}} = J_C \varepsilon = J_C \ddot{\phi}$  и направлен в сторону, противоположную угловому ускорению  $\varepsilon$ , которое считаем положительным.

$$-J_C \ddot{\phi} - K \dot{a} - Ma^2 \ddot{\phi} + \sum M_{C_v} \left( \vec{F}_i^{(e)} \right) = 0.$$

Или  $(J_C + Ma^2) \ddot{\phi} + K \dot{a} = \sum M_{C_v} \left( \vec{F}_i^{(e)} \right) = 0$ . И окончательно

$$J_{C_v} \ddot{\phi} + K \dot{a} = \sum M_{C_v} \left( \vec{F}_i^{(e)} \right), \quad (19.23)$$

где  $K = Mv_c$  - количество движения тела,  $a = CC_v$  и  $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ .

Несмотря на то, что в этом уравнении в сравнении с (19.22) появился дополнительный член, оно довольно часто оказывается более выгодным.

Во-первых, нередко при движении тела расстояние  $a = CC_v = \text{const}$  и этот дополнительный член исчезает, уравнение оказывается по форме таким же, как относительно центра центральной оси  $C$  (19.22):

$$J_{C_v} \ddot{\phi} = \sum M_{C_v} \left( \vec{F}_i^{(e)} \right).$$

Во-вторых, реакции идеальных связей не войдут в уравнение. И это очень существенное преимущество.

Действительно. По определению идеальных связей сумма работ их реакций на любом возможном перемещении равна нулю:

$$\sum R_i \delta s_i \cos \alpha_i = 0.$$

Но при плоскопараллельном движении возможные перемещения точек определяются поворотом тела на малый угол вокруг мгновенного центра скоростей:  $\delta s_i = a_i \delta \phi$ , где  $a_i$  - расстояние от точки до  $C_v$  (рис. 19.17). Поэтому сумма работ

$$\sum R_i a_i \delta \phi \cos \alpha_i = \delta \phi \sum R_i a_i \cos \alpha_i = \delta \phi \sum M_{C_v} \left( \vec{R}_i \right) = 0.$$

Так как  $\delta \phi \neq 0$ , то  $\sum M_{C_v} \left( \vec{R}_i \right) = 0$ .

Сумма моментов реакций идеальных связей тела относительно оси  $C_v$ , проходящей через мгновенный центр скоростей, равна нулю.

Пример 19.7. Однородный круглый цилиндр скатывается по наклонной плоскости (рис.19.18).

Цилиндр совершает плоскопараллельное движение.

Так как  $a = CC_v = r = \text{const}$  и, значит,  $\dot{a} = 0$ , составим дифференциальное уравнение вращения относительно оси  $C_v$ , проходящей через мгновенный центр скоростей.

Момент инерции цилиндра относительно оси  $C_v$



$J_{C_v} = J_C + Ma^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} r^2 + \frac{P}{g} r^2 = \frac{3}{2} \frac{P}{g} r^2$ . Поэтому уравнение получится та-

ким  $\frac{3}{2} \frac{P}{g} r^2 \ddot{\phi} = -P r \sin \alpha$  или  $\varepsilon = \ddot{\phi} = -\frac{2}{3} \frac{g}{r} \sin \alpha$ .

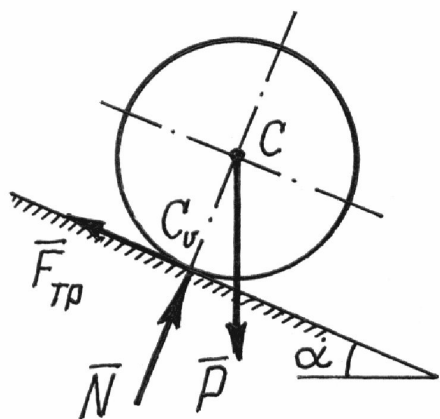


Рис. 19.18

$$F_{\text{тр}} = -\frac{1}{2} \frac{P}{g} r \ddot{\phi} = \frac{1}{2} \frac{P}{g} r \cdot \frac{2}{3} \frac{g}{r} \sin \alpha = \frac{1}{3} P \sin \alpha.$$

Конечно,  $N = P \cos \alpha$ . Чтобы тело катилось без скольжения должно выполняться условие  $F_{\text{тр}} < fN$  или  $\frac{1}{3} P \sin \alpha < fP \cos \alpha$ . Поэтому коэффициент трения скольжения должен удовлетворять условию  $f > \frac{1}{3} \text{tg} \alpha$ .

**Пример 19.8.** Балочка  $AB$  длиной  $l$  и весом  $P$  падает, скользя концами по гладким поверхностям стены и пола (рис.19.19). Составим дифференциальное уравнение вращения.

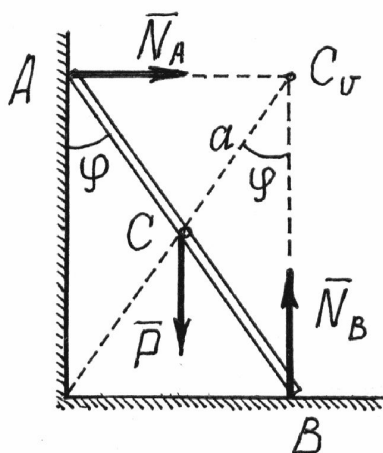


Рис. 19.19

Здесь  $a = CC_v = \frac{l}{2} = \text{const}$ . Поэтому опять выгоднее составить дифференциальное уравнение вращения относительно оси  $C_v$ . Тем более, что неизвестные реакции  $\bar{N}_A$  и  $\bar{N}_B$  не войдут в это уравнение.

Так как  $J_{C_v} = J_C + Ma^2 = \frac{1}{12} \frac{P}{g} l^2 + \frac{P}{g} \frac{l^2}{4} = \frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2$ , то уравнение получится

таким:  $\frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2 \ddot{\varphi} = P \frac{l}{2} \sin \varphi$ . Отсюда  $\ddot{\varphi} - \frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$ .

**Пример 19.9.** Тело, имеющее форму половины кругового цилиндра, катается по горизонтальной плоскости без скольжения. Вес его –  $P$ . Поло-

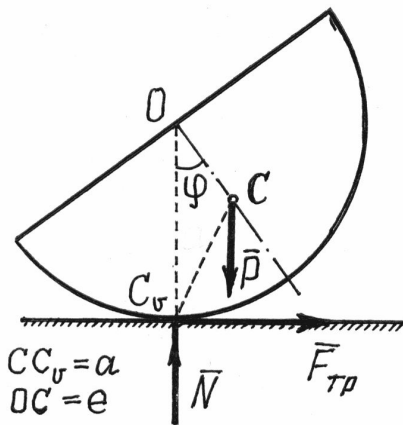


Рис. 19.20

жение центра тяжести определяется расстоянием  $OC = e = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi}$ , момент инерции

относительно оси  $O$   $J_O = \frac{1}{2} Mr^2$ .

Поскольку неизвестны ни сила трения  $F_{тр}$ , ни нормальная реакция  $N$ , конечно следует составлять дифференциальное уравнение вращения относительно оси  $C_v$ , по форме (19.23).

Момент инерции тела относительно оси  $C_v$ , по теореме Гюйгенса-Штейнера

(14.4),  $J_{C_v} = J_C + Ma^2$ , а  $J_O = J_C + Me^2$ , поэтому  $J_{C_v} = J_O + M(a^2 - e^2)$ .

Расстояние  $a = CC_v = \sqrt{e^2 + r^2 - 2er \cos \varphi}$ , производная  $\dot{a} = \frac{da}{dt} =$   
 $= \frac{2er\dot{\varphi} \sin \varphi}{2\sqrt{e^2 + r^2 - 2er \cos \varphi}} = \frac{er}{a} \dot{\varphi} \sin \varphi$ .

Количество движения  $K = \frac{P}{g} v_C = \frac{P}{g} a \dot{\varphi}$ .

Составляем дифференциальное уравнение (19.23):

$$[J_O + M(a^2 - e^2)] \ddot{\varphi} + \frac{P}{g} a \dot{\varphi}^2 \frac{er}{a} \sin \varphi = -Pe \sin \varphi$$

или  $\left[ \frac{1}{2} \frac{P}{g} r^2 + \frac{P}{g} (a^2 - e^2) \right] \ddot{\varphi} + \frac{P}{g} er \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + Pe \sin \varphi = 0$ .

После подстановки значения  $a$ , получим

$$(3r - 4e \cos \varphi) \ddot{\varphi} + 2e \left( \dot{\varphi}^2 + \frac{g}{r} \right) \sin \varphi = 0;$$

и, окончательно, подставив значение  $e = \frac{4r}{3\pi}$ ,

$$(9\pi - 16 \cos \varphi) r \ddot{\varphi} + 8(r \dot{\varphi}^2 + g) \sin \varphi = 0.$$

Чтобы убедиться, что использованное здесь решение, удобнее, стоит

сравнить его с решением другим методом\*, которое заняло почти 1,5 страницы и рассмотрен только частный случай – малые колебания.

### §5. Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения тела

Плоскопараллельное движение тела, как известно складывается из двух: поступательного движения вместе с некоторым полюсом (переносное движение) и вращения вокруг оси, проходящей через этот полюс (относительное движение).

Если полюсом назначить центр масс тела  $C$ , то движение его, а значит и поступательное переносное движение, можно определить с помощью закона движения центра масс, составив уравнения (19.2),

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x}_C &= \sum X_i^{(e)}, \\ M\ddot{y}_C &= \sum Y_i^{(e)}. \end{aligned} \right\} \quad (19.24)$$

Относительное движение определяется составлением дифференциального уравнения вращения относительно центральной оси (19.22)

$$J_C \ddot{\phi} = \sum M_C \left( \vec{F}_i^{(e)} \right) \quad (19.25)$$

или относительно оси  $C_v$ , проходящей через мгновенный центр скоростей (19.23)

$$J_{C_v} \ddot{\phi} + K\dot{a} = \sum M_{C_v} \left( \vec{F}_i^{(e)} \right). \quad (19.26)$$

Комбинация любых трех уравнений из этих четырех позволит определить плоскопараллельное движение тела.

Пример 19.10. Стержень качался как маятник, вращаясь в вертикальной плоскости вокруг шарнира  $O$ . В момент, когда стержень был в вертикальном положении и угловая скорость его была  $\omega_0$ , шарнир разрушился. Определим дальнейшее движение стержня.

Стержень начнет совершать плоскопараллельное движение. На рис.19.21 показано его промежуточное положение.

Составим дифференциальные уравнения движения (19.24) и (19.25).

$$\frac{P}{g} \ddot{x}_C = 0, \quad \frac{P}{g} \ddot{y}_C = P, \quad J_C \ddot{\phi} = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{x}_C = 0, \quad \ddot{y}_C = g, \quad \ddot{\phi} = 0.$$

\*) Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: В 2т. – М.: Наука, 1985. Т.2 – 282 с.

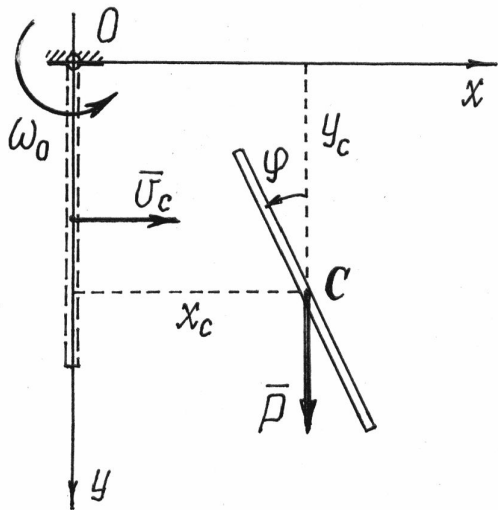


Рис. 19.21

Интегрируем их дважды:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_C &= C_1, \\ \dot{y}_C &= gt + D_1, \\ \dot{\phi} &= B_1, \end{aligned} \right\}$$

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} x_C &= C_1 t + C_2, \\ y_C &= \frac{1}{2} g t^2 + D_1 t + D_2, \\ \phi &= B_1 t + B_2. \end{aligned} \right\}$$

Начальные условия: при  $t = 0$

$$x_C = 0, \quad y_C = \frac{l}{2}, \quad \dot{x}_C = v_C = \frac{1}{2} l \omega_0,$$

$\dot{y}_C = 0, \quad \dot{\phi} = \omega_0.$  Подставив их в последние шесть уравнений, получим

$$C_1 = \frac{1}{2} l \omega_0, \quad C_2 = 0, \quad D_1 = 0, \quad D_2 = \frac{1}{2} l, \quad B_1 = \omega_0, \quad B_2 = 0.$$

Тогда уравнения плоскопараллельного движения стержня

$$x_C = \frac{1}{2} l \omega_0 t; \quad y_C = \frac{1}{2} g t^2 + \frac{1}{2} l; \quad \phi = \omega_0 t.$$

Например, стержень займет горизонтальное положение,  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , в момент  $t = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\omega_0}$ , когда центр масс его будет в точке с координатами

$$x_C = \frac{1}{4} \pi l, \quad y_C = \frac{1}{8} \left( \pi^2 \frac{g}{\omega_0^2} + 4l \right).$$

## XX. Основы теории колебаний

### §1. Основные определения колебательного движения

Колебательным движением материальной системы называется такое ее движение, при котором она через некоторые промежутки времени постоянно возвращается к определенному положению.

Нетрудно обнаружить, что большинство окружающих нас систем совершают колебательное движение.

Если время, за которое все точки системы возвращаются к любому определенному положению с равными скоростями, постоянно и одинако-

во, то такое время  $T$  называется *периодом колебаний*. А эти колебания – периодическим колебательным движением.

На рис.20.1 показан пример изменения какой-то обобщенной координаты  $q$  при довольно сложном колебательном процессе. А на рис.20.2 – при более организованных, периодических колебаниях.

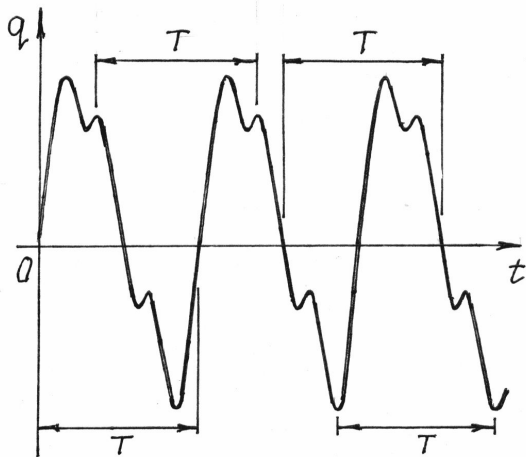


Рис.20.1

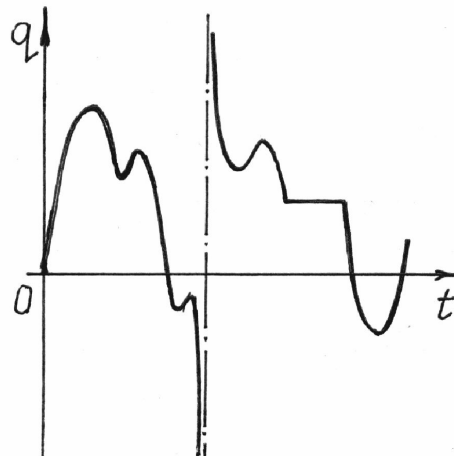


Рис.20.2

При периодическом процессе значения функции, описывающей движение системы, повторяются через каждый период  $T$ , т.е.

$$q(t) = q(t + T). \quad (20.1)$$

Если эта функция имеет вид

$$q = a \sin(kt + \beta), \quad (20.2)$$

то такое колебательное движение называется *гармоническим*. График такого движения дан на рис.20.3.

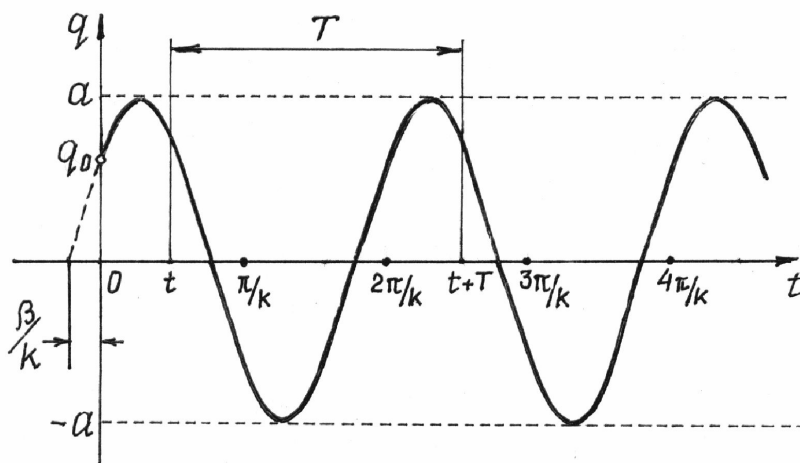


Рис. 20.3

По (20.2)  $q_0 = a \sin \beta$  – начальная координата, определяющая положение системы в начале движения;

$a$  – амплитуда колебаний, имеет размерность обобщенной координаты;

$(kt + \beta)$  – фаза колебаний,  $\beta$  – начальная фаза;

$k$  – частота колебаний, размерность ее  $\text{с}^{-1}$ .

Период колебаний найдем используя свойство (20.1):

$$a \sin(kt + \beta) = a \sin[k(t + T) + \beta].$$

Отсюда, т.к. период синуса равен  $2\pi$ ,  $kt + \beta = k(t + T) + \beta - 2\pi$ . Значит, период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k}. \quad (20.3)$$

Вообще, существует много всяких типов колебаний. Выделим, в первую очередь, линейные и нелинейные колебания. Названия их определяются видом дифференциальных уравнений, которые описывают колебательное движение материальной системы.

Исследование нелинейных колебаний значительно усложняется, т.к. нет общих методов решения нелинейных дифференциальных уравнений.

Но, если рассматривать малые колебания, такие, при которых координата и скорость изменяются на малую величину, то многие нелинейные уравнения станут линейными и исследование движения значительно упростится.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь малые, линейные колебания. И, мало того, колебания системы только с одной степенью свободы.

Естественно, колебания системы могут совершаться только около устойчивого положения равновесия.

Если система консервативная, то найти положение равновесия и определить устойчивость его можно с помощью потенциальной энергии.

В главе XVIII, §3 установлено, что в положении равновесия выполняется условие  $\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0$ , и если в положении равновесия  $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} > 0$ , то равновесие будет устойчиво.

Договоримся отсчитывать координату от положения равновесия ( $q_0 = 0$ ), а потенциальную энергию там считать равной нулю ( $\Pi_0 = 0$ ). Тогда, по определению малых колебаний, обобщенная координата  $q$  всегда будет малой величиной.

Разложим потенциальную энергию в ряд Маклорена около положения равновесия:

Разложим потенциальную энергию в ряд Маклорена около положения равновесия:

$$\Pi(q) = \Pi(0) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_{q=0} \cdot q + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_{q=0} \cdot q^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 \Pi}{\partial q^3}\right)_{q=0} \cdot q^3 + \dots$$

Так как  $\Pi(0) = 0$  и  $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_{q=0} = 0$  и, отбросив члены третьего и выше поряд-

ка малости, получим 
$$\Pi = \frac{1}{2} c q^2, \quad (20.4)$$

где коэффициент  $c = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_{q=0} > 0$ , по условию устойчивости.

Поэтому потенциальная энергия колебательной системы, отсчитываемая от положения устойчивого равновесия, будет всегда положительной.

Кинетическую энергию системы при малых колебаниях также можно преобразовать.

Кинетическая энергия системы  $T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}$ , а так как радиус-вектор точек  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q)$  и  $q = q(t)$ , то  $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q} \dot{q}$ .

Поэтому  $T = \sum \frac{1}{2} m_i \cdot \left(\frac{d\vec{r}_i}{dq}\right)^2 \dot{q}^2 = \frac{1}{2} \dot{q}^2 A(q)$ , где  $A(q) = \sum m_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dq}\right)^2$ .

Эту функцию  $A(q)$  можно разложить в ряд Маклорена по степеням  $q$  около положения равновесия и учесть только первый член:  $A(q) = A(0) + \dots$ . Остальные члены можно не учитывать, т.к. после подстановки  $A(q)$  в  $T$ , они станут величинами третьего и выше порядка.

Обозначив постоянную  $A(0) = a$ , получим

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2. \quad (20.5)$$

Коэффициент  $a$  называется коэффициентом инерции. Конечно,  $a > 0$ , т.к. кинетическая энергия не может быть отрицательной.

Замечание. Практически, при исследовании конкретных колебательных систем приходится раскладывать в ряд функции, содержащие, чаще всего,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x$ . Разложение их с точностью до малых второго порядка известны:  $\sin x = x$ ,  $\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2$ ,  $e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2$ .

## §2. Малые свободные колебания системы

Свободными колебаниями называется колебательное движение системы, выведенной из положения равновесия и предоставленной самой себе.

Составим уравнение Лагранжа для консервативной системы:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0.$$

Используя (20.4) и (20.5), получим дифференциальное уравнение свободных колебаний  $a\ddot{q} + cq = 0$  или, обозначив  $\frac{c}{a} = k^2$ ,

$$\ddot{q} + k^2 q = 0. \quad (20.6)$$

Решение этого однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами известно:

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \quad (20.7)$$

или, используя другие постоянные  $a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  и  $\operatorname{tg} \beta = \frac{C_1}{C_2}$ ,

$$q = a \sin(kt + \beta). \quad (20.8)$$

Следовательно, малые свободные колебания – гармонические колебания, причем амплитуда колебаний и начальная фаза определяются начальными условиями ( $q$  и  $\dot{q}$  при  $t = 0$ ), а частота колебаний  $k$  и период  $T$  не зависят от начальных условий, определяются только конструкцией системы.

Обычно частоту колебаний находят сравнением полученного дифференциального уравнения с уравнением (20.6).

Пример 20.1. Тело весом  $P$  подвешено на нити, перекинутой через блок и прикрепленной к пружине (рис.20.4). Вес блока  $G$ , радиус -  $r$ ; жесткость пружины  $c$ . Определим период свободных колебаний системы.

Назначим обобщенной координатой смещение  $z$  груза по вертикали от положения равновесия, при котором пружина была растянута на величину  $f$ .

Тогда потенциальная энергия относительно положения равновесия

$\Pi = -Pz + \frac{1}{2}c(z + f)^2 - \frac{1}{2}cf^2$ . Где  $(z + f)$  - полная деформация пружины,

а  $\frac{1}{2}cf^2$  - потенциальная энергия пружины в положении равновесия, которую вычитаем из потенциальной энергии полностью деформированной пружины. Раскрыв скобки, получим



$$\Pi = -Pz + \frac{1}{2}cz^2 + czf + \frac{1}{2}cf^2 - \frac{1}{2}cf^2 = -Pz + \frac{1}{2}cz^2 + czf = (-P + cf)z + \frac{1}{2}cz^2.$$

В положении равновесия должно выполняться условие  $\frac{\partial \Pi}{\partial z} = (-P + cf + cz)_{z=0} = 0$ .

Отсюда  $P = cf$ , значит,  $\Pi = \frac{1}{2}cz^2$ .

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J_o \dot{\phi}^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \dot{z}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{G}{g} r^2 \cdot \frac{\dot{z}^2}{r^2} = \frac{1}{4g} (2P + G) \dot{z}^2.$$

Составив уравнение Лагранжа, получим  $\frac{1}{2g} (2P + G) \ddot{z} + cz = 0$  или

$$\ddot{z} + \frac{2cg}{2P + G} z = 0. \text{ Сравнивая с (20.6), нахо-}$$

дим частоту колебаний  $k = \sqrt{\frac{2cg}{2P + G}}$  и затем период  $T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{2P + G}{2cg}}$ .

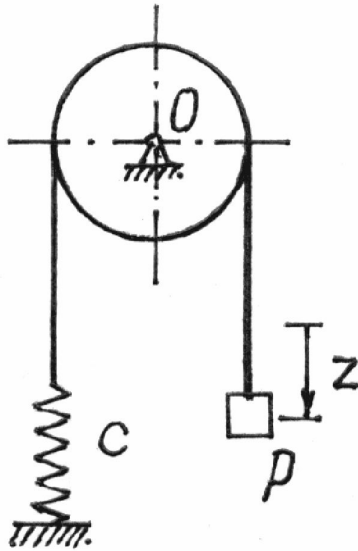


Рис. 20.4

Пример 20.2. Определим период малых колебаний балочки  $AB$  на цилиндрической поверхности (см. пример 18.4).

Потенциальная и кинетическая энергии определены. Разложим их в ряд с точностью до малых величин второго порядка. Для этого достаточно положить  $\sin \varphi = \varphi$ , а  $\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ . Получим

$$\Pi = mgr(1 - \frac{\varphi^2}{2} + \varphi^2 - 1) = \frac{1}{2} mgr \varphi^2. \text{ Кинетическая энергия получится такой}$$

$$\text{(отбросив член четвертого порядка - } \varphi^2 \dot{\varphi}^2 \text{): } T = \frac{1}{24} ml^2 \dot{\varphi}^2.$$

Составляем уравнение Лагранжа. Определив производные

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{12} ml^2 \dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{12} ml^2 \ddot{\varphi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mgr \varphi, \text{ получим уравнение}$$

$$\frac{1}{12} ml^2 \ddot{\varphi} + mgr \varphi = 0. \text{ Приводим его к форме (20.6): } \ddot{\varphi} + 12 \frac{gr}{l^2} \varphi = 0. \text{ Поэтому}$$

$$\text{частота малых колебаний } k = \sqrt{12 \frac{gr}{l^2}} = 2 \frac{\sqrt{3gr}}{l} \text{ и период } T = \frac{2\pi}{k} = \frac{\pi l}{\sqrt{3gr}}.$$

### §3. Свободные колебания системы с учетом сил сопротивления движению

Известно, что свободные колебания не длятся очень долго. Как правило они, как говорят, затухают и довольно скоро. Причиной этому является чаще всего – сопротивление среды, в которой движутся части колебательной системы.

Обычно считают это сопротивление пропорциональным скорости. Пусть на каждую точку материальной системы действует сила сопротивления  $\vec{R}_i = -v_i \vec{v}_i$ . Обобщенная сила, соответствующая этим силам,

$$Q' = \frac{1}{\delta q} \sum \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum \vec{R}_i \cdot \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q} = \sum \vec{R}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q}.$$

Скорость точек  $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q} \dot{q}$ , так как  $\vec{r}_i$  - сложная функция,

$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q)$ , а  $q = q(t)$ . Поэтому  $\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q}$ . Значит,  $Q' = \sum \vec{R}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}} =$

$$= -\sum v_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}} = -\sum v_i \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum \frac{1}{2} v_i v_i^2. \quad \text{Обозначим } \sum \frac{1}{2} v_i v_i^2 = \Phi(\dot{q}).$$

Тогда обобщенная сила сопротивления  $Q' = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}$ .

Заметим, что по форме эта функция  $\Phi$  аналогична кинетической энергии  $T$ . Поэтому, если разложить ее в ряд Маклорена и учесть члены лишь второго порядка малости, результат получится тоже аналогичным (20.5):  $\Phi = \frac{1}{2} b \dot{q}^2$  (коэффициент  $b$  также будет положительным). И тогда обобщенная сила сопротивления движению

$$Q' = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = -b \dot{q}. \quad (20.9)$$

Функция  $\Phi$  называется диссипативной или функцией рассеивания энергии системы.

После подстановки в уравнение Лагранжа  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = Q'$ , получим дифференциальное уравнение  $a\ddot{q} + cq = -b\dot{q}$  или

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0, \quad (20.10)$$

где  $n = \frac{b}{2a}$  - коэффициент сопротивления,  $k = \sqrt{\frac{c}{a}}$  - частота свободных колебаний без сопротивления.

Найдем решение уравнения (20.10). Характеристическое уравнение:  $z^2 + 2nz + k^2 = 0$ . Корни его  $z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$ , могут быть и комплексными, и вещественными в зависимости от сопротивления, от величины коэффициента  $n$ .

а) *Случай малого сопротивления ( $n < k$ ).*

Корни получаются комплексными  $z_{1,2} = -n \pm i\lambda$ , где  $\lambda = \sqrt{k^2 - n^2}$ ,  $i = \sqrt{-1}$ . Решение дифференциального уравнения ищем в виде

$$q = e^{-nt} (C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t) \quad (20.11)$$

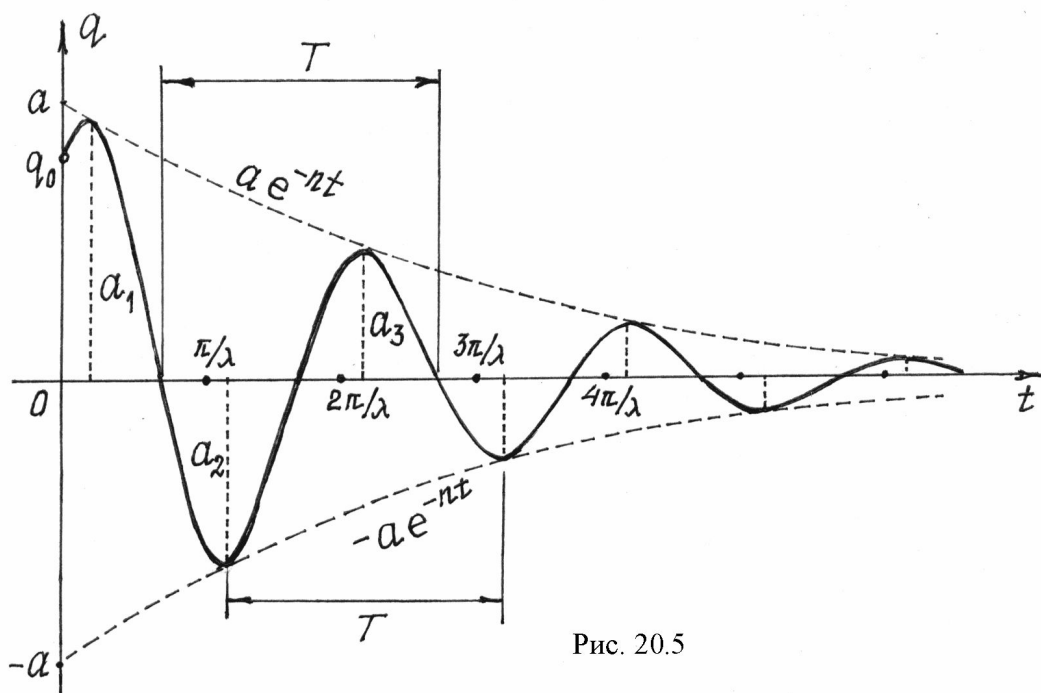
или

$$q = a e^{-nt} \sin(\lambda t + \beta), \quad (20.12)$$

где постоянные  $C_1$  и  $C_2$  или  $a$  и  $\beta$  находятся по начальным условиям.

Сравнивая решение (20.12) с (20.2), делаем вывод, что это будут колебания, но не гармонические, так как амплитуда колебаний, равная  $a e^{-nt}$ , не постоянная, уменьшается с течением времени. Поэтому такие колебания и называются *затухающими*.

График таких колебаний дан на рис. 20.5.



Следует заметить, что колебательный процесс не будет периодическим. Но, так как система проходит через положение равновесия через равное время, все-таки вводят понятие периода  $T = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}$ .

Если сравнить этот период колебаний с периодом колебаний системы без сопротивления (20.3), увидим, что сопротивление увеличивает период колебаний и уменьшает их частоту.

Интересна закономерность изменения амплитуды. Найдем отношение соседних амплитуд (через полпериода  $T/2$ ):

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{ae^{-nt}}{ae^{-n(t+T/2)}} = e^{nT/2} = \text{const.}$$

То есть амплитуды уменьшаются по закону геометрической прогрессии, знаменателем которой является величина  $e^{nT/2}$ .

Натуральный логарифм ее, равный  $\frac{1}{2}nT$ , называется логарифмическим декрементом колебаний.

Конечно, через период амплитуда уменьшится в  $e^{nT}$  раз, а через  $m$  периодов – в  $e^{mnT}$  раз.

б) *Случай большого сопротивления ( $n > k$ ).*

Корни характеристического уравнения получатся вещественными:  $z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$ . В этом случае, как известно из курса математики, решение дифференциального уравнения (20.10):

$$q = e^{-nt} \left( C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2} \cdot t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2} \cdot t} \right). \quad (20.13)$$

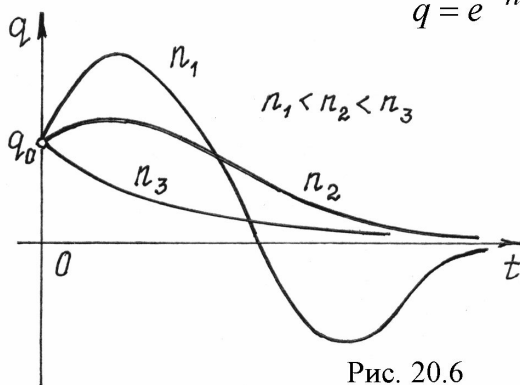


Рис. 20.6

Решение явно неколебательное, непериодическое.

Графики таких движений показаны на рис.20.6. Вид движения зависит от начальных условий и величины коэффициента сопротивления  $n$ .

в) *Случай равного сопротивления ( $n = k$ ).*

Корни характеристического уравнения получаются равными:  $z_{1,2} = -n$ . Поэтому решение дифференциального уравнения

$$q = e^{-nt}(C_1 + C_2t). \quad (20.14)$$

Движение и в этом случае не будет колебательным.

#### §4. Вынужденные колебания системы

Если сила, которая вывела систему из положения равновесия, продолжает действовать, то такое колебание не будет свободным, будет вынужденным. И эта сила называется *возмущающей силой*.

Рассмотрим колебательное движение под действием обобщенной возмущающей силы, изменяющейся по гармоническому закону  $Q = Q_0 \sin(pt + \gamma)$ , где  $Q_0$  - максимальная величина возмущающей силы;  $p$  - частота изменения силы;  $\gamma$  - начальная фаза изменения силы.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний получится таким

$$\ddot{q} + k^2q = Q_0 \sin(pt + \gamma). \quad (20.15)$$

Решение этого линейного неоднородного дифференциального уравнения состоит из общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения. Общее решение уже было получено в §2 (20.7) или (20.8). Частное решение ищем в виде  $q_{\text{ч.н.}} = A \sin(pt + \gamma)$ .

Подставив его в дифференциальное уравнение (20.15), получим  $-Ap^2 \sin(pt + \gamma) + k^2A \sin(pt + \gamma) = Q_0 \sin(pt + \gamma)$ . Отсюда

$$A = \frac{Q_0}{k^2 - p^2}. \quad (20.16)$$

Значит полное решение уравнения (20.15)

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + A \sin(pt + \gamma). \quad (20.17)$$

Так как общее и частное решения совершаются с разными частотами, то вынужденные колебания не будут гармоническими. Но, как нам уже известно, общее решение определяет свободные колебания, которые с течением времени довольно быстро затухают. Поэтому интерес представляют только установившиеся колебания:

$$q = \frac{Q_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \gamma). \quad (20.18)$$

Отсюда следует, что установившиеся вынужденные колебания будут гармоническими с частотой  $p$ , равной частоте возмущающей силы и, что они не зависят от начальных условий.

И, самое интересное, - амплитуда колебаний  $A$  зависит от частоты  $p$  возмущающей силы. График этой зависимости дан на рис.20.7.

Первое, что надо отметить, при  $p = k$  (частота возмущающей силы равна частоте свободных колебаний) амплитуда увеличивается до бесконечности.

Это явление называется *резонансом*.

Как известно из курса высшей математики, при  $p = k$  решение (20.17) не будет удовлетворять уравнению (20.15). Частное решение надо искать в другом виде:

$$q = Bt \cos(pt + \gamma).$$

Подставив его в уравнение (20.15), получим:  
 $-Bp \sin(pt + \gamma) - Bp \sin(pt + \gamma) - Btp^2 \cos(pt + \gamma) + Btp^2 \cos(pt + \gamma) = Q_0 \sin(pt + \gamma)$ . Отсюда  $B = -\frac{Q_0}{2p}$  и частное решение, определяющее

вынужденные колебания при резонансе, получится таким

$$q = -\frac{Q_0}{2p} t \cos(pt + \gamma). \quad (20.19)$$

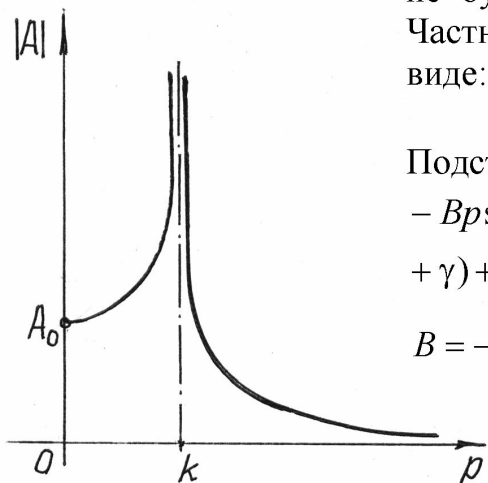


Рис. 20.7

Видим, что амплитуда колебаний беспредельно равномерно увеличивается (рис.20.8). Амплитуда не сразу становится бесконечно большой. И даже малая возмущающая сила может раскачать систему до больших амплитуд и вызвать разрушение конструкции.

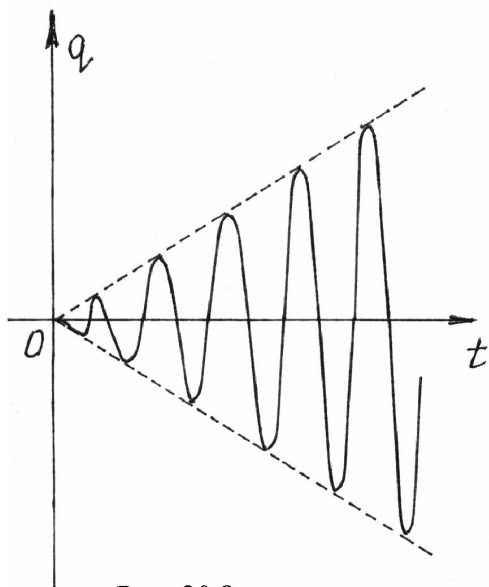


Рис. 20.8

Интересен еще один случай, при котором частота  $p$  возмущающей силы близка к частоте свободных колебаний,  $p \approx k$ , но не равна ей.

Воспользуемся решением (20.17), положив для простоты  $\gamma = 0$ . Пусть в начале движения координата и скорость равнялись нулю (при  $t = 0$   $q = 0$  и  $\dot{q} = 0$ ). Подставим эти начальные условия в уравнения

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + A \sin pt,$$

$$\dot{q} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + Ap \cos pt.$$

Получим два уравнения:  $0 = C_1$  и  $0 = C_2 k + Ap$ , из которых находим  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = -A \frac{p}{k}$ . Тогда уравнение колебаний  $q = -A \left( \frac{p}{k} \sin kt - \sin pt \right)$ .

Так как  $\frac{p}{k} \approx 1$  и  $(k^2 - p^2) = (k - p)(k + p) \approx 2p(k - p)$ , то, по (20.16),

$$A = \frac{Q_0}{k^2 - p^2} \cong \frac{Q_0}{2p(k - p)}.$$

Кроме того  $(\sin kt - \sin pt) = 2 \cos \frac{k+p}{2} t \cdot \sin \frac{k-p}{2} t \approx 2 \cos pt \cdot \sin \frac{k-p}{2} t$ .

Уравнение движения получится таким

$$q = -\frac{Q_0}{p(k-p)} \sin \frac{k-p}{2} t \cdot \cos pt. \quad (20.20)$$

Рассматривая функцию, стоящую перед  $\cos pt$ , как амплитуду колебаний, замечаем, что она изменяется по гармоническому закону с периодом  $T_A = \frac{4\pi}{k-p}$  от нуля до максимального значения  $A_{\max} = \frac{Q_0}{p(k-p)}$  (рис.20.9).

Сами колебания совершаются с частотой  $p$  и периодом  $T_k = \frac{2\pi}{p}$ .

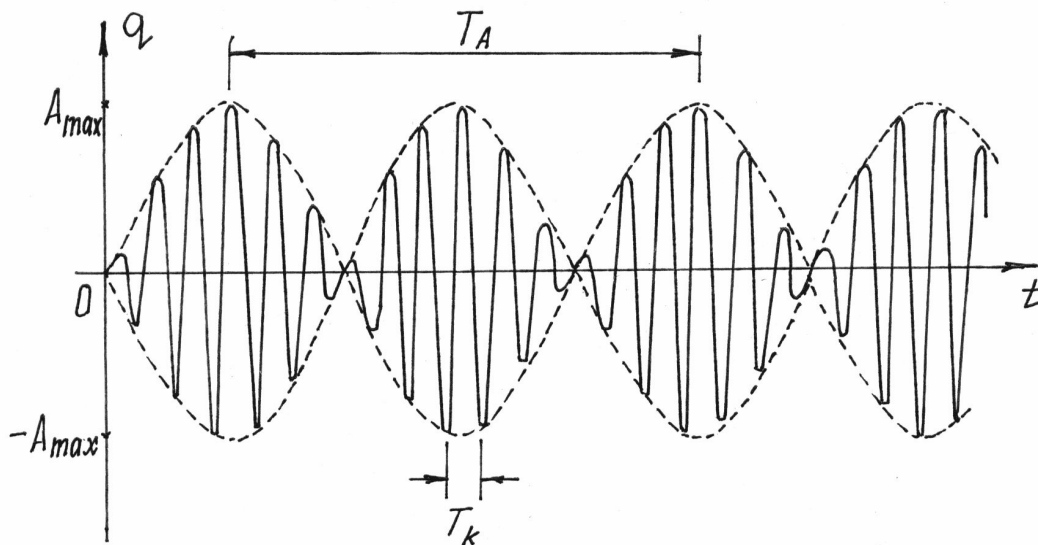


Рис. 20.9

Чем ближе частота возмущающей силы  $p$  к частоте  $k$ , т.е. чем ближе к резонансу, тем больше будет период амплитуды  $T_A$  и больше амплитуда  $A_{\max}$ . И тем больше будет похож график на рис.20.9 на график на рис.20.8, изображающий колебания при резонансе. Эти колебания с пе-

риодически изменяющейся амплитудой называются *биениями*. Такое явление часто встречается, например, в радиотехнике.

Мы исследовали вынужденные колебания под действием возмущающей силы, изменяющейся по гармоническому закону. Но нередко она оказывается более сложной. Приходится использовать специальные математические методы, чтобы получить более-менее точный результат.

Если возмущающая сила периодическая и ее можно разложить в ряд Фурье, то решение может оказаться не очень сложным.

Пусть возмущающая сила описывается периодической функцией  $Q = Q(t)$  с периодом  $T_B = \frac{2\pi}{p}$ ,  $p$  – частота изменения этой функции. И пусть конструкция ее позволяет разложить функцию в ряд Фурье:

$$Q = Q_0 + \sum_{j=1}^{\infty} Q_j \sin(jpt + \gamma_j),$$

где  $Q_j$  и  $\gamma_j$  – коэффициенты Фурье, определяемые по специальным формулам.

Частное решение дифференциального уравнения (20.15) получится в

$$\text{виде ряда: } q = A_0 + \sum_{j=1}^s \frac{Q_j}{k^2 - (jp)^2} \sin(jpt + \gamma_j) = \frac{Q_0}{k^2} + \frac{Q_1}{k^2 - p^2} \sin(pt + \gamma_1) + \\ + \frac{Q_2}{k^2 - (2p)^2} \sin(2pt + \gamma_2) + \frac{Q_3}{k^2 - (3p)^2} \sin(3pt + \gamma_3) + \dots$$

Количество  $s$  членов этого ряда стараются иметь не очень большим, если ряд хорошо сходится.

Решение получается как сумма нескольких синусоид («гармоник») с кратными частотами. Наименьшая частота  $p$  – называется основной частотой.

Интересно, что в полученном решении возможно несколько резонансов, столько, сколько гармоник: при  $p = k$ ,  $p = \frac{1}{2}k$ ,  $p = \frac{1}{3}k$  и т.д.

## §5. Влияние сопротивления на вынужденные колебания

Если учесть сопротивление среды пропорциональное скорости, как это было сделано в §3, дифференциальное уравнение колебаний получится таким

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = Q_0 \sin(pt + \gamma). \quad (20.21)$$

Решение его состоит из общего и частного решений. Общее мы уже находили в §3. Например, при малом сопротивлении ( $n < k$ )



$$q_{0.0.} = ae^{-nt} \sin(\lambda t + \beta), \text{ где } \lambda = \sqrt{k^2 - n^2}.$$

Частное решение будем искать в виде  $q_{ч.н.} = A \sin(pt + \gamma - \varepsilon)$ . Чтобы определить коэффициенты  $A$  и  $\varepsilon$ , подставим это решение в уравнение (20.21). Получим

$$\begin{aligned} -Ap^2 \sin(pt + \gamma - \varepsilon) + 2Anp \cos(pt + \gamma - \varepsilon) + k^2 A \sin(pt + \gamma - \varepsilon) = \\ = Q_0 \sin(pt + \gamma - \varepsilon) \cos \varepsilon + Q_0 \sin \varepsilon \cdot \cos(pt + \gamma - \varepsilon) \end{aligned}$$

(правую часть уравнения (20.21) представили как синус суммы двух углов:  $\sin[(pt + \gamma - \varepsilon) + \varepsilon]$ ). Полученное уравнение обратится в тождество, если будут выполнены два условия (сгруппировав члены, содержащие  $\sin(pt + \gamma - \varepsilon)$  и  $\cos(pt + \gamma - \varepsilon)$ ):

$$-Ap^2 + Ak^2 = Q_0 \cos \varepsilon \quad \text{и} \quad 2Anp = Q_0 \sin \varepsilon.$$

Из этих уравнений получим

$$A = \frac{Q_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}; \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}. \quad (20.22)$$

Полное решение уравнения (20.21) будет таким

$$q = ae^{-nt} \sin(\lambda t + \beta) + A \sin(pt + \gamma - \varepsilon). \quad (20.23)$$

Очевидно, за счет сопротивления с течением времени первый член стремится к нулю. Поэтому можно заключить, что установившиеся вынужденные колебания и с учетом сопротивления среды будут гармоническими.

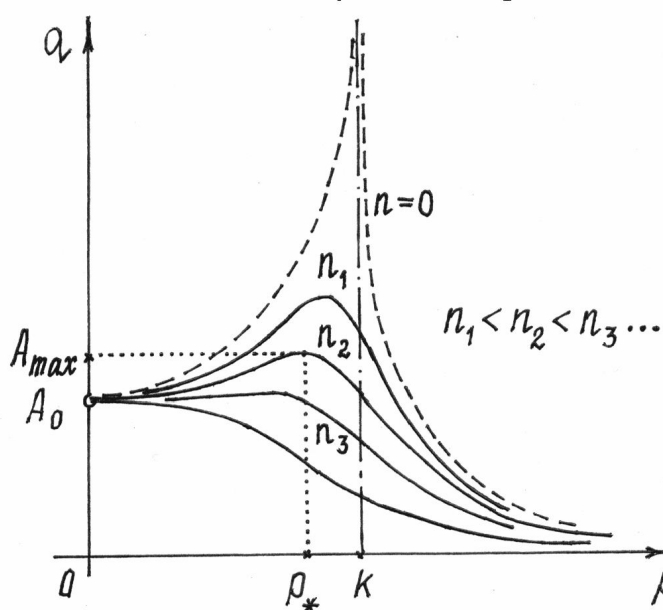


Рис. 20.10

Причем, во-первых, частота колебаний равна частоте изменения возмущающей силы; во-вторых, колебания не зависят от начальных условий и, в-третьих, амплитуда колебаний  $A$  зависит от частоты  $p$  и от сопротивления среды, характеризующегося коэффициентом  $n$ .

График этой зависимости от  $p$  и  $n$  дан на рис.20.

Из графика видно, что при сопротивлении амплитуда колебаний – конечная величина. И максимум амплитуды

будет не при  $p = k$ , а при несколько меньшей частоте  $p_*$ . Ее можно определить, отыскав максимум амплитуды  $A$  или, лучше, минимум функции  $F = (k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2$ . Приравняв к нулю производную,

$$\frac{dF}{dp} = 2(k^2 - p^2)(-2p) + 8n^2 p = 0, \text{ найдем } p_* = \sqrt{k^2 - 2n^2}. \text{ И тогда величина}$$

$$\text{на максимальной амплитуды, подставив } p_* \text{ в (20.22), } A_{\max} = \frac{Q_0}{2n\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

## XXI. Об ударе

### §1. Явление удара

Ударом будем называть кратковременное действие на тело некоторой силы  $\vec{F}$ . Силы, возникающей, например, при встрече двух массивных тел.

Опыт показывает, что взаимодействие их очень кратковременно (время контакта исчисляется тысячными долями секунды), а сила удара довольно велика (в сотни раз превышает вес этих тел). Да и сама сила – не постоянна по величине. Поэтому явление удара – сложный процесс, сопровождающийся к тому же деформацией тел. Точное исследование его требует знания физики твердого тела, законов тепловых процессов, теории упругости и др.

Мы же воспользуемся довольно простыми методами исследования, но которые, как подтверждает практика, достаточно правильно объясняют явление удара.

Поскольку сила удара  $\vec{F}$  очень велика, а продолжительность его, время  $\tau$ , мало, при описании процесса удара будем пользоваться не дифференциальными уравнениями движения, а теоремой об изменении количества движения. Потому что измеряемой конечной величиной является не сила удара, а импульс ее  $\vec{S} = \int_0^{\tau} \vec{F} dt$ .

Чтобы сформулировать первые особенности явления удара, рассмотрим сначала действие такой силы на материальную точку.

Пусть к материальной точке  $M$ , движущейся под действием обычных сил  $\vec{F}_i$  по некоторой траектории (рис.21.1), в какой-то момент была приложена мгновенная, большая сила  $\vec{F}$ . С помощью теоремы об изменении количества движения за время удара  $\tau$  составим уравнение  $m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{S}$ , где  $\vec{v}_2$  и  $\vec{v}_1$  – скорости точки в конце и в начале удара;  $\vec{S}$  –

импульс мгновенной силы  $\vec{F}$ . Импульсами обычных сил, под действием которых точка двигалась, можно пренебречь – за время  $\tau$  они будут очень малы.

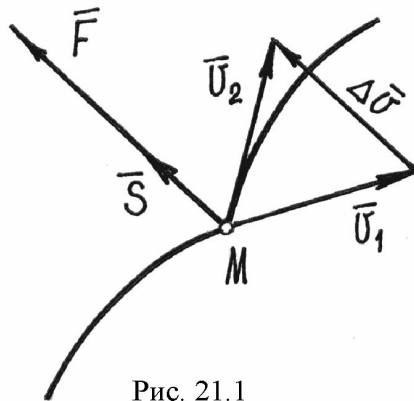


Рис. 21.1

Из уравнения находим изменение скорости за время удара (рис.21.1):

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \frac{\vec{S}}{m}$$

Это изменение скорости оказывается конечной величиной.

Дальнейшее движение точки начнется со скоростью  $\vec{v}_2$  и продолжится под действием прежних сил, но по траектории, получившей излом.

Теперь можно сделать несколько выводов.

1. При исследовании явления удара обычные силы можно не учитывать.
2. Так как время  $\tau$  мало, перемещением точки за время удара можно пренебречь.
3. Единственный результат действия удара – только изменение вектора скорости.

## §2. Прямой центральный удар двух тел

Удар называется *прямым и центральным*, если центры масс тел до удара двигались по одной прямой, по оси  $x$ , точка встречи их поверхностей оказывается на этой же прямой и общая касательная  $T$  к поверхностям будет перпендикулярна оси  $x$  (рис.21.2).

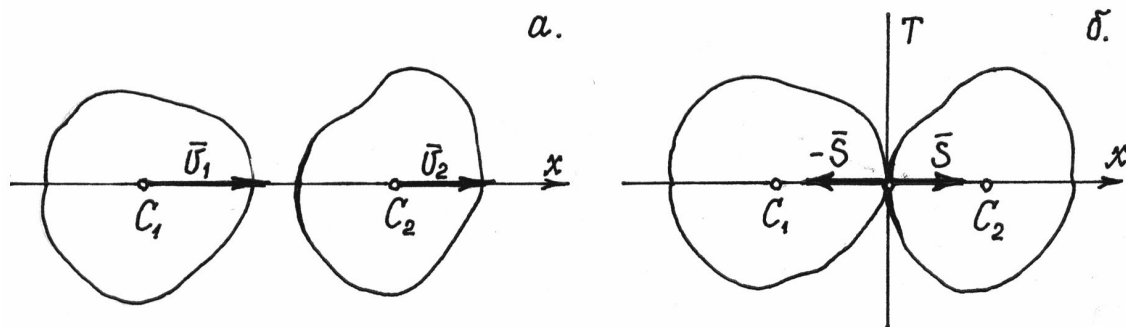


Рис. 21.2

Если касательная  $T$  не перпендикулярна этой оси, удар называется *косым*

Пусть тела двигались поступательно со скоростями их центров масс  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ . Определим каковы будут их скорости  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$  после удара.

За время удара  $\tau$  на тела действуют ударные силы  $\vec{F}$ , импульсы  $\vec{S}$  которых, приложенные в точке касания, показаны на рис.21.2б. По теореме об изменении количества движения, в проекциях на ось  $x$ , получим два уравнения

$$\left. \begin{aligned} m_1(u_1 - v_1) &= -S, \\ m_2(u_2 - v_2) &= S, \end{aligned} \right\} \quad (21.1)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  - массы тел;  $v_1, v_2, u_1, u_2$  - проекции скоростей на ось  $x$ .

Конечно, этих двух уравнений недостаточно для определения трех неизвестных ( $u_1, u_2$  и  $S$ ). Нужно еще одно, которое, естественно, должно характеризовать изменение физических свойств этих тел в процессе удара, учитывать упругость материала и его диссипативные свойства.

Рассмотрим сначала удар пластичных тел, таких, которые по окончании удара не восстанавливают деформированный объем и продолжают двигаться как одно целое со скоростью  $u$ , т.е.  $u_1 = u_2 = u$ . Это и будет недостающее третье уравнение. Тогда имеем

$$\left. \begin{aligned} m_1(u - v_1) &= -S, \\ m_2(u - v_2) &= S. \end{aligned} \right\} \quad (21.2)$$

Решив эти уравнения, получим

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (21.3)$$

$$S = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2). \quad (21.4)$$

Так как величина импульса  $S$  должна быть положительной, то для того чтобы произошел удар, требуется выполнение условия  $v_1 > v_2$ .

Нетрудно убедиться, что удар пластичных, неупругих тел сопровождается потерей их кинетической энергии.

Кинетическая энергия тел до удара  $T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$ . После удара  $T_2 = \frac{1}{2} m_1 u^2 + \frac{1}{2} m_2 u^2$ . Отсюда  $T_1 - T_2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1^2 - u^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_2^2 - u^2) = \frac{1}{2} m_1 (v_1 - u)(v_1 + u) + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - u)(v_2 + u)$ . Или, учитывая (21.2),  $T_1 - T_2 = \frac{1}{2} S(v_1 + u) - \frac{1}{2} S(v_2 + u) = \frac{1}{2} S(v_1 - v_2)$ . И, подставив значение импульса  $S$ , по (21.4), получим

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2. \quad (21.5)$$

Эта «потерянная» энергия расходуется на деформацию тел, на нагревание их при ударе, (можно убедиться, что после нескольких ударов молотком, деформированное тело сильно нагревается).

Заметим, что если одно из тел до удара было неподвижным, например  $v_2 = 0$ , то потерянная энергия

$$\Delta T = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_1 = \frac{1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} T_1$$

(так как энергия тел до удара в этом случае была только у первого тела,  $T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$ ). Таким образом, потеря энергии, энергии затраченной на деформацию тел, составляет часть энергии ударяющего тела.

Следовательно, при ковке металла, когда желательно чтобы  $\Delta T$  было побольше, отношение  $\frac{m_1}{m_2}$  нужно сделать как можно меньше,  $m_2 \gg m_1$ .

Поэтому наковальню делают тяжелой, массивной. Аналогично, при клепке какой-либо детали, молоток надо выбрать полегче.

И, наоборот, при забивании гвоздя или сваи в грунт, молоток (или бабу копра) надо брать потяжелее, чтобы деформация тел была меньше, чтобы большая часть энергии пошла на перемещение тела.

Перейдем теперь к удару упругих тел.

Ударный процесс таких тел происходит гораздо сложнее. Под действием ударной силы деформация их сначала увеличивается, увеличивается до тех пор пока скорости тел не уравниваются. А затем, за счет упругости материала, начнется восстановление формы. Скорости тел начнут изменяться, изменяться до тех пор пока тела не отделятся друг от друга.

Разделим процесс удара на две стадии: от начала удара до того момента, когда скорости их уравниваются и будут равными  $u$ ; и от этого момента до конца удара, когда тела разойдутся со скоростями  $u_1$  и  $u_2$ .

Для каждой стадии получим по два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} m_1(u - v_1) &= -S_1, \\ m_2(u - v_2) &= S_1; \end{aligned} \right\} \quad (21.6)$$

$$\left. \begin{aligned} m_1(u_1 - u) &= -S_2, \\ m_2(u_2 - u) &= S_2, \end{aligned} \right\} \quad (21.7)$$

где  $S_1$  и  $S_2$  – величины импульсов взаимных реакций тел для первой и второй стадий.

Уравнения (21.6) аналогичны уравнениям (21.2). Решая их, получим

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad S_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2).$$

В уравнениях (21.7) три неизвестные величины ( $u_1$ ,  $u_2$ ,  $S_2$ ). Не хватает одного уравнения, которое опять должно характеризовать физические свойства этих тел.

Положим отношение импульсов  $\frac{S_2}{S_1} = k$ . Это и будет дополнитель-

ное третье уравнение.

Опыт показывает, что величину  $k$  можно считать зависящей только от упругих свойств этих тел. (Правда, более точные эксперименты показывают, что есть некоторые зависимости и от их формы). Определяется этот коэффициент экспериментально для каждого конкретного тела. Называется он *коэффициентом восстановления скорости*. Величина его  $0 \leq k \leq 1$ . У пластичных тел  $k = 0$ , у абсолютно упругих тел  $k = 1$ .

Решая, теперь, уравнения (21.7) и (21.6), получим скорости тел после окончания удара.

$$u_1 = u + k(u - v_1); \quad u_2 = u + k(u - v_2). \quad (21.8)$$

Можно найти, как и при ударе пластичных тел, потерю кинетической энергии при ударе упругих тел. Она получится такой

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 (1 - k^2). \quad (21.9)$$

Заметим, что при ударе абсолютно упругих тел ( $k = 1$ ) кинетическая энергия не изменяется, не «теряется» ( $\Delta T = 0$ ,  $T_1 = T_2$ ).

**Пример 21.1.** Металлический шарик падает с высоты  $h_1$  на горизонтальную массивную плиту. После удара он подскакивает на высоту  $h_2$  (рис.21.3).

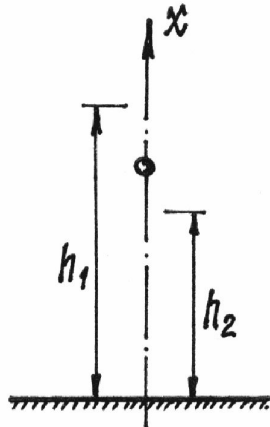


Рис. 21.3

В начале удара о плиту проекция скорости шарика на ось  $x$   $v_1 = -\sqrt{2gh_1}$ , а скорость неподвижной плиты  $v_2 = 0$ . Считая, что масса плиты  $m_2 \gg m_1$ , много больше массы шарика, можно положить  $u = 0$  и  $u_2 = 0$ . Тогда по (21.8)  $u_1 = -kv_1$ . (Теперь, кстати, понятно почему коэффициент  $k$  называется коэффициентом восстановления скорости.)

Итак, скорость шарика в конце удара  $u_1 = k\sqrt{2gh_1}$  и направлена вверх ( $u_1 > 0$ ). Шарик подскакивает на высоту  $h_2$ , связанную со скоростью формулой  $u_1 = \sqrt{2gh_2}$ .

Значит,  $\sqrt{2gh_2} = k\sqrt{2gh_1}$  и  $k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$ . По последней формуле, кстати, и определяется коэффициент восстановления  $k$  для материалов, из которых сделаны шарик и плита.

### §3. Удар по вращающемуся телу

При исследовании удара по вращающемуся телу кроме теоремы об изменении количества движения приходится использовать и закон моментов (гл. XIX, §3). Относительно оси вращения (19.19) его запишем так  $dL_z = \sum M_z(\vec{F})dt$  и, после интегрирования за время удара  $\tau$ ,  $L_z^K - L_z^H = \sum \int_0^\tau M_z(\vec{F}_i)dt$  или  $J_z(\omega_2 - \omega_1) = \sum \int_0^\tau M_z(\vec{F}_i)dt$ , где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  - угловые скорости тела в начале и в конце удара,  $\vec{F}_i$  - ударные силы.

Правую часть надо немного преобразовать. Найдем, сначала, интеграл момента ударной силы относительно неподвижной точки  $O$ :

$$\int_0^\tau \vec{M}_O(\vec{F}_i)dt = \int_0^\tau (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)dt = \int_0^\tau (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)dt = \vec{r}_i \times \int_0^\tau \vec{F}_i dt = \vec{r}_i \times \vec{S}_i = \vec{M}_O(\vec{S}_i).$$

При этом предполагалось, что за малое время удара  $\tau$  радиус-вектор  $\vec{r}_i$  считался неизменным, постоянным.

Проектируя результат этого векторного равенства на ось вращения  $z$ , проходящую через точку  $O$ , получим  $\int_0^\tau M_z(\vec{F}_i) dt = M_z(\vec{S}_i)$ , т.е. интеграл равен моменту вектора импульса ударной силы относительно оси вращения. Закон моментов в преобразованном виде запишется, теперь, так:

$$J_z(\omega_2 - \omega_1) = \sum M_z(\vec{S}_i). \quad (21.10)$$

В качестве примера рассмотрим удар вращающегося тела о неподвижную преграду.

Тело, вращаясь вокруг горизонтальной оси  $O$ , ударяется о преграду  $A$  (рис. 21.4). Определим ударные импульсы сил, возникающих в подшипниках на оси,  $\vec{S}_x$  и  $\vec{S}_y$ .

По теореме об изменении количества движения  $\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \sum \vec{S}_i$  в проекциях на оси  $x$  и  $y$  получим два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} m v_1 - m u_1 &= S + S_x, \\ 0 &= S_y, \end{aligned} \right\}$$

где скорости центра масс  $C$  в начале и конце удара  $v_1 = a\omega_1$ ,  $u_1 = a\omega_2$ . Поэтому первое уравнение станет таким  $ma(\omega_2 - \omega_1) = S + S_x$ .

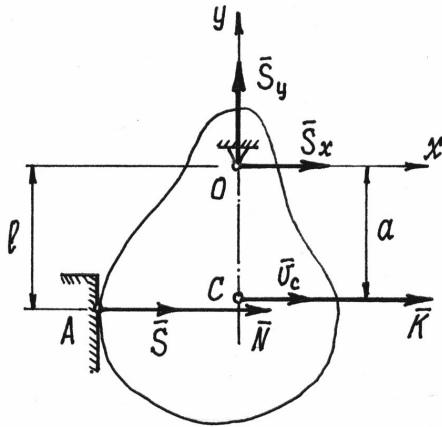


Рис. 21.4

Третье уравнение, по (21.10), получится в виде  $J_z(\omega_2 - \omega_1) = Sl$ , из которого находим  $S = \frac{J_z}{l}(\omega_2 - \omega_1)$ .

И, так как коэффициент восстановления

$$k = \frac{u_1}{v_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

то  $S = -\frac{J_z}{l}(1-k)\omega_1$  (в нашем примере  $\omega_1 < 0$ , поэтому ударный импульс  $S > 0$ , то есть направлен так, как показано на рисунке).

Находим импульсы реакции оси:  $S_y = 0$ ,  $S_x = ma(\omega_2 - \omega_1) - S = -ma(1-k)\omega_1 + \frac{J_z}{l}(1-k)\omega_1 = \left(\frac{J_z}{l} - ma\right)(1-k)\omega_1$ .

Обязательно надо обратить внимание на то, что при  $l = \frac{J_z}{ma} = l_{уд}$  ударные импульсы в подшипниках оси будут равны нулю.

Место, точка удара, расположенная на этом расстоянии  $l_{уд}$  от оси вращения, называется *центром удара*. При ударе по телу в этом месте ударные силы в подшипниках не возникают.

Кстати, заметим, что центр удара совпадает с точкой где приложены равнодействующая сил инерции (16.6) и вектор количества движения (19.14a).

Вспомним, что при ударе длинной палкой по неподвижному предмету, мы нередко испытывали рукой неприятный ударный импульс, как говорят – «отбивали руку».

Нетрудно найти в этом случае центр удара – место, которым следует ударить, чтобы не почувствовать это неприятное ощущение (рис.21.5).

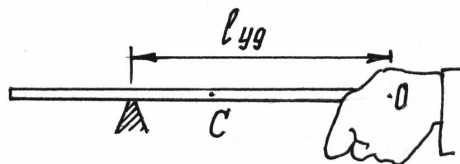


Рис. 21.5

Так как  $J_o = \frac{1}{3}ml^2$  ( $l$  – длина палки) и  $a = OC = 0,5l$ , то

$$l_{уд} = \frac{ml^2}{3 \cdot m0,5l} = \frac{2}{3}l.$$

Следовательно, центр удара находится на расстоянии трети длины от конца палки.

Понятие центра удара учитывают при создании различных ударных механизмов и других конструкций, где встречаются ударные процессы.