

ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
СТАТИКА, КИНЕМАТИКА, ДИНАМИКА
Учебное пособие

А Н Н О Т А Ц И Я

Применяя аксиоматический метод при написании «Курса», авторы:

1. Отказались от игровых доказательств законов механики, но через показ теоретических мостиков перехода от одних из них к другим, продемонстрировали систему методов, позволяющих с высокой надёжностью правильно предсказывать другие (как объективно известные, так и объективно неизвестные) механические явления;
2. Взяли систему аксиом, обеспечивающую более короткие пути демонстрации методологии теоретической механики;
3. Отказались от заблуждения (и поэтому от эфемерных, часто встречающихся устремлений) давать «абсолютно строгие доказательства», руководствуясь лишь логико-формальными методами, но путём расширения исторических сведений усилили роль главного критерия истины – опытного факта, наблюдения;
4. Иллюстрируя основные теоретические результаты акцент сделали на инженерно-машиностроительной полезности теоретической механики;
5. Придерживаясь традиционных вопросов программы курса теоретической механики, включили в изложение свои исследовательские и методические находки.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

1. О предмете изучения	12
2. Об уровне совершенства и опытно-экспериментальной обоснованности теоретической механики	12
3. Об истории развития теоретической механики	13
4. О важности теоретической механики и главной цели, преследовавшейся авторами при построении данного «Курса»	13
5. О методологии теоретической механики	16
6. О строении курса	17
7. О понятиях	18
8. Об аксиомах	19
9. О предметах доказательств	22
10. Главные учебные задачи студентов	23
Список литературы к «Введению»	24
Раздел I. Статика	
11. Предмет изучения и основные задачи статики	25
12. Основные количественные характеристики механических действий и связи между ними	25
12.1. Общие сведения о рассматриваемых в разделе методах	25
12.2. Аксиома о действии	25
12.3. Понятия о разложении силы и её составляющих	27
12.4. О том, как сила приспособлена к векторной алгебре	28
12.5. Понятие о проекции силы на ось	29
12.6. Алгебраическая запись силы через её проекции на оси декартовой системы координат	29
12.7. Понятие о проекции силы на плоскость	30
12.8. Понятие о главном векторе. Основные способы его вычисления	30
12.9. Понятие о векторе-моменте силы	32
12.10. Моменты сил относительно осей и их связи с вектором -моментом	32
12.11. Способ перестановки индексов	33
12.12. Понятие о главном моменте. Аналитический способ его вычисления	34
12.13. Зависимость между главными моментами относительно различных центров	36
12.14. Понятия о противоположных силах, паре сил и её моменте, о силовом винте,	37

13. Блок других, наиболее используемых в статике, понятий и опорных фактов	39
13.1. Понятия об исходных механических системах и телах, внешних и внутренних силах, связях и их реакциях	39
13.2. Аксиома о противодействии. О главных векторе и моменте внутренних сил	40
13.3. Аксиома о равновесии, принцип освобождаемости от связей, сопутствующие понятия	42
13.4. Понятие об эквивалентных системах сил. Аксиома эквивалентности. Наиболее употребительные приёмы преобразования систем сил	43
14. Приведение систем сил к простейшему виду	44
14.1. Первый этап анализа систем сил при выявлении простейших их эквивалентов	44
14.2. Случаи приведения исходной системы к равнодействующей	45
14.3. Случай приведения исходной системы к равнодействующей паре	46
14.4. Случаи приведения исходной системы к равнодействующему винту	46
14.5*. Формулы для определения положений точек пересечения равнодействующей (или оси равнодействующего винта) с координатными плоскостями	48
14.6. Закон о моменте равнодействующей	49
14.7. Основные разновидности систем сил	50
14.8. Начальные сведения и отдельные результаты к вопросу о приведении к простейшему виду распределённых систем сил	50
14.9. О центрах тяжести	53
15. Равновесие тел	57
15.1. Уравнения равновесия	57
15.2. Типовые связи и их реакции	61
15.3. Закон о трёх силах	64
15.4. Рекомендуемая схема подхода к решению задач на определение реакций связей	65
15.5. Примеры на определение реакций связей в простейших механических системах	66
15.6. Равновесие сложных устройств, состоящих из просто сочленённых частей	76
15.7. Понятие о статически определимых и статически неопределимых задачах. Равновесие конструкций, состоящих из сложно сочленённых частей	79
15.8. Явления сопротивления скольжению и качению тел. Формы их учёта в инженерно-расчётной практике	83

Раздел II. Кинематика

16. Предмет изучения и основные задачи	90
17. Простое движение точки	90
17.1. Способы математического описания движения точки	90
17.2. Понятия о скорости и ускорении точки	92
17.3. Кинематика точки при естественном способе описания движения	95
17.4. Подходы к определению кинематических величин, уравнений и	100
радиусов кривизны траекторий при координатном способе описания движения точки	
17.5*. Рекомендуемый подход к определению скоростей и ускорений	104
точки при обобщённо-координатном способе описания её движения	
18. Простые движения твёрдого тела	
18.1. Поступательное движение	107
18.2. Вращательное движение (18.2.1. Об угловых скоростях и	108
ускорениях; 18.2.2. О линейных скоростях точек; 18.2.3. О линейных ускорениях)	
18.3. Сферическое движение (18.3.1. Примеры сферических движений из	115
техники; 18.3.2. О степенях свободы сферически движущегося тела; 18.3.3. Скорости точек сферически движущегося тела; 18.3.4. Ускорения точек сферически движущегося тела)	
19. Сложные движения точки и тела	124
19.1. Понятия об абсолютном, относительном и переносном	124
движениях, скоростях и ускорениях. Обозначения	
19.2. Закон сложения скоростей	126
19.3. Закон сложения ускорений	129
19.4. О главном подходе к кинематическому исследованию сложно	134
движущихся тел	
19.5. Закон о проекциях скоростей точек тела на проходящую через	137
них прямую	
19.6. Закон о независимости угловой скорости тела от выбора полюса	138
19.7. Закон сложения угловых скоростей	139
20. О кинематических исследованиях плоско движущихся тел и их соединений методами мгновенных центров скоростей и ускорений	
20.1. О существовании мгновенного центра скоростей	141
20.2. О распределении скоростей относительно МЦС	142
20.3. Основные способы определения положений МЦС	142
20.4. Начальные сведения о центроидах	143
20.5. О мгновенном поступательном движении плоской фигуры	144

20.6. Примеры кинематического исследования простых плоских механизмов с использованием понятия МЦС	144
20.7. Мгновенный центр ускорений. Пример использования этого понятия в кинематических исследованиях	147
21. Основные методы, используемые в кинематических исследованиях наиболее распространённых механизмов	
21.1. Метод подчёркивания букв в векторных уравнениях	149
21.2. Метод введения в рассмотрение систем отсчёта, превращающих подвижные оси вращения в неподвижные	157
22. Метод матричной кинематики	
22.1. Введение в раздел	161
22.2. Постановка задачи о многоступенчатом преобразовании координат	161
22.3. Спарка систем отсчёта и матрица преобразования в ней координат	162
22.4. Матричная формула преобразования координат в спарке систем отсчёта	164
22.5. Матричная формула преобразования координат для цепочки связанных систем отсчёта	165
22.6. Пример многоступенчатого преобразования координат	165
22.7. Заключение по разделу	168
Раздел III. Динамика	
23. Предмет изучения и основные задачи	169
24. О массах и механических системах	169
24.1. Понятие о массе тела. Основные единицы её измерения	169
24.2. Аксиома о массах. Понятия механической системы и частицы	170
24.3. Понятия о массе, центре масс механической системы и о материальной точке	171
25. Главный закон-аксиома динамики - закон о движении центра масс ...	173
25.1. Исторический аспект и формулировка главного закона-аксиомы динамики	173
25.2. Что такое 1 Ньютон ?	175
25.3. О косвенном влиянии внутренних сил на движение центра масс ...	175
25.4. Три исторических примера, иллюстрирующих, что «корректное применение дифференциального и интегрального исчислений к опорным фактам 1-7 приводит к достоверным выводам»	175
(25.4.1. Закон инерции;	
25.4.2. Законы движения свободно падающих и скользящих по наклонным желобам тел;	
25.4.3. Математический маятник)	
25.5. Примеры, иллюстрирующие первую основную задачу динамики	182

25.6. Примеры, иллюстрирующие вторую основную задачу динамики	183
25.7. Обобщённая оценка проблемы решения задач динамики.	195
	Рекомендуемые подходы	
25.8. Примеры на использование закона о движении центра масс для	196
	определения траекторий точек и взаимных перемещений частей системы	
26. Закон о движении центра масс в произвольных системах отсчёта		
26.1. Математическое выражение закона	199
26.2. Принцип относительности Галилея и Геоцентрическая	199
	система отсчёта	
26.3. Практикой доказано, что инерциальной является и	201
	Гелиоцентрическая система отсчёта	
26.4. Оценка близости к идеалу (к инерциальной системе) Гео- и	203
	Гелиоцентрической систем отсчёта	
26.5. Условие относительного покоя	205
26.6. Понятия о силе тяжести и об ускорении свободного падения	206
26.7. Рядовые примеры, иллюстрирующие применение закона о	209
	движении центра масс в произвольной системе отсчёта	
27. Закон об изменении количества движения		
27.1. Необходимые для описания закона понятия	211
27.2. Основные формы математического описания	212
	закона об изменении количества движения	
27.3. Закон сохранения количества движения	213
27.4. Исторический аспект	213
27.5. Рядовые примеры на применение Закона об изменении	214
	количества движения	
27.6. Условие равновесия оболочки с ответвлениями и	218
	установившимся в ней движением текучей среды	
27.7. Начальные сведения о ракетодинамике (27.7.1. Введение в	222
	подраздел; 27.7.2. Уравнение Мещерского; 27.7.3. Первая формула Циолковского; 27.7.4. Вторая формула Циолковского)	
28. Массо-геометрические характеристики твёрдых тел		
28.1. Введение в раздел	228
28.2. Об инженерно-физической сущности рассматриваемых вопросов	228
28.3. Основные массо-геометрические характеристики твёрдых тел и	229
	общие формулы для их вычисления	
28.4. Примеры на использование общих формул для определения	230
	моментов инерции тел	

28.5. Формула, связывающая моменты инерции тел относительно параллельных осей	233
28.6. Формула для вычисления момента инерции относительно произвольно ориентированной оси	236
28.7. Понятие об эллипсоидах инерции, главных и главных центральных осях инерции	238
29. Закон об изменении кинетического момента и основы динамики вращательно, плоско и сферически движущихся тел	
29.1. Понятие «кинетический момент» и общие формулы для его вычисления	243
29.2. Правило вычисления кинетического момента поступательно движущегося тела	244
29.3. Формула для вычисления кинетического момента вращательно движущегося тела	245
29.4. Закон об изменении кинетического момента	245
29.5. Закон сохранения кинетического момента	246
29.6. Закон площадей Кеплера	246
29.7. Математическое выражение производной по времени от кинетического момента вращательно движущегося тела. Основное уравнение динамики вращательного движения	247
29.8. Рядовые примеры на применение закона об изменении кинетического момента	248
29.9. Физический маятник	252
29.10*. Основные экспериментально-теоретические способы определения моментов инерции тел (29.10.1. Нахождение момента инерции тела через превращение его в физический маятник с экспериментальным определением периода колебаний; 29.10.2. Нахождение моментов инерции тел способом маятника сравнения; 29.10.3. Нахождение моментов инерции тел способом крутильных колебаний)	254
29.11. Закон об изменении кинетического момента в центромассовой системе отсчёта	256
29.12. Дифференциальные уравнения плоского движения твёрдого тела и примеры их применения	257
29.13. Начальные сведения о динамике произвольно и сферически движущихся тел (29.13.1. Уравнения, исторические сведения; 29.13.2*. Вывод дифференциальных уравнений)	260
29.14*. О гироскопе с тремя степенями свободы, прецессионном движении и условии неподвижности его оси вращения	263

29.15*.	О гироскопе с двумя степенями свободы, гироскопическом моменте и гироскопических реакциях	266
30.	Закон об изменении кинетической энергии	
30.1.	Понятия о работе и мощности. Общие формулы для их вычисления	268
30.2.	Примеры вычисления работ сил для часто встречающихся случаев (30.2.1. Работа силы тяжести; 30.2.2. Работа упругой силы; 30.2.3. Работа гравитационной силы)	270
30.3.	Формулы для вычислений суммарных мощностей сил, действующих на твёрдые тела (30.3.1. Случай поступательного движения; 30.3.2. Случай сферического движения; 30.3.3. Случай вращательного движения)	272
30.4.	О независимости работ и мощностей внутренних сил от выбора систем отсчёта	273
30.5.	Понятие о кинетической энергии. Формулы для её вычисления в случаях поступательно и вращательно движущихся тел	275
30.6*.	Формула для вычисления кинетической энергии сферически движущегося тела	276
30.7*.	Формулы для вычисления кинетической энергии свободно и плоско движущихся тел	276
30.8.	Закон об изменении кинетической энергии	278
30.9.	Примеры на применение закона об изменении кинетической энергии	280
31.	Метод кинетостатики	
31.1.	Введение в раздел	282
31.2.	Понятия, условия и уравнения динамического равновесия	282
31.3.	Связь между главными моментами сил инерции относительно начал инерциальной и центромассовой систем отсчёта	284
31.4.	Простейшие случаи учёта сил инерции	285
31.5.	Рядовые примеры на применение метода кинетостатики	286
31.6.	Понятие о центре удара	288
31.7.	О динамических нагрузках, порождаемых вращательно движущимися твёрдыми телами (31.7.1. Оценки возможных значений динамических нагрузок; 31.7.2. О нежелательных явлениях и об условиях их упреждения; 31.7.3. Понятие о критической угловой скорости и явлении самоцентрирования)	289
32.	Метод возможных перемещений	
32.1.	Введение в раздел	294
32.2.	Понятия действительных и возможных движений.	294

Система обозначений

32.3. Уравнения возможных мощностей и работ	296
32.4. Понятия об обобщённых координатах и степенях	298
подвижности механических систем. Аксиома и рекомендации по выбору простейших возможных движений	
32.5. Примеры	301
33. Закон сохранения полной механической энергии	
33.1. Введение в раздел	305
33.2. Понятие о потенциальных силах и потенциальной энергии.	305
Критерии потенциальности	
33.3. Примеры анализа сил на предмет отнесения их к классу	307
потенциальных	
33.4. Формулы для вычисления потенциальной энергии в случаях	307
действия сил тяжести, упругих и гравитационных сил	
33.5. Закон сохранения полной механической энергии	308
33.6. О вечных двигателях	310
33.7*. Уравнение невозмущённой траектории космического аппарата.	312
Понятие о трёх космических скоростях	
(33.7.1. Понятие о невозмущённой траектории	
33.7.2*. Вывод уравнения, описывающего невозмущённую	
траекторию	
33.7.3. Анализ уравнения невозмущённой траектории КА)	
34. Уравнения Лагранжа 2-го рода	
34.1. Введение в раздел	316
34.2. Классификация связей	317
34.3. Вывод уравнений Лагранжа 2-го рода (34.3.1. Главные	319
предпосылки к выводу; 34.3.2. Понятие об обобщённых силах.	
Уравнения динамического равновесия в обобщённых силах	
34.3.3. Рекомендация по вычислению обобщённых сил	
34.3.4. Три математические зависимости, используемые	
в непосредственном выводе уравнений Лагранжа 2-го рода	
34.3.5. Непосредственный вывод уравнений Лагранжа 2-го рода)	
34.4. Уравнения Лагранжа 2-го рода для консервативных систем	325
(34.4.1. Математические зависимости к непосредственному	
выводу уравнений Лагранжа 2-го рода в форме через	
кинетический потенциал;	
34.4.2. Непосредственный вывод уравнений)	
35. Начальные сведения об устойчивости	
равновесия механических систем	
35.1. Введение в раздел	328

35.2. Условия равновесия консервативных систем	328
35.3. Понятие об устойчивости равновесия	329
35.4. Основные результаты общетеоретических исследований устойчивости равновесия механических систем	
35.5. Об исследовании на устойчивость равновесия механических систем с одной степенью свободы	
35.6*. Краткие сведения об исследовании на устойчивость	332
равновесия механических систем с несколькими степенями свободы	
35.7. О явлениях возможного «выбивания» и «выпрыгивания»	333
систем из потенциальных ям	
36. Начальные сведения о колебательных процессах в механических системах	
36.1. Введение в раздел	334
36.2. О практической важности теории колебаний	334
36.3. Основные виды колебаний и главная задача, решаемая в	337
созданной о них теории	
36.4. Затухающие колебания и аperiodические движения линейных	340
систем с одной степенью свободы и вязким трением (36.4.1. Уравнение и график затухающих колебаний; 36.4.2. Период затухающих колебаний. Декремент колебаний 36.4.3. Формулы к экспериментально-теоретическому способу определения коэффициентов сопротивления среды и периодов собственных колебаний систем; 36.4.4. Уравнение и график аperiodических затухающих движений)	
36.5. Вынужденные колебания линейных систем с одной степенью	345
свободы	
36.6. О необходимости учёта других гармоник при рассмотрении	350
вынужденных колебаний	
36.7*. Рекомендации по предупреждению резонансных явлений в	353
механических системах с несколькими степенями свободы	
Литература к теории колебаний	357
Рекомендуемая учебная и справочная литература по теоретической механике	359

ВВЕДЕНИЕ

Крылатым стало выражение выдающегося австрийского физика Л.Больцмана: «Нет ничего более практичного, чем хорошая теория». Теоретическая механика такой и является.

1. О предмете изучения

Если наука только зарождается её изучение сводится к запоминанию обучающимися описаний соответствующих, ставших известными Человечеству, явлений. При таком подходе мыслительные способности используются нерационально. Поэтому люди издавна стремятся систематизировать накапливающиеся знания – так упорядочить их, чтобы при малом количестве понятий, связей между ними и методов перехода от одних из них к другим, охватывалось как можно большее количество накопившихся знаний, *чтобы можно было предсказывать неизвестные явления*. И это удаётся делать!

Изложения, содержащие понятия, связи между ними и методы перехода от одних из этих связей к другим, называют теориями. Одной из них, наиболее совершенной по отношению к другим, является теоретическая механика.

Очерчивание круга рассматриваемых теоретической механикой вопросов требует введения понятий «механическое движение» и «механическое взаимодействие».

Механическое движение - это происходящий во времени процесс изменения положения одних тел относительно других (их взаимная неподвижность – относительный покой - рассматривается как частный случай).

Механическое взаимодействие – это явление, при котором одно тело порождает изменение механического состояния второго (изменяет его скорость, или форму – по причине появляющихся деформаций).

Теоретическая механика – это наука о наиболее общих законах механического движения и взаимодействия тел.

2. Об уровне совершенства и опытно-экспериментальной обоснованности теоретической механики

Теории бывают различного уровня (в 1-м, 2-м и т.д., *n*-м приближениях к совершенству) и, поэтому, обладают различной доверительностью к предсказываемым результатам. И не случайно в жизни часто слышны высказывания (в общем правильные): «настоящий инженер должен верить своему глазу больше, чем любой формуле» (так, ведя речь о возможных некорректностях в теоретических предсказаниях, высказывался выдающийся кораблестроитель и математик А.Н.Крылов); «мать достоверности – опыт»

(писал известный итальянский живописец, скульптор, архитектор и инженер Леонардо да Винчи); «наука дышит одним воздухом – кислородом фактов» (физиолог В.В.Парин).

В связи с этим, заметим: *теоретическая механика – это спрессованный опыт Человечества* (в области движений и взаимодействий тел механических систем). И если результаты какого-либо отдельного эксперимента (наблюдения) окажутся, вдруг, противоречащими результатам, предсказываемым теоретической механикой, что иногда встречается в жизни, то с полной уверенностью можно утверждать: встретилась некорректная постановка опыта (или некорректная трактовка его результатов). И не случайно, поэтому, среди специалистов распространена поговорка: «Если опыт противоречит классической теории, тем хуже для него».

Краткие сведения об истории развития теоретической механики изложены в следующем подразделе. Здесь же заметим лишь, что длительность процесса совершенствования теоретической механики насчитывает несколько тысячелетий. В частности, в древнегреческом трактате «Механические проблемы» Аристотеля (годы жизни: с 287-го по 212-й до новой эры) содержится такой высокий уровень обобщения наблюденных Человечеством явлений как «закон равновесия рычага», т.е. с полной уверенностью можно говорить, что теоретическая механика - классическая теория (зародившаяся в античные времена).

При пересмотрах теорий главной задачей является объединение в единое целое как можно большего количества ставших известными фактов. Если оценочно считать, что понятия, связи между ними и переходные мостики от одних из этих связей к другим пересматриваются каждым поколением (один раз в 20 лет), то можно сказать, что теоретическая механика является теорией не менее сотого уровня совершенства. В этом плане интересно высказывание гениального английского учёного И.Ньютона (1643-1727), чей вклад в теоретическую механику наиболее весом и признан: «И если я видел дальше других, то потому, что стоял на плечах гигантов» («гигантами» он назвал выдающихся своих предшественников).

3. Об истории развития теоретической механики

История развития и становления теоретической механики – это отдельный предмет. Краткие сведения о наиболее значительных научных достижениях учёных-механиков можно найти в литературном источнике [1]. Основательное же его изучение рекомендуем начинать (после освоения данного «Курса») с литературы [2-7]. Здесь ограничимся лишь перечислением основных периодов развития механики:

1. Донаучный – заканчивается 4-м веком до н.э.; характеризуется живым созерцанием и накоплением материала, который ещё не подвергается существенной абстрактно-теоретической обработке;

2. Элементарный период – заканчивается серединой 17-го столетия; характеризуется рассмотрением простых видов механического движения, слабыми методами исследования и наличием несовершенных теорий («слабыми» и «несовершенными» с позиций сегодняшнего дня);

3. Период формирования современных понятий и формулировок законов – заканчивается 30-ми годами 18-го столетия; характеризуется созданием мощных методов исследования (дифференциального и интегрального исчисления) и построением совершенных теорий;

4. Период триумфального шествия теорий механического движения и преувеличения их значимости в вопросах познания окружающего мира - 18-19 века. В этот исторический период открытия одно за другим «сходят с кончика пера». Характерным в этом смысле является пример предсказания и обнаружения планеты Нептун. Научные успехи в вопросах механики приводят к широкому распространению в обществе ложной точки зрения, заключающейся в том, что все природные явления можно объяснить с позиций законов механического движения. Такая система взглядов, во многом оказавшая отрицательное влияние на развитие науки вообще, получила название «механицизм».

5. Период формирования теоретических основ различных прикладных вопросов механики — появляются теория механизмов и машин, теория уравнивания роторов, теория колебаний, теория устойчивости, теория гироскопов, ракетодинамика, механика сплошной среды, робототехника и другие. Заканчивается примерно 1970-м годом.

6. Современный период – характеризуется появлением мощного метода исследований с помощью компьютерной техники, позволившей существенно расширить классы решаемых практических задач.

4. О важности теоретической механики и главной цели, преследовавшейся авторами при построении данного «Курса»

В 1613 году английский учёный Бернеби Ричу писал: «Одна из болезней нашего века – многочисленность книг; они так заполнили мир, что нет никакой возможности переварить это» [8]. Полтора века назад на 25-ти страницах своих «Плодов раздумий» Козьма Прутков, подчёркивая важность мысли, шесть (!) раз повторил: «Нельзя объять необъятное».

Сегодня объём накопившейся и новой информации несравненно больший: если в 19-м веке было выпущено 6,1 миллиона книг различных наименований, то 20-й век подарил Человечеству 50 миллионов различающихся по названиям книг.

Если в течение 70 лет ежедневно прочитывать по книжке (один день – «Войну и мир» Толстого Л.Н., второй – «Аналитическую геометрию», третий день – данный «Курс теоретической механики»; и т.д.), то можно одолеть их около 26 тысяч ($70 \cdot 365 = 25550$), т.е. лишь одну из каждых 2200 накопившихся на сегодняшний день.

Но столько никто не читает. Социологи определили, что в среднем за свою жизнь человек прочитывает лишь 600 книг (одну из каждых ста тысяч накопившихся за время существования Человечества) и, если воспользоваться приёмом образности мышления, то относительно накопившихся и вновь появляющихся знаний можно сказать: «В мире накоплен океан информации. В нём вперемежку и рядом, внешне ничем неотличимо, расположены чепуха, ложь и правда. И в этот океан вливается огромный поток новой информации, который подобен реке в половодье - и быстр, и широк, и глубок, и непрозрачен».

Что же делать, как относиться к этому громадному валу знаний, вступающему в жизнь молодому человеку? - Авторы данного «Курса» рекомендуют руководствоваться следующими 3-мя мнениями знаменитых личностей:

французский энциклопедист Жан Жак Руссо – «Злоупотребление чтением убивает науку, создаёт лишь самонадеянных невежд»;

древний грек Эсхил – «Мудр тот, кто знает нужное, а не многое»;

отечественный учёный-естествоиспытатель Тимирязев К.А. – *«Надо знать обо всём понемножку, но всё о немногом».*

Для преодоления информационного бума сегодня используют три приёма:

первый – специализация (одни люди хорошо овладевают одними областями знаний, другие – другими, третьи – третьими и т.д.);

второй – в рамках выбранной специальности отдают предпочтение изучению фундаментальных дисциплин; тех, в которых накопленные Человечеством знания содержатся в наиболее концентрированном виде и которые в будущей практической их деятельности оказываются наиболее полезными;

третий приём - обучающихся учат самостоятельно учиться (учат умению получать как субъективно, так и объективно новые знания в сфере конкретной их деятельности; в частности, учат умению находить интересующую информацию и самостоятельно разбираться в ней).

Теоретическая механика – дисциплина фундаментальная. С необходимостью применять содержащиеся в ней знания приходится постоянно сталкиваться не только на производствах, но и в быту; не только инженерам, но и гуманитариям. В частности, чтобы оценить прочность конструктивных элементов построек (коттеджей, гаражей и пр.) приходится определять силы, в том числе и динамической природы.

Кроме того, без знания теоретической механики невозможно качественно изучать сопротивление материалов, детали машин, теорию механизмов и машин, подъёмные и транспортные устройства, насосы и вентиляторы, ряд других учебных предметов.

Но и в теоретической механике комплекс содержащихся знаний оказался непомерно широким. Это и обусловило появление данного «Курса». Преследовавшаяся авторами цель при его построении:

помочь студенту освоить минимум содержащихся в теоретической механике знаний, чаще других востребуемых инженером в практической деятельности и который достаточен для того, чтобы специалист без труда был в состоянии расширить свои знания в области теоретической механики – чтобы умел самостоятельно разобраться с тем или иным конкретным примером, *в огромном количестве* содержащихся в комплексе из нескольких сот накопившихся книг по теоретической механике.

5. О методологии теоретической механики

Методология теоретической механики (иначе: совокупность применяемых в ней методов) – это универсальный набор символов, мнемотехники, правил и мыслительных процедур, несущественно задалживающих память, но позволяющих из нескольких десятков опорных фактов механики быстро получать другие, как известные (накопленные Человечеством в огромном количестве), так и *объективно неизвестные* связи между механическими величинами.

Если разные методы при приложении к одному комплексу предпосылок приводят к одинаковым результатам, их называют эквивалентными.

Используя приём образности мышления можно сказать: методология – это комплекс строительных материалов, из которых сооружают все мостики перехода от одних механических величин и связей между ними к другим, т.е. методология теоретической механики – это всё то, что позволяет хранить в концентрированном (свёрнутом) виде накопленные Человечеством знания о наиболее общих законах механического движения и механических взаимодействий и, при необходимости, разворачивать эти знания до конкретных частных, среди которых будут оказываться и *объективно новые знания*.

Мнемотехника – это приёмы из области искусства запоминания, существенно облегчающие свёртку и хранение (в памяти, книгах, компьютерах и т.п.) больших сгустков информации и обеспечивающих, в случае необходимости, быстрое их воспроизведение (разворачивание). Примеры: если Вы, изучая кинематику, увидели символ V , то без дополнительных пояснений считайте, что речь идёт о линейной скорости движущегося объекта (V – это первая буква от

латинского слова *velocitas* – скорость); если \mathbf{a} , то считайте, что речь идёт о линейном ускорении объекта (*acceleratio* – ускорение); если встретились α , β , γ , то речь скорее всего идёт о каких-то углах; если V_{BA} , то это скорость точки B относительно поступательно движущейся системы координат с началом во времени совпадающим с точкой A .

О роли методов в науке удачно высказались всемирно признанные физиолог Павлов И.П., математик Лейбниц Г.В., физик Ландау Л.Д. ([9] - с.70, 55, 52):

метод - самая первая, основная вещь;

на свете есть вещи поважнее самых прекрасных открытий, - это знание метода, которым они были сделаны;

метод важнее открытия, ибо правильный метод исследования приведёт к новым, ещё более ценным открытиям.

6. О строении курса

Теоретическую механику принято делить на три раздела: статика, кинематика и динамика.

В зависимости от них известны различные последовательности изложения курса - его могут начинать со статики, с кинематики и с динамики. Наиболее распространена последовательность «статика - кинематика - динамика». Она и принята в данном изложении. По тем причинам, что такой подход:

во-первых, позволяет студентам знания по теоретической механике наращивать мелкими, а потому посильными, не пугающими порциями;

во-вторых, позволяет постепенно продвигаться от простого знания к сложному;

в-третьих, изучение других учебных предметов прежде всего требует знания раздела «Статики»; в частности, без знания этого раздела невозможно изучить курс «Сопротивления материалов».

Получаемые в данном «Курсе» результаты - математические выражения, формулировки правил и условий, методы и приёмы - разделены на две группы значимости: опорные факты и локальные результаты.

Опорные факты - это результаты, служащие инженеру предпосылками, с которых он должен начинать теоретическое исследование той или иной встретившейся ему на практике механической системы.

Содержащееся в «Курсе» разнообразие опорных фактов можно представлять в виде своего рода набора инструментов (по аналогии с теми, которые мы видим у часовых мастеров, или хирургов; у токарей; или слесарей – закрутить винт

иногда можно ножовочным полотном, и плоскогубцами, и зубилом, но удобнее делать это отвёрткой).

Локальные результаты – это те, которые оказываются востребованными лишь в рамках изучаемого «Курса».

Для опорных фактов применена числовая нумерация (1, 3, 7, ... и т.д.); для локальных – буквенная (*a, b, c, d, ...*).

О ссылках. Если ссылка делается на результат, содержащийся в этом же разделе, то используется простая (одночисловая) нумерация – например: «см. правило 3». При ссылках на информацию, содержащуюся в другом разделе, применена двойная нумерация: вначале записан номер раздела; затем, через точку - номер результата или рисунка; например: «см. рис.4.1», «см. 1.3» и т.д.

Практика показывает, что по своим способностям и подготовленности обучающиеся не являются однородной массой - есть отличники, хорошисты, занимающиеся на «удовлетворительно», т.е. объём материала, который за отведенный для изучения промежуток времени посилен одним студентам, оказывается непосильным другим. Поэтому, при недостатке у студента времени изучение разделов, подразделов, пунктов и примеров, отмеченных звёздочками, может сводиться лишь к ознакомлению с приводимыми там результатами; рассуждения же, доказательства и подробности рекомендуется «оставлять до лучших времён».

7. О понятиях

Понятие - это словосочетание (часто одно слово), при произнесении, прочтении или написании которого можно затратами времени на обучение добиться того, чтобы в человеческом мышлении возникал определённый круг образов окружающего мира (в форме геометрических фигур, ощущений, явлений, процессов и т.п., а также различных связей между ними, включая и математические выражения).

При изложениях используют бытовые и научные понятия.

С точки зрения одинаковости восприятия одного и того же понятия различными людьми, наиболее уязвимы бытовые понятия - они, как правило, допускают многозначные толкования (являются «расплывчатыми»). В этом легко убедиться, заглянув в толковые словари. Например - «нормальный». Это, оказывается, «соответствующий норме, обычный», либо - «психически здоровый», либо - «отрезок прямой, расположенный под углом 90 градусов к другому отрезку прямой»; и т.д., как хочешь, так и понимай.

Научные понятия (иначе: *термины*) – это понятия, отличающиеся от бытовых большей определённой и обычно позволяющие вводить для них количественные показатели (числа или комплексы чисел – векторы, матрицы, тензоры и т.п.).

Применяемые в теоретической механике специальные термины называют *механическими величинами* (сила, скорость, работа и т.д.).

В изложениях больше встречается бытовых понятий, чем научных. Чтобы уменьшить время блужданий обучающегося в поиске истинного знания, следует учитывать, что механические величины могут иметь одинаковое написание и звучание с привычными бытовыми понятиями (известными ещё с детских лет), существенно отличаясь от них содержанием. Пример - «пара сил». В быту «пара сил» и «две силы» являются понятиями-синонимами; в теоретической же механике – это разные понятия: из двух сил состоят «пара сил», «противоположные силы», «крест сил», «параллельные две силы», «пересекающиеся две силы» (от действий этих двоек сил получаются различные механические результаты, даже при равных модулях).

Следует различать понятия начальные (длина, время, масса, точка и т.д.) и производные (выражаемые через начальные: проекция силы на ось – это скалярное её произведение на орт заданной оси; количество движения точки – это произведение её массы на скорость; и т.п.).

Как видим, производные понятия – это просто. С начальными сложнее. Иногда говорят: «они не определяются». Это неточное выражение - весь существующий комплекс связей между механическими величинами и является их определением, но преподавателям рекомендуется проверять у студентов знания лишь производных понятий, т.к. при любой длине промежутка времени, затраченного на пояснение начального понятия, будет оставаться недосказанность (незавершённость, неясность), ибо при попытке пояснения любого термина возникает бесконечная цепочка определений: **А** – это ... (поясняя **А** употребляют слова **В**, **С** и т.д. **Д**). Поскольку **В**, **С** и т.д. **Д** также требуют пояснений, то следуют очередные пояснения, в которых появятся новые понятия - **Е** и т.д. **Ф**. При пояснении понятий **Е** и т.д. **Ф** появятся очередные, ранее не применявшиеся понятия - **Н** и т.д. **К**. И этот процесс расшифровки понятий уходит в бесконечность.

8. Об аксиомах

Многократно и широко наблюдавшиеся Человечеством, всеобщие признанные специалистами, связи между механическими величинами называют *механическими законами*.

Тот минимальный набор механических законов, с которых в конкретном «Курсе» авторы начинают демонстрировать приемлемость применяемых методов, называют *аксиомами* теоретической механики.

Дадим общую оценку аксиоматическому методу.

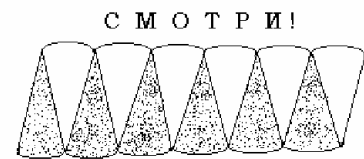
В теоретическую механику он пришёл из геометрии. Но «геометрия» – это не некое, единое во всех учебных заведениях упорядоченное изложение общепри-

знанных геометрических фактов. В ушедшем столетии в школах изучали курс элементарной геометрии Киселёва; он базировался на 3-х аксиомах. Но раньше были «Начала» Евклида (написаны примерно 2300 лет назад); геометрия Евклида покоится на 14 аксиомах. Известно много учебников с названием «Основания геометрии». У Гильберта Д. (1899 г.; переведены на русский язык в 1948 г.) они базируются на 19 аксиомах, у Кагана В.Ф. (1904 г.) – на 10-ти, у Леллон-Феррана Ж. (1985 г., перевод – 1989 г.) - на 12-ти, у Александрова А.Д. (1987 г.) – на 17-ти. Известны также «Основания геометрии» Костина В.И. (1948), Чистякова В.Д. (1961), Трайнина Я.Л. (1961), Погорелова А.В. (1968) и других; но они лишь расширяют разнообразие аксиоматических комплексов.

Отсутствует аксиоматическое единство и в действующих курсах по теоретической механике. Так, в статике по количеству формулируемых аксиом разномнения расположены в интервале 4 – 7, в динамике 3-5, в кинематике о началах не вспоминают (а они есть).

Приведенное свидетельствует, что обладающие наибольшим совершенством аксиоматические теории (в их числе и теоретическая механика) не являются безупречными. Но сомневаться в высокой полезности применяемого в теоретической механике аксиоматического метода не следует. Необходимо лишь настороженно и критически относиться к утверждениям типа: «механика стала стройной, законченной теорией»; в ней *«всё строго доказывается»*, «из небольшого числа начал всё остальное выводится как простые математические следствия». Поясняем сказанное.-

Каган В.Ф. о доказательстве одной из теорем уже упомянутой трёхаксиоматической геометрии Киселёва писал: «Это не слабое доказательство, здесь нет и следа доказательства, здесь есть только одна интуиция, есть только то, что древний писатель выразил одним словом - “смотри!”» [9, с.32]. Мысль



будет развита. Сейчас заметим лишь, что Каган имел ввиду доказательство индийского математика Ганеша – того результата, что площадь круга равна площади прямоугольника, основанием которого служит длина полуокружности (т.е. πr), а высотой - радиус круга (r). Древний математик дал своё доказательство в форме рисунка, примерный вид которого приводим - круг разделён на два полукруга, каждый из которых, в свою очередь, разделён на 6 одинаковых секторов; 6 секторов первого полукруга острыми частями направлены вверх, причём размещены так, чтобы их совокупность образовала пилообразную фигуру; в форме такой же пилы, но с острыми частями направленными вниз, представлены и 6 секторов второго полукруга. Справедливость приведенного результата для читателя станет 100-процентно доверительной, если он представит в мыслях (это проще, чем нарисовать), что

каждый полукруг разбит на большее, чем 6, число одинаковых секторов – например на 1000, на сто тысяч и т.д.

Приведенное «смотри!» (синонимы: «очевидно», «это совершенно ясно» и пр. подобное) – важная категория для процесса познания, но абсолютизировать её нельзя; *аксиоматический подход как раз и является мощным средством, сводящим практически на нет возможные ошибки*, появляющиеся в тех случаях, когда критерием для принятия решений становятся «доказательства» типа - «это ясно и младенцу».

Тяжело возражать оппоненту, произнесшему «это очевидно», ибо над возражающим нависает опасность быть осмеянным окружающими; тем более, если «это совершенно ясно» произносит пользующийся авторитетом человек. Но настоящий специалист должен знать, что аргумент «это ясно и младенцу» в дискуссиях (дебатах, спорах) используют лишь лица с «дутым» авторитетом, основанном на поверхностных знаниях.

Приводим два примера, иллюстрирующих случаи, когда кажущееся легко принимается за действительное и, наоборот, недоверительно выглядит истинное.

Пример первый.- Жучок расположен в центре боковой стенки аудитории (на пересечении диагоналей прямоугольника). Ему следует по кратчайшему пути переползти в центр передней стенки. Каким будет этот путь, если высота аудитории 3 метра, а длины стенок - 6 и 4 метра?

Правильный ответ: $6 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,5 = 5$ м (жучок ползёт по горизонталям).

А если высота комнаты 3 метра, а длины стенок 13 и 9 м? - Обычно отвечают (по аналогии с предыдущим случаем): $13 \cdot 0,5 + 9 \cdot 0,5 = 11$ м.

Но ... аналогия подвела! Во втором случае кратчайший путь 10 м.

Второй пример – большинство людей, впервые сталкивающиеся с лентой-кольцом Мёбиуса (*нечётное* число раз перекрученный пояс), на вопрос «Сколько после продольного разрезания исходного кольца получится новых колец?» отвечают - «Два». Ответ неправильный - получается один пояс, в 2 раза уже исходного (но в 2 раза длиннее его).

У Кагана, критиковавшего доказательства в геометрии Киселёва, в свою очередь встречается: «*Совершенно ясно*, что два пространства, сходственные с третьим, сходственны между собой» [10, с.551], но высокий уровень требований к понятию «строгость доказательств» он предъявляет и к себе – на с.553 пишет: «конечная цель в настоящем (его, Кагана) сочинении достигнута столь же мало, как и в других сочинениях, имеющих ту же задачу. Рядом с основными терминами ... мы употребляли много других ... , которым несомненно присваивается определённое значение, нами не формулированное ... Таковы термины: “существует”, “различные точки” ... и т.п. Рядом с постулатами, нами формулированными, имеются и постулаты логические, на которых основан весь процесс рассуждений ... Наконец, в основе всей нашей системы лежит арифмети-

ка; мы принимаем, следовательно, все те постулаты, на которых покоится эта дисциплина, а между тем, как ни глубоко продуманы начала арифметики, эта наука не может считаться обоснованной ... Итак, кроме тех посылок, которые нами формулированы, мы опирались ещё на другие посылки; мы не можем признать, следовательно, наших посылок достаточными для формального обоснования геометрии».

О невозможности построить неуязвимую аксиоматическую теорию, исходя из конечного числа начал, свидетельствует анализ понятий, приведенный в предыдущем подразделе. Об этом свидетельствуют также:

теорема Гёделя К. о невозможности полной формализации процесса логического вывода (1931 г.);

история создания Лобачевским Н.И. его геометрии (1829 г.);

Гаусс К. - «Я часто прихожу к доказательствам, которые убедили бы всякого другого; мне же они не говорят ничего» [10, с.29].

Но возникает естественный вопрос: «как, в конце-то концов, устанавливать истину, что является главным её критерием (аргументом в последней инстанции)»?

На этот вопрос лучше всего ответить мнениями всемирно известных математиков: Гильберт Д. - «это может решить *только наблюдение и опыт*» [11, с.343]; академик СССР Александров А.Д. - «от геометрической наглядности “Начал” Евклида основания геометрии были доведены до наглядности формул ... Однако такая формализация, как ... было доказано (имеется ввиду упоминавшаяся теорема Гёделя К. - АВТОРЫ), ... не могла привести к окончательному доказательству непротиворечивости геометрии», «Что значит “правильное логическое рассуждение”? Если рассуждение к чему-то относится, то его можно *проверить по результату*» [12, с.269 и 280].

Об аксиомах часто говорят, как о простейших связях между механическими величинами. Но «просто» и «сложно» - понятия относительные: что просто для одного, сложно для другого и, наоборот. Что «просто» при подходах с одной точки зрения, может оказаться «сложным» при ином подходе. Поэтому, у различных авторов аксиоматика может быть различной. Но этот вопрос имеет второстепенное значение, ибо для инженера, взявшегося за решение той или иной конкретной механической задачи, предпосылками (своего рода аксиомами) является весь набор опорных фактов теоретической механики.

9. О предметах доказательств

В учебниках по теоретической механике распространено понятие «доказательство». Оно требует пояснения.

В соответствии с толковыми словарями «доказательство» - это убеждение в истинности (кого-нибудь, в чём-то). Либо: это система умозаключений, путём которых выводится новое положение. В этом смысле термин «доказательство»

применяется и в теоретической механике. Уточним лишь предмет доказательства.

Для студента каждый отдельный переход от одной хорошо известной из опыта связи между механическими величинами к другой – есть локальное (местное, малое) доказательство приемлемости применяемых при этом методов. *Вся же совокупность содержащихся в курсах теоретической механики локальных доказательств, многократно повторяющихся при изложениях – есть одно, целостное доказательство приемлемости применяемых в ней методов.* Если вновь обратиться к приёму образности мышления, то: изучение студентами методологии теоретической механики должно быть подчинено армейскому принципу – «Делай как я!» (в одном месте применяй скалярное произведение, в другом – векторное; и одно другим заменить нельзя!). «Я» – это вся накопившаяся совокупность книг по теоретической механике.

После окончания учёбы предмет доказательства меняется – опорные факты теоретической механики становятся для специалиста предпосылками, исходя из которых он обязан с высочайшей уверенностью, беря на себя ответственность за выдаваемый результат, уметь предсказывать (иначе: получать, выводить) те или иные, как объективно известные, так и объективно неизвестные механические явления. При этом, накопленный Человечеством опыт показывает, что *корректное* использование методов теоретической механики и опорных её фактов обеспечивает практически достоверные предсказания; ориентировочно можно считать, что на миллион сбывающихся предсказаний приходится не более одного промаха.

10. Главные учебные задачи студентов

1. Знать основные опорные факты теоретической механики (основные связи между механическими величинами);
2. Овладеть методами, позволяющими будущему инженеру самостоятельно, начиная с опорных фактов теоретической механики, исследовать встречающиеся в его практической деятельности механические явления;
3. Получить начальные сведения о широко используемых в человеческой практике механических явлениях и о редко встречающихся, но парадоксальных (неожиданных, недоверительных на первый взгляд).

Список литературы к «Введению»

1. 100 механиков. Краткий библиографический справочник /Составитель Г.К.Татур.- Мн.: БПИ, 1971.- 64 с.
2. Веселовский И.Н. Очерки по истории теоретической механики.- М.: Высшая школа, 1974.- 288 с.
3. Моисеев Н.Д. Очерки развития механики.- М.: МГУ, 1961.- 478 с.
4. История механики (с древнегреческих времён до конца 18-го века) /Под общ. ред. А.Т.Григорьяна и И.Б.Погребысского.- М.: Наука, 1971.- 298 с.
5. Мандрыка А.П. Взаимосвязь механики и техники (1770-1970).- Л.: Наука, 1975.- 323 с.
6. Боголюбов А.Н. История механики машин.- К.: Наукова думка, 1964.- 463с.
7. Боголюбов А.Н. Развитие проблем механики машин.- К.: Наукова думка, 1967.- 291 с.
8. Пресман Е.А. Разыскивается монография.- Мн.: Книга, 1990.- 45 с.
9. Мысли о науке /Составитель В.П.Пономарёв.- Кишинёв: «Штиинца», 1973.- 152 с.
10. Каган В.Ф. Очерки по геометрии.- М.: МГУ, 1963.- 572 с.
11. Гильберт Д. Основания геометрии /Под редакцией П.К.Рашевского, перевод И.С.Градштейна.- М.-Л.: ОГИЗ, 1948.- 491 с.
12. Александров А.Д. Основания геометрии.- М.: Наука, 1987.- 290 с.

Раздел I. СТАТИКА

11. Предмет изучения и основные задачи статики

Статика – это часть теоретической механики, в которой вводят количественные характеристики механических действий (сила, момент, силовой винт и т.д.) и изучают связи между ними.

Основные учебные задачи статики – изучение законов и методов, с помощью которых можно: 1) определять действующие на тела неизвестные силы; 2) преобразовывать одни системы сил в другие.

Неизвестные силы определяют с целью осуществления прочностных расчётов (для обеспечения меньшего расхода материалов, высоких работоспособности и надёжности проектируемых элементов конструкций), а также с целью установления законов движения тел, оценки коэффициентов полезного действия и долговечности механизмов.

Системы сил преобразуют чаще всего с целью их упрощения (с целью уменьшения числа сил, которыми намереваются в дальнейшем оперировать; либо с целью замены произвольно направленных сил их составляющими, расположенными параллельно и/или перпендикулярно осям координат, что существенно облегчает последующие вычислительные операции).

12. Основные количественные характеристики механических действий и связи между ними

12.1. Общие сведения о рассматриваемых в разделе методах

Раздел важен, прежде всего, тем, что в нём изложены основы векторного метода, широко используемого не только в статике, но кинематике и динамике.

С излагаемым материалом студенты во многом знакомы (из курса математики), но: во-первых, «повторенье – мать ученья»; во-вторых, здесь знания по векторной алгебре расширяются; в-третьих, теоретическая механика предъявляет к студенту требование свободно владеть векторной алгеброй – быстро и безошибочно воспринимать и вспоминать формулы, правила, соответствующие геометрические образы.

12.2. Аксиома о действии

Человечеством разработан мощный аппарат количественного анализа, называемый «дифференциальным и интегральным исчислением», в основе которого лежит понимание о бесконечно малых величинах. Природа механических явлений такова, что дифференциальное и интегральное исчисление применимо и

к их анализу. И действительно, после слов «Рюкзак весит 30 килограмм» любой студент (человек, приобретший определённый жизненный опыт) ясно и без напряжения мысли представляет, что 30 кг – это суммарный вес, состоящий из отдельных весов находящихся в рюкзаке одежды, обуви, продуктов питания, аптечки и прочего. Он убеждён и готов собственными примерами пояснить, что весом обладает каждое находящееся в рюкзаке не только рисовое, но и просяное зёрнышко, каждая раздробленная его часть. Такой ход мысли делает доверительными результаты чужого опыта - весом обладает каждая пылинка муки, каждая молекула вещества. Делает естественной предпосылку о том, что весом обладает каждая частица (под частицей будем понимать часть тела, имеющую бесконечно малые геометрические размеры).

Таким образом, мы приходим к пониманию бесконечно малых механических действий, непрерывно распределённых в пространстве.

Наряду с распределёнными по объёмам, существуют механические действия, распределённые по поверхностям - действие ветра на листья дерева, на стену здания, давление колеса транспортного средства на дорогу и т.д.

При этом, механические действия могут различаться своей концентрированностью. Например, вес кубического дециметра дерева существенно отличен от веса кубического дециметра железа. По различному действуют на встречающиеся на пути предметы (дома, деревья) рядовые ветры и ураганы. Существенно отличаются действия на дорожку туфель на низком каблуке и на каблуках-шпильках.

Повседневные наблюдения механических действий приводят к необходимости оценивать их не только числами, но и направленностью – веса тел направлены вертикально вниз, флюгер – по ветру, мяч летит в направлении произведенного удара и т.д.

12.1 | **Аксиома о действии (о силе):** механическое действие на тело всегда можно разделить на такие конечные области, что в каждой из них суммарное действие (интеграл от элементарных действий по всем бесконечно малым объёмам, или площадкам этой области) оказывается возможным представлять вектором конечной длины, линия действия которого пронизывает эту область. Такой вектор и называют силой (приложенной к соответствующей части тела).

Для обозначения сил будем использовать прописные буквы латинского алфавита с буквенными нижними индексами справа, отображающими точки приложения этих сил. Приводим основной, используемый в дальнейшем, набор букв для обозначения сил и точек их приложения:

$$\vec{F}_O, \vec{P}_A, \vec{R}_B, \vec{T}_C, \vec{S}_D, \vec{Q}_E, \vec{G}_K, \vec{N}_H; \vec{X}_L, \vec{Y}_L, \vec{Z}_L.$$

Модули этих сил:

$$F_O, P_A, R_B, T_C, S_D, Q_E, G_K, N_H; X_L, Y_L, Z_L.$$

Основной единицей измерения силы длительное время являлся килограмм-сила (1кГс). В соответствии с ГОСТ 8.417-81 основной единицей измерения силы является 1 Ньютон (1Н) – это сила, примерно в 9,8 раз меньшая 1кГс. Уточнённое определение 1-го Ньютона дано в разделе «динамика».

На практике значения модулей сил чаще всего оценивают величинами деформаций упругих элементов, используя для этого пружинные весы, динамометры, динамометрические ключи и другие подобные устройства.

12.3. Понятия о разложении силы и её составляющих

Владеть понятием «разложение силы по двум направлениям» – это значит знать геометрическую процедуру, отображённую на рис.1, где x_1 и x' - произвольные оси, проходящие через начало A силы \vec{F}_A ; ADCB - параллелограмм. \vec{F}_{A1} и \vec{F}'_A называют составляющими силы \vec{F}_A .

В математических символах операцию разложения силы записывают:

$$\vec{F}_A = \vec{F}_{A1} + \vec{F}'_A.$$

Т.к. ADCB – параллелограмм, то об описанных геометрических преобразованиях говорят: «Сила разложена по правилу параллелограмма», а об обратной операции - «Силы (\vec{F}_{A1} и \vec{F}'_A) сложены по правилу параллелограмма».

Правило параллелограмма сил является «кирпичиком», из которых строят понятие о разложении силы по n направлениям. Для этого силу \vec{F}_A в свою очередь представляют разложенной по осям x_2 и x'' - на составляющие \vec{F}_{A2} и \vec{F}''_A , что в символах записывают:

$$\vec{F}_A = \vec{F}_{A1} + \vec{F}'_A = \vec{F}_{A1} + \vec{F}_{A2} + \vec{F}''_A.$$

Замечание: мысленно представляемая плоскость x_1Ax'' не обязательно совпадает с плоскостью x_1Ax' ; в общем случае - это пересекающиеся плоскости.

Раскладывая \vec{F}''_A на \vec{F}_{A3} и \vec{F}'''_A и т.д., получаем:

$$\vec{F}_A = \vec{F}_{A1} + \vec{F}_{A2} + \dots + \vec{F}_{An} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{Ai}.$$

К понятию о разложении силы по двум направлениям

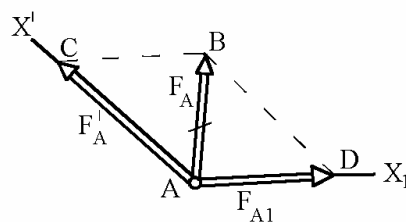


Рисунок 12.1

Без дополнительных рассуждений видно, что составляющие зависят от межосевых углов. Чаще всего силу раскладывают по взаимно перпендикулярным направлениям - см. рис.2; чтобы подчеркнуть это применяют словосочетание «ортогональные составляющие».

В символах алгебры свободных векторов процесс разложения силы на три взаимно перпендикулярные составляющие записывают:

$$12.2 \quad \vec{F}_O = \vec{P}_O + \vec{Z}_O = \vec{X}_O + \vec{Y}_O + \vec{Z}_O$$

(вначале сила \vec{F}_O разложена на \vec{P}_O и \vec{Z}_O , затем \vec{P}_O - на \vec{X}_O и \vec{Y}_O).

Замечания к рис.2: если направленный отрезок пересекает одна чётровка (на рис.2 см. \vec{F}_O), это означает, что он первым разложен на две составляющие; направленный отрезок, пересекаемый двумя чётрочками (на рис.2 см. \vec{P}_O), разложен вторым; направленный отрезок, пересекаемый тремя чётрочками, разложен третьим; и т.д.

Приёмом разложения силы по трём взаимно перпендикулярным направлениям пользовались ещё Джон Валлис (1616-1703, Англия) и Колин Маклорен (1698-1746, Шотландия).

12.4. О том, как сила приспособлена к векторной алгебре

В векторной алгебре оперируют со свободными векторами. Ранее же нами определено, что сила – это величина, характеризуемая модулем (5Н, 10кН и т.д.), направлением (сонаправлена с осью X, V и т.п.), точкой приложения, т.е. сила – вектор несвободный и, поэтому, следует помнить, что используя векторную алгебру оперируют не с самой силой, а с весьма близкой к ней величиной, которую можно было бы назвать, к примеру, «свободная сила», «математическое отражение силы», «алгебраический образ силы», но всё это длинно и, поэтому, к свободному вектору, имеющему одинаковые с силой модуль и направление, будем применять тот же термин «сила», но вместо, например, «сила \vec{F}_O », будем писать: «сила \vec{F} » ($\vec{F}_1, \vec{P}_2, \vec{T}_n, \dots$), отличие будет состоять лишь в отсутствии буквенного индекса (O, A, B и т.д.), отображающего точку приложения силы.

Сила и используемый в векторной алгебре её образ имеют равные модули и равные одноимённые проекции (о проекциях см. следующие подразделы). Это и делает целесообразным в науке о силах использовать векторную алгебру (т.к.

К понятию о разложении силы по трём направлениям

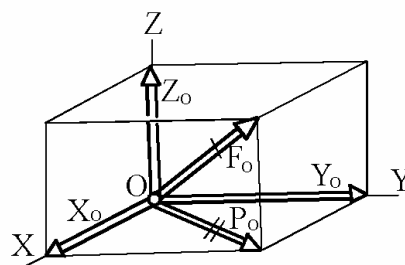


Рисунок 12.2

определяя с её помощью модули и проекции алгебраических образов сил мы тем самым определяем модули и проекции самих сил).

12.5. Понятие о проекции силы на ось

Пусть x - произвольная ось, \vec{i} - её орт, \vec{F} - произвольная сила. Величину

$$X = \vec{F} \cdot \vec{i}$$

называют проекцией силы \vec{F} на ось x .

Проекция силы на ось - величина алгебраическая. На рис.3 этому понятию дано геометрическое толкование:

- на картинках 3а и 3г угол φ расположен в интервалах $0-90^\circ$ и $270-360^\circ$; в этих случаях проекция силы на ось больше нуля;

когда же угол φ расположен в интервале $90-270^\circ$ (картинки 3б и 3в), проекция силы на ось меньше нуля.

В практике расчётов обычно оперируют острыми углами (на 4-х картинках рис.3 - углы α). В этих случаях удобно пользоваться правилом:

12.4 | если при мысленном следовании в положительном направлении оси раньше встречается проекция начала вектора, то проекция силы на ось - величина положительная; если раньше встретится проекция конца вектора, то проекция силы на ось - отрицательная величина.

Примеры обозначения проекций сил:

F_x, F_y, F_z, F_v - проекции силы \vec{F} на оси соответственно x, y, z, v ;

X_p, Y_p, Z_p - проекции силы \vec{P} на оси x, y, z .

К понятию о проекции силы на ось

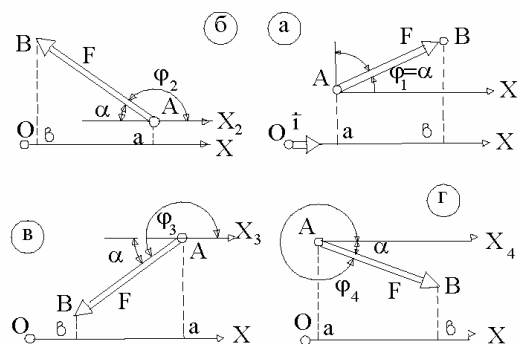


Рисунок 12.3

12.6. Алгебраическая запись силы через её проекции на оси декартовой системы координат

Если $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты осей x, y, z , то, в соответствии с 2 и 3:

$$\vec{F} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k} .$$

12.7. Понятие о проекции силы на плоскость

Вектор \vec{P} , направление и модуль которого определяют по правилам, ясным из рис.4, называют проекцией вектора \vec{F} на плоскость H .

Пояснения к рис.4: ac и bd принадлежат плоскости H ; Aa и BKb – перпендикуляры к плоскости H ; ось AkX параллельна ab .

К понятию о проекции силы на плоскость

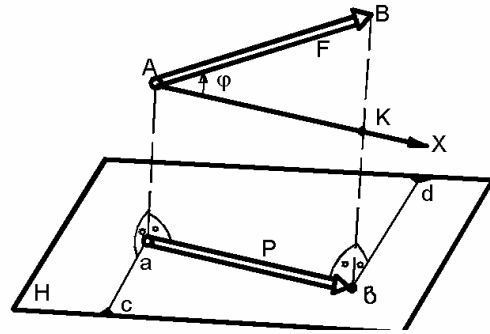


Рисунок 12.4

12.8. Понятие о главном векторе. Основные способы его вычисления

Пусть $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_v, \dots, \vec{F}_n$ - произвольная система сил.

Величину \vec{R}_Γ , определяемую из условия:

$$12.6 \quad \left| \vec{R}_\Gamma = \sum_{v=1}^n \vec{F}_v \right.$$

называют главным вектором рассматриваемой системы сил.

Отдельно взятых, сгруппированных по тем или иным признакам, систем сил может быть любое количество и в общем случае речь может вестись о главном векторе 1-й, 2-й, j-той и т.д., k-той систем сил, т.е. о $\vec{R}_{\Gamma_1}, \vec{R}_{\Gamma_2}, \dots, \vec{R}_{\Gamma_j}, \dots, \vec{R}_{\Gamma_k}$.

Геометрическое представление понятия «главный вектор» иллюстрировано на рис.5, где AD, AB, BC и CD - направленные отрезки, в одном масштабе изображающие главный вектор \vec{R}_Γ и его составляющие \vec{F}_1, \vec{F}_2 и \vec{F}_3 .

К графическому способу вычисления главного вектора

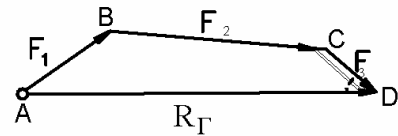


Рисунок 12.5

Представленный на рис.5 графический способ определения главного вектора на практике целесообразно применять лишь для плоских систем сил. По причинам же универсальности и компьютеризации общества основным способом определения главного вектора следует считать аналитический. Опишем его.

Проекции сил и главного вектора на оси X, Y, Z обозначим, соответственно, X_v, Y_v, Z_v ($v = 1, 2, \dots, n$); $X_\Gamma, Y_\Gamma, Z_\Gamma$.

Тогда:

$$\vec{R}_\Gamma = \sum_{v=1}^n \vec{F}_v = \sum (X_v \cdot \vec{i} + Y_v \cdot \vec{j} + Z_v \cdot \vec{k}) = \sum (X_v) \cdot \vec{i} + \sum (Y_v) \cdot \vec{j} + \sum (Z_v) \cdot \vec{k}$$

Но
$$\vec{R}_\Gamma = X_\Gamma \cdot \vec{i} + Y_\Gamma \cdot \vec{j} + Z_\Gamma \cdot \vec{k} .$$

Из сопоставления двух последних выражений:

$$12.7 \quad \left| \quad X_\Gamma = \sum X, \quad Y_\Gamma = \sum Y, \quad Z_\Gamma = \sum Z . \right.$$

Замечание: с целью упрощения записей, что будет делаться и в дальнейшем, пределы суммирования и индексы «v» опущены.

Переходим к рассмотрению примера.

К условию примера 12.1

ПРИМЕР 12.1 - На вычисление главного вектора (аналитическим способом)

Дано: к вершинам куба приложены силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$; точки их приложения и направления указаны на рис.6, а модули равны: $F_1 = 50 \text{ Н}$; $F_2 = \sqrt{2} \cdot 100 \text{ Н}$; $F_3 = 100 \text{ Н}$; $F_4 = 200 \text{ Н}$.

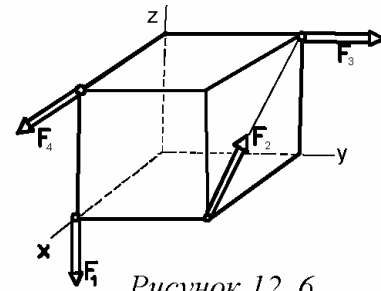


Рисунок 12. 6

Требуется: определить главный вектор заданной системы сил (модуль и направляющие косинусы).

Решение:
$$X_\Gamma = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0 - (\sqrt{2} \cdot 100) \cdot \sqrt{2} / 2 + 0 + 200 = 100 \text{ Н}.$$

$$Y_\Gamma = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 0 + 0 + 100 + 0 = 100 \text{ Н}.$$

$$Z_\Gamma = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = -50 + (\sqrt{2} \cdot 100) \cdot \sqrt{2} / 2 + 0 + 0 = 50 \text{ Н}.$$

Модуль главного вектора:

$$R_\Gamma = \sqrt{X_\Gamma^2 + Y_\Gamma^2 + Z_\Gamma^2} = \sqrt{100^2 + 100^2 + 50^2} = 150 \text{ Н}$$

Его направляющие косинусы:

$$\text{Cos} \alpha = \text{Cos} \beta = \frac{100}{150} = 0,667; \quad \text{Cos} \gamma = \frac{50}{150} = 0,333$$

Главный вектор \vec{R}_Γ , его составляющие $\vec{X}_\Gamma = X_\Gamma \cdot \vec{i}$, $\vec{Y}_\Gamma = Y_\Gamma \cdot \vec{j}$, $\vec{Z}_\Gamma = Z_\Gamma \cdot \vec{k}$ и направляющие углы α, β, γ изображены на рис.12.7.

К решению примера 12.1

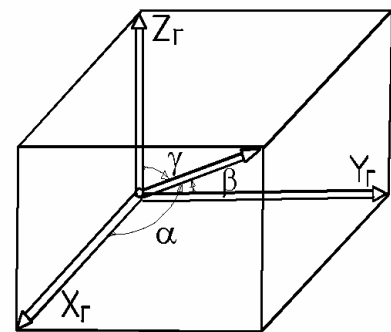


Рисунок 12.7

12.9. Понятие о векторе-моменте силы

Сила – главная мера механического действия, но для описания механических явлений одной её недостаточно, что поясним конкретным примером: дверную ручку прибивают на наибольшем удалении от оси вращения двери; и если кто-либо попытается отступить от этого правила (прибив её вблизи от дверных петель) он окружающими людьми будет осмеян.

При описании механических явлений наряду с уже введенным комплексом понятий (сила, её составляющие, проекция силы на ось, плоскость) придется оперировать ещё и другим комплексом понятий - «вектор-момент силы относительно центра», «момент силы относительно оси», «момент силы относительно точки».

Вектор-момент силы \vec{F}_A относительно произвольного центра O (рис.12.8) – это свободный вектор \vec{m}_O , равный векторному произведению радиус-вектора \vec{r} точки приложения данной силы на саму силу \vec{F}_A , т.е.

$$12.8 \quad \vec{m}_O = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Обращаем внимание на два свойства вектора-момента силы относительно центра:

- 12.9 | вектор-момент (\vec{m}_O) расположен перпендикулярно силе (\vec{F}) и радиус-вектору (\vec{r}) точки её приложения (расположен перпендикулярно треугольнику OAB - см. рис.12.8), причём направлен в ту сторону, чтобы глядя навстречу этому вектору видеть силу \vec{F} действующей в направлении поворота треугольника OAB против хода часовой стрелки;
- 12.10 | модуль вектора-момента (\vec{m}_O) не зависит от положения конца радиус-вектора (\vec{r}) на линии действия силы (\vec{F}) и равен удвоенной площади треугольника OAB .

И действительно, в соответствии с понятием векторного произведения

$$m_O = r \cdot F \cdot \sin \varphi = F \cdot r \cdot \sin(180 - \psi) = F \cdot r \cdot \sin \psi = F \cdot h.$$

12.10. Моменты сил относительно осей и их связи с вектором-моментом

Под моментом силы относительно оси понимают проекцию на эту ось её вектора-момента относительно любой точки рассматриваемой оси, т.е. моменты

К понятию
«вектор-момент силы»

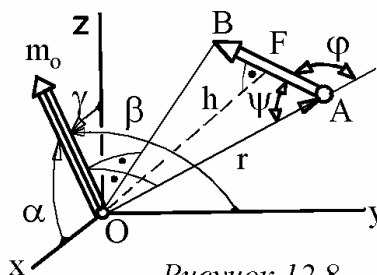


Рисунок 12.8

m_x, m_y, m_z относительно осей соответственно X, Y, Z - это величины (см. рис.12.8), определяемые из соотношений

$$12.11 \quad \left| \quad m_x = m_o \cdot \text{Cos}\alpha, \quad m_y = m_o \cdot \text{Cos}\beta, \quad m_z = m_o \cdot \text{Cos}\gamma, \right.$$

где m_o - модуль вектора-момента силы \vec{F} относительно начала системы координат $Oxyz$, а $\text{Cos}\alpha$, $\text{Cos}\beta$ и $\text{Cos}\gamma$ - направляющие косинусы для вектора-момента. Итак, в соответствии с введенными понятиями

$$12.12 \quad \left| \quad \vec{m}_o = m_x \cdot \vec{i} + m_y \cdot \vec{j} + m_z \cdot \vec{k}. \right.$$

12.11. Способ перестановки индексов

Важность владения способом определяется большой частотой его использования (не только в статике, но в кинематике и динамике).

В правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ (это система координат с ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, удовлетворяющими условию $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$) считаем известными проекции силы \vec{F} (F_x, F_y, F_z) и радиус-вектора \vec{r} точки её приложения (r_x, r_y, r_z).

В соответствии с 12.8, 12.12 и правилами векторного произведения имеем:

$$\begin{aligned} m_x \cdot \vec{i} + m_y \cdot \vec{j} + m_z \cdot \vec{k} = \vec{m}_o &= \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \cdot (r_y \cdot F_z - r_z \cdot F_y) + \vec{j} \cdot (r_z \cdot F_x - r_x \cdot F_z) + \vec{k} \cdot (r_x \cdot F_y - r_y \cdot F_x). \end{aligned}$$

Откуда:

$$12.13a \quad \left| \quad \begin{aligned} m_x &= r_y \cdot F_z - r_z \cdot F_y \\ m_y &= r_z \cdot F_x - r_x \cdot F_z \\ m_z &= r_x \cdot F_y - r_y \cdot F_x. \end{aligned} \right.$$

На первый взгляд кажется, что формулы 12.13а сложны для запоминания.

Процесс написания любой из трёх формул 12.13а оказывается простым, если его раскладывать на 3 этапа:

1. По исходной векторной формуле $\vec{m}_o = \vec{r} \times \vec{F}$ (которую надо, конечно, помнить) пишется скалярная формула $m = r \cdot F$;

2. К буквам последней записанной формулы приписываются индексы в представленной на рис.9 последовательности их появления при движении вдоль круга (x-y-z, либо y-z-x, либо z-x-y);

3. Вторые произведения в правых частях (стоящие после минусов) получаются из первых - путём написания тех же букв и индексов, но индексы при их привязке к буквам меняют местами.

К способу перестановки индексов

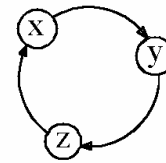


Рисунок 12.9

Способ перестановки индексов используется также в кинематике ($\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{a}^k = 2\vec{\omega}^e \times \vec{V}^r$),

многократно в динамике и поэтому им целесообразно владеть свободно. Что значит «свободно»? Это значит любую из трёх формул 13а по команде товарища следует успевать записывать за 10 секунд.

Обычно стремятся к более простым записям. По этой причине вместо двухбуквенных обозначений r_x, r_y, r_z ; F_x, F_y, F_z пишут однобуквенные - x, y, z и X, Y, Z . В этом случае формулы 13а принимают вид:

$$12.13б \quad \left| \begin{array}{l} m_x = y \cdot Z - z \cdot Y \\ m_y = z \cdot X - x \cdot Z \\ m_z = x \cdot Y - y \cdot X. \end{array} \right.$$

12.12. Понятие о главном моменте. Аналитический способ его вычисления

С математической точки зрения рассматриваемое понятие тождественно изложенному в подразделе 8 (где рассматривалось понятие «главный вектор»).

Пусть имеем систему из n сил - $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_v, \dots, \vec{F}_n$. и пусть $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_v, \dots, \vec{r}_n$ - радиус-векторы, определяющие положение точек приложения этих сил в произвольной правой системе координат.

Величину $\vec{M}_{ГО}$, определяемую из выражения

$$12.14 \quad \left| \quad \vec{M}_{ГО} = \sum_{v=1}^n \vec{m}_{v0} = \sum_{v=1}^n (\vec{r}_v \times \vec{F}_v) \right.$$

называют «главным моментом заданной системы сил относительно центра O».

Величины $M_{ГХ}, M_{ГУ}, M_{ГZ}$, подчинённые условию

$$12.15 \quad \left| \quad \vec{M}_{ГО} = M_{ГХ} \cdot \vec{i} + M_{ГУ} \cdot \vec{j} + M_{ГZ} \cdot \vec{k}, \right.$$

называют «главными моментами заданной системы сил относительно осей соответственно X, y, Z».

Из 12.8, 12.12, 12.14 и 12.15 видим, что

$$12.16 \quad \left| \begin{array}{l} M_{GX} = \sum_{v=1}^n m_{vX}, \quad M_{GY} = \sum_{v=1}^n m_{vY}, \quad M_{GZ} = \sum_{v=1}^n m_{vZ}, \quad \text{где} \\ m_{vX}, m_{vY}, m_{vZ} \quad (v = 1, 2, \dots, n) \quad - \quad \text{моменты сил заданной системы} \\ (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_v, \dots, \vec{F}_n) \quad \text{относительно осей соответственно X, y, Z.} \end{array} \right.$$

ПРИМЕР 12.2. - На вычисление главного момента (аналитическим методом)

Дано: проекции сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ и координаты точек их приложения определяются из приводимой таблицы

X, н	Y, н	Z, н	x, м	y, м	z, м
0	100	-60	1,0	0,0	0,0
100	80	0	0,8	-0,5	0,0
50	0	80	0,5	0,6	1,0
-40	0	0	0,4	0,0	-0,8

Требуется: определить главный момент заданной системы сил относительно начала координат (который обозначим точкой O).

Решение.

$$m_{1x} = y_1 \cdot Z_1 - z_1 \cdot Y_1 = 0 \cdot (-60) - 0 \cdot 100 = 0;$$

$$m_{2x} = y_2 \cdot Z_2 - z_2 \cdot Y_2 = (-0,5) \cdot 0 - 0 \cdot 80 = 0;$$

$$m_{3x} = y_3 \cdot Z_3 - z_3 \cdot Y_3 = 0,6 \cdot 80 - 1,0 \cdot 0 = 48;$$

$$m_{4x} = y_4 \cdot Z_4 - z_4 \cdot Y_4 = 0 \cdot 0 - (-0,8) \cdot 0 = 0.$$

$$\sum_{v=1}^4 m_{vX} = 48 \text{ Нм.}$$

Аналогично

$$m_{1y} = z_1 \cdot X_1 - x_1 \cdot Z_1 = 0 \cdot 0 - 1,0 \cdot (-60) = 60;$$

$$m_{2y} = z_2 \cdot X_2 - x_2 \cdot Z_2 = 0 \cdot 100 - 0,8 \cdot 0 = 0;$$

$$m_{3y} = z_3 \cdot X_3 - x_3 \cdot Z_3 = 1,0 \cdot 50 - 0,5 \cdot 80 = 10;$$

$$m_{4y} = z_4 \cdot X_4 - x_4 \cdot Z_4 = (-0,8) \cdot (-40) - 0,4 \cdot 0 = 32.$$

$$\sum_{v=1}^4 m_{vy} = 102 \text{ Нм.}$$

$$m_{1z} = x_1 \cdot Y_1 - y_1 \cdot X_1 = 1,0 \cdot 100 - 0 \cdot 0 = 100;$$

$$m_{2z} = x_2 \cdot Y_2 - y_2 \cdot X_2 = 0,8 \cdot 80 - (-0,5) \cdot 100 = 114;$$

$$m_{3z} = x_3 \cdot Y_3 - y_3 \cdot X_3 = 0,5 \cdot 0 - 0,6 \cdot 50 = -30;$$

$$m_{4z} = x_4 \cdot Y_4 - y_4 \cdot X_4 = 0,4 \cdot 0 - 0 \cdot (-40) = 0.$$

$$\sum_{v=1}^4 m_{vz} = 184 \text{ Нм.}$$

Итак, главный момент заданной системы сил:

$$\vec{M}_{\Gamma O} = 48 \cdot \vec{i} + 102 \cdot \vec{j} + 184 \cdot \vec{k}.$$

Его модуль:

$$M_{\Gamma O} = \sqrt{48^2 + 102^2 + 184^2} = 216 \text{ Нм.}$$

Направляющие косинусы главного момента:

$$\text{Cos}\alpha = \frac{48}{216} = 0,222; \quad \text{Cos}\beta = \frac{102}{216} = 0,473; \quad \text{Cos}\gamma = \frac{184}{216} = 0,852.$$

12.13. Зависимость между главными моментами относительно различных центров

Эта зависимость определяется правилами векторной алгебры. На рис.10: O – некий базовый центр (например – начало системы $Oxyz$); A – произвольно взятый другой (новый) центр.

В соответствии с правилами векторной алгебры и ранее принятыми понятиями для произвольной системы сил

\vec{F}_v ($v = 1, 2, \dots, n$) получаем:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{\Gamma A} &= \sum \vec{m}_{vA} = \sum (\vec{r}_{Av} \times \vec{F}_v) = \sum [(\vec{r}_{AO} + \vec{r}_{Ov}) \times \vec{F}_v] = \\ &= (\vec{r}_{AO} \times \sum \vec{F}_v) + \sum (\vec{r}_{Ov} \times \vec{F}_v) = \vec{r}_{AO} \times \vec{R}_{\Gamma} + \sum \vec{m}_{vO} = \vec{r}_{AO} \times \vec{R}_{\Gamma} + \vec{M}_{\Gamma O}. \end{aligned}$$

Итак:

К выводу зависимости 12.17

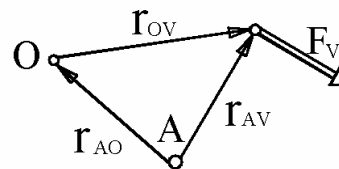


Рисунок 12.10

- $$\vec{M}_{GA} = \vec{M}_{GO} + \vec{r}_{AO} \times \vec{R}_G -$$
- 12.17 | главный момент произвольной системы сил относительно любого центра А больше главного момента этой же системы относительно ранее взятого центра О на величину, равную векторному произведению радиус-вектора, проведенного из нового центра в старый, на главный вектор. *Следствие:*
- 12.18 | у системы сил с нулевым главным вектором главный момент не зависит от положения центра (относительно которого он вычисляется).

В математических записях рассмотренного подраздела пределы суммирования (от $\nu=1$ до $\nu=n$) при символах \sum опускались. С целью сокращения записей это часто при изложении курса будет делаться и в дальнейшем.

12.14. Понятия о противоположных силах, паре сил и её моменте, о силовом винте

- 12.19 | Две силы называют *противоположными*, если они расположены на одной прямой (говорят – «на одной линии действия»), направлены в разные стороны и равны по модулям.
- 12.20 | *Пара сил* (кратко: пара) – это совокупность двух противоположно направленных сил, линии действия которых не совпадают (см. рис. 11).

Плечо пары (h) – это кратчайшее расстояние между линиями действия сил.

Вектор-момент пары сил (кратко: *момент пары*) – это свободный вектор с модулем равным произведению модуля силы на плечо пары ($m = F \cdot h$) и который перпендикулярен плоскости действия пары, причём направлен так, чтобы глядя ему навстречу можно было видеть пару сил стремящейся повернуть тело (к которому она приложена) против хода часовой стрелки.

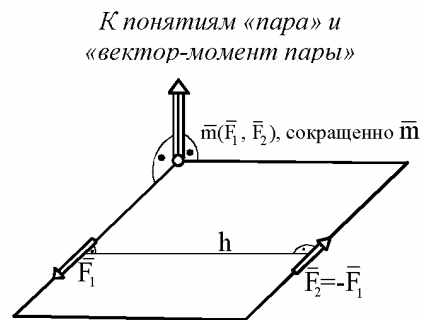


Рисунок 12.11

- 12.21 | *Силовой винт* (кратко – «винт»; иногда называют «динамическим винтом») – это совокупность трёх сил (рис. 12.12 и 12.13), две из которых образуют пару, а третья перпендикулярна плоскости её действия.

К понятию «силовой винт»

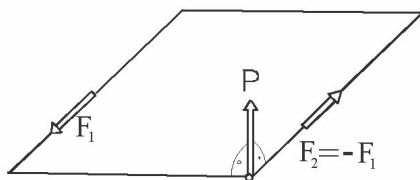


Рисунок 12.12

Представление силового винта двумя векторами

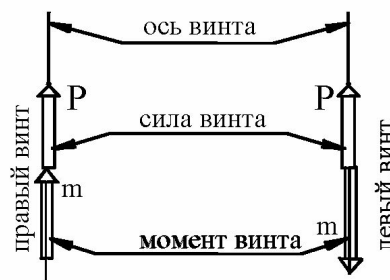


Рисунок 12.13

Называют:

момент винта – это момент, создаваемый парой сил винта;

сила винта – это сила, расположенная перпендикулярно плоскости действия пары силового винта;

ось силового винта – это линия действия силы винта –

(кратко: *ось винта*).

13. Блок других, наиболее используемых в статике, понятий и опорных фактов

13.1. Понятия об исходных механических системах и телах, внешних и внутренних силах, связях и их реакциях

Исходная – это та механическая система, с которой начинают её анализ (см. рис.13.1 и 13.3). Абсолютно твёрдое тело (кратко: *тело*) – это принятая к рассмотрению та или иная совокупность неподвижных друг относительно друга частиц механической системы.

Тело – понятие относительное. Им может быть отдельная деталь (гайка, болт, шестерёнка, доска и т.п.), часть детали, совокупность деталей, несколько целых деталей в совокупности с частями других деталей. Например, для представленной на рис.13.1 конструкции при определении неизвестной силы \vec{X} (при известной \vec{P}) за тело может быть принята вся совокупность деталей 1-2-3-4-5-6-7.

Исходная механическая система

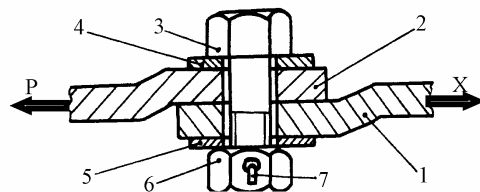


Рисунок 13.1

К понятию «тело»

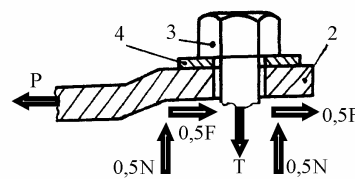


Рисунок 13.2

Если же необходимо определить величину \vec{T} затяжки болта, то за тело может быть принята совокупность конструктивных элементов, представленная на рис.2 (в которую входят полоса 2, шайба 4 и верхняя часть болта 3).

В соответствии с введенным понятием, за абсолютно твёрдые тела могут приниматься не только твёрдые, но и деформируемые физические тела – заведомо натянутые трос, цепь, растянутая или сжатая пружина, газ или жидкость, расположенные в цилиндре с поршнем; и т.д.

А если заведомо неизвестно подвижны или неподвижны одни совокупности частиц относительно других? - Рассмотрение такого типа задач также является предметом теоретической механики, но третьей её части – динамики.

Действующие на тела силы принято делить на внешние и внутренние. *Внутренние* – это силы, действующие между частицами, принадлежащими принятому к рассмотрению телу. *Внешние* силы – это силы, приложенные к телу со стороны частиц, не принадлежащих рассматриваемому телу.

Понятия внешних и внутренних сил также относительные. Так, если для тела по рис.13.2 силы \vec{N} , \vec{T} , \vec{F} - внешние, то для тела по рис.1 эти же силы являются внутренними.

По отношению к принятому к рассмотрению телу, другие части исходной механической системы называют *связями*.

Силы, действующие на принятое к рассмотрению тело со стороны связей, называют *реакциями*. В отличие от них остальные внешние силы *активные*.

Поясняем.- Для тела, изображённого на рис.2, механическая система по рис.13.1 является исходной и, поэтому, для него *связями являются*: полоса 1 и не изображённая (на рис.13.2) часть тела болта (с гайкой и шплинтом).

Соответственно *реакциями являются* силы \vec{T} и $(\vec{N} + \vec{F})$; \vec{T} - это сила, приложенная к рассматриваемой части болта со стороны отброшенной его части.

$(\vec{N} + \vec{F})$ - сила, приложенная к полосе 2 со стороны полосы 1;

\vec{N} - нормальная её составляющая, \vec{F} - касательная (расположенная в плоскости соприкосновения полос - обусловлена силами сцепления, о чём подробнее речь будет вестись в подразделе 15.8).

Понятия связей и их реакций поясняем ещё на одном примере.

Если из исходной механической системы, изображённой на рис.13.3, к рассмотрению принята планка-стяжка 1, то для неё связями будут цилиндрические выступы рычагов 2 и 7 (но нельзя для рассматриваемого случая связями считать стержни 3 и 6, а также серьгу 5 и крюк 4).

Если же из исходной механической системы по рис.3 к рассмотрению принят рычаг 2, то для него связями будут стержень 3, планка 1 и поднимаемый груз 9.

Захват подъёмного устройства

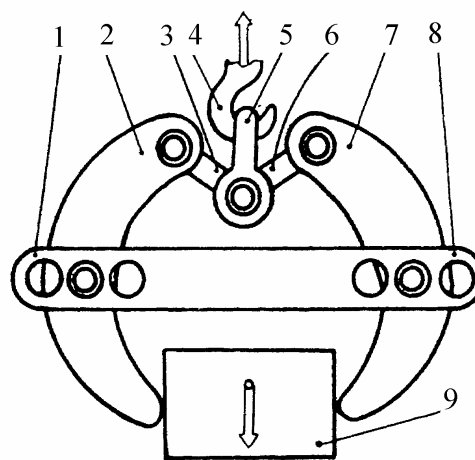


Рисунок 13.3

13.2. Аксиома о противодействии. О главных векторе и моменте внутренних сил

Пусть любая одна частица взаимодействует с любой другой частицей. Силу \vec{F}_{12} , с которой частица 1 действует на частицу 2, назовём действием. Тогда реакцию 2-й частицы на 1-ю (силу \vec{F}_{21}) называют *противодействием*.

- 13.1 | **Аксиома о противодействии:** действие и противодействие образуют систему противоположных сил, т.е.: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ и расположены они на одной прямой.

Силы действия и противодействия могут быть контактными (от непосредственного соприкосновения тел) и дальнедействия (передаваемые через поля – гравитационные, магнитные, электрические, электромагнитные и др.).

Иногда говорят: «Аксиома – положение, принимаемое без доказательств».

На примере аксиомы противодействия покажем, что подобные высказывания нельзя считать удачными.

1654-й год. Магдебург. Бургомистр Отто фон Герике демонстрирует свойство вакуума – опыт, обошедший печать всех развитых стран мира: два медных полых полушара соединены между собой по экваториально-кольцевой поверхности; из внутренней полости образовавшейся сферической оболочки выкачан воздух (через краник); оболочки-полусферы растягивают (и не могут разъединить) две восьмёрки лошадей (т.е. не 8 против одной, или двух, или четырёх, а 8 против 8-ми).

Ещё и сегодня мы наблюдаем народные состязания по перетягиванию каната. И в этом случае всем, из непосредственных наблюдений, ясна необходимость равенства числа соперников по обоим концам каната.

Справедливость закона-аксиомы противодействия можно наблюдать также на примере одинаковости деформаций буферных пружин двух взаимодействующих вагонов (как при их сцепке, так и при движении поезда).

Законом о противодействии Человечество пользуется не менее 3-х веков. Во всяком случае, уже в «Математических началах натуральной философии» (И.Ньютон, 1687 год) мы находим: «Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе: взаимодействия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны. Если что-либо давит на что-нибудь другое или тянет его, то оно само этим последним давится или тянется. Если кто нажимает пальцем на камень (здесь Ньютон повторяет рассуждения Г.Галилея), то и палец его также нажимается камнем. Если лошадь тащит камень, привязанный к канату, то и обратно ... она с равным усилием оттягивается к камню ... Относительно притяжений дело может быть изложено вкратце следующим образом ... Я производил опыты с магнитом и железом: если их поместить каждый в отдельный сосуд и пустить плавать на спокойной воде так, чтобы сосуды взаимно касались, то ни тот, ни другой не приходят в движение, но вследствие равенства взаимного притяжения сосуды испытывают равные давления и остаются в равновесии».

Внутренние силы любой принятой к рассмотрению механической системы состоят из совокупности противоположных сил, но для любой двойки таких сил равны нулю и главный вектор, и главный момент. А сколько бы нулей не складывалось результатом также будет нуль. Таким образом:

13.2 | для внутренних сил любой механической системы равны нулю и главный вектор, и главный момент, т.е. при вычислениях главных векторов и моментов внутренние силы можно не учитывать.

13.3. Аксиома о равновесии, принцип освобожденности от связей, сопутствующие понятия

Описанные в подразделе 13.1 тела называют несвободными. В подавляющем большинстве случаев с ними и приходится иметь дело в статике, но укоренившийся термин «равновесие» обязывает нас ввести и понятие свободного тела. Это нужно сделать ещё и потому, что статика является лишь частью единой теоретической механики, а объектами рассмотрения кинематики и динамики чаще всего являются свободные тела.

Свободное тело – это тело, перемещение которого другими телами не ограничено. Если использовать приём образности мышления, то свободное тело мысленно можно представлять в виде воздушного шара, птицы в полёте, вертолётa, подводной лодки и т.п.

Понятие «равновесие свободного тела» (кратко: «равновесие тела») в полном своём объёме требует знаний кинематики, но в инженерной практике чаще предстаёт в форме покоя тела. Поэтому, при изучении статики можно считать, что «равновесие тела» - это его покой.

В динамике понятие «равновесие тела» будет расширено (будет: «тело считается находящимся в равновесии, если оно покоится, или движется относительно инерциальной системы отсчёта поступательно, прямолинейно и равномерно»; при этом, за инерциальную систему отсчёта в подавляющем большинстве конкретно встречающихся случаев достаточно принимать систему координат, связанную с Землёй - Геоцентрическую).

Специалисты по истории теоретической механики сообщают, что термин «равновесие», вместо древнегреческого «равномоментность», ввёл Симон Стевин (Бельгия, годы жизни: 1548-1620); первым он начал использовать и правило параллелограмма сил. Этим фрагментом исторического экскурса мы иллюстрируем приводившееся во введении утверждение о международном и многовековом процессе совершенствования излагаемого курса.

13.3 | **Аксиома о равновесии:** если главные вектор и момент всех приложенных к телу сил равны нулю, то такое тело находится в равновесии. Справедливо и обратное утверждение – если тело находится в равновесии, то главные вектор и момент всех действующих на него сил равны нулю. Уместно вспомнить:

1) результат 12.18 - равенство нулю главного момента не зависит от выбора центра, относительно которого он вычисляется;

2) результат 13.2 - при рассмотрении аксиомы о равновесии достаточно учитывать лишь внешние силы.

Называют:

13.4 | *уравновешенная система сил* - это система сил с нулевыми главными вектором и моментом.

13.5 | **Принцип освобожденности от связей:** с точки зрения установления правильных математических зависимостей между силами, *любое несвободное тело можно рассматривать как свободное - отделённое от связей, но к которому приложены их реакции,*

т.е. целесообразно тело всегда мысленно размещать внутри некоторой замкнутой оболочки (типа воздушного шара, но которая может иметь самые причудливые формы, подобные тем, которые имеют надувные игрушки, украшающие шествия и фестивали, или изображённые на фотографиях и картинах облака).

13.4. Понятие об эквивалентных системах сил. Аксиома эквивалентности. Наиболее употребительные приёмы преобразования систем сил

Системы сил называют *эквивалентными*, если они, будучи порознь приложенными к одному свободному телу, обеспечивают ему одинаковую кинематику (одинаковые скорости и ускорения). В частности, две системы сил эквивалентны, если свободное тело покоится и от действия первой, и от действия второй систем сил.

13.6 | **Аксиома эквивалентности:** системы сил эквивалентны, если они имеют одинаковые главные векторы и главные моменты (вычисленные относительно одного центра),

т.е., системы сил «штрих» и «два штриха» эквивалентны, если $\vec{R}'_{\Gamma} = \vec{R}''_{\Gamma}$, $\vec{M}'_{\Gamma O} = \vec{M}''_{\Gamma O}$, где \vec{R}'_{Γ} и \vec{R}''_{Γ} - их главные векторы, а $\vec{M}'_{\Gamma O}$ и $\vec{M}''_{\Gamma O}$ - главные моменты (относительно произвольно взятого центра O).

Из аксиомы об эквивалентности, понятий «главный вектор» и «главный момент» с очевидностью (добавляются нули) следует:

13.7 | две системы сил эквивалентны, если новая получается из исходной путём добавления (или удаления) уравновешенной системы сил.

В частности (и при конкретных преобразованиях это чаще всего применяется):

13.7a | новая и исходная системы сил эквивалентны, если новая получена путём добавления (или удаления) противоположных сил.

При рассмотрении вопросов преобразования всю совокупность действующих на тело внешних сил удобно разделять на две подсистемы: сохраняемую при преобразовании и заменяемую.

Из аксиомы об эквивалентности, понятий «главный вектор» и «главный момент» с очевидностью (неизменяемость сумм) следует также и то, что:

13.8 | эквивалентное преобразование части сил исходной системы даёт новую систему сил, эквивалентную исходной.

Из 13.6-13.8 видны следующие 4, широко употребляемые, приёма преобразования систем сил:

- 13.9 | *сила – вектор скользящий*, т.е. точкой приложения силы можно делать любую точку линии расположения этой силы;
- 13.10 | новая система сил оказывается эквивалентной исходной, если новая получается из исходной путём разложения (или сложения) по правилу параллелограмма сил и векторов-моментов пар (правило см. в подразделе 12.3);
- любое преобразование пары сил, при условии сохранения её вектора-момента, даёт новую систему сил, эквивалентную исходной, т.е. пару можно расположить в любой плоскости, перпендикулярной вектору-моменту этой пары; силам, образующим пару, можно придавать любое направление (лишь бы не изменялось направление вектора-момента); можно также принимать любыми модули и плечи сил новой пары, с тем лишь ограничением, чтобы не изменялся модуль вектора-момента исходной пары;
- 13.11 | силу можно перенести параллельно исходному положению в любую точку пространства; но с обязательным добавлением компенсирующей пары, одна составляющая которой является силой в исходном её положении, а вторая противоположна перенесенной силе.

K эквивалентности и обозначению пар

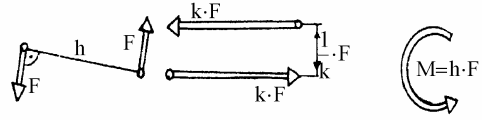


Рисунок 13.4

Опорный факт 13.12 легко просматривается после того, когда Вы через точку В (в которую намерены перенести силу, положим \vec{F}_O) проведёте прямую, параллельную этой силе, и на ней расположите противоположные силы \vec{F}_B и \vec{F}'_B , из которых $\vec{F}_B = \vec{F}$, а $\vec{F}'_B = -\vec{F}$. На основании 13.6 можно сказать, что после таких преобразовательных операций новая система сил будет эквивалентна исходной системе. Следующим преобразовательным этапом является объединение в пару сил \vec{F}_O и \vec{F}'_B .

14. Приведение систем сил к простейшему виду

14.1. Первый этап анализа систем сил при выявлении простейших их эквивалентов

Пусть задана произвольная система сил (известны модули, направления и точки приложения всех сил). На первом этапе вычисляют главные вектор и момент. За центр О, относительно которого вычисляют главный момент, в общем

случае принимают любую точку пространства (наугад).

Возможны следующие 6 результатов (случаев):

1. $\vec{R}_\Gamma = 0, \vec{M}_{\Gamma O} = 0;$
2. $\vec{R}_\Gamma \neq 0, \vec{M}_{\Gamma O} = 0;$
3. $\vec{R}_\Gamma = 0, \vec{M}_{\Gamma O} \neq 0;$
4. $\vec{R}_\Gamma \neq 0, \vec{M}_{\Gamma O} \neq 0; \vec{R}_\Gamma \perp \vec{M}_{\Gamma O};$
5. $\vec{R}_\Gamma \neq 0, \vec{M}_{\Gamma O} \neq 0; \vec{R}_\Gamma \parallel \vec{M}_{\Gamma O};$
6. $\vec{R}_\Gamma \neq 0, \vec{M}_{\Gamma O} \neq 0; \vec{R}_\Gamma$ не \perp и не $\parallel \vec{M}_{\Gamma O}.$

В первом случае действует уравновешенная система сил - кинематическое состояние тела такое, будто бы на него никакие силы не действуют. В статике с такими системами сил чаще всего и имеют дело (см. раздел 15).

Забегая вперёд, заметим: из-за того, что центр O для вычисления главного момента принимался наугад, случай 4 в дальнейшем будет сведен ко второму, шестой – к пятому.

14.2. Случаи приведения исходной системы к равнодействующей

Отдельно взятую силу, действие которой эквивалентно действию заменяемой системы сил, называют равнодействующей силой (кратко: *равнодействующей*).

Пусть для исходной механической системы получено: $\vec{R}_\Gamma \neq 0, \vec{M}_{\Gamma O} = 0.$

Возьмём силу $\vec{R}_O,$ линия действия которой проходит через центр O и которая равна, как свободный вектор, главному вектору $\vec{R}_\Gamma.$

Без дополнительных рассуждений видно, что главный вектор отдельно взятой силы \vec{R}_O равен $\vec{R}_\Gamma,$ а её момент относительно центра O (он же и главный момент относительно центра O) равен нулю. Теперь достаточно вспомнить лишь аксиому эквивалентности, чтобы заключить:

- 14.1 $\left\{ \begin{array}{l} \text{если у заменяемой системы главный вектор сил отличен от нуля, а} \\ \text{главный момент относительно некоторого центра } O \text{ равен нулю, то} \\ \text{такая система сил имеет равнодействующую, которая равна (как} \\ \text{свободный вектор) главному вектору заменяемой системы сил, а её} \\ \text{линия действия проходит через центр } O. \end{array} \right.$

Переходим к рассмотрению 4-го случая – $\vec{R}_\Gamma \neq 0, \vec{M}_{\Gamma O} \neq 0; \vec{R}_\Gamma \perp \vec{M}_{\Gamma O}.$

Берём систему из 3-х сил, одна из которых проходит через центр O и равна (как свободный вектор) главному вектору исходной системы ($\vec{R}_O = \vec{R}_\Gamma$), а также пару сил с моментом $\vec{M} = \vec{M}_{\Gamma O}.$

В соответствии с аксиомой эквивалентности, взятая тройка сил эквивалентна исходной системе.

Результат 13.11 и условие $\vec{R}_\Gamma \perp \vec{M}_{\Gamma O}$ позволяют взятую пару представить в таком виде, чтобы одна из её составляющих оказалась противоположной силе \vec{R}_O . Это и делаем, т.е. к точке O прикладываем ещё и силу \vec{R}_O^M , равную $-\vec{R}_O$. Вторую составляющую взятой пары обозначаем \vec{R}_A^M , где A – одна из точек на линии её действия.

Первый этап преобразований завершён. Переходим ко второму.

Взятая система из 3-х сил содержит противоположные силы (\vec{R}_O^M и \vec{R}_O). В соответствии с результатом 13.7а удаляем их.

Осталась одна сила - \vec{R}_A^M , равная (как свободный вектор) \vec{R}_Γ .

Итак,

$$14.2 \quad \left| \begin{array}{l} \text{система сил } \langle \vec{R}_\Gamma \neq 0, \vec{M}_{\Gamma O} \neq 0; \vec{R}_\Gamma \perp \vec{M}_{\Gamma O} \rangle, \text{ как и система} \\ \langle \vec{R}_\Gamma \neq 0, \vec{M}_{\Gamma O} = 0 \rangle, \text{ приводится к равнодействующей, равной} \\ \text{(как свободный вектор) главному вектору исходной системы сил, но} \\ \text{линия действия которой не проходит через центр O, относительно} \\ \text{которого вычислялся главный момент.} \end{array} \right.$$

Определение положения точки A, через которую проходит равнодействующая \vec{R}_A^M , будет являться предметом рассмотрения подраздела 15.

14.3. Случай приведения исходной системы к равнодействующей паре

Пусть для исходной системы сил получено: $\vec{R}_\Gamma = 0, \vec{M}_{\Gamma O} \neq 0$.

Чтобы мы не пытались делать, не противоречащее ранее введенным методам, одной силой заменить такую исходную систему не удастся. Но без дополнительных рассуждений ясно:

$$14.3 \quad \left| \begin{array}{l} \text{если главный вектор исходной системы сил равен нулю, а главный} \\ \text{момент относительно любого бывшего центра O отличен от нуля,} \\ \text{то такая система сил может быть заменена парой сил с моментом,} \\ \text{равным главному моменту исходной системы.} \end{array} \right.$$

Пару сил, эквивалентную исходной системе, называют *равнодействующей парой*.

14.4. Случай приведения исходной системы к равнодействующему винту

Пусть для исходной механической системы получено: $\langle \vec{R}_\Gamma \neq 0, \vec{M}_{\Gamma O} \neq 0; \vec{R}_\Gamma \parallel \vec{M}_{\Gamma O} \rangle$ (5-й случай).

Принимаем к рассмотрению силовой винт с силой $\vec{R}_O = \vec{R}_\Gamma$ и парой с моментом $\vec{M} = \vec{M}_{\Gamma O}$. Без дополнительных рассуждений видно, что он эквивалентен исходной системе.

Силовой винт, эквивалентный исходной системе, называют *равнодействующим винтом*.

Итак,

14.4 | если у исходной системы главные вектор и момент параллельны, то она приводится к равнодействующему винту, сила которого и момент равны, соответственно, главным вектору и моменту исходной системы, а ось проходит через центр, относительно которого вычислялся главный момент.

Замечание: винт можно заменить двумя скрещивающимися силами, но это не упрощение, ибо винт - это два, расположенных на одной прямой вектора (сила и момент), а если крест сил, то это неудобная в изображениях и представлениях пространственная совокупность двух векторов; но главное не в этом, главное в неопределённости (в множественности эквивалентных двоек скрещивающихся сил, отличающихся друг от друга как модулями, так и направлениями).

Переходим к рассмотрению последнего, шестого возможного случая - случая « $\vec{R}_\Gamma \neq 0, \vec{M}_{\Gamma O} \neq 0; \vec{R}_\Gamma$ не \perp и не $\parallel \vec{M}_{\Gamma O}$ ».

С целью упрощения исходной системы сил на первом этапе преобразования принимаем систему, состоящую из силы $\vec{R}_O = \vec{R}_\Gamma$, приложенной в точке O (относительно которой вычислялся главный момент исходной системы) и двух пар сил с моментами $\vec{M}_R \parallel \vec{R}_O$, $\vec{M}_{\perp R} \perp \vec{R}_O$, удовлетворяющих условию: $\vec{M}_R + \vec{M}_{\perp R} = \vec{M}_{\Gamma O}$ (см. рис.14.1).

Преобразование к равнодействующему винту

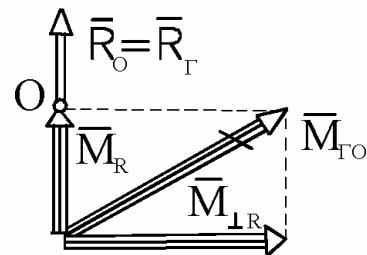


Рисунок 14.1

На втором этапе преобразования силу \vec{R}_O и пару сил с моментом $\vec{M}_{\perp R}$ заменяем одной силой \vec{R}_A , равной \vec{R}_O (так, как это делалось в подразделе 12).

Таким образом:

14.5

система сил с ненулевыми главным вектором и моментом, у которой главный момент и не перпендикулярен, и не параллелен главному вектору, приводится к равнодействующему винту, ось которого не проходит через центр O , относительно которого вычислялся главный момент. Сила этого винта (\vec{R}_A) равна главному вектору исходной системы, а момент (\vec{M}_R) равен той ортогональной составляющей главного момента, которая параллельна главному вектору.

Переходим к определению положения точки A , через которую проходит ось равнодействующего винта.

14.5*. Формулы для определения положений точек пересечения равнодействующей (или оси равнодействующего винта) с координатными плоскостями

Точки пересечения оси равнодействующего винта (или прямой расположения равнодействующей) с координатными плоскостями условимся называть «метками». Их координаты (вначале приведём результат, затем обоснуем его) - на плоскости xOy :

$$14.6a \quad \left| \begin{array}{l} x = -\frac{1}{Z_\Gamma} \cdot (M_y - M_R \cdot \cos\beta), \quad y = \frac{1}{Z_\Gamma} \cdot (M_x - M_R \cdot \cos\alpha); \end{array} \right.$$

на плоскости yOz :

$$14.6б \quad \left| \begin{array}{l} y = -\frac{1}{X_\Gamma} \cdot (M_z - M_R \cdot \cos\gamma), \quad z = \frac{1}{X_\Gamma} \cdot (M_y - M_R \cdot \cos\beta); \end{array} \right.$$

на плоскости zOx :

$$14.6 в \quad \left| \begin{array}{l} z = -\frac{1}{Y_\Gamma} \cdot (M_x - M_R \cdot \cos\alpha), \quad x = \frac{1}{Y_\Gamma} \cdot (M_z - M_R \cdot \cos\gamma), \end{array} \right.$$

где

$X_\Gamma, Y_\Gamma, Z_\Gamma; M_x, M_y, M_z$ - проекции главного вектора и момента на оси x, y, z ;

α, β, γ - направляющие углы для главного вектора \vec{R}_Γ ;

M_R - проекция главного момента на ось, сонаправленную с главным вектором.

Формулы 14.6а получены следующим образом.-

Зависимость 12.17 позволяет записать тождество:

$$a \quad \vec{r}_{OA} \times \vec{R}_\Gamma = \vec{M}_{\Gamma O} - \vec{M}_{\Gamma A}.$$

Воспользовавшись способом перестановки индексов (см. подраздел 12.11) и учитывая, что $z = 0$, в левой части a получаем:

$$b \quad (y \cdot Z_\Gamma) \cdot \vec{i} + (-x \cdot Z_\Gamma) \cdot \vec{j} + (x \cdot Y_\Gamma - y \cdot X_\Gamma) \cdot \vec{k}.$$

Главные моменты представляем тремя составляющими:

$$c \quad \vec{M}_{\Gamma O} = M_x \cdot \vec{i} + M_y \cdot \vec{j} + M_z \cdot \vec{k};$$

$$d \quad \vec{M}_{\Gamma A} = \vec{M}_R = M_R \cdot \frac{\vec{R}_\Gamma}{R_\Gamma} = M_R \cdot (\text{Cos}\alpha \cdot \vec{i} + \text{Cos}\beta \cdot \vec{j} + \text{Cos}\gamma \cdot \vec{k}).$$

Подставляем b, c, d в тождество a и получаем формулу 14.6а – путём приравнивания коэффициентов при ортах \vec{i} и \vec{j} .

Замечание: выражение

$$(M_z - M_R \cdot \text{Cos}\gamma = x \cdot Y_\Gamma - y \cdot X_\Gamma),$$

получаемое от приравнивания коэффициентов при орте \vec{k} , можно использовать для проверки правильности проведенных вычислений.

Аналогично получаются формулы 14.6б и 14.6в.

14.6. Закон о моменте равнодействующей

Пусть исходная система сил приводится к равнодействующей (\vec{R}_A).

В соответствии с проведенным в подразделах 1 – 4 анализом, это может иметь место лишь в случае: $\vec{R}_\Gamma \neq 0, \vec{M}_{\Gamma A} = 0$.

Берём произвольный центр В, не расположенный на линии действия \vec{R}_A и обозначаем:

$\vec{M}_{\Gamma B} = \sum_{v=1}^n \vec{m}_{vB}$ - это главный момент относительно центра В исходной системы

(n - число её сил, а \vec{m}_{vB} - момент относительно центра В v -той составляющей этой системы);

$\vec{M}_{\Gamma B}(\vec{R}_A) = \vec{m}_B(\vec{R}_A)$ - главный момент относительно центра В равнодействующей (т.к. сила одна, то главный момент равен моменту этой силы).

Исходная система сил и её равнодействующая – это эквивалентные системы и, поэтому

$$\vec{M}_{ГВ}(\vec{R}_A) = \vec{M}_{ГВ},$$

т.е. получаем:

$$14.7 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{m}_B(\vec{R}_A) = \sum \vec{m}_{vB} - \\ \text{если система сил имеет равнодействующую } (\vec{R}_A), \text{ то её момент} \\ \text{относительно произвольного центра В равен сумме моментов} \\ \text{(относительно того же центра) всех, входящих в эту систему, сил.} \end{array} \right.$$

Опорный факт 14.7 часто называют «законом Вариньона» (Пьер Вариньон, Франция, годы жизни: 1654-1722).

14.7. Основные разновидности систем сил

- произвольная пространственная;
- пространственная сходящаяся (линии действия всех сил пересекаются в одной точке);
- пространственная параллельная (в ней могут быть как сонаправленные, так и противоположно направленные силы);
- произвольная плоская система сил;
- плоская сходящаяся;
- плоская параллельная система сил.

Ответьте на вопросы: к какому простейшему виду можно привести сходящуюся систему сил, систему параллельных сил?

14.8. Начальные сведения и отдельные результаты к вопросу о приведении к простейшему виду распределённых систем сил

Если сила распределена по поверхности, то пользуются понятием «удельное давление» (\vec{p}) - это частное от деления элементарной силы $d\vec{P}$ на бесконечно малую площадку dS , к которой эта элементарная сила приложена, т.е.

$$14.8 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{p} = \frac{d\vec{P}}{dS} . \end{array} \right.$$

Единицы измерения удельного давления: $\text{Н/м}^2 = \text{Па} = \text{Паскаль}$; $\text{кгс/м}^2 = \text{атмосфера}$.

Если удельное давление известно, то, в соответствии с введенными понятиями, главный вектор непрерывно распределённой системы сил определяется формулой:

$$14.9 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = \int_S \vec{p} \cdot dS . \end{array} \right.$$

Элементы распределённо-параллельных систем сил обычно сонаправлены и действуют нормально к площадкам своего приложения. Рассмотрением этого случая и ограничиваемся.

Если, при этом, $\vec{p} = \text{Const}$, то

$$\vec{P} = \vec{p} \cdot S,$$

где S - площадь поверхности, на которую действует рассматриваемая система распределённо-параллельных сил.

Для протяжённых тел (когда один размер площади приложения распределённо-параллельной систем сил намного больше второго) эту систему сил считают распределённой по *линии* и пользуются понятием «интенсивность нагрузки» (которую будем обозначать буквой q). Единицы измерения интенсивности нагрузки: Н/м; кГс/м и т.д.

Встречаются различные законы распределения сил. Но этот вопрос не является предметом изучения теоретической механики и, поэтому, ограничиваемся рассмотрением наиболее часто встречающихся случаев, представленных на рис.5:

- а) прямоугольный закон, распределения нагрузки;
- б) треугольный;
- в) трапецидальный;
- г) параболический.

Для перечисленных 4-х случаев задаёмся целью определить модули равнодействующих P и положения линий их действия. Пусть A – точки пересечения равнодействующих с осями Ox , а $OA = \xi$.

В соответствии с введенными понятиями

$$a \quad \left| \quad P = \int_0^L q \cdot dx .\right.$$

Координату ξ определим воспользовавшись законом о моменте равнодействующей:

$$P \cdot \xi = \int_0^L x \cdot (q \cdot dx) .$$

Наиболее часто встречающиеся эторы параллельно-распределённых нагрузок

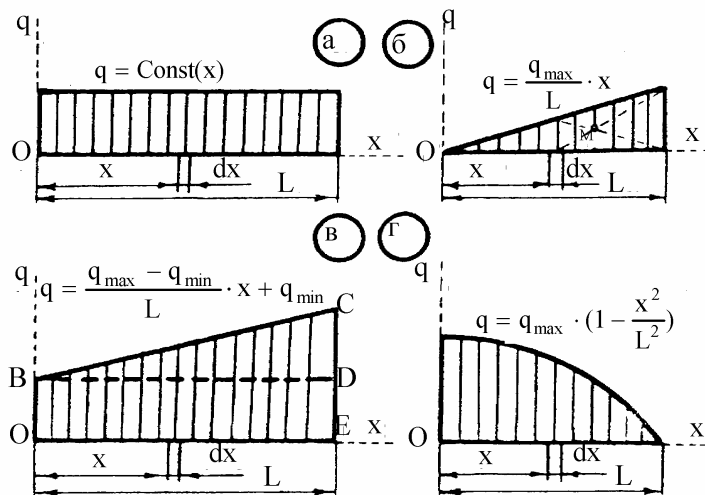


Рисунок 14.2

Откуда:

$$b \quad \left| \quad \xi = \frac{1}{P} \cdot \int_0^L q \cdot x \cdot dx . \right.$$

Беря интегралы a и b получаем:

14.10 | при прямоугольном законе отображения параллельно-распределённой нагрузки равнодействующая делит отрезок L , к которому нагрузка приложена, пополам, а модуль равнодействующей определяется путём вычисления площади этого прямоугольника (произведение интенсивности q на L);

14.11 | при треугольном законе отображения параллельно-распределённой нагрузки равнодействующая проходит через центр тяжести треугольника т.е. $\xi = \frac{2}{3} \cdot L$, а её модуль равен площади того же, изображающего нагрузку, треугольника (равен половине произведения q на L);

14.12 | при параболическом законе отображения параллельно-распределённой нагрузки равнодействующая проходит на расстоянии $\frac{3}{8} \cdot L$ от вершины параболы, а её модуль равен двум третям площади прямоугольника со сторонами L и q_{\max} (в который на рис.5а вписана эпюра, изображающая параболическую нагрузку).

При сложных законах отображения параллельно-распределённых сил для определения модуля равнодействующей и расположения линии её действия удобно применять приём разбиения сложной фигуры на простые. Иллюстрируем этот приём на примере трапецидальной эпюры нагрузки.

Трапецию $OBCE$ (см. рис.5в) разделяем на прямоугольник $OBDE$ (эту фигуру считаем первой) и треугольник BCE (фигура 2).

Для модуля равнодействующих получаем:

$$c \quad \left| \begin{array}{l} \text{для прямоугольной части нагрузки - } P_1 = q_{\min} \cdot L ; \\ \text{для треугольной - } P_2 = 0,5 \cdot (q_{\max} - q_{\min}) \cdot L ; \\ \text{для трапеции - } P = P_1 + P_2 . \end{array} \right.$$

Теперь определяем положение линии действия равнодействующей \vec{P} .

В соответствии с законом Вариньона

$$P \cdot \xi = P_1 \cdot \xi_1 + P_2 \cdot \xi_2.$$

Из 14.10 и 14.11:

$$\xi_1 = 0,5 \cdot L, \quad \xi_2 = (2/3) \cdot L.$$

Из последних трёх равенств и выражений a получаем:

$$\xi = \frac{L}{3} \cdot \frac{q_{\min} + 2 \cdot q_{\max}}{q_{\min} + q_{\max}}.$$

14.9. О центрах тяжести

С пренебрежимо малой погрешностью для подавляющего большинства решаемых задач можно считать, что сила тяжести – это равнодействующая параллельно-распределённой системы сил, приложенных к частицам тела со стороны поля земного тяготения.

Вес тела – это модуль силы тяжести.

Удельный вес – это вес единицы объёма тела.

Центр тяжести тела – это такая его точка, через которую проходит сила тяжести, независимо от положения тела, относительно Земли.

Понятие о центре тяжести тела ввёл Архимед (287-212 до н.э.) – в трактате «О весах» он писал: «Центр тяжести тела – это точка пересечения отвесных линий при подвесе этого тела за различные точки».

Для определения положений центров тяжести тел используют экспериментальные и теоретические способы.

Из экспериментальных наиболее распространены способы подвешивания и взвешивания тел.

Способ подвешивания: тело два раза подвешивают на нити (цепи, тросе, верёвке и т.п.) и находят точку пересечения двух экспериментально установленных направлений. С точки зрения получения минимальной погрешности, угол между определяемыми направлениями надо принимать близким к 90° .

Способ взвешивания целесообразно использовать для тел протяжённой формы. Рекомендуем студентам «открыть» (разработать и описать) его самостоятельно (после изучения раздела «Равновесие тел»).

Экспериментальные способы удобно использовать в случае тел сложной конфигурации и составленных из деталей, имеющих разные удельные веса материалов, из которых они изготовлены.

Однако, несмотря на простоту, экспериментальные способы не всегда применимы. Например, при отсутствии конструкции (что имеет место на стадии проектирования устройств и сооружений), при больших размерах тел, при отсутствии возможности прикрепить к телу гибкую связь.

При теоретическом определении положений центров тяжести тел сложной конфигурации используют приём разбиения исходного тела на части - его представляют разделённым на N меньших тел (см. рис.6), веса G_k ($k = 1, 2, \dots, N$) и положения (\vec{r}_k) центров тяжести которых известны; тогда, в соответствии с законом Вариньона:

$$14.13 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_C = \frac{1}{G} \cdot \sum_{k=1}^N (G_k \cdot \vec{r}_k), \quad \text{где} \\ G = \sum_{k=1}^N G_k \quad \text{- вес исходного тела.} \end{array} \right.$$

Способ разбиения тела на части

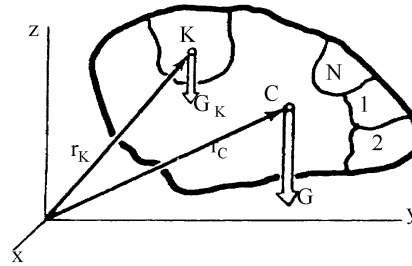


Рисунок 14.3

Из 14.13 видно, что положения центров тяжести *однородных* тел зависят от геометрических форм, но не от разновидностей материалов. В связи с этим, оперируют также понятиями: «центр тяжести объёма», «центр тяжести плоской фигуры», «центр тяжести линии». Чтобы отличать одно от другого в формулах 14.13 вместо G можно условиться писать другие буквы: в первом случае - V , во втором - S , в третьем - L . Этот результат легко видится, если веса начать выражать через удельный вес (γ), или через вес единицы площади плоской фигуры, или через вес единицы длины линии. Например, $G_k = \gamma \cdot V_k$ и ясно, что γ , как величина, не зависящая от номера частицы тела, из уравнения уйдёт – окажется и в числителе, и в знаменателе.

Из 14.13 рекомендуем самостоятельно получить и такой результат:

$$14.14 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{центр тяжести однородного тела} \\ \text{расположен в плоскости симметрии, на} \\ \text{оси симметрии, в точке симметрии (если} \\ \text{таковые имеются).} \end{array} \right.$$

О центре тяжести треугольника

Переходим к рассмотрению основных приёмов, применяемых при определении центров тяжести однородных тел простых конфигураций.

$$14.15 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Центр тяжести однородного треугольника} \\ \text{находится на пересечении его медиан.} \end{array} \right.$$

Сформулированный результат можно получить следующими рассуждениями.-

Разбиваем треугольник на бесконечно большое число бесконечно узких полосок, параллельных основанию AB . EF – одна из них, ν -тая (см. рис. 14.4).

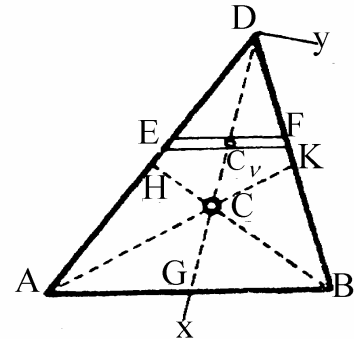


Рисунок 14.4

Медиана DG пересекает v -тую полоску посередине (в точке C_v). В соответствии с 14.14 ордината её центра тяжести (y_v) равна нулю. Таким образом, распределённая по поверхности треугольника система сил тяжести сводится к тяжёлой линии - к медиане DG.

Т.к. для любой из рассматриваемых элементарных полосок $y_v = 0$, то на основании 14.13 заключаем: центр тяжести треугольника расположен на медиане DG.

Аналогично приходим к выводу о том, что центр тяжести треугольника расположен и на медиане АК.

Но тело имеет лишь один центр тяжести. Следовательно, он расположен на пересечении DG и АК.

Осталось лишь напомнить (из элементарной геометрии): точка пересечения медиан делит каждую из них на два отрезка, один из которых (примыкающий к вершине треугольника) в два раза больше второго.

14.16 | Центр тяжести однородной дуги окружности (см. рис.14.5) расположен на её оси симметрии и отстоит от центра этой окружности на расстоянии

$$y_C = R \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

где R - радиус окружности;

α - половина центрального угла, на который дуга опирается.

Результат 14.16 можно получить следующим образом.-

Ось y (см. рис.14.5) направляем так, чтобы она оказалась осью симметрии рассматриваемой дуги. Тогда (в соответствии с 14.14), $x_C = 0$.

Длина дуги: $L = 2 \cdot \alpha \cdot R$.

Представим её состоящей из бесконечно большого числа бесконечно малых дуг, одна из которых (длиной dL) изображена на рисунке. Тогда:

$$y_C = \frac{1}{L} \cdot \int_{\varphi=-\alpha}^{\varphi=\alpha} y \cdot dL = \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot R} \cdot \int_{\varphi=-\alpha}^{\varphi=\alpha} (R \cdot \cos \varphi) \cdot R \cdot d\varphi = \frac{R}{2 \cdot \alpha} \cdot \sin \varphi \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = R \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} .$$

Ниже приведенные результаты 14.17-14.20 получите самостоятельно:

О центре тяжести дуги окружности

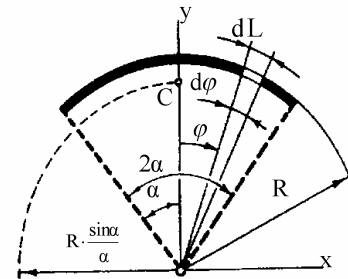


Рисунок 14.5

- 14.17 | центр тяжести однородного кругового сектора отстоит от центра круга на расстоянии
- $$y_c = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \text{ где}$$

R - радиус круга; α - половина секторного угла;

- 14.18 | у однородной полусферы (рис.14.7) центр тяжести отстоит от её основания (от экваториальной окружности) на расстоянии, равном половине радиуса;

- 14.19 | у однородного полушара (см. рис.14.8) центр тяжести отстоит от основания-круга на расстоянии трёх восьмых радиуса.

- 14.20 | центр тяжести однородной пирамиды (и конуса) расположен на отрезке, соединяющем центр тяжести основания с вершиной и отстоит от вершины на расстоянии, равном трём четвертям этого отрезка.

О центре тяжести кругового сектора

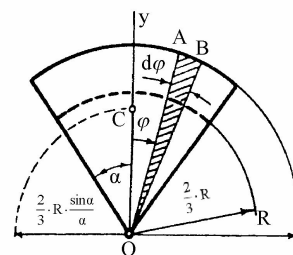


Рисунок 14.6

О центре тяжести полусферы

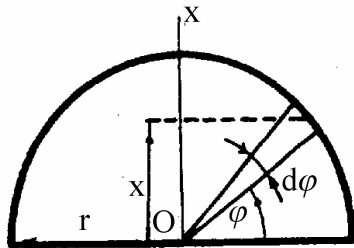


Рисунок 14.7

О центре тяжести полушара

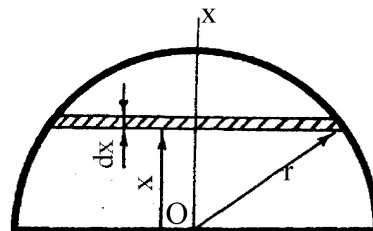


Рисунок 14.8

ПРИМЕР 14.1.- Вычислить координаты центра тяжести тела по рис.14.9.

$a = 1,6$ м – длина ребра куба. $KL = a$.

Решение. - Центр тяжести расположен на оси симметрии (на KLM) - $x_c = y_c = 0,8$ м.

$$z_c = \frac{V_1 \cdot z_1 + V_2 \cdot z_2}{V_1 + V_2} = \frac{(a^3) \cdot 0,5a + \left[\left(\frac{1}{3} \cdot a \right) \cdot a^2 \right] \cdot 1,25a}{a^3 + \left(\frac{1}{3} \cdot a \right) \cdot a^2} = 1,1 \text{ м.}$$

Куб. На нём пирамида

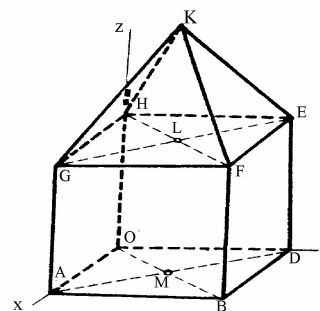


Рисунок 14.9

15. Равновесие тел

15.1. Уравнения равновесия

Как уже было определено, для уравновешенной системы $R_{\Gamma} = 0$ и $M_{\Gamma} = 0$; причём, главный момент M_{Γ} равен нулю независимо от центра, относительно которого он вычислялся.

С другой стороны:

$$R_{\Gamma} = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2 + (\sum Z)^2};$$
$$M_{\Gamma} = \sqrt{(\sum m_x)^2 + (\sum m_y)^2 + (\sum m_z)^2}$$

Замечание: как здесь, так и в дальнейшем, с целью сокращения записей пределы суммирования будем опускать.

Таким образом, для находящегося в равновесии тела:

$$a \quad \left| \begin{array}{l} \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2 + (\sum Z)^2} = 0, \\ \sqrt{(\sum m_x)^2 + (\sum m_y)^2 + (\sum m_z)^2} = 0. \end{array} \right.$$

Подкоренные выражения состоят из сумм квадратов действительных чисел и поэтому ясно, что равенства a могут иметь место лишь в случаях:

$$15.1 \quad \left| \begin{array}{l} \sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0; \\ \sum m_x = 0, \quad \sum m_y = 0, \quad \sum m_z = 0. \end{array} \right.$$

Математические выражения 15.1 называют *уравнениями проекций*, 15.2 – *уравнениями моментов*.

Совокупность уравнений проекций и уравнений моментов называют *уравнениями равновесия* (для произвольной системы сил, стандартная форма).

Уравнения 1 и 2 словами описывать принято примерно так:

уравнения проекций - «сумма проекций (на такую-то ось, например на X) всех приложенных (к такому-то телу) сил равна нулю»;

уравнения моментов - «сумма моментов относительно оси (такой-то, например относительно оси X) всех приложенных (к такому-то телу) сил равна нулю».

Уравнения равновесия обычно составляют с целью определения неизвестных сил. При этом, полезно иметь ввиду:

$$15.3 \quad \left| \begin{array}{l} \text{неизвестная сила, расположенная перпендикулярно оси, не входит в} \\ \text{уравнение проекций на эту ось;} \end{array} \right.$$

- 15.4 | неизвестная сила не входит в уравнение моментов, если линия её действия параллельна, либо пересекает ось, относительно которой момент вычисляется.

Одна тройка взаимно перпендикулярных осей, особенно наугад взятая, чаще всего даёт сложную в решении систему уравнений (даёт нераспадающуюся систему 6 уравнений). Но нет запрета дополнить её уравнениями равновесия, составленными для других систем координат, отличающихся от первой и учитывающих свойства 15.3-15.4.

В расширенной указанным способом системе уравнений обычно обнаруживаются уравнения с одной неизвестной, либо обнаруживаются подсистемы двух уравнений с двумя неизвестными, что существенно облегчает решение конкретных задач.

Возникают интересные, с точки зрения облегчения расчётов, вопросы:

- какое максимальное количество неизвестных позволяют определить составленные в большом количестве уравнения равновесия?
- какие из них целесообразнее всего использовать для определения неизвестных?

Отвечать на поставленные вопросы можно путём анализа ранга матрицы, составленной по коэффициентам уравнений равновесия. Подробнее с этим вопросом можно ознакомиться в учебном пособии: «Игнатищев Р.М. Теоретическая механика. Статика.- Могилёв: ММИ, 1978.- С.50-56». Здесь же ограничимся приведением лишь основных результатов этого анализа.

При произвольной пространственной системе сил:

- 15.5 | число линейно независимых уравнений равновесия, составленных для одного тела, не может быть больше шести и, поэтому, если число входящих в уравнения неизвестных превышает число 6, то все их определить не удастся, сколько бы уравнений вы не составили;
- 15.6 | число линейно независимых уравнений проекций для одного тела не может быть больше трёх;
- 15.7 | если оси, относительно которых записывают уравнения моментов, пересекаются в одной точке, то число линейно независимых уравнений моментов не может быть больше трёх;
- 15.8 | в случаях 15.6 и 15.7 перпендикулярность осей не обязательна;
- 15.9 | в случае параллельных осей можно составить лишь 3 линейно независимых уравнений моментов; причём, эти оси нельзя располагать в одной плоскости (в противном случае линейно независимых уравнений моментов окажется лишь 2);
- 15.10 | в случае двух систем координат с несовпадающими плоскостями, параллельность допустима, линейно независимыми оказываются все шесть уравнений моментов.

15.11 | Для тел, находящихся под действием системы сил, линии действия которых совпадают, может быть составлено лишь одно уравнение равновесия; проще всего - $\sum X = 0$, где X - ось, совпадающая с линией действия названной системы сил.

Другие уравнения в своих первоначальных написаниях окажутся сложнее, но после соответствующих преобразований будут упрощены и доведены до рекомендованных; но зачем эти дополнительно-преобразовательные операции?

15.12 | Для тела, находящегося под действием плоской сходящейся системы сил, может быть составлено лишь два линейно независимых уравнений равновесия; проще всего $\sum X = 0$ и $\sum Y = 0$, где X и Y - любые непараллельные (не обязательно взаимно перпендикулярные) оси, расположенные в плоскости действия сил.

15.13 | Для тела, находящегося под действием пространственной сходящейся системы сил, можно составить лишь три линейно независимых уравнений равновесия; проще всего $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$, $\sum Z = 0$, где X, Y, Z - произвольные оси, которые при параллельном своём переносе в одну точку образуют трёхгранник.

Часто выгодными (по соображениям получения более простых выражений) являются не взаимно перпендикулярные оси.

15.14 | Для тела, находящегося под действием пространственной системы параллельных сил, можно составить не более трёх линейно независимых уравнений равновесия; проще всего $\sum m_x = 0$, $\sum m_y = 0$, $\sum Z = 0$, где X и Y - непараллельные друг другу оси, расположенные в плоскости, перпендикулярной линиям действия сил; ось Z параллельна линиям действия сил.

Когда рассматривают плоские системы сил (в учебном процессе с ними чаще всего и приходится иметь дело), то пользуются понятием «*момент силы относительно точки*». Обозначения: $m_A(\vec{F}_v)$, или m_{Av} (момент v -той силы относительно точки A).

Под моментом силы относительно точки понимают взятое со знаком «+» или «-» произведение модуля силы на кратчайшее расстояние (h) от взятой точки A до линии действия силы, т.е.

$$15.15 \quad | \quad m_{Av} = \pm F_v \cdot h_v.$$

Понятие «момент силы относительно точки» пояснено рисунком 15.1. На нём иллюстрированы оба (и «плюс» и «минус») возможных случая:

При этом, удобно использовать механический образ: изображение тела мысленно представляется в виде куска картона с отверстием в точке, относительно которой вычисляется момент. Изображение тела отверстием надето на мысленно вбитый в стол гвоздь без шляпки. Если сила (одиночно действующая - без учёта остальных сил) поворачивает изображение тела против хода часовой стрелки, то момент считается положительным; в противном случае (на рис.15.1 сила \vec{F}_2) - отрицательным. Кратчайшее расстояние от точки, относительно которой вычисляется момент, до линии действия силы называют плечом (на рис.15.1: h_1 - плечо силы \vec{F}_1 , h_2 - плечо силы \vec{F}_2 относительно точки А).

К понятию о моменте силы относительно точки

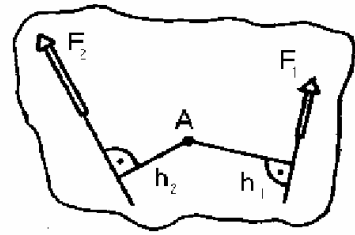


Рисунок 15.1

Для тела, находящегося под действием плоской системы параллельных сил, можно составить лишь два линейно независимых уравнения равновесия; проще всего $\sum X = 0$ и $\sum m_A = 0$, где x - ось, параллельная линиям действия сил, A - точка на линии действия одной из неизвестных сил.

15.16 | Для тела, находящегося под действием произвольной плоской системы сил можно составить лишь три линейно независимых уравнения равновесия. При этом, принято различать три формы таких уравнений:

Для тела, находящегося под действием произвольной плоской системы сил можно составить лишь три линейно независимых уравнения равновесия. При этом, принято различать три формы таких уравнений:

15.17 | первая - $\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum m_A = 0,$
 X и Y - произвольные (в плоскости действия сил), взаимно непараллельные оси; A - произвольная в этой плоскости точка.

15.18 | вторая форма - $\sum X = 0, \sum m_A = 0, \sum m_B = 0,$
 X - произвольная (в плоскости действия сил) ось; A и B - произвольные в этой плоскости точки с одним ограничением -
 - AB не $\perp X$;

15.19 | третья форма - $\sum m_A = 0, \sum m_B = 0, \sum m_C = 0,$
 A, B, C - произвольные в плоскости действия сил точки, с тем ограничением, что не должны располагаться на одной прямой.

Пренебрежение ограничением приведёт к тому, что из трёх составленных уравнений линейно независимыми окажется лишь два.

5.2. Типовые связи и их реакции

Одной из наиболее распространённых связей является «опорная поверхность» - см. рис.2, на котором:

- 1 - принятое к рассмотрению тело;
- 2 - опорная для него поверхность;
- T - плоскость, касающаяся сопряжённых поверхностей в точке их взаимодействия;
- \vec{R} - равнодействующая реакции опорной поверхности, \vec{N} - её нормальная, \vec{F} - касательная составляющие.

Чаще всего \vec{F} - неопределённая, и даже меняющаяся в процессе эксплуатации конструкции, величина (вплоть до неопределённости направления - то ли она направлена как показано на рис.2, то ли в противоположную сторону), т.е. \vec{F} - практически сложно учитываемая величина, но обычно $F \ll N$ и учёт F к существенным погрешностям не приводит.

По указанной причине при решении большинства задач статики составляющей \vec{F} пренебрегают, используя допущение:

- 15.20 | в точках взаимодействия тел реакции расположены нормально к соприкасающимся поверхностям.

Если пользуются допущением 20, то говорят: «гладкая (или идеальная) опорная поверхность». Использование этого допущения не означает, что рассматриваемые в статике методы неточны.

Методы точны, но конкретное их использование иногда может требовать дополнительного изучения исходных данных. Вопросы, связанные с учётом в расчётах составляющей \vec{F} , будут рассмотрены в подразделе 8.

Если специально не оговорено, то в дальнейшем будут иметься ввиду гладкие опорные поверхности.

Широко встречаются случаи, когда поверхность взаимодействует с рёбрами и точками - см. рис.3.

Опорная поверхность

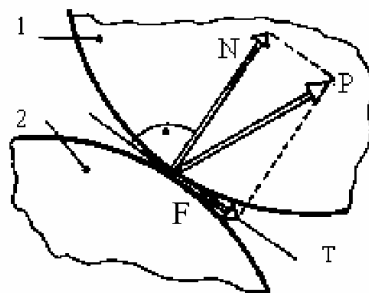


Рис.2

Взаимодействие рёбрами и точками

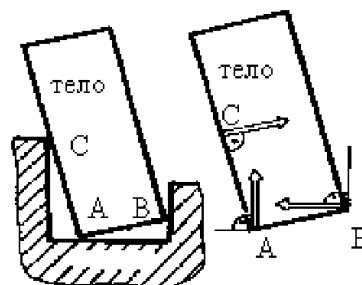


Рис.3

Если специально не оговорено другое, то соприкосновение по рёбрам и точкам рассматривают как гладкие поверхности с малыми радиусами кривизны, т.е. их сводят к предыдущему случаю – к взаимодействию 2-х поверхностей.

При рассмотрении равновесия балок часто встречается «подвижная шарнирная опора» – см. рис.4.

Не менее широко распространено и «шарнирное соединение тел» – рис.5-7.

*Варианты изображений
подвижной опоры*

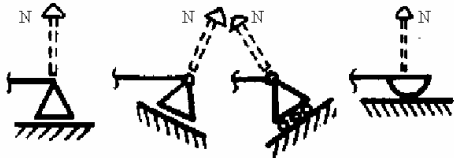


Рис.4

*Варианты изображений
цилиндрического шарнира*

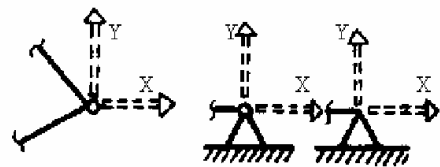


Рис.5

По своему существу и «подвижная шарнирная опора», и «шарнирное соединение» сводятся к идеальным опорным поверхностям.

Рис. 6 поясняет вопрос о том, почему реакция перпендикулярна оси шарнира и направлена через его центр в неизвестном направлении.

Цилиндрический шарнир – это обобщающее понятие различных конструктивных решений. Одно из них ясно из рис.6, второе – из рис.7. Главным же, сущностью цилиндрического шарнира является беспрепятственность поворота тела относительно связи.

*О неопределённости
направления реакции шарнира*

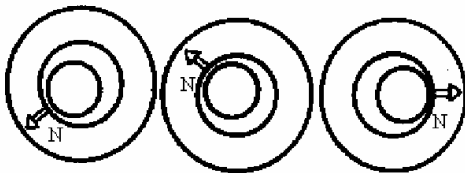


Рис.6

*Конструктивная разновидность
цилиндрического шарнира*

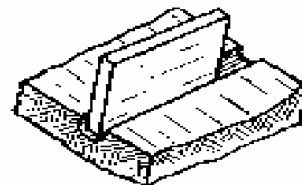


Рис.7

Замечание к употреблённому термину «поворот»:

речь идёт о микроповоротах, происходящих по причине деформаций тел от действующих на них сил; ими могут быть единицы угловых минут и даже единицы угловых секунд.

При рассмотрении пространственных систем сил широко распространена связь, называемая сферическим (шаровым) шарниром – см. рис.8

Сферический шарнир и схематические его изображения

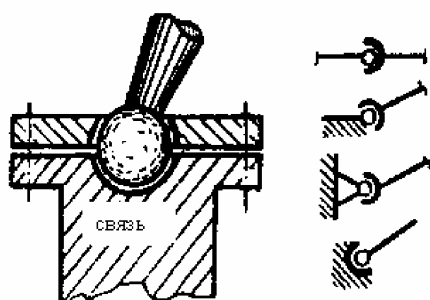


Рис.8

Конструктивные разновидности сферического шарнира

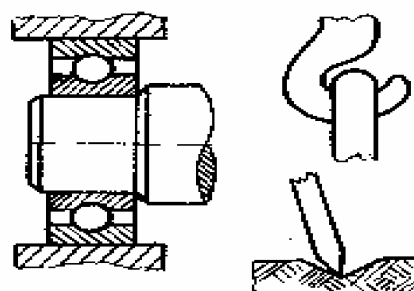


Рис.9

По своей сущности сферический шарнир – это связь, обеспечивающая трёхкоординатную беспрепятственность поворота одного тела относительно другого. По этой причине связи по рис.9 являются также сферическими шарнирами.

Если говорить о направлении реакций, то сферический шарнир (как и цилиндрический) – есть опорная поверхность и ясно, что реакция сферического шарнира проходит через центр сферы, но имеет неизвестное (в пространстве) направление. По этой причине реакцию в сферическом шарнире представляют тремя составляющими – см. рис.10.

Реакции в сферическом шарнире

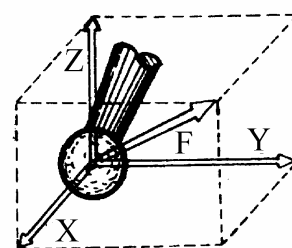


Рис.10

Широко распространены в конструкциях шарнирные тела, нагруженные лишь реакциями связей – см. рис.11а (тела AD, BK, CE).

Из аксиомы о равновесии (подраздел 3.3) и уже рассмотренных методов без дополнительных рассуждений виден **закон о двух силах**:

15.21

тело под действием двух сил может находиться в равновесии тогда, и только тогда, когда эти силы противоположны.

Поэтому:

Двухшарнирные тела и реакции в них

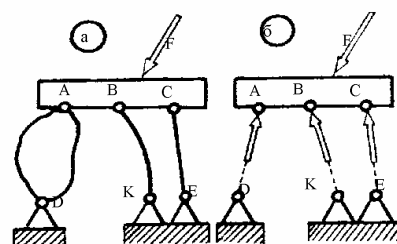


Рис.11

15.22 у двухшарнирного тела, нагруженного лишь связями, реакции расположены на прямой, проходящей через центры шарниров.

Широко распространённой связью является заведомо натянутая нить (трос, верёвка, цепь и т.п.). Из того же закона о двух силах, и также без дополнительных рассуждений, видно:

15.23 у заведомо натянутой нити реакция направлена по отображающему её отрезку прямой - см. рис.12.

Реакцию одной части нити на другую принято называть «натяжением нити».

Широко распространённой связью является также «заделка конца балки» (кратко - «заделка»; синоним – «жёстко защемлённый конец балки») – см. рис.13.

Распределённую по поверхности заделанного конца балки систему сил приводят к центру сечения, разделяющему балку на видимую и защемлённую части. Эквивалентом, при этом, в общем случае оказывается силовой винт. Силу \vec{P} этого винта называют «реакцией заделки» и представляют в виде трёх составляющих X, Y, Z (см. рис.13б).

Момент \vec{M} эквивалентного силового винта называют «моментом заделки» и также представляют тремя составляющими - M_x, M_y, M_z .

Если балка нагружена плоской системой сил (этот случай в учебном процессе встречается чаще), то $Z = 0, M_x = 0, M_y = 0$ и применяют изображения, представленные на рис.13в и 13г.

5.3. Закон о трёх силах

15.24 Если тело находится в равновесии под действием трёх непараллельных сил, то линии их действия расположены в одной плоскости и имеют общую точку пересечения.

Реакция нити

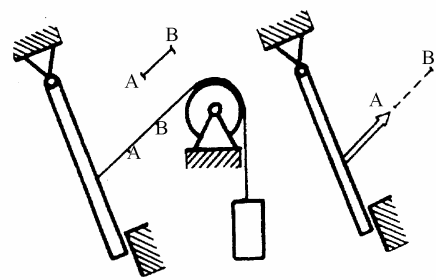


Рис.12

Заделка и реакции в ней

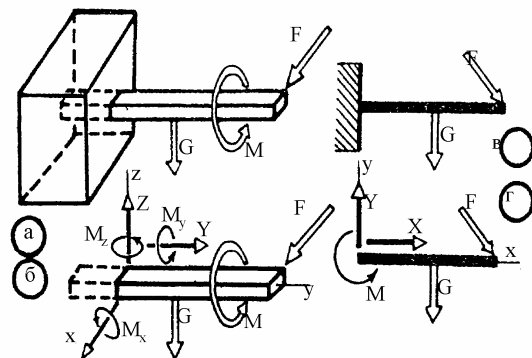


Рис.13

15.22 у двухшарнирного тела, нагруженного лишь связями, реакции расположены на прямой, проходящей через центры шарниров.

Широко распространённой связью является заведомо натянутая нить (трос, верёвка, цепь и т.п.). Из того же закона о двух силах, и также без дополнительных рассуждений, видно:

15.23 у заведомо натянутой нити реакция направлена по отображающему её отрезку прямой - см. рис.12.

Реакция нити

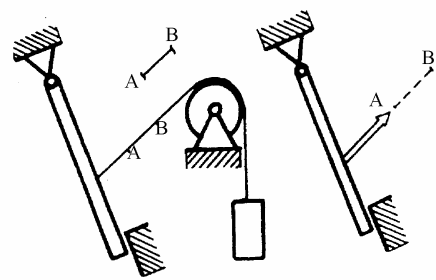


Рис.12

Реакцию одной части нити на другую принято называть «натяжением нити».

Широко распространённой связью является также «заделка конца балки» (кратко - «заделка»; синоним – «жёстко защемлённый конец балки») – см. рис.13.

Распределённую по поверхности заделанного конца балки систему сил приводят к центру сечения, разделяющему балку на видимую и защемлённую части. Эквивалентом, при этом, в общем случае оказывается силовой винт. Силу \vec{R} этого винта называют «реакцией заделки» и представляют в виде трёх составляющих X, Y, Z (см. рис.13б).

Момент \vec{M} эквивалентного силового винта называют «моментом заделки» и также представляют тремя составляющими - M_x, M_y, M_z .

Заделка и реакции в ней

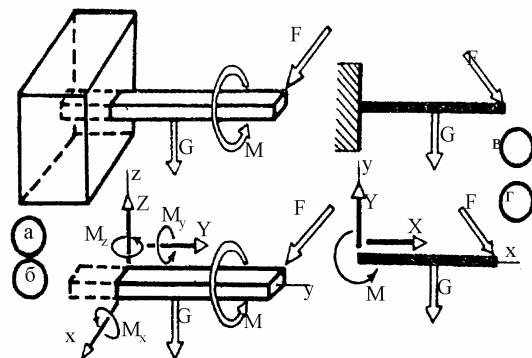


Рис.13

Если балка нагружена плоской системой сил (этот случай в учебном процессе встречается чаще), то $Z = 0, M_x = 0, M_y = 0$ и применяют изображения, представленные на рис.13в и 13г.

5.3. Закон о трёх силах

15.24 Если тело находится в равновесии под действием трёх непараллельных сил, то линии их действия расположены в одной плоскости и имеют общую точку пересечения.

По результатам мысленно проведенного анализа возможных вариантов, к рассмотрению принимается какое-либо тело и *изображается отдельным рисунком*.

Изучившие теоретическую механику данной рекомендацией часто не пользуются – представляют этот рисунок мысленно. С целью меньших затрат на качественное усвоение изучаемого материала, студентам от такой «экономии» целесообразно отказываться.

Второй этап – изобразить на рисунке все действующие на тело внешние силы (активные и реакции связей). Чтобы не забыть учесть ту или иную реакцию связи, целесообразно использовать принцип освобожденности от связей (см. подраздел 13.3).

Изобразите на рисунке необходимые геометрические размеры (расстояния, углы).

Для удобства чтения рисунков тела, активные силы, реакции связей (они обычно неизвестны) и размерные линии изображайте чертёжным инструментом и отличающимися друг от друга линиями. Например, тела изображайте шариковой ручкой синего цвета, активные силы - зелёным цветом, реакции связей – красным. Размерные линии изображайте простым чёрным карандашом.

Третий этап. - Составьте систему уравнений равновесия и решите её.

С целью быстрого воспроизведения в памяти схемы решения задач статики удобно помнить словесную формулу: «*тело-силы-уравнения*».

15.5. Примеры на определение реакций связей в простейших механических системах

ПРИМЕР 15.1.- *На законы о противодействии и о двух силах*

Дано. Механическая система по рис.15.15. $\alpha = \beta = 30^\circ$; C – груз, весом $G = 10\text{kH}$.

Определить натяжение нити АВ и усилие в стержне ОВ.

Решение.- Применяя принцип освобожденности от связей, принимаем к рассмотрению и изображаем на рис. 15.16 отдельно груз С, нить ВС и стержень ОВ.

К условию примера 15.1

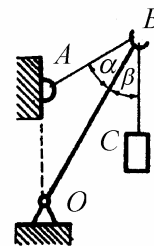


Рисунок 15.15

К решению примера 15.1

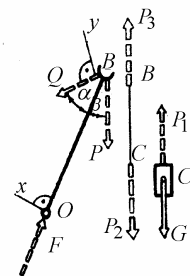


Рисунок 15.16

В соответствии с законом о двух силах, для груза С получаем: $\vec{P}_1 = -\vec{G}$, причём расположены эти силы на одной прямой, проходящей через точку С.

На основании закона о противодействии, записываем: $\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$.

Теперь используем закон о двух силах для нити и устанавливаем: $\vec{P}_2 = -\vec{P}_3$.

Вновь применяя закон о противодействии и учитывая предыдущие соотношения, получаем.

$$a \quad | \quad \vec{P} = -\vec{P}_3 = \vec{P}_2 = -\vec{P}_1 = \vec{G}.$$

Т.к. силы \vec{P} и \vec{Q} сходятся в одной точке, они имеют равнодействующую; мысленно обозначаем её \vec{R}_B .

Таким образом, стержень ОВ находится в равновесии под действием двух сил - \vec{R}_B и \vec{F} . На основании закона о двух силах заключаем: сила \vec{F} направлена по стержню ОВ, что и отражено на рис. 15.16.

Теперь для находящегося в равновесии стержня ОВ составляем два уравнения равновесия и решаем их.-

$$\sum X = 0, \quad Q \cdot \sin\alpha - P \cdot \sin\beta = 0. \quad \text{Откуда } Q = P, \text{ а с учётом } a:$$
$$Q = P = G = 10 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 0, \quad F \cdot \sin\alpha - P \cdot \sin(\alpha + \beta) = 0. \quad \text{Откуда}$$

$$F = P \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha} = 10 \cdot \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = 17,3 \text{ кН.}$$

Замечание.- При написании связи a мы постарались в письменной форме показать все звенья логической цепочки. Это сделано по той причине, что рассматривается 1-й пример на равновесие тел. Но письменное отображение всех звеньев логической цепи требует больших площадей бумаги; кроме того, многократные повторения хорошо понятного вызывает у людей ощущения сходное с оскоминой. По этим причинам, для хорошо понятных из предыдущих изложений логических цепочек обычно на письме показывают лишь начальные и конечные звенья, а промежуточные звенья должны воспроизводиться обучающимися самостоятельно и мысленно. Такой подход наблюдается у авторов всех учебников. Так будем делать и мы. Но не забывать: аксиоматический метод тогда обеспечивает высокую достоверность к получаемым результатам, когда расчётчик может воспроизводить все звенья сооружаемых им логических цепочек.

ПРИМЕР 15.2.- *На закон о трёх силах*
Дано. Механическая система по рис. 15.17.
 $P = 100$ кН, $a = 3$ м, $b = 4$ м.

Определить реакции опорной поверхности В и в шарнире О.

Решение.- Применяя принцип освобождения от связей, принимаем к рассмотрению тело АОВ (см. рис.15.18). Показываем все внешние, действующие на него силы: \vec{P} - активная сила; \vec{Y}_B - реакция опорной поверхности; \vec{F} - реакция неподвижного шарнира (направлена через точку С на основании закона о трёх силах).

Составляем для тела АОВ уравнения равновесия и решаем их:

$$\sum X = 0, P - F \cdot \cos\alpha = 0. \quad \text{Откуда:}$$

$$F = \frac{P}{\cos\alpha} = P \cdot \frac{OC}{b} = 100 \cdot \frac{5}{4} = 125 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 0, Y_B - F \cdot \sin\alpha = 0. \quad \text{Откуда:}$$

$$Y_B = F \cdot \sin\alpha = F \cdot \frac{a}{OC} = 125 \cdot \frac{3}{5} = 75 \text{ кН.}$$

ПРИМЕР 15.3.- *На удобство использования приёма разложения сил на составляющие*

Дано. У механической системы по рис.15.19 вес подвешенного груза $G=10$ кН; $\angle BOE$, $\alpha = \gamma = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$; стержни АВ, АС и AD невесомы.

Определить усилия в стержнях.

Решение.- Применяя принцип освобождения от связей, принимаем к рассмотрению стержень АВ (см. рис.15.20). Показываем все внешние, действующие на него силы:

\vec{G} - сила тяжести (активная сила, передаётся через нить); \vec{P} и \vec{F} - реакции стержней, соответственно, AD и AC. Тройку сил \vec{G} , \vec{F} и \vec{P} представляем, как сходящуюся систему сил, в виде одной – в виде их равнодействующей. Теперь,

К условию примера 15.2

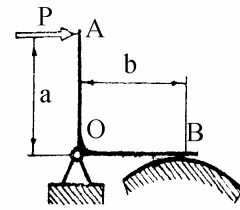


Рисунок 15.17

К решению примера 15.2

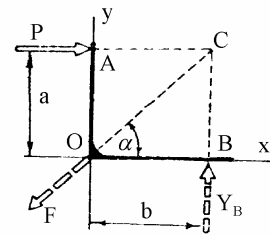


Рисунок 15.18

К условию примера 15.3

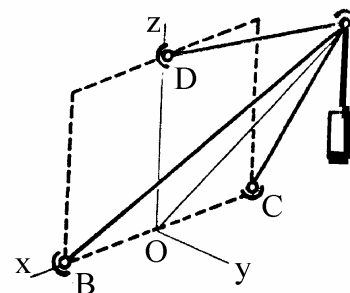


Рисунок 15.19

применяя к АВ закон о двух силах, реакцию \vec{Q} в шарнире В направляем по стержню.

Составляем уравнения равновесия и решаем их. При этом, с целью облегчения процесса вычислений проекций сил \vec{F} и \vec{Q} на оси u и z , они вначале разложены по осям x и v .

$$\sum X = 0, F \cdot \cos\alpha - Q \cdot \cos\alpha = 0 \mapsto F = Q.$$

$$\sum Y = 0, F \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta + Q \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta - P \cdot \sin\gamma = 0 \mapsto P = 2F \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}.$$

$$\sum Z = 0, -G + F \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta + Q \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta + P \cdot \cos\gamma = 0.$$

Подставляем в последнее выражение два предыдущих и получаем:

$$F = \frac{G}{2\sin\alpha \cdot (\cos\beta + \sin\beta \cdot \text{Ctg}\gamma)} = \frac{10}{2\sin 60^\circ \cdot (\cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \text{Ctg} 60^\circ)} = 5,18 \text{ кН.}$$

Теперь находим P :

$$P = 2 \cdot 5,18 \frac{\sin 60^\circ \cdot \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = 7,3 \text{ кН.}$$

ПРИМЕР 15.4.- Впервые использован приём отрицательного модуля

Дано. Балка на двух опорах по рис.15.21. $P = 20 \text{ кН}$, $M = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $q = 20 \text{ кН/м}$; $q_{\max} = 20 \text{ кН/м}$; $a = 1 \text{ м}$, $b = c = 1,2 \text{ м}$, $d = 1,5 \text{ м}$; $\alpha = 60^\circ$.

Определить реакции на опорах А и В.

Решение.- Применяя принцип освобожденности от связей, принимаем к рассмотрению и изображаем на рис.15.22 балку САВD и все действующие на неё внешние силы.

При этом, модуль равнодействующей \vec{Q}_1 от сил, распределённых по закону прямоугольника, $Q_1 = q \cdot a = 20 \text{ кН}$ и проходит она посередине участка АС.

К решению примера 15.3

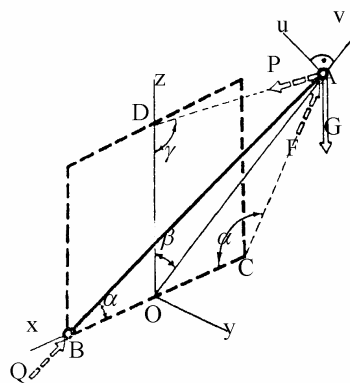


Рисунок 15.20

К условию примера 15.4

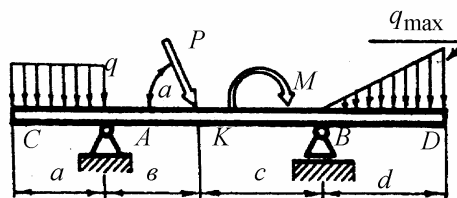


Рисунок 15.21

Модуль же равнодействующей \vec{Q}_2 системы сил, распределённых по закону треугольника, определяем как площадь треугольника - $Q_2 = 0,5q_{\max} \cdot d = 15 \text{ кН}$; направлена эта равнодействующая вниз и проходит от точки D на расстоянии, равном одной третьей d.

К решению примера 15.4

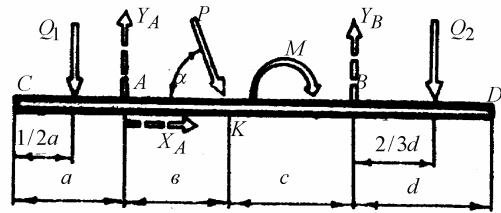


Рисунок 15.22

При изображении реакций \vec{X}_A, \vec{Y}_A и \vec{Y}_B используем приём отрицательного модуля: безошибочно указать положительные направления (особенно для Y_A и Y_B) пока сложно и, поэтому, вначале эти направления указываются наугад; если в результате последующих вычислений модуль силы окажется отрицательной величиной, это будет означать, что действительное направление реакции противоположно принятому.

Составляем уравнения равновесия и решаем их. При этом, для вычисления момента силы \vec{P} относительно точки A можно использовать

15.26 приём нахождения неизвестного плеча (см. рис.15.23) -
 $m_A(\vec{P}) = P \cdot (AK \cdot \sin\alpha),$

либо

15.27 приём переноса силы вдоль линии её действия и разложения на две составляющие (см. рис.24) -
 $m_A(\vec{P}) = Y_P \cdot AK = (P \cdot \sin\alpha) \cdot AK$

Приём нахождения неизвестного плеча

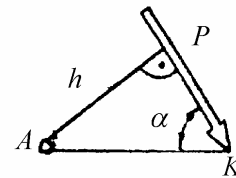


Рисунок 15.23

Приём разложения силы на составляющие

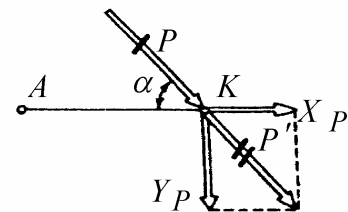


Рисунок 15.24

$$\sum m_A = 0, \quad m_A(\vec{Q}_1) + m_A(\vec{Y}_A) + m_A(\vec{X}_A) + m_A(\vec{P}) + M + m_A(\vec{Y}_B) + m_A(\vec{Q}_2) = 0, \quad \text{т.е.}$$

$$0,5a \cdot Q_1 - P \cdot \sin\alpha \cdot AK - M + Y_B \cdot (b+c) - Q_2 \cdot (b+c + \frac{2}{3}d) = 0,$$

откуда, после подстановки числовых значений, находим:

$$Y_B = 40,3 \text{ кН.}$$

$$\sum X = 0, \quad X_A + P \cdot \cos\alpha = 0; \quad X_A = -P \cdot \cos\alpha = -20 \cos 60^\circ = -10 \text{ кН.}$$

Знак «минус» означает, что первоначально принятое направление для \vec{X}_A оказалось ошибочным; но теперь мы установили, что в действительности эта сила направлена справа-налево.

$$\sum Y = 0, \quad -Q_1 + Y_A - P \cdot \sin\alpha + Y_B - Q_2 = 0. \quad \text{Откуда:}$$

$$Y_A = 10 + 20 \cdot \sin 60^\circ - 40,3 + 15 = 2 \text{ кН.}$$

ПРИМЕР 15.5.- На произвольную пространственную систему сил при использовании одной тройки осей

Дано. Вал АВ с жёстко насаженными на него двумя косозубыми колёсами (см. рис.25) находится в равновесии под действием сил $\vec{P}_1, \vec{F}_1, \vec{Q}_1, \vec{P}_2, \vec{F}_2, \vec{Q}_2$; $P_1 = 10 \text{ кН}, F_1 = 3 \text{ кН}, Q_1 = 4 \text{ кН}, F_2 = 0,3P_2, Q_2 = 0,4P_2$; $r_1 = 15 \text{ см}, r_2 = 5 \text{ см}, a = c = 10 \text{ см}, b = 15 \text{ см}; \alpha = 30^\circ$.

Определить P_2, F_2, Q_2 , а затем и реакции в подшипниках А и В.

Решение.- Применяя принцип освобождённости от связей, принимаем к рассмотрению (и изображаем на рис.15.26) вал АВ с зубчатыми колёсами. Показываем все внешние, действующие на принятое к рассмотрению тело, силы. Реакции в подшипниках представляем составляющими; причём, задачу считаем статически определимой (о чём речь будет ниже), т.е. считаем, что вдольосевая составляющая реакции возникает лишь на одной (левой) опоре - \vec{X}_A .

Составляем уравнения равновесия и решаем их.

$$\sum m_x = 0, \quad m_x(\vec{X}_A) + m_x(\vec{Y}_A) + m_x(\vec{Z}_A) + m_x(\vec{F}_1) + m_x(\vec{Q}_1) + m_x(\vec{P}_1) + m_x(\vec{F}_2) + m_x(\vec{Q}_2) + m_x(\vec{P}_2) + m_x(\vec{Y}_B) + m_x(\vec{Z}_B) = 0.$$

К условию примера 15.5

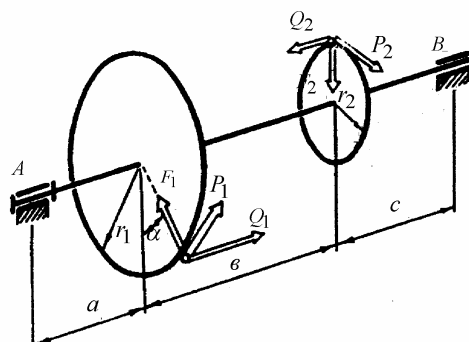


Рисунок 15.25

К решению примера 15.5

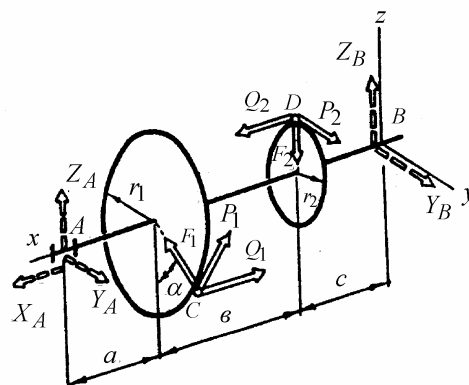


Рисунок 15.26

Используем правило 15.4: «момент силы относительно параллельных и пересекающих её осей равен нулю». Получаем:

$$P_1 \cdot r_1 - P_2 \cdot r_2 = 0. \quad \text{Откуда} \quad P_2 = 30 \text{ кН.}$$

Из заданных по условию соотношений: $F_2 = 9 \text{ кН}$ и $Q_2 = 12 \text{ кН}$.

Процедура составления уравнений равновесия оказывается существенно более простой и понятной, если вначале составить таблицу проекций сил и координаты точек их приложения.

Таблица проекций сил (кН) и координат точек(см) их приложения (к примеру 15.5)

	т. С	Q_1	F_1	P_1	т. D	Q_2	F_2	P_2
x, X	25	-4	0	0	10	12	0	0
y, Y	7,5	0	-1,5	8,66	0	0	0	30
z, Z	-13	0	2,6	5	5	0	-9	0

Составляем уравнения моментов относительно осей y и z . При вычислениях моментов отдельных сил воспользуемся способом перестановки индексов, в соответствии с которым:

$$m_y = z \cdot X - x \cdot Z, \quad m_z = x \cdot Y - y \cdot X.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum m_y = 0, \quad m_y(\vec{Q}_1) + m_y(\vec{F}_1) + m_y(\vec{P}_1) + m_y(\vec{Q}_2) + m_y(\vec{F}_2) + m_y(\vec{Z}_A) = \\ = [(-13) \cdot (-4) - 25 \cdot 0] + [(-13) \cdot 0 - 25 \cdot 2,6] + [(-13) \cdot 0 - 25 \cdot 5] + \\ + [5 \cdot 12 - 10 \cdot 0] + [5 \cdot 0 - 10 \cdot (-9)] - Z_A \cdot (10 + 15 + 10) = 0 \quad \mapsto \quad Z_A = 0,34 \text{ кН.} \end{aligned}$$

$$\sum m_z = 0, \quad Y_A \cdot 35 + 25 \cdot (-1,5 + 8,66) - 7,5 \cdot (-4) + 10 \cdot 30 = 0 \quad \mapsto \quad Y_A = -14,6 \text{ кН.}$$

Теперь составляем остальные уравнения равновесия:

$$\sum X = 0, \quad X_A - Q_1 + Q_2 = 0 \quad \mapsto \quad X_A = -8 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 0, \quad Y_A - F_1 \cdot \sin \alpha + P_1 \cdot \cos \alpha + P_2 + Y_B = 0 \quad \mapsto \quad Y_B = -22,6 \text{ кН.}$$

$$\sum Z = 0, \quad Z_A + F_1 \cdot \cos \alpha + P_1 \cdot \sin \alpha + F_2 + Z_B = 0 \quad \mapsto \quad Z_B = 1,06 \text{ кН.}$$

Итак, в результате решения задачи, получено:

X_A , Y_A и Y_B имеют направления, противоположные указанным на рис.15.26 (для остальных сил направления соответствуют первоначально принятым).

Обоснование «применяя к рассмотрению принцип освобождаемости от связей» применено многократно. С целью сокращения письма оно в дальнейшем будет опускаться.

ПРИМЕР 15.6.- На произвольную простр. систему сил; иллюстрирована простота решения за счёт удачного выбора осей

Дано: плита весом $G = 2000$ кН удерживается в равновесии с помощью стержней 1, 2, 3, 4, 5 и 6 (рис.15.27); $b = 6$ м, $d = 2$ м, $c = 2a = 16$ м; действующие на плиту силы: $F = 2000$ кН и $P = 800$ кН. Определить усилия в стержнях.

Решение.- Принимаем к рассмотрению плиту (см. рис.15.28). Изображаем все действующие на неё силы. Заранее установить для всех стержней какой из них сжат, какой растянут, невозможно. По этой причине реакции направляем в предположении растянутости этих стержней, а затем, используя приём отрицательного модуля, уточним.

Вначале попробуйте решить задачу самостоятельно, используя основную форму уравнений равновесия (как это было сделано в примере 15.5).

Если Вы это сделаете, то заметите, что ниже приведенное решение существенно более простое.

Обращаем внимание, что в приведенном решении синусы и косинусы выражены через отношения катетов к гипотенузам соответствующих треугольников и что $CE = CH = AH = OE = 10$ м.

$$\sum m_{z_1} = 0, \quad F \cdot c - R_4 \cdot \frac{OD}{OE} \cdot c = 0 \quad \mapsto \quad R_4 = 2500 \text{ кН.}$$

$$\sum m_{z_2} = 0, \quad P \cdot c + R_3 \cdot \frac{AB}{AH} \cdot c = 0 \quad \mapsto \quad R_3 = -1000 \text{ кН.}$$

Из $\sum X = 0$ находим, что $R_5 = R_6$ и учитываем это в ниже следующем уравнении равновесия:

$$\sum m_x = 0, \quad -G \cdot \frac{c}{2} - P \cdot d - R_6 \cdot \frac{BH}{CH} \cdot a - R_6 \cdot \frac{DE}{CE} \cdot a = 0. \quad \text{Откуда}$$

$$R_5 = R_6 = -1000 \text{ кН.}$$

К условию примера 15.6

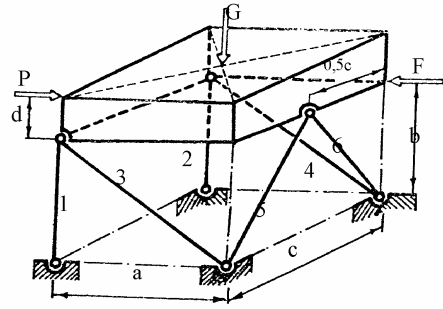


Рисунок 15.27

К решению примера 15.6

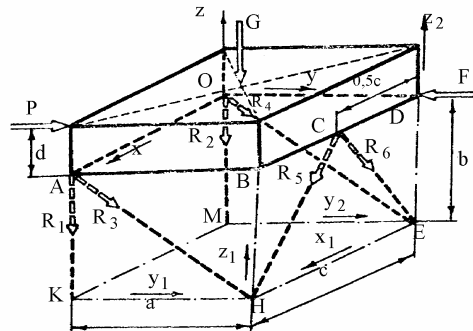


Рисунок 15.28

В следующем уравнении при вычислении момента силы \vec{R}_6 её удобно перенести по линии действия в точку E и разложить по осям X и Z.

$$\sum m_{y1} = 0, \quad -R_2 \cdot c - G \cdot \frac{c}{2} - R_4 \cdot \frac{OM}{OE} \cdot c - R_6 \cdot \frac{DE}{CE} \cdot c = 0. \quad \text{Откуда:}$$

$$R_2 = -1900 \text{ кН.}$$

$$\sum m_y = 0, \quad G \cdot \frac{c}{2} + R_1 \cdot c + R_3 \cdot \frac{AK}{AH} \cdot c + R_5 \cdot \frac{BH}{CH} \cdot c = 0 \quad \mapsto \quad R_1 = 200 \text{ кН.}$$

Итак, стержни 1 и 4 растянуты; 2, 3, 5 и 6 сжаты. Усилия в них равны, соответственно: 200 и 1900; 1000, 2500, 1000 и 1000 кН.

В примере 15.6 при составлении уравнений равновесия брались оси, принадлежащие различным системам отсчёта, что позволило получить решение задачи существенно более простое, чем при использовании одной тройки осей. Такие задачи, допускающие удачный выбор осей, широко распространены в инженерной практике, но в общем случае рассчитывать на подобную простоту не следует.

15.28 | В общем случае можно рассчитывать лишь на возможность выделения из системы 6-ти уравнений равновесия подсистемы 3-х линейно независимых уравнений с тремя неизвестными;

например, можно находить 3 не совпадающие друг с другом и не лежащие в одной плоскости оси, каждая из которых пересекает линии действия одних и тех же трёх неизвестных, не параллельных друг другу сил. Но поиск подобных осей приводит к своим сложностям. Поэтому подход к решению наиболее сложных задач на равновесие тел, находящихся под действием произвольной пространственной системы сил, рассмотрим на примере 15.7.

ПРИМЕР 15.7*.- На произвольную пространственную систему сил, сложный случай

Дано: изображённое на рис.29 тело находится под действием трёх сил ($\vec{P} \uparrow \uparrow x$, $\vec{F} \uparrow \downarrow y$, $\vec{G} \uparrow \downarrow z$; $P = 6\text{кН}$, $F = 8\text{кН}$, вес $G = 4\text{кН}$) и удерживается в равновесии с помощью стержней 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Стержни с взаимодействующими с ними телами соединены сферическими шарнирами, а их положение описано в таблицах 15.1 и 15.2.

К условию примера 15.7

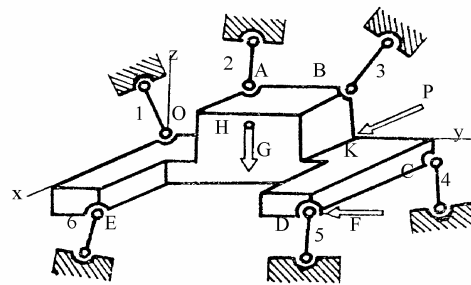


Рисунок 15.29

Табл.15.1 к примеру 15.7 - Координаты точек тела

	O	A	B	C	D	E	H	K
X, см	0	0	0	0	80	80	40	0
Y, см	0	30	70	100	100	20	50	70
Z, см	0	20	20	-10	-10	-10	20	0

Табл. 15.2 к примеру 15.7 - Направляющие косинусы для реакций стержней

	Номера стержней					
	1	2	3	4	5	6
X	$e_{11} = -0,2$	$e_{21} = -0,2$	$e_{31} = 0,5$	$e_{41} = 0$	$e_{51} = 0,3$	$e_{61} = 0,4$
Y	$e_{12} = -0,2$	$e_{22} = 0$	$e_{32} = 0,2$	$e_{42} = 0,3$	$e_{52} = 0,3$	$e_{62} = -0,4$
Z	$e_{13} > 0$	$e_{23} > 0$	$e_{33} > 0$	$e_{43} < 0$	$e_{53} < 0$	$e_{63} < 0$

Определить усилия в стержнях.

Решение.- Принятое к рассмотрению тело и все действующие на него силы изображаем на рис.15.30. Т.к. направляющие косинусы связаны соотношением

$$15.29 \quad | \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \quad \text{то}$$

$$e_{13} = \sqrt{1 - e_{11}^2 - e_{12}^2} \quad \mapsto \quad e_{13} = 0,96.$$

Аналогично вычисляем остальные неизвестные направляющие косинусы:

$$e_{23} = 0,98, \quad e_{33} = 0,842, \quad e_{43} = -0,953,$$

$$e_{53} = -0,905, \quad e_{63} = -0,825.$$

Составляем уравнения равновесия (оси указаны на рис.15.30).

$$\sum X = 0, \quad -0,2R_1 - 0,2R_2 + 0,5R_3 + 0 + 0,3R_5 + 0,4R_6 = -6;$$

$$\sum Y = 0, \quad -0,2R_1 + 0 + 0,2R_3 + 0,3R_4 + 0,3R_5 - 0,4R_6 = 8;$$

$$\sum Z = 0, \quad 0,96R_1 + 0,98R_2 + 0,842R_3 - 0,953R_4 - 0,905R_5 - 0,825R_6 = 4;$$

К решению примера 15.7

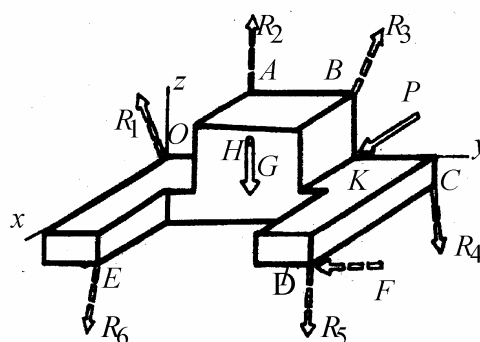


Рисунок 15.30

$$\sum m_x = 0, \quad 0 - 29,4R_2 + 54,9R_3 - 92,3R_4 - 87,5R_5 - 169R_6 = 280;$$

$$\sum m_y = 0, \quad 0 - 4R_2 + 10R_3 + 0 + 69,4R_5 - 62R_6 = -160;$$

$$\sum m_z = 0, \quad 0 + 6R_2 - 35R_3 + 0 - 6R_5 + 40R_6 = 1060.$$

Т.е. получена следующая расширенная матрица системы шести уравнений с шестью неизвестными:

$$\begin{bmatrix} -0,2 & -0,2 & 0,5 & 0 & 0,3 & 0,4 & -6 \\ -0,2 & 0 & 0,2 & 0,3 & 0,3 & -0,4 & 8 \\ 0,96 & 0,98 & 0,842 & -0,953 & -0,905 & -0,825 & 4 \\ 0 & 29,4 & 54,9 & -92,3 & -87,5 & -20,5 & 280 \\ 0 & -4 & 10 & 0 & 69,4 & 62 & -160 \\ 0 & 6 & -35 & 0 & -6 & -40 & 1060 \end{bmatrix}$$

Используя стандартные программы компьютерной техники, получаем:

$$R_1 = -11,74; R_2 = 3,732; R_3 = -9,395; R_4 = -19,44; R_5 = 17,43; R_6 = -20,33 \text{ (кН)}.$$

Вначале решения задачи принималось, что все стержни растянуты. В результате полученного решения видим:

стержни 2 и 5 растянуты; 1, 3, 4, 6 - сжаты.

С целью проверки правильности компьютерного решения системы уравнений, полученные результаты подставляем в составлявшие уравнения равновесия и вычисляем невязки (разности между левыми и правыми частями).

При правильном решении свободные члены должны на несколько порядков превышать невязки. В рассматриваемом примере так оно и есть. Поэтому полученное компьютерное решение системы уравнений равновесия достоверно.

15.6. Равновесие сложных устройств, состоящих из просто сочленённых частей

15.30 | Устройство из просто сочленённых частей – это механическая система, позволяющая находить такие последовательности рассмотрения её частей, при которых каждая из составленных систем уравнений равновесия даёт возможность определить все, входящие в неё, неизвестные реакции связей.

Рассмотрим этот, часто встречающийся, тип задач на трёх примерах (15.8, 15.9 и 15.10).

ПРИМЕР 15.8.- Конструкция, состоящая из просто сочленённых частей; плоская система сил, простейший случай

Дано: конструкция по рис.15.31; вес $G = 60 \text{ кН}$; $\alpha = 30^\circ$, остальные размеры указаны на рисунке.

Определить составляющие реакции в шарнире С, на опоре D и в заделке E.

Решение.- Принимаем к рассмотрению вначале балку АВ, затем CD и, наконец, ЕС (см. рис.15.32).

Для балки АВ:

$$\sum m_A = 0 \quad \mapsto \quad R_B = 40 \text{ кН.}$$

$$\sum m_B = 0 \quad \mapsto \quad Y_A = 20 \text{ кН.}$$

$$\sum X = 0 \quad \mapsto \quad X_A = 0.$$

Для балки CD:

$$\sum m_D = 0 \quad \mapsto \quad Y_C = 16 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 0 \quad \mapsto \quad R_D = 27,7 \text{ кН.}$$

$$\sum X = 0 \quad \mapsto \quad X_C = 13,85 \text{ кН.}$$

Для консольно закреплённой балки ЕС:

$$\sum X = 0 \quad \mapsto \quad X_E = 13,85 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 0 \quad \mapsto \quad Y_E = 36 \text{ кН.}$$

Из $\sum m_E = 0$ определяем момент в заделке - $M = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Из полученных результатов видно, что направления реакций совпадают с указанными на рисунке.

ПРИМЕР 15.9.- Конструкция, состоящая из просто сочленённых частей;

иллюстрация способа вырезания узлов

Дано: стержневая система по рис.15.33;

вес $G = 10 \text{ кН}$; ABCDOMEN – куб с ребром $a = 1 \text{ м}$; нить ЕС и блок К расположены в плоскости ОМЕН.

Определить усилия в стержнях.

К условию примера 15.8

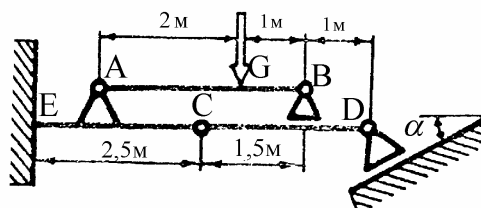


Рисунок 15.31

К решению примера 15.8

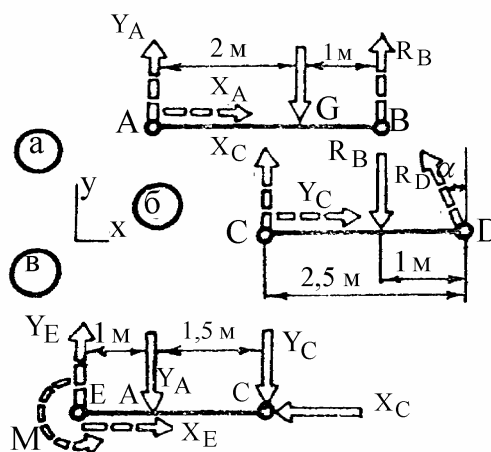


Рисунок 15.32

К условию примера 15.9

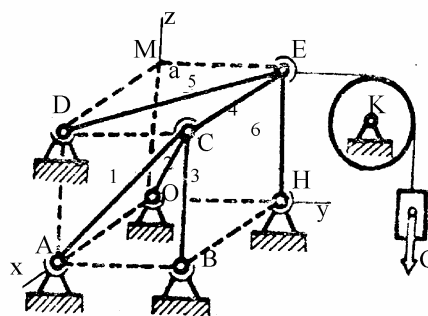


Рисунок 15.33

Решение.- Вначале рассматриваем блок (см. рис. 34а) с прилегающим к нему участком натянутой нити:

$$\sum m_K = 0 \mapsto F = G.$$

Теперь принимаем к рассмотрению узел E – механическую систему, заключённую в замкнутую оболочку γ (см. рис.15.34б):

$$\sum Z = 0 \mapsto R_6 = 0;$$

$$\sum Y = 0 \mapsto R_5 = 14,1 \text{кН.}$$

$$\sum X = 0 \mapsto R_4 = -10 \text{кН.}$$

К решению примера 15.9

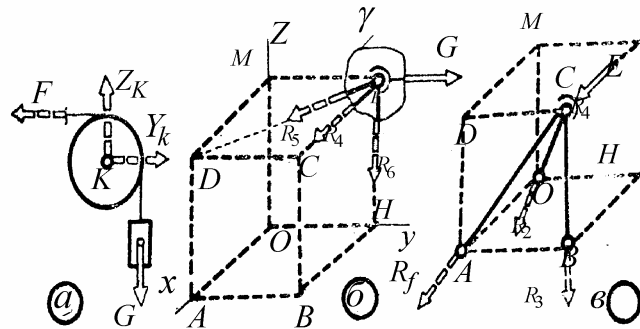


Рисунок 15.34

Наконец, принимаем за тело тройку изображённых на рис. 34в стержней (при этом, реакцию R_4 направляем с учётом того, что стержень 4 сжат; это установлено выше) и составляем для них соответствующие уравнения равновесия:

$$\sum m_x = 0 \mapsto R_3 = 0;$$

$$\sum X = 0 \mapsto R_2 = 17,3 \text{кН};$$

$$\sum Y = 0 \mapsto R_1 = -14,1 \text{кН.}$$

ПРИМЕР 15.10.- *Плоская ферма, иллюстрация приёма сечений*

Дано: стержневая система по рис.15.35, которую принято называть плоской фермой; длины стержней одинаковы – по 1м; $P = 80$ кН.

Определить усилия в стержнях 1, 2 и 3.

Решение.- Принимаем к рассмотрению вначале ферму в целом (см. рис. 36а), затем тело по рис.36б.

Для фермы в целом:

$$\sum m_B = 0 \mapsto Y_A = 30 \text{кН.}$$

К условию примера 15.10

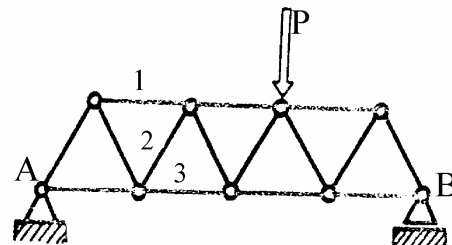


Рисунок 15.35

Для тела по рис.15.36б:

$$\sum m_D = 0 \rightarrow R_1 = -34,7 \text{ кН};$$

$$\sum m_C = 0 \rightarrow R_3 = 52 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow R_2 = -34,7 \text{ кН}.$$

Рассмотренный в примере 10 приём сечений в литературе часто называют «способом Риттера».

К решению примера 15.10

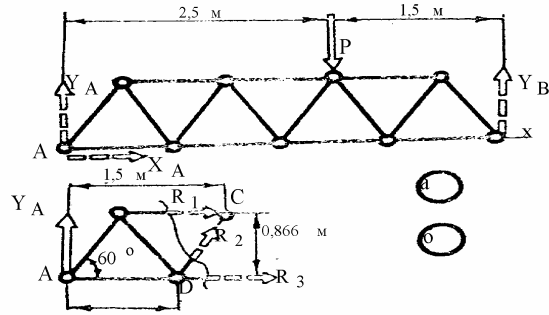


Рисунок 15.36

15.7. Понятие о статически определимых и статически неопределимых задачах. Равновесие конструкций, состоящих из сложно сочленённых частей

15.31

Статически определимые механические системы – это такие, для нахождения реакций связей в которых достаточно лишь уравнений статики.

Наряду со статически определимыми, в инженерной практике встречаются и

15.32

статически неопределимые механические системы – это такие, для нахождения реакций связей в которых недостаточно лишь уравнений статики.

Приводим два примера таких задач.

ПРИМЕР 15.11. - *Иллюстрация статически неопределимой задачи, случай температурной деформации*
Дано: в просвет массивной, и поэтому недеформирующейся от силового воздействия, скобы вставляется стальной цилиндр (см. рис.15.37) при условиях - скоба имеет температуру $t'_1 = 20^\circ \text{C}$; цилиндр перед его вставлением в просвет скобы охлаждён до температуры $t'_2 = -30^\circ \text{C}$; высота цилиндра и просвет в скобе при указанных температурах одинаковы - $l'_2 = l'_1 = 100 \text{ мм}$; площадь поперечного сечения

К примеру 15.11

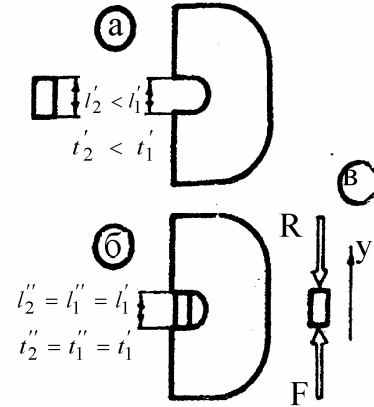


Рисунок 15.37

цилиндра $H = 5 \text{ см}^2$. В собранном состоянии температура цилиндра повышается до температуры скобы (до $t_2'' = t_1'' = t_1' = 20^\circ \text{ C}$).

Определить усилия, сжимающие цилиндр после выравнивания температур.

Решение.- Принимаем к рассмотрению цилиндр (см. рис. 37В).

Для него можно составить лишь одно уравнение равновесия, из которого получается $R = F$. Но определить числовое значение этих сил с помощью лишь уравнений статики не удастся.

Однако, это не означает, что инженеры не могут решать подобного типа задачи. Их методы решения рассматриваются в курсе сопротивления материалов. Для данной задачи окажется:

$R = F = H \cdot E \cdot \alpha \cdot (t_2'' - t_2') = 5 \cdot (2 \cdot 10^6) \cdot (1,2 \cdot 10^{-5}) \cdot [(20 - (-30))] = 6000 \text{ кгс}$,
где α и E - так называемые коэффициент линейного расширения и модуль упругости первого рода для стали (для материала цилиндра).

ПРИМЕР 15.12.- *Иллюстрация статически неопределимой задачи - растяжение узла стержней*

Дано: стержни 1, 2 и 3 выполнены из одного материала, имеют одинаковые поперечные сечения, расположены в одной плоскости и шарнирно соединены в узле О (рис.15.38); $\alpha = 45^\circ$, $G = 1000 \text{ Н}$; при отсутствии груза усилия в стержнях равны нулям.

Определить усилия в стержнях 1, 2 и 3.

Решение.- Принимаем к рассмотрению узел О (см. рис. 15.38б). Для него можно составить лишь два линейно независимых уравнения равновесия, но в них войдет 3 неизвестные – усилия в стержнях R_1, R_2, R_3 .

Вновь (как и в примере 15.11), это не означает, что инженеры не могут решать подобного типа задачи – дополнив составленные уравнения равновесия так называемым уравнением совместности деформаций (привлекая знания курса сопротивления материалов) можно вычислить:

$$R_1 = R_3 = 293 \text{ Н}, \quad R_2 = 586 \text{ Н}.$$

В инженерной практике встречаются такие сочленённые из отдельных частей конструкции, когда из всех возможных вариантов не находится ни одного, который бы позволил определить всю совокупность неизвестных реакций,

К примеру 15.12

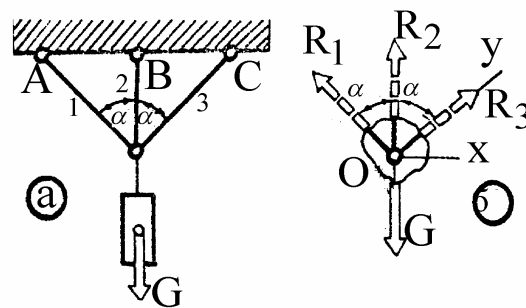


Рисунок 15.38

цилиндра $H = 5 \text{ см}^2$. В собранном состоянии температура цилиндра повышается до температуры скобы (до $t_2'' = t_1'' = t_1' = 20^\circ \text{ C}$).

Определить усилия, сжимающие цилиндр после выравнивания температур.

Решение.- Принимаем к рассмотрению цилиндр (см. рис. 37в).

Для него можно составить лишь одно уравнение равновесия, из которого получается $R = F$. Но определить числовое значение этих сил с помощью лишь уравнений статики не удастся.

Однако, это не означает, что инженеры не могут решать подобного типа задачи. Их методы решения рассматриваются в курсе сопротивления материалов. Для данной задачи окажется:

$R = F = H \cdot E \cdot \alpha \cdot (t_2'' - t_2') = 5 \cdot (2 \cdot 10^6) \cdot (1,2 \cdot 10^{-5}) \cdot [(20 - (-30))] = 6000 \text{ кгс}$,
где α и E - так называемые коэффициент линейного расширения и модуль упругости первого рода для стали (для материала цилиндра).

ПРИМЕР 15.12.- *Иллюстрация статически неопределимой задачи - растяжение узла стержней*

Дано: стержни 1, 2 и 3 выполнены из одного материала, имеют одинаковые поперечные сечения, расположены в одной плоскости и шарнирно соединены в узле О (рис.15.38); $\alpha = 45^\circ$, $G = 1000 \text{ Н}$; при отсутствии груза усилия в стержнях равны нулям.

Определить усилия в стержнях 1, 2 и 3.

Решение.- Принимаем к рассмотрению узел О (см. рис. 15.38б). Для него можно составить лишь два линейно независимых уравнения равновесия, но в них войдет 3 неизвестные – усилия в стержнях R_1, R_2, R_3 .

Вновь (как и в примере 15.11), это не означает, что инженеры не могут решать подобного типа задачи – дополнив составленные уравнения равновесия так называемым уравнением совместности деформаций (привлекая знания курса сопротивления материалов) можно вычислить:

$$R_1 = R_3 = 293 \text{ Н}, \quad R_2 = 586 \text{ Н}.$$

В инженерной практике встречаются такие сочленённые из отдельных частей конструкции, когда из всех возможных вариантов не находится ни одного, который бы позволил определить всю совокупность неизвестных реакций,

К примеру 15.12

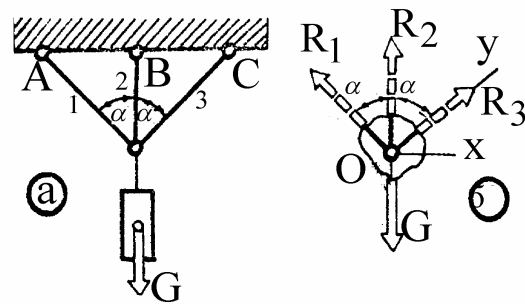


Рисунок 15.38

ПРИМЕР 15.14.- На конструкцию из сложно сочленённых частей; система сил плоская; в рассматриваемой теме задача средней тяжести

Дано: части соединены как указано на рис.15.40; известны все активные силы - $\vec{P}, \vec{F}, \vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3, \vec{G}_4$ и геометрические размеры - α, β, γ ; KS, BE, AD, AB, AC и т.д.

Определить реакции в сочленениях А, В, С, D, E, К (ограничиться составлением схемы решения – без алгебраических подробностей и вычислительных операций записать одну, из многих возможных, последовательность рассмотрения уравнений равновесия, приводящую к определению реакций в сочленениях А, В, С, D, E, К).

Решение.- Принятые к рассмотрению тела изображены на рис. 15.40а,б,в,г. При этом, горизонтальная и вертикальная реакции угловой опоры К вначале приведены к равнодействующей, которая, затем, представлена составляющими \vec{T}_2, \vec{N}_2 . Аналогично, в виде двух составляющих, представлены и реакции угловой опоры E.

Для тела AD: $\sum m_A = 0 \mapsto N_1 = \dots;$

$\sum m_D = 0 \mapsto N_{14} = \dots$

Для тела СК: $\sum m_C = 0 \mapsto N_2 = \dots;$

$\sum m_K = 0 \mapsto N_{24} = \dots$

Для тела BE: $\sum m_B = 0 \mapsto N_3 = \dots;$

$\sum m_E = 0 \mapsto N_{34} = \dots$

Для тела СВ: $\sum m_M = 0 \mapsto T_{14} = \dots; \sum m_L = 0 \mapsto T_{34} = \dots; \sum m_H = 0 \mapsto T_{24} = \dots$

И, наконец, из $\sum X = 0$ для тела AD, из $\sum Y = 0$ для тела СК и из $\sum Z = 0$ для тела BE, находятся силы $\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{T}_3$.

К условию примера 15.14

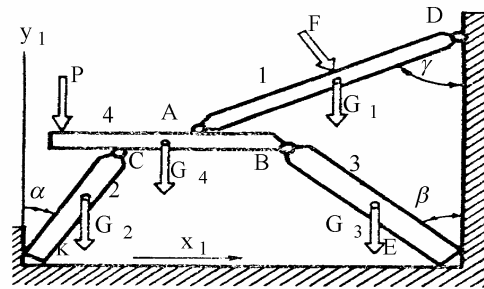


Рисунок 15.40

К решению примера 15.14

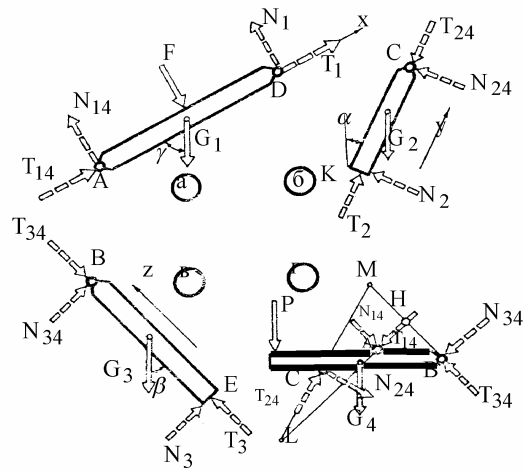


Рисунок 15.41

15.8. Явления сопротивления скольжению и качению тел. Формы их учёта в инженерно-расчётной практике

Сущность явления сопротивления скольжению тел ясна из изображений, представленных на рис.15.42. На рис.15.42б: G – вес тела, $Q_1 = Q_2$ - веса чаш для гирь; Q – суммарный вес набора размещённых в чаше гирь (рассматривается как переменная величина); весами нитей и сопротивлением в блоках пренебрежено (ввиду их малости).

В общем случае G и Q не обязательно веса тела и набора гирь. В общем случае \vec{G} - перпендикулярная, а \vec{Q} - параллельная опорной поверхности составляющие равнодействующей приложенных к телу активных сил (всех внешних сил, за исключением реакции опорной поверхности).

Будем называть: \vec{G} - прижимающая и \vec{Q} - побуждающая проскальзывание силы. При наличии скольжения тела A по опорной поверхности \vec{Q} называют движущей силой.

\vec{F} и \vec{N} - составляющие равнодействующей реакции опорной поверхности; \vec{N} - нормальная реакция; \vec{F} - сопротивление проскальзыванию.

В зависимости от кинематического состояния тела \vec{F} называют либо силой сцепления - \vec{F}_c (когда тело покоится), либо силой трения скольжения - $\vec{F}_{тр}$ (когда тело скользит по опорной поверхности).

График по рис. 15.42в отображает результаты экспериментального изучения явления сопротивления скольжению (при этом, на графике модули сил \vec{Q} и \vec{F} изображены в одном масштабе). $Q_{кр}$ - критическое значение силы, побуждающей проскальзывание тела (характеризуется тем, что бесконечно малое превышение этого значения приводит тело в движение).

При учёте явления сопротивления скольжению оперируют также понятиями «коэффициент сцепления» и «коэффициент трения скольжения».

К вопросу о сопротивлении скольжению тела

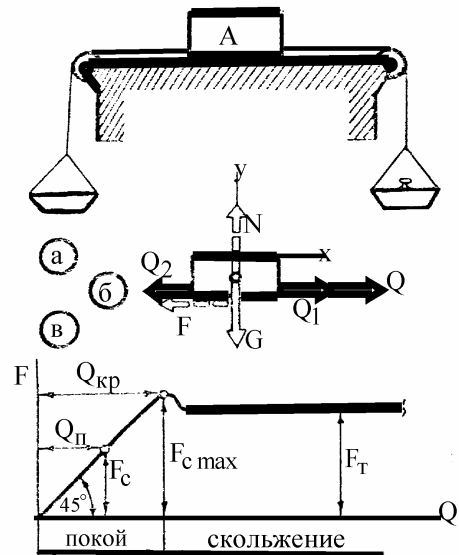


Рисунок 15.42

15.34	Коэффициент сцепления (ψ) - это безразмерная величина, равная отношению модуля силы сцепления к модулю нормальной составляющей реакции опорной поверхности.	$\psi = \frac{F_C}{N}$
15.35	Коэффициент трения скольжения (f) - это безразмерная величина, равная отношению модуля силы трения скольжения к модулю нормальной составляющей реакции опорной поверхности.	$f = \frac{F_{\text{тр}}}{N}$

Изучением трения учёные занимаются с давних пор. В частности, в трудах Герона Александрийского (Греция; жил примерно в 1-2 веках н.э.) имеются рекомендации смазывать жирами и маслами колёса театральных механизмов; имеются рекомендации в каких случаях в трущихся соединениях применять железо, и в каких медь. Понятие о коэффициенте трения скольжения найдено в трудах Леонардо да Винчи (Италия; годы жизни – 1452-1519), который он рекомендовал принимать равным 0,25.

К началу 3-го тысячелетия накопилось много попыток создания теорий трения - адгезионная, молекулярная, молекулярно-кинетическая, адгезионно-деформационная, энергетическая и др. Выявлено, что коэффициент трения скольжения зависит от материалов соприкасающихся тел, от разделяющих их окисных плёнок, покрытий, смазочных материалов, от макрогеометрии соприкасающихся поверхностей (одно дело, когда тела соприкасаются по плоскостям и другое, когда по цилиндрическим желобам; этот вопрос подробнее рассматривается в курсе теории механизмов и машин), от микрогеометрии соприкасающихся поверхностей, от удельных давлений, скоростей скольжения, температуры и других факторов.

Но, несмотря на всё это, теория трения ещё далека от своего совершенства. И в то же время инженеры обязаны уметь решать конкретные технические задачи с учётом трения и не когда-нибудь, а сегодня. И они умеют это делать. Быть может не столь точно и изящно, с учётом многофакторности, как это будет делаться в четвёртом тысячелетии, но умеют (с достаточной для большинства случаев практики точностью).

Сегодня в инженерно-расчётной практике учёт трения скольжения базируется на следующих 2-х предпосылках:

15.36 | в конкретно встречающихся случаях существуют относительно широкие интервалы значений нормальных реакций, когда коэффициенты трения скольжения могут считаться постоянными (т.е. изменяющаяся в некотором интервале величина заменяется средним её значением);

15.37 | коэффициент трения скольжения практически равен максимальному значению коэффициента сцепления.

При этом, значения коэффициентов трения скольжения определяют из специальной и справочной литературы, либо проводят специальные опыты (см. с. 185-186) и затем опираются на полученные в них результаты. Но вопрос о выборе коэффициентов трения скольжения не является предметом теоретической механики и в дальнейшем будем считать их заданными.

Заметим лишь, что при использовании литературных данных и результатов специально проводившихся опытов по определению коэффициентов трения скольжения, необходимо соблюдать осторожность – можно учесть n факторов (материалы соприкасающихся тел и их покрытия, тип смазки и пределы изменения удельного давления, макро- и микрогеометрию и т.д.), но упустить $(n + 1)$ -й, например при трении полозьев о снег не учесть его плотность, или температуру воздуха, или скорость скольжения, и получить коэффициент трения скольжения на порядок и более отличающийся от действительного его значения.

При решении задач на равновесие тел с учётом сил сопротивления скольжению удобно использовать

15.38 | условие сохранения покоя тела - $Q = F_c < F_{тр}$

(из рис.15.42б видно, что 15.38 получается из условия равновесия $\sum X = 0$).

При расчётах с учётом сопротивления скольжению используют также понятия «угол трения» и «конус трения».

Угол трения (на рис.15.43а - φ) – это угол между полной реакцией (\vec{R}) опорной поверхности и нормальной (\vec{N}) её составляющей при наличии скольжения тела. Из введенных понятий следует, что

15.39 | тангенс угла трения равен коэффициенту трения скольжения, т.е. $\operatorname{tg}\varphi = f$.

К вопросу об угле и конусе трения

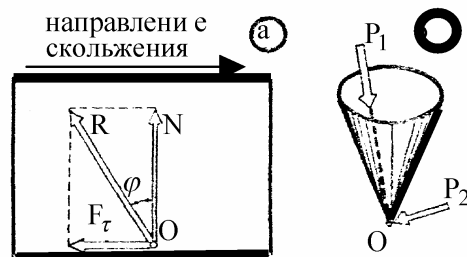


Рисунок 15.43

Если движущей силе придать всю совокупность возможных направлений, то отрезок OR (по рис. 15.43а) опишет конус. Чаще всего он оказывается круговым – см. рис.15.43б).

Из понятия «конус трения» и опорного факта 15.38 следует:

15.40

если равнодействующая от прижимающей (\vec{G}) и побуждающей скольжение (\vec{Q}) сил находится внутри конуса трения (на рис.43б см. \vec{P}_1), то покоящееся тело не может быть выведено из этого состояния, независимо от значения модуля этой равнодействующей; прижимаемое к опорной поверхности тело из состояния покоя может быть выведено лишь в том случае, если равнодействующая от прижимающей и побуждающей скольжение сил расположена внешним образом к конусу трения (на рис.15.43б см. \vec{P}_2).

Подробное рассмотрение явления самоторможения тел не является предметом теоретической механики. Заметим лишь, что его не следует абсолютизировать – надо подходить конкретно и здраво. Если активные силы строго постоянны, то теоретическое предсказание явления самоторможения высоко-доверительно. При наличии же вибраций ими нельзя пренебрегать. В частности, рекомендуем помнить, что составители нормативных документов, определяющих безопасную эксплуатацию ответственных машин, весьма осторожно относятся к явлению самоторможения. Так, для грузоподъёмных механизмов использование явления самоторможения допускается лишь при обязательном наличии в конструкции ещё и тормоза. Нельзя игнорировать и тот факт, что идя вдоль проезжей части дороги вы то в одном, то в другом месте обнаруживаете валяющиеся гайки и болты, принадлежавшие когда-то проезжавшим здесь автомобилям и велосипедам - обнаруживаете детали соединений, которые обычно принято считать самотормозящимися.

В технике широко распространены сочленения с перекатывающими друг по другу телами – колёса транспортных средств катятся по железным и автомобильным дорогам; по дорожкам подшипников качения катятся шарики и ролики (цилиндрические, конические, бочкообразные, игольчатые; стальные и нестальные; сплошные, витые; и прочие).

К вопросу о сопротивлении тел качению

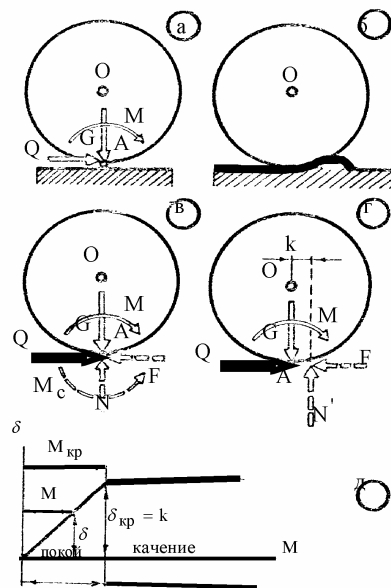


Рисунок 15.44

Тела качения, несмотря на их конструктивные различия, могут быть объединены одним геометрическим образом - катком - цилиндром, расположенным на горизонтальной плоскости - см. рис.15.44, где O – центр катка, A – точка касания катка с опорной поверхностью (в предположении абсолютной твёрдости соприкасающихся тел).

Действующие на каток активные силы (без учёта реакции опорной поверхности) приведём к точке A . При этом, обозначим и назовём:

\vec{G} - прижимающая каток сила (часто – это часть веса машины);

\vec{Q} - побуждающая проскальзывание сила;

\vec{M} - поворачивающий момент.

Опыт показывает (см. рис.15.44д): если поворачивающий момент \vec{M} не превосходит некоторого предельного значения, каток покоится. Объясняется это образованием микроволны (впереди катка – см. рис.15.44б), а также явлением прилипания (образованием, с последующим разрывом, мостиков сварки между отдельными микроплощадками позади катка – окисные плёнки на микропиках взаимодействующих поверхностей разрушаются в местах контакта и между появляющимися ювенильными поверхностями начинают действовать молекулярные силы).

По причине упругих деформаций взаимодействующие тела соприкасаются по поверхности, имеющей хотя и малую, но конечную площадь. Распределённую по контактной площадке реакцию на каток также приводим к точке A (на рис.44в см. \vec{M}_c , \vec{N} и \vec{F}). Назовём:

\vec{M}_c - момент сопротивления качению;

\vec{N} - нормальная несмещённая реакция на каток;

\vec{F} - сопротивление проскальзыванию (сила сцепления - когда проскальзывания нет; сила трения скольжения - когда тело проскальзывает по опорной поверхности).

С целью перехода к рассмотрению главной расчётной величины, характеризующей качение тел, момент сопротивления качению \vec{M}_c и нормальную несмещённую реакцию на каток \vec{N} приводим к одной силе, что представлено на рис.15.44г - равнодействующая от \vec{N} и пары с моментом \vec{M}_c обозначена \vec{N}' . Она оказалась параллельна AO и смещена относительно O на

$$\delta = \frac{M_c}{N}.$$

\vec{N}' будем называть «нормальной смещённой реакцией на каток».

То значение момента M_c , при котором тело начинает катиться, называют критическим значением момента сопротивления качению (на рис.15.44д - $M_{кр}$).

15.41 | Плечо нормальной смещённой реакции на каток, соответствующее критическому значению момента сопротивления качению, называют коэффициентом трения качения (k). $k = \frac{M_{кр}}{N}$

В отличие от безразмерного коэффициента трения скольжения, коэффициент трения качения измеряется в единицах длины - обычно в сантиметрах. По этой причине k можно называть «плечом сопротивления качению».

Значения коэффициентов трения качения определяют из справочной литературы, либо по результатам специально поставленных опытов.

Вопрос о выборе коэффициентов трения качения не является предметом теоретической механики и в дальнейшем считаем их заданными. Заметим лишь (как и для коэффициентов трения скольжения), что при выборе коэффициентов трения качения необходимо соблюдать осторожность; в частности, можно встретить рекомендацию – «коэффициент трения качения колеса по рельсу» (в других источниках – «мягкой стали по мягкой стали») равен 0,005см, но из других, более доверительных источников, узнать, что, например в случае качения ходовых колёс подъёмных кранов, эта величина находится в интервале 0,03-0,12см и зависит, кроме материалов взаимодействующих тел, от диаметра колёс и типа рельса.

Из изложенного без дополнительных рассуждений видно, что

15.42 | условием отсутствия качения является соотношение $M < k \cdot N$
условие же качения - $M \geq k \cdot N$

ПРИМЕР 15.15.- *На трение качения*

Дано: установили, что коэффициент трения качения труб по настилу с достаточным уровнем надёжности не будет превышать 0,15см; диаметры самокатящихся труб будут не менее 6 см.

Определить минимальный угол наклона настила, обеспечивающего самотранспортировку труб.

Решение.- Изображаем силы, действующие на каток – см. рис. 15.45. Модуль поворачивающего момента:

$$M = G \cdot R \cdot \sin\alpha .$$

Модуль нормальной реакции (из $\sum Y = 0$): $N = G \cdot \cos\alpha .$

Из условия качения: $G \cdot R \cdot \sin\alpha \geq k \cdot G \cdot \cos\alpha .$ Откуда $\text{tg}\alpha \geq 0,05 .$

К примеру 15.15

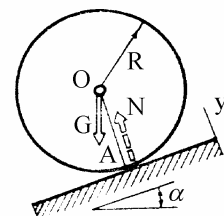


Рисунок 15.45

ПРИМЕР 15.16.- На сопоставление трения скольжения с трением качения

К условию примера 15.16

Дано: имеется две возможности перемещения тела весом $G = 100 \text{ кН}$ по горизонтальной поверхности (см. рис. 15.46), - волоком по стальному листу (с коэффициентом трения скольжения $f = 0,2$) и на трубках, диаметром $d = 4 \text{ см}$; коэффициенты трения качения трубок по телу и по опорной поверхности одинаковы - $k' = k'' = k = 0,01 \text{ см}$.

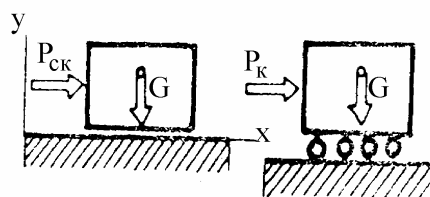


Рисунок 15.46

Определить модули движущих сил по первому ($P_{СК}$) и второму ($P_к$) вариантам перемещения заданного тела.

Решение.- Для перемещения волоком:

$$P_{СК} = f \cdot G = 0,2 \cdot 100 = 20 \text{ кН.}$$

К решению примера 15.16

Теперь рассматриваем вариант качения. На рис.15.47а:

$M'_v, N'_v, F'_v; M''_v, N''_v, F''_v$ - моменты сопротивления, нормальные несмещённые реакции и силы сцепления, действующие на v -тую трубку в точках А и В соприкосновения с перемещаемым телом и полом.

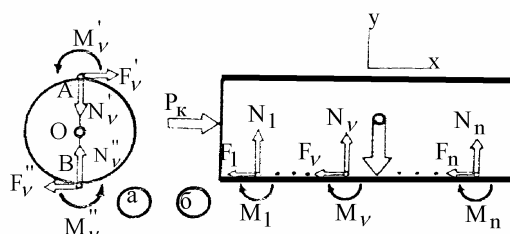


Рис.47

Вначале установим связь между F'_v и N'_v . С этой целью для v -той трубки:

$$\sum X = 0 \mapsto F'_v = F''_v = F_v;$$

$$\sum Y = 0 \mapsto N'_v = N''_v = N_v;$$

из условия её качения: $M'_v = M''_v = k \cdot N_v = M_v$. И теперь, из $\sum m_o = 0$,

$$F_v = \frac{k}{R} \cdot N_v.$$

Принимаем к рассмотрению перемещаемое тело (см. рис.15.47б). Изображаем действующие на него активные силы - \vec{G} и $\vec{P}_к$, а также реакции трубок (n - их количество). Из $\sum Y = 0$ $G = \sum_{v=1}^n N_v$; и, наконец, из $\sum X = 0$,

$$P_к = \sum_{v=1}^n F_v = \frac{k}{R} \cdot \sum_{v=1}^n N_v = \frac{k}{R} \cdot G = \frac{0,01}{2} \cdot 100 \text{ кН, что в 40 раз меньше}$$

силы, требующейся для перемещения этого тела волоком.

Раздел II. КИНЕМАТИКА

16. Предмет изучения и основные задачи

Кинематика – это часть теоретической механики, в которой вводят пространственно-временные характеристики движения объектов (скорость, ускорение; для точки, тела), а также исследуют те связи между ними, которые не зависят от массовых и силовых характеристик.

Пространственно-временные характеристики движущихся объектов зависят от места расположения наблюдателя.

2 основные задачи кинематики:

1) изучение прямых и обратных связей между различными пространственно-временными характеристиками движения объектов относительно одной системы отсчёта (например, между скоростями и ускорениями точки);

2) изучение связей между однотипными пространственно-временными характеристиками движущегося объекта (например, между скоростями) с позиций наблюдателя, находящегося в различных системах отсчёта.

17. Простое движение точки

В данном разделе будет рассмотрена первая основная задача кинематики применительно к точке.

17.1. Способы математического описания движения точки

Простейшими и наиболее используемыми в инженерной практике являются векторный, естественный и координатный (иначе: прямоугольно-декартовый) способы математического описания движения точки.

Векторный способ включает в себя понятие «радиус-вектор движущейся точки» (кратко – «радиус-вектор»; обозначают \vec{r} или $\vec{\rho}$) - это вектор, исходящий из начала системы отсчёта и заканчивающийся в точке, пространственно-временные характеристики которой определяются (см. рис.17.1).

К векторному, естественному и координатному способам задания движения точки

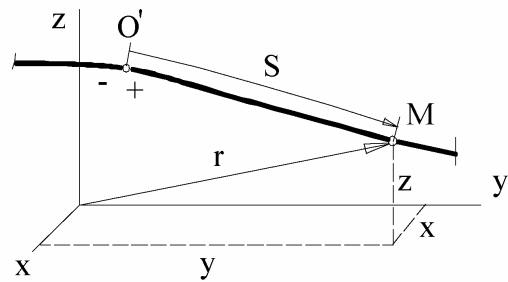


Рисунок 17.1

Если хотят подчеркнуть, что радиус-вектор является функцией времени, то алгебраически это записывают: $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

17.1 Движение точки считается описанным векторным способом, если в заданной системе отсчёта определена* функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$;

* - «функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определена» означает, что для любого момента времени (из заданного интервала его изменения) можно указать как направлен вектор \vec{r} и чему равна его длина.

Естественный способ описания движения тесно связан с человеческой деятельностью - вытекает из практической потребности рассмотрения перемещений по железным и автомобильным дорогам, по рекам, горным и лесным тропам, по пещерам и горным выработкам, по направляющим станков, т.е.

17.2 Движение точки считается описанным естественным способом (см. рис.17.1), если для неё определены траектория (γ), координата $s = s(t)$ вдоль траектории (которая является алгебраической величиной), начало её отсчёта (O'), положительное (+) или отрицательное (-) направления;

траектория – это непрерывная линия, образованная точками системы отсчёта, вдоль которой перемещается движущаяся точка M .

17.3 Движение точки считается описанным прямоугольно-декартовым (иначе: координатным) способом (см. рис.17.1), если для неё определены как функции времени абсцисса (x), ордината (y) и аппликата (z), т.е. если оказываются известными три функции - $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Для определения положения точки в пространстве можно придумать (и существует) много других систем отсчёта. На рис.17.2 изображена косоугольная система координат. S_1, S_2, S_3 - её оси; $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}$ - межосевые углы (в общем случае отличающиеся от 90°); координатами точки M в системе $S_1 S_2 S_3$ являются $S_1 = aM$; $S_2 = bM$; $S_3 = cM$.

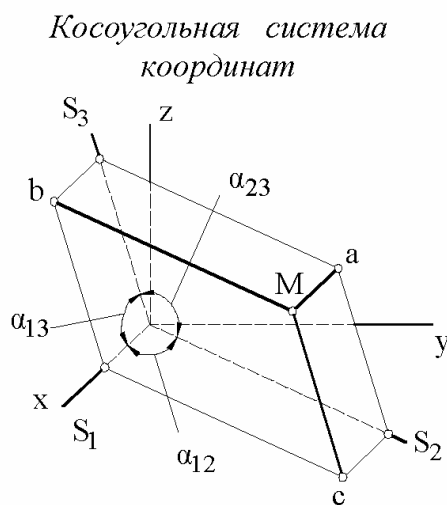


Рисунок 17.2

На рис.17.3 изображена цилиндрическая система координат. В ней M - движущаяся точка; m принадлежит плоскости xOy ; $Mm \perp xOy$.

Цилиндрическими координатами точки M являются: z - аппликата; ρ - полярный радиус; φ - полярный угол.

Положение точки M можно определить и сферическими координатами (см. тот же рис.17.3): Θ - широта; r - расстояние до точки.

При $\Theta = const = 90^\circ$ сферическая и цилиндрическая системы координат вырождаются в полярную: O - полюс; x - полярная ось; φ - полярный угол; ρ - полярный радиус.

Для описания положения точки применяют также эллиптические, параболические, тороидальные и другие системы координат.

К понятиям «цилиндрическая», «сферическая» и «полярная» системы координат

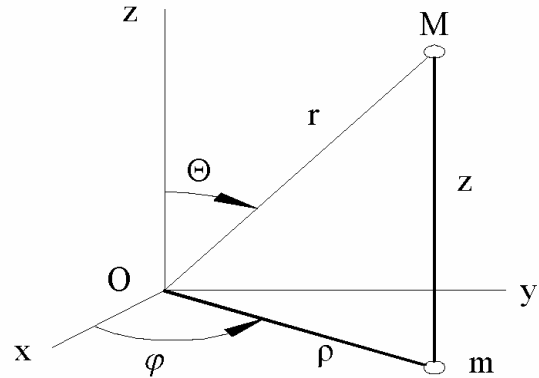


Рисунок 17.3

17.4

Если движение точки описано способом, отличающимся от тройки простейших – векторного, естественного и координатного, то будем говорить: «движение точки задано обобщённо-координатным способом»;

общий подход, с иллюстрацией примером, к определению скоростей и ускорений точек при обобщённо-координатном способе описания движения рассматривается в подразделе 17.5.

К понятию о скорости точки

17.2. Понятия о скорости и ускорении точки

На рис.17.4: A, B - точки траектории, в которых движущаяся точка M находится в моменты времени t_1, t_2 . Соответствующие им радиус-векторы обозначены \vec{r}_1, \vec{r}_2 .

Понятия скорости и ускорения точки являются конкретными приложениями уже известных студентам понятий и правил векторной алгебры.

В соответствии с ними записываем:

$$\vec{r}_1 + \overrightarrow{AB} = \vec{r}_2 \quad \mapsto \quad \overrightarrow{AB} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

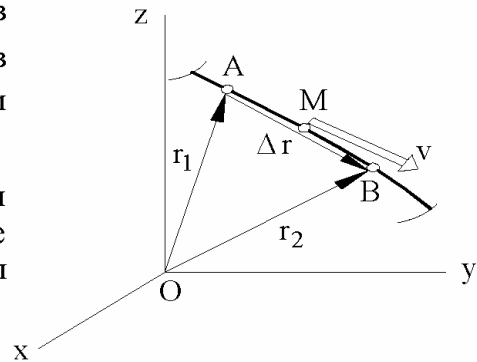


Рисунок 17.4

Разность $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ принято обозначать $\Delta\vec{r}$ и называть приращением радиус-вектора \vec{r} (за промежуток времени $t_2 - t_1 = \Delta t$). Иначе: $\Delta\vec{r}$ - это вектор перемещения точки M за промежуток времени Δt .

17.5 Средняя скорость точки (на заданном промежутке времени Δt) – это кинематическая мера, математически определяемая как частное от деления вектора перемещения точки на соответствующий ему промежуток времени Δt , т.е.

$$\vec{v}_{12} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}, \quad \vec{v}_{23} = \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{t_3 - t_2}, \quad \vec{v}_{34} = \frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_3}{t_4 - t_3} \quad \text{и т.д.}$$

Для мысленно представляемого множества средних скоростей применяют запись:

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Наряду со средней, в практике используется и понятие «мгновенная скорость». В частности, она является одним из основных критериев безопасности движения транспортных средств.

При $\Delta t \rightarrow 0$ $\Delta\vec{r}$ также стремится к нулю. При таком условии $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ называют вектором элементарного перемещения движущейся точки и обозначают $d\vec{r}$.

17.6 Мгновенная скорость точки в некоторый момент времени $t = \Theta$ – это кинематическая мера, математически определяемая как предел, к которому стремится средняя скорость на промежутке времени $t_2 - t_1 \rightarrow 0$, содержащему Θ . Скорость точки: -

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- это непрерывное множество мгновенных её скоростей (при $t = \Theta'$ $\vec{v} = \vec{v}'$; при $t = \Theta''$ $\vec{v} = \vec{v}''$; при $t = \Theta'''$ $\vec{v} = \vec{v}'''$; и т.д.)

17.7 С целью сокращения письма математики производные отображают штрихами. В теоретической механике наиболее часто встречаются производные по времени. Их выделяют из остальных переменных и обозначают иначе - точками над буквами - $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$.

Исходя из понятий «скорость точки», «элементарное её перемещение», «траектория» (как линия) и «касательная к линии» получаем:

17.8 | скорость движущейся точки направлена по касательной к траектории (по касательной в той точке траектории, в которой в рассматриваемый момент времени находится движущаяся точка).

Переходим к введению второго базового понятия кинематики – к понятию «ускорение точки». Замечание: И.Ньютон не оперировал понятием «ускорение»; понятие об ускорении (как о геометрической величине) введено в 1841г. - Ж.Понселе (1788 - 1867).

В общем случае скорость точки является переменной во времени величиной (как по модулю так и по направлению) - см. рис.5.

В той же системе $Oxyz$ (в которой рассматривалась траектория точки) построим ещё одну линию -

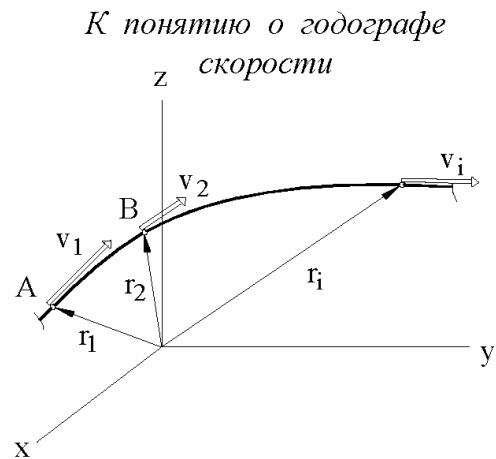


Рисунок 17.5

17.9 | годограф скорости точки – это траектория, которую описывает конец скорости, при условии, что её начало во времени совмещено с началом системы отсчёта и изображается она в одном масштабе - рис.17.6.

С математической точки зрения понятие ускорения подобно введенному понятию скорости:

$$\vec{v}_1 + \overrightarrow{CD} = \vec{v}_2 \quad \mapsto \quad \overrightarrow{CD} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \Delta\vec{v}.$$

$\Delta\vec{v}$ называют приращением скорости за промежуток времени Δt .

17.10 | Среднее ускорение точки (на заданном промежутке времени Δt) – это кинематическая мера, математически определяемая как частное от деления приращения скорости на соответствующий ему промежуток времени Δt , т.е.: $\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$.

О годографе скорости и ускорению точки

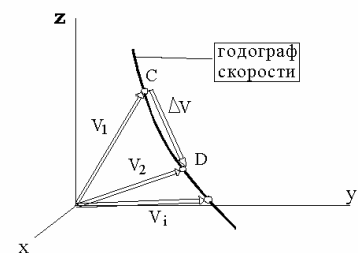


Рисунок 17.6

Наряду со средним, в практике используют также понятие «мгновенное ускорение». В частности, его необходимо знать для проведения прочностных расчётов, для оценки допустимых перегрузок, действующих на лётчиков и космонавтов.

- 17.11 | *Мгновенное ускорение точки* (как элемент множества - в некоторый момент времени $t = \Theta$) – это кинематическая мера, математически определяемая как предел, к которому стремится среднее ускорение на промежутке времени $t_2 - t_1 \rightarrow 0$, при условии, что Θ принадлежит этому промежутку времени $t_2 - t_1 = dt$.
- 17.12 | *Ускорение точки* – это, как и для скоростей, *непрерывное множество* мгновенных ускорений этой же точки (при $t = \Theta'$ $\vec{a} = \vec{a}'$; при $t = \Theta''$ $\vec{a} = \vec{a}''$; при $t = \Theta'''$ $\vec{a} = \vec{a}'''$; и т.д.) что в свёрнутом виде записывают:
- $$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \text{ или } \vec{a} = \dot{\vec{v}}, \text{ или } \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \text{ или } \vec{a} = \ddot{\vec{r}}.$$

17.3. Кинематика точки при естественном способе описания движения

Аксиома (о гладкости траекторий):

- 17.13 | в кинематике все траектории являются гладкими линиями - ни они сами, ни первые и вторые их производные не имеют разрывов.

Сформулированное не противоречит встречающимся *качественным* исследованиям - мягкие и жёсткие удары в кулачковых механизмах и т.д., ибо при количественных исследованиях оказывается, что острие иглы под микроскопом смотрится как холм, взаимодействующие поверхности всегда деформируются.

- 17.14 | *Подвижная касательная* (на рис.17.7 - T ; $\vec{\tau}$ - её орт.) - это направленная в сторону возрастания координаты (S) полукасательная с началом во времени совпадающим с движущейся точкой (M).

В общем случае орт $\vec{\tau}$ подвижной касательной – величина переменная (по направлению); если же траекторией точки является отрезок прямой, то $\vec{\tau} = \text{const}(t)$.

Проекцию скорости точки на подвижную касательную ($\vec{v} \cdot \vec{\tau}$) будем обозначать просто v . Тогда:

17.15 | $\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}$.

Проекция скорости точки на подвижную касательную – величина алгебраическая – может быть большей и меньшей нуля.



Рисунок 17.7

Из математического анализа известно, что для гладких линий длины бесконечно малых дуг равны длинам соответствующих стягивающих хорд с точностью до бесконечно малых второго порядка малости. Это, а также 7 и 15, приводят к выводу:

$$17.16 \quad \left| \begin{array}{l} v = \dot{s} - \text{проекция скорости точки на подвижную касательную равна} \\ \text{производной по времени от криволинейной её координаты.} \end{array} \right.$$

С целью рассмотрения ускорения точки, необходимо обратиться к некоторым понятиям и результатам дифференциальной геометрии. -

Соприкасающаяся плоскость – это плоскость, в которой находится движущаяся точка с прилегающим к ней бесконечно малым участком траектории. Очевидно, что подвижная касательная находится в соприкасающейся плоскости. Если траекторией является плоская кривая, то соприкасающейся плоскостью является плоскость расположения траектории, т.е. её положение не зависит от времени (она является постоянной). Если же траекторией точки является пространственная кривая, то в различных её точках касательные плоскости будут различными.

17.17 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Подвижная главная нормаль (её орт - } \vec{n} \text{) - это ось, начинающаяся в} \\ \text{движущейся точке, перпендикулярная подвижной касательной,} \\ \text{расположенная в соприкасающейся плоскости и направленная в} \\ \text{сторону вогнутости бесконечно малого участка траектории,} \\ \text{примыкающему к движущейся точке.} \end{array} \right.$

17.18 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Подвижная бинормаль (её орт - } \vec{b} \text{) - это} \\ \text{ось, дополняющая подвижные касательную} \\ \text{и главную нормаль до прямоугольной} \\ \text{системы координат, удовлетворяющей} \\ \text{условию: } \vec{b} = \vec{n} \times \vec{\tau} \text{ .} \end{array} \right.$

17.19 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Подвижный трёхгранник (см. рис.17.8) -} \\ \text{это совокупность трёх взаимно перпендику-} \\ \text{лярных подвижных касательной, главной} \\ \text{нормали и бинормали.} \end{array} \right.$

К понятию
«подвижный
трёхгранник»

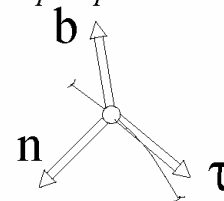


Рисунок 17.8

17.20 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Если } d\varphi \text{ - угол между касательными, проведенными в начале и} \\ \text{конце элементарного участка траектории, длиной } dl \text{ и содержащего} \\ \text{точку } A \text{, то величину } k = \frac{d\varphi}{dl} \text{ называют кривизной траектории в} \\ \text{её точке } A \text{. Величину, обратную кривизне } \left(\rho = \frac{1}{k} \right), \text{ называют} \\ \text{радиусом кривизны траектории в точке } A \text{.} \end{array} \right.$

Кривизна и радиус кривизны – арифметические величины.

Круг кривизны при точке A траектории – это соприкасающийся с траекторией в её точке A круг, радиус которого равен радиусу кривизны этой траектории в точке A , а центр расположен на исходящей из точки A главной нормали.

Центр кривизны траектории в точке A – это центр круга кривизны при точке A траектории.

Эволюта траектории – это геометрическое место центров кривизны траектории.

Замечание: у траектории, являющейся прямой линией, эволюта отсутствует (расположена в бесконечности от неё); если траекторией является окружность, то эволюта вырождается в точку (совпадающую с центром этой окружности).

Из дифференциальной геометрии известна так называемая

$$17.21 \quad \left| \begin{array}{l} \text{формула Френе -} \\ \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho} \end{array} \right.$$

Выразим ускорение точки через рассмотренные понятия. -

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{\tau}) = \dot{v} \cdot \vec{\tau} + v \cdot \dot{\vec{\tau}}.$$

Преобразовываем $\dot{\vec{\tau}}$, учитывая формулу Френе:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = v \cdot \frac{\vec{n}}{\rho}.$$

Подставив полученное выражение в предыдущее, получаем

$$17.22 \quad \left| \begin{array}{l} \text{формулы для определения ускорения точки при естественном} \\ \text{способе задания её движения: } \vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad \text{где} \\ \vec{a}_\tau = a_\tau \cdot \vec{\tau} = \dot{v} \cdot \vec{\tau} = \ddot{s} \cdot \vec{\tau} \text{ - касательна} \\ \text{и } \vec{a}_n = a_n \cdot \vec{n} = \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n} \text{ - нормальна} \\ \text{составляющие ускорения;} \\ a_\tau \text{ - касательное и } a_n \text{ - нормальное} \\ \text{ускорения (в отличие от предыдущих} \\ \text{терминов слово «составляющая»} \\ \text{опущено).} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Положения касательной} \\ \text{и нормальной} \\ \text{составляющих ускорения} \end{array}$$

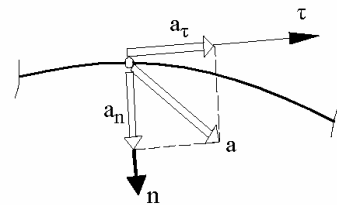


Рисунок 17.9

Замечание: бинормальная составляющая ускорения всегда равна нулю.

Принято различать:

если $a_\tau = 0$, т.е. $v = \text{const}(t)$ - движение *равномерное*;

если $a_\tau \neq 0$ - движение *переменное*

(при $\vec{a}_\tau \uparrow\uparrow \vec{v}$ - *ускоренное*; при $\vec{a}_\tau \uparrow\downarrow \vec{v}$ - *замедленное*);

если $a_\tau = \text{const}(t)$ - движение *равнопеременное*

(при $\vec{a}_\tau \uparrow\uparrow \vec{v}$ - *равноускоренное*; при $\vec{a}_\tau \uparrow\downarrow \vec{v}$ - *равнозамедленное*).

ПРИМЕР 17.1.- *Определение скорости и ускорения по известным s и ρ*

Дано. Движение точки вдоль траектории задано уравнением $s = 10 \cdot t^2$.
Значения радиусов кривизны определяются уравнением $\rho = 5 \cdot 2^{0,05 \cdot s}$, где
 s, ρ - в см, t - в секундах. Заданный момент времени $\Theta = 4c$.

Определить модули скорости и ускорения движущейся точки в заданный момент времени $t = \Theta$.

Решение.- В соответствии с 17.16 проекция скорости точки на подвижную касательную (как функция времени): $v = 20 \cdot t$;

в момент времени $t = \Theta = 4c$ - $v_\Theta = 20 \cdot \Theta = 20 \cdot 4 = 80$ см/с.

Координата (вдоль траектории) перемещающейся точки в момент времени $t = \Theta = 4c$: $s_\Theta = 10 \cdot \Theta^2 = 10 \cdot 4^2 = 160$ см.

Радиус кривизны траектории в той её точке, в которой в момент времени $t = \Theta = 4c$ расположена движущаяся точка: $\rho_\Theta = 5 \cdot 2^{0,05 \cdot 160} = 1280$ см.

Для определения нормального ускорения используем результат 22:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}. \text{ В момент времени } t = \Theta = 4c \quad a_{n\Theta} = \frac{v_\Theta^2}{\rho_\Theta} = \frac{80^2}{1280} = 5 \text{ см/с}^2.$$

Используя результат 17.22 определяем и касательное ускорение:

$$a_\tau = \dot{v} = 20 \text{ см/с}^2 = \text{const}(t).$$

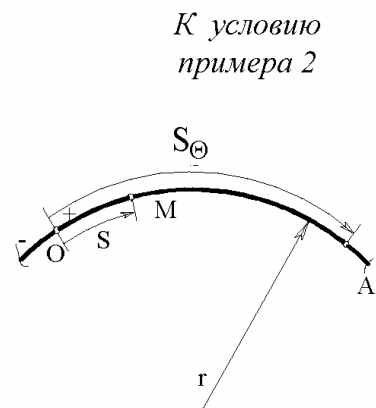
Модуль полного ускорения в момент времени $t = \Theta = 4c$:

$$a_\Theta = \sqrt{(a_{n\Theta})^2 + (a_\tau)^2} = \sqrt{(5)^2 + (20)^2} = 20,62 \text{ см/с}^2.$$

Замечание: при a_τ нижний индекс Θ не поставлен потому, что касательное ускорение в рассматриваемом примере оказалось постоянной величиной; с целью сокращения записей часто индекс Θ не пишут и при a_n, v, s .

ПРИМЕР 17.2.- *Определение ускорения точки и закона её движения вдоль траектории*

Дано. Из точки O по окружности радиуса $r = 9$ м начинает двигаться точка M . Проекция её ускорения на подвижную касательную изменяется по закону $a_\tau = 2t$, где t - в секундах, a_τ - в м/с². Через некоторый промежуток времени Θ движущаяся точка оказалась расположенной в точке A траектории с координатой $s_\Theta = 9$ м.



Определить закон движения точки M вдоль траектории, т.е. $s = s(t)$, а также

Рисунок 17.10

промежуток времени Θ и соответствующие ему скорость, нормальное, касательное и полное ускорения движущейся точки.

Решение.- В соответствии с 17.22, $a_\tau = \dot{v} \quad \mapsto \quad dv = a_\tau \cdot dt \quad \mapsto$
 $\mapsto \quad v = \int 2t \cdot dt \quad \mapsto \quad v = t^2 + C_1.$

C_1 находим из начальных условий (при $t = 0 \quad v = v_0 = 0$):

$$v_0 = (t_0)^2 + C_1 \quad \mapsto \quad 0 = 0^2 + C_1 \quad \mapsto \quad C_1 = 0.$$

Таким образом, зависимость скорости от времени принимает вид: $v = t^2.$

Т.к. $v = \dot{s}$, то

$$ds = v \cdot dt \quad \mapsto \quad s = \int v \cdot dt = \int t^2 \cdot dt \quad \mapsto \quad s = \frac{1}{3} \cdot t^3 + C_2.$$

Принимаем, что при $t = 0, s = s_0 = 0$. Тогда: $0 = \frac{1}{3} \cdot 0^3 + C_2 \quad \mapsto \quad C_2 = 0$

и уравнение движения точки вдоль траектории принимает вид: $s = \frac{1}{3} \cdot t^3.$

Учитывая, что при $t = \Theta \quad s = s_\Theta = 9$ м, получаем: $s_\Theta = \frac{1}{3} \cdot \Theta^3 \quad \mapsto$

$$\Theta = \sqrt[3]{3 \cdot s_\Theta} = \sqrt[3]{3 \cdot 9} = 3 \text{ с}.$$

Тогда:

$$v_{\Theta} = \Theta^2 = 3^2 = 9 \text{ м/с}; \quad a_{\tau\Theta} = 2\Theta = 2 \cdot 3 = 6 \text{ м/с}^2; \quad a_{n\Theta} = \frac{v_{\Theta}^2}{r} = \frac{9^2}{9} = 9 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{\Theta} = \sqrt{(a_{\tau\Theta})^2 + (a_{n\Theta})^2} = \sqrt{(6)^2 + (9)^2} = 10,82 \text{ м/с}^2.$$

Рекомендация:

17.23 *формулы, связывающие между собою скорости, ускорения, расстояния и моменты времени, зависят от конкретных исходных данных и могут быть различными; поэтому не следует загружать память частными математическими выражениями типа*

$$v = v_o + a_{\tau} \cdot t, \quad s = 0,5 \cdot a_{\tau} \cdot t^2 + v_o \cdot t + s_o$$

(для рассмотренного примера они оказались непригодными); целесообразно в памяти хранить лишь зависимости $a_{\tau} = \dot{v}$, $v = \dot{s}$ и в совершенстве владеть методом интегрирования, а внутри его - процедурой определения постоянных C_1 , C_2 и т.д.

Сделанный акцент на целесообразность свободного владения изложенным методом обусловлен не только задачами на кинематику точки при естественном способе задания движения; этот метод применяется в других разделах кинематики, в динамике, других дисциплинах - в сопротивлении материалов, электротехнике и т.д.

17.4. Подходы к определению кинематических величин, уравнений и радиусов кривизны траекторий при координатном способе описания движения точки

Радиус-вектор движущейся точки представляем тремя составляющими:

$$\vec{r} = r_x \cdot \vec{i} + r_y \cdot \vec{j} + r_z \cdot \vec{k}.$$

Его проекции (r_x, r_y, r_z) равны, соответственно, абсциссе x , ординате y и аппликате z движущейся точки, т.е.

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z.$$

Исходя из понятий о скорости и ускорении точки и учитывая постоянство ортов \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , получаем:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} + \dot{z} \cdot \vec{k};$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j} + \ddot{z} \cdot \vec{k}.$$

Откуда видно:

17.24 | при координатном способе задания движения точки проекции её скорости и ускорения определяются по формулам:

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z};$$

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}.$$

ПРИМЕР 17.3.- *Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения*

Дано. Движение точки задано уравнениями $x = 20 \cdot t^2$, $y = 15 \cdot t^2$, $z = 0$ (x и y в см, t - в секундах).

Определить модули скорости и ускорения движущейся точки в заданный момент времени $t = \Theta = 2$ с.

Решение.-

$$\dot{x} = 40t, \quad \dot{y} = 30t, \quad \dot{z} = 0 = \text{const}(t) \quad \mapsto \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = 50t.$$

В момент времени Θ : $\dot{x} = 80$, $\dot{y} = 60$, $\dot{z} = 0$; $v = 100$ см/с;
направляющие косинусы - $\cos(\vec{v}, \vec{i}) = 80 / 100 = 0,8$;

$$\cos(\vec{v}, \vec{j}) = 60 / 100 = 0,6; \quad \cos(\vec{v}, \vec{k}) = 0 / 100 = 0.$$

Аналогично для ускорения:

$$\ddot{x} = 40, \quad \ddot{y} = 30, \quad \ddot{z} = 0 = \text{const}(t) \quad \mapsto \quad a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = 50 \text{ см/с}^2;$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{i}) = 40 / 50 = 0,8; \quad \cos(\vec{a}, \vec{j}) = 30 / 50 = 0,6;$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{k}) = 0 / 50 = 0.$$

Уравнения движения точки - $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ - по существу своему являются уравнениями траектории, но, говорят, в параметрической форме (через параметр t). Для получения уравнения траектории в координатной форме необходимо решить систему уравнений движения, исключив из них время t , что рассмотрим на двух примерах.

ПРИМЕР 17.4.- *Траектория точки. Полупрямая*

Дано. Движение точки задано уравнениями $x = 20 \cdot t^2$, $y = 15 \cdot t^2$, $z = 0$ (x и y в см, t - в секундах).

Определить уравнение траектории точки в координатной форме

Решение.- Т.к. $z = 0$, то точка расположена в плоскости xOy . Из первого и второго уравнений: траектория точки расположена на прямой $y = 0,75 \cdot x$.

Замечание:

17.25 | Следует различать траекторию и линию, на которой она расположена.

В рассматриваемом примере траекторией является полупрямая, расположенная в первом квадранте (см. рис.17.11).

К примеру 17.4

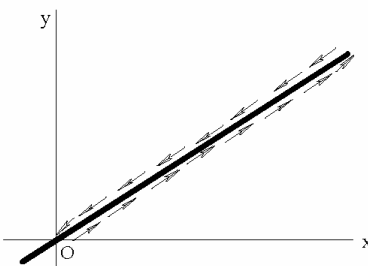


Рисунок 17.11

ПРИМЕР 17.5.- Траектория точки.. Пространственная линия

Дано.- Движение точки задано уравнениями:

$$x = 3 \cdot \sin t, \quad y = 3 + 6 \cdot \sin t, \quad z = 5 \cdot \cos t.$$

Определить уравнение линии, на которой расположена траектория точки.

Решение.- Из 1-го и 3-го уравнений:

$$\sin t = \frac{x}{3}; \quad \cos t = \frac{z}{5} \quad \mapsto \quad \sin^2 t = \left(\frac{x}{3}\right)^2; \quad \cos^2 t = \left(\frac{z}{5}\right)^2 \quad \mapsto$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{5}\right)^2 \quad \mapsto \quad \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{5}\right)^2 = 1.$$

Из 1-го и 2-го уравнений:

$$y = 3 + 2 \cdot x.$$

Итак, в рассматриваемом примере траектория точки расположена на пространственной линии, описываемой системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{5}\right)^2 &= 1 \\ y &= 3 + 2 \cdot x \end{aligned} \right\}$$

ПРИМЕР 17.6.- Переход от координатного к естественному способу задания движения точки

Дано.- Движение точки задано уравнениями:

$$x = 5 \cdot \sin t, \quad y = 5 \cdot \cos t, \quad z = 0.$$

(x и y в метрах, t - в секундах).

Определить уравнение движения точки вдоль траектории, модули нормального и касательного ускорений.

Решение.- Возводя в квадраты и почленно складывая первые два уравнения, получаем:

$$x^2 + y^2 = 5^2,$$

т.е. траектория точки расположена в плоскости xu на окружности радиуса 5м (см. рис.17.12).

Проекция скорости на подвижную касательную - это, с одной стороны, производная от координаты вдоль траектории, т.е. $v = \dot{s}$; с другой стороны - взятый со знаком (+) или (-) модуль скорости, т.е.

$$|ds| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot dt \quad \mapsto$$

$$|s| = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot dt = \int \sqrt{(5 \cos t)^2 + (-5 \sin t)^2} \cdot dt = 5 \cdot t + C.$$

За начало отсчёта для координаты s принимаем точку O окружности (в которой движущаяся точка находится в момент времени $t = 0c$). При таком условии $C = 0$.

За положительное направление отсчёта координаты вдоль траектории принимаем указанное на рис.17.12. Тогда:

$$s = 5t \quad \mapsto \quad a_\tau = \ddot{s} = 0 = \text{const}(t); \quad a_n = \frac{\dot{s}^2}{r} = \frac{5^2}{5} = 5 \text{ м/с}^2 = \text{const}(t).$$

ПРИМЕР 17.7.- Алгоритм определения радиусов кривизны траекторий при координатном способе задания движения точки

Дано. Движение точки задано уравнениями $x = \sin(\pi \cdot t)$, $y = e^t$, $z = t^2$ (x, y, z в метрах, t - в секундах).

Определить радиус кривизны в той точке траектории, в которой в момент времени $t = \Theta = 1c$ находится движущаяся точка.

Решение.- Проекция скорости и ускорения точки как функции времени:

$$\dot{x} = \pi \cdot \cos(\pi \cdot t), \quad \dot{y} = e^t, \quad \dot{z} = 2 \cdot t; \quad \ddot{x} = -\pi^2 \cdot \sin(\pi \cdot t), \quad \ddot{y} = e^t, \quad \ddot{z} = 2.$$

Проекция скорости и ускорения точки в момент времени $t = \Theta = 1c$:

$$\dot{x}_\Theta = \pi, \quad \dot{y}_\Theta = e, \quad \dot{z}_\Theta = 2; \quad \ddot{x}_\Theta = 0, \quad \ddot{y}_\Theta = e, \quad \ddot{z}_\Theta = 2 \quad (\text{скорости в м/с; ускорения в м/с}^2).$$

$$\text{Т.к.} \quad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2, \quad \text{то} \quad 2 \cdot v \cdot \dot{v} = 2 \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x} + 2 \cdot \dot{y} \cdot \ddot{y} + 2 \cdot \dot{z} \cdot \ddot{z}.$$

К примеру 17.6

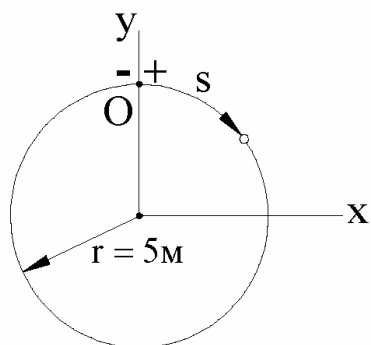


Рисунок 17.12

Учитываем, что $\dot{v} = a_\tau$. Тогда: $a_\tau = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{x} + \dot{y} \cdot \ddot{y} + \dot{z} \cdot \ddot{z}}{v}$.

Итак, для момента времени $t = \Theta = 1c$ получаем:

касательное ускорение - $a_{\tau\Theta} = 2,47 \text{ м/с}^2$;

полное ускорение - $a_\Theta = \sqrt{\dot{x}_\Theta^2 + \dot{y}_\Theta^2 + \dot{z}_\Theta^2} = 3,37 \text{ м/с}^2$;

нормальное ускорение - $a_{n\Theta} = \sqrt{a_\Theta^2 - a_{\tau\Theta}^2} = 2,3 \text{ м/с}^2$;

квадрат скорости - $v_\Theta^2 = \dot{x}_\Theta^2 + \dot{y}_\Theta^2 + \dot{z}_\Theta^2 = 21,24 \text{ м}^2/\text{с}^2$;

радиус кривизны - $\rho_\Theta = \frac{v_\Theta^2}{a_{n\Theta}} = 9,25 \text{ м}$.

17.5*. Рекомендуемый подход к определению скоростей и ускорений точки при обобщённо-координатном способе описания её движения

Определяющие положение точки в пространстве (и изменяющиеся, поэтому, во времени) 3 независимые переменные в общем случае обозначаем

$$a \quad \left| \quad q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \quad q_3 = q_3(t) \quad - \right.$$

уравнения движения точки в обобщённых координатах.

Например, применительно к сферической системе (см. рис.3) можно обозначить:

$$r = q_1 = q_1(t), \quad \varphi = q_2 = q_2(t), \quad \Theta = q_3 = q_3(t).$$

С целью определения скоростей и ускорений точки можно пойти по пути перевода описания её движения из обобщённых координат в декартовы.

Например, переход от описания движения точки в сферической системе координат к описанию движения этой же точки в декартовой системе осуществляется по формулам:

$$x = q_1 \cdot \cos q_2 \cdot \sin q_3; \quad y = q_1 \cdot \sin q_2 \cdot \sin q_3; \quad z = q_1 \cdot \cos q_3$$

(вектор \overrightarrow{OM} вначале разложен на \overrightarrow{Om} и $\xi \cdot \vec{k}$; затем \overrightarrow{Om} спроектирован на оси x, y , а $\xi \cdot \vec{k}$ на z).

В общем случае получается:

$$б \quad \left| \quad x = x(q_1, q_2, q_3); \quad y = y(q_1, q_2, q_3); \quad z = z(q_1, q_2, q_3) \right.$$

(x - первая, y - вторая, z - третья функции обобщённых координат).

Переход от (а) и (б) к проекциям скоростей ($\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$) и ускорений

$(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ на оси декартовой системы координат осуществляется по правилам взятия производных от сложных функций. При этом, удобна следующая система обозначений:

«штрих» (x', \dots, z') - символ частной производной (от соответствующих функций - x, \dots, z);

нижний индекс («1», «2», «3») отображает переменную, по которой берётся частная производная (по q_1, q_2, q_3).

Тогда, из (б) и (а):

$$e \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x'_1 \cdot \dot{q}_1 + x'_2 \cdot \dot{q}_2 + x'_3 \cdot \dot{q}_3; \quad \dot{y} = y'_1 \cdot \dot{q}_1 + y'_2 \cdot \dot{q}_2 + y'_3 \cdot \dot{q}_3; \\ \dot{z} = z'_1 \cdot \dot{q}_1 + z'_2 \cdot \dot{q}_2 + z'_3 \cdot \dot{q}_3. \end{array} \right.$$

Из (e) и (а):

$$e \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = (\dot{x}'_1 \cdot \dot{q}_1 + \dot{x}'_2 \cdot \dot{q}_2 + \dot{x}'_3 \cdot \dot{q}_3) + (x'_1 \cdot \ddot{q}_1 + x'_2 \cdot \ddot{q}_2 + x'_3 \cdot \ddot{q}_3); \\ \ddot{y} = (\dot{y}'_1 \cdot \dot{q}_1 + \dot{y}'_2 \cdot \dot{q}_2 + \dot{y}'_3 \cdot \dot{q}_3) + (y'_1 \cdot \ddot{q}_1 + y'_2 \cdot \ddot{q}_2 + y'_3 \cdot \ddot{q}_3); \\ \ddot{z} = (\dot{z}'_1 \cdot \dot{q}_1 + \dot{z}'_2 \cdot \dot{q}_2 + \dot{z}'_3 \cdot \dot{q}_3) + (z'_1 \cdot \ddot{q}_1 + z'_2 \cdot \ddot{q}_2 + z'_3 \cdot \ddot{q}_3). \end{array} \right.$$

Например, в случае сферической системы координат:

$$x'_1 = \cos q_2 \cdot \sin q_3, \quad x'_2 = -q_1 \cdot \sin q_2 \cdot \sin q_3, \quad x'_3 = q_1 \cdot \cos q_2 \cdot \cos q_3 \quad \mapsto$$

$$\dot{x} = \cos q_2 \cdot \sin q_3 \cdot \dot{q}_1 - q_1 \cdot \sin q_2 \cdot \sin q_3 \cdot \dot{q}_2 + q_1 \cdot \cos q_2 \cdot \cos q_3 \cdot \dot{q}_3;$$

$$y'_1 = \sin q_2 \cdot \sin q_3, \quad y'_2 = q_1 \cdot \cos q_2 \cdot \sin q_3, \quad y'_3 = q_1 \cdot \sin q_2 \cdot \cos q_3 \quad \mapsto$$

$$\dot{y} = \sin q_2 \cdot \sin q_3 \cdot \dot{q}_1 + q_1 \cdot \cos q_2 \cdot \sin q_3 \cdot \dot{q}_2 + q_1 \cdot \sin q_2 \cdot \cos q_3 \cdot \dot{q}_3;$$

$$z'_1 = \cos q_3, \quad z'_2 = 0, \quad z'_3 = -q_1 \cdot \sin q_3 \quad \mapsto$$

$$\dot{z} = \cos q_3 \cdot \dot{q}_1 - q_1 \cdot \sin q_3 \cdot \dot{q}_3.$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & (\cos q_2 \cdot \cos q_3 \cdot \dot{q}_3 - \sin q_2 \cdot \sin q_3 \cdot \dot{q}_2) \cdot \dot{q}_1 - \\ & - (\sin q_2 \cdot \sin q_3 \cdot \dot{q}_1 + q_1 \cdot \cos q_2 \cdot \sin q_3 \cdot \dot{q}_2 + q_1 \cdot \sin q_2 \cdot \cos q_3 \cdot \dot{q}_3) \cdot \dot{q}_2 + \\ & + (\cos q_2 \cdot \cos q_3 \cdot \dot{q}_1 - q_1 \cdot \sin q_2 \cdot \cos q_3 \cdot \dot{q}_2 - q_1 \cdot \cos q_2 \cdot \sin q_3 \cdot \dot{q}_3) \cdot \dot{q}_3 + \\ & + (\cos q_2 \cdot \sin q_3 \cdot \ddot{q}_1 - q_1 \cdot \sin q_2 \cdot \sin q_3 \cdot \ddot{q}_2 + q_1 \cdot \cos q_2 \cdot \cos q_3 \cdot \ddot{q}_3). \end{aligned}$$

Аналогично получают математические выражения для \ddot{y} и \ddot{z} .

Проекции скоростей и ускорений можно определять и без наличия отображающих их аналитических выражений. Особенно удобно делать это тогда, когда они получаются длинными - произошедшая компьютеризация общества через численный метод позволяет для определения скоростей и ускорений использовать существенно более простые аналитические выражения для координат.

При использовании численного метода нужно вычислять три значения координаты (положим x) - для интересующего момента времени t , для $(t - \Delta t)$ и $(t + \Delta t)$. В качестве некоторой стандартной величины можно принимать $\Delta t = 1 \cdot 10^{-9} \text{ с}$. Если этого окажется недостаточно, что маловероятно, Δt можно взять ещё на несколько порядков меньшим.

Итак, для $t_1 = t - \Delta t$, t и $t_2 = t + \Delta t$ вычисляются значения, соответственно, x_1 , x и x_2 .

Тогда, в соответствии с введёнными понятиями:

$$\dot{x}_1 = \frac{x - x_1}{\Delta t}; \quad \dot{x}_2 = \frac{x_2 - x}{\Delta t}.$$

По причине малого отличия \dot{x}_1 от \dot{x}_2 , проекция скорости точки в момент времени t - $\dot{x} \approx \dot{x}_1 \approx \dot{x}_2$ (отличия \dot{x}_1 от \dot{x}_2 будут тем меньшими, чем меньше Δt).

Проекция же ускорения точки на ось x в момент времени t - $\ddot{x} = \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{\Delta t}$.

Если по условиям конкретно решаемой задачи ориентировку векторов скоростей и ускорений точек целесообразно осуществлять относительно заданной системы координат (сферической, эллиптической и т.п.), то можно воспользоваться методом, содержащим в своём описании понятия «коэффициенты Ляме» и «подвижные вариационные трёхгранники», с чем можно ознакомиться, например, в учебном пособии «Игнатищев Р.М. Кинематика.- Могилёв: ММИ, 1979.- 102с.».

Связь между скоростями (и ускорениями) относительно различных систем отсчёта будет изучаться через раздел - после рассмотрения простых движений твёрдого тела.

Изложение последующего материала целесообразно предварить терминологической справкой: принято различать 5 видов движения тел - поступательное, вращательное (которые называют простейшими), сферическое (может в одних случаях рассматриваться как простое, в других - как сложное) и два сложных движения - плоское и свободное.

18. Простые движения твёрдого тела

18.1. Поступательное движение

- 18.1 | - это движение тела, при котором любой взятый в нём отрезок прямой перемещается параллельно своему начальному положению.

Примеры поступательного движения тел: лифт; вагон (или автомобиль) на прямолинейном участке дороги; движение люльки со скамейками на аттракционе «колесо обозрения» - см. рис.1; движение шатуна в механизме шарнирного параллелограмма - рис.18.2.

Колесо обозрения

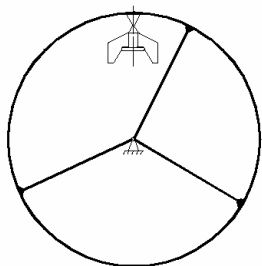


Рисунок 18.1

Механизм шарнирного параллелограмма

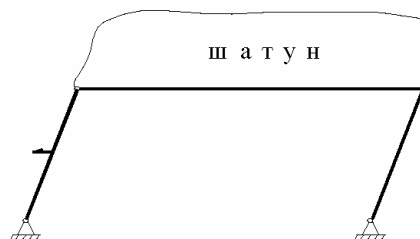


Рисунок 18.2

Замечания:

- 18.2 | при поступательном движении траекторией точки может быть любая линия, в том числе и пространственная;

- 18.3 | точки поступательно движущегося тела описывают одинаковые траектории (при наложении совмещающиеся друг с другом);

18.4 | поступательное движение - понятие относительное, что иллюстрировано на рис.18.3, где:

1 – пружиненный поршень; 2 - вращающийся диск; 3 - корпус механизма; поршень относительно диска движется поступательно, относительно корпуса - нет.

Закон (о скоростях и ускорениях поступательно движущихся тел):

- 18.5 | все точки поступательно движущегося тела имеют одинаковые скорости и одинаковые ускорения.

Поршень в теле вращающегося диска

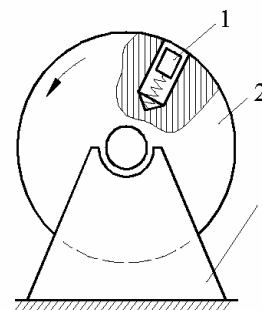


Рисунок 18.3

Приводим рассуждения, позволяющие теоретическим путём получить закон 5. – Пусть (см. рис.18.4) $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \dots, \vec{r}_C$ - радиус-векторы произвольных точек A, B, \dots, C поступательно движущегося тела.

Т.к. $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}$, где $\vec{AB} = \text{const}(t)$ (*const* в соответствии с понятиями абсолютно твёрдого тела и поступательного его движения), то, после взятия от записанного равенства производной по времени, получаем: $\vec{v}_B = \vec{v}_A$.

Аналогично: $\vec{v}_B = \vec{v}_C$ и т.д.

Т.к. $\vec{v}_A = \vec{v}_B = \dots = \vec{v}_C = \dots$, то, после взятия производной по времени от последнего равенства, получаем и равенство ускорений точек A, B, \dots, C, \dots . Использование ранее изложенных методов для теоретического перехода к закону 18.5 завершено. Итак:

18.6 | все точки поступательно движущегося тела имеют одинаковую кинематику. Иначе: кинематика поступательного движения сводится к кинематике точки.

18.2. Вращательное движение

18.7 | - это такое движение, когда у тела имеется подмножество частиц, неподвижных во времени относительно какой-либо оси системы отсчёта. Такую ось называют *осью вращения*.

В рамках рассматриваемого подраздела ось вращения будем обозначать буквой z , а её орт - \vec{k} . Примеры вращательных движений: ротор электродвигателя, карусель, дверь и т.п.

При описании вращательного движения полуплоскость системы отсчёта, начинающаяся с оси вращения, называют *неподвижной полуплоскостью* (или *полуплоскостью отсчёта* - см. рис.5).

Полуплоскость, начинающуюся с оси вращения и связанную с телом, называют *подвижной полуплоскостью*.

К закону об одинаковости скоростей и ускорений

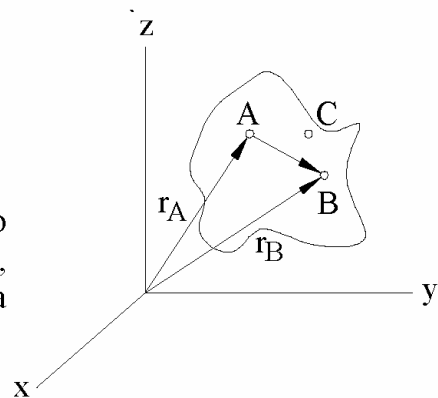


Рисунок 18.4

К понятию вращательного движения

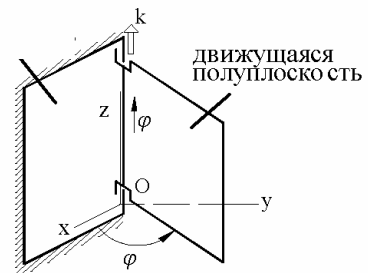


Рисунок 18.5

18.2.1. Об угловых скоростях и ускорениях

Процесс перемещения подвижной полуплоскости относительно неподвижной называют поворотом тела. Количественной его характеристикой является

18.8 | *угол поворота* – это двухгранный угол φ между подвижной и неподвижной полуплоскостями, рассматриваемый как алгебраическая величина - больше нуля тогда, когда мысленное движение в направлении изображающей его круговой стрелки оказывается встречным по отношению к движению конца стрелки часов при условии, что циферблат виден с положительного направления оси вращения.

18.9 | *вектор поворота* – это вектор, определяемый из математического выражения:
$$\vec{\varphi} = \varphi \cdot \vec{k}.$$

18.10 | *угловая скорость* ($\vec{\omega}$) – это кинематическая мера вращательного движения твёрдого тела, определяемая как первая производная по времени от вектора поворота, т.е.

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}} = \dot{\varphi} \cdot \vec{k} = \omega \cdot \vec{k}, \quad \text{где}$$

$\dot{\varphi} = \omega$ - проекция угловой скорости на ось вращения.

Единицей измерения угловой скорости является радиан за секунду, что в записях обозначают: c^{-1} , либо (редко) - $\frac{1}{c}$.

В практике чаще частоту вращения оценивают числом оборотов в минуту (n – об/мин). Т.к. за одну минуту тело поворачивается на $2\pi \cdot n$ радиан, а за секунду на угол в 60 раз меньший, то

18.11 | *угловая скорость* тела (речь идёт о модуле $\vec{\omega}$), выраженная в радианах за секунду, с числом оборотов в минуту связана соотношением
$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}.$$

18.12 | *Угловое ускорение* ($\vec{\varepsilon}$) – это кинематическая мера вращательного движения твёрдого тела, определяемая как первая производная по времени от угловой скорости, т.е.

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\varphi}} = \ddot{\varphi} \cdot \vec{k} = \dot{\omega} \cdot \vec{k} = \varepsilon \cdot \vec{k}, \quad \text{где}$$

$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ - проекция углового ускорения на ось вращения.

Единицей измерения углового ускорения является c^{-2} .

Подобно тому, как это делалось при рассмотрении кинематики точки,

принято различать:

если $\varepsilon = 0$, т.е. $\omega = \text{const}(t)$ - вращение *равномерное*;

если $\varepsilon \neq 0$ - вращение *переменное*

(при $\vec{\varepsilon} \uparrow \uparrow \vec{\omega}$ - *ускоренное*; при $\vec{\varepsilon} \uparrow \downarrow \vec{\omega}$ - *замедленное*);

если $\varepsilon = \text{const}(t)$ - вращение *равнопеременное*

(при $\vec{\varepsilon} \uparrow \uparrow \vec{\omega}$ - *равноускоренное*; при $\vec{\varepsilon} \uparrow \downarrow \vec{\omega}$ - *равнозамедленное*).

18.2.2. О линейных скоростях (иначе: О скоростях точек вращательно движущегося тела)

На рис.6 изображён стержень, вращающийся вокруг перпендикулярной ему оси C .

Т.к. $s = h \cdot \varphi$, $\omega = \dot{\varphi}$, то из $v = \dot{s}$ получается

$$18.13 \quad \left| \begin{array}{l} \text{формула для вычисления модуля} \\ \text{скорости точки вращательно} \\ \text{движущегося тела} \end{array} \right. - v = h \cdot \omega .$$

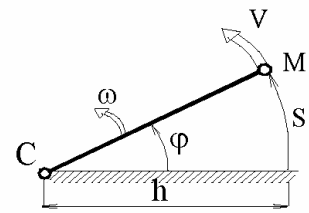


Рисунок 18.6

Центральное место в современном курсе теоретической механики занимает векторный метод. По этой причине выведем формулу, в которой скорости точек вращающегося тела выражаются через угловую его скорость. С этой целью изображаем рис.7, из которого видно, что орты $\vec{\tau}$, \vec{n} , \vec{k} связаны соотношением: $\vec{\tau} = \vec{n} \times \vec{k}$.

$$\text{Т.к. } \vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v}, \quad \vec{k} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}, \quad \text{то } \frac{\vec{v}}{v} = \vec{n} \times \frac{\vec{\omega}}{\omega} .$$

Учитывая 18.13, получаем:

$$\vec{v} = (h \cdot \vec{n}) \times \vec{\omega} = \overrightarrow{MC} \times \vec{\omega} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{CM} .$$

$$\text{Но } \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} = \vec{r} \quad \mapsto \quad \overrightarrow{CM} = \vec{r} - \overrightarrow{OC}, \quad \text{а } \vec{\omega} \times \overrightarrow{OC} = 0 .$$

Поэтому получаем:

О связи между $\vec{\omega}$ и \vec{v}

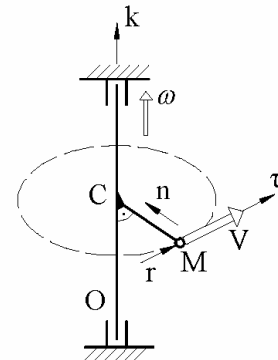


Рисунок 18.7

$$18.14 \quad \left| \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \text{ - векторная формула, выражающая скорости точек} \right. \\ \left. \text{вращательно движущегося тела через угловую его скорость.} \right.$$

18.2.3. О линейных ускорениях

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}. \quad \text{Итак, получена}$$

$$18.15 \quad \left| \text{векторная формула, выражающая ускорения точек вращательно} \right. \\ \left. \text{движущегося тела через угловую скорость и ускорение:} \right. \\ \left. \vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}. \right.$$

Видим, что полное ускорение складывается из 2-х составляющих - $(\vec{\varepsilon} \times \vec{r})$ и $(\vec{\omega} \times \vec{v})$. Покажем, что это уже известные касательная и нормальная составляющие полного ускорения точки. И действительно:

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \varepsilon \cdot \vec{k} \times (\vec{OC} + \vec{CM}) = \varepsilon \cdot \vec{k} \times \vec{CM} = \varepsilon \cdot \vec{k} \times (-h \cdot \vec{n}) = (h \cdot \varepsilon) \cdot (\vec{n} \times \vec{k})$$

Т.к. $(\vec{n} \times \vec{k}) = \vec{\tau}$, то получаем, что

$$18.15a \quad \left| \text{касательная составляющая ускорения определяется формулой:} \right. \\ \left. \vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} = (h \cdot \varepsilon) \cdot \vec{\tau} = a_\tau \cdot \vec{\tau}. \right.$$

Теперь преобразуем 2-ю составляющую:

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = \omega^2 \cdot \vec{OC} - \omega^2 \cdot \vec{r} = \vec{MC} \cdot \omega^2.$$

Итак,

$$18.15b \quad \left| \text{нормальная составляющая ускорения определяется формулой:} \right. \\ \left. \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = (h \cdot \omega^2) \cdot \vec{n} = a_n \cdot \vec{n}. \right.$$

Очевидно, что частицы вращательно движущегося тела, расположенные на отрезке, параллельном оси вращения, имеют одинаковую кинематику (одинаковые скорости и ускорения), т.е.

$$18.16 \quad \left| \text{кинематика вращающегося тела сводит-} \right. \\ \left. \text{ся к кинематике плоской фигуры.} \right.$$

К правилу взаимоперехода между прямой стрелкой и круговой

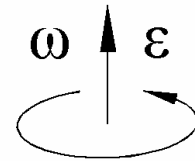


Рисунок 18.8

18.2.4. Об условных обозначениях на рисунках

При кинематическом исследовании вращательно движущегося тела плоскость изображения удобно принимать расположенной перпендикулярно оси вращения. В этом случае скорости, ускорения точек и взаимное их расположение изображаются без искажений. Угловые же скорость и ускорение принято изображать круговыми стрелками - см. рис.8.

Правило взаимного перехода между прямой и круговой стрелками, изображающими на рисунке один и тот же вектор:

18.17 | круговая стрелка расположена в плоскости, перпендикулярной прямой стрелке; причём направлена так, чтобы мысленное движение в указанном ею направлении оказывалось встречным по отношению к движению конца стрелки часов; при условии, что циферблат часов перпендикулярен вектору и виден с положительного его направления.

ПРИМЕР 18.1.- *Определение углов, угловых скоростей и ускорений*

Дано. Вращательное движение задано уравнением $\varphi = \pi \cdot t^3$, (t - в секундах, φ - в радианах). Интересующие моменты времени: $t = T = 1c$, $t = \Theta = 2c$.

Определить углы поворотов, угловые скорости и ускорения в интересующие моменты времени.

Решение.- $\omega = \dot{\varphi} = 3\pi \cdot t^2$; $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = 6\pi \cdot t$.

$$\varphi_T = \pi \cdot T^3 = \pi \cdot 1^3 = \pi \text{ радиан}; \quad \omega_T = 3\pi \cdot T^2 = 3\pi \cdot 1^2 = 3\pi c^{-1};$$

$$\varepsilon_T = 6\pi \cdot T = 6\pi \cdot 1 = 6\pi c^{-2}.$$

$$\varphi_{\Theta} = \pi \cdot \Theta^3 = \pi \cdot 2^3 = 8\pi \text{ радиан}; \quad \omega_{\Theta} = 3\pi \cdot \Theta^2 = 3\pi \cdot 2^2 = 12\pi c^{-1};$$

$$\varepsilon_{\Theta} = 6\pi \cdot \Theta = 6\pi \cdot 2 = 12\pi c^{-2}.$$

ПРИМЕР 18.2.- *Определение скоростей и ускорений точки вращающегося тела*

Дано. Тело начинает вращаться из состояния покоя с угловым ускорением $\varepsilon = b \cdot t$, где $b = \text{const}(t)$. К моменту времени $t = t_1 = 1c$ тело сделало $N_1 = 2$ полных оборота. Точка отстоит от оси вращения на расстоянии $h = 0,1$ м. Интересующий момент времени: $t = t_2 = 2c$.

Определить для интересующего момента времени скорость и ускорение указанной точки.

Решение.-

$$a \quad | \quad \varepsilon = \dot{\omega} \mapsto d\omega = \varepsilon \cdot dt = b \cdot t \cdot dt \mapsto \omega = 0,5b \cdot t^2 + C_1.$$

Т.к при $t = 0$ $\omega = 0$, то $C_1 = 0$ и (a) принимает вид:

$$б \quad | \quad \omega = 0,5b \cdot t^2.$$

Учитывая, что $\omega = \dot{\varphi}$, получаем:

$$\varepsilon \quad \left| \quad d\varphi = 0,5b \cdot t^2 \cdot dt \quad \mapsto \quad \varphi = \frac{1}{6} \cdot b \cdot t^3 + C_2.$$

Т.к при $t = 0$ $\varphi = 0$, то $C_2 = 0$ и (6) принимает вид:

$$\varepsilon \quad \left| \quad \varphi = \frac{1}{6} \cdot b \cdot t^3.$$

В момент времени $t = t_1$ $\varphi = \varphi_1 = 2\pi \cdot N_1$. Тогда из (2):

$$b = \frac{12\pi \cdot N_1}{t_1^3} = \frac{12\pi \cdot 2}{1^3} = 24\pi \text{ с}^{-3}.$$

Таким образом $\omega = 12\pi \cdot t^2$, $\varepsilon = 24\pi \cdot t$

и для момента времени $t = t_2 = 2 \text{ с}$ находим:

$$\omega_2 = 12\pi \cdot 2^2 = 48\pi \text{ с}^{-1}; \quad \varepsilon_2 = 24\pi \cdot 2 = 48\pi \text{ с}^{-2};$$

$$v_2 = h \cdot \omega_2 = 0,1 \cdot 48\pi = 4,8\pi \text{ м/с};$$

$$a_2^{\tau} = h \cdot \varepsilon_2 = 0,1 \cdot 48\pi = 4,8\pi; \quad a_2^n = h \cdot \omega_2^2 = 0,1 \cdot (48\pi)^2 = 2274 \text{ м/с}^2.$$

ПРИМЕР 18.3. - На преобразование вращательного движения (цилиндрическая зубчатая пара)

Дано. - Число оборотов в минуту первого зубчатого колеса $n_1 = 955$ об/мин; направление его вращения указано на рис.9. Число зубьев первого и второго зубчатых колёс:

$$z_1 = 20, \quad z_2 = 80. \quad \rho = 0,4 \text{ м.}$$

Определить скорость тела A .

Дополнительные сведения к исходным данным. -

В теории механизмов и машин показывается (а здесь - в теоретической механике - принимается за известное): использовать следует лишь «правильные зацепления»; при правильных зацеплениях окружности, изображающие зубчатые колёса на рисунках (так называемые начальные окружности) обкатываются друг по другу без проскальзываний, из чего вытекает соотношение

Решение. - В соответствии с приведенными дополнительными сведениями $\vec{v}_{K1} = \vec{v}_{K2}$, где

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

К примеру 18.3

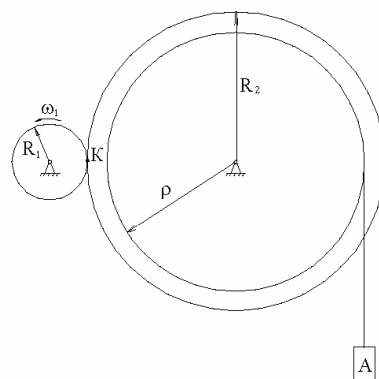


Рисунок 18.9

\vec{v}_{K1} - скорость точки К, принадлежащей первому зубчатому колесу;

\vec{v}_{K2} - скорость точки К, принадлежащей второму зубчатому колесу.

Без дополнительных пояснений видно:

$$R_1 \cdot \omega_1 = v_{K1} = v_{K2} = R_2 \cdot \omega_2 \quad \mapsto \quad \omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{R_1}{R_2} = \frac{\pi \cdot n_1}{30} \cdot \frac{z_1}{z_2} \quad \mapsto$$

$$\omega_2 = \frac{\pi \cdot 955}{30} \cdot \frac{20}{80} = 25 \text{ c}^{-1}.$$

Вычисляем скорость точки А:

$$v_A = \rho \cdot \omega_2 = 0,4 \cdot 25 = 10 \text{ м/с}.$$

ПРИМЕР 18.4.- Преобразование вращательного движения (конические зубчатые пары)

Дано.- Угловая скорость первого вала (так, с целью сокращения речи, принято говорить и писать, хотя имеется ввиду её модуль) - $\omega_1 = 150 \text{ c}^{-1}$; направление его вращения указано на рис.10. Числа зубцов изображённых на рисунке конических зубчатых колёс $z_1 = 18$, $z_2 = 54$, $z'_2 = 15$, $z_3 = 75$.

Как и в предыдущем примере (с цилиндрическими зубчатыми колёсами) отношения радиусов можно заменять отношением чисел соответствующих зубцов.

Определить угловую скорость третьего вала.

Решение.- Для удобства определения направления угловой скорости третьего вала в точках соприкосновения (А и В) обкатывающихся окружностей ставим знаки + и •; первый представляется как вид на хвост стрелы и означает – «точка удаляется от зрачка читателя»; второй представляется как вид на заострённую часть стрелы - «точка движется в направлении зрачка читателя».

Проставив знаки + и •, видим: 3-й вал вращается в том же направлении, что и 1-й. Как и в предыдущем примере:

$$\omega_1 \cdot R_1 = v_{A1} = v_{A2} = \omega_2 \cdot R_2 \quad \mapsto \quad \omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{R_1}{R_2} = \omega_1 \cdot \frac{z_1}{z_2},$$

$$\omega_2 \cdot R'_2 = v_{B2} = v_{B3} = \omega_3 \cdot R_3 \quad \mapsto \quad \omega_3 = \omega_2 \cdot \frac{R'_2}{R_3} = \omega_1 \cdot \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z'_2}{z_3} = \dots = 10 \text{ c}^{-1}.$$

К примеру 18.4

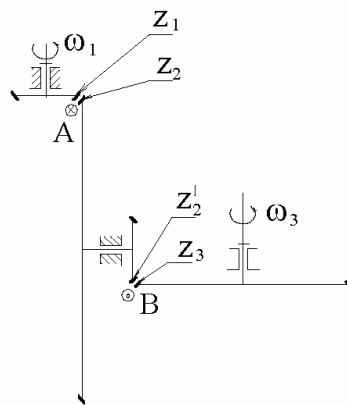


Рисунок 18.10

18.3. Сферическое движение (иначе: вращение тела вокруг точки)

18.3.1. Примеры сферических движений из техники

Шаровой шарнир

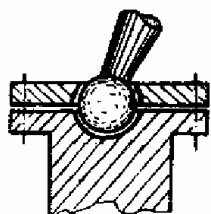


Рисунок 18.11

Шарнир Гука

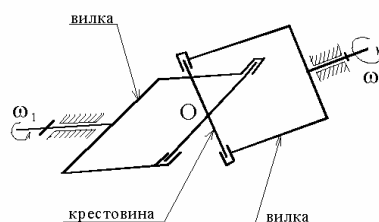


Рисунок 18.12

С помощью шарового шарнира (рис.18.11) крепится рычаг переключения скоростей у многих автомобилей, фотоаппарат к треноге, стойка некоторых настольных ламп к основанию.

На рис.18.12 схематически изображён шарнир Гука. Применяется почти во всех автомобилях и тракторах - 2 шарнира Гука являются главными составляющими так называемого вала Кардана; позволяет передавать вращательное движение между двумя несоосными валами (см. с.159). У шарнира Гука сферическое движение совершает крестовина; его центр на рисунке обозначен буквой *O*.

Гироскоп

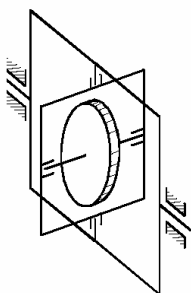


Рисунок 18.13

Условное изображение сферически движущегося тела

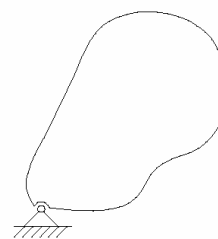


Рисунок 18.14

На рис.18.13 схематически изображён гироскоп с тремя степенями свободы. Нашёл широкое применение в качестве гироскопов, гировертикалей, гиригоризонталей, стабилизаторов положения и т.п. Подробнее о нём речь будет вестись в динамике.

18.3.2. О степенях свободы сферически движущегося тела

18.18 | Число степеней свободы твёрдого тела - это число независимых переменных (координат), однозначно определяющих его положение относительно системы отсчёта.

Вращательно движущееся тело имеет одну степень свободы – угол его поворота относительно полуплоскости отсчёта.

У поступательно движущегося тела три степени свободы - его положение определяется абсциссой, ординатой и аппликатой любой, произвольно взятой точки (обычно за такую точку принимается центр тяжести).

У сферически движущегося тела также три степени свободы. Для определения его положения могут использоваться различные тройки переменных - углы Эйлера, полётные углы (рыскания, тангажа, крена) и т.д. Два примера приведены на рис.18.15 и 18.16.

Углы Эйлера

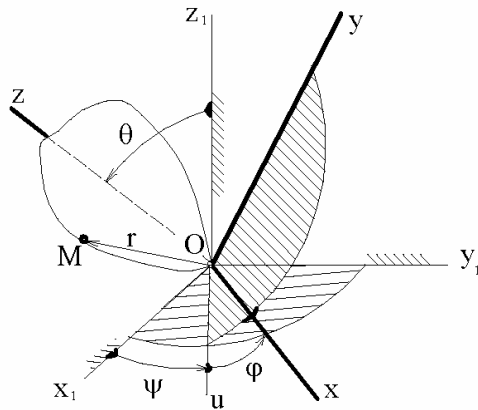


Рисунок 18.15

Углы трёхшарнирного, с пересекающимися осями, соединения

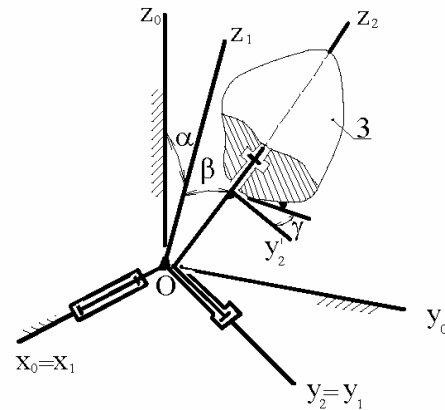


Рисунок 18.16

На рис.18.15: φ , ψ , Θ - углы собственного вращения, прецессии и нутации; их совокупность называют углами Эйлера, используют в небесной механике. u - линия узлов (не углов!) – это полупрямая от пересечения плоскостей x_1y_1 и xy .

На рис.18.16 изображено трёхшарнирное соединение с осями вращения, пересекающимися в одной точке; положение сферически движущегося тела (позиция 3) относительно неподвижной системы $x_0y_0z_0$ определяется тройкой независимых друг от друга угловых координат α , β , γ . Пояснение к рисунку: ось Z_2 расположена в плоскости X_1Z_1 ; плоскости x_0z_0 и y_1z_1 совпадают).

В дальнейшем, ведя речь о сферическом движении, будем иметь ввиду (если специально не оговорено), что его движение определяется углами Эйлера, т.е. будем считать, что сферическое движение определяется уравнениями

$$\varphi = \varphi(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \Theta = \Theta(t).$$

18.3.3. Скорости точек сферически движущегося тела

Систему координат $xуz$ связываем с телом; так, чтобы начало оказалось совмещённым с центром сферического движения (см. рис.15).

Из принятого с очевидностью следует:

a | орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - переменные во времени величины.

(переменны по отношению к наблюдателю, находящемуся в базовой системе отсчёта $x_1y_1z_1$; т.е. переменные по отношению к системе отсчёта, относительно которой определяется скорость);

б | координаты (x, y, z) любой точки M рассматриваемого тела - постоянные во времени величины.

Будем иметь ввиду:

$$\text{в} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{i}^2 = \vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1 = \text{const}(t), \quad \text{аналогично} \quad \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1; \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0, \quad \text{очевидно также} \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0. \end{array} \right.$$

Взяв производные по времени от равенств (в), получаем:

$$\text{г} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{i} \cdot \dot{\vec{i}} = \vec{j} \cdot \dot{\vec{j}} = \vec{k} \cdot \dot{\vec{k}} = 0; \\ \dot{\vec{i}} \cdot \vec{j} = -\vec{i} \cdot \dot{\vec{j}}, \quad \dot{\vec{j}} \cdot \vec{k} = -\vec{j} \cdot \dot{\vec{k}}, \quad \dot{\vec{k}} \cdot \vec{i} = -\vec{k} \cdot \dot{\vec{i}}. \end{array} \right.$$

Исходя из понятий «скорость точки» и «проекция скорости на ось», а также учитывая (а) и (б), получаем:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}) = x \cdot \dot{\vec{i}} + y \cdot \dot{\vec{j}} + z \cdot \dot{\vec{k}};$$

$$\text{д} \quad \left| \begin{array}{l} v_x = \vec{v} \cdot \vec{i} = y \cdot \dot{\vec{j}} \cdot \vec{i} + z \cdot \dot{\vec{k}} \cdot \vec{i} = (\dot{\vec{k}} \cdot \vec{i}) \cdot z - (\dot{\vec{i}} \cdot \vec{j}) \cdot y; \\ v_y = \vec{v} \cdot \vec{j} = x \cdot \dot{\vec{i}} \cdot \vec{j} + z \cdot \dot{\vec{k}} \cdot \vec{j} = (\dot{\vec{i}} \cdot \vec{j}) \cdot x - (\dot{\vec{j}} \cdot \vec{k}) \cdot z; \\ v_z = \vec{v} \cdot \vec{k} = x \cdot \dot{\vec{i}} \cdot \vec{k} + y \cdot \dot{\vec{j}} \cdot \vec{k} = (\dot{\vec{j}} \cdot \vec{k}) \cdot y - (\dot{\vec{k}} \cdot \vec{i}) \cdot x. \end{array} \right.$$

Вводим в рассмотрение вектор $\vec{\omega} = \omega_x \cdot \vec{i} + \omega_y \cdot \vec{j} + \omega_z \cdot \vec{k}$. Такой, проекции которого удовлетворяют условиям:

$$e \quad \left| \quad \omega_x = \dot{j} \cdot \vec{k}, \quad \omega_y = \dot{k} \cdot \vec{i}, \quad \omega_z = \dot{i} \cdot \vec{j} . \right.$$

Тогда получаем

$$жс \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{кинematicкие формулы Эйлера:} \\ v_x = \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y; \quad v_y = \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z; \quad v_z = \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x . \end{array} \right.$$

Вспоминая изученный в статике «способ перестановки индексов», видим, что тройка скалярных уравнений (жс) может быть свёрнута в запись

$$18.19 \quad \left| \quad \begin{array}{l} \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad - \\ \text{векторная формула для скоростей точек сферически движущегося} \\ \text{тела.} \end{array} \right.$$

В некоторый конкретный момент времени t (в мгновение от t_1 до t_2 , $t_2 - t_1 = dt \rightarrow 0$) возьмём в рассматриваемом сферически движущемся теле подмножество частиц, расположенных на прямой, проходящей через центр сферического движения и параллельной введённому вектору $\vec{\omega}$. Пусть расстояние от какой-либо из этих частиц (обозначим её буквой K) до центра сферического движения обозначено ξ ($\xi = OK$). Её скорость:

$$\vec{v}_K = \vec{\omega} \times \left(\xi \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega} \right) = \frac{\xi}{\omega} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\omega}) = 0 .$$

Итак, в любой момент времени у сферически движущегося тела имеется проходящая через центр его вращения прямая, скорости точек которой равны нулю.

Формула $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ уже встречалась - при рассмотрении вращательного движения. Поэтому рассматриваемый здесь вектор $\vec{\omega}$ также будем называть угловой скоростью, при необходимости добавляя: «сферически движущегося тела (такого-то)».

При рассмотрении вращательного движения была и ориентированная полупрямая (с ортом \vec{k}), скорости точек которой равнялись нулю. Её называли осью вращения. Почти тоже самое получено для сферически движущегося тела. «Почти». Есть и отличия: *при вращательном движении ось неподвижна* и начи-

нать её можно с любой точки отрезка, расположенного между подшипниками, в которых закреплено тело, а можно начинать и за его границами.

При сферическом же движении в различные моменты времени (отличающиеся друг от друга конечными промежутками) прямая с нулевыми скоростями точек различно ориентирована относительно тела (относительно системы отсчёта xuz).

18.20 | Полупрямую сферически движущегося тела, которая равна нулю, которая начинается в центре вращения и сонаправлена с вектором угловой скорости, называют *мгновенной осью вращения*.

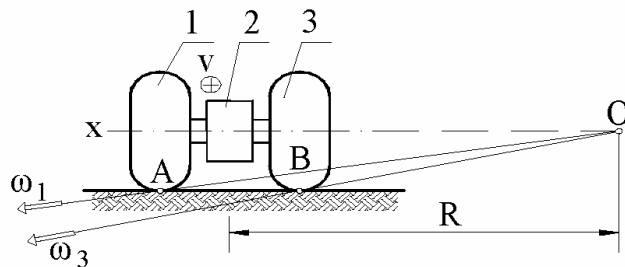
К сведению: поверхность, описываемую мгновенной осью вращения относительно тела (описываемую в системе xuz) называют подвижным аксоидом; а относительно неподвижной (относительно $x_1y_1z_1$ по рис.18.15) называют неподвижным аксоидом; в теории зубчатых зацеплений доказывается, что подвижный аксоид обкатывается по неподвижному без проскальзываний.

ПРИМЕР 18.5.- *Иллюстрация понятия «мгновенная ось вращения» с ответом на вопрос: «почему в конструкцию автомобиля следует закладывать дифференциал?»*

На рис.18.17: 1 - левое, 3 - правое задние колёса автомобиля, движущегося по закруглению радиуса R ; значком $(+v)$ указано направление движения дифференциала 2 (обычно конический – его кинематика рассмотрена в подразделе 21.2) – это устройство из зубчатых колёс, через которое вращающий момент от двигателей передаётся колёсам, обеспечивая их качение по дороге без проскаль-

К кинематике ведущих колёс автомобиля на закруглённом участке дороги

Рисунок 18.17



зываний, т.е. обеспечивая равенство нулю скоростей точек A, B ; O - центр поворота – точка пространства, оказывающаяся (при движении автомобиля по рассматриваемому закруглению) центром сферического движения и 1-го, и 3-го колёс; OA и OB - их мгновенные оси вращения, $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_3$ - угловые скорости.

Если бы колёса 1 и 3 были закреплены на одной оси, то покрышки на поворотах катились бы по дороге с проскальзываниями и быстро изнашивались.

Формула 18.19 и проведенный её анализ позволяют дать следующую рекомендацию по определению скоростей точек сферически движущегося тела:

18.21 | скорости точек сферически движущегося тела в любой момент времени распределены как при вращательном движении, осью которого является мгновенная ось, а угловая скорость равна угловой скорости сферического движения;

пример применения результата 18.21 см. в примере 18.6.

18.3.3. Ускорения точек сферически движущегося тела

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Итак, получена

18.22 | векторная формула, выражающая ускорения точек сферически движущегося тела через угловую скорость и ускорение $\vec{\varepsilon}$ ($\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$):

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Несмотря на то, что получена точно такая же формула, как и для вращательного движения, отличия имеются. И существенные. Рассмотрим их.

При вращательном движении тела вокруг оси вектор $\vec{\omega}$ всё время расположен на оси вращения (если условиться его начинать из какой-либо точки этой оси), т.е. его годограф, и поэтому угловое ускорение, также расположенные на оси вращения ($\vec{\varepsilon} \parallel \vec{\omega}$). При сферическом же движении вектор угловой скорости переменен, прежде всего по направлению. Поэтому

При сферическом движении $\vec{\varepsilon}$ не $\parallel \vec{\omega}$

18.23а | вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ (как касательная к годографу $\vec{\omega}$) при сферическом движении расположен, как функция времени, под углом по отношению к вектору угловой скорости - см. рис. 18.18.

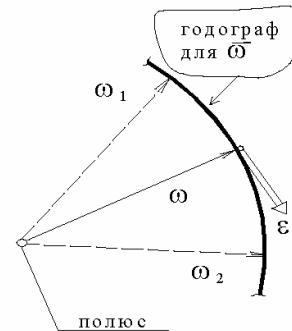


Рисунок 18.18

С математической точки зрения связи $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ и $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ идентичны, а стремление новые знания сводить к известным, приводят к формулировке:

18.23б | вектор углового ускорения равен скорости конца вектора угловой скорости, при условии, что его начало (на рис. 18.18 - полюс) неподвижно.

Часто вектор угловой скорости сферически движущегося тела постоянен по модулю и вращается вокруг неподвижной оси (описывает поверхность прямого

кругового конуса – см. ниже пример б). В этом случае вектор $\vec{\omega}$ можно уподобить стержню (см. рис.18.19), вращающемуся вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω_ω и тогда, пользуясь аналогией $v = h \cdot \omega$, можно записать:

$$18.23 \text{в} \quad \varepsilon = h \cdot \omega_\omega = (\omega \cdot \sin \alpha) \cdot \omega_\omega.$$

Математическая одинаковость формул для вычисления ускорений при вращательных движениях вокруг оси и точки (формулы 18.15 и 18.22), с учётом их отличия по содержанию, рассмотренного в 18.23 (а-б-в), позволяют рекомендовать трёхшаговую процедуру вычисления ускорения точек сферически движущегося тела:

1. Тело предполагается в рассматриваемый момент времени вращающимся вокруг неподвижной оси, совпадающей с мгновенной осью вращения Ω (см. рис.18.20); при таком предположении определяется нормальная составляющая ускорения – по формуле $a_\omega^n = h_\omega \cdot \omega^2$; направлена она перпендикулярно Ω и пересекает её; \vec{a}_ω^n называют осестремительной составляющей ускорения;

18.24

2. Тело предполагается вращающимся вокруг неподвижной оси, проходящей через центр сферического движения параллельно $\vec{\varepsilon}$; при таком предположении определяется касательная составляющая ускорения \vec{a}_ε^r - модуль по формуле $a_\varepsilon^r = h_\varepsilon \cdot \varepsilon$; направлена же эта составляющая так, чтобы глядя навстречу вектору $\vec{\varepsilon}$ видеть, что уподобленный силк вектор \vec{a}_ε^r действует в направлении поворота тела против хода стрелки часов \vec{a}_ε^r называют вращательной составляющей ускорения.

3. Полное ускорение точки равно сумме осестремительной и вращательной составляющих - $\vec{a} = \vec{a}_\omega^n + \vec{a}_\varepsilon^r$.

Вычисление $\vec{\varepsilon}$.
Случай 18. 23в

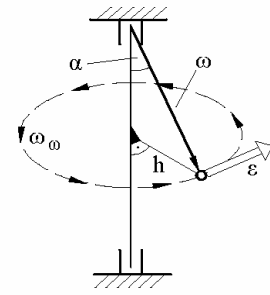


Рисунок 18.19

Составляющие ускорения сферически

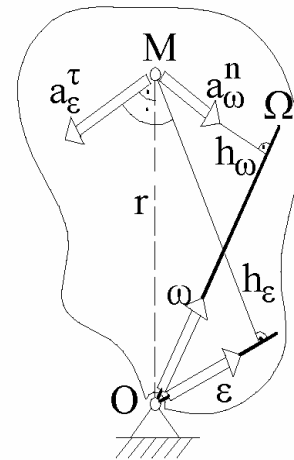


Рисунок 18.20

ПРИМЕР 18.6.- На кинематику сферического движения тела

Дано.- Водило 1 вращается (рис.18.21) вокруг неподвижной вертикальной оси OD с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 100 \text{ c}^{-1}$; 2 – подвижное и 3 – неподвижное конические зубчатые колёса; $OM = OB = 0,1 \text{ м}$; $\alpha = 30^\circ$.

Определ. скорость и ускорение точки M .

Решение.- Тело 2 (шестерня) совершает сферическое движение вокруг центра O , без скольжения обкатываясь по неподвижному зубчатому колёсу 3.

Следовательно $v_B = v_O = 0$, т.е. OB -

мгновенная ось вращения тела 2. В рассматриваемый момент времени точка A движется в направлении зрочка читателя. Поэтому (в соответствии с 18.19) вектор $\vec{\omega}_2$ направляем от O к B .

Модуль скорости точки A_1 , принадлежащей вращательно движущемуся телу 1:

$$v_{A_1} = AO \cdot \omega_1.$$

Модуль скорости точки A_2 , принадлежащей сферически движущемуся телу 2:

$$v_{A_2} = AC \cdot \omega_2.$$

Точки A_1 и A_2 совпадают во времени. Поэтому $v_{A_1} = v_{A_2} \mapsto$

$$\omega_2 = \frac{AO}{AC} \cdot \omega_1 = \frac{\omega_1}{\sin \alpha} = \frac{100}{\sin 30^\circ} = 200 \text{ c}^{-1}.$$

Исходя из тех же результатов 18.19 и 18.21 находим скорость точки M :

$$v_M = ME \cdot \omega_2 = (0,1 \cdot 0,866) \cdot 200 = 17,3 \text{ м/с}$$

и направлена она перпендикулярно плоскости чертежа в сторону зрочка читателя.

Мгновенная ось вращения OB тела 2 и водило AO расположены (в функции времени) в одной вертикальной плоскости MOB , что позволяет заключить:

Кинематика конической шестерни, оббегающей неподвижное зубчатое колесо

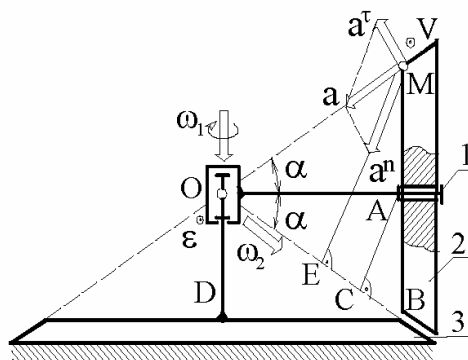


Рисунок 18.21

исходящий из точки O , постоянный по модулю вектор $\vec{\omega}_2$, вращается вокруг оси OD с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}_\omega = \vec{\omega}_1$ и, поэтому, траекторией его конца является окружность.

Применяя результат 18.23в, находим модуль углового ускорения:

$$\varepsilon = (\omega_2 \cdot \cos \alpha) \cdot \omega_1 = 200 \cdot \cos 30^\circ \cdot 100 = 17300 \text{ с}^{-2}.$$

Направлен вектор углового ускорения (в соответствии с результатом 18.23б) перпендикулярно плоскости чертежа в сторону зрочка читателя, что на рисунке отобразено значком $(\bullet \varepsilon)$.

Используя результат 18.24, определяем:

1. Модуль осеостремительного ускорения точки M

$$a_\omega^n = ME \cdot \omega_2^2 = (0,1 \cdot \sin 60^\circ) \cdot 200^2 = 3460 \text{ м/с}^2;$$

направлен этот вектор \vec{a}_ω^n по кратчайшему расстоянию от точки M к мгновенной оси вращения $\vec{\omega}_2$;

2. Модуль вращательного ускорения точки M

$$a_\varepsilon^r = \varepsilon \cdot MO = 17300 \cdot 0,1 = 1730 \text{ м/с}^2;$$

расположен вектор \vec{a}_ε^r в плоскости чертежа (перпендикулярно и $\vec{\varepsilon}$, и \overline{OM}) и, в соответствии с правилом пункта 2 результата 18.24, направлен влево-вверх;

3. Полное ускорение равно геометрической сумме осеостремительной и вращательной составляющих – оказалось направленным от M к O и по модулю равным 3000 м/с^2 .

19. Сложные движения точки и тела

19.1. Понятия об абсолютном, относительном и переносном движениях, скоростях и ускорениях. Обозначения

В общем случае траектория, скорость и ускорение точки относительно различных систем отсчёта различны.

Так, для наблюдателя, находящегося на перроне железнодорожного вокзала, траекторией точки обода колеса отходящего вагона является циклоида; для пассажира траектория этой же точки оказывается окружностью.

Находящийся на эскалаторе человек покоится относительно ступенек, относительно же стен и площадок метро скорость его движения отлична от нуля.

Ускорение стартующего космонавта относительно корабля практически равно нулю, относительно Земли в несколько раз превосходит ускорение свободного падения тела.

Пусть M (см. рис.19.1) - как угодно движущаяся точка относительно двух систем отсчёта. Любую из них назовём «неподвижной». Определяемся конкретно – неподвижной называем первую (x_1, y_1, z_1) систему; синонимы - «основная», или «базовая» система отсчёта. Как здесь, так и в дальнейшем, улаиваемся на рисунках оси неподвижной системы отсчёта выделять примыкаемыми к ним под углами 45° короткими отрезками (штриховкой).

Тогда вторую систему отсчёта (x_2, y_2, z_2) , произвольно движущуюся относительно системы (x_1, y_1, z_1) принято называть подвижной.

Систему x_3, y_3, z_3 , начало P которой совпадает с началом (x_2, y_2, z_2) и которая перемещается поступательно относительно x_1, y_1, z_1 назовём «вспомогательной» системой.

Движение точки M относительно неподвижной системы называют абсолютным движением, относительно подвижной – относительным.

Аналогично: «абсолютная скорость точки M » (либо ускорение) – это её скорость (либо ускорение) относительно неподвижной системы отсчёта; «относительная скорость точки M » (либо ускорение) – это её скорость (либо ускорение) относительно подвижной системы отсчёта.

К понятиям об абсолютном, относительном и переносном движениях

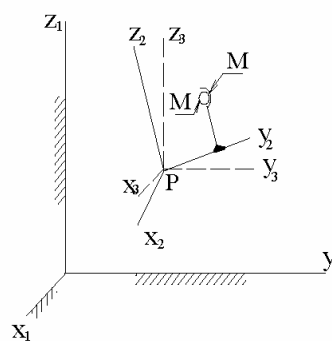


Рисунок 19.1

Движение подвижной системы относительно неподвижной называют переносным движением. Говорят, например: «переносным движением является поступательное» (или – вращательное; или – сферическое).

Наиболее простыми получаются математические связи между абсолютными и относительными скоростями (а также ускорениями), если оперировать ещё и понятиями «переносная скорость», «переносное ускорение».

Переносная скорость точки M – это абсолютная скорость той точки подвижной системы, с которой в рассматриваемый момент времени совпадает точка M , т.е. если руководствоваться рис.1, то переносная скорость точки M – это абсолютная скорость точки M_2 . Аналогично понятие переносного ускорения (в приведенном определении слово «скорость» надо заменить на «ускорение»).

К сведению: идея относительности движения была чужда и астрономии, и физике древних. Первым развил её Николай Коперник (1473-1543).

Рекомендуем к использованию две системы обозначений – полную (основную) и упрощённую (применяемую в простых случаях).

Полная система обозначений

При буквах, отображающих кинематические величины (\vec{v} , \vec{a} , $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$), пишут двухсимвольные индексы - \vec{v}_{M1} , \vec{v}_{M2} , \vec{v}_{M_21} , $\vec{v}_{M_23} = \vec{v}_{M_2P}$ и т.д. Первый символ - в виде буквы или буквы с цифровым индексом (M , M_2 , A , B и т.п.) - отображает точку, о скорости (или ускорении) которой ведётся речь; цифровой индекс при букве (M_2 и т.п.) удобно применять при необходимости различать между собою совпадающие точки, но принадлежащие различным телам (цифра – это номер тела). Второй символ (1 , 2 , 3 , P , C и т.д.) является именем системы отсчёта, относительно которой рассматривается движение (это номер тела, с которым связана система отсчёта). Если вторым символом является *буква*, то это означает, что система отсчёта перемещается *поступательно* (относительно неподвижной), а разновидность буквы (P , C , A_4 и т.д.) является именем точки, с которой во времени совпадает начало этой поступательно перемещающейся системы отсчёта.

Если речь идёт о движении относительно неподвижной системы, то второй символ чаще всего опускают, т.е. вместо \vec{v}_{M1} , \vec{v}_{M_21} пишут: \vec{v}_M , \vec{v}_{M_2} .

Упрощённая система обозначений

- это односимвольные индексы из букв «a» (absolut - абсолютный), «r» (relativ - относительный) и «e» (ertragen - переносить).

Может применяться в случаях, когда исключено разночтение (обычно, когда в рассматриваемой задаче имеется 1 подвижная и одна неподвижная системы отсчёта) - \vec{v}^a , \vec{v}_r , $\vec{\omega}_e$, \vec{a}_M^e , $\vec{v}_{M_2}^a$ и т.д.

19.2. Закон сложения скоростей

На рис.2: $x_1y_1z_1$ - неподвижная, $x_2y_2z_2$ - подвижная и $x_3y_3z_3$ - вспомогательная системы отсчёта; M - произвольно перемещающаяся точка (и относительно неподвижной, и относительно подвижной систем отсчёта); E - произвольная точка подвижной системы; A, B, C - концы ортов \vec{i}_2 , \vec{j}_2 и \vec{k}_2 подвижной системы; P - полюс (это начало вспомогательной системы; P во времени совмещён с началом подвижной системы).

К методу, применённому для получения законов сложения скоростей и ускорений

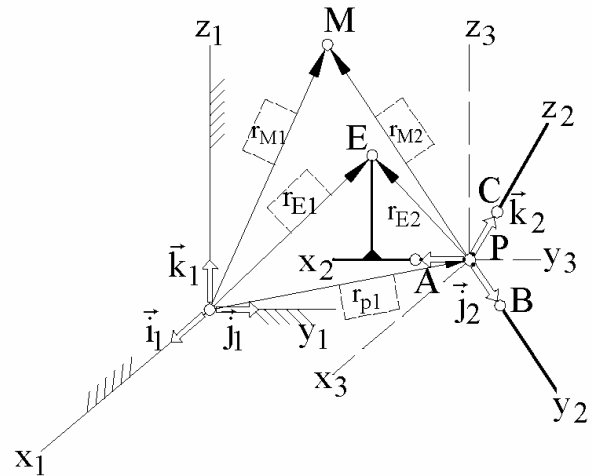


Рисунок 19.2

Подвижная система относительно вспомогательной совершает сферическое движение. В соответствии с приня-

тыми обозначениями $\vec{\omega}_{23}$ - угловая скорость этого движения.

$$a \quad \left| \begin{array}{l} \vec{r}_{M1} = x_{M1} \cdot \vec{i}_1 + y_{M1} \cdot \vec{j}_1 + z_{M1} \cdot \vec{k}_1, \\ \vec{r}_{E1} = x_{E1} \cdot \vec{i}_1 + y_{E1} \cdot \vec{j}_1 + z_{E1} \cdot \vec{k}_1 - \end{array} \right.$$

- это выраженные через составляющие радиус-векторы неподвижной системы отсчёта для точек M и E (исходящие из её начала и разложенные по её же осям). Радиус-векторы подвижной (номер 2) системы отсчёта для тех же точек M и E :

$$б \quad \left| \begin{array}{l} \vec{r}_{M2} = x_{M2} \cdot \vec{i}_2 + y_{M2} \cdot \vec{j}_2 + z_{M2} \cdot \vec{k}_2, \\ \vec{r}_{E2} = x_{E2} \cdot \vec{i}_2 + y_{E2} \cdot \vec{j}_2 + z_{E2} \cdot \vec{k}_2. \end{array} \right.$$

От математических равенств (а) и (б) будем брать производные по времени. Но перед этим заметим:

1. Производная от вектора зависит от системы отсчёта, в которой находится исследователь. Поэтому будем различать «собственные» и «несобственные» векторы. Собственный – это вектор, разложенный по осям системы, в которой расположен исследователь. Если же вектор разложен по осям другой системы отсчёта (другой по отношению к месту расположения исследователя), то это несобственный вектор;

2. Теория относительности А.Эйнштейна обязывает учитывать различное течение времени и различные оценки расстояний между двумя точками для исследователей, расположенных в различных системах отсчёта. В связи с этим:

в | при взятии производных от несобственных векторов их обозначения, например \vec{r}_{M2} , будем дополнять круглыми скобками и за их пределами на месте нижнего индекса указывать имя системы, являющейся местом нахождения исследователя - $(\dot{\vec{r}}_{M2})_1$. Чтобы не усложнять записи, для собственных векторов этого делать не будем, например, вместо $(\dot{\vec{r}}_{M2})_2$ будем писать проще - $\dot{\vec{r}}_{M2}$;

аксиома (ограничительная - ограничивает максимально возможные скорости объектов, превышение которых обязывает учитывать различия в течении времени и различия в оценках расстояний наблюдателями различных систем отсчёта):

19.1 | при скоростях, значительно меньших скорости света (для определённости принимаем, что при скоростях меньших 1000 км/с), время и расстояния между точками одинаково оцениваются наблюдателями всех систем отсчёта (неподвижной, подвижной и вспомогательной).

В соответствии с принятой аксиомой будем иметь ввиду:

$$(t)_1 = (t)_2 = (t)_3 = \text{просто } t; \quad (r_{M1})_1 = (r_{M1})_2 = (r_{M1})_3 = \text{просто } r_{M1};$$

$$(x_{M1})_1 = (x_{M1})_2 = (x_{M1})_3 = \text{просто } x_{M1}; \quad \text{и т.д.}$$

Учитывая принятые обозначения, берём производные по времени от математических выражений (а) с позиций исследователя, находящегося в неподвижной системе (поэтому орты $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ - постоянные во времени величины):

з | аналогично

$$\dot{\vec{r}}_{M1} = \dot{x}_{M1} \cdot \vec{i}_1 + \dot{y}_{M1} \cdot \vec{j}_1 + \dot{z}_{M1} \cdot \vec{k}_1 = \vec{v}_{M1};$$

$$\dot{\vec{r}}_{E1} = \dot{x}_{E1} \cdot \vec{i}_1 + \dot{y}_{E1} \cdot \vec{j}_1 + \dot{z}_{E1} \cdot \vec{k}_1 = \vec{v}_{E1};$$

$$\ddot{\vec{r}}_{M1} = \ddot{x}_{M1} \cdot \vec{i}_1 + \ddot{y}_{M1} \cdot \vec{j}_1 + \ddot{z}_{M1} \cdot \vec{k}_1 = \vec{a}_{M1};$$

$$\ddot{\vec{r}}_{E1} = \ddot{x}_{E1} \cdot \vec{i}_1 + \ddot{y}_{E1} \cdot \vec{j}_1 + \ddot{z}_{E1} \cdot \vec{k}_1 = \vec{a}_{E1}.$$

Теперь берём производные по времени от первого равенства в (б) с позиций наблюдателя, находящегося в подвижной системе. Для него $\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2$ - постоянные во времени величины и, поэтому:

$$d \quad \left| \begin{array}{l} \dot{\vec{r}}_{M2} = (\dot{x}_{M2} \cdot \vec{i}_2 + \dot{y}_{M2} \cdot \vec{j}_2 + \dot{z}_{M2} \cdot \vec{k}_2) = \vec{v}_{M2}; \\ \ddot{\vec{r}}_{M2} = (\ddot{x}_{M2} \cdot \vec{i}_2 + \ddot{y}_{M2} \cdot \vec{j}_2 + \ddot{z}_{M2} \cdot \vec{k}_2) = \vec{a}_{M2}. \end{array} \right.$$

Переходим к взятию производной по времени от \vec{r}_{M2} с позиций наблюдателя, находящегося в неподвижной системе отсчёта. Для него переменны во времени не только координаты x_{M2}, y_{M2}, z_{M2} , но и орты $\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2$.

Получаем:

$$\begin{aligned} \left(\dot{\vec{r}}_{M2} \right)_1 = & \left(\dot{x}_{M2} \cdot \vec{i}_2 + \dot{y}_{M2} \cdot \vec{j}_2 + \dot{z}_{M2} \cdot \vec{k}_2 \right) + \\ & + \left\langle x_{M2} \cdot \left(\dot{\vec{i}}_2 \right)_1 + y_{M2} \cdot \left(\dot{\vec{j}}_2 \right)_1 + z_{M2} \cdot \left(\dot{\vec{k}}_2 \right)_1 \right\rangle, \end{aligned}$$

или, учитывая (д) -

$$\left(\dot{\vec{r}}_{M2} \right)_1 = \vec{v}_{M2} + \left\langle x_{M2} \cdot \left(\dot{\vec{i}}_2 \right)_1 + y_{M2} \cdot \left(\dot{\vec{j}}_2 \right)_1 + z_{M2} \cdot \left(\dot{\vec{k}}_2 \right)_1 \right\rangle.$$

Вспомогательная система отсчёта движется поступательно относительно неподвижной. Не нарушая общности рассуждений можно считать их оси взаимно параллельными. Поэтому проекции ортов $\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2$ на одноимённые оси неподвижной и вспомогательной систем одинаковы как функции времени ($\vec{i}_2 \cdot \vec{i}_1 = \vec{i}_2 \cdot \vec{i}_3, \vec{j}_2 \cdot \vec{j}_1 = \vec{j}_2 \cdot \vec{j}_3, \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_1 = \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_3$), что даёт основание последнюю математическую зависимость записать в форме:

$$e \quad \left| \quad \left(\dot{\vec{r}}_{M2} \right)_1 = \vec{v}_{M2} + \left\langle x_{M2} \cdot \left(\dot{\vec{i}}_2 \right)_3 + y_{M2} \cdot \left(\dot{\vec{j}}_2 \right)_3 + z_{M2} \cdot \left(\dot{\vec{k}}_2 \right)_3 \right\rangle. \right.$$

С позиций наблюдателя, находящегося во вспомогательной системе отсчёта, подвижная система совершает сферическое движение. Причём, $\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2$ - это радиус-векторы точек A, B и C (см. рис.2), т.е. $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C$; и начинаются они в полюсе P . Это, на основании 19.19, позволяет записать:

$$\text{ж} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} \dot{i}_2 \end{pmatrix}_3 = \vec{\omega}_{23} \times \vec{i}_2, \quad \begin{pmatrix} \dot{j}_2 \end{pmatrix}_3 = \vec{\omega}_{23} \times \vec{j}_2, \quad \begin{pmatrix} \dot{k}_2 \end{pmatrix}_3 = \vec{\omega}_{23} \times \vec{k}_2.$$

Подставляя (ж) в (е) и учитывая первое равенство из (б), получаем:

$$\begin{array}{l} \text{з} \\ \text{и} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{r}_{M2} \end{pmatrix}_1 = \vec{v}_{M2} + \vec{\omega}_{23} \times \vec{r}_{M2}. \\ \begin{pmatrix} \dot{r}_{E2} \end{pmatrix}_1 = \vec{\omega}_{23} \times \vec{r}_{E2}. \end{array} \right. \quad \text{Аналогично:}$$

$$\text{Из рис.19.2 видно:} \quad \vec{r}_{M1} = \vec{r}_{E1} + (-\vec{r}_{E2}) + \vec{r}_{M2}.$$

Взяв от последнего равенства производную по времени с позиций наблюдателя, находящегося в неподвижной системе, и учитывая (з), (д), (з), (и), получаем:

$$\vec{v}_{M1} = \vec{v}_{E1} - \vec{\omega}_{23} \times \vec{r}_{E2} + \vec{v}_{M2} + \vec{\omega}_{23} \times \vec{r}_{M2} \quad \mapsto$$

$$19.2 \quad \left| \quad \vec{v}_{M1} = \vec{v}_{E1} + \vec{v}_{M2} + \vec{\omega}_{23} \times (\vec{r}_{M2} - \vec{r}_{E2}) \right. - \text{формула, связывающая между собою абсолютную и относительную скорости точки.}$$

Математическое выражение 19.2 рассматривается как функция времени. Однако в расчётную практику в большей степени вошёл подход, в соответствии с которым каждому моменту времени соответствует своя точка E – такая, с которой совпадает точка M . В этих случаях $\vec{r}_{M2} = \vec{r}_{E2}$ и 19.2 принимает вид:

$$19.3 \quad \left| \quad \vec{v}_{M1} = \vec{v}_{M2} + \vec{v}_{M21}; \quad (\text{иначе} - \vec{v}^a = \vec{v}^r + \vec{v}^e) \right. - \text{формула,}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{выражающая закон сложения скоростей} - \text{абсолютная скорость} \\ \text{точки состоит из 2-х составляющих} - \text{относительной и переносной.} \end{array} \right.$$

19.3. Закон сложения ускорений

С позиций наблюдателя, находящегося в неподвижной системе отсчёта, берём производную по времени от математического выражения 2. Получаем:

$$\text{к} \quad \left| \quad \vec{a}_{M1} = \vec{a}_{E1} + \begin{pmatrix} \dot{v}_{M2} \end{pmatrix}_1 + \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{23} \end{pmatrix}_1 \times (\vec{r}_{M2} - \vec{r}_{E2}) + \right.$$

$$\left. + \vec{\omega}_{23} \times \left\langle \begin{pmatrix} \dot{r}_{M2} \end{pmatrix}_1 - \begin{pmatrix} \dot{r}_{E2} \end{pmatrix}_1 \right\rangle.$$

$$\text{Учитываем, что} \quad \begin{pmatrix} \dot{v}_{M2} \end{pmatrix}_1 = \text{из (д)} = (\ddot{x}_{M2} \cdot \vec{i}_2 + \ddot{y}_{M2} \cdot \vec{j}_2 + \ddot{z}_{M2} \cdot \vec{k}_2) +$$

$$+ \left\langle \dot{x}_{M2} \cdot \begin{pmatrix} \dot{i}_2 \end{pmatrix}_1 + \dot{y}_{M2} \cdot \begin{pmatrix} \dot{j}_2 \end{pmatrix}_1 + \dot{z}_{M2} \cdot \begin{pmatrix} \dot{k}_2 \end{pmatrix}_1 \right\rangle \quad \mapsto$$

$$\text{л} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} \dot{v}_{M2} \end{pmatrix}_1 = \vec{a}_{M2} + \vec{\omega}_{23} \times \vec{v}_{M2}.$$

Вспомогательная система относительно неподвижной перемещается поступательно. Следовательно

$$M \quad \left| \quad \left(\dot{\vec{\omega}}_{23} \right)_1 = \left(\dot{\vec{\omega}}_{23} \right)_3 = \vec{\varepsilon}_{23} \text{ - угловое ускорение подвижной системы} \right.$$

относительно вспомогательной.

Теперь, учитывая (3) и (u), преобразуем последнее слагаемое выражения (к):

$$\vec{\omega}_{23} \times \left\langle \left(\dot{\vec{r}}_{M2} \right)_1 - \left(\dot{\vec{r}}_{E2} \right)_1 \right\rangle = \vec{\omega}_{23} \times \left\langle \left(\vec{v}_{M2} + \vec{\omega}_{23} \times \vec{r}_{M2} \right) - \vec{\omega}_{23} \times \vec{r}_{E2} \right\rangle = \\ = \vec{\omega}_{23} \times \vec{v}_{M2} + \vec{\omega}_{23} \times \left\langle \vec{\omega}_{23} \times \left(\vec{r}_{M2} - \vec{r}_{E2} \right) \right\rangle. \quad \text{Итак:}$$

$$19.4 \quad \left| \quad \begin{aligned} \vec{a}_{M1} &= \vec{a}_{M2} + \vec{a}_{E1} + 2 \cdot \left(\vec{\omega}_{23} \times \vec{v}_{M2} \right) + \\ &+ \vec{\varepsilon}_{23} \times \left(\vec{r}_{M2} - \vec{r}_{E2} \right) + \vec{\omega}_{23} \times \left\langle \vec{\omega}_{23} \times \left(\vec{r}_{M2} - \vec{r}_{E2} \right) \right\rangle \end{aligned} \right. \text{ - формула,} \\ \text{связывающая абсолютное и относительное ускорения точки.}$$

Подобно скоростям в расчётную практику вошёл подход, в соответствии с которым каждому моменту времени соответствует своя точка E – такая, с которой совпадает точка M . В этих случаях $\vec{r}_{M2} = \vec{r}_{E2}$ и 19.4 принимает вид:

$$19.5 \quad \left| \quad \begin{aligned} \vec{a}_{M1} &= \vec{a}_{M2} + \vec{a}_{M21} + 2 \cdot \left(\vec{\omega}_{23} \times \vec{v}_{M2} \right); \\ \text{иначе: } \vec{a}^a &= \vec{a}^r + \vec{a}^e + \vec{a}^k, \quad \text{где } \vec{a}^k = 2 \cdot \left(\vec{\omega}_{23} \times \vec{v}_{M2} \right) \end{aligned} \right. \text{ -} \\ \text{формула, выражающая закон сложения ускорений;} \\ \vec{a}^k \text{ называют кориолисовой (или поворотной) составляющей} \\ \text{абсолютного ускорения.} \quad \text{Густав Кориолис (1792-1843) -}$$

французский математик и механик; опубликовал результат 19.5 в 1831 году.

Замечание. - При исследовании динамических процессов иногда используют третьи производные от радиус-векторов, называя их «рывками» («пульсами», «ускорениями 2-го порядка»). В частности, специалисты пишут: «При исследовании колебаний в механизмах нередко существенную роль играет интенсивность изменения ускорений».

Взяв производную по времени от 19.4, получаем *теорему* сложения пульсов:

$$\vec{p}_{M1} = \vec{p}_{M2} + \vec{p}_{M21} + 3 \cdot \left[\vec{\varepsilon}_{23} \times \vec{v}_{M2} + \vec{\omega}_{23} \times \left(\vec{a}_{M2} + 0,5 \cdot \vec{a}^k \right) \right].$$

Главные цели её приведения: демонстрация преимуществ изложенного теоретического метода над аналогичными другими известными и, главное, в пояснении различия между понятиями «закон» (сложения \vec{v} , \vec{a}) и «теоремой» - результат назван теоремой потому, что сегодня он лишь предсказание, почти с достоверностью правильное, но пока новое и не общепризнанное.

ПРИМЕР 19.1.- На закон сложения скоростей – переплывание реки

К переплыванию реки

Дано.- Туристической группе необходимо вплавь перебраться на выбранную на противоположном берегу реки площадку (на рис.19.3 точка В), но при этом недопустим выход из воды ниже этой точки (например, по той причине, что ниже замеченной площадки в реку впадает её приток). При этом известно, что наименее подготовленный представитель туристической группы в бассейне (или озере) может плыть со скоростью 30 м/мин.

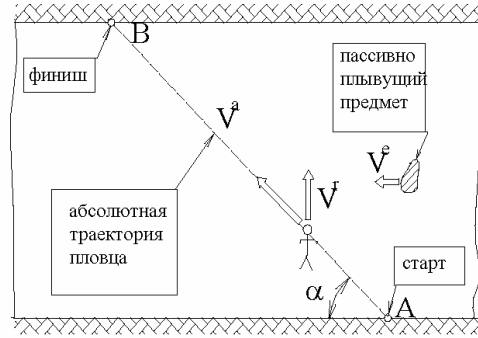


Рисунок 19.3

Определить точку А вхождения туристов в воду (через угол α , под которым траектория АВ пловущих туристов пересекает среднюю линию русла реки).

Решение.- Отмеряют на береговой линии отрезок, параллельный средней линии русла реки. Длиной, например, 50 м и устанавливают время, в течение которого пассивно плывущие по реке предметы преодолевают этот путь. Положим скорость течения реки (среды, переносящей вместе с собой тело пловца) оказалась равной 20 м/мин.

Берега реки принимаются за неподвижную систему отсчёта, а водная среда, вместе с находящимися в ней ветками, щепой и палками, за подвижную систему.

Тогда 20 м/мин и 30 м/мин – это модули соответственно переносной \vec{V}^e и относительной \vec{V}^r скоростей переплывающего реку туриста. Понятно, что меньшие затраты энергии и времени на переплытие реки будут в том случае, если вектор $\vec{V}^r \perp \vec{V}^e$.

К решению примера 19.1

На основании закона сложения строим треугольник скоростей (рис.4) и устанавливаем: $tg \alpha = \frac{v^r}{v^e} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$.

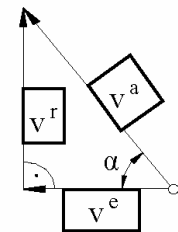


Рисунок 19.4

Из подручных материалов (например из ивовых прутьев) изготавливают прямоугольный треугольник, длины катетов которого относятся между собою как 3 к 2-м. При установлении положения точки А его держат горизонтально, причём так, чтобы меньший катет был параллелен средней линии русла реки, а второй перпендикулярен ей и, идя вдоль берега, наблюдают за положением гипотенузы – место, в котором находится треугольник, когда точка В оказывается на содержащей гипотенузу прямой и есть искомая точка А.

ПРИМЕР 19.2.- На закон сложения ускорений; подвижная система перемещается поступательно

Дано.- В изображённом на рис.5 положении ($\varphi = 30^\circ$): $\omega = 15 \text{ с}^{-1}$; $\varepsilon = 100 \text{ с}^{-2}$; $v = 20 \text{ м/с}$; $a = 100 \text{ м/с}^2$; $AO=1 \text{ м}$.

Определить абсолютное (относительно системы xyz) ускорение точки A .

Решение.- Воспользуемся законом сложения ускорений:

$$\vec{a}^a = \vec{a}^r + \vec{a}^e + \vec{a}^k, \quad \vec{a}^k = 2 \cdot (\vec{\omega}_{23} \times \vec{v}_{M2}).$$

За подвижную систему координат принимаем $x'y'$, которая, как видно из рисунка (из условия), перемещается поступательно относительно неподвижной $\mapsto \omega_{23} = 0 \mapsto a^k = 0$.

Т.к. подвижная система координат перемещается поступательно, то ускорения всех её точек одинаковы и, поэтому, переносная составляющая (\vec{a}^e) ускорения точки A равна указанному на рисунке \vec{a} .

Относительно подвижной системы точка A движется по окружности радиуса AO с центром в точке O . Поэтому относительную составляющую ускорения целесообразно представить двумя векторами -

$\vec{a}^r = \vec{a}_n^r + \vec{a}_\tau^r$, которые определяются как при простом вращательном движении:

$$a_n^r = AO \cdot \omega^2 = 1 \cdot 15^2 = 225 \text{ м/с}^2$$

и направлен \vec{a}_n^r от A к O ;

$$a_\tau^r = AO \cdot \varepsilon = 1 \cdot 100 = 100 \text{ м/с}^2; \quad \vec{a}_\tau^r \perp AO$$

и направлен (что видно по круговой стрелке $\hat{\varepsilon}$) влево-вверх.

Графически решая (см. рис. 6) полученное уравнение $\vec{a}^a = \vec{a}_n^r + \vec{a}_\tau^r + \vec{a}$, находим:

$a^a = 150 \text{ м/с}^2$; направлен же вектор абсолютного ускорения точки A влево-вниз под углом 11° к горизонтали.

Движущийся вагон с вращающимся в нём стержнем

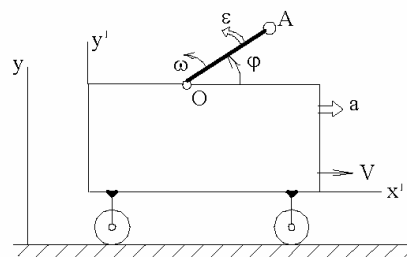


Рисунок 19.5

К решению примера 19.2

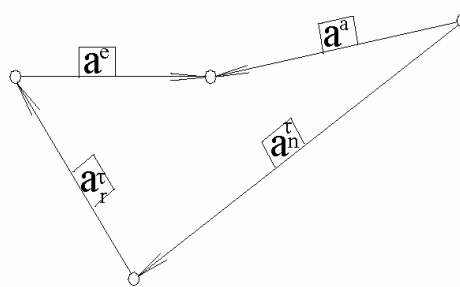


Рисунок 19.6

ПРИМЕР 19.3.- На закон сложения ускорений
– с кориолисовой составляющей

Дано.- Четверть кольца радиуса $R = 0,4$ м скреплена со стержнем, вращающимся вокруг оси z (см. рис.19.7, где выше расположен главный вид, под ним – вид сверху). В интересующий момент времени: $\varphi = 45^\circ$, $AM = h = 0,5$ м; $v^r = 20$ м/с; $a_t^r = 1000$ м/с²; $\omega = 30\sqrt{2}$ с⁻¹; $\varepsilon = 1000$ с⁻². Направления векторов \vec{v}^r , \vec{a}_t^r , $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ указаны на рисунке.

Определить для заданного момента времени проекции абсолютного ускорения точки M на оси неподвижной системы отсчёта.

Решение. – За подвижную принимаем систему отсчёта, связанную с вращающимся телом и применяем теорему сложения ускорений –

$$\vec{a}^a = \vec{a}^r + \vec{a}^e + \vec{a}^k.$$

Т.к. относительной траекторией точки M является дуга окружности (радиуса $R = 0,4$ м с центром в точке B), то \vec{a}^r представляем в виде нормальной и касательной составляющих - \vec{a}_n^r и \vec{a}_t^r ; первая направлена от B к M ; вторая – по касательной в точке M к указанной относительной траектории. Их модули:

$$a_n^r = \frac{(v^r)^2}{R} = \frac{(20)^2}{0,4} = 1000 \text{ м/с}^2; \quad \text{и } a_t^r = 1000 \text{ м/с}^2 \text{ - по условию.}$$

Переносной траекторией точки M (абсолютной траекторией той точки подвижной системы, с которой в рассматриваемый момент времени совпадает точка M) является окружность с центром в точке A и радиусом $MA = h = 0,5$ м.

Переносное ускорение также представляем в виде двух составляющих - \vec{a}_n^e и \vec{a}_t^e ; первая направлена от M к A (по главной нормали к переносной траектории), вторая - по касательной к ней в сторону зрочка читателя (что видно по круговой стрелке, изображающей вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$). Их модули:

$$a_n^e = MA \cdot \omega^2 = 0,5 \cdot (30 \cdot \sqrt{2})^2 = 900 \text{ м/с}^2; \quad a_t^e = MA \cdot \varepsilon = 0,5 \cdot 1000 = 500 \text{ м/с}^2.$$

Переходим к определению кориолисова ускорения - $\vec{a}^k = 2 \cdot (\vec{\omega}_{23} \times \vec{v}_{M2})$.

Ускорение точки,
движущейся по
вращающемуся кольцу

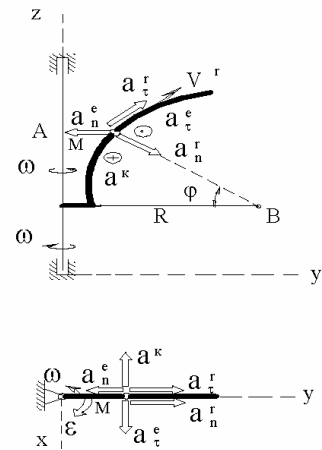


Рисунок 19.7

Направление вектора \vec{a}^k можно определять по известным из курса математики правилам векторного произведения, но более удачным считается

19.6 $\left\{ \begin{array}{l} \text{правило Жуковского: чтобы определить направление} \\ \text{кориолисовой составляющей ускорения, нужно вектор} \\ \text{относительной скорости } (\vec{v}^r) \text{ спроектировать на плоскость,} \\ \text{перпендикулярную вектору переносной угловой скорости } (\vec{\omega}^e; \text{ в} \\ \text{рассматриваемом примере - } \vec{\omega}^e = \vec{\omega}), \text{ и полученную проекцию} \\ \text{повернуть на угол } 90^\circ \text{ в направлении переносного вращения;} \end{array} \right.$

Жуковский Н.Е. (1847-1921) – выдающийся отечественный учёный, известен основополагающими работами в области аэродинамики; его «Теоретическая механика» являлась базовым курсом первую половину 20-го века.

В рассматриваемом примере вектор кориолисова ускорения оказался противоположно направленным оси x (см. рисунок). Его модуль:

$$a^k = 2 \cdot \omega_{23} \cdot v_{M2} \cdot \sin(\angle \vec{\omega}_{23} \vec{v}_{M2}) = 2 \cdot (30 \cdot \sqrt{2}) \cdot 20 \cdot \sin 45^\circ = 1200 \text{ м/с}^2.$$

Итак, в рассматриваемой задаче полное ускорение оказалось представленным в виде 5-ти составляющих:

$$\vec{a}^a = \vec{a}_n^r + \vec{a}_\tau^r + \vec{a}_n^e + \vec{a}_\tau^e + \vec{a}^k.$$

Решаем его аналитическим способом - путём проектирования на оси x, y, z :

$$a_x^a = 0 + 0 + 0 + a_\tau^e + (-a^k) = 500 - 1200 = -700 \text{ м/с}^2;$$

$$a_y^a = a_n^r \cdot \cos 45^\circ + a_\tau^r \cdot \sin 45^\circ + (-a_n^e) + 0 + 0 = \\ = 1000 \cdot 0,707 + 1000 \cdot 0,707 - 900 = 510 \text{ м/с}^2;$$

$$a_z^a = -a_n^r \cdot \sin 45^\circ + a_\tau^r \cdot \cos 45^\circ + 0 + 0 + 0 = 0.$$

Итак, абсолютное ускорение точки M в заданный момент времени (в заданном положении механической системы) перпендикулярно оси z и его проекции на оси x и y равны: $a_x^a = -700 \text{ м/с}^2$; $a_y^a = 510 \text{ м/с}^2$.

19.4. О главном подходе к кинематическому исследованию сложно движущихся тел

Главный подход к кинематическому исследованию сложно движущихся тел заключается в разложении сложного движения на простые и применение законов сложения скоростей, ускорений. Обратной задачей является синтез сложных движений из простых. Комбинаций в разложениях и сложениях движений можно

придумать много; особенно если пойти по методу «матрёшка в матрёшке» – с введением в рассмотрение понятия «подвижная система n -го уровня» (подвижная система 1-го уровня – это система, движение которой определено относительно неподвижной системы отсчёта; подвижная система 2-го уровня – это система, движение которой определено относительно подвижной системы 1-го уровня; подвижная система 3-го уровня – это система, движение которой определено относительно подвижной системы отсчёта 2-го уровня; и т.д.; пример этому см. в разделе 22). Но такой подход имеет больше теоретическую, нежели практическую значимость.

Из описанного множества возможных вариантов инженерный интерес представляют: сложение поступательных движений; винтовое, плоскопараллельное и свободное движения; сложение вращений. Рассмотрению этого круга вопросов, с акцентом на ещё не излагавшихся методах и значимых фактах кинематики и уделим дальнейшее внимание.

При этом, будем иметь ввиду, что сложение поступательных движений и винтовое движение оригинальности и сложностей не содержат – для их исследования достаточно уже изученных кинематических фактов и методов. Поэтому ограничиваемся лишь краткой о них информацией:

если складываются поступательные движения, то результирующим будет также поступательное движение;

винтовое движение - это движение, получающееся в результате сложения поступательного (со скоростью \vec{v}) движения с вращательным, ось которого содержит вектор \vec{v} ; при $\vec{\omega} \uparrow\uparrow \vec{v}$ - движение называют правовинтовым; при $\vec{\omega} \uparrow\downarrow \vec{v}$ - левовинтовым; обычно $\frac{v}{\omega} = h = const$, h называют ходом винта.

Инженер часто встречается с необходимостью разлагать на простые свободное и плоское движения тел. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Свободное движение представляется суммой поступательного и сферического, плоскопараллельное – суммой поступательного и вращательного.

Термин «свободное (произвольное) движение» понятен без дополнительных пояснений. О втором этого сказать нельзя. Поэтому: плоскопараллельное (синоним: плоское) - это такое движение тела, при котором все его точки движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Примеры плоскопараллельных движений: колёса транспортных средств (поездов, автомобилей и т.д.) на прямолинейных участках дорог; движение вагона в метро (с учётом поворотов).

Применяя метод, использованный для показа равенства скоростей и ускорений точек поступательно движущегося тела, видим:

19.7

если тело совершает плоскопараллельное движение, то у любого его отрезка, расположенного перпендикулярно неподвижной плоскости, скорости (и ускорения) точек равны между собой, т.е. кинематика плоскопараллельного движения тела сводится к кинематике плоской фигуры, скользящей по неподвижной плоскости.

Рассмотрим вопрос о числе степеней свободы плоской фигуры.-

На рис.19.8: $x'y'$ - система отсчёта, поступательно перемещающаяся относительно неподвижных осей xy и начало которой во времени совпадает с какой-либо точкой C плоской фигуры (обычно за точку C , особенно в динамике, принимают центр тяжести). Как видим, число степеней свободы плоской фигуры (число независимых переменных, однозначно определяющих её положение относительно системы xy) равно трём - абсцисса x и ордината y точки C , а также угловая координата φ (определяющая положение плоской фигуры во вращательном её движении относительно подвижной системы $x'y'$).

Плоское движение является частным случаем свободного. По этой причине вводимые в этом подразделе кинематические факты будем формулировать применительно к свободному движению тела. Что же касается иллюстрирующих примеров, то больше внимания будет уделено чаще встречающемуся плоскому движению.

Пусть тело γ относительно неподвижной системы xyz (см. рис.19.9) совершает произвольное движение. Берём систему $x'y'z'$, поступательно перемещающуюся относительно xyz и совмещаем её начало во времени с какой-либо точкой O этого тела.

O называют полюсом. Очевидно, что:

О числе степеней свободы плоской фигуры

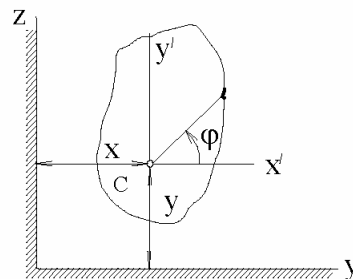


Рисунок 19.8

К свободному движению тела

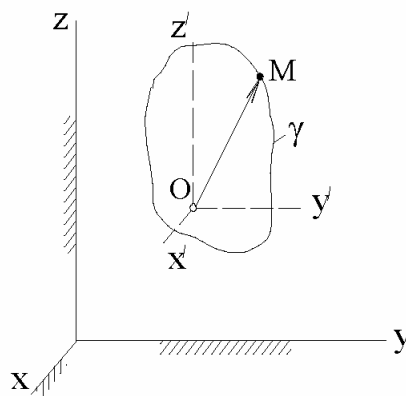


Рисунок 19.9

19.8 | положение произвольно движущегося тела определяется двумя тройками координат - абсциссой, ординатой, аппликатой полюса и углами Эйлера, определяющими сферическое движение тела относительно подвижной системы, поступательно перемещающейся относительно неподвижной и начало которой совмещено с какой-либо точкой этого тела. Говорят - «произвольно движущееся тело имеет 6 степеней свободы».

Вместо длинного «сферическое движение тела относительно системы отсчёта, перемещающейся поступательно относительно неподвижной и начало которой совмещено с какой-либо точкой этого тела» обычно говорят - «сферическое движение относительно полюса», но следует помнить: «полюс» - понятие большее, чем «точка»; это точка тела с привязанной к ней своим началом поступательно перемещающейся системой отсчёта.

На основании законов сложения, с учётом принимавшихся условностей в обозначениях,

19.9 | скорость и ускорение любой точки M произвольно движущегося тела могут определяться по формулам:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{MO}; \quad \vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{a}_{MO},$$

где при свободном движении \vec{v}_{MO} , \vec{a}_{MO} определяются формулами сферического, а при плоском - формулами вращательного движения (кориолисово ускорение отсутствует по причине поступательного перемещения подвижной системы отсчёта).

Инженеры в исследованиях широко используют законы о проекциях скоростей точек тела на проходящую через них прямую, о единой угловой скорости тела (о независимости угловой скорости от точки тела, принимаемой за полюс) и сложения угловых скоростей. Их рассмотрением и завершим 19-й раздел.

19.5. Закон о проекциях скоростей точек тела на проходящую через них прямую:

19.10 | проекции скоростей любых двух точек тела на проходящую через них прямую равны.

Теоретический переход от предыдущего материала к закону 19.10 позволяет сделать метод проектирования векторного уравнения на ось. И действительно, пусть O и M - две произвольные точки свободно движущегося тела.

Приняв O за полюс получаем (см. 19.9): $\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{MO}$, где \vec{v}_{MO} , как скорость в сферическом движении тела γ относительно системы $x'y'z'$, определяется по формуле $\vec{v}_{MO} = \vec{\omega}_{\gamma} \times \vec{OM}$.

Т.к. $\vec{v}_{MO} \perp \overrightarrow{OM}$, то, после проектирования на направление \overrightarrow{OM} векторного равенства $\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{MO}$, получаем 19.10.

19.6. Закон о независимости угловой скорости тела от выбора полюса
(закон о единой для тела угловой скорости):

19.11 | угловая скорость сферической составляющей свободно движущегося тела не зависит от принятой за полюс точки.

Изложим метод, позволяющий теоретическим путём прийти к закону 19.11.

Пусть A , B и M - три произвольные точки тела γ . A и B поочерёдно принимаем за полюса (с системами отсчёта соответственно $x_1 y_1 z_1$ и $x_2 y_2 z_2$ - рис.19.10). В соответствии с 19.9 записываем:

$$\begin{aligned} a & \quad | \quad \vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{\gamma A} \times \overrightarrow{AM}; \\ б & \quad | \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{\gamma A} \times \overrightarrow{AB}; \\ в & \quad | \quad \vec{v}_M = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{\gamma B} \times \overrightarrow{BM}. \end{aligned}$$

К закону о единой для тела угловой скорости

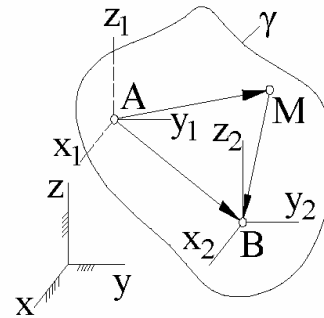


Рисунок 19.10

$$\text{Из (а) и (б): } \vec{v}_M - \vec{v}_B = \vec{\omega}_{\gamma A} \times (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}) = \vec{\omega}_{\gamma A} \times \overrightarrow{BM}.$$

$$\text{Из (в): } \vec{v}_M - \vec{v}_B = \vec{\omega}_{\gamma B} \times \overrightarrow{BM}.$$

Из последних двух равенств:

$$г \quad | \quad (\vec{\omega}_{\gamma A} - \vec{\omega}_{\gamma B}) \times \overrightarrow{BM} = 0.$$

При рассмотрении сферического движения угловая скорость вводилась как количественная характеристика, не зависящая от частиц тела, т.е. $\vec{\omega}_{\gamma A}$ и $\vec{\omega}_{\gamma B}$ - это одинаковые для всех номеров частиц векторы.

\overrightarrow{BM} же - это переменный вектор, отражающий в себе множество векторов различных направлений (ввиду произвольности выбора точек в теле).

Таким образом, равенство нулю (г) имеет место не по причине параллельности векторов $(\vec{\omega}_{\gamma A} - \vec{\omega}_{\gamma B})$ и \overrightarrow{BM} , а потому, что $\vec{\omega}_{\gamma A} = \vec{\omega}_{\gamma B}$.

19.7. Закон сложения угловых скоростей

К закону сложения угловых скоростей.
Постановка вопроса

На рис.19.11: 1, 2 и 3 - неподвижное и произвольно движущиеся тела. Рассматриваем их как 3 разные системы отсчёта - как совокупности точек, не препятствующих взаимным перемещениям; $\vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}^e$ - угловая скорость тела 2 в сферическом его движении относительно системы отсчёта, поступательно перемещающейся по отношению к системе 1, начало которой во времени совпадает с точкой A тела 2;

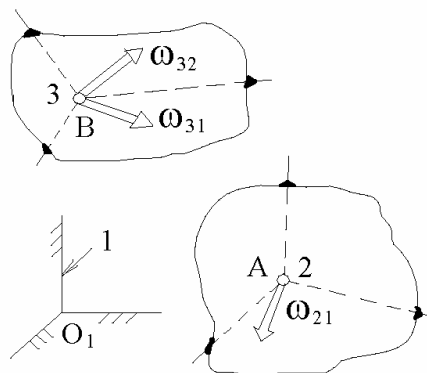


Рисунок 19.11

$\vec{\omega}_{32} = \vec{\omega}^r$ - угловая скорость тела 3 в сферическом его движении относительно системы отсчёта, поступательно перемещающейся по отношению к системе 2, начало которой во времени совпадает с точкой B тела 3;

$\vec{\omega}_{31} = \vec{\omega}^a$ - угловая скорость тела 3 в сферическом его движении относительно системы отсчёта, поступательно перемещающейся по отношению к системе 1, начало которой во времени совпадает с точкой B тела 3.

Называют: $\vec{\omega}^a$, $\vec{\omega}^r$, $\vec{\omega}^e$ - абсолютной, относительной и переносной угловыми скоростями тела 3. Как они связаны между собою?

На этот вопрос отвечает закон сложения угловых скоростей:

$$19.12 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega}_{31} = \vec{\omega}_{32} + \vec{\omega}_{21}; \quad \text{иначе} - \vec{\omega}^a = \vec{\omega}^r + \vec{\omega}^e - \\ \text{абсолютная угловая скорость тела равна геометрической сумме} \\ \text{относительной и переносной её составляющих.} \end{array} \right.$$

Замечание: математическая запись закона 19.12 идентична той, которая в подразделе 19.2 отображала закон сложения линейных скоростей - $\vec{v}^a = \vec{v}^r + \vec{v}^e$. Но чтобы была видна разница в механической сущности применены различные буквы - v и ω .

Теоретический переход от предыдущего материала к закону 19.12 можно основать на законах 19.11 и 19.3, используя ранее рассматривавшиеся методы. Покажем это.-

Закон о единой для тела угловой скорости позволяет перейти к другим принимаемым за полюса точкам тел 2 и 3: A заменяем полюсом O_2 (O_2 - точка тела 2, совпадающая в принятый к рассмотрению момент времени с нача-

лом O_1 неподвижной системы отсчёта), а два полюса B заменяем двумя полюсами O_3 (O_3 - точка тела 3, совпадающая в принятый к рассмотрению момент времени с началом O_1 неподвижной системы отсчёта; одна система с началом в точке O_3 перемещается поступательно относительно первой системы отсчёта; вторая система с началом в точке O_3 перемещается поступательно относительно системы отсчёта 2).

В результате проведенных преобразований получаем картину, представленную на рис.19.12, где буквой M отображены 2 совпадающие в принятый к рассмотрению момент времени точки, одна принадлежит телу 2 (M_2), вторая - телу 3 (M_3).

По формулам сферического движения записываем:

$$\vec{v}_{M_2 1} = \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{OM},$$

$$\vec{v}_{M_3 2} = \vec{\omega}_{32} \times \overrightarrow{OM},$$

$$\vec{v}_{M_3 1} = \vec{\omega}_{31} \times \overrightarrow{OM}.$$

К закону сложения угловых скоростей. Картина после преобразований

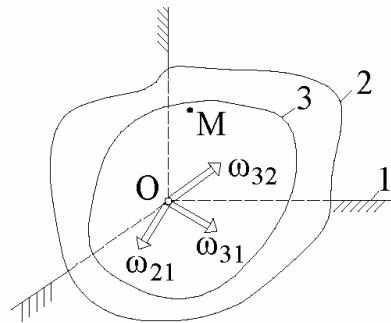


Рисунок 19.12

Теперь используем закон сложения линейных скоростей -

$$\vec{v}_{M_3 1} = \vec{v}_{M_2 1} + \vec{v}_{M_3 2}.$$

Подставляя в последнее выражение 3 предыдущих, получаем:

$$(\vec{\omega}_{31} - \vec{\omega}_{32} - \vec{\omega}_{21}) \times \overrightarrow{OM} = 0.$$

M - произвольная точка. Это значит, что \overrightarrow{OM} может иметь любое направление. Поэтому равенство нулю обеспечивается не параллельностью векторов $(\vec{\omega}_{31} - \vec{\omega}_{32} - \vec{\omega}_{21})$ и \overrightarrow{OM} , а тем, что $(\vec{\omega}_{31} - \vec{\omega}_{32} - \vec{\omega}_{21}) = 0$.

Откуда и следует результат 19.12.

Закон сложения угловых скоростей широко применяется в инженерной практике - для кинематического исследования зубчато-рычажных механизмов (планетарных, дифференциальных и пр.) - см. подраздел 21.2.

20. О кинематических исследованиях плоско движущихся тел и их соединений методами мгновенных центров скоростей и ускорений

20.1. О существовании мгновенного центра скоростей

Мгновенный центр скоростей (МЦС) - это точка плоской фигуры, скорость которой равна нулю.

Из ранее рассмотренных методов (в числе которых проектирование векторного равенства на ось) вытекает следующий кинематический факт:

20.1 | в любой момент времени при не равной нулю угловой скорости плоско движущаяся фигура имеет один мгновенный центр скоростей.

И действительно, пусть A (см. рис.20.1) - одна из точек плоской фигуры; такая, что в рассматриваемый момент времени её скорость (\vec{v}_A) не равна нулю. Из A , перпендикулярно \vec{v}_A , проводим ось x . Пусть, далее, B - другая, не расположенная на оси x , точка этой же плоской фигуры.

За полюс принимаем точку A . Тогда $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$, где $v_{BA} \neq 0$

(т.к. $\omega \neq 0$), причём $\vec{v}_{BA} \perp BA$ и, следовательно, проекция этого вектора на ось x не равна нулю.

Спроектировав составленное векторное равенство на ось x , получаем: $(\vec{v}_B)_x = v_{BA} \cdot \sin \alpha \neq 0$, т.е. $v_B \neq 0$ и если МЦС есть, то он может находиться лишь на оси x .

Пусть теперь D является произвольной, не совпадающей с A , точкой оси x . Тогда: $\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{v}_{DA}$, где $v_{DA} = DA \cdot \omega \neq 0$, причём вектор $\vec{v}_{DA} \perp x$ и, следовательно, \vec{v}_D (сонаправлен, либо противоположно направлен \vec{v}_A : по одну сторону от точки A - $\uparrow\uparrow$, по другую - $\uparrow\downarrow$).

Ясно, что если и есть МЦС, то надо смотреть те точки оси x , для которых $\vec{v}_{DA} \uparrow\downarrow \vec{v}_A$ (на рис.1 этим множеством точек является полуось, начинающаяся в A и сонаправленная с вектором \overrightarrow{AC}).

О существовании МЦС

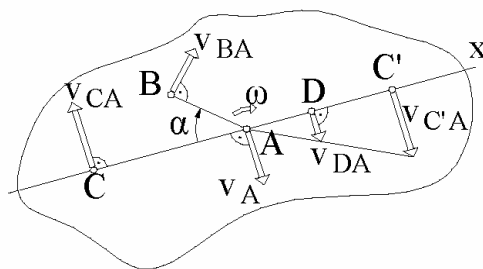


Рисунок 20.1

DA может иметь любую величину (от нуля до бесконечности). И в этом множестве нет повторяющихся значений, но по причине непрерывности, будет присутствовать значение, для которого $\vec{v}_{DA} = -\vec{v}_A$ и, поэтому, $v_D = 0$. Т.е. МЦС есть; и он один.

Итак, применяемые методы приводили ранее к правильным, хорошо проверенным результатам, привели к этому и в рассмотренном случае.

20.2. О распределении скоростей относительно МЦС

20.2 Скорости точек плоской фигуры относительно МЦС распределены таким образом (см. рис.2), будто бы она в заданный момент времени вращается вокруг перпендикулярной ей, проходящей через МЦС, оси, т.е. скорости точек могут определяться по формуле 18.13 - $v = h \cdot \omega$.

Результат 20.2 прямо следует из подраздела 20.1.

Картина распределения скоростей точек плоской фигуры

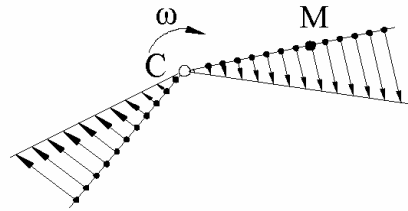


Рисунок 20.2

20.3. Основные способы определения положений МЦС

Первый способ (см. рис.20.3):

20.3 если известны угловая скорость ($\vec{\omega}$) плоской фигуры и скорость (\vec{v}) одной из её точек (A), то для определения положения МЦС можно воспользоваться следующей последовательностью действий: изобразить на фигуре заданную точку A с приложенной к ней скоростью \vec{v} ; затем вектор \vec{v} повернуть на 90° вокруг его начала в сторону вращения фигуры и в полученном направлении от заданной точки A отложить отрезок $h = \frac{v}{\omega}$; его концом и окажется МЦС

К 1-му способу определения положения МЦС

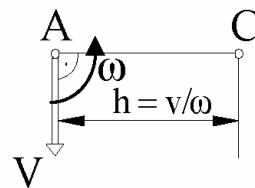


Рисунок 20.3

(как и 20.2 результат 20.3 виден из рассуждений, проведенных в подразделе 20.1).

Второй способ (см. рис.20.4):

20.4

если у плоской фигуры известны прямые расположения скоростей двух точек, то их надо повернуть в плоскости фигуры вокруг заданных точек на 90° ; пересечение C и является искомым МЦС;

второй способ прямо следует из тех уже установленных фактов, что скорость точки перпендикулярна радиус-вектору и плоская фигура имеет лишь один МЦС.

Ко 2-му способу определения положения МЦС

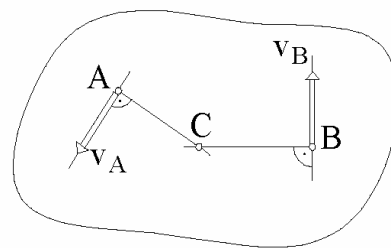


Рисунок 20.4

20.5

Третий способ (см. рис.20.5):

если скорости точек плоской фигуры параллельны и не равны, то её МЦС находится на пересечении (C) прямых, одна из которых проходит через начала, вторая через концы заданных скоростей.

Результат 20.5 прямо следует из 20.2. Причём, если всё делается корректно, то ясно, что проходящая через заданные точки прямая перпендикулярна скоростям.

К 3-му способу определения положения МЦС

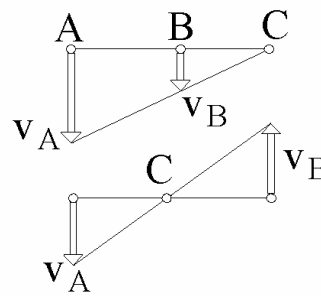


Рисунок 20.5

Четвёртый способ (см. рис.20.6):

20.6

МЦС катящегося без проскальзывания колеса находится в точке его соприкосновения (C) с неподвижной поверхностью.

К 4-му способу определения положения МЦС

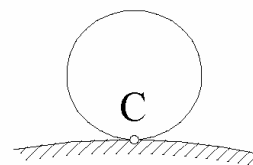


Рисунок 20.6

20.4. Начальные сведения о центроидах

Мгновенный центр скоростей потому и «мгновенный», что с течением времени изменяет своё положение.

Геометрическое место МЦС на плоской фигуре называют подвижной центроидой.

Ту точку неподвижной плоскости, в которой в рассматриваемый момент времени расположен МЦС, называют мгновенным центром вращения.

Геометрическое место мгновенных центров вращения на неподвижной плоскости называют неподвижной центроидой.

Понятия подвижной и неподвижной центроид широко используют в теории зубчатых зацеплений, где, в частности, доказывается, что «подвижная центроида обкатывается по неподвижной без скольжения».

20.5. О мгновенном поступательном движении плоской фигуры

Из аксиомы о гладкости траекторий (с.95) и из связи между линейными и угловыми скоростями с очевидностью следует: угловые скорости являются плавно изменяющимися во времени величинами, т.е. при изменении направления вращения плоской фигуры её угловая скорость обязательно проходит через нуль.

Ту бесконечно малую во времени часть плоского движения, когда угловая скорость фигуры бесконечно мало отличается от нуля, называют мгновенным поступательным движением. Из рассмотренного в подразделах 20.1 и 20.2 с очевидностью следует:

- 20.7 | при мгновенном поступательном движении все точки плоской фигуры имеют одинаковые скорости, а её МЦС расположен в бесконечности.

20.6. Примеры кинематического исследования простых плоских механизмов с использованием понятия МЦС

ПРИМЕР 20.1. - На использование понятия МЦС для определения угловой скорости ведомого звена простого пятизвенного стержневого механизма

Даны схема, геометрия и положение механизма (см. рис.20.7): $\omega_1 = 96 \text{ c}^{-1}$; $AO = 10 \text{ см}$; $AH = 40 \text{ см}$; $BH = 10 \text{ см}$; $BK = 30 \text{ см}$; $KC = 15 \text{ см}$; $CD = 60 \text{ см}$.

Определить угловую скорость тела 5.

Решение. - Будем иметь ввиду, что $A_1 = A_2 = \text{просто } A$, причём $=$ в функции времени, т.е. $\vec{v}_{A_1} = \vec{v}_{A_2} = \text{просто } \vec{v}_A$.

Модуль скорости точки A :

$$a \quad | \quad v_A = AO \cdot \omega_1.$$

Находим мгновенный центр скоростей для звена 2. Для этого, используя очевидность траекторий точек A и B , устанавливаем их скорости: \vec{v}_A направлена вертикально вверх, \vec{v}_B горизонтально. Тогда, на основании 2-го

К условию и решению примера 20.1

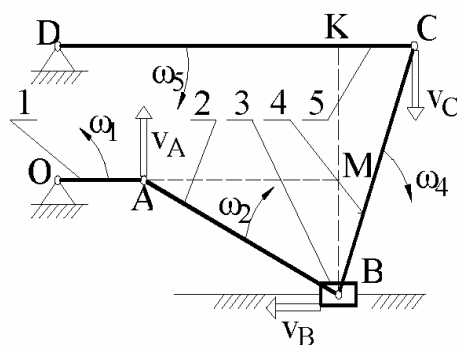


Рисунок 20.7

способа определения МЦС, устанавливаем, что мгновенным центром скоростей звена 2 является точка H ($\text{МЦС}_2 = H$) и в соответствии с результатом 20.2 записываем:

$$\text{б} \quad | \quad v_A = AH \cdot \omega_2.$$

Из (а) и (б): $AO \cdot \omega_1 = AH \cdot \omega_2 \quad \mapsto$

$$\text{в} \quad | \quad \omega_2 = \frac{AO}{AH} \cdot \omega_1,$$

причём, отображающая вектор $\vec{\omega}_2$ круговая стрелка (см. рис.20.7) совпадает с направлением, показывающим на циферблате часов ход стрелок (это направление видно из положения вектора \vec{v}_A относительно точки H).

Как и для A : $B_2 = B_3 = B_4 =$ просто B , т.е. $\vec{v}_{B_2} = \vec{v}_{B_4} =$ просто \vec{v}_B .

$$v_B = BH \cdot \omega_2 = \text{см. (в)} = BH \cdot \frac{AO}{AH} \cdot \omega_1.$$

Для тела 4 известна траектория не только точки B , но и C (см. рис.7). Поэтому, используя 2-й способ определения положения МЦС, устанавливаем: $\text{МЦС}_4 = K$. Откуда:

$$\text{г} \quad | \quad BK \cdot \omega_4 = \leftarrow v_B \rightarrow = BH \cdot \frac{AO}{AH} \cdot \omega_1 \quad \mapsto \omega_4 = \frac{BH}{BK} \cdot \frac{AO}{AH} \cdot \omega_1.$$

Направление круговой стрелки, отображающей вектор $\vec{\omega}_4$, устанавливаем по описанному (применительно к $\vec{\omega}_2$) методу - см. рис.20.7.

Скорость точки C записываем подходу с двух сторон (аналогично тому, как это было сделано для точки B):

$$CD \cdot \omega_5 = \leftarrow v_C \rightarrow = CK \cdot \omega_4 = \text{см. (г)} = CK \cdot \frac{BH}{BK} \cdot \frac{AO}{AH} \cdot \omega_1 \quad \mapsto$$

$$\omega_5 = \frac{CK}{CD} \cdot \frac{BH}{BK} \cdot \frac{AO}{AH} \cdot \omega_1 = \frac{15}{60} \cdot \frac{10}{30} \cdot \frac{10}{40} \cdot 96 = 2c^{-1}.$$

ПРИМЕР 20.2.- Кинематического
исследование зубчато-рычажного
механизма методом МЦС

Даны схема, геометрия и положение механизма - см. рис.20.8, где: 1 – рычаг (водило, стержень), шарнирно соединённый в точке O с неподвижным телом, а в A - с зубчатым колесом 2, имеющим внешнее расположение зубцов и подвижную ось вращения; 3 – неподвижное зубчатое колесо с внутренним расположением зубцов, с которым сцепляется зубчатое колесо 2 и центром которого является точка O . $R = 30$ см; $r = 10$ см; $\omega_1 = 100$ с⁻¹; $\varepsilon_1 = 100$ с⁻².

Определить скорость и ускорение точки B .

Решение.- В соответствии с 4-м способом МЦС₂ = C \mapsto

$$a \quad \left| \quad (R-r) \cdot \omega_1 = \leftarrow v_A \rightarrow = r \cdot \omega_2 \quad \mapsto \quad \omega_2 = \left(\frac{R}{r} - 1 \right) \cdot \omega_1.$$

При разложении плоского движения тела 2 за полюс принимаем точку A .

Учитывая закон о единой угловой скорости, делаем вывод: угловая скорость тела 2 относительно полюса A определяется выражением (а) с той лишь корректировкой, что круговая стрелка, изображающая вектор $\vec{\omega}_2$, противоположна круговой стрелке, изображающей вектор $\vec{\omega}_1$, т.е.

$$b \quad \left| \quad \vec{\omega}_2 = \left(1 - \frac{R}{r} \right) \cdot \vec{\omega}_1 \quad \mapsto \quad \vec{\varepsilon}_2 = \left(1 - \frac{R}{r} \right) \cdot \vec{\varepsilon}_1,$$

Из (а) и (б), после подстановки числовых значений, получаем:

$$\omega_2 = 200 \text{ с}^{-1}; \quad \varepsilon_2 = 200 \text{ с}^{-2}.$$

Для определения скорости и ускорения точки B применяем законы сложения (подобно тому, как делалось в примере 2 предыдущего раздела). Рекомендуем проделать это самостоятельно. Будет получено:

$$v_B = 28,2 \text{ м/с}; \quad a_B = 4445 \text{ м/с}^2.$$

К условию и решению
примера 20.2

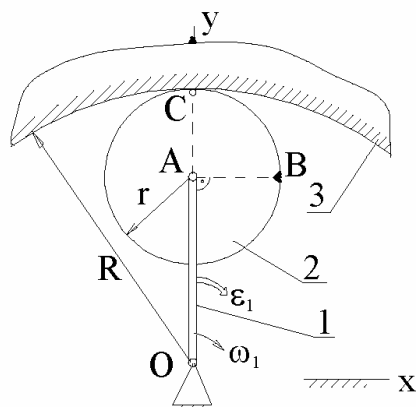


Рисунок 20.8

20.7. Мгновенный центр ускорений. Пример использования этого понятия в кинематических исследованиях

Мгновенный центр ускорений (МЦУ) – это точка плоской фигуры, ускорение которой в рассматриваемый момент времени равно нулю.

Используя уже изложенные методы предлагаем самостоятельно доказать:

20.8 | в любой момент времени, при одновременно не равных нулю угловых скорости и ускорения, плоско движущаяся фигура имеет один МЦУ, положение которого определяется формулами:

$$x = \frac{a_A}{\omega^4 + \varepsilon^2} \cdot \omega^2; \quad y = \frac{a_A}{\omega^4 + \varepsilon^2} \cdot \varepsilon,$$

К определению положения МЦУ

где a_A - модуль ускорения произвольной точки А этой фигуры; ω и ε - модули угловых скорости и ускорения; ось Ax начинается в точке А и сонаправлена с \vec{a}_A ; ось Ay получается путём поворота, в плоскости фигуры (см. рис.20.9), на угол 90° оси Ax в направлении, указываемом круговой стрелкой, изображающей вектор $\vec{\varepsilon}$;

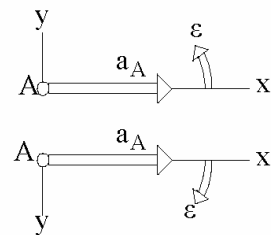


Рисунок 20.9

20.9 | ускорения точек плоской фигуры относительно МЦУ распределены таким образом, будто бы она в заданный момент времени вращается вокруг перпендикулярной ей, проходящей через МЦУ, оси, т.е. ускорения точек могут определяться по формулам 18.15.

Предостережение от распространённой ошибки:

20.10 | МЦУ \neq МЦС, т.е. мгновенный центр ускорений и мгновенный центр скоростей в общем случае не одна и та же точка на плоской фигуре. Так, для равномерно катящегося без проскальзываний по плоскости колеса мгновенным центром скоростей является точка С его соприкасания с плоскостью (см. рис. 20.10); мгновенным же центром ускорений является центр колеса – точка О.

Иллюстрация предостережения 20.10

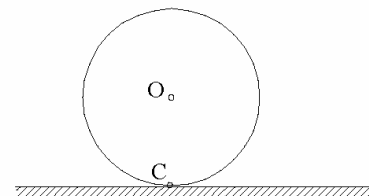


Рисунок 20.10

ПРИМЕР 20.3.- На использование понятия МЦУ для определения ускорений вершин квадрата

Даны: ускорение точки A квадрата (см. рис.20.8) - направлено от A к D и его модуль $a_A = 1500 \text{ м/с}^2$; угловое ускорение - направление указано на рисунке, модуль - $\varepsilon = 2000 \text{ с}^{-2}$; модуль угловой скорости $\omega = 50 \text{ с}^{-1}$; сторона квадрата - $h = 0,5 \text{ м}$.

Определить ускорения точек B, C, D .

Решение.- Вычисляем координаты МЦУ

$$x = \frac{1500}{50^4 + 2000^2} \cdot 50^2 = 0,366 \text{ м};$$

$$y = \frac{1500}{50^4 + 2000^2} \cdot 2000 = 0,293 \text{ м}.$$

Изображаем в масштабе заданный квадрат, на нём МЦУ (точку O - см. рис.20.12) и непосредственными замерами из чертежа определяем:

$$\frac{OB}{OA} = 0,90; \quad \frac{OC}{OA} = 0,53; \quad \frac{OD}{OA} = 0,68; \quad \alpha = 38^\circ.$$

В соответствии с 20.9: ускорения всех точек квадрата ($\vec{a}_B, \vec{a}_C, \vec{a}_D$) отклонены от соответствующих радиус-векторов ($\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD}$) на одинаковые углы, в одном направлении (указываемом круговой стрелкой $\vec{\varepsilon}$) и

определяемые из выражения $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{2000}{50^2} = 0,8$. Модули ускорений

рассматриваемых точек пропорциональны расстояниям h от МЦУ

$$(a = h \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}), \text{ т.е. получаем: } a_B = a_A \cdot \frac{OB}{OA} = 1500 \cdot 0,9 = 1350 \text{ м/с}^2;$$

$$a_C = a_A \cdot \frac{OC}{OA} = 1500 \cdot 0,53 = 795 \text{ м/с}^2; \quad a_D = a_A \cdot \frac{OD}{OA} = 1500 \cdot 0,68 = 1020 \text{ м/с}^2.$$

К условию примера 20.3

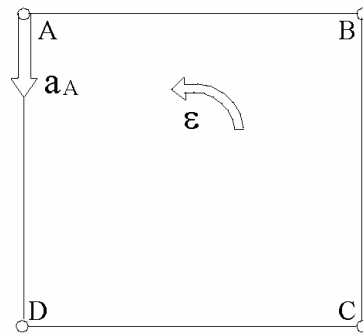


Рисунок 20.11

К решению примера 20.3

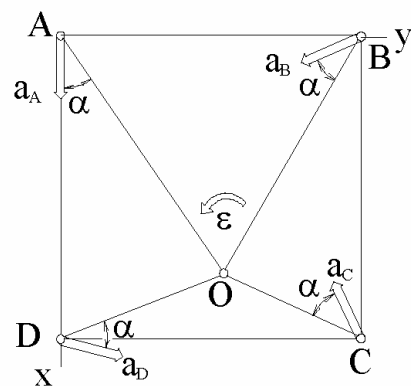


Рисунок 20.12

21. Основные методы, используемые в кинематических исследованиях наиболее распространённых механизмов

21.1. Метод подчёркивания букв в векторных уравнениях

В сложных механических системах встречаются совпадающие друг с другом точки, принадлежащие различным телам и имеющие, поэтому, различающуюся кинематику. Для одной и той же точки скорости могут быть абсолютными, относительными и переносными, а ускорения ещё и нормальными, касательными, кориолисовыми. При применении опорных фактов кинематики весь комплекс этих величин даёт много различных, по форме близких, алгебраических комбинаций, из которых исследователю необходимо выбрать те, которые приводят к решению рассматриваемой им задачи. Отсутствие систематизированного, упорядоченного подхода приводит к умственным перенапряжениям и головным болям даже у опытных расчётчиков. Составление алгоритмов решения задач и пользование ими существенно облегчается, если использовать *метод подчёркивания букв, отображающих векторные величины*:

21.1

под изображающей вектор буквой пишется в два уровня по вертикали два символа - верхний и нижний; верхний содержит информацию об известности направления вектора; нижний - об известности модуля этого вектора; известность - горизонтальная чёрточка, неизвестность - косой крест. Если под буквой нет символов, это означает, что изображаемый ею вектор неизвестен ни по модулю, ни по направлению.

В дальнейшем вместо «прямая расположения вектора» в том же смысле будет употребляться более короткая фраза - «направление вектора».

Примеры: $\underline{\underline{\vec{v}}}$ - скорость точки известна и по направлению, и по модулю;
 $\overset{\times}{\vec{a}}$ - в отведенном месте есть запись о направлении ускорения точки, его же модуль неизвестен;
 $\overset{\times}{\vec{\omega}}$ - модуль угловой скорости известен, направление - нет.

Применение метода рассмотрим на двух примерах.-

ПРИМЕР 21.1.- Кинематическое исследование механизма с качающейся направляющей для стержня

Дано (см. рис.21.1): $\varphi = 45^\circ$; $\alpha = 15^\circ$;
 $OA = 0,05$ м; $AB = 0,5$ м; $AC = 0,8$ м;
 $\omega_1 = 100$ с⁻¹; $\varepsilon_1 = 100$ с⁻².



Рисунок 21.1

Пояснения к рис.21.1: сочленения тел 1 и 3 с корпусом механизма (с неподвижной системой отсчёта) таково, что эти тела могут совершать лишь вращательные движения; так же сочленены между собою тела 1 и 2; при этом, «вращательное движение» не следует понимать так, что одно тело относительно второго обязательно должно делать полный оборот (движение может быть и вращательно-колебательным); тела 2 и 3 сочленены иначе - так, что одно относительно второго может совершать лишь поступательное движение (говорят: «тела сочленены в поступательную пару»); при этом, тело 2 можно представлять в форме прямолинейного стержня, проходящего через сквозное отверстие в теле 3).

Определить угловую скорость $\vec{\omega}_3$ и ускорение $\vec{\epsilon}_3$ тела 3, а также скорость \vec{v}_C и ускорение \vec{a}_C точки C относительно неподвижной системы.

Решение.- Абсолютной траекторией точки A является окружность радиуса AO с центром в точке O; следовательно $\vec{v}_A \perp AO$ (скорость касательна к траектории) и, судя по заданному $\vec{\omega}_1$, направлена влево-вверх, а её модуль:

$$v_A = AO \cdot \omega_1 = 0,05 \cdot 100 = 5 \text{ м/с.}$$

Итак,

$$a \quad | \quad \vec{v}_A \perp AO, \quad v_A = 5 \text{ м/с.}$$

Задаёмся целью определить скорость точки B₂.

Для этого за подвижную принимаем поступательно перемещающуюся систему координат $x'y'$ (см. рисунок), с началом совпадающим в функции времени с точкой A и, на основании закона сложения скоростей, записываем:

$$б \quad | \quad \vec{v}_{B_2} = \vec{v}_A + \vec{v}_{B_2A}, \quad \text{где}$$

$$\vec{v}_{B_2} = \vec{v}_{B_24} \quad (\text{«4»} - \text{это номер тела, с которым связана неподвижная}$$

система отсчёта), т.е. \vec{v}_{B_24} - это абсолютная скорость точки B₂; обычно второй символ (в рассматриваемом случае «4») опускают, ибо для отличия абсолютной скорости (ускорения) от переносной и относительной односимвольный индекс оказывается более удобным;

\vec{v}_A - абсолютная скорость точки A;

\vec{v}_{B_2A} - скорость точки B₂ относительно полюса A.

Траекторией точки B₂ относительно полюса A является дуга окружности радиуса BA с центром в точке A. Следовательно:

$$в \quad | \quad \vec{v}_{B_2A} \perp BA.$$

Используя 1 записываем:

$$г \quad | \quad \vec{v}_{B_2} = \underline{\underline{\vec{v}_A}} + \frac{\vec{v}_{B_2A}}{\times};$$

Векторное уравнение (г) пока не решается (говорят: содержит 3 неизвестных - \vec{v}_{B_2} неизвестен ни по направлению, ни по модулю; неизвестен и модуль вектора \vec{v}_{B_2A} ; решить уравнение можно лишь при 2-х неизвестных).

Временно оставляем его и переходим к поиску других уравнений.

Теперь за подвижную систему принимаем $x''y''$ (связана с качающейся направляющей 3) и на основании того же закона сложения скоростей записываем:

$$\vec{v}_{B_2} = \vec{v}_{B_3} + \vec{v}_{B_23}, \quad \text{где}$$

\vec{v}_{B_3} - абсолютная скорость точки В, принадлежащей телу 3. Эта точка неподвижна. Значит $v_{B_3} = 0$ и последнее векторное равенство принимает вид:

$$\vec{v}_{B_2} = \vec{v}_{B_23}.$$

Траекторией точки B_2 относительно тела 3 является отрезок прямой, параллельный оси y'' (во времени расположенный на стержне AC). Следовательно:

$$д \quad | \quad \vec{v}_{B_2} \parallel AC$$

и уравнение (г) принимает вид:

$$е \quad | \quad \frac{\vec{v}_{B_2}}{\times} = \underline{\underline{\vec{v}_A}} + \frac{\vec{v}_{B_2A}}{\times}.$$

Используя приём отрицательного модуля считаем, что $\vec{v}_{B_2} \uparrow\uparrow y''$, $\vec{v}_{B_2A} \uparrow\uparrow x''$ и, после проецирования (е) на оси x'' и y'' , получаем:

$$0 = -v_A \cdot \sin 30^\circ + v_{B_2A} \quad \mapsto \quad v_{B_2A} = 2,5 \text{ м/с};$$

$$v_{B_23} = -v_A \cdot \cos 30^\circ + 0 \quad \mapsto \quad v_{B_23} = -4,33 \text{ м/с}, \quad \text{т.е.}$$

$$\begin{array}{l|l}
 \text{ж} & \vec{v}_{B_2A} \uparrow\uparrow x'', \quad v_{B_2A} = 2,5 \text{ м/с}; \\
 \text{з} & \vec{v}_{B_23} \uparrow\downarrow y'', \quad v_{B_23} = 4,33 \text{ м/с}; \\
 \text{и} & \left| \begin{array}{l} \omega_{2A} = \frac{v_{B_2A}}{BA} = \frac{2,5}{0,5} = 5 \text{ с}^{-1}; \text{ причём, поворот тела 2 виден происхо-} \\ \text{дящим в рассматриваемый момент времени по ходу стрелки часов.} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Без дополнительных пояснений видно, что

$$\text{к} \quad | \quad \omega_3 = \omega_{2A} = 5 \text{ с}^{-1}; \quad \text{причём} \quad \vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_{2A}.$$

Скорость точки С находим вновь применяя закон сложения скоростей -

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA}.$$

Скорость \vec{v}_A известна и по модулю, и по направлению - см. (а).

Теперь о \vec{v}_{CA} . Траекторией точки А относительно системы $x'y'$ является дуга окружности радиуса АС с центром в точке А, т.е. $\vec{v}_{CA} \perp AC$; её модуль определяется по формуле вращательного движения -
 $v_{CA} = AC \cdot \omega_{2A} = 0,8 \cdot 5 = 4 \text{ м/с}$. Итак,

$$\text{л} \quad | \quad \vec{v}_{CA} \uparrow\uparrow x'', \quad v_{CA} = 4 \text{ м/с}.$$

Получено векторное уравнение $\vec{v}_C = \underline{\underline{\vec{v}_A}} + \underline{\underline{\vec{v}_{CA}}}$, имеющее две неизвестные.

С целью закрепления знаний решите его самостоятельно. Будет получено:

$$\dot{x}_C = 1,5 \text{ м/с}, \quad \dot{y}_C = -4,33 \text{ м/с}.$$

Переходим к определению ускорений.

Тело 1 относительно неподвижной системы совершает вращательное движение. Поэтому:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$$

и, в соответствии с формулами вращательного движения:

$$\text{м} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{a}_A^n \uparrow\uparrow \overrightarrow{AO}; \quad a_A^n = AO \cdot \omega_1^2 = 0,05 \cdot 100^2 = 500 \text{ м/с}^2; \\ \vec{a}_A^\tau \perp AO \text{ и направлен влево-вверх, } a_A^\tau = AO \cdot \varepsilon_1 = 0,05 \cdot 100 = 5 \text{ м/с}^2. \\ \text{Т.е. имеем: } \vec{a}_A = \underline{\underline{\vec{a}_A^n}} + \underline{\underline{\vec{a}_A^\tau}}. \end{array} \right.$$

На основании закона сложения ускорений:

$\vec{a}_{B_2} = \vec{a}_A + \vec{a}_{B_2A}$, $\vec{a}_{B_2A} = \vec{a}_{B_2A}^n + \vec{a}_{B_2A}^\tau$; кориолисова ($\vec{a}_{B_2A}^k$) составляющая ускорения равна нулю (т.к. подвижная система перемещается поступательно, что видно по символу «А»).

Т.к. траекторией точки B_2 относительно системы «А» является окружность радиуса BA с центром в точке А, то:

$$н \quad \left| \begin{array}{l} \vec{a}_{B_2A}^\tau \perp \vec{BA}; \quad \vec{a}_{B_2A}^n \uparrow\uparrow \vec{BA}, \quad a_{B_2A}^n = BA \cdot \omega_{2A}^2 = 0,5 \cdot 5^2 = 12,5 \text{ м/с}^2; \\ \vec{a}_{B_2} = \underline{\underline{\vec{a}_A^n}} + \underline{\underline{\vec{a}_A^\tau}} + \underline{\underline{\vec{a}_{B_2A}^n}} + \underline{\underline{\vec{a}_{B_2A}^\tau}}. \end{array} \right.$$

Пока полученное уравнение решить нельзя. Вновь используем закон сложения ускорений, но за подвижную теперь принимаем систему «3» - $x''y''$:

$\vec{a}_{B_2} = \vec{a}_{B_23} + \vec{a}_{B_23}^k$. О траектории точки B_2 относительно системы «3» уже писалось - отрезок прямой, параллельный оси y'' (во времени расположенный на стержне АС). Поэтому

$$о \quad \left| \begin{array}{l} \vec{a}_{B_23} \parallel AC. \quad \vec{a}_{B_23}^k \uparrow\downarrow x'' \text{ (на основании изложенного в подразделе} \\ \text{19.3 правила Жуковского);} \\ \text{модуль же этого вектора:} \\ a_{B_23}^k = 2 \cdot \omega_2 \cdot v_{B_23} \cdot \sin 90^\circ = 2 \cdot 5 \cdot 4,33 \cdot 1 = 43,3 \text{ м/с}^2. \quad \text{Т.е.} \\ \vec{a}_{B_2} = \underline{\underline{\vec{a}_{B_23}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{B_23}^k}}. \end{array} \right.$$

Замечание:

21.2 $\left| \begin{array}{l} \text{для ускорений кориолиса рекомендуем писать не просто } \vec{a}^k, \text{ или} \\ \vec{a}_{B_2}^k \text{ и т.п., а ещё и указывать системы отсчёта - } \vec{a}_{B_23}^k, \vec{a}_{B_2A}^k \text{ и т.д.} \end{array} \right.$
Необходимость делать это видна из рассматриваемого примера. В нём $\vec{a}_{B_23}^k \neq \vec{a}_{B_2A}^k$ ($a_{B_23}^k \neq 0, a_{B_2A}^k = 0$).

Возвращаемся к решению конкретной задачи. Видим: отдельно взятое векторное уравнение (о) как и (н) имеет 3 неизвестные и не может быть решено. Но решение появляется, если их объединить:

$$\frac{\vec{a}_{B_2 3}}{\times} + \frac{\vec{a}_{B_2 3}^k}{\times} = \frac{\vec{a}_A^n}{\times} + \frac{\vec{a}_A^\tau}{\times} + \frac{\vec{a}_{B_2 A}^n}{\times} + \frac{\vec{a}_{B_2 A}^\tau}{\times} \mapsto \frac{\vec{a}_{B_2 A}^\tau}{\times}; \frac{\vec{a}_{B_2 3}}{\times}.$$

Метод проектирования векторного уравнения на оси встречался неоднократно. Проверьте его усвоенность самостоятельно, проведя соответствующие вычислительные операции. Будет получено: $a_{B_2 A}^\tau = 474 \text{ м/с}^2$.

После этого определяем угловое ускорение $\vec{\varepsilon}_3 = \vec{\varepsilon}_{2A}$:

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_{2A} = \frac{a_{B_2 A}^\tau}{BA} = \frac{474}{0,5} = 948 \text{ с}^{-2}.$$

При этом получается, что круговая стрелка, изображающая векторы $\vec{\varepsilon}_3 = \vec{\varepsilon}_{2A}$ на плоскости, показывает направление противоположное ходу стрелок часов.

Ускорение точки С рекомендуем определить самостоятельно (как это делалось ранее). Будет получено:

$$\vec{a}_C = \frac{\vec{a}_A^n}{\times} + \frac{\vec{a}_A^\tau}{\times} + \frac{\vec{a}_{CA}^n}{\times} + \frac{\vec{a}_{CA}^\tau}{\times} \mapsto (\ddot{x}_C = -328 \text{ м/с}^2; \ddot{y}_C = -274 \text{ м/с}^2).$$

ПРИМЕР 21.2*.- На составление алгоритма кинематического исследования механизма с дугообразными направляющими

Дано: схема, геометрия и положение механизма, изображённого на рис.21.2. В момент времени, соответствующий заданному положению, известны угловые скорость ($\vec{\omega}_1$) и ускорение ($\vec{\varepsilon}_1$) вращательно-колебательного движения тела 1.

Найти последовательность расчёта, целью которого является определение ускорений \vec{a}_D , $\vec{\varepsilon}_{4D}$ и $\vec{\varepsilon}_{5D}$. При этом, мы приведен лишь остов алгоритма.

Студентам же рекомендуем дополнить его самостоятельным описанием направлений и модулей соответствующих векторов (подобно тому, как это делалось в примере 21.1), а полученные результаты обсудить, вскрывая свои, или товарищей-сокурсников, некорректности и, таким образом, установить истину.

Пояснения.- О, А, В, С и D - вращательные пары; кривая АВ - это дуга окружности с центром в точке G и радиусом R_2 ; кривая ВС - это дуга окружности с центром в точке H и радиусом R_3 . Тела 2 и 4, 3 и 5 имеют скользящие соединения,- такие, что: траекторией точки D относительно тела 2 является дуга DE окружности с центром в точке G и радиусом r_2 ; траекторией точки D относительно тела 3 является дуга DF окружности с центром в точке H и радиусом r_3 .

21.3

Рекомендация: в составляемых векторных уравнениях удобно в правой части первой записывать относительную скорость (ускорение); это позволяет сразу видеть систему отсчёта, принятую за подвижную, что и позволяет быстро записывать последующие векторы.

Решение.- Для нахождения \vec{a}_D , $\vec{\varepsilon}_{4D}$ и $\vec{\varepsilon}_{5D}$ вначале определим нужные скорости точек и тел.

Схема механизма с дугообразными направляющими

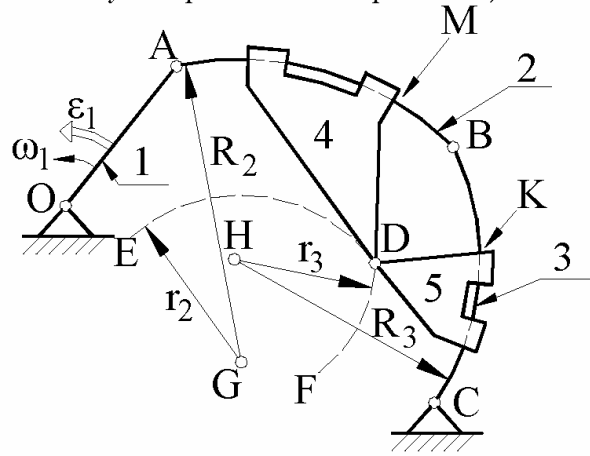


Рисунок 21.2

$$\frac{\vec{v}_B}{\times} = \frac{\vec{v}_{BA}}{\times} + \underline{\underline{\vec{v}_A}} \quad \mapsto \quad \underline{\underline{\vec{v}_B}}, \underline{\underline{\vec{v}_{BA}}} \quad \mapsto \quad \underline{\underline{\vec{\omega}_3}}, \underline{\underline{\vec{\omega}_{2A}}} \quad \mapsto \quad \underline{\underline{\vec{v}_{D3}}}, \underline{\underline{\vec{v}_{K3}}}.$$

$$\vec{v}_{D_2} = \underline{\underline{\vec{v}_{D_2A}}} + \underline{\underline{\vec{v}_A}} \quad \mapsto \quad \underline{\underline{\vec{v}_{D_2}}}; \quad \vec{v}_{M_2} = \underline{\underline{\vec{v}_{M_2A}}} + \underline{\underline{\vec{v}_A}} \quad \mapsto \quad \underline{\underline{\vec{v}_{M_2}}}.$$

$$\vec{v}_{D_4} = \frac{\vec{v}_{D_42}}{\times} + \underline{\underline{\vec{v}_{D_2}}}, \quad \vec{v}_{D_5} = \frac{\vec{v}_{D_53}}{\times} + \underline{\underline{\vec{v}_{D_3}}}, \quad \vec{v}_{D_4} = \vec{v}_{D_5} = \underline{\underline{\vec{v}_D}} \quad \mapsto$$

$$\frac{\vec{v}_{D_42}}{\times} + \underline{\underline{\vec{v}_{D_2}}} = \frac{\vec{v}_{D_53}}{\times} + \underline{\underline{\vec{v}_{D_3}}} \quad \mapsto \quad \underline{\underline{\vec{v}_{D_42}}}, \underline{\underline{\vec{v}_{D_53}}}, \quad \mapsto \quad \underline{\underline{\vec{v}_D}}.$$

$$\vec{v}_{M_4} = \frac{\vec{v}_{M_42}}{\times} + \underline{\underline{\vec{v}_{M_2}}}, \quad \vec{v}_{M_4} = \frac{\vec{v}_{M_4D}}{\times} + \underline{\underline{\vec{v}_D}} \quad \mapsto$$

$$\frac{\vec{v}_{M_42}}{\times} + \underline{\underline{\vec{v}_{M_2}}} = \frac{\vec{v}_{M_4D}}{\times} + \underline{\underline{\vec{v}_D}} \quad \mapsto \quad \underline{\underline{\vec{v}_{M_42}}}, \underline{\underline{\vec{v}_{M_4D}}} \quad \mapsto \quad \underline{\underline{\vec{\omega}_{4D}}}.$$

$$\vec{v}_{K_5} = \frac{\vec{v}_{K_53}}{\times} + \underline{\underline{\vec{v}_{K_3}}}, \quad \vec{v}_{K_5} = \frac{\vec{v}_{K_5D}}{\times} + \underline{\underline{\vec{v}_D}} \quad \mapsto$$

$$\frac{\vec{v}_{K_53}}{\times} + \underline{\underline{\vec{v}_{K_3}}} = \frac{\vec{v}_{K_5D}}{\times} + \underline{\underline{\vec{v}_D}} \quad \mapsto \quad \underline{\underline{\vec{v}_{K_53}}}, \underline{\underline{\vec{v}_{K_5D}}} \quad \mapsto \quad \underline{\underline{\vec{\omega}_{5D}}}.$$

Переходим к ускорениям.-

$$\vec{a}_A = \underline{\underline{\vec{a}_A^n}} + \underline{\underline{\vec{a}_A^\tau}} \mapsto \underline{\underline{\vec{a}_A}}.$$

$$\frac{\vec{a}_B^\tau}{\times} + \underline{\underline{\vec{a}_B^n}} = \frac{\vec{a}_{BA}^\tau}{\times} + \underline{\underline{\vec{a}_{BA}^n}} + \underline{\underline{\vec{a}_A}} \mapsto \underline{\underline{\vec{a}_B^\tau}}, \underline{\underline{\vec{a}_{BA}^\tau}} \mapsto \underline{\underline{\vec{\varepsilon}_3}}, \underline{\underline{\vec{\varepsilon}_{2A}}}.$$

$$\vec{a}_{D_2} = \underline{\underline{\vec{a}_{D_2A}^n}} + \underline{\underline{\vec{a}_{D_2A}^\tau}} + \underline{\underline{\vec{a}_A}} \mapsto \underline{\underline{\vec{a}_{D_2}}}; \quad \vec{a}_{D_3} = \underline{\underline{\vec{a}_{D_3}^n}} + \underline{\underline{\vec{a}_{D_3}^\tau}} \mapsto \underline{\underline{\vec{a}_{D_3}}}.$$

$$\vec{a}_D = \underline{\underline{\vec{a}_{D_2}^n}} + \frac{\vec{a}_{D_2}^\tau}{\times} + \underline{\underline{\vec{a}_{D_2}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{D_2}^k}}, \quad \vec{a}_D = \underline{\underline{\vec{a}_{D_3}^n}} + \frac{\vec{a}_{D_3}^\tau}{\times} + \underline{\underline{\vec{a}_{D_3}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{D_3}^k}} \mapsto$$

$$\vec{a}_D = \underline{\underline{\vec{a}_{D_2}^n}} + \frac{\vec{a}_{D_2}^\tau}{\times} + \underline{\underline{\vec{a}_{D_2}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{D_2}^k}} = \underline{\underline{\vec{a}_{D_3}^n}} + \frac{\vec{a}_{D_3}^\tau}{\times} + \underline{\underline{\vec{a}_{D_3}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{D_3}^k}} \mapsto \underline{\underline{\vec{a}_{D_2}^\tau}}, \underline{\underline{\vec{a}_{D_3}^\tau}}, \underline{\underline{\vec{a}_D}}.$$

$$\vec{a}_{M_2} = \underline{\underline{\vec{a}_{M_2A}^n}} + \underline{\underline{\vec{a}_{M_2A}^\tau}} + \underline{\underline{\vec{a}_A}} \mapsto \underline{\underline{\vec{a}_{M_2}}}; \quad \vec{a}_{K_3} = \underline{\underline{\vec{a}_{K_3}^n}} + \underline{\underline{\vec{a}_{K_3}^\tau}} \mapsto \underline{\underline{\vec{a}_{K_3}}}.$$

$$\vec{a}_{M_4} = \frac{\vec{a}_{M_4D}^\tau}{\times} + \underline{\underline{\vec{a}_{M_4D}^n}} + \underline{\underline{\vec{a}_D}}, \quad \vec{a}_{M_4} = \frac{\vec{a}_{M_42}^\tau}{\times} + \underline{\underline{\vec{a}_{M_42}^n}} + \underline{\underline{\vec{a}_{M_2}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{M_42}^k}} \mapsto$$

$$\frac{\vec{a}_{M_4D}^\tau}{\times} + \underline{\underline{\vec{a}_{M_4D}^n}} + \underline{\underline{\vec{a}_D}} = \frac{\vec{a}_{M_42}^\tau}{\times} + \underline{\underline{\vec{a}_{M_42}^n}} + \underline{\underline{\vec{a}_{M_2}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{M_42}^k}} \mapsto \underline{\underline{\vec{a}_{M_4D}^\tau}} \mapsto \underline{\underline{\vec{\varepsilon}_{4D}}}.$$

$$\vec{a}_{K_5} = \frac{\vec{a}_{K_5D}^\tau}{\times} + \underline{\underline{\vec{a}_{K_5D}^n}} + \underline{\underline{\vec{a}_D}}, \quad \vec{a}_{K_5} = \frac{\vec{a}_{K_53}^\tau}{\times} + \underline{\underline{\vec{a}_{K_53}^n}} + \underline{\underline{\vec{a}_{K_3}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{K_53}^k}} \mapsto$$

$$\frac{\vec{a}_{K_5D}^\tau}{\times} + \underline{\underline{\vec{a}_{K_5D}^n}} + \underline{\underline{\vec{a}_D}} = \frac{\vec{a}_{K_53}^\tau}{\times} + \underline{\underline{\vec{a}_{K_53}^n}} + \underline{\underline{\vec{a}_{K_3}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{K_53}^k}} \mapsto \underline{\underline{\vec{a}_{K_5D}^\tau}} \mapsto \underline{\underline{\vec{\varepsilon}_{5D}}}.$$

21.2. Метод введения в рассмотрение систем отсчёта, превращающих подвижные оси вращения в неподвижные

Может использоваться для различных механизмов, но наибольшую значимость имеет для зубчато-рычажных. При этом, будущему инженеру, желающему видеть практицизм изучаемых им теорий, важно знать, что рабочие машины, в которых отсутствуют зубчатые передачи, встречаются редко.

С точки зрения кинематического анализа зубчатые передачи можно разделить на 2 класса.

Первый – оси вращения всех зубчатых колёс неподвижны; это так называемые рядовые их соединения, в кинематических исследованиях никаких трудностей не вызывающие – см. примеры 21.3 и 21.4.

Второй класс – зубчато-рычажные механизмы (планетарные, дифференциальные и др.); широко используются в общем редукторостроении, имеются практически в любом автомобиле и тракторе, во многих обрабатывающих станках, подъёмных и других машинах; их особенностью является наличие зубчатых колёс, оси вращения которых подвижны относительно корпусов механизмов.

Подробное ознакомление с зубчато-рычажными механизмами может быть начато с книги «Вулгаков Э.Б. Соосные зубчатые передачи. Справочник.- М.: Машиностроение, 1987.- 256 с.».

Кинематическое исследование зубчато-рычажных механизмов также оказывается несложным, если в рассмотрение введена осенесущая система отсчёта (такая, относительно которой оси вращения зубчатых колёс оказываются неподвижными).

21.4 | *Суть метода.*- Анализ движения начинают рассматривать с позиций наблюдателя, находящегося в осенесущей системе отсчёта. Это позволяет зубчато-рычажные механизмы (которыми они являются с позиций исследователя, находящегося в неподвижной системе отсчёта) превратить в рядовое соединение зубчатых колёс; их кинематическое исследование элементарно. Переход же от относительного движения к абсолютному осуществляется с помощью закона сложения угловых скоростей.

Приложение метода рассмотрим на двух примерах.

ПРИМЕР 21.3.- *На пару вращений*

Дано.- Схема зубчато-рычажного механизма (см. рис.21.3): слева - главный вид, посередине – вид сбоку; 1 – неподвижное, 2 и 3 подвижные зубчатые колёса; 4 – рычаг (иначе: водило), имеющий 3 оси вращения (O, A, B) для зубчатых колёс.

$r_1 = r_3$. Справа на рис.21.3 изображён рассматриваемый механизм с позиций исследователя, мысленно поместившего себя в системе отсчёта, связанной с водилом OAB.

Зубчато-рычажный механизм, иллюстрирующий пару вращений

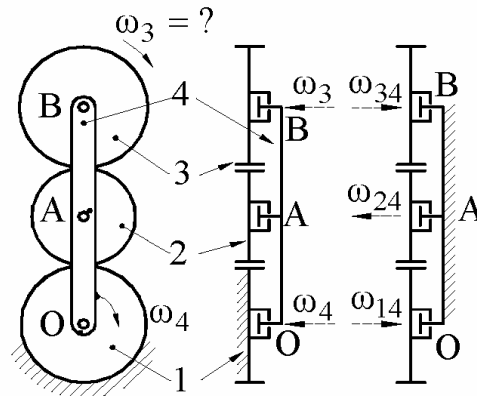


Рисунок 21.3

Установить зависит ли угловая скорость ω_3 зубчатого колеса 3 от угловой скорости водила 4. И если зависит, вывести соответствующую формулу.

Решение.- $\vec{\omega}_{14}$, $\vec{\omega}_{24}$, $\vec{\omega}_{34}$ - угловые скорости 1-го, 2-го и 3-го зубчатых колёс относительно водила (относительно системы отсчёта, в которой оси вращения оказываются неподвижными). Из примеров 18.3 и 18.4 с очевидностью следует:

$$\omega_{14} \cdot r_1 = \omega_{24} \cdot r_2, \quad \omega_{24} \cdot r_2 = \omega_{34} \cdot r_3 \quad \mapsto \quad \omega_{34} \cdot r_3 = \omega_{14} \cdot r_1.$$

Т.к. $r_1 = r_3$, то $\vec{\omega}_{34} = \vec{\omega}_{14}$

Теперь, 2 раза задействовав закон сложения угловых скоростей, получаем:

$$\vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_{34} + \vec{\omega}_4 = \vec{\omega}_{14} + \vec{\omega}_4 = \vec{\omega}_1 = 0,$$

т.е. 3-е зубчатое колесо относительно неподвижной системы отсчёта совершает поступательное движение - для него $\vec{\omega}_{34} = -\vec{\omega}_4$.

21.5 | Сложное движение тела, складывающееся из 2-х вращений, таких, что относительная угловая скорость противоположна переносной и равна ей по модулю, называют *парой вращений*. У пары вращений абсолютным движением является поступательное.

ПРИМЕР 21.4.- Кинематическое исследование конического дифференциала автомобиля

На рис.21.4: 1 – рама автомобиля; 2 – двигатель с коробкой передач, приводящий во вращение карданный вал 3 (который имеет 2 шарнира Гука); 5 – конический дифференциал, приводящий во вращение правое (4) и левое (6) ведущие колёса.

На рис.21.5, являющимся кинематической детализацией рис.21.4, изображено: 1 – корпус дифференциала (неподвижен относительно рамы автомобиля); 3 – коническая шестерня, приводимая во вращение карданным валом; 4 – правое и 6 – левое ведущие колёса (приводятся в движение одинаковыми коническими колёсами, которым присвоены те же номера - 4 и 6); 7 и 8 – сателлиты

Принципиальная схема привода ведущих колёс автомобиля

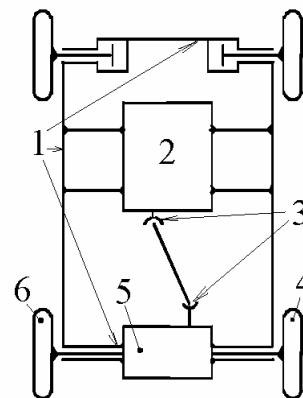


Рисунок 21.4

Кинематические связи конического дифференциала автомобиля с карданным валом и ведущими колёсами

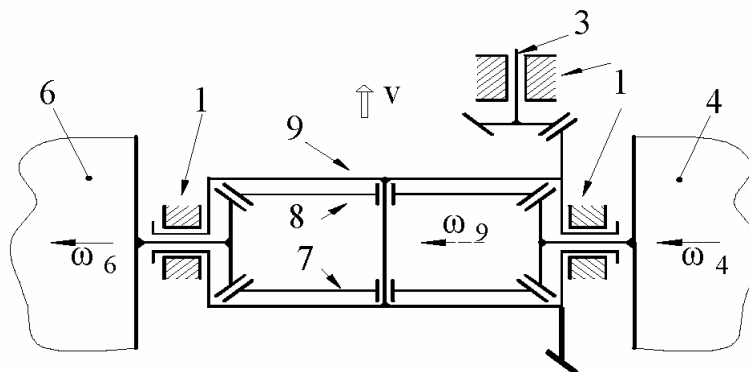


Рисунок 21.5

конического дифференциала (одинаковы; их оси вращения совпадают и подвижны относительно рамы); 9 – водило конического дифференциала (имеющее венец конического зубчатого колеса, входящего в зацепление с шестерней 3, и ось, вокруг которой независимо друг от друга вращаются сателлиты 7 и 8).

К кинематике конического дифференциала относительно водила

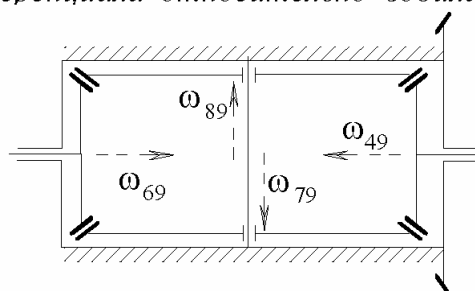


Рисунок 21.6

Дано.- Угловые скорости ведущих колёс - $\vec{\omega}_6$ и $\vec{\omega}_4$; их направления указаны на рис. 5; модули - $\omega_6 = 30 \text{ c}^{-1}$, $\omega_4 = 20 \text{ c}^{-1}$. Соотношения радиусов: $r_4 = r_6$, $r_7 = r_8 = 2 \cdot r_4$; $r_9 = 5 \cdot r_3$.

Определить угловую скорость шестерни 3 - $\vec{\omega}_3 = ?$

Решение.- Руководствуясь рис.21.6 рассматриваем кинематику относительного движения. При этом, используя метод отрицательного модуля, наугад принимаем угловую скорость колеса 6 - $\vec{\omega}_{69}$. Но если этот вектор принят направленным слева-направо, то очевидно, что $\vec{\omega}_{79}$ будет направлен вниз, $\vec{\omega}_{49}$ - справа-налево и $\vec{\omega}_{89}$ - вверх.

Ясно (см. примеры 18.3 и 18.4), что

$$a \quad | \quad \omega_{69} = \omega_{49} = 2 \cdot \omega_{79} = 2 \cdot \omega_{89}.$$

Используя закон сложения угловых скоростей, записываем:

$$b \quad | \quad \begin{aligned} \vec{\omega}_6 &= \vec{\omega}_{69} + \vec{\omega}_9, \\ \vec{\omega}_4 &= \vec{\omega}_{49} + \vec{\omega}_9. \end{aligned}$$

Проектируем (b) на горизонтальную ось:

$$-\omega_6 = \omega_{69} - \omega_9,$$

$$-\omega_4 = -\omega_{49} - \omega_9.$$

Складывая почленно последние 2 скалярных уравнения и учитывая при этом (a), получаем:

$$\omega_9 = 0,5 \cdot (\omega_6 + \omega_4) = 0,5 \cdot (30 + 20) = 25 \text{ c}^{-1}.$$

Модуль угловой скорости ω_9 оказался большим нуля. Значит (в соответствии с методом отрицательного модуля) вектор $\vec{\omega}_9$ как и предполагалось направлен справа-налево. Соответственно вектор $\vec{\omega}_3$ направлен вверх, а его модуль

$$\omega_3 = 5 \cdot \omega_9 = 5 \cdot 25 = 125 \text{ c}^{-1}.$$

22. Метод матричной кинематики

22.1. Введение в раздел

Метод матричной кинематики позволяет от разбросанности в записях и поясняющих длиннот элементарной и векторной алгебр перейти к упорядоченности и компактности, к быстрому ориентированию в преобразованиях, делает удобным использование компьютерной техники, что существенно облегчает исследовательский труд.

Особенно удобно использовать матричный метод в случаях, когда в процессе исследований приходится несколько раз переходить от одних систем отсчёта к другим.

Две основные инженерные задачи, при решении которых удобно использовать матричный метод:

1. Исследование движений схватов механических рук, манипуляторов и роботов; понятие «схват» см. на рис.22.1;

2. Отыскание взаимооггибающих линий и поверхностей - профилирование кулачков, зубьев зубчатых колёс и т.п., что особенно важно для специальностей «станки и режущий инструмент»; но по причине объёмности и специфичности вопроса здесь ограничиваемся лишь сообщением информации о наличии в инженерной литературе хорошо развитого способа проектирования сопряжённых профилей, основанного на использовании метода матричной кинематики.

Дополнительные сведения по рассматриваемому вопросу можно найти в «Игнатищев Р.М. Начала матричной кинематики. Могилёв: ротапринт ММИ, 1991.- 33 с.» - «Использование матричного метода для профилирования кулачка»; «Построение поворотной матрицы при ориентировании одной системы отсчёта относительно второй с помощью углов Эйлера»; «120 вариантов индивидуальных заданий по определению положений, скоростей и ускорений схватов в пятизвенных разомкнутых цепях, составленных из вращательных и поступательных пар».

Глубокое ознакомление с робототехникой можно начинать с книги: «Борисенко Л.А., Самойленко А.В. Механика промышленных роботов и манипуляторов с электроприводом.- Мн.: Выш. школа, 1992.- 234 с.».

22.2. Постановка задачи о многоступенчатом преобразовании координат

В опасных или неудобных для человека зонах выполнения производственных операций часто используют механические руки, манипуляторы и роботы. Диктуется это необходимостью добраться рабочим инструментом до требуемой точки некоторой части пространства, причём с обеспечением любой ориентации (с обеспечением возможности добраться до обрабатываемого объекта снизу, сверху, слева, справа, спереди, сзади). Это и обуславливает необходимость использования многозвенных механизмов, подобных изображённому на рис.1, где

1 – неподвижное звено; 2, 3, 4, 5, 6
7 – подвижные. С каждым из них
связана своя система отсчёта - XU
с индексами 1-7, взятыми в
соответствии с номерами звеньев.

Например, X_{M7} - это абсцисса точки
M в 7-й системе отсчёта (7 – это
схват – часть механизма, служащая
для закрепления в ней переносимой
детали, сварочного электрода,
электродрели, пилы,
краскораспылителя, шлифмашинки,
перфоратора и т.п.).

Применительно к механизму по
рис.1 цепочка связей между
системами отсчёта имеет вид:

*Разомкнутый механизм с последова-
тельным соединением вращательными и
поступательными парами 7-ми звеньев*

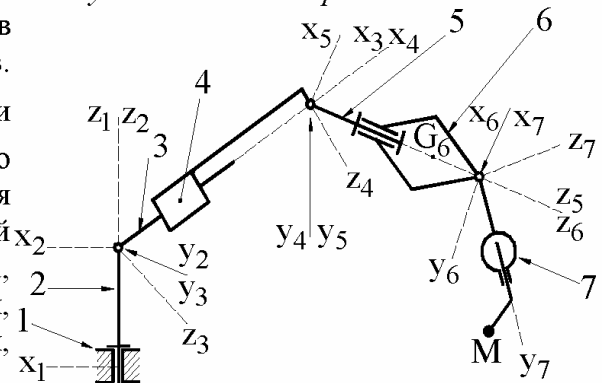


Рисунок 22.1

$$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 4 \leftarrow 5 \leftarrow 6 \leftarrow 7 \leftarrow M.$$

В общем случае цепочку связей между системами отсчёта можно записать:

$$22.1 \quad \left| \begin{array}{l} 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow \dots OXYZ \leftarrow oxuz \leftarrow \dots \leftarrow B \leftarrow A \leftarrow M, \\ M - \text{точка, координаты которой известны относительно схвата } A. \end{array} \right. \quad \text{где}$$

Считаем известными также положения систем отсчёта A относительно B ,
 B относительно C , ..., $oxuz$ относительно $OXYZ$ и т.д., 3-й относительно 2-
й, 2-й относительно 1-й.

Требуется установить положение точки M относительно неподвижной
системы отсчёта.

22.3. Спарка систем отсчёта и матрица преобразования в ней координат

Спарка систем отсчёта - это любая их пара, связанная между собою процедурой преобразования координат (иначе: это любая соседствующая пара систем отсчёта из цепочки 22.1).

Пусть $OXYZ \leftarrow oxuz$ (см.рис.22.2) - любая из спарок систем отсчёта; $oxuz$ (орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) называем координатопередающей,

К подразделу 22.3

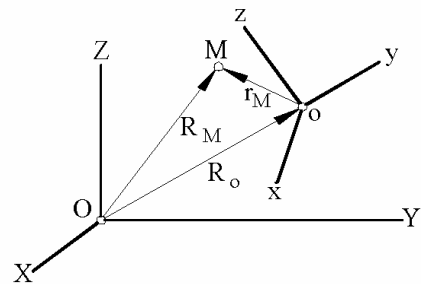


Рисунок 22.2

$OXYZ$ (орты $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$) - координатопринимая системы отсчёта.

И пусть: \vec{r}_M = просто $\vec{r}(x, y, z)$ - радиус-вектор произвольной точки M в системе $oxyz$; $\vec{R}_O(X_O, Y_O, Z_O)$ - радиус-вектор, определяющий положение начала системы $oxyz$ относительно $OXYZ$;

\vec{R}_M = просто $\vec{R}(X, Y, Z)$ - радиус-вектор, определяющий положение точки M относительно системы $OXYZ$.

Т.к. $\vec{R} = \vec{R}_O + \vec{r} = \vec{r} + \vec{R}_O$, то поочерёдно перемножая \vec{R} на орты $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$, получаем:

$$a \left| \begin{array}{l} X = x \cdot (\vec{i} \cdot \vec{I}) + y \cdot (\vec{j} \cdot \vec{I}) + z \cdot (\vec{k} \cdot \vec{I}) + X_O; \\ Y = x \cdot (\vec{i} \cdot \vec{J}) + y \cdot (\vec{j} \cdot \vec{J}) + z \cdot (\vec{k} \cdot \vec{J}) + Y_O; \\ Z = x \cdot (\vec{i} \cdot \vec{K}) + y \cdot (\vec{j} \cdot \vec{K}) + z \cdot (\vec{k} \cdot \vec{K}) + Z_O. \end{array} \right.$$

$$(\vec{i} \cdot \vec{I}) = \cos(\angle xX) = \text{сокращённо } C_{x1};$$

$$(\vec{j} \cdot \vec{I}) = \cos(\angle yX) = \text{сокращённо } C_{y1}; \dots\dots$$

$$(\vec{i} \cdot \vec{J}) = \cos(\angle xY) = \text{сокращённо } C_{x2}; \dots\dots\dots$$

$$2.22 \left| \hat{C} = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{ccc} C_{x1} & C_{y1} & C_{z1} \\ C_{x2} & C_{y2} & C_{z2} \\ C_{x3} & C_{y3} & C_{z3} \end{array} \\ \hline \end{array} \right. \begin{array}{l} (\vec{k} \cdot \vec{K}) = \cos(\angle zZ) = \text{сокращённо } C_{z3}. \\ \text{называют поворотной матрицей, где } 1, 2, 3 \\ \text{— имена осей соответственно } X, Y, Z. \end{array}$$

Замечание: ранее использовавшееся правило в двухсимвольном индексе на второе место ставить имя системы отсчёта, относительно которой определяется положение перемещающегося объекта ($\mathbf{V}_{B_2A}, \mathbf{V}_{B_4}$ и т.д.) перенесено и в обозначения направляющих косинусов.

Поворотную матрицу считаем известной. Однако это не означает, что все её $3 \times 3 = 9$ компонентов независимы друг от друга. Независимыми из них являются лишь 3. Остальные могут вычисляться по уравнениям, получающимся из легко запоминаемых условий:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1; \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

(надо только $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ выразить через $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$).

Имеющийся в (а) столбец \vec{R}_O^\downarrow назовём - «вектор-столбец, определяющий положение начала координатопередающей системы отсчёта относительно координатопринимающей».

$$\vec{R}_O^\downarrow = \begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{pmatrix}$$

Прямоугольную матрицу \hat{U} называют *матрицей положения* координатопередающей системы отсчёта относительно координатопринимающей.

Чтобы приспособить прямоугольную матрицу положения \hat{U} под операцию произведения её дополняют снизу строкой $\|0 \ 0 \ 0 \ 1\|$. В результате получается

$$22.3 \quad \hat{R} = \begin{pmatrix} C_{x1} & C_{y1} & C_{z1} & X_o \\ C_{x2} & C_{y2} & C_{z2} & Y_o \\ C_{x3} & C_{y3} & C_{z3} & Z_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{- матрица преобразования координат в спарке систем отсчёта.}$$

Четырёхкомпонентные столбцы $R_O^\downarrow, R^\downarrow, r^\downarrow$ будем называть - «адаптированные вектор-столбцы координат точек» (соответственно O и M).

$$R_O^\downarrow = \begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R^\downarrow = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r^\downarrow = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Адаптированные = приспособленные под процедуру произведения матриц.

Чтобы структурно-терминологическое описание матрицы преобразования было полным, строку $\vec{0} = \|0 \ 0 \ 0\|$ называем - «нулевая вектор-строка».

22.4. Матричная формула преобразования координат в спарке систем отсчёта

Из (а) и понятия произведения матриц видно:

$$22.4 \quad R^\downarrow = \hat{R} \cdot r^\downarrow \quad \text{- адаптированный вектор-столбец координат точки в принимающей системе отсчёта равен произведению матрицы преобразования координат в спарке на адаптированный вектор-столбец координат этой же точки в передающей системе отсчёта.}$$

Формула 22.4 простейшая. Необходимо только владеть процедурой перемножения матриц.

Для облегчения запоминания и хранения в памяти операций, применяемых при перемножении матриц, рекомендуем математическое определение дополнять кинематическим образом – правая матрица поворачивается на 90° против хода стрелки часов, устанавливается над левой матрицей и затем одношаговыми перемещениями протягивается по неподвижной левой матрице. Особенно этот кинематический образ удобен при рассмотрении произведения матрицы на вектор-столбец:

при первом шаге повернутый столбец накроет 1-ю строку матрицы; перекрывшие друг друга элементы попарно перемножаются; сумма произведений и является верхним элементом искомого вектор-столбца;

при втором шаге повернутый столбец накроет 2-ю строку матрицы; перекрывшие друг друга элементы попарно перемножаются; сумма произведений даст второй (сверху) элемент искомого вектор-столбца; и т.д.

Итак, если воспользоваться правилами произведения матриц, то из формулы 22.4 получается результат (а), но новый подход укорачивает записи, даёт упорядоченность при их разворачивании и существенно снижает вероятность появления в процессе преобразований ошибок.

22.5. Матричная формула преобразования координат для цепочки связанных систем отсчёта

Без дополнительных рассуждений ясно, что

$$22.5 \quad \left| \quad R_{M1}^\downarrow = \hat{R}_{1\leftarrow 2} \cdot \hat{R}_{2\leftarrow 3} \cdot \dots \cdot \hat{R}_{C\leftarrow B} \cdot \hat{R}_{B\leftarrow A} \cdot R_{MA}^\downarrow \quad \right|$$

Применительно к устройству по рис.1 формула 4 принимает вид:

$$R_{M1}^\downarrow = \hat{R}_{1\leftarrow 2} \cdot \hat{R}_{2\leftarrow 3} \cdot \hat{R}_{3\leftarrow 4} \cdot \hat{R}_{4\leftarrow 5} \cdot \hat{R}_{5\leftarrow 6} \cdot \hat{R}_{6\leftarrow 7} \cdot R_{M7}^\downarrow$$

22.6. Пример многоступенчатого преобразования координат

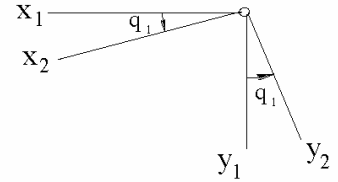
Принимаем к рассмотрению пример по рис.22.1 и записываем матрицы преобразования для всех парок систем отсчёта. При этом, используем сокращённые обозначения:

$$\cos q_1 = C_1, \sin q_1 = S_1; \quad \cos q_2 = C_2, \sin q_2 = S_2; \quad \dots$$

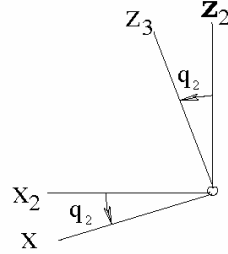
и т.д. - $\cos q_6 = C_6, \sin q_6 = S_6$.

$$\hat{R}_{1 \leftarrow 2} = \begin{vmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & H \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Z_{O_2 1} = \text{const}(t) = H$$



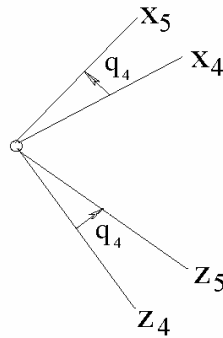
$$\hat{R}_{2 \leftarrow 3} = \begin{vmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



$$\hat{R}_{3 \leftarrow 4} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & q_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

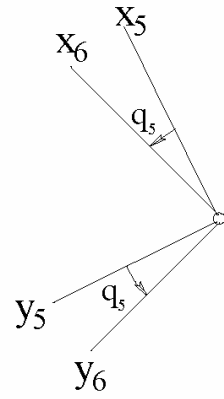
$$x_4 \uparrow\uparrow x_3; y_4 \uparrow\uparrow y_3; z_4 \uparrow\uparrow z_3. \quad X_{O_4 3} = q_3$$

$$\hat{R}_{4 \leftarrow 5} = \begin{vmatrix} C_4 & 0 & S_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

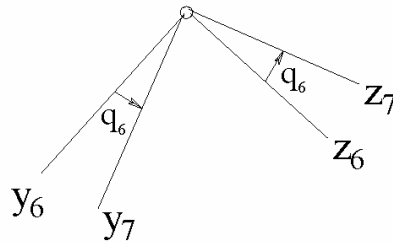


$$\hat{R}_{5 \leftarrow 6} = \begin{vmatrix} C_5 & -S_5 & 0 & F \\ S_5 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Z_{O_6 5} = \text{const}(t) = F$$



$$\hat{R}_{6 \leftarrow 7} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_6 & -S_6 & 0 \\ 0 & S_6 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



Пусть координатами точки М относительно схвата являются $X_{M7} = A$, $Y_{M7} = B$, $Z_{M7} = D$. Тогда:

$$R_{M7}^{\downarrow} = \begin{Bmatrix} A \\ B \\ D \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad R_{M6}^{\downarrow} = \hat{R}_{6 \leftarrow 7} \cdot \begin{Bmatrix} A \\ B \\ D \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A \\ B \cdot C_6 - D \cdot S_6 \\ B \cdot S_6 + D \cdot C_6 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$R_{M5}^{\downarrow} = \hat{R}_{5 \leftarrow 6} \cdot R_{M6}^{\downarrow} = \begin{Bmatrix} A \cdot C_5 - (B \cdot C_6 - D \cdot S_6) \cdot S_5 + F \\ A \cdot S_5 + (B \cdot C_6 - D \cdot S_6) \cdot C_5 \\ B \cdot S_6 + D \cdot C_6 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$R_{M4}^{\downarrow} = \hat{R}_{4 \leftarrow 5} \cdot R_{M5}^{\downarrow} = \begin{Bmatrix} [A \cdot C_5 - (B \cdot C_6 - D \cdot S_6) \cdot S_5 + F] \cdot C_4 + (B \cdot S_6 + D \cdot C_6) \cdot S_4 \\ A \cdot S_5 + (B \cdot C_6 - D \cdot S_6) \cdot C_5 \\ -[A \cdot C_5 - (B \cdot C_6 - D \cdot S_6) \cdot S_5 + F] \cdot S_4 + (B \cdot S_6 + D \cdot C_6) \cdot C_4 \\ 1 \end{Bmatrix};$$

Аналогично:

$$R_{M3}^{\downarrow} = \hat{R}_{3 \leftarrow 4} \cdot R_{M4}^{\downarrow} = \dots; \quad R_{M2}^{\downarrow} = \hat{R}_{2 \leftarrow 3} \cdot R_{M3}^{\downarrow} = \dots; \quad R_{M1}^{\downarrow} = \hat{R}_{1 \leftarrow 2} \cdot R_{M2}^{\downarrow} = \dots$$

Последняя операция перемножения матрицы преобразования координат на адаптированный вектор-столбец приводит к результату:

$$X_{M1} = C_1 \cdot (C_2 \cdot f_1 + S_2 \cdot f_2) - S_1 \cdot f_3; \quad Y_{M1} = S_1 \cdot (C_2 \cdot f_1 + S_2 \cdot f_2) + C_1 \cdot f_3; \\ Z_{M1} = C_2 \cdot f_2 - S_2 \cdot f_1 + H,$$

где

$$f_1 = C_4 \cdot [A \cdot C_5 - (B \cdot C_6 - D \cdot S_6) \cdot S_5 + F] + S_4 \cdot (B \cdot S_6 + D \cdot C_6) + q_3;$$

$$f_2 = -S_4 \cdot [A \cdot C_5 - (B \cdot C_6 - D \cdot S_6) \cdot S_5 + F] + C_4 \cdot (B \cdot S_6 + D \cdot C_6);$$

$$f_3 = A \cdot S_5 + (B \cdot C_6 - D \cdot S_6) \cdot C_5.$$

После определения координат точки относительно неподвижной системы отсчёта несложно (см. подраздел 17.5), используя численный метод, определить абсолютные скорость и ускорение.

22.7. Заключение по разделу

Мала вероятность, что в ближайшие 20-30 лет инженерам придётся создавать механические руки, манипуляторы и роботы с большим чем 7 числом последовательно соединённых звеньев, ибо экономический фактор обязывает всегда стремиться иметь как можно более простые конструкции. Поэтому, на основании рассмотренного в подразделе 6, можно заключить: метод матричной кинематики даже вручную позволяет за несколько часов *аналитически* описать движение любой точки робототехнического механизма; причём, время получения итоговых математических выражений можно существенно сократить – если составлять их с использованием компьютерной техники (с применением редактора формул).

Это значит, что при создании *на сегодняшний день недостаточно развитой техники механических рук и манипуляторов* у разработчика не возникнет непреодолимых механических задач, т.е. нами показано одно из тех направлений возможной деятельности молодых инженеров-машиностроителей, в котором они смогут, проявляя инициативу, заявить о себе как о сформировавшемся и умеющем делать конкретные дела специалисте.

Раздел III. ДИНАМИКА

23. Предмет изучения и основные задачи

Динамика – это часть теоретической механики, в которой рассматриваются наиболее общие связи между пространственно-временными, массовыми и силовыми характеристиками механических систем.

Основные решаемые в ней задачи:

по известным массовым и пространственно-временным характеристикам определяют силовые характеристики; например, по известным массе тела и закону движения центра масс определяют главный вектор действующих на это тело сил;

вторая основная задача динамики – определение пространственно-временных характеристик по известным массовым и силовым характеристикам.

Характерным признаком решений 1-й основной задачи динамики является наличие в них процедур взятия производных (по времени). Характерный признак решений 2-й основной задачи - наличие интегральных.

24. О массах и механических системах

24.1. Понятие о массе тела. Основные единицы её измерения

Наблюдения показывают, что тела, содержащие различные количества вещества (например те, которые при одинаковых удельных весах имеют неодинаковые объёмы) имеют и различную кинематику при действии на них одинаковых систем сил. Для учёта этого явления и используется понятие «масса».

Масса - это одна из основных характеристик любого материального объекта, определяющая его инертные и гравитационные свойства. Её единицей измерения является килограмм.

Из истории килограмма.

30.03.1791 года национальное собрание Франции, рассмотрев предложение комиссии учёных, постановило за единицу массы принять массу 1-го кубического дециметра чистой воды при температуре наибольшей её плотности (4°C). Эта единица и была названа килограммом.

Парижский дециметр равен берлинскому, лондонскому и московскому лишь с определённым уровнем точности и зависит от температуры сосуда. К определённым погрешностям приводят и различия, появляющиеся при конкретных реализациях фактора «чистая вода». В 1872 году Международная комиссия по прототипам метрической системы решила отказаться от естественного эталона килограмма; более удобным она посчитала эталон килограмма, выполненный из твёрдого тела.

В 1889 году были закончены изготовление и сличение серии платино-иридиевых эталонов килограмма. Один из них передали в Международное бюро мер и весов; его называют Международным прототипом килограмма; хранится под тремя, друг в друга вставленными, стеклянными колпаками, в городе Севре (близ Парижа). Остальные эталоны (их называют национальными) были распределены между странами-участницами, подписывавшими соответствующую международную конвенцию - США, Германия, Англия, Япония и ряд других развитых стран. России достался эталон №12.

В состав эталона входят также прецизионные эталонные весы, позволяющие проводить сличения с относительной погрешностью не более $2 \cdot 10^{-9}$.

Платино-иридиевый эталон 1889 года уравнивается 1,000028 кубическим дециметром дистиллированной воды при 4°C .

С национальных делают вторичные эталоны и уже по ним - рабочие образцы килограмма.

Желание иметь простой и более точный способ воспроизводства единицы массы объясняет почему учёные ещё и сейчас ведут поиски в направлении создания более совершенного эталона килограмма. Есть, например, предложения перейти к Атомному эталону. Так, в журнале «Наука и жизнь» (1991, №11, с.96) предлагается за 1 килограмм принимать массу, которой обладает $215107142857 \cdot 10^{13}$ атомов кремния.

Итак, масса – это мера содержащегося в теле вещества. Основной единицей её измерения является килограмм.

2.2. Аксиома о массах. Понятия механической системы и частицы

Среди частей вещества есть такие, например молекулы либо их комплексы, массы которых – постоянные величины, но есть частицы вещества и с переменными массами. Например, масса электрона (m) подчиняется зависимости

$$m = m_0 + \frac{T}{c^2},$$

где m_0 - масса покоя электрона, T - его кинетическая энергия, c - скорость света в вакууме.

Современная физика оперирует также такими законами и понятиями как «дефект масс» ($\Delta E = \Delta M \cdot c^2$), «аннигиляция частиц» и подобными.

Аксиома о массах (это вторая аксиома, ограничивающая область применимости опорных фактов теоретической механики; первая пространственно-временная ограничительная аксиома была рассмотрена в кинематике):

24.1

если у принятой к рассмотрению части материальной среды отсутствуют процессы деления или слияния физических частиц, а ограничивающая её оболочка не пересекается частицами, то масса такой части материальной среды является постоянной во времени величиной.

Пояснение: динамические процессы, наблюдаемые при ядерных взрывах не являются предметом рассмотрения теоретической механики; взрывы же механической и химической природы (причинами чего могут быть, к примеру, разрушения оболочек, удерживающих сжатый газ, или перегретый пар, а также взрывы динамита, скопившегося в горных выработках метана и т.п.) допустимо анализировать с использованием излагаемых в теоретической механике методов и опорных фактов.

Части материальной среды с постоянными во времени массами называют механическими системами.

Любая исходная механическая система может быть представлена состоящей из подсистем. Наиболее часто встречается случай, когда составляющими оказываются твёрдые тела. Иногда удобно для механических подсистем оконтуривающие оболочки принимать такими, чтобы они содержали участки с перетекающими через них массами (см. подразды 5.6 и 5.7), но аксиома 1 обязывает рассматривать это в рамках постоянства массы исходной механической системы, т.е. обязывает соблюдать принцип: «сколько массы ушло из одних механических подсистем, столько же её вошло в другие механические подсистемы».

Механическая частица (в дальнейшем просто – «частица») – это механическая подсистема, имеющая бесконечно малую постоянную массу.

Понятие это абстрактное и, как видно из изложенного выше, не во всём стыкуется с явлениями, наблюдаемыми у физических частиц. Но ... применение методов и опорных фактов теоретической механики, основанных на такой предпосылке, всегда приводило к получению результатов выдерживавших экспериментальные проверки. Это и является основанием к допустимости оперировать понятием «частица».

Введено же это понятие с той целью, чтобы можно было методы теоретической механики базировать на таких мощных и изящных методах математики как дифференциальное и интегральное исчисления.

24.3. Понятия о массе, центре масс механической системы и о материальной точке

Принимаем к рассмотрению произвольную механическую систему, состоящую из N подсистем, которые, в свою очередь, состоят из частиц, dm - масса одной из них.

По определению, величины

$$m_1 = \int_{(1)} dm, \quad m_2 = \int_{(2)} dm, \quad \dots, \quad m_k = \int_{(k)} dm, \quad \dots, \quad m_N = \int_{(N)} dm$$

называют массами, соответственно 1-й, 2-й, ... k -й и т.д., N -й подсистем, а

$$24.2 \quad \left| \quad m = \sum_{k=1}^N m_k \right.$$

- массой принятой к рассмотрению механической системы.

Пусть, далее, \vec{r} - радиус-вектор какой-либо отдельной частицы. Концы радиус-векторов $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_k, \dots, \vec{r}_N$, удовлетворяющих условиям

$$\vec{r}_1 \cdot m_1 = \int_{(1)} \vec{r} \cdot dm, \quad \vec{r}_2 \cdot m_2 = \int_{(2)} \vec{r} \cdot dm, \quad \dots, \quad \vec{r}_k \cdot m_k = \int_{(k)} \vec{r} \cdot dm, \quad \dots, \quad \vec{r}_N \cdot m_N = \int_{(N)} \vec{r} \cdot dm$$

называют центрами масс, соответственно, 1-й, 2-й, ... k -й и т.д., N -й подсистем, а точку C пространства, положение которой определяется из условия

$$24.3 \quad \left| \quad \vec{r}_C \cdot m = \sum_{k=1}^N (\vec{r}_k \cdot m_k) \right.$$

называют центром масс рассматриваемой механической системы.

Из введенных понятий видно, что для твёрдого тела центр масс – это знакомый из статики центр тяжести тела (если, конечно, при переходе от одной частицы к другой нет необходимости учитывать изменение ускорения свободного падения, что практически всегда и имеет место). Если же речь ведётся о сложной механической системе, то центр масс, как правило, оказывается точкой, не выходящей за пределы оболочки, оконтуривающей эту механическую систему, т.е. центр масс достаточно представительный объект для описания движений. В частности, для человека, находящегося на Земле и оценивающего движение летательного аппарата (самолёта, вертолёта, космического корабля и т.д.) мало интересно насколько этот центр масс перемещается относительно корпуса (в целом не выходя за его пределы).

В связи с этим, простым и удобным для рассмотрения движущимся объектом является *материальная точка* – это перемещающаяся вместе с центром масс механической системы точка, масса которой равна массе этой системы.

25. Главный закон-аксиома динамики - закон о движении центра масс

25.1. Исторический аспект и формулировка главного закона-аксиомы динамики

Первое, стройное и комплексное изложение классической механики, в котором от одних явлений можно теоретическим путём переходить к другим и быть, при этом, почти на 100% уверенным в правильности предсказанного, принадлежит английскому учёному Исааку Ньютону (1643-1727 годы). Обобщая научные достижения предшественников и современников – Галилео Галилея (1564-1642), Иоганна Кеплера (1571-1630), Христиана Гюйгенса (1629-1695), Рене Декарта (1596-1650), Роберта Гука (1635-1702), Готфрида Лейбница (1646-1716), Эдмунда Галлея (1656-1742) и других известных учёных – он в трактате «Математические начала натуральной философии» (1687 г.) сформулировал 3 закона-аксиомы и, на их основе, по аналогии с методами Евклидовой геометрии, применительно к классической механике построил аксиоматическую теорию.

Одним из законов-аксиом в «Математических началах» является «Закон равенства действия и противодействия». Современные его формулировки практически ничем не отличаются от тех, которые давал И.Ньютон.

В данном «Курсе» этот закон-аксиома принимается «один к одному». И он уже рассмотрен в статике.

Что же касается двух других законов («Закона инерции» и «Об изменении количества движения»), то принимать их за начала сегодня нерационально. И вот почему. -

За более чем 3 века, прошедшие со времени появления в свет «Математических начал», существенные изменения в направлении усовершенствования претерпел математический аппарат и применяемая в нём символика (в частности, велики в этом заслуги Г.Лейбница), во многом изменилась терминология (как математическая, так и механическая; достаточно констатировать, например, что во времена написания «Математических начал» отсутствовало как самостоятельное даже понятие «ускорение»), существенно изменились акценты, преподавателями найдены более рациональные последовательности построения курсов.

В разрезе сказанного важно знать и мнение академика А.Н.Крылова - переводчика «Математических начал» на русский язык. Перевод им осуществлён в 1914-1916 годах, а в 1942-м, в «Мои воспоминания», он писал (в издании 1984 года – с.219): «Некоторые авторы полагают, что Ньютон пользовался исчислением бесконечно малых, как он их называл «флюксий» и «флюент», в гораздо большей мере, нежели он это показал в «Началах». Изучение Ньютона и

перевод его «Начал» показали мне ... Во времена Ньютона алгебра и анализ далеко не были тем математическим орудием, как теперь», его «орудием была геометрия». Мнение А.Н.Крылова подтверждает и известный специалист по истории классической механики Н.Д.Моисеев. В своих «Очерки развития механики» он писал (в издании 1961 года с.177): «Нарочито избегая использования алгебраической символики при употреблении элементов дифференциального и интегрального исчисления, настаивая на архаическом аппарате теории конических сечений и теории пропорций, взамен аппарата аналитической геометрии Декарта и алгебраического оформления исчисления бесконечно малых Лейбница, Ньютон сделал свой трактат весьма неудобочитаемым не только для наших, но даже и для своих современников».

По этим причинам законы инерции и об изменении количества движения в данном базовом курсе будут рассматриваться не как аксиомы, а как твёрдо установленные факты механики, которые, в связи с этим, будут использоваться в качестве важных аргументов, доказывающих приемлемость применяемых в теоретической механике методов.

25.1 *Главный закон-аксиома динамики - закон о движении центра масс:*

существуют системы отсчёта, называемые инерциальными, в которых	
ускорение центра масс \vec{a}_C любой механической системы, её масса m и	
главный вектор действующих на неё внешних сил \vec{R}_r^E оказываются	
связанными математической зависимостью	$m \cdot \vec{a}_C = \vec{R}_r^E$.

Наиболее употребительными инерциальными системами отсчёта являются Гелио- и Геоцентрические. Подробнее о них речь ведётся в следующем разделе.

Справедливость рассматриваемого закона подтверждена более чем трёхвековыми наблюдениями и специально ставившимися экспериментами – при скоростях объектов на несколько порядков меньших скорости света математическое соотношение 25.1 оказывалось справедливым для тел и механических систем различных размеров – от физических и химических частиц (атом, молекула и т.д.) до планет Солнечной системы, охватывая, при этом, все существовавшие и ныне работающие машины и механизмы.

Векторное равенство 25.1 имеет три скалярных эквивалента –

25.2 *математические выражениями закона о движении центра масс в проекциях на декартовы оси координат:*

25.2	$m \cdot \ddot{x}_C = \sum X^E, \quad m \cdot \ddot{y}_C = \sum Y^E, \quad m \cdot \ddot{z}_C = \sum Z^E.$
------	--

Если при анализе движения механической системы исследователя интересует движение лишь центра масс, а не взаимное перемещение отдельных тел, то математическое выражение 25.1 записывают в упрощённой форме, называя его

25.23 | *основное уравнение динамики материальной точки:*

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}, \quad \text{где}$$
 m - масса материальной точки, \vec{F} - действующая на неё сила.

Замечание: в 25.23 массу m можно считать не только конечной, но и бесконечно малой величиной. В этом случае бесконечно малым будет и модуль силы \vec{F} .

Проекция основного уравнения динамики материальной точки на оси декартовой системы координат называют:

25.24 | *дифференциальные уравнения движения материальной точки -*

$$m \cdot \ddot{x} = X, \quad m \cdot \ddot{y} = Y, \quad m \cdot \ddot{z} = Z.$$

25.2. Что такое 1 Ньютон ?

За единицу измерения силы принят 1 Ньютон - это такая сила, которая тело массой 1 килограмм перемещает с ускорением 1 м/с². Из 6 видим:

$$H = \frac{\text{кг} \cdot \text{М}}{\text{с}^2}.$$

25.3. О косвенном влиянии внутренних сил на движение центра масс

Встречается неудачное выражение: «Внутренние силы на движение центра масс не влияют». Рекомендуем пользоваться формулировкой:

25.5 | внутренние силы в математическое выражение закона о движении центра масс не входят.

Что же касается ответа на вопрос «Влияют ли внутренние силы на движение центра масс?», то – «Влияют», ибо, к примеру, силы действующие внутри двигателя внутреннего сгорания в уравнение движения автомобиля не входят, но входят силы сцепления (приложены к ведущим колёсам со стороны дорожного покрытия), а они возникают лишь по причине появления внутренних сил в цилиндре работающего двигателя.

25.4. Три исторических примера, иллюстрирующих, что «корректное применение дифференциального и интегрального исчисления к опорным фактам 1-5 приводит к достоверным выводам»

25.4.1. Закон инерции

Пусть проекция на какую-либо ось (например x) главного вектора сил, действующих на механическую систему, равна нулю. Тогда, используя процедуры интегрирования, из 25.2 получаем:

$$m \cdot \ddot{x}_c = 0 \quad \mapsto \quad \ddot{x}_c = 0 \quad \mapsto \quad \dot{x}_c = \text{const}(t) \quad -$$

25.6' $\left\{ \begin{array}{l} \text{если сумма проекций на какую-либо ось инерциальной системы} \\ \text{отсчёта всех внешних сил, действующих на механическую систему,} \\ \text{равна нулю, то проекция центра масс на эту ось либо покоится, либо} \\ \text{за равные промежутки времени проходит равные расстояния.} \end{array} \right.$

Если кроме x находится ещё две непараллельные оси (например y и z), для которых имеют место аналогичные равенства $\sum Y^E = 0$ и $\sum Z^E = 0$, то результат 25.6' получает векторное отражение:

$$m \cdot \vec{a}_C = 0 \quad \mapsto \quad \vec{a}_C = 0 \quad \mapsto \quad d\vec{V}_C = 0 \quad \mapsto \quad \vec{V}_C = \text{const}(t) \quad -$$

25.6'' $\left\{ \begin{array}{l} \text{если главный вектор всех внешних сил, действующих на} \\ \text{механическую систему, равен нулю, то её центр масс либо покоится} \\ \text{относительно инерциальной системы отсчёта, либо движется} \\ \text{равномерно и прямолинейно.} \end{array} \right.$

Существо утверждений, сформулированных в опорном факте 25.6, находится на обозрении мировой научной общественности не менее 350 лет:

хотя и без чётких формулировок, но это имеется в «Вопросах, относящихся к книгам “Физика”» (1545 г.) испанца Доминико Сото (1494-1560);

в отчётливой формулировке содержится в «Беседах и математических доказательствах ...» (1638 г.) Галилео Галилея - «Когда тело движется по горизонтальной плоскости, не встречая никакого сопротивления движению, то ... движение это является равномерным и продолжалось бы бесконечно, если бы плоскость простиралась в пространстве без конца»;

у Христиана Гюйгенса - в качестве «гипотезы» в трактате «Маятниковые часы ...» (1673 г.);

в «Математических началах» (1687 г.) И.Ньютона – уже в форме закона-аксиомы - «Всякое тело продолжает удерживаться в своём состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не побуждается приложенными силами изменить это состояние».

За прошедшие 3,5 века не появилось ни одного экспериментального факта, который бы противоречил утверждению, содержащемуся в законе об инерции, что является одним из локальных доказательств приемлемости использования понятий, математических связей и методов их преобразования, отражённых в приведенных формулировках.

25.4.2. Законы движения свободно падающих и скользящих по наклонным желобам тел

Свободно падающее тело

Дано. - На рис.25.1 изображено тело A , весом G , которое после перерезания нити падает вниз.

S – ось отсчёта, O – её начало. M – положение падающего тела в произвольный момент времени t .

Определить зависимость проходимого телом пути от времени.

Решение.- Основное уравнение динамики точки в проекции на ось S принимает вид

$$m \cdot \ddot{s} = G \quad \mapsto \quad d\dot{s} = \frac{G}{m} \cdot dt \quad \mapsto \quad \dot{s} = \frac{G}{m} \cdot t \quad \mapsto$$

$$\mapsto \quad ds = \frac{G}{m} \cdot t \cdot dt \quad \mapsto \quad s = \frac{G}{2m} \cdot t^2.$$

Для моментов времени t_1 и t_2 :

Т.е. получаем:

25.7

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}.$$

Скольжение тела по гладкому наклонному желобу

Дано. - На рис.25.2 изображено тело, движущееся по наклонному желобу. \vec{G} - его сила тяжести,

\vec{N} - нормальная, действующая со стороны желоба реакция.

S – ось отсчёта, O – её начало. При $t = 0$ $s = s_0 = 0$, $V = V_0 = 0$.

Определить зависимость проходимого телом пути от времени.

Решение.- Основное уравнение динамики точки применительно к рассматриваемому случаю имеет вид

$$m \cdot \vec{a} = \vec{G} + \vec{N}.$$

Проектируя записанное векторное равенство на ось s , получаем

$$m \cdot \ddot{s} = G \cdot \sin \alpha$$

К свободно падающему телу

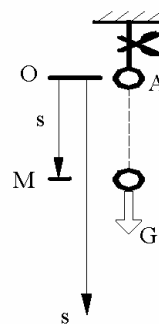


Рисунок 25.1

$$s_1 = \frac{G}{2m} \cdot t_1^2; \quad s_2 = \frac{G}{2m} \cdot t_2^2.$$

К скольжению тела по наклонному желобу

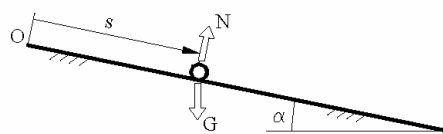


Рисунок 25.2

и затем, после взятия 1-го и 2-го интегралов: $s = \frac{G \cdot \sin \alpha}{2m} \cdot t^2$.

Откуда, как и для свободно падающего тела, получаем соотношение 25.7.

В 16 веке правильность отображения соотношением 25.7 движения свободно падающих тел и тел, движущихся по гладким наклонным желобам, была далеко не очевидной. Так, известный итальянский учёный Джамбатиста Бенедетти (1530-1590) в «Книга различных математических и физических рассуждений» (1585г.) считал, что скорость падения свинцового шара должна быть в 11 раз больше деревянного, а Рено Декарт в своих записях примерно 1620 года приводил вместо 25.7 соотношение

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1^{2,4}}{t_2^{2,4}}.$$

В трактатах того времени встречалось и соотношение 25.7, но оно приводилось в завуалированном виде и, главное, без доказательств.

Дать доказательства правильности описания формулой 25.7 движения свободно падающих и движущихся по наклонным желобам тел удалось лишь Галилео Галилею – в его «Беседы и математические доказательства ...» (1638 г.). При этом, заметим: опыты Галилея с бросанием тел с Пизанской башни (примерно 1589-1592 годы) не дали ему надёжных результатов – по причине отсутствия точных измерителей коротких промежутков времени; но он нашёл выход из положения – перешёл на опыты с бронзовым шариком, скользящим вдоль гладкого жёлоба на наклонённой *под различными углами* к горизонту доске. Хотя промежутки времени по-прежнему измерялись количеством вытекавшей из сосуда воды, их удалось удлинить примерно в 5-15 раз, что, в сочетании с возможностью менять угол наклона, оказалось достаточным для получения надёжных экспериментальных данных.

25.4.3. Математический маятник

Простой математический маятник – это подвешенная на нити материальная точка – см. рис.3, где O – точка подвеса; L - длина математического маятника; φ - угловая и s - окружная координаты; G - вес и m - масса материальной точки ($G = m \cdot g$); \vec{N} - натяжение нити и $\vec{\tau}$ - орт подвижной касательной.

Основное уравнение динамики применительно к математическому маятнику:
 $m \cdot \vec{a} = \vec{G} + \vec{N} \quad \mapsto \quad m \cdot (\vec{a}^\tau + \vec{a}^n) = \vec{G} + \vec{N} .$

Проектируем составленное векторное уравнение на подвижную касательную -

$$m \cdot \ddot{s} = -G \cdot \sin \varphi .$$

Учитываем известную из элементарной математики связь

$$s = L \cdot \varphi$$

и получаем:

$$25.8 \quad \left| \quad \ddot{\varphi} + k^2 \cdot \sin \varphi = 0, \quad \text{где } k = \sqrt{\frac{g}{L}} .$$

Несмотря на простоту записи, полученное дифференциальное уравнение в элементарных функциях неразрешимо (т.е. точное его решение не может быть представлено конечным числом сочетаний элементарных функций).

Если говорить об инженерной значимости, то на практике чаще всего встречается случай так называемых малых колебаний математического маятника. Пока его и будем иметь в виду.

$\sin \varphi$ представляем разложенным в степенной ряд -

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \frac{\varphi^9}{9!} - \dots + \dots - \dots$$

Ряд знакопеременный и убывающий, а из математического анализа известно, что в этом случае погрешность от пренебрежения бесконечной совокупностью членов отброшенной части ряда не превышает значения первого его члена, т.е. с

погрешностью, не превышающей $\frac{\varphi^3}{3!}$ можно записать:

$$25.9 \quad \left| \quad \ddot{\varphi} + k^2 \cdot \varphi = 0$$

Математическое выражение 25.9 называют канонической (простейшей, стандартной) формой дифференциального уравнения свободных колебаний, приёмы исследования которого уже излагались – в курсе высшей математики. Здесь ограничиваемся написанием лишь его решения:

К вопросу о движении математического маятника

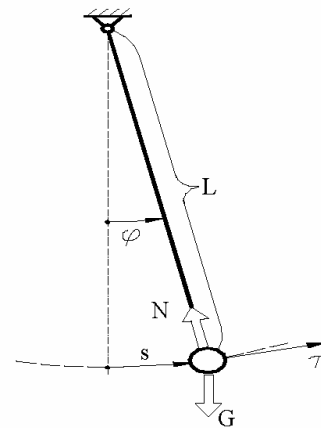


Рисунок 25.3

$$25.10 \quad \left| \quad \varphi = \Phi \cdot \sin(k \cdot t + \alpha) . \right.$$

Постоянные Φ, α определяем из начальных условий (при $t = 0 \quad \varphi = \varphi_0, \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$). При этом учитываем, что

$$\dot{\varphi} = \Phi \cdot k \cdot \cos(k \cdot t + \alpha) .$$

$$\text{Тогда:} \quad \varphi_0 = \Phi \cdot \sin(k \cdot 0 + \alpha) \mapsto \varphi_0 = \Phi \cdot \sin \alpha .$$

$$\dot{\varphi}_0 = \Phi \cdot k \cdot \cos(k \cdot 0 + \alpha) \mapsto \dot{\varphi}_0 = \Phi \cdot k \cdot \cos \alpha .$$

$$\text{Откуда:} \quad \alpha = \arctg\left(\frac{\varphi_0 \cdot k}{\dot{\varphi}_0}\right), \quad \Phi = \frac{\varphi_0}{\sin \alpha} .$$

Итак, период малых колебаний математического маятника определяется выражением

$$25.11 \quad \left| \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} . \right.$$

Главной задачей подраздела является показ обучающимся, что *излагаемые методы являются, если образно выразиться, тем строительным материалом, который позволяет сооружать надёжные мостики теоретических переходов от одних описаний механических явлений к другим*; к такого качества описаниям, которые дают почти 100-процентную уверенность в том, что теоретический прогноз совпадёт с данными опытной проверки предсказанного результата.

Чтобы обучающегося убедить в высокой надёжности предсказаний, получаемых методами теоретической механики, авторы считают целесообразным использовать для этого известные исторические примеры. Ими являлись «закон инерции» и «законы движения свободно падающих и скользящих по наклонным желобам тел». Математический маятник является ещё одним из таких примеров.

Почему средневековые оказались богатым на исследования в области маятников? - Потому, что вопросы мореходной практики настоятельно требовали создания часов.

Известно, в частности, что часы жолудеподобной формы в 1490 году делал в Нюрнберге Петер Хеле. Примерно в то же время в Кенигсберге их делал Ганс Ионс. Но точность часов того времени (и карманных, и башенных) примерно до 1660 года была слишком неудовлетворительной (все они спешили или опаздывали не менее, чем на час в сутки).

И лишь благодаря проведенным серьёзным исследованиям законов движения маятников удалось неточности хода часов снизить до нескольких минут, а затем и секунд, в сутки.

В создании теории маятников заметно участие Галилея. Он, моделируя математический маятник, подвешивал к нити различные по массе и плотности шары и правильно установил независимость периода колебаний от этих факторов. Что же касается явления изохронности (изохронность - это независимость периода колебаний от начальных условий), то здесь им был получен результат, требовавший дальнейшего уточнения – он считал, что колебания математического маятника изохронны не только при малых, но и больших углах размаха.

Исследовательские работы Галилея в области колебаний маятников продолжило молодое поколение учёных. Большой вклад в решение проблемы точности часов внесли Роберт Гук и Томас Томпсон (последний – больше практик, подхватывавший новейшие научные достижения в области совершенствования часов и завоевавший, поэтому, славу лучшего часовщика мира того времени).

Но наибольшие заслуги в решении проблемы точности хода часов у голландского учёного Христиана Гюйгенса. В частности, в 1657 году он от Правительства Голландии получил патент на маятниковые часы со «свободным пуском», в 1658-м опубликовал брошюру «Часы» (с подробным описанием их конструкции), и уточнил результаты исследований Галилея относительно изохронности колебаний математического маятника, что особенно важно для нас, изучающих курс теоретической механики, т.к. этот факт является очередным локальным доказательством приемлемости методов теоретической механики.

И действительно, если повысить точность решения дифуравнения 25.8, то период колебаний математического маятника окажется определяемым не по

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad \text{а по формуле} \quad T \approx 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \left(1 + \frac{\Phi_0^2}{16}\right)$$

(предоставляем студенту возможность самостоятельно разобраться с этим, широко изложенным в специальной литературе, результатом).

Возвращаясь к инженерно-практической сущности математического маятника замечаем: если размах колебаний ($2\Phi_0$) не превышает 45° , то с точки зрения точности вычисления периода колебаний, погрешность от пользования простой формулой 25.11 не превышает 1%. При $2\Phi_0 < 14,5^\circ$ погрешность меньше 0,1%.

Одна из главных учебных задач студента: овладеть стандартным набором методов и приёмов теоретической механики. Примеров, имеющих богатую историю, подобных 3-м рассмотренным, относительно мало, ибо подавляющее их большинство (иллюстрирующих те или иные аспекты и нюансы методов теоретической механики) появилось лишь тогда, когда решение задач механики превратилось в повседневные занятия армии специалистов. Однако, это не означает, что теоретически предсказываемые результаты в приводимых далее примерах могут не соответствовать опытным данным. С этой точки зрения все они в высочайшей степени достоверны, т.е. *опорный факт 1-4, с разворачиванием его в другие математические выражения через процедуры интегрирования, используется научным миром уже более 3-х веков и, в рамках применимости описанных на с.171, до сих пор не отмечено ни одного экспериментального опровержения теоретически предсказывавшимся результатам.* Понятно, если эти теоретически предсказываемые результаты были корректными; ибо, к примеру, если у кого-то вдруг оказывалось, что $\int x \cdot dx$ равен не $0,5 \cdot x^2 + c$, а положим $0,5 \cdot x^3 + c$, то это в счёт не идёт.

25.5. Примеры, иллюстрирующие первую основную задачу динамики

ПРИМЕР 25.1.- По известной массе материальной точки и уравнениям её движения в инерциальной системе отсчёта, заданным в координатной форме, определить действующую силу

Дано. - $m = 10 \text{ кг}$; $x = 5 \sin(2t)$, $y = 5 \cos(2t)$, $z = 5t^2$. В написанных формулах t - в секундах, углы - в радианах, координаты - в метрах.

Определить силу \vec{F} , под действием которой происходит описанное движение.

Решение.- Используя дифференциальные уравнения движения 7, получаем:

$$X = m \cdot \ddot{x} = 10 \cdot [-20 \sin(2t)] = -200 \sin(2t), \text{ Н};$$

$$Y = m \cdot \ddot{y} = 10 \cdot [-20 \cos(2t)] = -200 \cos(2t), \text{ Н};$$

$$Z = m \cdot \ddot{z} = 10 \cdot 10 = 100, \text{ Н}.$$

Итак,
$$\vec{F} = [-200 \sin(2t)] \cdot \vec{i} + [-200 \cos(2t)] \cdot \vec{j} + 100 \cdot \vec{k}.$$

ПРИМЕР 25.2.- Равномерное движение материальной точки по окружности

Дано. - Масса материальной точки - m (кг). Радиус окружности - r (м).

Определить силу \vec{F} , под действием которой происходит описанное движение.

Решение.-
$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot (\vec{a}^n + \vec{a}^r) = m \cdot (\vec{a}^n + 0) = \frac{m \cdot v^2}{r} \cdot \vec{n}.$$

25.6. Примеры, иллюстрирующие вторую основную задачу динамики

ПРИМЕР 3.- Разгон пассажирского поезда - это пример на определение движения центра масс в случае, когда главный вектор внешних сил является функцией времени. Вспомогательная значимость примера. - Это пример, иллюстрирующий наличие у инженеров возможностей своей деятельностью подтверждать уважительное отношение к принципу «Человек – высшая ценность общества и государства, надо постоянно улучшать условия его жизни» (принцип провозглашён «Всеобщей декларацией прав человека»; записан и в Конституции Республики Беларусь).

Дано. - С целью обеспечения высокой комфортности поездки пассажиров при разгоне поезда целесообразно соблюдать условие плавного изменения ускорения. Пусть, по этим соображениям, автоматическим регулятором обеспечивается изменение движущей силы по закону

$$F = P \cdot [1 - \cos(0,5 \cdot \pi \cdot h \cdot t)], \quad 0 \leq h \cdot t \leq 4.$$

Участок пути горизонтален. Масса поезда $m = 500$ т. Максимальное ускорение $a_{max} = 0,05 \cdot g$. Скорость в конце разгона $v_k = 20$ м/с.

Определить время Θ и путь L разгона, а также значения переменных P и h (необходимые для установки на регуляторе).

Решение.- Дифференциальное уравнение движения центра масс

$$a \quad \left| \quad m \cdot \ddot{x} = P \cdot [1 - \cos(0,5 \cdot \pi \cdot h \cdot t)], \quad 0 \leq h \cdot t \leq 4,$$

из которого видно, что ускорение максимальным будет в тот момент времени, когда косинус примет значение (-1), а это имеет место при $h \cdot t = 2$, т.е. из (a)

получаем: $\ddot{x}_{max} = \frac{2P}{m} = \text{по условию} = 0,05 \cdot g \quad \mapsto \quad P = 123 \text{ кН.}$

Берём 1-й интеграл от (a):

$$d\dot{x} = 0,025 \cdot g \cdot [1 - \cos(0,5 \cdot \pi \cdot h \cdot t)] \cdot dt \quad \mapsto$$

$$\mapsto \quad \dot{x} = 0,025 \cdot g \cdot \left(t - \frac{2}{\pi \cdot h} \cdot \sin(0,5 \cdot \pi \cdot h \cdot t) \right) + c_1.$$

В начале разгона

$$\dot{x} = 0 = 0,025 \cdot g \cdot \left(0 - \frac{2}{\pi \cdot h} \cdot \sin(0,5 \cdot \pi \cdot h \cdot 0) \right) + c_1 \quad \mapsto \quad c_1 = 0.$$

Таким образом

$$б \quad \left| \quad \dot{x} = 0,025 \cdot g \cdot \left(t - \frac{2}{\pi \cdot h} \cdot \sin(0,5 \cdot \pi \cdot h \cdot t) \right).$$

В конце разгона $h \cdot t = h \cdot \Theta =$ по условию $= 4$. Поэтому

$$\dot{x}_K = v_K = 0,025 \cdot g \cdot \Theta. \text{ Откуда:}$$

$$\Theta = \frac{v_K}{0,025 \cdot g} = \frac{20}{0,025 \cdot 9,81} = 81,5 \text{ с}; \quad h = \frac{4}{\Theta} = \frac{4}{81,5} = 0,049 \text{ с}^{-1}.$$

Теперь берём второй интеграл от дифуравнения (а), т.е интегрируем дифференциальное уравнение (б):

$$x = 0,025 \cdot g \cdot \left(0,5 \cdot t^2 + \frac{4}{\pi^2 \cdot h^2} \cdot \cos(0,5 \cdot \pi \cdot h \cdot t) \right) + c_2.$$

В начале разгона $x = 0$ и, поэтому,

$$0 = 0,025 \cdot g \cdot \left(0,5 \cdot 0^2 + \frac{4}{\pi^2 \cdot h^2} \cdot 1 \right) + c_2 \quad \mapsto \quad c_2 = -\frac{0,1 \cdot g}{\pi^2 \cdot h^2}.$$

Таким образом, закон движения поезда описывается уравнением:

$$в \quad \left| \quad x = 0,025 \cdot g \cdot \left(0,5 \cdot t^2 - \frac{4}{\pi^2 \cdot h^2} \cdot [1 - \cos(0,5 \cdot \pi \cdot h \cdot t)] \right) \right|.$$

Т.к. в конце разгона $h \cdot t = h \cdot \Theta = 4$, то из (в) получаем:

$$L = 0,025 \cdot g \cdot \frac{\Theta^2}{2} = 0,025 \cdot 9,81 \cdot \frac{81,5^2}{2} = 815 \text{ м}.$$

ПРИМЕР 25.4.- Доска на противоположно вращающихся барабанах. Силами трения сжимается - это пример на определение движения центра масс при силах, являющихся функцией координаты; характер движения устойчивый. Вспомогательная значимость примера – показ инженеру простого устройства для экспериментального определения коэффициентов трения скольжения

Дано. - Механическая система к примерам 25.4 и 25.5 изображена на рис.25.4 и 25.5. В примере 25.4 рассматривается случай, когда барабаны вращаются в направлениях, указанных сплошными круговыми стрелками ω_1 и ω_2 . Коэффициент трения скольжения между доской и барабанами $f = 0,2$. При $t = t_0 = 0 \quad v = v_0 = 0, \quad x = x_0 = 0,1 \text{ м}; \quad L = 1 \text{ м}.$ Вес доски - G .

Проанализировать её движение.

Решение.- Силы трения скольжения в точках В и D, как известно из статики, определяются по формулам:

$$a \quad \left| \quad F_B = f \cdot N_B, \quad F_D = f \cdot N_D \right.$$

(применительно к рассматриваемому случаю на рис. 5 они изображены сплошными стрелками).

Пренебрегая толщиной доски, из уравнений

$$\sum m_B = 0 \quad \text{и} \quad \sum m_D = 0$$

получаем (допустимость использования записанных уравнений будет ясна после изучения принципа Даламбера):

$$б \quad \left| \quad N_D = \left(0,5 + \frac{x}{l} \right) \cdot G ; \right.$$

$$в \quad \left| \quad N_B = \left(0,5 - \frac{x}{l} \right) \cdot G. \right.$$

Векторное уравнение, отображающее закон движения центра доски:

$$г \quad \left| \quad m \cdot \vec{a} = \vec{G} + \vec{F}_B + \vec{N}_B + \vec{F}_D + \vec{N}_D. \right.$$

Проектируя его на ось x , получаем:

$$д \quad \left| \quad m \cdot \ddot{x} = F_B - F_D. \right.$$

Из (а), (б), (в) и (д):

$$е \quad \left| \quad \ddot{x} + k^2 \cdot x = 0, \quad \text{где} \quad k = \sqrt{\frac{2f \cdot g}{L}} = 1,98c^{-1} \right.$$

это уже встречавшаяся (см. 25.9) каноническая форма дифференциального уравнения свободных колебаний. Его решение:

$$ж \quad \left| \quad x = A \cdot \sin(k \cdot t + \alpha), \quad \text{где}$$

постоянные A , α определяем из начальных условий. Для этого учитываем, что

К условию примеров 25.4 и 5

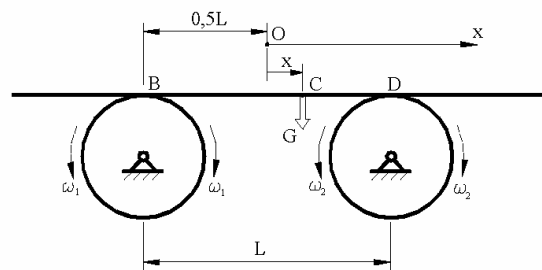


Рисунок 25.4

К решению примеров 25.4 и 5

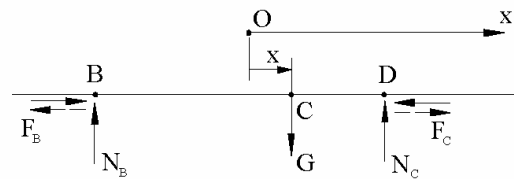


Рисунок 25.5

$$3 \quad | \quad \dot{x} = A \cdot k \cdot \cos(k \cdot t + \alpha).$$

Откуда: $0 = \dot{x}_0 = A \cdot k \cdot \cos(k \cdot 0 + \alpha) \quad \mapsto \quad \alpha = i \cdot \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 3, 5, 7 \quad \text{и т.д.}$

Теперь используем (ж): $x_0 = A \cdot \sin(k \cdot 0 + i \cdot \frac{\pi}{2}) \quad \mapsto \quad A = x_0.$

Итак, получаем: $x = x_0 \cdot \cos(k \cdot t), \quad \text{т.е.} \quad x = 0,1 \cdot \cos(1,98 \cdot t).$

Замечание: из (е) видно, что механическую систему по рис. 4 можно использовать в качестве установки для определения коэффициента трения скольжения экспериментально-теоретическим способом – т.к. круговая частота

(k) с периодом колебаний (T) связана соотношением $T = \frac{2\pi}{k}$, то получается

$$25.12 \quad \left| \begin{array}{l} \text{формула для экспериментально-теоретического способа} \\ \text{определения коэффициентов трения скольжения} \\ f = \frac{2\pi^2 \cdot L}{g \cdot T^2}, \quad \text{где} \end{array} \right.$$

$g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения, L – конструктивный параметр; T – экспериментально определяемый период колебания.

ПРИМЕР 25.5. - Доска на противоположно вращающихся барабанах. Силами трения растягивается - это пример на определение движения центра масс при силах, являющихся функцией координаты; характер движения неустойчивый. Вспомогательная значимость примера – показ на конкретном примере, что «подобия» и «похожести» по одним параметрам сопоставляемых систем (явлений, процессов и т.п.) далеко не всегда являются основаниями к утверждениям типа «да это тоже самое».

Дано. - Механическая система, рассматривавшаяся в примере 25.4 (изображена на рис.25.4 и 5) – та же конструкция ($L=1\text{ м}$; вес доски - G и прочие одинаковости); тот же коэффициент трения ($f = 0,2$), те же начальные условия (при $t = t_0 = 0 \quad v = v_0 = 0, \quad x = x_0 = 0,1\text{ м}$); причём, барабаны вращаются как и в примере 25.4 в противоположных направлениях, но *произведен реверс электродвигателей* - направления вращения для примера 25.5 указаны прерывистыми линиями.

Требуется проанализировать движение доски - возможность схода её с барабанов. И, если анализ предскажет такое событие, то вычислить момент времени $t = \Theta$, в который центр тяжести C доски будет проходить через точку D (или B) её соприкосновения с барабаном.

Решение. - Ясно, что решение примера 25.5 повторяет решение примера 25.4 до (д). Различия начинаются с (д) - получается

$$m \cdot \ddot{x} = F_D - F_B,$$

т.е. получается дифференциальное уравнение

$$e \quad \left| \quad \ddot{x} = n \cdot x, \quad \text{где} \quad n = \frac{2f \cdot g}{L}.$$

Находим 1-й интеграл дифференциального уравнения (е).

Т.к.

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v,$$

то (е) принимает вид:

$$ж \quad \left| \quad dv \cdot v = n \cdot x \cdot dx.$$

И в левой, и правой частях видны табличные интегралы. Берём их -

$$з \quad \left| \quad \begin{aligned} v^2 = n \cdot x^2 + c_1 & \mapsto 0^2 = n \cdot x_o^2 + c_1 & \mapsto c_1 = -n \cdot x_o^2 & \mapsto \\ & \mapsto v = \sqrt{n \cdot (x^2 - x_o^2)} \end{aligned}$$

$$Т.к. \quad v = \frac{dx}{dt}, \quad \text{то из (з):} \quad \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x_o^2}} = \sqrt{n} \cdot dt.$$

Вновь видим табличные интегралы. Интегрируем:

$$\ln \left| x + \sqrt{x^2 - x_o^2} \right| = \sqrt{n} \cdot t + c_2 \quad \mapsto \quad \ln \left| x_o + \sqrt{x_o^2 - x_o^2} \right| = \sqrt{n} \cdot 0 + c_2 \quad \mapsto$$

$$\mapsto \quad c_2 = \ln |x_o| \quad \mapsto \quad \ln \left| \frac{x}{x_o} + \sqrt{\left(\frac{x}{x_o}\right)^2 - 1} \right| = \sqrt{n} \cdot t.$$

Из полученного уравнения движения видно монотонное возрастание x с увеличением времени t . Вывод: доска через определённый промежуток времени сойдёт с барабанов.

Вычисляем время Θ , по истечении которого координата x центра доски окажется равной половине L (после чего она под действием собственного веса безвозвратно потеряет горизонтальное положение и свалится с барабанов):

$$\ln \left| \frac{0,5 \cdot L}{0,1 \cdot L} + \sqrt{\left(\frac{0,5 \cdot L}{0,1 \cdot L} \right)^2 - 1} \right| = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,2 \cdot 9,81}{1}} \cdot \Theta.$$

Откуда $\Theta = 1,2$ с.

ПРИМЕР 25.6. - Вывод формулы для вычисления максимально возможной скорости катера. Это пример на определение движения центра масс в случае, когда главный вектор внешних сил является функцией квадрата модуля скорости

Дано. - Движущая катер сила (приложена к винту со стороны воды - рис.25.6) - $\vec{Q} = Q \cdot \vec{i}$, $Q = \text{const}(t)$.

G - вес катера с людьми и прочим находящимся в нём грузом ($G = m \cdot g$, где m - масса, g - ускорение свободного падения тел). \vec{N} - выталкивающая сила. $\vec{R} = -k \cdot v^2 \cdot \vec{i}$ - сопротивление движению (со стороны воды); $k = \text{const}(t)$; v - модуль скорости катера. При $t = t_0 = 0$, $v = v_0$.

К условию и решению примера 25.6

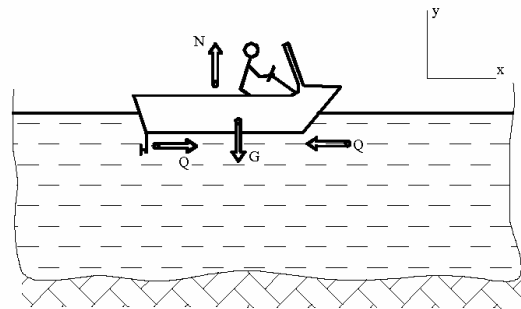


Рисунок 25.6

Определить зависимость модуля скорости катера от времени -

$v = f(t) = ?$ Установить также максимально возможное значение этой скорости.

Решение. - Основное уравнение динамики материальной точки применительно к рассматриваемому случаю

$$m \cdot \vec{a}_c = \vec{Q} + \vec{R} + \vec{N} + \vec{G}.$$

Проектируем составленное векторное равенство на ось x и получаем:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = Q - k \cdot v^2 \quad \mapsto \quad \frac{dv}{b^2 - v^2} = \frac{k}{m} \cdot dt, \quad \text{где}$$

$$b^2 = \frac{Q}{k}.$$

В левой и правой частях получившегося дифференциального уравнения содержатся табличные интегралы. Интегрируя получаем:

$$\frac{1}{2b} \cdot \ln\left(\frac{b+v_o}{b-v_o}\right) = \frac{k}{m} \cdot t + c_1$$

Используя начальные условия находим постоянную c_1 и получаем:

$$\frac{1}{2b} \cdot \ln\left(\frac{b+v_o}{b-v_o}\right) = \frac{k}{m} \cdot 0 + c_1 \quad \mapsto \quad c_1 = \frac{1}{2b} \cdot \ln\left(\frac{b+v_o}{b-v_o}\right)$$

$$\frac{1}{2b} \cdot \ln\left(\frac{b+v}{b-v} \cdot \frac{b+v_o}{b-v_o}\right) = \frac{k}{m} \cdot t$$

Откуда, после алгебраических преобразований:

$$v = b - \frac{2b}{\left(\frac{b+v_o}{b-v_o}\right) \cdot \exp\left(\frac{2 \cdot b \cdot k}{m} \cdot t\right)}$$

Из последнего выражения видно, что модуль скорости имеет максимальное значение при $t \rightarrow \infty$, т.е.

$$v_{max} = b = \sqrt{\frac{Q}{k}}$$

Решения примеров 25.3-6 требовало составления одного дифференциального уравнения второго порядка. Переходим к иллюстрации более сложных случаев - когда материальная точка имеет две степени свободы и приходится составлять систему двух дифференциальных уравнений 2-го порядка.

Ограничиваемся рассмотрением трёх близких друг к другу по инженерно-физической сущности случаев пассивного (без наличия движущей силы) полёта тела: пример 25.7 – без учёта сопротивления воздуха и два примера (25.8 и 25.9) - с учётом сопротивления.

ПРИМЕР 25.7.- *Прыжок воднолыжника* - это пример на определение движения центра масс в случае, когда главный вектор внешних сил является постоянной во времени величиной, движение криволинейное (в исторически значимых примерах, изложенных в подразде 3.4, рассматривался более простой случай – прямолинейное движение).

Дано: начальная скорость (\vec{v}_o ; $v_o = 20 \text{ м/с}$, $\alpha_o = 45^\circ$); высота ($h = 2 \text{ м}$) расположения в начале полётной фазы центра масс механической системы «спортсмен-лыжи» над горизонтальной плоскостью, в которой этот центр масс окажется в момент касания лыж с водной поверхностью (см. рис.25.7).

Определить дальность (L) и максимальную высоту полёта (H) воднолыжника.

К условию и решению примера 25.7

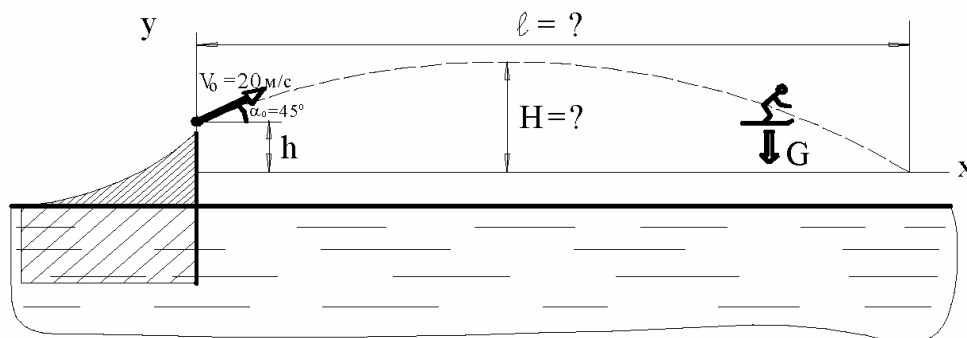


Рисунок 25.7

Решение.- Записываем основное уравнение динамики материальной точки (центра масс системы «спортсмен-лыжи») применительно к рассматриваемому случаю

$$a \quad \left| \quad m \cdot \vec{a} = \vec{G}.$$

Проектируя (a) на ось x получаем:

$$b \quad \left| \quad m \cdot \ddot{x} = 0$$

Откуда: $\dot{x} = \text{const}(t) = \dot{x}_o = v_o \cdot \cos \alpha_o.$

Взяв второй интеграл от (б), получаем:

$$в \quad \left| \quad x = v_o \cdot \cos \alpha_o \cdot t$$

(постоянная интегрирования равнялась нулю по той причине, что время принято отсчитывать от момента, когда центр масс воднолыжника находится на оси y).

Теперь проектируем векторное равенство (a) на ось y . Получаем:

$$z \quad \left| \quad m \cdot \ddot{y} = -m \cdot g \quad \mapsto \quad \dot{y} = -g \cdot t + c_1.$$

При $t = 0 \quad \dot{y} = \dot{y}_o = v_o \cdot \sin \alpha_o$. Поэтому $c_1 = v_o \cdot \sin \alpha_o$ и:

$$\partial \quad \left| \quad \dot{y} = v_o \cdot \sin \alpha_o - g \cdot t.$$

Теперь интегрируем дифуравнение (∂). Получаем:

$$y = v_o \cdot \sin \alpha_o \cdot t - 0,5 \cdot g \cdot t^2 + c_2.$$

Т.к. при $t = 0 \quad y = h$, то $c_2 = h$ и, поэтому:

$$e \quad \left| \quad y = h + v_o \cdot \sin \alpha_o \cdot t - 0,5 \cdot g \cdot t^2.$$

Момент времени, соответствующий H , обозначаем t_H . В этот момент времени $\dot{y} = \dot{y}_H = 0$ (потому, что вектор скорости на вершине траектории горизонтален).

Из математического анализа известно: чтобы установить максимум функции (а речь идёт о траектории) необходимо взять от неё производную и приравнять нулю. Такая производная уже имеется - см. (∂), откуда и получаем:

$$жс \quad \left| \quad \dot{y}_H = 0 = v_o \cdot \sin \alpha_o - g \cdot t_H \quad \mapsto \quad t_H = \frac{v_o}{g} \cdot \sin \alpha_o = 1,44 \text{ с.}$$

Теперь ($жс$) подставляем в (e) и получаем:

$$з \quad \left| \quad H = y_H = h + v_o \cdot \sin \alpha_o \cdot \frac{v_o}{g} \cdot \sin \alpha_o - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{v_o}{g} \cdot \sin \alpha_o \right)^2 = \right. \\ \left. = h + \frac{v_o^2}{2g} \cdot \sin^2 \alpha_o \right.$$

или, после числовой подстановки,
$$H = 2 + \frac{20^2}{2 \cdot 9,8} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 12 \text{ м.}$$

Момент касания лыжами водной поверхности (t_L) устанавливаем из (e) - т.к. при $t_L \quad y_L = 0$, то получаем: $0 = h + v_o \cdot \sin \alpha_o \cdot t_L - 0,5 \cdot g \cdot t_L^2$. Откуда (решая квадратное уравнение):

$$u \quad \left| \quad t_L = \frac{v_o}{g} \cdot \sin \alpha_o \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2g \cdot h}{(v_o \cdot \sin \alpha_o)^2}} \right).$$

Теперь, после подстановки (u) в (e), получаем:

$$\kappa \quad \left| \quad L = v_o \cdot \cos \alpha_o \cdot t_L = \frac{v_o^2}{2g} \cdot \sin(2\alpha_o) \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2g \cdot h}{(v_o \cdot \sin \alpha_o)^2}} \right) \right.$$

И, наконец, из (и) и (к) после численных подстановок находим:

$$t_L = 3c, \quad L = 42 \text{ м.}$$

ПРИМЕР 25.8*.- Полёт тела (снаряда), брошенного под углом к горизонту с учётом сопротивления воздуха - это пример на определение движения центра масс в случае, когда главный вектор внешних сил является функцией вектора скорости

Дано. - Начальная скорость бросания \vec{v}_o (v_o - модуль, α_o - угол её расположения относительно горизонта - см. рис. 25.8). Сила сопротивления $\vec{R} = -k \cdot G \cdot \vec{v}$, где G - вес тела, \vec{v} - скорость его центра тяжести, k - постоянная во времени величина (коэффициент).

Требуется Аналитически описать уравнение траектории центра тяжести тела - в форме $y = f(x)$.

Решение. - Основное уравнение динамики материальной точки применительно к рассматриваемому случаю:

$$\frac{G}{g} \cdot \vec{a} = \vec{G} + \vec{R} = \vec{G} - k \cdot G \cdot \vec{v}.$$

Проектируем записанное векторное уравнение на оси x и y :

$$a \quad \left| \quad \ddot{x} = -k \cdot g \cdot \dot{x}; \right.$$

$$b \quad \left| \quad \ddot{y} = -g - k \cdot g \cdot \dot{y} \right.$$

Из (а):
$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -k \cdot g \cdot dt.$$

В левой и правой частях последнего выражения видим табличные интегралы. Интегрируя и используя начальные условия, получаем -

$$\ln \dot{x} = -k \cdot g \cdot t + c_1 \quad \mapsto \quad \ln(v_o \cdot \cos \alpha_o) = -k \cdot g \cdot 0 + c_1 \quad \mapsto$$

$$\mapsto \quad c_1 = \ln(v_o \cdot \cos \alpha_o) \quad \mapsto \quad \ln\left(\frac{\dot{x}}{v_o \cdot \cos \alpha_o}\right) = -k \cdot g \cdot t \quad \mapsto$$

К условию и решению примера 25.8

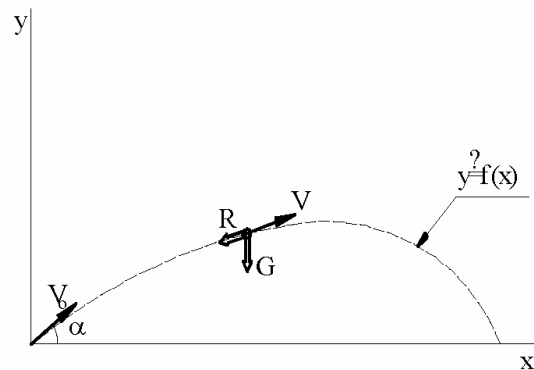


Рисунок 25.8

$$\frac{dx}{dt} = v_o \cdot \cos \alpha_o \cdot \exp(-k \cdot g \cdot t) \quad \mapsto \quad dx = v_o \cdot \cos \alpha_o \cdot \exp(-k \cdot g \cdot t) \cdot dt.$$

Интегрируем последнее выражение и используем начальные условия:

$$x = -\frac{v_o \cdot \cos \alpha_o \cdot \exp(-k \cdot g \cdot t)}{k \cdot g} + c_2 \quad \mapsto \quad 0 = -\frac{v_o \cdot \cos \alpha_o \cdot \exp(-k \cdot g \cdot t)}{k \cdot g} + c_2.$$

Откуда

$$c_2 = \frac{v_o \cdot \cos \alpha_o}{k \cdot g}$$

и, поэтому:

$$в \quad \left| \quad x = \frac{v_o \cdot \cos \alpha_o}{k \cdot g} \cdot [1 - \exp(-k \cdot g \cdot t)]. \right.$$

Из (в) :

$$г \quad \left| \quad [1 - \exp(-k \cdot g \cdot t)] = \frac{k \cdot g}{v_o \cdot \cos \alpha_o} \cdot x. \right.$$

Из (г), после алгебраических преобразований:

$$д \quad \left| \quad t = \frac{1}{k \cdot g} \cdot \ln \left(\frac{v_o \cdot \cos \alpha_o}{v_o \cdot \cos \alpha_o - k \cdot g \cdot x} \right). \right.$$

Теперь интегрируем дифуравнение (б) :

$$\frac{dy}{k \cdot \dot{y} + 1} = -g \cdot dt \quad \mapsto \quad \ln(k \cdot \dot{y} + 1) = -k \cdot g \cdot t + c_3 \quad \mapsto$$

$$\ln[k \cdot (v_o \cdot \sin \alpha_o) + 1] = -k \cdot g \cdot 0 + c_3 \quad \mapsto \quad c_3 = \ln[k \cdot (v_o \cdot \sin \alpha_o) + 1].$$

После подстановки c_3 :

$$\ln \left(\frac{k \dot{y} + 1}{k \cdot v_o \cdot \sin \alpha_o + 1} \right) = -k \cdot g \cdot t \quad \mapsto$$

$$\mapsto \quad k \cdot \frac{dy}{dt} = [k \cdot (v_o \cdot \sin \alpha_o) + 1] \cdot \exp(-k \cdot g \cdot t) - 1.$$

После переноса dt в правую часть, вновь видим табличные интегралы. После интегрирования получаем:

$$y = -\frac{k \cdot v_o \cdot \sin \alpha_o + 1}{k^2 \cdot g} \cdot \exp(-k \cdot g \cdot t) - \frac{t}{k} + c_4.$$

Используя начальные условия находим:

$$c_4 = \frac{k \cdot v_o \cdot \sin \alpha_o + 1}{k^2 \cdot g}.$$

Поэтому

$$y = \frac{k \cdot v_o \cdot \sin \alpha_o + 1}{k^2 \cdot g} \cdot [1 - \exp(-k \cdot g \cdot t)] - \frac{t}{k}.$$

Подставляя в последнее выражение (е) и (д), окончательно получаем:

$$y = \frac{1 + k \cdot v_o \cdot \sin \alpha_o}{k \cdot v_o \cdot \cos \alpha_o} \cdot x - \frac{1}{k^2 \cdot g} \cdot \ln \left(\frac{v_o \cdot \cos \alpha_o}{v_o \cdot \cos \alpha_o - k \cdot g \cdot x} \right).$$

Замечание: опыты, проводившиеся со стрельбой артиллерийских снарядов, показали, что имеются диапазоны скоростей, когда сопротивление среды оказывается пропорциональным скорости (в баллистике - это закон Сиаучи); этот случай и был рассмотрен в примере 25.8. Но чаще сила сопротивления атмосферы направлена по касательной к траектории и пропорциональна квадрату модуля скорости летящего снаряда. Об этом в следующем примере.

ПРИМЕР 25.9.- Об исследовании движения снаряда, когда сила сопротивления среды определяется формулой $\vec{R} = -k \cdot m \cdot v \cdot \vec{v}$ - это пример, иллюстрирующий необходимость часто прибегать к численным методам решения.

В рассматриваемом случае дифференциальные уравнения движения принимают вид:

$$\ddot{x} = -k \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \cdot \dot{x}, \quad \ddot{y} = -(g + k \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \cdot \dot{y}).$$

«Чистое» аналитическое решение записанной системы дифуравнений авторам неизвестно. Подобные уравнения рекомендуем решать численно - методом последовательных шагований.-

$$d\dot{x} = -(k \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \cdot \dot{x}) \cdot dt, \quad d\dot{y} = -(g + k \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \cdot \dot{y}) \cdot dt.$$

От бесконечно малых переходим к малым конечным величинам

$$\Delta \dot{x} = -(k \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \cdot \dot{x}) \cdot \Delta t, \quad \Delta \dot{y} = -(g + k \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \cdot \dot{y}) \cdot \Delta t.$$

Длину временного шага принимаем, к примеру, $\Delta t = 0,0001$ с.

1-й шаг.

Учитывая известные $(k, g, \dot{x}_o, \dot{y}_o, x_o, y_o)$, определяем значения $\dot{x}_1, \dot{y}_1, x_1, y_1$, соответствующие моменту времени $t = 0,0001$ с :

$$\Delta \dot{x}_1 = -\left(k \cdot \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2} \cdot \dot{x}_0\right) \cdot \Delta t, \quad \Delta \dot{y}_1 = -\left(g + k \cdot \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2} \cdot \dot{y}_0\right) \cdot \Delta t.$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_0 + \Delta \dot{x}_1, \quad \dot{y}_1 = \dot{y}_0 + \Delta \dot{y}_1;$$

$$x_1 = x_0 + (\dot{x}_0 + 0,5 \cdot \Delta \dot{x}_0) \cdot \Delta t, \quad y_1 = y_0 + (\dot{y}_0 + 0,5 \cdot \Delta \dot{y}_0) \cdot \Delta t.$$

2-й шаг (определяются значения \dot{x} , \dot{y} , x , y для конца 0,0002-й секунды)

$$\Delta \dot{x}_2 = -\left(k \cdot \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2} \cdot \dot{x}_1\right) \cdot \Delta t, \quad \Delta \dot{y}_2 = -\left(g + k \cdot \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2} \cdot \dot{y}_1\right) \cdot \Delta t.$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + \Delta \dot{x}_2, \quad \dot{y}_2 = \dot{y}_1 + \Delta \dot{y}_2;$$

$$x_2 = x_1 + (\dot{x}_1 + 0,5 \cdot \Delta \dot{x}_1) \cdot \Delta t, \quad y_2 = y_1 + (\dot{y}_1 + 0,5 \cdot \Delta \dot{y}_1) \cdot \Delta t.$$

3-й шаг (определяются значения \dot{x} , \dot{y} , x , y для конца 0,0003-й секунды)

$$\Delta \dot{x}_3 = -\left(k \cdot \sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2} \cdot \dot{x}_2\right) \cdot \Delta t, \quad \Delta \dot{y}_3 = -\left(g + k \cdot \sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2} \cdot \dot{y}_2\right) \cdot \Delta t.$$

$$\dot{x}_3 = \dot{x}_2 + \Delta \dot{x}_2, \quad \dot{y}_3 = \dot{y}_2 + \Delta \dot{y}_2;$$

$$x_3 = x_2 + (\dot{x}_2 + 0,5 \cdot \Delta \dot{x}_2) \cdot \Delta t, \quad y_3 = y_2 + (\dot{y}_2 + 0,5 \cdot \Delta \dot{y}_2) \cdot \Delta t.$$

И так далее

25.7. Обобщённая оценка проблемы решения задач динамики. Рекомендуемые подходы

В рассмотренных в предыдущем подразделе примерах силы были постоянными, функцией вектора скорости, квадрата скорости, времени и координаты, материальная точка имела 1 и 2 степени свободы. Даже в этих, относительно простых случаях, были видны сложности, с которыми инженеру приходится сталкиваться при попытках получить точные аналитические решения составленных дифференциальных уравнений.

В общем же случае главный вектор внешних, действующих на систему сил может являться одновременной функцией и времени, и координаты, и скорости; движения могут описываться не только отдельными дифференциальными уравнениями, но и системами. В связи с этим, рекомендациями ответим на естественный, возникающий у будущих специалистов, вопрос: «Какой в текущий момент жизни человеческого общества видится схема подхода инженера к возникающим в практической его деятельности задачам динамики, решаемым через интегрирования?»

- 25.13 | 1. Прежде всего, необходимо владеть опорными фактами теоретической механики, допустимыми методами их преобразования и, на этой основе, уметь составлять применительно к конкретным механическим системам соответствующие уравнения.

2. С точки зрения точностей, обзримости получаемых результатов и дальнейших их анализов, наиболее привлекательны «чистые» аналитические решения. И такие случаи довольно часты. По этой причине в проигрывающем положении оказывается тот инженер, который в составленных дифференциальных уравнениях не заметит табличных интегралов и начнёт использовать другие подходы к решению.

3. Если попытки самостоятельно проинтегрировать составленные дифференциальные уравнения не увенчались успехом, не забывать, что предшествующие поколения накопили большой опыт аналитических решений дифференциальных уравнений (часто увековечивая этим своё имя – Матье, Риккати, Абель, Бернулли, Клеро, Ламе, Лаплас, Лежандр и т.д.) и настоящий инженер обязан этим пользоваться. В частности, необходимо знать, что имеются, к примеру, такие книги: «Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1976.- 576 с.»; «Двайт Г.Б. Таблицы интегралов.- М.: Наука, 1966.- 228 с.» и другие подобные.

4. Если не привела к успеху и рекомендация по п.3, целесообразно проконсультироваться с математиками–специалистами по дифуравнениям.

5. Если и п.4 не помог, не отчаивайтесь – переходите к численным методам решения (что, в частности, было иллюстрировано примером 25.9). При этом, следует иметь ввиду, что при использовании современных ЭЦВМ подавляющее большинство возникающих в широкой инженерной практике задач динамики на интегрирование поддаются численным методам решения, что обязывает нас закончить советы возвратом к первой рекомендации, как к главной для будущего инженера, желающего стать хорошим специалистом; как к рекомендации, обеспечивающей инженеру приоритет и инициативу перед другими специалистами, подключаемыми к процессу решения конкретных задач механики.

25.8. Примеры на использование закона о движении центра масс для определения траекторий точек и взаимных перемещений частей системы

ПРИМЕР 25.10.- Вывод уравнения траектории конца падающего стержня, второй конец которого опирается на гладкую горизонтальную поверхность
Дано. – Однородный стержень АВ, длиной l , опирается на гладкую горизонтальную поверхность (см. рис.25.9) и удерживается в состоянии покоя с помощью нити. Затем нить перерезают и стержень начинает падать.
Определить траекторию конца В стержня.

К примеру 25.10

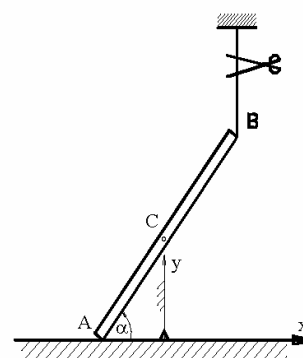


Рисунок 25.9

Решение.- Согласно условию скорость и координата точки С стержня в начальный момент времени равны нулям, т.е. $\dot{x}_{CO} = 0, x_{CO} = 0$.

На падающий стержень действует две вертикально расположенные силы – сила тяжести и реакция пола. Поэтому:

$$m \cdot \ddot{x}_C = 0 \quad \mapsto \quad \dot{x}_C = \text{const}(t) = 0 \quad \mapsto \quad x_C = \text{const}(t) = x_{CO} = 0,$$

т.е. точка С в любой момент времени расположена на оси у. Поэтому:

$$\begin{aligned} x_B &= 0,5 \cdot l \cdot \cos \alpha \\ y_B &= l \cdot \sin \alpha \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \right. \quad \frac{x_B^2}{(0,5l)^2} + \frac{y_B^2}{l^2} = 1$$

Получена каноническая форма уравнения эллипса.

Итак, траекторией конца В стержня является эллипс с полуосями $0,5l$ и l .

ПРИМЕР 25.11.- Вывод формулы для вычисления величины отплытия от берега причалившей лодки при переходе в ней человека - это пример на использование теоремы о движении центра масс для анализа взаимного перемещения тел системы. Попутная значимость примера: малоопытные на воде люди после ознакомления с данным примером приобретают умение выходить из лодки на берег сухими

Дано. - Человек подплыл в лодке к причалу; так, что продольная её плоскость симметрии расположена перпендикулярно береговой линии (см. рис.25.10). После соприкосновения с причалом (момент времени t') скорости человека и лодки погасились (стали равными нулю). После этого человек начал из точки А перемещаться в направлении к берегу и в момент времени t'' оказался в точке D. Массы: человека - $m_1 = 80$ кг, лодки - $m_2 = 40$ кг. $AD=1$ м.

Определить расстояние δ , на которое отплывёт лодка от причала по причине перемещения в ней человека.

Решение.- Действующие на систему «человек-лодка» силы вертикальны: G_1 - вес человека, G_2 - вес лодки. Вер-

К условию и решению примера 25.11 (а и б - положения системы «человек-лодка» в моменты времени t' и t'')

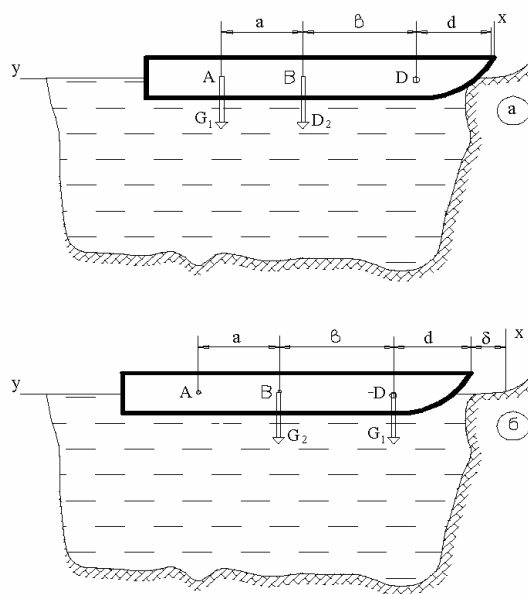


Рисунок 25.10

тикальна и выталкивающая сила воды (направлена вверх). По этой причине:

$$a \quad \left| \quad (m_1 + m_2) \cdot \ddot{y}_c = 0, \right.$$

где С – центр масс системы «человек-лодка».

Из (а), после интегрирования, получаем: $\dot{y}_c = const(t)$.

Т.к. перед перемещением человека система покоилась, то $\dot{y}_c = 0$.

Интегрируя последнее выражение, получаем:

$$б \quad \left| \quad y_c = const(t) = y_c' = y_c'', \right.$$

где y_c' и y_c'' - координаты центра масс системы «человек-лодка» в моменты времени t' и t'' .

В соответствии с понятием центра масс (дано в подразделе 2.3)

$$в \quad \left| \quad y_c' = \frac{1}{m_1 + m_2} \cdot (y_1' \cdot m_1 + y_2' \cdot m_2), \right.$$

$$з \quad \left| \quad y_c'' = \frac{1}{m_1 + m_2} \cdot (y_1'' \cdot m_1 + y_2'' \cdot m_2), \right.$$

где $y_1' = a + b + d$, $y_2' = b + d$ - координаты центров масс человека и лодки в момент времени t' ;

$y_1'' = d + \delta$, $y_2'' = b + d + \delta$ - координаты тех же точек в момент времени t'' .

После подстановки в (б) выражений (в) и (з), получаем:

$$(a + b + d) \cdot m_1 + (b + d) \cdot m_2 = (d + \delta) \cdot m_1 + (b + d + \delta) \cdot m_2 \quad \mapsto$$

$$(a + b) \cdot m_1 = \delta \cdot (m_1 + m_2) \quad \mapsto$$

$$\delta = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot (a + b) = \frac{80}{80 + 40} \cdot 1 = 0,67 \text{ м.}$$

Итак, если у находящегося в лодке человека отсутствует желание промочить ноги, то при подплытии к берегу ему целесообразно находиться в точке D, либо следует продольную плоскость симметрии лодки располагать под малым углом к береговой линии.

26. Закон о движении центра масс в произвольных системах отсчёта

26.1. Математическое выражение закона

Ускорение центра масс механической системы относительно инерциальных и произвольных троек осей обозначаем, соответственно, \vec{a}_C и \vec{a}_C^r .

Приняв инерциальную систему отсчёта за неподвижную, а произвольную за подвижную, в соответствии с теоремой сложения скоростей записываем:

$$a \quad \left| \quad \vec{a}_C = \vec{a}_C^r + \vec{a}_C^e + \vec{a}_C^k, \quad \text{где} \right.$$

\vec{a}_C^e - переносное и \vec{a}_C^k - кориолисово ускорения центра масс.

Подставляем (а) в математическое выражение закона-аксиомы о движении центра масс. Получаем математическое выражение

$$26.1 \quad \left| \begin{array}{l} \text{закона о движении центра масс в произвольных системах отсчёта:} \\ m \cdot \vec{a}_C^r = \vec{R}_\Gamma^E + \vec{\Phi}_C^e + \vec{\Phi}_C^k, \quad \text{где} \\ \vec{\Phi}_C^e = -m \cdot \vec{a}_C^e \quad \text{и} \quad \vec{\Phi}_C^k = -m \cdot \vec{a}_C^k \quad \text{- называют эйлеровыми} \\ \text{(переносной и кориолисовой) силами инерции.} \end{array} \right.$$

Переносная сила инерции ($\vec{\Phi}_C^e$) - это математическое понятие; это вектор, противоположно направленный вектору, определяемому произведением массы системы на переносное ускорение её центра, который имеет размерность силы и в процессе математических операций может рассматриваться как обычная сила.

Предоставляем возможность студенту определение кориолисовой силе инерции дать самостоятельно.

26.2. Принцип относительности Галилея и Геоцентрическая система отсчёта

Пусть $(xyz)_1$ - инерциальная система отсчёта (см. рис.1). Тогда в ней, как уже рассмотрено в разделе 25, справедливо математическое соотношение

$$m \cdot \vec{a}_C = \vec{R}_\Gamma^E.$$

Пусть, далее, система отсчёта $(xyz)_2$ с находящимся в ней наблюдателем, поступательно, прямолинейно и равномерно движется относительно $(xyz)_1$, причём с ка-

К принципу относительности Галилея

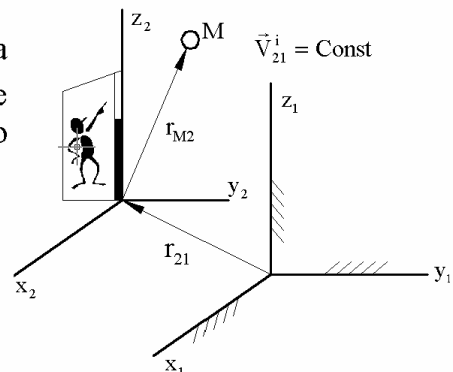


Рисунок 26.1

кой угодно скоростью $\vec{v}_{21}^i = \text{const}(t)$, т.е. со скоростью $\vec{v}_{21}' = \text{const}(t)$, либо $\vec{v}_{21}'' = \text{const}(t)$, либо $\vec{v}_{21}''' = \text{const}(t)$ и т.д.

Т.к. вторая система перемещается относительно инерциальной поступательно, прямолинейно и равномерно, то $\vec{\Phi}^e = \vec{\Phi}^k = 0$. Поэтому:

$$\begin{aligned} m \cdot \vec{a}_C^r &= \vec{R}_\Gamma^E = m \cdot \vec{a}_C \quad \mapsto \\ \mapsto \quad \vec{a}_C &= \vec{a}_C' = \vec{a}_C'' = \vec{a}_C''' = \dots = \vec{a}_C^i = \dots \quad \mapsto \\ \mapsto \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_C = \ddot{x}_C' = \ddot{x}_C'' = \ddot{x}_C''' = \dots = \ddot{x}_C^i = \dots \\ \ddot{y}_C = \ddot{y}_C' = \ddot{y}_C'' = \ddot{y}_C''' = \dots = \ddot{y}_C^i = \dots \\ \ddot{z}_C = \ddot{z}_C' = \ddot{z}_C'' = \ddot{z}_C''' = \dots = \ddot{z}_C^i = \dots \end{array} \right. \end{aligned}$$

т.е. получаем, что имеется множество систем отсчёта, в которых движение центра масс механической системы, находящейся под действием той или иной любой системы сил, описывается одинаковыми дифференциальными уравнениями и все эти системы отсчёта перемещаются друг относительно друга поступательно, прямолинейно и равномерно.

Если, к тому же, во всех системах отсчёта одинаковы и начальные условия -

$$\vec{v}_{C_0} = \vec{v}_{C_0}' = \vec{v}_{C_0}'' = \vec{v}_{C_0}''' = \dots = \vec{v}_{C_0}^i = \dots; \quad \vec{r}_{C_0} = \vec{r}_{C_0}' = \vec{r}_{C_0}'' = \vec{r}_{C_0}''' = \dots = \vec{r}_{C_0}^i = \dots,$$

то центр масс будет описывать в них одинаковые траектории.

Вот как это явление просто и доходчиво описывал Галилей (в «Послании к Инголи», а в 1632 году повторил в «Диалоге»):

«В большой каюте под палубой какого-либо крупного корабля закройте с другими наблюдателями. Устройте так, чтобы в ней были мухи, бабочки и другие летающие насекомые, аквариум с плавающими в нём рыбками. Возьмите также сосуд с узким горлышком и прилаженным над ним другим сосудом, из которого вода бы капала, попадая в узкое горлышко нижнего сосуда.

И пока корабль стоит неподвижно, наблюдайте внимательно, как эти насекомые будут с одинаковой скоростью летать по каюте в любом направлении, вы увидите, как рыбки будут двигаться безразлично в направлении какой угодно части аквариума. Все капли воды падая будут попадать в стоящий внизу сосуд с узким горлышком. И вы сами, бросая какой-либо предмет вашему другу, не должны будете бросать его с большим усилием в одну сторону, чем в другую, если только расстояние одинаково. А когда вы начнёте прыгать двумя ногами с места, то на одинаковые расстояния сместитесь по всем направлениям.

Когда вы хорошо заметите себе все эти явления, дайте движение кораблю, и притом с какой угодно скоростью. Тогда, если только движение будет равномерным (в условиях отсутствия качки), вы не заметите ни малейшей разницы во всём, что было описано; и ни по одному из этих явлений, ни по чему-либо, что станет происходить с вами самими, вы не сможете удостовериться движется ли корабль или стоит неподвижно: прыгая вы будете смещаться (далее идёт повторение написанного выше)».

Замечания.- Упомянутый Галилеем Франческо Инголи был высоко образованной по тем временам личностью, знатоком права и полиглотом, автором книги «Рассуждение относительно места и неподвижности Земли, направленное против системы Коперника», в котором, ссылаясь на известного астронома Тихо Браге, говорит об одном «опыте», подтверждающем неподвижность Земли: если корабль быстро плывёт, то камень, падающий с вершины мачты, отстаёт и падает далеко от подножия мачты в направлении к корме. Тихо Браге (1546-1601) - крупнейший астроном: с помощью датского короля построил обсерваторию, которой в то время не было равной в мире; предложил свою планетарную систему - планеты вращаются вокруг Солнца, а Солнце с планетами – вокруг Земли. В «Послании к Инголи» Галилей заявляет, что не верит Тихо Браге. Он (Галилей) убеждён, что Тихо Браге таких опытов не проводил. Сам же он, Галилей, произвёл такие опыты и пришёл к результату, что камень падает к подножию мачты. К сведению: в науке того времени было очень много умозрительно-надуманного, не основанного на опытных данных, т.е. в отличие от сегодняшнего дня, в элитарной части общества в Средневековье отношение к опыту было пренебрежительно-высокомерным, не достойным видом занятий. В «Диалоге» Галилей об этом пишет так: «если им нужно приобрести познание о действии сил природы, они не сядут в лодку (речь идёт о сопротивлении воды) и не подойдут к луку или артиллерийскому орудью, а удалятся в свой кабинет и начнут перерывать указатели и оглавления, чтобы найти, не сказал ли чего по этому поводу Аристотель; затем ... они уже больше ничего не желают и не придадут цены тому, что можно узнать о данном явлении».

Итак,

26.2 | существует множество инерциальных систем отсчёта и все они перемещаются друг относительно друга поступательно, прямолинейно и равномерно. Одной из них является Геоцентрическая - система отсчёта, связанная с Землёй.

26.3. Практикой доказано, что инерциальной является и Гелиоцентрическая система отсчёта

Наблюдаемые траектории Меркурия, Венеры, Луны, Марса, Юпитера, Сатурна и других небесных тел (включая искусственные спутники Земли) с высокой степенью точности совпадают с предсказываемыми траекториями - в случае, если за инерциальную систему отсчёта принять систему отсчёта, нача-

ло которой совпадает с центром масс Солнечной системы, а оси направлены на звёзды, взаимное положение которых на небесной сфере неизменно в течение тысячелетий. Такую систему отсчёта называют Гелиоцентрической.

То, что Гелиоцентрическая система отсчёта является инерциальной, подтверждается историческими примерами открытия планет «Нептун» и «Плутон» - траектории этих планет предсказывали, исходя из предпосылки о том, что Гелиоцентрическая система является инерциальной. Предсказания оправдались.

Об открытии планеты «Нептун»

13 марта 1781 года была открыта планета «Уран». Её наблюдаемая траектория заметно расходилась с предсказываемой (предсказываемой законами Ньютона и Коперника, т.е. предсказываемая ныне действующими теориями).

Крупнейший французский астроном Урбен Жан Жозеф Леверье (1811-1877) предположил, что теории Ньютона и Коперника верны, но просто неучтена ещё одна, неизвестная, восьмая планета, близрасположенная к «Урану». После соответствующих вычислений Леверье указал её место на небесной сфере, но не имея качественной наблюдательной техники, сообщил об этом в Берлинскую обсерваторию. В день получения письма (23 сентября 1846 года) немецкий астроном Иоганн Готфрид Галле в указанной точке небесной сферы обнаружил таки 8-ю планету Солнечной системы, которой и было дано название «Нептун».

Об открытии планеты «Плутон»

Исходя из тех же предпосылок (из инерциальности Гелиоцентрической системы отсчёта и справедливости закона Всемирного тяготения) в 1915 году американский астроном Персиваль Ловелл (1855-1916) предсказал существование ещё одной планеты Солнечной системы. Предсказание также оказалось пророческим – 18 февраля 1930 года она была обнаружена. 9-ю планету Солнечной системы назвали «Плутон».

Но почему «Нептун» был обнаружен сразу, а «Плутон» лишь через 15 лет?

По той причине, что «Нептун» на небесной сфере смотрится как 8-я звёздная величина, а «Плутон» является 15-й звёздной величиной и долго не мог быть обнаружен по причине несовершенства приборов и методов обработки наблюждённых данных. Итак,

26.3 | к инерциальным принадлежит не только Геоцентрическая, но и Гелиоцентрическая система отсчёта.

Вдумчивый читатель заметил нелогичность: с одной стороны - «существует множество инерциальных систем отсчёта и все они перемещаются друг относительно друга поступательно, прямолинейно и равномерно». С другой стороны - «инерциальными являются Гео- и Гелиоцентрическая системы». Но ведь нельзя не заметить 24-часовой цикл смены дня ночью, т.е. налицо факт, что Земля относительно Гелиоцентрической системы перемещается непоступательно!

В чём же дело?

Инерциальная система отсчёта – это идеал, а Геоцентрическая и Гелиоцентрическая системы – лишь приближения к нему, т.е. для Гео-, и Гелиоцентрической систем отсчёта следует использовать не

$$m \cdot \vec{a}_C = \vec{R}_G^E, \quad \text{а} \quad m \cdot \vec{a}_C^r = \vec{R}_G^E + \vec{\Phi}_C^e + \vec{\Phi}_C^k.$$

Речь ведётся лишь о значимости добавок $\vec{\Phi}_C^e$ и $\vec{\Phi}_C^k$, т.е. возникает вопрос об оценке погрешностей.

26.4. Оценка близости к идеалу (к инерциальной системе) Гео- и Гелиоцентрической систем отсчёта

Вначале ответим на вопрос: «какая из систем отсчёта, Гео- или Гелиоцентрическая, расположена ближе к идеально инерциальной системе?»

В 1671 году Парижская академия наук командировала в Гайану (расположена в Южной Америке, близ Экватора) академика Жана Ришара, который взял с собой точные (по тем временам) маятниковые часы. В Париже они шли точно, а в Гайане вдруг начали систематически отставать - на 2 минуты в сутки. Жан Ришар восстановил точность хода этих часов, укоротив длину маятника на 2,8 мм.

По возвращении в Париж (1673 год) часы вновь пошли неточно, с тем лишь отличием, что если раньше отставали, то теперь начали спешить - на те же 2 минуты в сутки! После восстановления первоначальной длины маятника, часы вновь начали показывать точное время.

Жан Ришар – академик и, естественно, столь неожиданный (для того времени) факт стал достоянием научного мира. Первоначально нарушение точности хода часов объясняли температурными деформациями длины маятника (на Экваторе среднесуточная температура выше, чем в Париже). Но такие качественные объяснения никак не согласовывались с количественными. Некоторое время спустя наблюдаемый факт был объяснён правильно – с позиций результатов, предсказываемых теоретической механикой - разной величиной ускорения свободного падения в Париже и на Экваторе (в этом объяснении Гелиоцентрическая система принимается за инерциальную, вращение же Земли учитывается).

Если исходить из предпосылки, что инерциальной является Гелиоцентрическая система и учитывать в этой системе вращение Земли, то опорные факты и методы теоретической механики приводят к выводу о том, что отпущенный на высоте H шарик при отсутствии ветра должен в конце своего пути отклониться *к востоку* от линии отвеса (за счёт кориолисовой силы инерции) на величину, определяемую следующей приближённой формулой

$$\delta = 2,2 \cdot 10^{-5} \cdot \sqrt{H^3} \cdot \cos \psi, \quad \text{где } \psi - \text{широта местности; } \delta, H \text{ в метрах.}$$

Опыты по проверке предсказанных теоретических результатов проводились. Вот их результаты.

Таблица 26.1

**Отклонения к востоку тел, отпускаемых из состояния покоя под куполами соборов.
Сопоставление теоретических предсказаний с опытными данными**

Наблюдатель, год, место опытов	Широта	Число опытов	Высота <i>H</i> , в метрах	Отклонения к востоку, в миллиметрах	
				вычис- лены	получены опытом
Гуглиемини, 1791, Болонья	40° 30'	16	78,3	11,3	19 ± 2,5
Бенценберг, 1802, Гамбург	53° 33'	31	76,34	8,7	9,0 ± 3,6
Бенценберг, 1804, Шлеебуш	51° 25'	29	85,1	10,4	11,5 ± 2,9
Рейх, 1831, Фрайбург	50° 53'	106	158,5	27,5	28,3 ± 4,0
Фламарион, 1903, Париж	48° 50'	144	68	8,1	6,3

Если исходить из предпосылки, что инерциальной является Гелиоцентрическая система и учитывать вращение Земли, то опорные факты и методы теоретической механики приводят к предсказанию «явления изменения относительно Земли плоскости колебаний математического маятника». Впервые опытом это доказал в 1661 году Вивiani, затем Бартолини в 1833 году и Фуко в 1850-1851 годах. Если читателю придётся бывать в Санкт-Петербурге, то рекомендуем лично удостовериться во вращении Земли, посетив Исаакиевский собор (высота 101,58 метра), в котором установлен маятник, с периодом примерно 20 секунд прочерчивающий острой своей частью на посыпанном песком полу соответствующие, постоянно поворачивающиеся (относительно пола), отрезки линий.

В настоящее время имеется целая область прикладного знания - гравиметрия. См., например: «Огородова Л.В., Шимбирев Б.П., Юзефович А.П. Гравиметрия - учебник для ВУЗов.- М.: Недра, 1978.- 326с.»; «Грушинский Н.П., Сажина Н.Б. Гравитационная разведка.- М.: Недра, 1988.- 364 с.». В ней, в частности, решаются задачи по предсказанию мест залегания полезных ископаемых и обнаружению пустот на земной поверхности. Этот вошедший в практику метод научного предсказания основан на учёте весьма малых (порядка

$10^{-8} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2$) отклонений в действительности имеющего место ускорения свободного падения (g) от предсказываемого теоретически (в предположении, что Гелиоцентрическая система является инерциальной).

На Земном шаре военными успешно решаются задачи по теме «стрельба по цели». К сожалению, не только на учебных полигонах, но и в боевой обстановке. В основе теорий стрельб лежит предпосылка о том, что Гелиоцентрическая система является инерциальной, а Земля вращается (вокруг оси «Северный полюс - Южный полюс») с равномерной угловой скоростью, соответствующей 1 обороту за 24 часа. Так называемая «поправка на вращение Земли» даже в артиллерии (не говоря о ракетной технике) при стрельбе из дальнобойных систем даёт величины, достигающие 150-200 метров.

Итак:

26.4 | для подавляющего большинства инженерных расчётов за инерциальную достаточно принимать Геоцентрическую систему. При необходимости проведения более точных расчётов, за инерциальную следует принимать Гелиоцентрическую систему. Причём, по состоянию на сегодняшний день её можно считать инерциальной системой отсчёта с любой степенью точности.

26.5. Условие относительного покоя

Если центр масс механической системы покоится относительно произвольной системы отсчёта, то $\vec{a}_C^r = 0$ и $\vec{\Phi}_C^k = 0$ (потому, что $v_C^r = 0$ и $\vec{a}_C^r = 0$). Поэтому 1 принимает вид:

$$26.5 \quad \left| \quad \vec{R}_r^E + \vec{\Phi}_C^e = 0. \right.$$

Если решаемая задача позволяет оперировать понятием «материальная точка», то используют более простую запись –

$$26.5a \quad \left| \quad \vec{R} + \vec{\Phi}^e = 0, \right.$$

которую называют «условием относительного покоя материальной точки».

С точки зрения изучаемых методов, условие относительного покоя – это изучавшаяся в статике векторная запись условий равновесия твёрдого тела, находящегося под действием сходящейся системы сил, с той лишь небольшой корректировкой, что ко всем внешним силам следует добавлять переносную силу инерции (оперируя с нею как с обычными силами). Скалярные эквиваленты для условия относительного покоя условимся записывать, как и в статике

$$\Sigma X^{E+e} = 0, \quad \Sigma Y^{E+e} = 0, \quad \Sigma Z^{E+e} = 0,$$

но с приданием им пары индексов: «E» - это, как и ранее, символ внешних сил; «e» - символ переносного движения.

26.6. Понятия о силе тяжести и об ускорении свободного падения

На рис.26.2 изображено:

- 1 - Земная ось (N - Северный и S - Южный полюса);
- 2 - Земная поверхность;
- 3 - Экватор (Экваториальный круг, Экваториальная плоскость);
- O - геометрический центр Земли (как шара);
- 4 - неподвижная нить с подвешенной на конце массой m .

Замечания: изобразить в одном масштабе длину нити 4 и Om (расстояние между материальной точкой m и центром O Земли) невозможно. Как будет видно ниже очень мал и угол δ ($\delta = \psi - \varphi$), где φ - геоцентрическая, а ψ - географическая широта. Поэтому рис.26.2 - это не масштабный рисунок, а рисунок к математическому анализу.

К понятиям «ускорение свободного падения» и «сила тяжести»

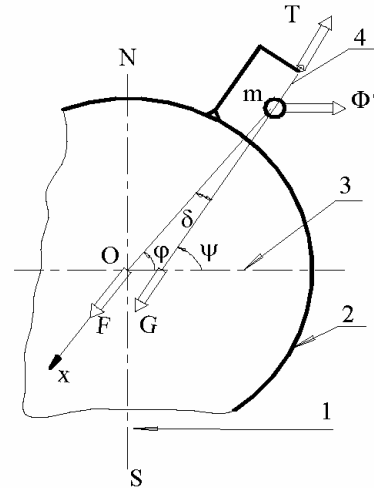


Рисунок 26.2

\vec{F} - гравитационная сила (сила земного притяжения). По общепризнанному среди специалистов закону тяготения (в данном изложении это имеющий локальное значение закон-аксиома):

$$26.6 \quad \left| \quad \vec{F} = \frac{k \cdot m}{R^2} \cdot \vec{i}, \quad \text{где} \right.$$

k - гравитационный параметр; $k = \gamma \cdot M$, γ - гравитационная постоянная, M - масса Земли; $R = \overline{mO}$ - расстояние от массы m до центра O Земли.

К сведению: гравитационный параметр $k = 398603 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{с}^2$;

если тело расположено на полюсе, то $\psi = 90^\circ$, $R_{\min} = 6356780 \text{ м}$; если на экваторе, то $\psi = 0^\circ$, $R_{\max} = (6356780 + 21385) \text{ м}^*$; эти числовые значения

рекомендованы решением 12-й Генеральной ассамблеи Международного Астрономического Союза (Гамбург, 1964 г.).

\vec{T} - натяжение нити.

$\vec{\Phi}^e$ - переносная сила инерции, приложенная к массе m -

$$\vec{\Phi}^e = -m \cdot (\vec{a}_n^e + \vec{a}_\tau^e).$$

Т.к. угловая скорость Земли (ω) во вращательном своём движении относительно Гелиоцентрической системы величина постоянная, то $\vec{a}_\tau^e = 0$. Нормальное же ускорение

$$a_n^e = (R \cdot \cos \varphi) \cdot \omega^2, \quad \text{где}$$

$R \cdot \cos \varphi$ - кратчайшее расстояние от массы m до оси вращения (SON) Земли.

Итак, $\vec{\Phi}^e$ расположена в одной плоскости с осью вращения SON , перпендикулярна к ней и направлена в сторону удаления от этой оси, а её модуль определяется формулой:

$$\Phi^e = m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \cos \varphi.$$

Условием относительного покоя тела m является:

$$a \quad \left| \quad \vec{F} + \vec{T} + \vec{\Phi}^e = 0 .$$

26.7 $\left| \quad \begin{array}{l} \text{Вектор } \vec{G}, \text{ определяемый из соотношения} \\ \vec{G} = \vec{F} + \vec{\Phi}^e \\ \text{принято называть силой тяжести тела } m . \end{array} \right.$

26.8 $\left| \quad \text{Модуль } G \text{ силы тяжести } \vec{G} \text{ тела } m \text{ называют весом этого тела.}$

Из 26.6 и условия относительного покоя (a) следует:

26.9 $\left| \quad \text{сила тяжести } \vec{G} \text{ и натяжение } \vec{T} \text{ нити образуют совокупность противоположных сил.}$

26.10 $\left| \quad \begin{array}{l} \text{Величину } g, \text{ определяемую из соотношения } g = \frac{G}{m}, \text{ называют} \\ \text{ускорением свободного падения тела.} \end{array} \right.$

До сих пор, говоря об ускорении свободного падения тела, мы принимали его равным примерно $9,81 \text{ м/с}^2$. Настало время уточнить это понятие.

Проектируем векторное равенство (a) на ось, перпендикулярную натяжению нити. Получаем:

$$F \cdot \sin \delta = \Phi^e \cdot \sin \psi \quad \mapsto \quad \sin \delta = \frac{\Phi^e}{F} \cdot \sin \psi = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \cos \varphi}{k \cdot m} \cdot R^2 \cdot \sin \psi .$$

Разница между φ и ψ заведомо мала. Поэтому:

$$\varphi \cong \psi, \quad \sin \delta \approx \frac{\omega^2 \cdot R^3}{2 \cdot k} \cdot \sin(2\psi), \quad \text{т.е.}$$

$$(\sin \delta)_{\max} = \frac{\omega^2 \cdot R^3}{2 \cdot k} = \frac{(7,27 \cdot 10^{-5})^2 \cdot (6360000)^3}{2 \cdot (398603 \cdot 10^9)} = 0,0017 \quad \mapsto \quad \delta_{\max} < 6' .$$

Чтобы получить выражение для g , проектируем векторное равенство 7 на ось x и получаем:

$$G \cdot \cos \delta = F - \Phi^e \cdot \cos \varphi .$$

Раскладываем $\cos \delta$ в степенной ряд - $\cos \delta = 1 - \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^4}{4!} - \dots + \dots$

Т.к. δ - малая величина, то $\cos \delta \approx 1$ и, поэтому:

$$G = F - \Phi^e \cdot \cos \psi, \quad \text{т.е.}$$

$$26.11 \quad \left| \quad g = \frac{k}{R^2} - \omega^2 \cdot R \cdot \cos^2 \psi . \right.$$

Итак, ускорение свободного падения тела зависит от расстояния, на котором оно расположено от Центра Земли (от R) и от географической широты ψ .

В зависимости от всех возможных значений двух этих переменных ускорение свободного падения тел расположено в диапазоне $9,78 - 9,83 \text{ м/с}^2$.

Рекомендуем студентам самостоятельно проанализировать результат 11 и аргументировано ответить на вопрос: «почему при торгово-обменных операциях, связанных с транспортировкой дорогостоящих материалов, недопустимо количество вещества оценивать пружинными весами?»

Рекомендуем также прокомментировать утверждение (правильно оно или нет; если правильно, то почему):

$$26.12 \quad \left| \quad \text{«По своему существу почти в каждой решаемой задаче по статике используется условие относительного покоя 5»} . \right.$$

26.7. Рядовые примеры, иллюстрирующие применение закона о движении центра масс в произвольной системе отсчёта

ПРИМЕР 26.1.- *Определение частоты колебаний шарика, подпружиненного внутри вращающейся трубки*

Дано. - Горизонтально расположенная трубка равномерно вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω (см. рис.26.3). Внутри трубки размещена пружина, жёсткостью c . Один конец пружины прикреплен к внутреннему торцу трубки, а к свободному её концу присоединён шарик, массой m . При недеформированной пружине центр шарика расположен на оси вращения (совпадает с точкой O).

Определить частоту k колебаний шарика относительно трубки. Трением пренебречь.

Решение. - С продольной осью трубки связываем ось x , начиная её в точке O . Для шарика на рис. 4 изображаем кинематическую и силовую картину, где:

G - вес шарика; \vec{P} и \vec{N} - действующие на него упругая ($P = c \cdot x$) сила и реакция стенок трубки. \dot{x} и \ddot{x} - скорость и ускорение центра шарика относительно трубки.

$a_n^e = x \cdot \omega^2$ - модуль нормальной составляющей переносного ускорения центра шарика (материальной точки массой m).

$\vec{\Phi}_n^e = -m \cdot (x \cdot \omega^2) \cdot \vec{i}$ - нормальная составляющая переносной силы инерции.

Касательная составляющая переносной силы инерции равна нулю - по той причине, что трубка вращается с постоянной угловой скоростью.

\vec{a}^k - кориолисово ускорение. $\vec{\Phi}^k = -m \cdot \vec{a}^k$ - кориолисова сила инерции.

В соответствии с законом о движении центра масс относительно неинерциальной системы отсчёта (в рассматриваемом примере связана с трубкой) записываем:

$$m \cdot \vec{a}^r = (\vec{G} + \vec{N} + \vec{P}) + \vec{\Phi}_n^e + \vec{\Phi}^k.$$

Проектируем составленное векторное равенство на ось x и получаем:

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot x + m \cdot x \cdot \omega^2.$$

К условию примера 26.1

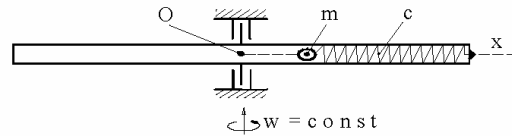


Рисунок 26.3

К решению примера 26. 1

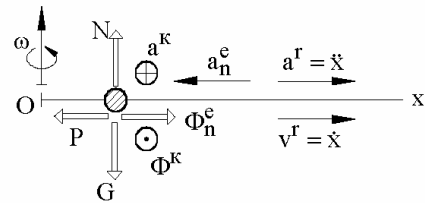


Рисунок 26.4

Откуда: $\ddot{x} + k^2 \cdot x = 0$, где

$$k = \sqrt{\frac{c}{m} - \omega^2}.$$

Итак, при $\omega^2 < \frac{c}{m}$ частота колебаний шарика относительно трубки

определяется зависимостью (а): при $\omega^2 > \frac{c}{m}$ шарик относительно трубки, как ясно из примеров 4 и 5 предыдущего раздела, будет неподвижным - сжавшим пружину до предела, или растянув её и упёршись в противоположный внутренний торец трубки.

ПРИМЕР 26.2.- Кинематическое условие, обеспечивающее неподвижность гладкого бруска относительно треугольной призмы

Дано. - На треугольной призме A расположен гладкий брусок B (см. рис.26. 5). Определить ускорение \vec{a} , с которым необходимо перемещать треугольную призму, чтобы находящийся на ней брусок покоился.

Решение.- Записываем для бруска условие относительного покоя:

$$\vec{G} + \vec{N} + \vec{\Phi}^e = 0.$$

Проектируем его вначале на ось x , затем на y . Получаем:

$$-\Phi^e + N \cdot \sin \alpha = 0 \quad \mapsto \quad m \cdot a = N \cdot \sin \alpha ;$$

$$-G + N \cdot \cos \alpha = 0 \quad \mapsto \quad m \cdot g = N \cdot \cos \alpha .$$

После деления второго выражения верхней строки на второе выражение нижней строки, получаем:

$$a = g \cdot \operatorname{tg} \alpha .$$

К условию примера 26.2

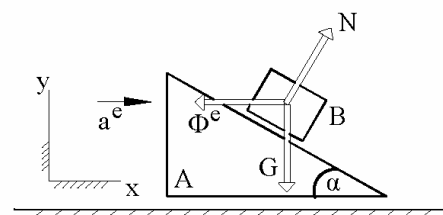


Рисунок 26.5

27. Закон об изменении количества движения

27.1. Необходимые для описания закона понятия

27.1 Величину $\vec{K}_v = m_v \cdot \vec{v}_v$ называют количеством движения v -той частицы (где m_v и \vec{v}_v - её масса и скорость), а $\vec{K} = \sum \vec{K}_v$ - количеством движения механической системы (где символом “ Σ ” учтены все частицы системы).

В разделе 2 вводилось понятие центра масс системы –

$$m \cdot \vec{r}_c = \sum (m_v \cdot \vec{r}_v).$$

После взятия от этого равенства производной по времени, получаем:

$$m \cdot \vec{v}_c = \sum (m_v \cdot \vec{v}_v).$$

Таким образом:

27.1a $\vec{K} = m \cdot \vec{v}_c$ - количество движения механической системы может вычисляться как количество движения отдельной точки, масса которой равна массе рассматриваемой системы и которая движется вместе с её центром.

Пусть t - время, а $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_v, \dots$ - силы, действующие на принятую к рассмотрению механическую систему.

Называют:

27.2a $d\vec{S}_v = \vec{F}_v \cdot dt$ - элементарным импульсом v -той силы;

27.2б $\vec{S}_v = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_v \cdot dt)$ - импульсом v -той силы за конечный промежуток времени (в приведенной математической записи - за промежуток времени между моментами t_1 и t_2);

27.2в $\vec{S}_r = \sum \vec{S}_v$ - главным импульсом действующих на систему сил за конечный промежуток времени (если иметь ввиду математические записи из 27.2б, то - за промежуток времени между моментами t_1 и t_2).

Представляем студентам возможность самостоятельно получить результаты:

$$27.3 \quad \left| \begin{array}{l} \vec{S}_\Gamma = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{R}_\Gamma \cdot dt), \quad \text{где} \\ \vec{R}_\Gamma - \text{главный вектор действующих на систему сил;} \end{array} \right.$$

$$27.4 \quad \left| \begin{array}{l} \text{при постоянных силах выражения 26 и 3 приобретают вид:} \\ \vec{S}_v = \vec{F}_v \cdot (t_2 - t_1); \quad \vec{S}_\Gamma = \vec{R}_\Gamma \cdot (t_2 - t_1). \end{array} \right.$$

27.2. Основные формы математического описания закона об изменении количества движения

Т.к. масса – постоянная во времени величина, то из закона о движении центра масс получаем:

$$\vec{R}_\Gamma^E = m \cdot \vec{a}_c = m \cdot \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v}_c)}{dt} = \frac{d\vec{K}}{dt}.$$

$$27.5 \quad \left| \begin{array}{l} \frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{R}_\Gamma^E \quad - \quad \text{это основная форма математического описания} \\ \text{закона об изменении количества движения - в инерциальной} \\ \text{системе отсчёта производная по времени от количества движения} \\ \text{механической системы равна главному вектору всех внешних сил,} \\ \text{действующих на эту систему.} \end{array} \right.$$

$$27.6 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Математическую запись} \quad d\vec{K} = \vec{R}_\Gamma^E \cdot dt \quad \text{называют} \\ \text{дифференциальной формой математического описания закона об} \\ \text{изменении количества движения.} \end{array} \right.$$

Интегрируя последнее математическое выражение в пределах от t_1 до t_2 , получаем:

$$27.7 \quad \left| \begin{array}{l} \vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \vec{S}_\Gamma^E \quad - \\ \text{это интегральная форма математического описания закона об} \\ \text{изменении количества движения, где } \vec{K}_2 \text{ и } \vec{K}_1 \text{ - количества} \\ \text{движения механической системы в моменты времени } t_2 \text{ и } t_1. \end{array} \right.$$

При решении учебных задач чаще встречается интегральная форма закона об изменении количества движения.

Тройки скалярных эквивалентов векторным уравнениям 5, 6 и 7 рекомендуем студентам записать самостоятельно (и этим проверить степень усвоенности многократно встречавшегося метода проектирования векторных равенств на оси).

27.3. Закон сохранения количества движения

Первая форма:

27.8a | если главный вектор всех внешних сил, действующих на механическую систему, равен нулю, то её количество движения является постоянной во времени величиной.

Вторая форма:

27.8б | если сумма проекций на какую-либо ось (например x) всех внешних сил, действующих на механическую систему, равна нулю, то проекция количества движения этой механической системы на рассматриваемую ось является постоянной во времени величиной.

Результат 27.8a является простым следствием из 27.6 (получается через операцию интегрирования). Аналогично, 27.8б - есть следствие из проекции на ось x векторного равенства 27.6, т.е. является результатом интегрирования выражения

$$dK_x = \sum X^E \cdot dt.$$

27.8a и 27.8б можно было получить и из закона инерции. Рекомендуем студентам увидеть это самостоятельно.

27.4. Исторический аспект

Доверие к теоретически полученным результатам 27.5-8 основано на более, чем трёхвековой проверке их справедливости. Это зафиксировано, в частности, историей длительных и жарких полемик лейбницианцев с картезианцами (Г.Лейбниц и его последователи – с одной стороны и Р.Декарт со своими последователями – с другой стороны). Но суть споров сводилась не к вопросу о неправильности одного положения и правильности другого, а к вопросу о том, какое из положений главнее. Например, Иоганн Бернулли (1667-1748), как последователь Лейбница, теорию соударения строил на 3-х законах - 2-м был «закон сохранения количества движения», 3-м - «закон сохранения живых сил» (живая сила – это $m \cdot v^2$); главным считался 3-й закон. Декарт же и его последователи главным считали закон сохранения количества движения в природе. Т.е. вопроса о несоответствии опытным данным теоретических предсказаний, получаемых из закона сохранения количества движения, не было. К сведению:

в настоящее время закон об изменении количества движения также не считается главным – в подавляющем большинстве учебников (в том числе и в данном «Курсе») он является следствием, главным же считается $m \cdot \vec{a} = \vec{F}$; однако это не означает, что закон об изменении количества движения является ненадёжным опорным фактом теоретической механики.

У Ньютона в «Математических началах» (1687 г.) вторым законом-аксиомой является - «Изменение количества движения пропорционально движущей силе и происходит по той прямой, по которой эта сила действует», т.е. в переводе на сегодняшнюю символику - это практически описание результата 5.

Итак, несмотря на широкое и более чем трёхвековое использование закона об изменении количества движения в расчётной практике, среди специалистов до сих пор не появлялось таких, которые бы ставили под сомнение надёжность получаемых из него результатов.

27.5. Рядовые примеры на применение Закона об изменении количества движения

ПРИМЕР 27.1.- *Определение скорости бросания тела вверх*

Дано. – Время от начала вертикального полёта тела до точки его возврата (когда $v_2 = 0$) $\Delta t = 3$ с. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Определить скорость v_1 , с которой тело брошено вверх.

Решение.- Записываем интегральную форму математического выражения закона об изменении количества движения применительно к рассматриваемой задаче:

$$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \vec{S}^G .$$

При этом, $K_2 = m \cdot v_2 = m \cdot 0 = 0$; $\vec{K}_1 = m \cdot \vec{v}_1$; $\vec{S}^G = \vec{G} \cdot \Delta t$.

Поэтому $-m \cdot \vec{v}_1 = \vec{G} \cdot \Delta t$.

Очевидно, что скорость \vec{v}_1 направлена вверх, сила \vec{G} вниз.

Проектируя составленное векторное равенство на вверх направленную ось, получаем:

$$-m \cdot v_1 = -G \cdot \Delta t \quad \mapsto \quad v_1 = g \cdot \Delta t = 9,8 \cdot 3 = 29,4 \text{ м/с} .$$

ПРИМЕР 27.2.- *Определение сопротивления движению транспортного средства*

Дано. – У корабля, массой $m = 50000$ т, остановили ходовой винт и заметили, что за время $\Delta t = 1$ минута скорость снизилась с $v_1 = 36$ км/час до $v_2 = 30$ км/час.

Определить среднее сопротивление (R) движению корабля в диапазоне скоростей $30 - 36$ км/час.

Решение.- Записываем интегральную форму математического выражения закона об изменении количества движения применительно к рассматриваемой задаче:

$$a \quad \left| \quad \vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \vec{S}^E .\right.$$

$$\text{При этом,} \quad \vec{K}_2 = m \cdot \vec{v}_2, \quad \vec{K}_1 = m \cdot \vec{v}_1; \quad \vec{S}^E = (\vec{R} + \vec{G} + \vec{N}) \cdot \Delta t .$$

Считаем, что скорости \vec{v}_1 и \vec{v}_2 направлены слева-направо; ясно, что тогда вектор \vec{R} следует направить справа-налево. Проектируем векторное равенство (а) на направленную вправо горизонтальную ось; при этом учитываем, что \vec{G} (сила тяжести) и \vec{N} (выталкивающая сила) направлены вертикально:

$$m \cdot v_2 - m \cdot v_1 = -R \cdot \Delta t \quad \mapsto$$

$$R = \frac{m \cdot (v_1 - v_2)}{\Delta t} = \frac{5 \cdot 10^7}{60} \cdot \left(\frac{36}{3,6} - \frac{30}{3,6} \right) = 1,39 \cdot 10^6 \text{ Н} .$$

Задание для самостоятельной работы: придумайте и опишите методику, с помощью которой вы установите зависимость сопротивления движению моторной лодки от скорости её движения - $R = f(v)$?

ПРИМЕР 27.3.- *Определение скорости движения сцепленных вагонов*

Дано. - В одном направлении движется 4 вагона со скоростями: $v_1 = 1$ м/с - у головного вагона; $v_2 = 2$ м/с - у вагона, следующего за головным; $v_3 = 3$ м/с - у третьего вагона и $v_4 = 5$ м/с - у хвостового вагона. Их массы (с учётом находящихся в них грузов): $m_1 = 30$, $m_2 = 60$, $m_3 = 50$ и $m_4 = 40$ тонн.

Определить скорость v'' состава из 4-х вагонов после их сцепки. Трениями и сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение.- Пусть \vec{K}' - количество движения системы из 4-х вагонов до их сцепки; \vec{K}'_1 - количество движения первого вагона, \vec{K}'_2 - второго, \vec{K}'_3 - третьего и \vec{K}'_4 - хвостового вагонов. В соответствии с введёнными понятиями

$$\vec{K}' = \vec{K}'_1 + \vec{K}'_2 + \vec{K}'_3 + \vec{K}'_4$$

Эти же величины, но после сцепки вагонов, обозначаем двумя штрихами -

$$\vec{K}'' = \vec{K}''_1 + \vec{K}''_2 + \vec{K}''_3 + \vec{K}''_4$$

На вагоны действуют веса и реакции рельс. Они вертикальны. Скорости, а потому и количества движения, считаем направленными слева-направо.

Векторное равенство

$$\vec{K}'' - \vec{K}' = \left[(\vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{G}_3 + \vec{G}_4) + (\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 + \vec{N}_4) \right] \cdot \Delta t$$

проектируем на горизонтальную ось (на направление скоростей) и получаем:

$$\begin{aligned} K'' - K' = 0 \quad \mapsto \quad & (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \cdot v'' - \\ & - (m_1 \cdot v'_1 + m_2 \cdot v'_2 + m_3 \cdot v'_3 + m_4 \cdot v'_4) = 0 \quad \mapsto \\ \mapsto \quad v'' = & \frac{(m_1 \cdot v'_1 + m_2 \cdot v'_2 + m_3 \cdot v'_3 + m_4 \cdot v'_4)}{(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)} = \\ & = \frac{(30 \cdot 1 + 60 \cdot 2 + 50 \cdot 3 + 40 \cdot 5)}{(30 + 60 + 50 + 40)} = 2,7 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 27.4.- *Определение ударной силы шарика*

Дано. – Вертикально падающий шарик ударяется о горизонтальную плиту и отскакивает. Масса шарика $m = 50$ г. Модули скоростей в начале и конце удара: $v_1 = 6,26$ м/с, $v_2 = 3,5$ м/с. Продолжительность удара $\Delta t = 0,0002$ с.

Определить среднюю (за $\Delta t = 0,0002$ с) ударную силу шарика.

Решение. - $m \cdot \vec{v}_2 - m \cdot \vec{v}_1 = \vec{F} \cdot \Delta t$.

К примеру 4

Проектируем составленное векторное равенство

на направление силы \vec{F} :

$$m \cdot v_2 - (-m \cdot v_1) = F \cdot \Delta t \quad \mapsto$$

$$F = \frac{m \cdot (v_2 + v_1)}{\Delta t} = \frac{0,05 \cdot (3,5 + 6,26)}{0,0002} = 2440 \text{ Н}.$$

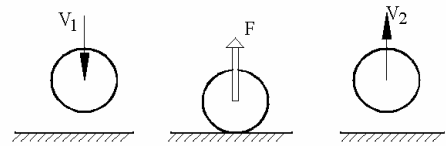


Рис. 1

Ответьте на вопрос: «почему в составленном векторном уравнении отсутствует сила тяжести?»

Главное назначение рассмотренного примера – иллюстрация применения закона об изменении количества движения. Вместе с тем замечаем: удар – это часто встречающееся в жизни явление, со своими сложностями, многими экспериментально определяемыми величинами и разработанными методиками подходов к решению конкретных задач. Углублённое его изучение можно начать,

в частности, с книги «Батуев С.Г. и др. Инженерные методы исследования ударных процессов.- М.: Машиностроение, 1969.- 248с.». Но и рассмотренный пример, в котором ударная сила оказалась в 5000 раз большей веса шарика, убедительно поясняет будущему инженеру почему неотъемлемой составляющей оборудования машиностроительных заводов являются различного типа молоты и ковочные машины, объясняет причину присутствия практически в каждом доме обыкновенного молотка. Но ... продолжим иллюстрацию применимости закона об изменении количества движения рассмотрением ещё одного примера, также на ударное явление, но в ином аспекте.

Рассмотрение примера предваряем понятием:

$$27.9 \quad \left| \begin{array}{l} \text{если шарик, двигаясь по нормали к неподвижной поверхности,} \\ \text{ударяется о неё со скоростью } v_1, \text{ а отскакивает с } v_2, \text{ то отношение} \\ \frac{v_2}{v_1} = k \quad \text{называют коэффициентом восстановления скорости;} \end{array} \right.$$

экспериментальные данные показывают, что при скоростях удара до 10 м/с коэффициенты восстановления скорости имеют следующие примерные значения: стекло о стекло - 0,93; слоновая кость о слоновую кость - 0,88; сталь о сталь - 0,55; дерево о дерево - 0,5. Ясно, что если удар наносится по подвижному телу, то в числителе и знаменателе формулы 27.9 будут фигурировать разности между скоростями до и после удара.

ПРИМЕР 27.5.- Прямой центральный удар двух шаров
Дано. – По одной прямой перемещаются два шарика с одинаково направленными скоростями \vec{v}_1 и \vec{v}_2 . 1-й шарик догоняет второй ($v_1 = 4, v_2 = 2$ м/с). Массы шариков: $m_1 = 100$ г; $m_2 = 150$ г. После удара скорости шариков изменяются – становятся равными \vec{u}_1 и \vec{u}_2 (ясно, что модуль скорости \vec{u}_1 становится меньшим модуля скорости \vec{u}_2).

Скорости шариков до и после соударения

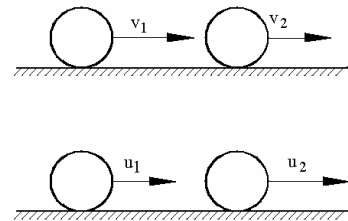


Рисунок 27.2

Требуется. - Считая известным коэффициент восстановления скоростей

$$a \quad \left| \quad k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} = 0,55 , \right.$$

определить модули u_1 и u_2 скоростей шариков после их соударения.

Решение. - Принимаем к рассмотрению систему, состоящую из обоих шариков. Для неё

$$b \quad \left| \quad \vec{K}'' - \vec{K}' = \vec{S}^G + \vec{S}^N \right.$$

где \vec{K}' , \vec{K}'' - количество движения системы из 2-х шариков после удара и до него; \vec{S}^G , \vec{S}^N - импульсы сил тяжести и нормальных реакций. Замечание: ударные силы являются внутренними и, поэтому, в уравнении не учитываются.

Спроектировав векторное равенство (б) на направление скоростей, получаем:

$$в \quad \left| \quad (m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2) - (m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2) = 0. \right.$$

Для определения неизвестных u_1 и u_2 решаем систему алгебраических уравнений (а) и (в):

$$\left. \begin{aligned} u_2 - u_1 &= k \cdot (v_1 - v_2) \\ m_2 \cdot u_2 + m_1 \cdot u_1 &= m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\times (-m_2) \\ &\times 1. \end{aligned}$$

Чтобы избавиться от неизвестной u_2 первое уравнение умножаем на $(-m_2)$, второе на "1", полученные уравнения складываем и т.д. ... после алгебраических преобразований получаем:

$$u_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot (1 + k) \cdot (v_1 - v_2), \quad u_2 = v_2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot (1 + k) \cdot (v_1 - v_2).$$

После подстановки заданных численных значений определяем:

$$u_1 = 2,14 \text{ м/с}; \quad u_2 = 3,24 \text{ м/с}.$$

27.6. Условие равновесия оболочки с ответвлениями и установившимся в ней движением текучей ср

На рис.27.3 изображена механическая система, оконтуривающую оболочку которой в нескольких местах пронизывают потоки текучей среды (обычно жидкость). По одним частицы втекают внутрь оболочки, по другим вытекают. Потоки характеризуют

$$a \quad \left| \begin{array}{l} \text{секундные массы} \\ \mu_i = \frac{dm_i}{dt}, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{array} \right.$$

т.е. это протекающие через поперечные сечения потоков за единицу времени массы текучей среды;

К постановке вопроса о равновесии оболочки с текучей средой

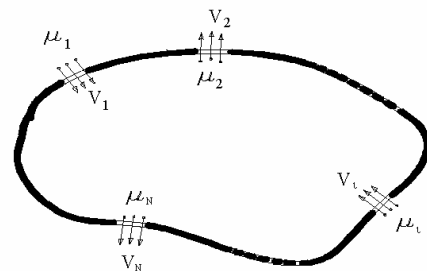


Рисунок 27..3

1, 2, ..., i, ..., N - номера потоков текучей среды; \vec{v}_i ($i = 1, 2, \dots, N$) - средние по поперечным их сечениям скорости частиц.

Пусть оболочка имеет неизменяемую форму и неподвижна относительно инерциальной системы отсчёта, а \vec{R}_Γ^E - действующий на неё главный вектор внешних сил.

Принимаем к рассмотрению совокупность частиц, которая в момент времени t' расположена внутри оболочки. Количество её движения - \vec{K}' .

Локальная аксиома (о постоянстве содержащегося в оболочке количества движения):

27.10 При установившемся движении текучей среды, протекающей через оболочку с ответвлениями, содержащееся в ней количество движения является постоянной во времени величиной.
Установившимся называется такое движение текучей среды, при котором $\vec{v}_i = \text{const}(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$

Принятая к рассмотрению для момента времени t' механическая система к моменту $t'' = t' + dt$ изменит свою форму - на рис.4 эти изменения отображены 4-мя прямоугольниками (но мысленно представляется не 4, а N прямоугольников - 1, 2, ..., i, ..., N-ый; кроме того, в направлении скоростей размеры таких прямоугольников - бесконечно малые величины - определяемые произведениями $v_i \cdot dt$).

Рис.4 помогает увидеть, что в момент времени t'' количество движения принятой к рассмотрению механической системы определяется выражением:

$$\vec{K}'' = \vec{K}' - \mu_1 \cdot \vec{v}_1 \cdot dt + \mu_2 \cdot \vec{v}_2 \cdot dt \pm \dots - \mu_i \cdot \vec{v}_i \cdot dt \mp \dots + \mu_N \cdot \vec{v}_N \cdot dt .$$

Откуда:

$$d\vec{K} = \vec{K}'' - \vec{K}' = -\mu_1 \cdot \vec{v}_1 \cdot dt + \mu_2 \cdot \vec{v}_2 \cdot dt \pm \dots - \mu_i \cdot \vec{v}_i \cdot dt \mp \dots + \mu_N \cdot \vec{v}_N \cdot dt .$$

Учитывая 27.5, т.е. учитывая, что $\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{R}_\Gamma^E$, из последнего выражения получаем:

К выводу условия равновесия оболочки с текучей средой

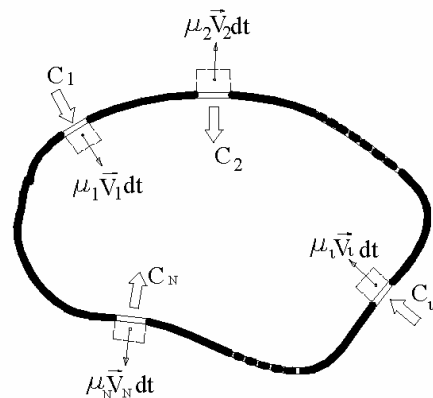


Рисунок 27.4

$$\vec{R}_r^E + \mu_1 \cdot \vec{v}_1 - \mu_2 \cdot \vec{v}_2 \mp \dots + \mu_i \cdot \vec{v}_i \pm \dots - \mu_N \cdot \vec{v}_N = 0.$$

Векторы \vec{C}_i ($i = 1, 2, \dots, N$), которые параллельны соответствующим векторам скоростей \vec{v}_i ($i = 1, 2, \dots, N$), направлены внутрь оболочки и модули которых вычисляются по формулам $\mu_i \cdot v_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$), называем *направленными внутрь оболочки секундными количествами движения потоков* текучей среды. Тогда последнее выражение принимает вид:

$$\vec{R}_r^E + \sum_{i=1}^N \vec{C}_i = 0.$$

Итак, получено

условие равновесия оболочки с ответвлениями при установившемся режиме движения протекающей в ней текучей среды:

27.11

$$\vec{R}_r^{E+C} = 0$$

- для оболочки с ответвлениями при установившемся движении в ней текучей среды главный вектор всех внешних сил и секундных количеств движения, направленных внутрь объёма, равны нулю.

Замечание. - Определение направления движения потоков не является предметом теоретической механики. Это рассматривается в гидравлике. Но подчёркиваем: секундные количества движения следует направлять внутрь оболочки, независимо от того втекающим или вытекающим является поток.

Результат 27.11 применительно к оболочке с одним входом и одним выходом известен как хорошо проверенное жизнью уравнение Эйлера об изменении секундного количества движения жидкости.

ПРИМЕР 27.6. - *Сила действия струи брандспойта* *К силе действия струи брандспойта*

Дано. - Из брандспойта (см. рис.27.5) вытекает струя воды со скоростью $v = 20$ м/с. Диаметр наконечника $d = 40$ мм. К стене струя расположена перпендикулярно и о неё разбивается.

Требуется. - Определить давление струи на стенку.

Решение. - Принимаем к рассмотрению часть струи, расположенную между плоскостью стены, круговым сечением ω

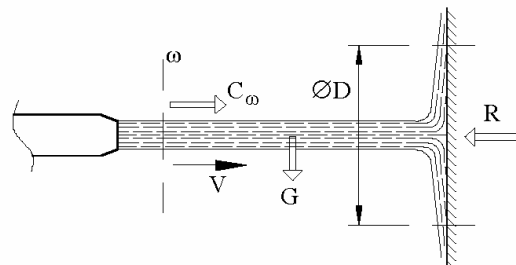


Рисунок 27.5

(диаметром $d = 40$ мм) и цилиндрической поверхностью диаметра D (безразлично какого диаметра, но такого, чтобы скорости частиц воды, пересекали эту цилиндрическую поверхность перпендикулярно).

Определим внешнюю силу \vec{R} , действующую на принятую к рассмотрению часть струи со стороны поверхности стенки.

Записываем условие равновесия 27.11 применительно к рассматриваемому случаю:

$$\vec{R} + \vec{G} + \vec{C}_\omega + \sum \vec{C}_{iD} = 0, \quad \text{где}$$

\vec{G} - сила тяжести принятой к рассмотрению части струи - направлена вниз;

\vec{C}_ω - секундное количество движения втекающей через сечение ω жидкости (направлено внутрь рассматриваемого объёма);

\vec{C}_{iD} - секундное количество движения вытекающей элементарной струйки (с номером i), она по нормали пересекает цилиндрическую поверхность диаметра D ; \sum - это символ суммы секундных количеств движения всех элементарных струек, расположенных веером в плоскости стены.

Проектируем составленное векторное уравнение на направление \vec{v} . Получаем:

$$R = C_\omega = \mu \cdot v.$$

Через входное круглое сечение (диаметром $d = 0,04$ м) за 1 секунду протечёт столбец воды длиной $L = v \cdot 1 \text{ сек}$. Масса этого столбца:

$$\left(\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot L \right) \cdot \rho, \quad \text{где}$$

$\rho = 1000$ кг/м³ - плотность воды.

Тогда секундное количество движения

$$C_\omega = \left(\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot v \right) \cdot \rho \cdot v = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \rho \cdot v^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 0,04^2 \cdot 1000 \cdot 20^2 = 500 \text{ Н}.$$

Итак, давление, производимое на стену рассматриваемой струёй воды равно 500 Н и направлено слева-направо.

Замечание: если бы скорость струи была не 20 м/с (как в рассмотренном примере), а положим 100 м/с, то давление равнялось бы $12,5 \text{ кН}$! В экспериментах достигаются скорости струй до 900 м/с и более. Большой разрушительной силе струй нашли применение в технике - гидроотбойка угля (существуют так называемые гидрошахты); струями воды режут бумагу, дерево, стекло и пр.

27.7. Начальные сведения о ракетодинамике

27.7.1. Введение в подраздел

Вторая половина 20-века ознаменовалась широким вхождением в человеческую практику ракетной техники - и для военных целей, и для исследований космоса. Инженерные достижения в этой области огромны. Пока они, в большинстве своём, относятся к закрытой тематике. Но есть в этих вопросах и много хорошо известного, причём основополагающего. Инженер обязан это знать, ибо путь решения возникающих в практической его деятельности задач может пройти именно через знание основополагающих методов ракетодинамики.

Кроме того, инженер обязан обладать высокой технической культурой, умеющим *на основе точного знания* отвечать на многие интересующие людей вопросы. Один из них: «Нога человека уже ступила на Луну. Но может ли землянин побывать на планетах Солнечной системы (и непосредственно увидеть что там происходит)? Сможет ли побывать на планетах за пределами Солнечной системы?»

Ответить на такие волнующие Человечество вопросы позволяют уравнение Мещерского и вытекающие из него формулы Циолковского.

27.7.2. Уравнение Мещерского

(основное уравнение динамики тела переменной массы)

На рис.6 изображена оболочка, внутри которой размещено вещество, частицы которого могут из неё извергаться (в результате, например, горения).

Такое устройство называют ракетой.

Задаёмся целью составить уравнение её движения.

Для этого рассматриваем 2 момента времени - t и $(t + dt)$.

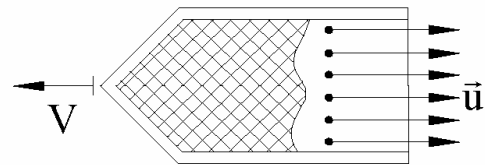
Пусть в момент времени t скорость ракеты относительно инерциальной системы отсчёта - \vec{v} , а её масса (рассматриваемая как переменная величина) - m .

Тогда, в соответствии с принятыми обозначениями, её количество движения:

$$\vec{K} = m \cdot \vec{v}.$$

По причине извержения частиц (со скоростью \vec{u} относительно ракеты) к моменту времени $(t + dt)$ абсолютная скорость этой ракеты возрастёт - на беско-

К выводу уравнения
Мещерского



Рисуно 27.6

нечно малую величину $d\vec{v}$ и станет равной $(\vec{v} + d\vec{v})$, а масса уменьшится, и также на бесконечно малую величину - на dm_u . Изменится, поэтому, к моменту времени $(t + dt)$ и количество движения рассматривавшейся в момент времени t механической системы; оно станет равным:

$$\vec{K} + d\vec{K} = (m - dm_u) \cdot (\vec{v} + d\vec{v}) + dm_u \cdot \vec{v}_a,$$

где \vec{v}_a - абсолютная скорость отделяющихся частиц (их скорость относительно инерциальной системы). На основании закона сложения скоростей: $\vec{v}_a = \vec{v} + \vec{u}$ (\vec{v} - переносная скорость). Поэтому получаем:

$$d\vec{K} = [(m - dm_u) \cdot (\vec{v} + d\vec{v}) + dm_u \cdot (\vec{v} + \vec{u})] - m \cdot \vec{v} = m \cdot d\vec{v} + dm_u \cdot \vec{u}$$

(член $dm_u \cdot d\vec{v}$ опущен как бесконечно малая величина второго порядка малости).

Разделив левую и правую части последнего математического выражения на dt , получаем:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = m \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{u}, \quad \text{где} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad - \text{ это ускорение ракеты,}$$

а $\mu = \frac{dm_u}{dt}$ - знакомая из подраздела 22.6 секундная масса извергающихся из ракеты частиц.

В том же подразделе 22.6 вводилось понятие «секундное количество движения текучей среды». Здесь им является вектор $\mu \cdot \vec{u}$, но, в отличие от предыдущего случая, $\mu \cdot \vec{u}$ - *относительное*, а не абсолютное, секундное количество движения (вычисляемое по скорости извергаемых частиц относительно ракеты, а не по скорости относительно инерциальной системы отсчёта).

Вводя вектор $\vec{P} = -\mu \cdot \vec{u}$ и учитывая, что $\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{R}_r^E$, окончательно получаем:

$$27.12 \quad \left\{ \begin{array}{l} m \cdot \vec{a} = \vec{R}_r^E + \vec{P}. \\ \text{Это математическое выражение называют уравнением} \\ \text{Мещерского, а вектор } \vec{P} = -\mu \cdot \vec{u} \text{ - реактивной силой.} \end{array} \right.$$

Реактивная сила – это сила, родственная той, которую ощущает стреляющий человек - при стрельбе из пистолета она ощущается кистью руки; при стрельбе из винтовки воспринимается плечом.

Мещерский Иван Всеволодович (1859-1935) уравнение 27.12 опубликовал в 1897 году. С 1902 г. заведовал кафедрой теоретической механики Петербургского политехнического института. Известен, прежде всего, как талантливый педагог - под его руководством коллективом кафедры в 1914 году издан неувядаемый «Сборник задач по теоретической механике» - переиздавался 36 раз, им пользуются не только у нас, но практически во всех странах мира.

27.7.3. Первая формула Циолковского (для одноступенчатой ракеты)

Для многих современных реактивных двигателей $P_{max} = (50 \div 100) \cdot G$, где P_{max} - максимально допускаемая конструкцией двигателя реактивная сила (тяга двигателя); $G = m \cdot g$ - сила тяжести, действующая на двигатель, находящийся на земной поверхности (см., в частности, «Волков Е.Б. Ракетные двигатели.- М.: Воениздат, 1969.-105 с.»).

Тягу, большую чем P_{max} , создать нельзя. Меньшую, вплоть до нуля, можно - например регулированием количества подаваемого в зону сгорания топлива. Но ясно, что с точки зрения дальности и быстроты полётов необходимо стремиться держать работу двигателя в режиме максимальной тяги.

К сожалению, если ракета предназначена для транспортировки людей, то ускорение не должно превышать 30 м/с^2 (подробнее с вопросом можно ознакомиться, например, в книге «Уманский С.П. Барьер выносливости лётчика.- М.: Машиностроение, 1964.-171 с.»). Но даже и в этом случае на поверхности Земли $P = 4 \cdot G$. С удалением же от Земли значимость гравитационной силы, по сравнению с тягой двигателя, уменьшается. Например, когда ракета поднимется от поверхности Земли на высоту, равную её радиусу, то сила её тяжести окажется уменьшенной в 4 раза; на высоте 2-х Земных радиусов над стартовой площадкой гравитационная сила Земли уменьшится в 9 раз. *Задание студентам:* из какого закона это следует?

Изложенное позволяет составляющей \vec{R}_T^E в уравнении Мещерского пренебречь и к дальнейшему анализу принять это уравнение в форме: $m \cdot \vec{a} = \vec{P}$, или, в проекции на направление вектора \vec{P} ,

$$a \quad \left| \quad m \cdot a = P .\right.$$

Обозначаем:

m_T - запас топлива (при жидкостных реактивных двигателях – это суммарная масса окислителя и горючего перед включением двигателя в работу);

m_C - сухая масса ракеты (остающаяся её масса после выгорания всего топлива);

m_u - масса отделившихся от ракеты частиц; рассматривается как переменная величина, изменяющаяся от 0 до m_T .

Ясно, что масса ракеты (как переменная величина) определяется выражением:

$$б \quad \left| \quad m = (m_C + m_T) - m_u \quad \mapsto \quad dm = -dm_u \right.$$

Разворачивая (а) с учётом обозначений пункта 27.7.2, получаем:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{dm_u}{dt} \cdot u .$$

Теперь подключаем связь (б) между дифференциалами и интегрируем:

$$dv = -u \cdot \frac{dm}{m} \quad \mapsto$$

$$\int_0^{V_x} dv = -u \cdot \int_{m_C+m_T}^{m_C} \frac{dm}{m} \quad \mapsto \quad V_x = u \cdot \ln \left(\frac{m_C + m_T}{m_C} \right),$$

где V_x - *характеристическая скорость* – это скорость, которую приобретает ракета под действием тяги после извержения из ракеты всех частиц (при жидкостных реактивных двигателях – после выгорания всего топлива).

Вынесенная за знак интеграла (что можно делать на основании известной из высшей математики теоремы о среднем) u - это средняя скорость извергаемых из ракеты частиц. Но, как видим, с точки зрения получения наибольшего значения характеристической скорости, u должна быть как можно большей величиной. Поэтому на практике u - это максимально достижимая скорость извержения частиц из ракеты. К сведению: в наиболее распространённых жидкостных реактивных двигателях (окислитель - жидкий кислород, азотная кислота, перекись водорода и др.; горючее - керосин, спирт, жидкий водород и т.д.) u может достигать значений 3-3,5 км/с иногда до 4,5 км/с.

Итак,

$$27.13 \quad \left| \quad V_x = u \cdot \ln z, \quad z = \left(\frac{m_C + m_T}{m_C} \right) \right.$$

Математическое выражение 27.13 называют первой формулой Циолковского (или: формулой Циолковского для одноступенчатой ракеты), где z - число Циолковского.

Специалисты указывают, что вряд ли когда можно будет достичь $z = 10$.

Таким образом, в настоящее время при использовании одноступенчатых ракет можно лишь мечтать о достижении характеристической скорости $4 \cdot \ln 10 = 9,2$ км/с. Реально достижимая характеристическая скорость - $3,5 \cdot \ln 6 = 6 \div 7$ км/с.

При выводе формулы Циолковского пренебрежено рядом факторов. В действительности получающаяся скорость, которую назовём конечной (V_k), меньше характеристической:

$$27.14 \quad \left| \quad V_k = V_x - (V_\Gamma + V_A + V_y) \right.$$

где V_Γ - гравитационные потери скорости (это компенсация неучёта действующей на ракету силы тяжести Земли);

V_A - аэродинамические потери (трение о частицы воздушной среды); чтобы они были меньшими, ракеты стартуют в вертикальном положении; в этом случае плотные слои атмосферы они проходят по кратчайшему пути и на малых скоростях; аэродинамические потери намного меньше V_Γ и V_y ;

V_y - потери на управление (нужно затратить горючее, чтобы вертикальное направление движения ракеты перевести на нужную траекторию).

Считается, что в современных ракетах суммарные потери ($V_\Gamma + V_A + V_y$) не превышают 20%.

Каких же скоростей надо достигать, чтобы Человечество могло ставку делать на подготовку и осуществление космических полётов?

Чтобы ракета не смогла возвратиться на Землю (стала бы как и Луна спутником Земли, со средним расстоянием от земной поверхности в 200 км), необходимо достигать скоростей не менее 7,9 км/с, т.е. характеристическая скорость должна быть не меньшей $7,9 \cdot 1,2 = 9,5$ км/с.

Как видим, одноступенчатая ракета не способна, по сегодняшнему уровню научно-технических достижений, преодолеть земное притяжение – неотвратимо будет возвращаться на земную поверхность. Но выход из положения есть!

27.7.4. Вторая формула

Циолковского

(для многоступенчатой ракеты)

Идея проста - зачем тратить топливо на разгон той части оболочки ракеты, в которой уже нет топлива? Её надо своевременно отсоединить от полезной части.

Схема многоступенчатой ракеты изображена на рис.27.7.

Чтобы не усложнять суть явления, но дать ему правильную качественную оценку, принимаем, что числа Циолковского одинаковы для всех субракет, одинаковы и относительные скорости извержения частиц. Тогда скорость выводимого на космическую орбиту полезного груза:

- после сгорания всего топлива в 1-й ступени - $V_1 = u \cdot \ln z$;
- после отработки 2-й ступени - $V_2 = V_1 + u \cdot \ln z = 2 \cdot u \cdot \ln z$;
- после отработки 3-й ступени - $V_3 = V_2 + u \cdot \ln z = 3 \cdot u \cdot \ln z$;

и т.д.;

после отработки последней (K-ой) ступени:

$$27.15 \quad \left| \quad V_K = K \cdot u \cdot \ln z . \right.$$

Это и есть вторая формула Циолковского (для многоступенчатой ракеты),

из которой, в частности, видно: при $K = 4$, $u = 3,5$, $z = 6 \mapsto V_K = 25$ км/с.

Этой скорости уже достаточно не только для того, чтобы космическому аппарату уйти из сферы притяжения Земли и стать планетой Солнца; достаточно и для того, чтобы землянин смог улететь за пределы Солнечной системы (о трёх космических скоростях речь будет вестись в подразделе 33.7).

Схема многоступенчатой ракеты

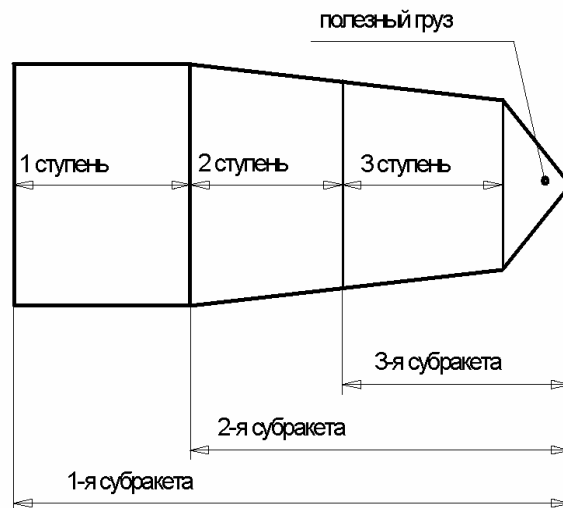


Рисунок 27.7

28. Массо-геометрические характеристики твёрдых тел

28.1. Введение в раздел

Здесь вводятся, взаимосвязываются и исследуются механические величины, через которые в последующем выражаются очередные опорные факты теоретической механики, т.е. с точки зрения формулируемых механических результатов излагаемый материал является вспомогательным. Но большой объём и востребованность для различных опорных фактов теоретической механики делает целесообразным его выделение в отдельный раздел.

Подробно ознакомиться с массо-геометрическими характеристиками можно в книгах: «Фаворин М.И. Моменты инерции тел: Справочник.- М., 1970.- 312 с.» и «Гернет М.М., Ратобыльский В.Ф. Определение моментов инерции.- М.: Машиностроение, 1969.- 247 с.». Здесь же (в «Курсе») ограничиваемся введением в вопрос, ознакомлением с основными применяемыми методами и чаще других встречающимися результатами.

28.2. Об инженерно-физической сущности рассматриваемых вопросов

На рис.28.1 изображена схема устройства, доступная для изготовления студентами: 1 - стержень, вращающийся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси 2; 3 и 4 – свободно надетые на него шары с отверстиями; 5 – зажигающаяся от пламени спичка (например, хлопчатобумажная).

Если к нити поднести пламя зажжённой спички, она перегорит, шары удалятся от оси вращения (до упоров) и явно («на глазок») будет видно, что угловая скорость стержня заметно уменьшилась.

Подобное механическое явление можно наблюдать и на экране телевизора: а) на ледовой площадке спортсмен-фигурист, чтобы достичь высокой угловой скорости соединяет ноги, выпрямляет туловище и вытягивает вверх руки, с целью же гашения скорости (в конце выступления) руки разбрасывает по сторонам; б) чтобы успеть сделать двойное, а часто и тройное сальто, спортсмен сжимается в комочек.

Из приведенных примеров видно, что на кинематику механической системы оказывают влияние не только массы, но и взаимное их расположение.

К вопросу о влиянии геометрии масс на кинематику механических систем

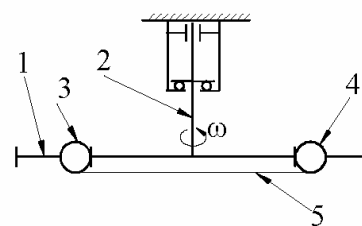


Рисунок 28.1

28.3. Основные массо-геометрические характеристики твёрдых тел и общие формулы для их вычисления

На рис.28.2: $Oxyz$ - произвольная, связанная с твёрдым телом Γ , декартова прямоугольная система координат; dm - масса произвольной частицы этого тела, x - её абсцисса, y - ордината, z - аппликата; ξ_x, ξ_y, ξ_z - кратчайшие расстояния от dm до осей соответственно x, y, z .

К понятиям о моментах инерции тел

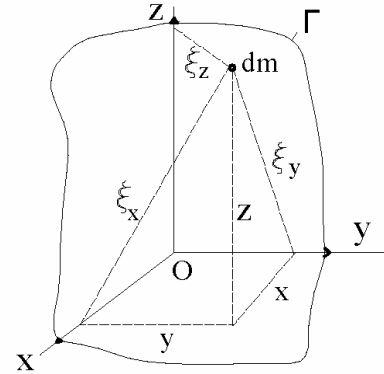


Рисунок 28.2

По определению:

$$28.1 \quad \left\{ \begin{array}{l} I_x = \int_{\Gamma} \xi_x^2 \cdot dm = \int_{\Gamma} (y^2 + z^2) \cdot dm, \\ I_y = \int_{\Gamma} \xi_y^2 \cdot dm = \int_{\Gamma} (x^2 + z^2) \cdot dm, \\ I_z = \int_{\Gamma} \xi_z^2 \cdot dm = \int_{\Gamma} (x^2 + y^2) \cdot dm - \end{array} \right.$$

- осевые моменты инерции тела Γ относительно осей соответственно x, y, z ;

$$28.2 \quad \left\{ \begin{array}{l} I_{xy} = \int_{\Gamma} (x \cdot y) \cdot dm, \quad I_{yz} = \int_{\Gamma} (y \cdot z) \cdot dm, \quad I_{zx} = \int_{\Gamma} (z \cdot x) \cdot dm - \end{array} \right.$$

- центробежные моменты инерции тела Γ относительно осей соответственно z, x, y ; обращаем внимание на принятую условность в терминологии - «относительно» той оси (из числа 3-х - x, y, z), которая оказывается отсутствующей в обозначении центробежного момента; например I_{xy} - это центробежный момент инерции тела относительно оси z .

Пусть m - масса тела Γ ; $\xi_{x \min}$ и $\xi_{x \max}$ - расстояния до оси x ближайшей и наиболее удалённой частиц этого тела. Тогда, в соответствии с известной из курса высшей математики теоремой о среднем, можно записать:

$$28.3 \quad \left\{ \begin{array}{l} I_x = i_x^2 \cdot m, \end{array} \right. \quad \text{где}$$

величину i_x ($\xi_{x \min} < i_x < \xi_{x \max}$) называют радиусом инерции тела Γ относительно оси x .

Аналогичны понятия радиусов инерции тела относительно осей y и z -

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{m}}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{m}}.$$

Замечания: 1. Осевые моменты инерции – арифметические величины, центробежные – алгебраические; 2. Больше приходится иметь дело с осевыми моментами инерции и для сокращения речи слово «осевой» часто опускают; во избежание путаницы, когда речь идёт о центробежных моментах инерции, сокращение в термине недопустимо.

28.4. Примеры на использование общих формул для определения моментов инерции тел

Стержень - это прямолинейно-протяжённое однородное твёрдое тело постоянного поперечного сечения. Как математическая модель стержень – это отрезок прямой, у которого одинаковые элементы длины имеют одинаковые веса.

28.4 | Ось, проходящую через центр тяжести тела, называют *центральной*.

Считая известными массу (m) и длину (l) вывести формулу для вычисления момента инерции стержня относительно перпендикулярной ему центральной оси.

Представляем стержень в виде бесконечно большого числа бесконечно тонких дисков, нанизанных на ось x . Один из них, толщиной dx , изображаем (см. рис.3).

Если руководствоваться обозначениями, использованными на рис.3, то необходимо определить I_y .

Основное значение имеют удалённые от оси частицы, но для них $x \gg z$. Поэтому общая формула 1 в рассматриваемом случае принимает вид:

$$I_y = \int_{x=-0,5l}^{x=0,5l} x^2 \cdot dm.$$

Т.к. $dm = (F \cdot dx) \cdot \rho$, где F - площадь поперечного сечения стержня; $(F \cdot dx)$ - объём выделенного элемента, а ρ - плотность материала, то:

$$I_y = \int_{x=-0,5l}^{x=0,5l} x^2 \cdot (F \cdot dx) \cdot \rho = \frac{x^3}{3} \cdot F \cdot \rho \Big|_{x=-0,5l}^{x=0,5l} = \frac{(F \cdot l) \cdot \rho \cdot l^2}{12}.$$

К выводу формулы для вычисления момента инерции стержня

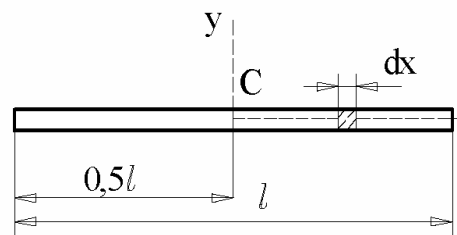


Рисунок 28.3

$(F \cdot l)$ - это объём стержня; $(F \cdot l) \cdot \rho$ - его масса. Поэтому:

28.5
$$I_{CT} = \frac{m \cdot l^2}{12}$$
 - формула для вычисления момента инерции однородного прямолинейного стержня относительно центральной, перпендикулярной ему оси.

Цилиндр (однородный полый – как общий случай; сплошной однородный – как частный случай от общего, но в подавляющем большинстве встречающийся в расчётной практике; **диск** - сплошной однородный цилиндр малой длины).

Зная массу m , внутренний r и наружный R радиусы однородного полого цилиндра, определить его момент инерции относительно продольной оси симметрии. Если руководствоваться изображениями на рис.4, то определить момент инерции относительно оси z - $I_z = ?$

Представляем цилиндр состоящим из бесконечно большого числа бесконечно тонких (толщиной $d\xi$), вставленных друг в друга полых цилиндров. ξ - радиус произвольного из них. Тогда, начиная с 28.1, получаем:

К выводу формулы для вычисления момента инерции

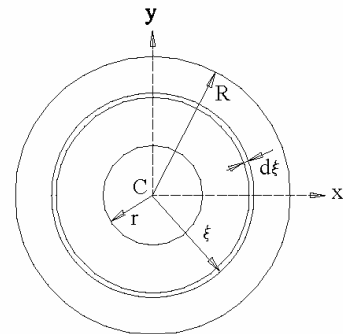


Рисунок 28.4

$$I_z = \int_r^R \xi^2 \cdot dm = \int_r^R \xi^2 \cdot [(2 \cdot \pi \cdot \xi) \cdot d\xi \cdot b] \cdot \rho = \frac{\pi}{2} \cdot b \cdot \rho \cdot \xi^4 \Big|_r^R =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot b \cdot \rho \cdot (R^4 - r^4) = \frac{R^2 + r^2}{2} \cdot \{[\pi(R^2 - r^2)] \cdot b\} \cdot \rho.$$

Выражение, заключённое в квадратных скобках, - это площадь поперечного сечения полого цилиндра. Она умножается на длину b цилиндра; поэтому в фигурных скобках записана формула для вычисления объёма полого цилиндра. Т.к. объём полого цилиндра умножается ещё и на плотность ρ материала, то окончательно получаем:

28.6a
$$I_z = \frac{m \cdot (R^2 + r^2)}{2}$$
 - формула для вычисления момента инерции однородного полого цилиндра относительно его продольной оси симметрии.

Для диска и сплошного цилиндра $r = 0$ и, поэтому:

$$28.6б \quad \left| \begin{array}{l} I_D = \frac{m \cdot R^2}{2} \quad - \quad \text{формула для вычисления момента} \\ \text{инерции однородного диска (и сплошного цилиндра) относительно} \\ \text{центральной оси, расположенной перпендикулярно торцам.} \end{array} \right.$$

Задание студентам. - Если разделить 28.6а на 28.6б, то получится

$$\frac{I_z}{I_D} = \left(I + \frac{r^2}{R^2} \right) > I.$$

Можно ли из этого сделать вывод, что при одинаковых длинах и наружных радиусах сплошного и полого цилиндров момент инерции относительно продольной оси будет большим у полого цилиндра? Подискутируйте с коллегами и установите истину.

Шар, конус. Двух рассмотренных примеров достаточно было для уяснения применявшегося «прямого метода» получения формул для вычисления осевых моментов инерции тел. Поэтому сообщаем лишь результаты:

$$28.7 \quad \left| \begin{array}{l} \text{момент инерции однородного шара относительно центральной его} \\ \text{оси} - I_O = 0,4 \cdot m \cdot r^2; \quad \text{момент инерции однородного конуса} \\ \text{относительно его оси симметрии} - I_V = 0,3 \cdot m \cdot r^2. \end{array} \right.$$

Замечание: с целью облегчения запоминания обращаем внимание, что выражения для I_D , I_O и I_V отличаются лишь коэффициентами, которые соотносятся как числа Пифагора - $5 : 4 : 3$ ($5^2 = 4^2 + 3^2$).

Диск, центральная ось параллельна торцам

Обозначения осей сохраняем прежними (см. рис.4): z центральная ось, перпендикулярная торцам диска; x и y - центральные взаимно перпендикулярные оси, расположенные в средней плоскости между торцами диска.

В соответствии с общими формулами 28.1

$$I_x = \int_{\Gamma} (y^2 + z^2) \cdot dm, \quad I_y = \int_{\Gamma} (x^2 + z^2) \cdot dm.$$

Применительно к диску в записанных интегралах (суммах) подавляющее значение имеют удалённые частицы, а для них $x \gg z$, $y \gg z$, т.е. в рассматриваемых интегралах доля $z^2 \cdot dm$ инженерно ничтожна и поэтому

$$I_x + I_y = \int_{\Gamma} (y^2 + x^2) \cdot dm = I_z.$$

Учитывая очевидное равенство $I_x = I_y$ и результат 28.66 получаем:

$$I_x = I_y = 0,5I_z = 0,25 \cdot m \cdot R^2.$$

28.5. Формула, связывающая моменты инерции тел относительно параллельных осей

На рис.28.5: C – центр тяжести тела массой m ; u – центральная ось с известным моментом инерции I_u . v – ось, параллельная u и проходящая от неё на расстоянии h . Вывести формулу для вычисления момента инерции I_v относительно оси v . dm – масса элементарной частицы рассматриваемого тела (точка M). q – начинающаяся в центре тяжести C ось, расположенная перпендикулярно u и пересекающая (в точке A) ось v . Из M опускаем перпендикуляры на u (точка D) и v (точка B). Обозначаем $MD = \xi_u$, $MB = \xi_v$.

К выводу формулы, связывающей моменты инерции относительно параллельных осей

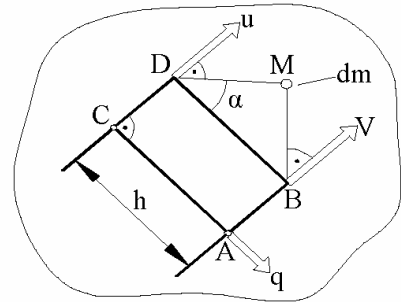


Рисунок 28.5

В соответствии с дававшимся понятием $I_v = \int \xi_v^2 \cdot dm$. По теореме косинусов: $\xi_v^2 = \xi_u^2 + h^2 - 2 \cdot \xi_u \cdot h \cdot \cos \alpha$. Но $\xi_u \cdot \cos \alpha = q$ – равно координате точки M по оси q . Таким образом:

$$I_v = \int_m \xi_u^2 \cdot dm + \int_m h^2 \cdot dm - 2 \cdot h \cdot \int_m q \cdot dm = I_u + m \cdot h^2 - 2 \cdot h \cdot (q_C \cdot m).$$

$\int_m q \cdot dm = q_C \cdot m$ – записано на основании понятия центра тяжести, где q_C – координата центра тяжести тела по оси q . Но q начинается в точке C и, поэтому, $q_C = 0$. Таким образом:

28.8

момент инерции тела относительно произвольной оси больше момента инерции этого же тела относительно параллельной ей центральной оси - на величину, равную произведению массы тела на квадрат расстояния между рассматриваемыми осями, т.е.

$$I = I_C + m \cdot h^2 .$$

ПРИМЕР 28.1.- Формула для вычисления момента инерции стержня относительно перпендикулярной, проходящей через конец, оси

Дано. – Масса стержня m , его длина l (см. рис.28.6). Момент инерции стержня относительно перпендикулярной ему оси, проходящей через центр тяжести (относительно оси y_C), определяется

формулой:
$$I_{CT} = \frac{m \cdot l^2}{12} .$$

Требуется. - Вывести формулу для определения момента инерции стержня относительно перпендикулярной ему, проходящей через конец, оси.

Решение.- Используя формулу 28.8, получаем:

$$I = \frac{m \cdot l^2}{12} + m \cdot h^2 = \frac{m \cdot l^2}{3} .$$

ПРИМЕР 28.2.- Вывод формул для вычисления моментов инерции треугольника относительно различных осей

Дано. – У однородного прямоугольного треугольника масса m , а длины катетов a и b (как известно длина гипотенузы $c = \sqrt{a^2 + b^2}$). O - центр тяжести.

Требуется. - Вывести формулы для определения моментов инерции треугольника относительно изображённых на рис.7 осей, где z - ось, дополняющая x и y до правой прямоугольной системы координат.

Решение.- Вначале, воспользовавшись общей формулой 28.1, вычисляем момент

К моменту инерции стержня относительно перпендикулярной, проходящей через конец, оси

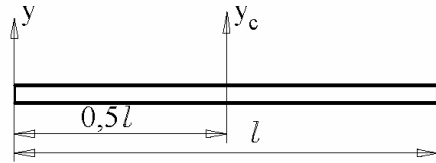


Рисунок 28.6

К моментам инерции треугольника

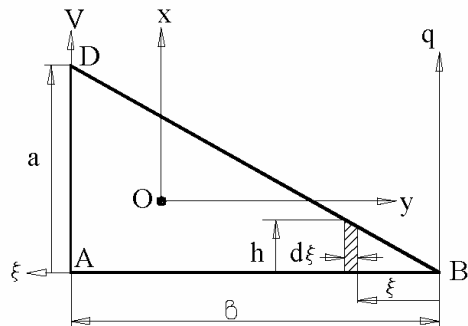


Рисунок 28.7

инерции треугольника относительно оси q . Для этого треугольник разбиваем на элементарные полоски, параллельные осям q, x, y . Одна из них изображена на рисунке: длина $-h$, толщина $-d\xi$, расстояние от оси q $- \xi$. Тогда:

$$I_q = \int_m \xi^2 \cdot dm = \int_m \xi^2 \cdot (d\xi \cdot h \cdot \delta \cdot \rho), \quad \text{где}$$

δ - толщина треугольника, $d\xi \cdot h$ - площадь и $(d\xi \cdot h) \cdot \delta$ - объём элемента; ρ - плотность материала, из которого выполнен треугольник. Учтём в преобразованиях, что (из подобия треугольников) $h = \frac{a}{b} \cdot \xi$. Таким образом:

$$I_q = \frac{a \cdot \delta \cdot \rho}{b} \cdot \int_0^b \xi^3 \cdot d\xi = \frac{a \cdot \delta \cdot \rho}{b} \cdot \frac{\xi^4}{4} \Big|_0^b = \left\{ \left[\left(\frac{a \cdot b}{2} \right) \cdot \delta \right] \cdot \rho \right\} \cdot \frac{b^2}{2}, \quad \text{где}$$

в круглых скобках – площадь треугольника; в квадратных скобках – его объём; в фигурных скобках – масса треугольника. Итак:

$$I_q = \frac{m \cdot b^2}{2}.$$

Воспользовавшись двоекратно формулой, связывающей моменты инерции относительно параллельных осей, находим I_x и I_y :

$$I_x = I_q - m \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot b \right)^2 = \frac{m \cdot b^2}{18}; \quad I_y = I_x + m \cdot \left(\frac{b}{3} \right)^2 = \frac{m \cdot b^2}{6}.$$

В выражение для I_x входит катет, перпендикулярный оси x . Очевидно, поэтому, что

$$I_y = \frac{m \cdot a^2}{18}.$$

$$\begin{aligned} I_z &= \int_m (x^2 + y^2) \cdot dm = \int_m x^2 \cdot dm + \int_m y^2 \cdot dm = I_y + I_x = \\ &= \frac{m \cdot a^2}{18} + \frac{m \cdot b^2}{18} = \frac{m \cdot c^2}{18}. \end{aligned}$$

Поясните: почему $\int_m y^2 \cdot dm = I_x$?

28.6. Формула для вычисления момента инерции относительно произвольно ориентированной оси

На рис.28.8.- $Oxyz$ - произвольно связанная с телом M прямоугольная система координат; осевые и центробежные моменты инерции этого тела относительно осей ($I_x, I_y, I_z; I_{xy}, I_{yz}, I_{zx}$) известны. u - проходящая через точку O произвольно ориентированная ось (её орт \vec{u}^0), направляющие для неё углы (α, β, γ) известны. dm - произвольная частица тела, \vec{r} - её радиус-вектор, ξ - кратчайшее расстояние до оси u .

К выводу формулы для момента инерции относительно произвольно ориентированной оси

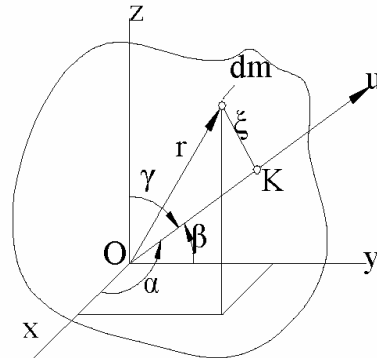


Рисунок 28.8

Сформулированную в заглавии раздела задачу решил ещё Эйлер – через углы, носящие его имя. Через направляющие косинусы, как рассматривается здесь, задачу впервые решил Коши (1827 г.). Вот эта зависимость:

$$28.9 \quad \left| \begin{aligned} I_u = & (I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \cos^2 \beta + I_z \cdot \cos^2 \gamma) - \\ & - 2 \cdot (I_{xy} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + I_{yz} \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma + I_{zx} \cdot \cos \gamma \cdot \cos \alpha). \end{aligned} \right.$$

С целью облегчения запоминания формулы, обращаем внимание на то, что она состоит из двух пар скобок; в первых скобках содержатся все произведения осевых моментов инерции на квадраты косинусов «своих» углов ($x \leftrightarrow \alpha, y \leftrightarrow \beta, z \leftrightarrow \gamma$). Во вторых скобках содержится также сумма всех произведений центробежных моментов на косинусы своих углов (если I_{xy} , то косинусы углов α и β).

Докажем* справедливость формулы 28.9

$$a \quad \left| \quad \vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} . \right.$$

Проектируем (a) на ось u . Получаем:

$$\vec{r} \cdot \vec{u}^0 = OK = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma, \quad \text{т.е.}$$

$$OK^2 = x^2 \cdot \cos^2 \alpha + y^2 \cdot \cos^2 \beta + z^2 \cdot \cos^2 \gamma + \\ + 2(x \cdot y \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + y \cdot z \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma + z \cdot x \cdot \cos \gamma \cdot \cos \alpha).$$

$$\text{Иначе: } OK^2 = f_1 + f_2,$$

$$\text{где } f_1 = x^2 \cdot \cos^2 \alpha + y^2 \cdot \cos^2 \beta + z^2 \cdot \cos^2 \gamma,$$

$$f_2 = 2(x \cdot y \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + y \cdot z \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma + z \cdot x \cdot \cos \gamma \cdot \cos \alpha).$$

В соответствии с теоремой Пифагора: $\xi^2 = r^2 - OK^2$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Поэтому:

$$I_u = \int_m \xi^2 \cdot dm = \int_m (r^2 - OK^2) \cdot dm = \int_m [(x^2 + y^2 + z^2) - (f_1 + f_2)] \cdot dm = \\ = \int_m [(x^2 + y^2 + z^2) - f_1] \cdot dm - \int_m f_2 \cdot dm, \quad \text{т.е.}$$

$$\delta \quad \left| \begin{array}{l} I_u = I_{u1} - I_{u2}, \quad \text{где} \\ I_{u1} = \int_m [(x^2 + y^2 + z^2) - f_1] \cdot dm, \quad I_{u2} = \int_m f_2 \cdot dm. \end{array} \right.$$

Известно, что направляющие косинусы связаны между собою зависимостью

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad \text{Откуда:}$$

$$1 - \cos^2 \alpha = \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma, \quad 1 - \cos^2 \beta = \cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma,$$

$$1 - \cos^2 \gamma = \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha.$$

Приводим к нужному виду I_{u1} :

$$I_{u1} = \int_m [x^2 \cdot (1 - \cos^2 \alpha) + y^2 \cdot (1 - \cos^2 \beta) + z^2 \cdot (1 - \cos^2 \gamma)] \cdot dm = \\ = \int_m [x^2 \cdot (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) + y^2 \cdot (\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma) + z^2 \cdot (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)] \cdot dm = \\ = \int_m (x^2 + y^2) \cdot \cos^2 \gamma \cdot dm + \int_m (y^2 + z^2) \cdot \cos^2 \alpha \cdot dm + \int_m (z^2 + x^2) \cdot \cos^2 \beta \cdot dm.$$

6 | Направляющие углы не зависят от номеров частиц.

По этой причине выносим за знаки интегралов квадраты косинусов и, в соответствии с понятиями осевых моментов инерции (см. 28.1), получаем:

$$z \quad \left| \quad I_{u1} = I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \cos^2 \beta + I_z \cdot \cos^2 \gamma . \right.$$

Теперь, учитывая (6), приводим к нужному виду I_{u2} :
$$I_{u2} = \int_m f_2 \cdot dm =$$

$$= 2 \cdot \left(\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \int_m x \cdot y \cdot dm + \cos \beta \cdot \cos \gamma \cdot \int_m y \cdot z \cdot dm + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \int_m z \cdot x \cdot dm \right)$$

и далее, в соответствии с понятиями центробежных моментов инерции (см. 28.2):

$$\partial \quad \left| \quad I_{u2} = 2 \cdot (I_{xy} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + I_{yz} \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma + I_{zx} \cdot \cos \gamma \cdot \cos \alpha) . \right.$$

Справедливость формулы 28.9 доказана – это видно, если в верхнюю строчку выражений (6) подставить (z) и (d).

28.7. Понятие об эллипсоидах инерции, главных и главных центральных осях инерции

С точки зрения машиностроительных технологий несложно ось вращения относительно тела расположить так, как задаст конструктор. Но произвольно задавать эту ось нельзя, ибо вместо спокойного, бесшумного вращения тела, можно получить грохочащее устройство с недопустимыми уровнями шума, вибраций при громадных динамических нагрузках на детали.

В следующем разделе будет показано, что для предупреждения появления описанных негативных механических проявлений нужно, в частности, оси вращения принимать такими, чтобы соответствующие центробежные моменты инерции оказывались равными нулю.

Но достижимо ли это в принципе? И если достижимо, то как делать?

Путь к решению этих вопросов лежит через понятие «эллипсоид инерции».

Вводим семёрку изображений моментов инерции:

$$28.10a \quad \left| \quad \begin{aligned} a &= \frac{\mu}{\sqrt{I_x}}, & b &= \frac{\mu}{\sqrt{I_y}}, & c &= \frac{\mu}{\sqrt{I_z}}, & d &= \frac{\mu}{\sqrt{I_{xy}}}, \\ e &= \frac{\mu}{\sqrt{I_{yz}}}, & f &= \frac{\mu}{\sqrt{I_{zx}}}, & \rho &= \frac{\mu}{\sqrt{I_u}}, & & \end{aligned} \right. \quad \text{где}$$

$I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{yz}, I_{zx}, I_u$ - осевые и центробежные моменты инерции;

при этом, обозначения соответствуют предыдущему подразделу;

μ - масштабный коэффициент, обеспечивающий изображениям a, b, \dots, ρ линейные размеры (например в миллиметрах); μ - аналог тем масштабным коэффициентам, которые применяют для изображения на бумаге сил, скоростей, ускорений и т.д.

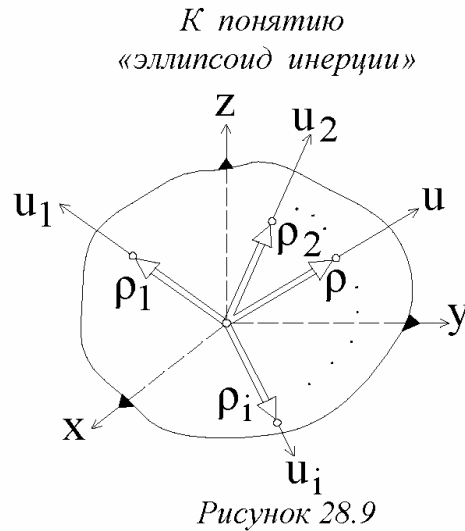
Итак, изображения моментов инерции – это отрезки, по значению длин которых можно судить о значениях самих моментов инерции. Например

$$I_{zx} = \left(\frac{\mu}{f} \right)^2$$

и можно сказать: чем больше длина отрезка f , тем меньше I_{zx} ; при $f \rightarrow \infty$ $I_{zx} = 0$; и т.д.

Оперирование моментами инерции не непосредственно, а через их изображения, удобно тем, что позволяет анализ свести к известной математической модели.

Изображение ρ момента инерции I_u представляем в виде вектора $\vec{\rho} = \rho \cdot \vec{u}^o$, где \vec{u}^o - орт оси u , произвольно ориентированной (см. на рис.9 u_1, u_2 и т.д.) и проходящей через начало системы $Oxyz$. Ясно, поэтому, что связанный (начинающийся в точке O) вектор $\vec{\rho}$, как и ось u , имеет переменную ориентацию, определяемую направляющими углами α, β, γ . Координаты его конца обозначаем x, y, z .



Выясним, какую поверхность в системе $Oxyz$ отображает конец вектора $\vec{\rho}$?

С целью ответа на поставленный вопрос в уравнение 28.9 вместо моментов инерции подставляем их изображения (подчинённые условиям 28.10а). При этом учитываем, что:

$$\cos \alpha = \frac{x}{\rho}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\rho}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{\rho}.$$

Получается:

28.10

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 2 \cdot \left(\frac{x \cdot y}{d^2} + \frac{y \cdot z}{e^2} + \frac{z \cdot x}{f^2} \right) = 1.$$

Из аналитической геометрии известно, что уравнение 28.10 отображает фигуру, называемую *эллипсоидом*. Применительно к рассматриваемому случаю - «эллипсоидом инерции при точке O тела» (см. рис.28.10).

OA , OB и OC - полуоси эллипсоида. В общем случае они различны по длине. Частные случаи: *сфера* ($OA = OB = OC$); *сфероид* (одинаковы две полуоси - $OA = OB$, или $OB = OC$, или $OA = OC$).

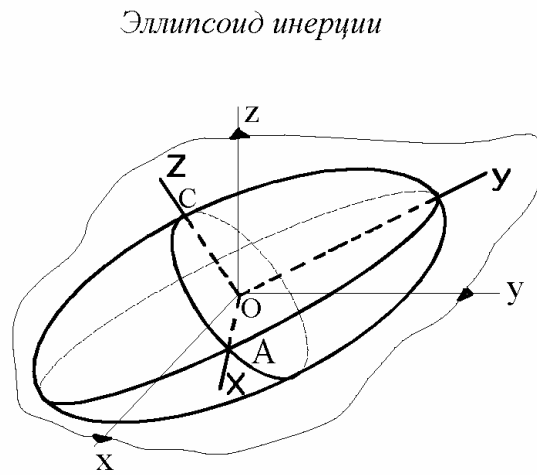


Рис.28.10

X , Y , Z - называют осями эллипсоида. Из аналитической геометрии известно: если $x = X$ (ось x системы отсчёта совпадает с осью X эллипсоида), то уравнение 28.10 имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 2 \cdot \frac{y \cdot z}{e^2} = 1,$$

т.е. в нём

$$\frac{x \cdot y}{d^2} = 0, \quad \frac{z \cdot x}{f^2} = 0.$$

По геометрическому смыслу x , y , z отображают точки поверхности эллипсоида и не могут равняться нулю. Значит равны бесконечности находящиеся в знаменателях d и f ; поэтому (что видно из 28.10а), равны нулям центробежные моменты инерции I_{zx} и I_{xy} . Итак:

28.11 | для тела любой формы, в любой его точке имеется свой эллипсоид инерции; его оси называют *главными осями инерции*;

28.12 | центробежные моменты инерции, включающие в свои обозначения главную ось, равны нулю -

пусть, например, главной осью является z ; тогда $I_{zx} = I_{yz} = 0$, где x и y - оси, дополняющие z до декартовой прямоугольной системы координат;

- 28.13 | главную ось инерции, проходящую через центр тяжести тела, называют *главной центральной осью инерции*;
- 28.14 | тело любой формы имеет, как минимум, тройку взаимно перпендикулярных главных центральных осей инерции.

Руководствуясь понятиями «главная ось инерции», «центробежный момент инерции», «ось материальной симметрии», «плоскость материальной симметрии» и «интеграл» самостоятельно докажете справедливость результатов 28.15 и 28.15.

- 28.15 | ось ось материальной симметрии тела, если имеется, одновременно является и его главной центральной осью инерции;
- 28.16 | если тело имеет плоскость материальной симметрии (например, кузов вагона), то любая перпендикулярная ей ось является главной осью инерции этого тела.

ПРИМЕР 28.3. - Момент инерции диска относительно оси точно касающейся цилиндрической его поверхности

Дано. - Сплошной однородный диск, радиуса R и массой m . Моменты инерции относительно осей x, y, z (см. рис.28.11) считать известными. Оси u и v параллельны, $\varphi = 30^\circ$.

Требуется. - Определить момент инерции диска относительно оси v - $I_v = ?$

Решение. - x, y, z являются осями симметрии диска. Значит $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$ и формула 28.9 принимает вид:

$$I_u = I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \cos^2 \beta + I_z \cdot \cos^2 \gamma, \quad \text{т.е.}$$

$$I_u = I_x \cdot \cos^2 90^\circ + \frac{m \cdot R^2}{4} \cdot \cos^2 (90^\circ + \varphi) + \frac{m \cdot R^2}{2} \cos^2 \varphi =$$

$$= \frac{m \cdot R^2}{4} \cdot \sin^2 \varphi + \frac{m \cdot R^2}{2} \cdot \cos^2 \varphi = \frac{m \cdot R^2}{4} \cdot (1 + \cos^2 \varphi) = \frac{7}{16} \cdot m \cdot R^2.$$

Теперь используем формулу связи между моментами инерции относительно параллельных осей: $I_v = I_u + m \cdot R^2 = \frac{23}{16} \cdot m \cdot R^2$.

К примеру 28.3

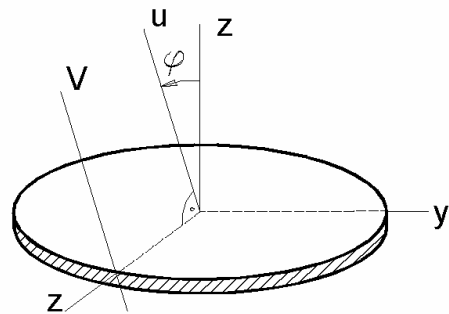


Рисунок.28.11

ПРИМЕР 28.4.- *Определение центробежных моментов инерции диска, наклонённого к оси вращения*

Дано. – Сплошной однородный диск радиуса R и массой m . Из-за погрешностей изготовления и монтажа его ось вращения z оказалась смещённой на угол α относительно центральной, перпендикулярной торцам, оси (см. рис.28.12).

Требуется. - Определить центробежные моменты инерции диска, включающие в свои обозначения ось z - $I_{zx} = ?$ $I_{yz} = ?$

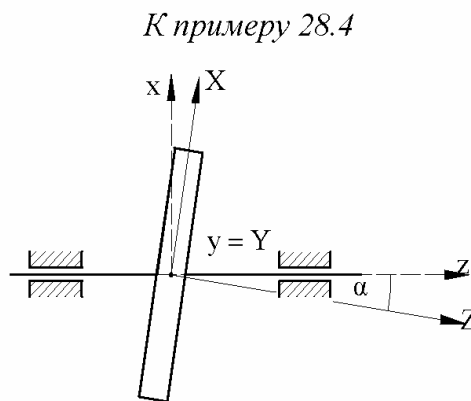


Рисунок 28.12

Решение.- Связываем с диском две системы координат $OXYZ$ и $Oxyz$, так чтобы оси первой системы оказались главными центральными осями инерции диска, а y совпадала с Y .

Т.к. ось y ($y = Y$) - главная ось инерции, то $I_{yz} = I_{xy} = 0$.

Переходим к определению I_{zx} . Для этого вначале необходимо определить I_x и I_z . Их определим по формуле 28.9. Учитываем отсутствие второй тройки слагаемых (т.к. $OXYZ$ - трёхгранник главных осей):

$$I_x = I_X \cdot \cos^2 \alpha + I_Y \cdot \cos^2 90^\circ + I_Z \cdot \cos^2 (90^\circ + \alpha) = \frac{m \cdot R^2}{4} \cdot (1 + \sin^2 \alpha);$$

$$I_z = I_X \cdot \cos^2 (90^\circ - \alpha) + I_Y \cdot \cos^2 90^\circ + I_Z \cdot \cos^2 \alpha = \frac{m \cdot R^2}{4} \cdot (1 + \cos^2 \alpha).$$

Теперь за базовую систему отсчёта принимаем $Oxyz$ и, воспользовавшись той же формулой 28.9, определяем искомый центробежный момент инерции I_{zx} :

$$I_X = I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \cos^2 90^\circ + I_z \cdot \cos^2 (90^\circ - \alpha) - 2 \cdot I_{zx} \cdot \cos(90^\circ - \alpha) \cdot \cos \alpha = \\ = I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_z \cdot \sin^2 \alpha - I_{zx} \cdot \sin(2\alpha).$$

$$\text{Откуда: } I_{zx} = \frac{I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_z \cdot \sin^2 \alpha - I_X}{\sin(2\alpha)}.$$

Учитывая уже вычисленные в этом примере I_x , I_z и то, что $I_X = \frac{m \cdot R^2}{4}$

$$\text{(см. подраздел 4), получаем: } I_{zx} = \frac{m \cdot R^2}{8} \cdot \sin(2\alpha).$$

29. Закон об изменении кинетического момента и основы динамики вращательно, плоско и сферически движущихся тел

29.1. Понятие «кинетический момент» и общие формулы для его вычисления

На рис.1: γ - траектория, m - масса,
 \vec{v} - скорость материальной точки
относительно системы отсчёта $Oxyz$.

29.1 | Величину \vec{l}_o , определяемую
математическим выражением
$$\vec{l}_o = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v}),$$

называют моментом количества
движения материальной точки
относительно центра O .

В математическом плане выражение 29.1
идентично изученному в статике $\vec{m}_o = \vec{r} \times \vec{F}$

$$(\vec{l}_o \leftrightarrow \vec{m}_o; \quad \vec{r} \leftrightarrow \vec{r}; \quad m \cdot \vec{v} \leftrightarrow \vec{F}).$$

По этой причине методы, применявшиеся при использовании формулы
 $\vec{m}_o = \vec{r} \times \vec{F}$, полностью переносятся на $\vec{l}_o = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v})$. В частности, проекции
 \vec{l}_o на оси системы $Oxyz$ (l_x, l_y, l_z) называют моментами количества движения
материальной точки относительно осей x, y, z и для их вычисления удобно
применять тот же «способ перестановки индексов» -

$$l_x = (y \cdot \dot{z} - z \cdot \dot{y}) \cdot m, \quad l_y = (z \cdot \dot{x} - x \cdot \dot{z}) \cdot m, \quad l_z = (x \cdot \dot{y} - y \cdot \dot{x}) \cdot m.$$

Пусть имеем механическую систему, состоящую из N материальных точек.

29.2 | Величину $\vec{L}_o = \sum_{v=1}^N \vec{l}_{ov} = \text{проще} = \sum \vec{l}_{ov}$ называют *кинетическим*
моментом механической системы относительно центра O , или, по
анalogии с главным моментом, - *главным моментом* количеств
движений относительно центра O .

Второе название длинное. Поэтому будем пользоваться, в основном,
термином «кинетический момент».

*К понятию «момент
количества движения
материальной точки»*

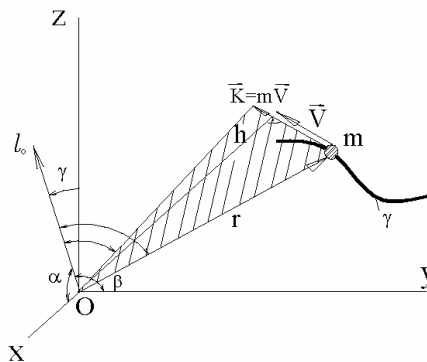


Рисунок 29.1

Как и у понятия-предшественника (\vec{M}_{GO})

$$\vec{L}_o = L_x \cdot \vec{i} + L_y \cdot \vec{j} + L_z \cdot \vec{k},$$

где

$$L_x = \sum l_x, \quad L_y = \sum l_y, \quad L_z = \sum l_z \quad -$$

кинетические моменты механической системы относительно осей соответственно x, y, z .

Ясно, что приёмы вычисления модулей, направляющих косинусов и прочие векторно-преобразовательные процедуры математически идентичны изученным в разделе «статика» и по этой причине здесь опускаются.

При решении конкретных задач чаще дело имеют с поступательным и вращательным движением тел. Это обязывает нас развить рассматриваемый вопрос и в последующих двух подразделах дать конкретные рекомендации по вычислениям кинетических моментов для указанных случаев.

29.2. Правило вычисления кинетического момента поступательно движущегося тела

На рис.29.2: dm - масса отдельной частицы, \vec{v} - её скорость, \vec{r} - радиус-вектор. C - центр тяжести тела, \vec{v}_C - его скорость, \vec{r}_C - радиус-вектор, m - масса тела.

Напоминаем: Σ - это и сумма дискретных величин, и интеграл, и сумма интегралов.

В связи с этим, из 29.2 получаем:

$$\vec{L}_o = \int_m (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot dm.$$

Т.к. для поступательно движущегося тела \vec{v} не зависит от номера частицы, то

$$\vec{L}_o = \left(\int_m \vec{r} \cdot dm \right) \times \vec{v} = (\vec{r}_C \cdot m) \times \vec{v} = \vec{r}_C \times (m \cdot \vec{v})$$

и приходим к правилу:

29.3 | кинетический момент поступательно движущегося тела можно вычислять как момент количества движения отдельной материальной точки, масса которой равна массе тела и которая движется вместе с центром его масс.

К правилу вычисления кинетического момента посту-

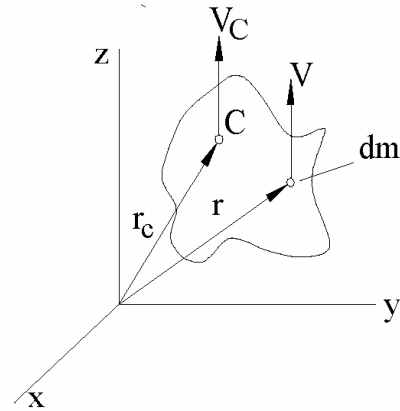


Рисунок 29.2

29.3. Формула для вычисления кинетического момента вращательно движущегося тела

На рис.29.3: $\vec{\omega}$ - угловая скорость тела; $\omega_x = 0, \omega_y = 0, \omega_z = \vec{\omega} \cdot \vec{k}$ - её проекции на оси связанной с телом системы $Oxyz$. dm - масса отдельной частицы; \vec{r} - её радиус-вектор, x, y, z - координаты.

К выводу формулы для вычисления кинетического момента вращающегося тела

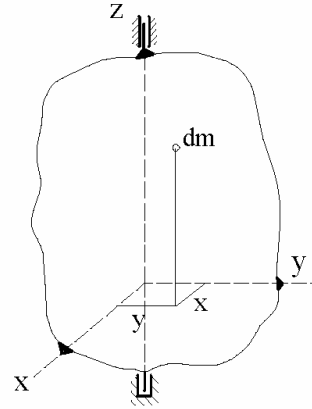


Рисунок 29.3

Т.к.
$$\vec{L}_o = \int_m (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot dm, \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

то, пользуясь правилом представления двойного векторного произведения разностью двух векторов,

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \cdot \vec{a}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

получаем:

$$\vec{L}_o = \int_m [\vec{\omega} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{r}) \cdot dm] - \int_m [\vec{r} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \cdot dm].$$

Т.к.

$$\vec{\omega} = \omega_z \cdot \vec{k}, \quad \vec{r} \cdot \vec{r} = r^2 = (x^2 + y^2) + z^2, \quad \vec{r} = z \cdot \vec{k} + (x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}), \quad \vec{\omega} \cdot \vec{r} = \omega_z \cdot z,$$

то

$$\vec{L}_o = (\omega_z \cdot \vec{k}) \cdot \int_m (x^2 + y^2) \cdot dm - (\omega_z \cdot \vec{i}) \cdot \int_m (z \cdot x \cdot dm) - (\omega_z \cdot \vec{j}) \cdot \int_m (y \cdot z \cdot dm).$$

Итак, с учётом понятий о моментах инерции, получаем:

29.4
$$\left. \begin{array}{l} \text{кинетический момент вращательно движущегося тела} \\ \text{определяется выражением} \end{array} \right\} \vec{L}_o = (I_z \cdot \vec{k} - I_{zx} \cdot \vec{i} - I_{yz} \cdot \vec{j}) \cdot \omega_z.$$

29.4. Закон об изменении кинетического момента

Берём производную по времени от кинетического момента произвольной механической системы. При этом, применяем правило «производная от суммы равна сумме производных» и другие, ранее уже встречавшиеся:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{L}_o) &= \frac{d}{dt} (\sum \vec{l}_{ov}) = \sum \frac{d}{dt} (\vec{l}_{ov}) = \sum \frac{d}{dt} (\vec{r}_v \times m_v \cdot \vec{v}_v) = \\ &= \sum \left(\frac{d\vec{r}_v}{dt} \times m_v \cdot \vec{v}_v \right) + \sum \left(\vec{r}_v \times m_v \cdot \frac{d\vec{v}_v}{dt} \right). \end{aligned}$$

В получившемся выражении первая сумма равна нулю (т.к. векторно перемножаются сонаправленные векторы - $\frac{d\vec{r}_v}{dt} = \vec{v}_v$).

Движение рассматривается в инерциальной системе отсчёта. Поэтому:

$$m_v \cdot \frac{d\vec{v}_v}{dt} = m_v \cdot \vec{a}_v = \vec{R}_v^E + \vec{R}_v^I, \quad \text{где}$$

\vec{R}_v^E и \vec{R}_v^I - равнодействующие внешних и внутренних сил, действующих на v -тую частицу.

С учётом свойства внутренних сил ($\vec{M}_{GO}^I = 0$), получаем:

$$29.5 \quad \left| \begin{array}{l} \dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_{GO}^E - \\ \text{производная по времени от кинетического момента относительно} \\ \text{произвольного центра } O \text{ инерциальной системы отсчёта для любой} \\ \text{механической системы равна главному моменту относительно того} \\ \text{же центра всех внешних, действующих на систему сил.} \end{array} \right.$$

29.5. Закон сохранения кинетического момента

В проекциях на оси координат математическое выражение закона об изменении кинетического момента приобретает вид:

$$\dot{L}_x = \sum m_x^E; \quad \dot{L}_y = \sum m_y^E; \quad \dot{L}_z = \sum m_z^E.$$

Если $\vec{M}_{GO}^E = 0$, или $\sum m_\psi^E = 0$ ($\psi = x$, либо y , либо z),

то $\vec{L}_O = const$, либо $L_\psi = const$ (ψ - это x , или y , или z).

Приводим пример на закон сохранения кинетического момента. По причине большой исторической значимости отводим ему подраздел.

29.6. Закон площадей Кеплера

На рис.4: P - центр масс планеты (как материальная точка), γ - его траектория, \vec{v} - скорость, \vec{r} - радиус-вектор; α - угол между векторами \vec{r} и \vec{v} ; \vec{F} - действующая на планету со стороны притягивающего центра C (Солнца) гравитационная сила; $Cxyz$ - Гелиоцентрическая система отсчёта, взятая так, чтобы в начальный момент

К закону площадей Кеплера

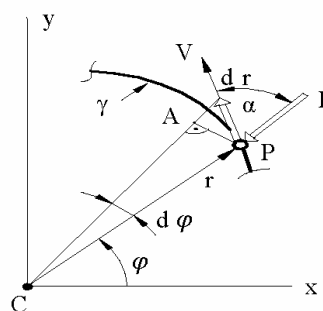


Рисунок 29.4

времени векторы \vec{v} и \vec{F} располагались в плоскости xCy ; φ - полярный угол (определяет положение радиус-вектора \vec{r} относительно полярной оси x).

Понятно, что траектория точки P расположена в плоскости xCy ($m \cdot \ddot{z} = 0 \mapsto \dot{z} = 0 \mapsto z = 0$).

Т.к. \vec{F} - центральная сила (всё время проходит через точку C), то:

$$\vec{L}_C = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v}) = \text{const}(t).$$

Откуда:

$$a \quad \left\{ \begin{array}{l} r \cdot v \cdot \sin \alpha = \text{const}(t) \quad \mapsto \quad \frac{0,5 \cdot r \cdot (dr \cdot \sin \alpha)}{dt} = \text{const}(t). \end{array} \right.$$

За время dt радиус-вектор \vec{r} получит приращение $d\vec{r}$ и ометёт площадь dQ , равную площади треугольника CAP :

$$dQ = 0,5 \cdot r \cdot AP = 0,5 \cdot r \cdot (dr \cdot \sin \alpha).$$

Подставляем полученное выражение в (а) и получаем:

$\frac{dQ}{dt} = \text{const}(t)$ - за равные промежутки времени радиус-вектор ометает равные площади. Это и есть 2-й закон Кеплера (закон о площадях).

Два других закона Иоганна Кеплера (1571-1630):

первый – планеты движутся по эллипсам и в одном из фокусов каждого такого эллипса находится Солнце (уравнения траекторий планет и космических аппаратов см. в подразделе 11.7);

третий - времена обращений планет относятся между собою как полуторные степени средних их расстояний до Солнца.

Законы Кеплера явились солидным экспериментальным фундаментом к теории ещё для Ньютона - при написании им «Математических начал», т.е. рассмотренный пример в очередной раз подтвердил целесообразность обучающемуся воспитать в себе высокое доверие к механическим явлениям, которые он в своей инженерно-практической деятельности будет предсказывать, используя методы и опорные факты теоретической механики.

29.7. Математическое выражение производной по времени от кинетического момента вращательно движущегося тела. Основное уравнение динамики вращательного движения

В подразделе 29.3 показано, что кинетический момент вращательно движущегося тела определяется формулой:

$$\vec{L}_O = (I_z \cdot \vec{k} - I_{zx} \cdot \vec{i} - I_{yz} \cdot \vec{j}) \cdot \omega_z.$$

Используя известное из математики правило взятия производной от произведения двух переменных, получаем:

$$\dot{\vec{L}}_O = \frac{d}{dt} \left[(I_z \cdot \vec{k} - I_{zx} \cdot \vec{i} - I_{yz} \cdot \vec{j}) \right] \cdot \omega_z + (I_z \cdot \vec{k} - I_{zx} \cdot \vec{i} - I_{yz} \cdot \vec{j}) \cdot \dot{\omega}_z.$$

В рассматриваемом случае $\vec{k} = \text{const}(t) \mapsto \dot{\vec{k}} = 0$.

Oxyz - правая декартова система координат. Это значит:

$$\vec{i} = \vec{j} \times \vec{k}, \quad \vec{j} = \vec{k} \times \vec{i}, \quad \vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}.$$

Тогда, учитывая известные из кинематики связи $\dot{\vec{i}} = \vec{\omega} \times \vec{i}$ и $\dot{\vec{j}} = \vec{\omega} \times \vec{j}$, получаем:

$$\dot{\vec{i}} = \omega_z \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) = \omega_z \cdot \vec{j}, \quad \dot{\vec{j}} = \omega_z \cdot (\vec{k} \times \vec{j}) = -\omega_z \cdot \vec{i}.$$

Таким образом:

$$\dot{\vec{L}}_O = (I_{yz} \cdot \vec{i} - I_{zx} \cdot \vec{j}) \cdot \omega_z^2 + (I_z \cdot \vec{k} - I_{zx} \cdot \vec{i} - I_{yz} \cdot \vec{j}) \cdot \varepsilon_z.$$

После приведения подобных членов получаем

$$29.6 \quad \left| \begin{array}{l} \text{математическое выражение производной по времени от} \\ \text{кинетического момента вращательно движущегося тела:} \\ \dot{\vec{L}}_O = (I_{yz} \cdot \omega_z^2 - I_{zx} \cdot \varepsilon_z) \cdot \vec{i} - (I_{zx} \cdot \omega_z^2 + I_{yz} \cdot \varepsilon_z) \cdot \vec{j} + (I_z \cdot \varepsilon_z) \cdot \vec{k} = \vec{M}_{IO}^E. \end{array} \right.$$

К первым двум составляющим математического выражения 6 возврат будет при рассмотрении динамических нагрузок на опоры вращательно движущегося тела (в разделе «Метод кинестатики»).

В данном же разделе внимание уделим лишь проекции математического выражения 29.6 на ось z , которую, по причине сходства с $m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}$, называют

$$29.7 \quad \left| \begin{array}{l} \text{основное уравнение динамики вращательно движущегося тела -} \\ I_z \cdot \varepsilon_z = m_z^E. \end{array} \right.$$

29.8. Рядовые примеры на применение закона об изменении кинетического момента

ПРИМЕР 29.1.- Скамья Жуковского

Дано. – На рис.29.5 изображён человек с гантелями в руках в двух положениях: в первом - руки широко расставлены и момент инерции системы относительно оси вращения $I_1 = 10 \text{ кгм}^2$, угловая скорость $\omega_1 = 2 \text{ об/с}$; во втором положе-

Скамья Жуковского

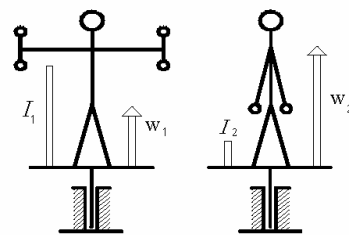


Рисунок 29.5

нии гантели прижаты к бёдрам и момент инерции системы «человек-гантели-скамья» $I_2 = 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Требуется. – Определить угловую скорость ω_2 рассматриваемой механической системы во втором её положении.

Решение.– Центр тяжести системы в обоих положениях расположен на оси вращения, реакции подшипников пересекают её. Поэтому $\sum m_z^E = 0$ и

$$L_1 = L_2 \quad \mapsto \quad I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2 \quad \mapsto \quad \omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \cdot \omega_1 = \frac{10}{2} \cdot 2 = 10 \text{ об/с.}$$

ПРИМЕР 29.2.- Вывод формулы для вычисления углового ускорения барабана с намотанным на него тросом, к концу которого подвешен груз

Дано. – На барабан 1 радиусом R намотана невесомая нить, к концу которой подвешен груз 2 массой m (см. рис.29.6).

Требуется.– Определить угловое ускорение ε барабана.

Решение.– Принимаем к рассмотрению систему «барабан-нить-груз». Её кинетический момент имеет две составляющие:

$$L = L_1 + L_2.$$

Кинетический момент поступательно движущегося груза в соответствии с подразделом 29.2:

$$L = (m \cdot v) \cdot R.$$

При написании этой формулы целесообразно использовать методы статики - вектор $(m \cdot \vec{v})$ уподобить силе \vec{F} и её модуль $(F = m \cdot v)$ умножить на плечо вектора относительно оси z - на R .

Кинетический момент барабана вычисляем по формуле подраздела 29.3:

$$L_2 = I \cdot \omega \quad (L_z = I_z \cdot \omega_z).$$

$$\text{Итак, } L = (m \cdot v) \cdot R + I \cdot \omega = (m \cdot R^2 + I) \cdot \omega \quad \mapsto \quad \dot{L} = (m \cdot R^2 + I) \cdot \varepsilon.$$

Теперь вычисляем сумму моментов внешних сил - $\sum m_z^E = (m \cdot g) \cdot R$ (реакции подшипников направлены через ось вращения z , поэтому моменты от них равны нулям; единственный ненулевой момент – это момент сил тяжести, приложенных к массе m).

$$\text{Итак, } \varepsilon = \frac{(m \cdot g) \cdot R}{(m \cdot R^2 + I)}.$$

К примеру 29.2

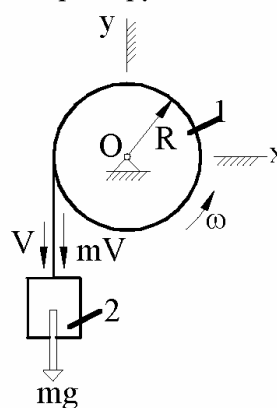
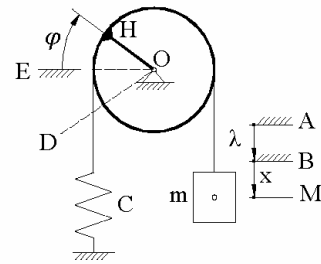


Рисунок 29.6

ПРИМЕР 29.3.- Собственные колебания системы «шкив с перекинутым через него невесомым тросом, один конец которого через пружину соединён с неподвижным телом, а ко второму подвешен груз»

К примеру 29.3

Дано. – R - радиус шкива; I - его момент инерции (относительно оси вращения). m - масса подвешенного груза. c - жёсткость пружины (см. рис.7).



Требуется. - Определить период собственных колебаний заданной механической системы.

Рисунок 29.7

Решение.- Чтобы иметь меньшее количество математических преобразований, при рассмотрении всех задач на колебания рекомендуем использовать

29.8 } *правило принятия за начала отсчётов положений статического равновесия механических систем:* за начала отсчётов координат (линейных, криволинейных, угловых) при рассмотрении колебательных движений механических систем целесообразно принимать те точки и линии систем отсчёта, с которыми в положении статического равновесия механической системы совпадают её метки.

Поясняем (см. рис. 29.7):

A – горизонталь системы отсчёта, на которой расположен центр тяжести груза при недеформированной пружине;

B – горизонталь системы отсчёта, на которой расположен центр тяжести груза при статическом равновесии рассматриваемой механической системы. Этот уровень и принят за начало отсчёта числовой оси x ;

M – текущее (в процессе колебаний) положение центра тяжести груза;

OD, OE и OH – положения радиуса-метки на шкиве при, соответственно, недеформированной пружине, в положении статического равновесия и в текущий момент времени.

В положении статического равновесия (это положение, которое занимает механическая система после полного затухания имевших место колебаний) пружина окажется растянутой на некоторую величину λ ; её называют *статической деформацией пружины*, определяют по закону Гука - из равенства: $c \cdot \lambda = S_{CT} = G$; S_{CT} - это натяжение нити при отсутствии в системе колебаний; из условия равновесия принятой к рассмотрению системы «шкив+охватывающая его нить (без пружины)+груз» следует, что $S_{CT} = G$.

В процессе колебаний (в некоторый произвольно взятый момент времени) пружина окажется деформированной на величину $(\lambda + x)$. Понятно, что если пренебрегать массой пружины и нити (это обычное допущение), то натяжение нити

окажется определяемым по формуле (по закону Гука): $S = c \cdot (\lambda + x)$.

Для решения задачи воспользуемся законом об изменении кинетического момента в форме:

$$\dot{L}_z = \sum m_z^E.$$

При этом, из предыдущей задачи видим: $L_z = -(m \cdot R^2 + I) \cdot \dot{\varphi}$,

но появляется знак минус (правило прежнее – из статики: если уподобленный силе вектор направлен так, что от одиночного его действия тело будет поворачиваться против хода стрелки часов – плюс; по ходу – минус).

$$\sum m_z^E = m_z^S + m_z^G = c \cdot (\lambda + x) \cdot R - (m \cdot g) \cdot R.$$

Итак, получаем:

$$-(m \cdot R^2 + I) \cdot \ddot{\varphi} = c \cdot (\lambda + x) \cdot R - (m \cdot g) \cdot R.$$

Или, с учётом того что $x = \varphi \cdot R$, а $c \cdot \lambda \cdot R = (m \cdot g) \cdot R$:

$$-(m \cdot R^2 + I) \cdot \ddot{\varphi} = c \cdot \varphi \cdot R^2 \quad \mapsto$$

$$\mapsto \ddot{\varphi} + k^2 \cdot \varphi = 0, \quad \text{где} \quad k = \sqrt{\frac{c \cdot R^2}{m \cdot R^2 + I}}.$$

Напоминаем, что подобное уже встречалось – см. с.179, 185 и 210. Проверьте себя: «как называется величина k »? Выражение для периода колебаний напишите самостоятельно.

ПРИМЕР 29.4. - *Определение момента, направленного на опрокидывание орудия набок во время выстрела*

Дано. – Осевой момент инерции снаряда относительно оси z (см. рис.29.8) $I = 0,2 \text{ кгм}^2$. Время его движения внутри ствола $T = 0,02 \text{ с}$, а угловая скорость на дульном срезе $\omega_T = 200 \text{ с}^{-1}$.

Требуется. - Считая вращение снаряда в стволе равноускоренным, определить момент M , направленный на опрокидывание орудия набок.

Решение. -

$$I \cdot \varepsilon = M \quad \mapsto \quad d\omega = \frac{M}{I} \cdot dt \quad \mapsto \quad \omega = \frac{M}{I} \cdot t \quad \mapsto \quad M = \frac{I \cdot \omega_T}{T} = 2000 \text{ Нм.}$$

К примеру 29.4

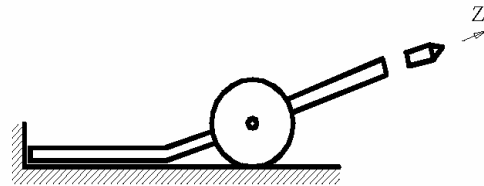


Рисунок 29.8

29.9. Физический маятник

29.9.1. Понятие о физическом маятнике.
Формула для вычисления частоты его колебаний

Физический маятник – это твёрдое тело, совершающее колебательное движение относительно нецентральной горизонтальной оси – см. рис.9, где: O - точка подвеса (ось маятника); C - центр тяжести, G - вес, I - момент инерции относительно точки подвеса, φ - определяющая его положение угловая координата.

Записываем основное уравнение динамики вращательно движущегося тела:

$$I \cdot \ddot{\varphi} = -G \cdot e \cdot \sin \varphi.$$

Как и для математического маятника, ограничиваемся малыми колебаниями. Получаем:

$$29.9 \quad \left| \text{ для физического маятника } \ddot{\varphi} + k^2 \cdot \varphi = 0, \quad \text{ где } k = \sqrt{\frac{G \cdot e}{I}}.$$

29.9.2. Об использовании физического маятника для экспериментального способа определения ускорения свободного падения

$$29.10 \quad \left| \text{ Период его колебаний: } T_{\varphi} = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{G \cdot e}}.$$

Для математического же маятника период колебаний определяется формулой 25.11 (с. 180):

$$T_M = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

$$29.11 \quad \left| \text{ Физический и математический маятники называют эквивалентными, если они имеют одинаковые периоды колебаний } - T_{\varphi} = T_M.$$

Длину математического маятника, эквивалентного физическому, называют приведённой длиной физического маятника.

После приравнивания правых частей записанных выражений для T_{φ} и T_M , получаем, что

$$29.12 \quad \left| \text{ приведённая длина физического маятника определяется по формуле: } L = \frac{I}{m \cdot e}, \quad \text{ где } m - \text{ масса физического маятника.}$$

Схематическое изображение физического маятника

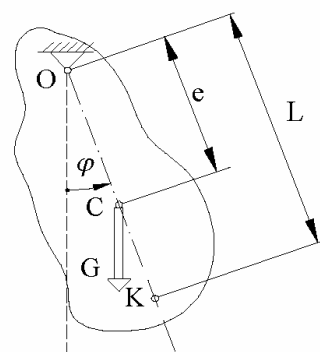


Рисунок 29.9

Точку K на физическом маятнике (см. рис.29.9), расположенную на луче OC на расстоянии L от точки подвеса O называют *центром качаний* физического маятника.

29.13 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Свойство взаимности физического маятника:} \\ \text{период колебаний физического маятника не изменится, если его} \\ \text{центр качаний превратить в точку подвеса; при этом, бывшая точка} \\ \text{подвеса превратится в центр качаний нового маятника.} \end{array} \right.$

Докажем справедливость результата 29.13 Для этого обозначим: T_1 - период колебаний физического маятника, когда точкой его подвеса является O ; T_2 - период колебаний физического маятника, когда точкой его подвеса является K .

Выражаем момент инерции маятника относительно центра качания через приведённую его длину:

$$\begin{aligned} I_K &= I_C + m \cdot (L - e)^2 = (I_O - m \cdot e^2) + m \cdot (L - e)^2 = \\ &= I_O + m \cdot L^2 - 2m \cdot L \cdot e = m \cdot L^2 - m \cdot L \cdot e = m \cdot L \cdot (L - e). \end{aligned}$$

В написанном алгебраическом преобразовании двоекратно применена математическая связь между моментами инерции относительно параллельных осей (см. подраздел 6.5).

В соответствии с 29.10:
$$T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_K}{G \cdot (L - e)}}.$$

После подстановки в него выражения для I_K , получаем:

$$T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} = T_M = T_1.$$

Свойство взаимности физического маятника в гравиметрии используют для экспериментально-теоретического определения ускорения свободного падения в различных местах Земного шара и устанавливают, поэтому, различные гравитационные аномалии, что позволяет делать заключения о наличии полостей внутри земной поверхности, оценивать наличие залегающих пород с большими или малыми удельными весами и т.д. В основе метода лежит математическая зависимость, получаемая из последнего выражения:

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot L}{T^2}, \quad \text{где}$$

L - экспериментально устанавливаемая величина; её в так называемом обратном маятнике изменяют мельчайшими шажками - пока не добьются равенства T_1 и T_2 (которое устанавливают с предельно возможным уровнем точности).

29.10*. Основные экспериментально-теоретические способы определения моментов инерции тел

Не всегда моменты инерции тел можно установить чисто аналитическим путём. Две основные этому причины: геометрическая сложность форм и неоднородность материала.

29.10.1. Нахождение момента инерции тела через превращение его в физический маятник с экспериментальным определением периода колебаний

Расчёты на устойчивость движения автомобилей по дорогам требуют знания их моментов инерции. Один из возможных путей такого определения представлен на рис.10:

$$I_z = \frac{T_z^2 \cdot G \cdot a}{4\pi^2}; \quad I_x = \frac{T_x^2 \cdot G \cdot a}{4\pi^2}.$$

Записанные формулы являются прямыми следствиями результата 29.10. К моментам инерции относительно центральных осей автомобиля можно перейти с помощью математической связи между моментами инерции относительно параллельных осей, что рассмотрено в подразделе 28.5. Вопросы же определения положений центров тяжести рассматривались в статике.

Первая из записанных двух формул может быть использована и для определения момента инерции шатуна (см. рис.29.11) – деталь двигателя внутреннего сгорания (имеются практически в любом автомобиле, тракторе, тягаче и мотоцикле).

29.10.2. Нахождение моментов инерции тел способом маятника сравнения

Тело, момент инерции которого необходимо определить, превращают (см. рис.10 и 11) в физический маятник. Через ось подвеса перебрасывают нить с грузиком (например гайкой) на конце – это математический маятник в реальном исполнении. Длина L математического маятника экспериментально подбирается такой, чтобы его колебания оказались синхронными колебаниям физического маятника. Тогда момент инерции тела относительно точки подвеса можно определять по формуле 29.12 - $I = L \cdot m \cdot e$.

К определению момента инерции автомобиля

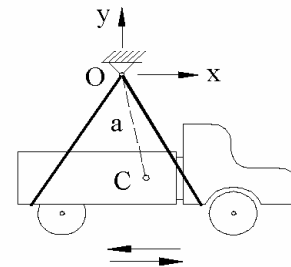


Рисунок 29.10

К определению момента инерции шатуна

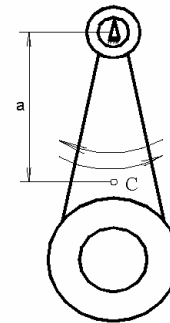


Рисунок 29.11

29.10.3. Нахождение моментов инерции тел способом крутильных колебаний

Схема устройства для нахождения моментов инерции тел способом крутильных колебаний изображена на рис.29.12: главный вид и под ним - вид сверху; l - длина стальной проволоки, верхний её конец неподвижен, ось проходит через центр тяжести диска, нижний конец жёстко соединён с центром диска. OA - радиальная метка на диске; OO_1 - неподвижная горизонталь, с которой совпадает метка в положении статического равновесия системы «проволока-диск»; φ - текущий угол закрученности проволоки; M - момент, приложенный к диску со стороны проволоки.

При небольших углах закручивания ($15-30^\circ$, что практически всегда достижимо и зависит от длины l)

$$M = c \cdot \varphi,$$

где $c = \text{const}(\varphi)$.

Крутильная жёсткость c проволоки определяется экспериментально, либо подсчитывается по известной из курса сопротивления материалов формуле.

На основании 29.7 записываем дифференциальное уравнение вращательного движения диска:

$$I \cdot \ddot{\varphi} = -c \cdot \varphi \quad \mapsto \quad \ddot{\varphi} + k^2 \cdot \varphi = 0 \quad \mapsto \quad T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{c}} \quad \mapsto$$

$I = \frac{c \cdot T^2}{4\pi^2}$, где T - экспериментально определяемый период колебаний системы «проволока-диск».

Практически более приемлема конструкция, в которой к нижнему концу проволоки жёстко прикреплён патрон от токарного станка, а уже в него закрепляется деталь с искомым моментом инерции.

Задание: вывести формулу, по которой можно определять момент инерции детали, закрепляемой в патрон от токарного станка.

К определению моментов инерции тел способом крутильных колебаний

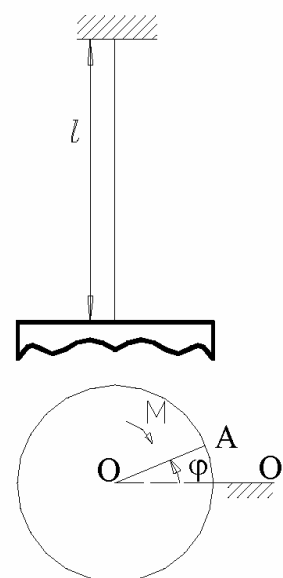


Рисунок 29.12

29.11. Закон об изменении кинетического момента в центромассовой системе отсчёта

Центромассовая система отсчёта – это система отсчёта, поступательно перемещающаяся относительно инерциальной системы и начало которой во времени совпадает с центром масс механической системы.

$$29.14 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{В центромассовой системе отсчёта закон об изменении} \\ \text{кинетического момента имеет ту же математическую форму, что и} \\ \text{в инерциальной системе -} \end{array} \right. \quad \dot{\vec{L}}_C = \vec{M}_{IC}^E, \quad \text{где}$$

C - центр масс любой, конкретно рассматриваемой механической системы;

\vec{M}_{IC}^E - главный момент внешних сил относительно центра C (который в общем случае перемещается относительно инерциальной системы с переменным ускорением);

\vec{L}_C - кинетический момент, определяемый по скоростям частиц относительно центромассовой системы отсчёта;

Результат 29.14 теоретически предсказывается теми же, многократно применявшимися, методами векторной алгебры. Вот этот преобразовательный процесс.-

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{L}_C) &= \frac{d}{dt}(\sum \vec{l}_{vc}) = \sum \frac{d}{dt}(\vec{l}_{vc}) = \sum \frac{d}{dt}(\vec{r}_{vc} \times m_v \cdot \vec{v}_{vc}) = \\ &= \sum \left(\frac{d\vec{r}_{vc}}{dt} \times m_v \cdot \vec{v}_{vc} \right) + \sum \left(\vec{r}_{vc} \times m_v \cdot \frac{d\vec{v}_{vc}}{dt} \right). \end{aligned}$$

В получившемся выражении первая сумма равна нулю - векторно перемножаются сонаправленные векторы. Во второй сумме добавляются, в отличие от преобразовательного процесса рассмотренного в подразделе 7.4, переносная и кориолисова силы инерции (т.к. центромассовая система не является инерциальной) -

$$m_v \cdot \frac{d\vec{v}_{vc}}{dt} = m_v \cdot \vec{a}_{vc} = \vec{R}_v^E + \vec{R}_v^I + \vec{\Phi}_v^e + \vec{\Phi}_v^k.$$

Но т.к. центромассовая система – это система перемещающаяся *поступательно* относительно инерциальной, то кориолисовы силы инерции для всех точек системы равны нулю. Равным нулю оказывается и главный момент от переносных сил инерции. И действительно:

$$\sum (\vec{r}_{vc} \times \vec{\Phi}_{vc}^e) = -\sum (\vec{r}_{vc} \times m_v \cdot \vec{a}_{vc}^e) = \vec{a}_{vc}^e \times \sum (m_v \cdot \vec{r}_{vc}) = \vec{a}_{vc}^e \times (m \cdot \vec{r}_{cc}) = \vec{a}_{vc}^e \times (m_v \cdot 0) = 0.$$

Результат 29.14 распространить на произвольные системы отсчёта нельзя. Объясните - почему?

29.12. Дифференциальные уравнения плоского движения твёрдого тела и примеры их применения

На рис.29.13 изображена плоская фигура, C - центр её тяжести, m - масса, CM - метка для отсчёта угловой координаты φ ; Oxy - инерциальная, $Cx'y'$ - центромассовая системы отсчёта.

Объединяя опорные факты подразделов 25.1 и 29.7, получаем:

$$29.15 \quad \left| \begin{array}{l} m \cdot \ddot{x}_C = \sum X^E, \\ m \cdot \ddot{y}_C = \sum Y^E, \\ I \cdot \ddot{\varphi} = \sum m_C^E. \end{array} \right.$$

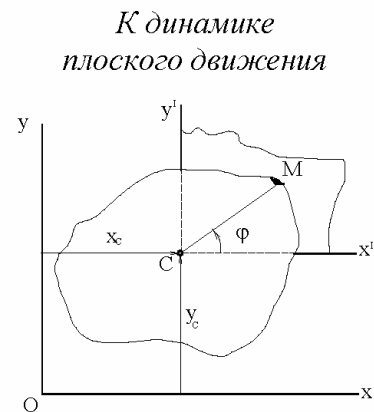


Рисунок 29.13

- дифференциальные уравнения плоско движущегося тела.

ПРИМЕР 29.5.- Качение кольца по наклонной плоскости

Дано. – Кольцо массой m и радиусом r скатывается по наклонной плоскости, характеризуемой углом α (см. рис.29.14). Коэффициент трения скольжения кольца по наклонной плоскости - $f = 0,15$.

Требуется. - Область возможных значений угла α (от 0 до 90°) разбить на две – область чистого качения и область качения с проскальзыванием.

Решение.- Принимаем к рассмотрению кольцо. Внешними для него силами являются: сила тяжести \vec{G} , нормальная

\vec{N} и касательная \vec{F} составляющие реакции плоскости (\vec{F}_C - сила сцепления – при отсутствии проскальзывания, либо \vec{F}_{TP} - при наличии проскальзывания).

Рассматриваем случай отсутствия проскальзывания. Тогда точка соприкосновения кольца с плоскостью является мгновенным центром скоростей и, как известно из кинематики, имеет место равенство:

$$a \quad \left| \quad \dot{x}_C = r \cdot \dot{\varphi} \quad \mapsto \quad \ddot{x}_C = r \cdot \ddot{\varphi} . \right.$$

*К качению кольца по
наклонной плоскости*

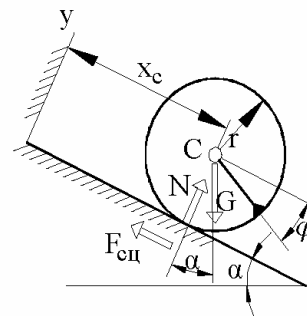


Рисунок 29.14

Теперь (а) дополняем тремя дифференциальными уравнениями 29.15 и, после совместного их решения, отвечаем на поставленный в задаче вопрос.-

$$б \quad \left| \quad m \cdot \ddot{y}_C = m \cdot 0 = 0 = \sum Y^E = N - G \cdot \cos \alpha \quad \mapsto \quad N = G \cdot \cos \alpha. \right.$$

$$в \quad \left| \quad m \cdot \ddot{x}_C = G \cdot \sin \alpha - F_C \quad \mapsto \quad F_C = G \cdot \sin \alpha - m \cdot \ddot{x}_C. \right.$$

$$г \quad \left| \quad -I \cdot \ddot{\varphi} = -r \cdot F_C \quad \mapsto \quad I \cdot \ddot{\varphi} = r \cdot F_C. \right.$$

Из (а) и (г):

$$д \quad \left| \quad \ddot{x}_C = F_C \cdot \frac{r^2}{I}. \right.$$

Из (в) и (д):

$$е \quad \left| \quad F_C = G \cdot \sin \alpha - F_C \cdot \frac{m \cdot r^2}{I} \quad \mapsto \quad F_C = \frac{G \cdot \sin \alpha}{1 + \frac{m \cdot r^2}{I}} = \frac{N \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 + \frac{m \cdot r^2}{I}}. \right.$$

Условие отсутствия проскальзывания (из статики) имеет вид: $F_C < F_{TP} = f \cdot N$,

т.е. учитывая (е) получаем: $\frac{N \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 + \frac{m \cdot r^2}{I}} < f \cdot N$. Откуда

условие отсутствия проскальзывания кольца по наклонной плоскости принимает

вид: $\operatorname{tg} \alpha < f \cdot \left(1 + \frac{m \cdot r^2}{I}\right)$. Для кольца: $I = m \cdot r^2$. Поэтому

в данной задаче условие отсутствия проскальзывания принимает вид:

$$\operatorname{tg} \alpha < 2f = 2 \cdot 0,15 = 0,30 \quad \mapsto \quad \alpha < 16^\circ 40'.$$

Задание для самостоятельной работы: измените в условиях решённой задачи лишь одно – катится не кольцо, а сплошной однородный диск. До какого значения угла α будет отсутствовать проскальзывание диска по наклонной плоскости?

ПРИМЕР 29.6.- Стержень подвешен за два конца. Одна нить перерезается
 Дано. – Однородный стержень за концы А и В подвешен к потолку на двух нитях (см. рис.29.15). Одна из них (правая) перерезается.

Требуется. - Найти натяжение левой нити на бесконечно малом промежутке времени, следующим сразу же за моментом перерезания правой нити.

Решение.- Принимаем к рассмотрению стержень. Внешними, действующими на него силами, являются натяжение \vec{T} левой нити и сила тяжести \vec{G} стержня.

Из $m \cdot \ddot{x}_C = \sum X^E$ получаем: $m \cdot \ddot{x}_C = G - T$.

Из $I_C \cdot \ddot{\varphi} = \sum m_C^E$ $I_C \cdot \ddot{\varphi} = (0,5a) \cdot T$.

Из геометрии: $x_C = (0,5a) \cdot \sin \varphi$. При малых φ : $x_C = (0,5a) \cdot \varphi$, $\ddot{x}_C = (0,5a) \cdot \ddot{\varphi}$.

В связи с этим, второе из составленных дифференциальных уравнений

принимает вид: $\ddot{x}_C = \frac{a^2 \cdot T}{4I_C}$. Подставляем полученное в первое уравнение:

$$\frac{a^2 \cdot m}{4I_C} \cdot T = G - T. \quad \text{Учитываем, что } I_C = \frac{m \cdot a^2}{12} \quad \text{и получаем: } T = \frac{G}{4}.$$

ПРИМЕР 29.7.- Падение диска с разматыванием навёрнутой на него нити, свободный конец которой прикреплен к потолку

Дано. – На рис.29.16 изображён сплошной однородный диск с намотанной на него нитью, свободный конец которой прикреплен к потолку.

G - вес диска, r - радиус; \vec{T} - натяжение нити.

Требуется. - Определить натяжение нити.

Решение.- Принимаем к рассмотрению диск с прилегающим к его жолобу небольшим вертикальным участком нити (см. рисунок).

Траекторией центра C тяжести диска является вертикальная прямая - это видно из

$$m \cdot \ddot{y}_C = \sum Y^E.$$

Стержень за концы подвешен на двух нитях

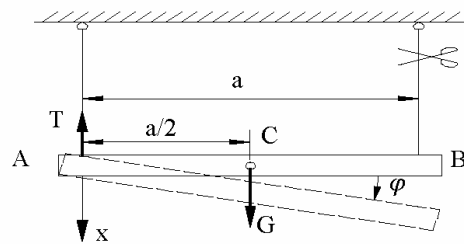


Рисунок 29.15

Падение диска с разматыванием нити

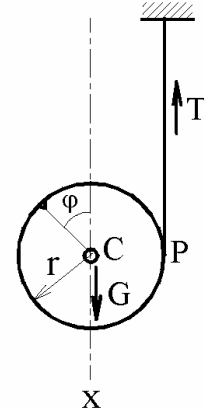


Рисунок 29.16

P - мгновенный центр скоростей для диска $\mapsto \dot{x}_C = r \cdot \dot{\varphi} \mapsto \ddot{x}_C = r \cdot \ddot{\varphi}$.

Из $I_C \cdot \ddot{\varphi} = \sum m_C^E$: $I_C \cdot \ddot{\varphi} = r \cdot T$. Подставляем это в последнее

выражение предыдущей строки и получаем: $\ddot{x}_C = \frac{r^2}{I_C} \cdot T$.

Из $m \cdot \ddot{x}_C = \sum X^E$: $m \cdot \ddot{x}_C = G - T$.

Объединяем уравнения двух последних строк, учитываем, что $I_C = 0,5m \cdot r^2$

и находим: $\frac{m \cdot r^2}{I_C} \cdot T = G - T \mapsto 2T = G - T \mapsto T = \frac{G}{3}$.

29.13. Начальные сведения о динамике произвольно и сферически движущихся тел

29.13.1. Уравнения, исторические сведения

Для математического описания произвольно движущегося тела относительно инерциальной системы отсчёта по аналогии с предыдущим подразделом можно ввести центромассовую систему отсчёта. Тогда:

$$29.16 \quad \left\{ \begin{array}{l} m \cdot \vec{a}_C = \vec{R}_r^E \mapsto m \cdot \ddot{x}_C = \sum X^E, \quad m \cdot \ddot{y}_C = \sum Y^E, \quad m \cdot \ddot{z}_C = \sum Z^E - \\ \text{уравнения, описывающие движение центра тяжести тела} \\ \text{относительно инерциальной системы отсчёта } Oxyz; \end{array} \right.$$

$$29.17 \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{L}}_C = \vec{M}_{rC}^E \mapsto \dot{L}_{Cx} = \sum m_x^E, \quad \dot{L}_{Cy} = \sum m_y^E, \quad \dot{L}_{Cz} = \sum m_z^E - \\ \text{уравнения, описывающие сферическое движение тела в} \\ \text{центромассовой системе отсчёта.} \end{array} \right.$$

Но ... в отличие от динамики плоского движения, здесь имеются серьёзные трудности – проблемы возникают при разворачивании $\dot{\vec{L}}_C$ (\dot{L}_{Cx} , \dot{L}_{Cy} , \dot{L}_{Cz}).

Далее будем иметь ввиду сферическое движение. Для него можно получить уравнения (см. следующий пункт – 29.13.2):

$$29.18 \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\omega}_x = \frac{I_y - I_z}{I_x} \cdot \omega_y \cdot \omega_z + \frac{1}{I_x} \cdot \sum m_x^E; \\ \dot{\omega}_y = \frac{I_z - I_x}{I_y} \cdot \omega_z \cdot \omega_x + \frac{1}{I_y} \cdot \sum m_y^E; \\ \dot{\omega}_z = \frac{I_x - I_y}{I_z} \cdot \omega_x \cdot \omega_y + \frac{1}{I_z} \cdot \sum m_z^E. \end{array} \right.$$

Их называют приведенными к форме Коши «динамическими уравнениями Эйлера» (или «уравнениями Эйлера-Пуассона», или «уравнениями Даламбера-Эйлера»). В них x, y, z связаны с телом, причём являются главными его осями инерции.

У читателя должен возникнуть естественный вопрос: «Но где в уравнениях 29.18 координаты, которыми определяется положение тела относительно базовой системы отсчёта (инерциальной, или центромассовой)?»

Полная система дифференциальных уравнений сферического движения твёрдого тела получится тогда, когда к тройке уравнений 29.18 добавить ещё и

$$29.19 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{кинematicкие уравнения Эйлера в форме Коши:} \\ \dot{\Theta} = \omega_x \cdot \cos \varphi - \omega_y \cdot \sin \varphi; \\ \dot{\psi} = \omega_x \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \Theta} + \omega_y \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \Theta}; \\ \dot{\phi} = \omega_z - \omega_x \cdot \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \Theta} - \omega_y \cdot \frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \Theta} \end{array} \right.$$

(см., например, «Лунц Я.Л. Введение в теорию гироскопов.- М.: Наука, 1972.- 296с.»). При этом, напомним: φ, ψ, Θ - углы Эйлера (φ - собственного вращения, ϕ - прецессии, Θ - нутации).

Естественно желание систему дифференциальных уравнений 29.18-19 решить чисто аналитически, да ещё для общего случая.

Этого до сих пор не удалось сделать. Аналитические решения известны лишь для частных случаев: Леонард Эйлер (в 1759 г. - $\vec{M}_{GO}^E = 0$); Жозеф Луи Лагранж (1815 г. - $x_C = y_C = 0, I_x = I_y$); Софья Ковалевская (1888 г. - $I_x = I_y = 2I_z$, а центр тяжести расположен в экваториальной плоскости эллипсоида инерции) и некоторые другие.

Насколько важны и трудны были аналитические решения свидетельствует исторический факт с С.Ковалевской (1850-1891).- Французская академия наук трижды объявляла конкурс на лучшую работу по динамике сферического движения. Лишь на третий раз поступила стоящая работа (без фамилий – под девизами). Настолько стоящая работа, что жюри решило премию с 3000 франков увеличить до 5000.

В настоящее время уравнения 29.18-19 и компьютерная техника позволяют любой конкретно-числовой случай сферического движения решать и анализировать численным методом. Принципиальный подход к этому был дан в подразделе 3.6.

29.13.2*. Вывод дифференциальных уравнений 29.18

На рис.29.17: $OXYZ$ - инерциальная система отсчёта; x, y, z - главные оси инерции твёрдого тела; C - его центр тяжести, G - вес. u - линия узлов; φ, ψ, Θ - углы Эйлера (φ - собственного вращения, ψ - прецессии, Θ - нутации).

Как и для вращательно движущегося тела (см. подраздел 7.3) получаем:

$$a \quad \left| \quad \vec{L}_o = \vec{\omega} \cdot \int_m r^2 \cdot dm - \int_m [\vec{r} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \cdot dm] \right.$$

На этом аналогия с вращательно движущимся телом заканчивается, ибо следует учитывать переменность вектора угловой скорости и равенства нулю центробежных моментов инерции относительно осей x, y, z .

$$\text{Т.к.} \quad \vec{\omega} \cdot \vec{r} = \omega_x \cdot x + \omega_y \cdot y + \omega_z \cdot z, \quad \vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k},$$

то второй интеграл выражения (а) принимает вид:

$$b \quad \left| \quad \int_m [\vec{r} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \cdot dm] = \omega_x \cdot \vec{i} \cdot \int_m x^2 \cdot dm + \omega_y \cdot \vec{j} \cdot \int_m y^2 \cdot dm + \omega_z \cdot \vec{k} \cdot \int_m z^2 \cdot dm \right.$$

В полученном выражении отсутствуют центробежные моменты по той причине, что оси x, y, z главные.

Подставляем (б) в (а) и учитываем, что $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Получаем:

$$в \quad \left| \quad \vec{L}_o = \omega_x \cdot I_x \cdot \vec{i} + \omega_y \cdot I_y \cdot \vec{j} + \omega_z \cdot I_z \cdot \vec{k} \right.$$

Переходим к взятию производной по времени от последнего выражения. При этом, учитываем переменность не только 3-х проекций угловой скорости, но и ортов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Используем также известные из кинематики формулы:

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega} \times \vec{i}, \quad \dot{\vec{j}} = \vec{\omega} \times \vec{j}, \quad \dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \times \vec{k}.$$

Поскольку дальше идёт недлительная процедура с повторением неоднократно ранее встречавшихся методов, предоставляем обучающемуся возможность самостоятельно провести соответствующие алгебраические преобразования и получить дифференциальные уравнения 29.18.

К выводу уравнений 18

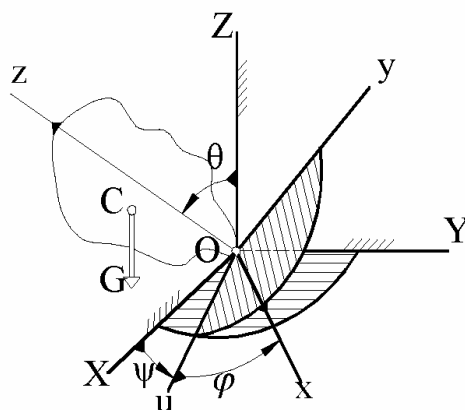


Рисунок 29.17

29.14*. О гироскопе с тремя степенями свободы, прецессионном движении и условии неподвижности его оси вращения

Гироскоп – это тело, быстро вращающееся относительно своей оси симметрии. С древних времён привлекал к себе внимание устойчивостью оси вращения гироскоп в форме волчка (юлы) – см. рис.18, где 1 – маховик, 2 – физическая ось волчка, 3 – его керн (наконечник), 4 – опора; 2' – математическая ось волчка, 3' – изображение наконечника в большом масштабе; O – центр сферического движения (точка соприкосновения опоры с керном); A – конец (торец) оси 2; α – наклон оси к вертикали; C – центр тяжести волчка, G – его вес; $OC = e$ – отклонение центра тяжести от центра сферического движения; $\vec{\Omega}$ – угловая скорость волчка вокруг оси 2' (большая угловая скорость); $\vec{\omega}$ – угловая скорость математической оси волчка в её сферическом движении относительно опоры (малая угловая скорость волчка).

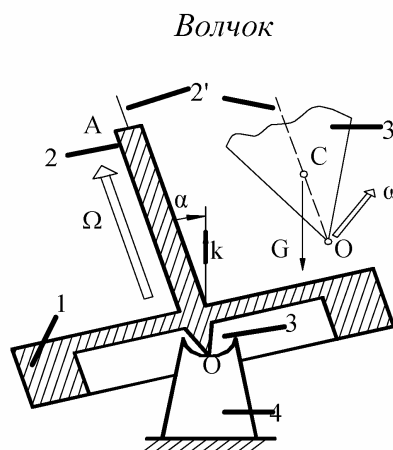


Рисунок 29.18

В 15-19 веках мировое сообщество крайне интересовало открытие и освоение новых земель. Это, и вопросы безопасности мореплавания, настоятельно требовали приборов для ориентирования. По этим причинам и было обращено внимание на свойство волчка неизменно сохранять положение математической оси относительно звёзд. Вначале пытались использовать для создания навигационных приборов непосредственно волчки (англичанин Серсон и др.), но в практику вошла другая конструкция - гироскоп в двойном кардановом подвесе – см. рис.29.19.

Гироскоп в двойном кардановом подвесе

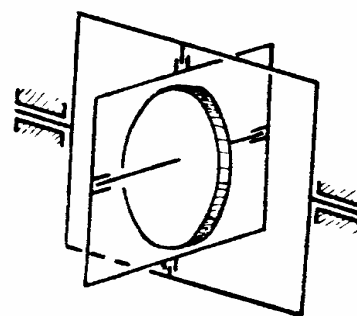


Рисунок 29.19

Основное свойство гироскопа с 3-мя степенями свободы (неизменным сохранять положение математической оси в инерциальной системе отсчёта) позволило ему получить широкое практическое использование в качестве приборов-указателей направления (гироскопы, гироскопы, гироскопы, гироскопы и т.п.), что используется в авиации и на кораблях, в торпедах и ракетах, в шахтных геодезических приборах и для обеспечения заданных траекторий скважин (которые бурят на глубины до десятка километров).

Но есть «враг» основному свойству гироскопа - это прецессия его математической оси – изменение со временем положения оси в инерциальной системе отсчёта: французскому физика Фуко (а термин «гироскоп» считается ввёл он - в 1852 г.) удавалось добиваться угловой скорости прецессии (ω) из расчёта 1 оборот за сутки. К 70-м годам 20 столетия эту угловую скорость удалось понизить до 2-3-х угловых секунд за 24 часа.

Описанные свойства гироскопа с тремя степенями свободы не есть нечто необъяснимое – они вытекают из методов и опорных фактов теоретической механики.

О сложности точного анализа гироскопических явлений уже сказано - в предыдущем подразделе - и при появлении у будущего инженера необходимости изучить тонкости этого важнейшего научно-технического достижения мы рекомендуем обратиться к уже упомянутой книге Я.Л. Лунца.

Здесь же обучающегося ознакомим с менее точным, но зато с существенно более простым подходом к количественному анализу гироскопических явлений.

29.20 | *Допущение:* если у гироскопа большая угловая скорость ($\vec{\Omega}$) на пару и более порядков превышает малую ($\vec{\omega}$), то его кинетический момент можно определять по формуле:

$$\vec{L}_O = I \cdot \vec{\Omega}$$

(как для тела вращающегося вокруг неподвижной оси, совпадающей с главной осью инерции этого тела).

Исходя из принятого допущения выведем формулу для вычисления малой угловой скорости гироскопа. При этом, будем руководствоваться изображениями на рис.29.18.

С целью удобства геометрического представления вектор \vec{L}_O через масштабный коэффициент μ представляем в виде направленного отрезка \vec{r} (подобное уже делалось - в подразделе 22.7 - при рассмотрении эллипсоида инерции). Причём, масштабный коэффициент подбираем таким, чтобы \vec{r} начинался в точке O и заканчивался в A , т.е. вводим соотношение

$$a \quad \left| \quad \vec{L}_O = \mu \cdot \vec{OA} = \mu \cdot \vec{r} \quad \mapsto \quad \vec{r} = \frac{\vec{L}_O}{\mu} \quad \mapsto \quad \dot{\vec{r}} = \frac{\dot{\vec{L}}_O}{\mu} .$$

Скорость конца вектора \vec{r} (точки A), как известно из сферического движения, $\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, или, с учётом (a), $\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \frac{\vec{L}_O}{\mu}$.

Полученное выражение объединяем с последним равенством из строки (а) и получаем: $\dot{\vec{L}}_O = \vec{\omega} \times \vec{L}_O$, а с учётом допущения 29.20 -

$$б \quad \left| \quad \dot{\vec{L}}_O = \vec{\omega} \times (I \cdot \vec{\Omega}). \right.$$

С другой стороны $\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_{GO}^E = \vec{m}_O(\vec{G}) = \vec{OC} \times \vec{G}$. Таким образом:

$$в \quad \left| \quad \vec{OC} \times \vec{G} = \vec{\omega} \times (I \cdot \vec{\Omega}). \right.$$

Учитываем, что $\vec{G} = -G \cdot \vec{k}$, а $\vec{OC} = e \cdot \frac{\vec{\Omega}}{\Omega}$, где e - алгебраическая величина - если C расположена выше точки O (см. рис.18), то e больше нуля, если ниже - меньше нуля). Тогда (в) принимает вид:

$$\frac{e \cdot G}{I \cdot \Omega} \cdot \vec{\Omega} \times (-\vec{k}) = \vec{\omega} \times \vec{\Omega} \quad \mapsto \quad \left(\vec{\omega} - \frac{e \cdot G}{I \cdot \Omega} \cdot \vec{k} \right) \times \vec{\Omega} = 0.$$

Итак,

$$29.21 \quad \left| \begin{array}{l} \text{геометрическая ось гироскопа описывает коническую поверхность} \\ \text{вокруг вертикали с угловой скоростью} \end{array} \right. \quad \vec{\omega} = \frac{e \cdot G}{I \cdot \Omega} \cdot \vec{k},$$

из которой видно:

$$29.22 \quad \left| \begin{array}{l} \text{чем меньшим будет непопадание } e \text{ центра тяжести гироскопа в} \\ \text{центр сферического движения и большим модуль угловой скорости} \\ \text{собственного вращения } (\Omega), \text{ тем меньшей будет угловая скорость} \\ \text{прецессии его оси.} \end{array} \right.$$

ПРИМЕР 29.8. - Вычисление угловой скорости прецессии гироскопа

Дано. - Момент инерции гироскопа $I = 100 \text{ кг}\cdot\text{см}^2$, масса $m = 1 \text{ кг}$, непопадание центра масс в центр сферического движения $e = 0,1 \text{ мкм}$. Модуль угловой скорости собственного вращения гироскопа $\Omega = 60000 \text{ об/мин}$.

Требуется. - Вычислить модуль угловой скорости прецессии гироскопа.

Решение. -
$$\omega = \frac{e \cdot G}{I \cdot \Omega} = \frac{(0,1 \cdot 10^{-6}) \cdot (1 \cdot 9,81)}{(100 \cdot 10^{-4}) \cdot \frac{\pi \cdot 60000}{30}} = \dots = 3 \text{ угловых градуса за сутки.}$$

29.15*. О гироскопе с двумя степенями свободы, гироскопическом моменте и гироскопических реакциях

Принципиальная схема гироскопа с двумя степенями свободы изображена на рис.29.20: $ABHK$ - гироскоп, $NDPE$ - его рама. HK можно представлять в виде маховика-тороида, AB - его ось вращения; A и B - подшипники, C - центр тяжести гироскопа. Гироскоп относительно рамы вращается с угловой скоростью $\vec{\Omega}$. В свою очередь, рама принудительно вращается вокруг оси DE с угловой скоростью $\vec{\omega}$ (D и E - подшипники, в которых расположены цапфы рамы).

Принципиальная схема гироскопа с двумя степенями свободы

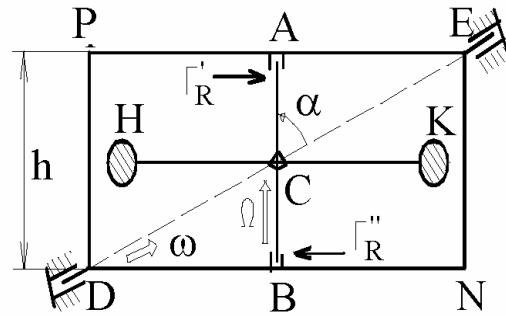


Рисунок 29.20

Приведенная принципиальная схема гироскопа с двумя степенями свободы является моделью реальных устройств. Например, ротор электродвигателя троллейбуса – это гироскоп, а поворачивающийся на поворотах его корпус – рама гироскопа. Колёсная пара и рама автомобиля – это также гироскоп с двумя степенями свободы. И т.д.

Замечено: если угловая скорость рамы не равна нулю ($\omega \neq 0$), то гироскоп оказывает сопротивление повороту его оси относительно инерциальной системы отсчёта. И явление это, вновь-таки, не есть что-то необъяснимое – оно также надёжно предсказывается методами теоретической механики. Для показа этого обратимся к рассмотренной в предыдущем разделе формуле (б):

$$\dot{\vec{L}}_C = \vec{\omega} \times (I \cdot \vec{\Omega}).$$

Здесь C (начало центромассовой системы координат) написано вместо O на основании изложенного в подразделе 29.11.

Т.к. $\dot{\vec{L}}_C = \vec{M}_{GC}^E$, то ясно, что

$$29.23 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{величина} \quad \vec{\Omega} \times (I \cdot \vec{\omega}) = -\vec{\omega} \times (I \cdot \vec{\Omega}) \quad \text{имеет размерность} \\ \text{момента силы; её называют «гироскопическим моментом»; он} \\ \text{приложен к раме со стороны гироскопа.} \end{array} \right.$$

Гироскопический момент является инженерно осязаемой величиной. Например, при $\omega = 5 \text{ с}^{-1}$, $I = 10 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $\Omega = 300 \text{ с}^{-1}$ и $\alpha = 90^\circ$ он равен $15 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ($5 \cdot 10 \cdot 300 = 15000 \text{ Н}\cdot\text{м}$).

Направлен гироскопический момент перпендикулярно и $\vec{\omega}$, и $\vec{\Omega}$; следовательно направлен перпендикулярно плоскости рамы (что следует из правил векторного произведения).

В условиях схемы, изображённой на рис.29.20, гироскопический момент уравнивается парой сил $\vec{I}'_R = -\vec{I}''_R$, приложенных к оси гироскопа со стороны рамы (со стороны подшипников A и B). Эти силы называют «гироскопическими реакциями».

Из рассмотренных равенств видно, что

29.23 гироскопические реакции – это силы, приложенные к оси гироскопа со стороны рамы, расположены в её плоскости и направлены так, что если мысленно приложить их к вектору большой угловой скорости, то он завращается в том направлении, чтобы из двух возможных вариантов (векторы сонаправлены - векторы противоположно направлены) раньше появилась сонаправленность большой и малой угловых скоростей. Модуль каждой из гироскопических реакций определяется формулой:

$$I_R = \frac{I \cdot \Omega \cdot \omega \cdot \sin \alpha}{h}, \quad \text{где}$$

α - угол между векторами $\vec{\Omega}$ и $\vec{\omega}$;

h - расстояние между подшипниками гироскопа.

Рассмотренное явление используют не только для определения гироскопических реакций (с целью их учёта в прочностных и других инженерных расчётах), но, в сочетании с приборами-указателями направлений, используют для решения задач по стабилизации движений. В частности, гироскопические силы используют для обеспечения также точности в направленности орудия движущегося танка на цель; для предотвращения морской качки; для обеспечения вертикального положения двухколёсных автомобилей и вагонов на однорельсовых дорогах; и т.д.

30. Закон об изменении кинетической энергии

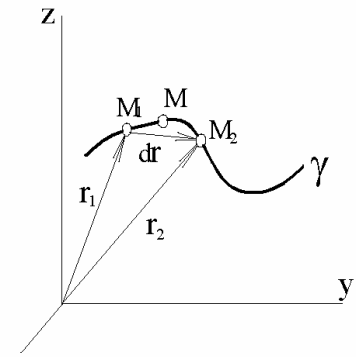
Для формулировки закона, а затем его использования, необходимо ввести ряд новых понятий. Им отводятся подразделы 30.1-6.

30.1. Понятия о работе и мощности. Общие формулы для их вычисления

К понятиям о работе и мощности силы

В качестве мер механических действия, кроме силы, её момента и импульса, пользуются также понятиями «работа» и «мощность» силы.

Пусть (см. рис.30.1) γ - траектория материальной точки M , \vec{F} - действующая на неё сила (в общем случае переменная – и по модулю, и по направлению). И пусть промежуток времени, за который материальная точка переместилась из положения «1» в положение «2», является бесконечно малой величиной, т.е. пусть $t_2 - t_1 = dt$.



Тогда вектор перемещения точки M также будет бесконечно малой величиной - $d\vec{r}$.

Рисунок 30.1

По определению,

30.1 | величину $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ называют элементарной работой силы \vec{F} .

Если движение задано естественным способом, то, как уже рассматривалось в кинематике, $dr = ds$ с точностью до бесконечно малых второго порядка малости и, поэтому, $d\vec{r} = ds \cdot \vec{\tau}$, где $\vec{\tau}$ - орт подвижной касательной оси. Тогда:

$$30.1a \quad \left| \begin{array}{l} dA = \vec{F} \cdot ds \cdot \vec{\tau} = F_{\tau} \cdot ds, \\ \text{где } F_{\tau} = \vec{F} \cdot \vec{\tau} \text{ - проекция силы на подвижную касательную ось.} \end{array} \right.$$

Если же движение задано координатным способом, то

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k}) \cdot (dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k})$$

и, учитывая правила скалярного произведения (произведения ортогональных векторов равны нулям), получаем

$$30.1b \quad \left| \quad dA = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz . \right.$$

$$30.2 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Величину } A_{1-2} = \int_{(1)}^{(2)} dA \text{ называют работой силы на конечном} \\ \text{перемещении точки её приложения (из положения «1» в «2»).} \end{array} \right.$$

Если точка приложения силы \vec{F} имеет скорость \vec{v} , то величину $N = \vec{F} \cdot \vec{v}$ называют мгновенной мощностью силы \vec{F} . Слово «мгновенной» обычно опускают.

$$N = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dA}{dt}, \quad \text{т.е.:$$

$$30.3 \quad \left| \begin{array}{l} \text{мгновенная мощность силы } \vec{F} \text{ - это величина, определяемая} \\ \text{математическими выражениями} \end{array} \right. \quad N = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{dA}{dt}.$$

Наряду с понятием «мгновенная мощность силы» широко оперируют понятием «средняя мощность силы». Что это за понятие?

Пусть A_{1-2} - это работа силы за промежуток времени $\tau = t_2 - t_1$. Тогда:

$$30.4 \quad \left| \begin{array}{l} \text{величину, определяемую из выражения} \\ \text{называют средней мощностью силы } \vec{F}. \end{array} \right. \quad N_{CP} = \frac{A_{1-2}}{\tau},$$

Удобно среднюю мощность силы представлять геометрически. С этой целью приводим рис.30.2, где: линия λ в системе координат $N-t$ отображает изменение мгновенной мощности во времени. В соответствии с введенными понятиями площадь прямоугольника $AEFD$ равновелика площади фигуры $ABCD$.

До сих пор речь велась об отдельной силе. Но понятия «работа» и «мощность» распространяется и на системы сил.

Пусть на некоторую принятую к рассмотрению механическую систему действует k сил ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_k$). По определению:

$$30.5 \quad \left| \begin{array}{l} dA = \sum_{i=1}^k dA_i \text{ - элементарная работа системы сил, действующей на} \\ \text{принятую к рассмотрению механическую систему;} \end{array} \right.$$

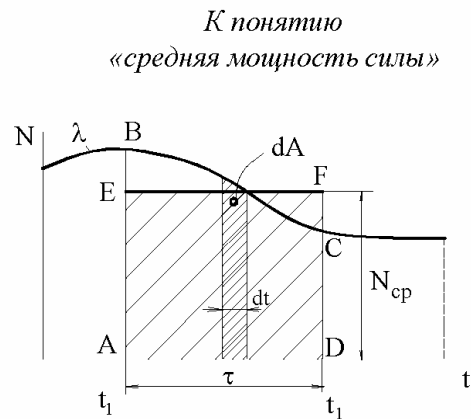


Рисунок 30.2

$$30.6a \quad \left| \begin{array}{l} N = \sum_{i=1}^k N_i \quad - \text{ мгновенная мощность, развиваемая системой сил,} \\ \text{действующих на принятую к рассмотрению механическую систему.} \end{array} \right.$$

$$30.6б \quad \left| \begin{array}{l} N_{CP} = \sum_{i=1}^k N_{iCP} \quad - \text{ средняя мощность, развиваемая системой сил,} \\ \text{действующих на принятую к рассмотрению механическую систему.} \end{array} \right.$$

Из введенных понятий с очевидностью следует, что суммарная элементарная работа и суммарная мощность связаны между собою той же зависимостью 30.3, которой связаны элементарная работа и мощность отдельно взятой силы.

30.2. Примеры вычисления работ сил для часто встречающихся случаев

30.2.1. Работа силы тяжести на конечном перемещении точки её приложения

Пусть материальная точка M перемещается из положения $M_1(x_1, y_1, z_1)$ в положение $M_2(x_2, y_2, z_2)$ по произвольной траектории γ - см. рис.3.

$$\begin{aligned} dA &= X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = \\ &= 0 \cdot dx + 0 \cdot dy - G \cdot dz. \end{aligned}$$

$$A_{1-2} = \int_{(1)}^{(2)} dA = - \int_{(z_1)}^{(z_2)} G \cdot dz = G \cdot (z_2 - z_1).$$

Принято называть: z_1 - геодезическая высота начального положения точки; z_2 - геодезическая высота конечного положения точки; $h = z_1 - z_2$ - разность геодезических высот. Таким образом:

$$30.7 \quad \left| \begin{array}{l} A_{1-2} = G \cdot h \quad - \text{ работа, совершаемая силой тяжести, не зависит от} \\ \text{формы траектории точки её приложения и равна произведению} \\ \text{модуля силы тяжести на разность геодезических высот начального} \\ \text{и конечного положений этой точки.} \end{array} \right.$$

30.2.2. Работа упругой силы на конечном перемещении точки её приложения

На рис.30.4: M - тело, к которому приложена упругая сила \vec{P} ; O - положение тела, соответствующее недеформированному состоянию пружины;

К выводу формулы для вычисления работы силы тяжести

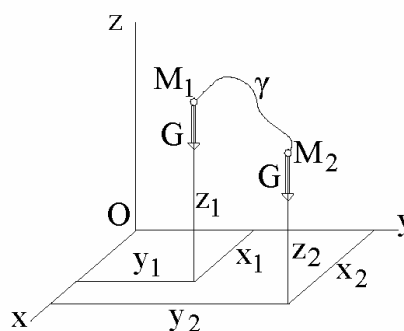


Рисунок 30.3

x - координата, определяющая некоторое текущее положение тела M .

В соответствии с законом Гука $P = c \cdot x$, где c - жёсткость пружины, x - величина её деформации. Изображённый на рис.30.4 треугольник называют эпюрой упругой силы.

Работу упругой силы при перемещении тела из некоторого деформированного состояния, определяемого координатой x , в недеформированное (A_{x-o}), называют полной работой упругой силы.

$$A_{x-o} = \int_{(x)}^{(o)} dA = - \int_{(x)}^{(o)} X \cdot dx = - \int_{(x)}^{(o)} (c \cdot x) \cdot dx = \frac{c \cdot x^2}{2}$$

Итак,

30.8	полная работа упругой силы (при переведении упругого элемента в недеформированное его состояние) определяется формулой
	$A_{x-o} = \frac{c \cdot x^2}{2}.$

Неполная работа упругой силы (допустимо сокращение: «работа упругой силы») – это работа, совершаемая упругим элементом при переходе из одного своего деформированного состояния в другое. Ясно, что:

30.9	работа упругой силы равна площади той части треугольной своей эпюры, которая расположена между координатами, отличающимися одно деформированное состояние упругого элемента от другого.
------	---

30.2.3. Работа гравитационной силы

На рис.30.5: M - притягивающий центр (Земля, Солнце и т.д.); m - притягиваемая масса; \vec{F} - сила притяжения, определяется по закону Ньютона:

$$\vec{F} = - \frac{\gamma \cdot M \cdot m}{x^2} \cdot \vec{i}. \quad \text{Ось } x \text{ начинается в } M, \quad h -$$

некоторое конечное значение координаты x .

Полная работа гравитационной силы ($A_{\infty-h}$) – это работа, которую она совершит при перемещении притягиваемой массы из бесконечности в положение, определяемое расстоянием h . Выведем формулу для её

К выводу формулы для вычисления работы упругой силы

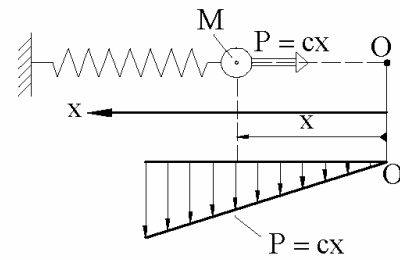


Рисунок 30.4

К выводу формулы для вычисления работы гравитационной силы

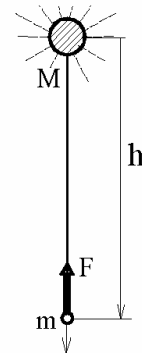


Рисунок 30.5

вычисления:

$$A_{\infty-h} = \int_{(\infty)}^{(h)} \vec{F} \cdot d(x \cdot \vec{i}) = - \int_{(\infty)}^{(h)} F \cdot dx = - \int_{(\infty)}^{(h)} \frac{\gamma \cdot M \cdot m}{x^2} \cdot dx = \frac{\gamma \cdot M \cdot m}{x} \Big|_{\infty}^h = \frac{\gamma \cdot M \cdot m}{h}.$$

Итак,

30.10 | полная работа гравитационной силы (совершаемая ею при перемещении притягиваемой массы из бесконечности в положение, определяемое расстоянием h от притягивающего центра) определяется формулой $A_{\infty-h} = \frac{\gamma \cdot M \cdot m}{h}$.

Самостоятельно получите результат:

30.11 | работа гравитационной силы, затрачиваемая на перемещение притягиваемой массы из положения h_1 в h_2 определяется формулой $A_{1-2}^{\Gamma} = \gamma \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right)$.

30.3. Формулы для вычислений суммарных мощностей сил, действующих на твёрдые тела

30.3.1. Случай поступательного движения

Мощности, развиваемые отдельными силами:

$$N_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{v}_1, N_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{v}_2, \dots, N_i = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i, \dots, N_k = \vec{F}_k \cdot \vec{v}_k.$$

Т.к. тело движется поступательно, то

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \dots = \vec{v}_i = \dots = \vec{v}_k = \text{просто } \vec{v}.$$

Поэтому суммарная мощность:

$$N = \sum N_i = \sum (\vec{F}_i \cdot \vec{v}_i) = \left(\sum \vec{F}_i \right) \cdot \vec{v} = \vec{R}_{\Gamma} \cdot \vec{v}, \quad \text{т.е.}:$$

30.12 | суммарная мощность сил, приложенных к поступательно движущемуся телу, определяется как мощность отдельной силы, равной главному вектору действующих на это тело сил и точка приложения которой перемещается со скоростью тела.

8.3.2. Случай сферического движения

$$N = \sum N_i = \sum \left[\vec{F}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \right] = \vec{\omega} \cdot \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_{\Gamma O}^E, \quad \text{т.е.}:$$

30.13 | суммарная мощность сил, приложенных к сферически движущемуся телу, определяется как мощность отдельной, приложенной к этому телу, пары сил, момент которой равен главному моменту действующих на тело внешних сил.

30.3.3. Случай вращательного движения

Вращательное движение – частный случай сферического.

Пусть осью вращения является z . Тогда

$$N = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_{GO}^E = (\omega_z \cdot \vec{k}) \cdot (M_x^E \cdot \vec{i} + M_y^E \cdot \vec{j} + M_z^E \cdot \vec{k}) = M_z^E \cdot \omega_z, \quad \text{т.е.}:$$

$$30.13 \quad \left| \begin{array}{l} \text{суммарная мощность сил, приложенных к вращательно} \\ \text{движущемуся телу, определяется как произведение главного} \\ \text{момента внешних сил относительно оси вращения на проекцию} \\ \text{угловой скорости на ту же ось.} \end{array} \right.$$

При решении конкретных задач часто приходится иметь дело с постоянными моментами сил и, при этом, определять их работу на конечных перемещениях. Применительно к такому случаю имеем:

$$\frac{dA}{dt} = N = M_z^E \cdot \omega = M_z^E \cdot \frac{d\varphi}{dt} \quad \mapsto \quad dA = M_z^E \cdot d\varphi \quad \mapsto$$

$$\text{(после интегрирования)} \quad A_{1-2} = M_z^E \cdot (\varphi_2 - \varphi_1), \quad \text{т.е.}:$$

$$30.14 \quad \left| \begin{array}{l} \text{суммарная работа сил на конечном повороте тела определяется как} \\ \text{произведение главного момента внешних сил относительно оси} \\ \text{вращения на произошедшее приращение угловой координаты.} \end{array} \right.$$

30.3.4. Случай плоского движения

$$\begin{aligned} N &= \sum N_i = \sum (\vec{F}_i \cdot \vec{v}_i) = \sum [\vec{F}_i \cdot (\vec{v}_c + \vec{v}_{ic})] = (\sum \vec{F}_i) \cdot \vec{v}_c + \sum [\vec{F}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{ic})] = \\ &= \vec{R}_G^E \cdot \vec{v}_c + \vec{\omega} \cdot \sum (\vec{r}_{ic} \times \vec{F}_i) = N_{\Pi} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_C^E = N_{\Pi} + N_{BP}. \end{aligned}$$

Итак:

$$30.15 \quad \left| \begin{array}{l} \text{суммарная мощность, развиваемая силами, приложенными к плоско} \\ \text{движущемуся телу, определяется суммой двух мощностей:} \\ \text{первая } (N_{\Pi}) \text{ вычисляется по формуле поступательного движения} \\ \text{тела (в предположении, что точки приложения всех сил имеют} \\ \text{одинаковые скорости, равные скорости центра тяжести тела);} \\ \text{вторая составляющая } (N_{BP}) \text{ вычисляется по формуле враща-} \\ \text{тельного движения (во вращательном движении тела относительно} \\ \text{центромассовой системы отсчёта).} \end{array} \right.$$

30.4. О независимости работ и мощностей внутренних сил от выбора систем отсчёта

Внутренние силы встречаются лишь двойками (попарно) и являются противоположными. Одна из таких двоек внутренних сил изображена на рис.30.6,

где 1 и 2 - пара взаимодействующих частиц любой, принятой к рассмотрению, механической системы; \vec{P} - сила, с которой точка 2 действует на точку 1; \vec{F} - сила, с которой точка 1 действует на точку 2; \vec{r}_1 и \vec{r}_2 - радиус-векторы точек в произвольной системе отсчёта xuz ; \vec{q} - вектор, начинающийся в первой точке и заканчивающийся во второй, переменный (в системе xuz) как по модулю, так и по направлению.

Имеем ввиду, что в соответствии с законом о равенстве действия и противодействия

$$\vec{F} = -\vec{P}.$$

Суммарная элементарная работа рассматриваемой двойки внутренних сил:

$$dA = dA_1 + dA_2 = \vec{P} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 = -\vec{F} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F} \cdot d(\vec{r}_1 + \vec{q}) = \vec{F} \cdot d\vec{q} = F \cdot dq.$$

То же выражение будет получено и при любой другой системе отсчёта (как угодно перемещающейся относительно xuz).

Очевиден аналогичный результат и для суммарной мощности рассматриваемой спарки внутренних сил.

Итак:

30.16 | У твёрдого тела суммарные работы и мощности внутренних сил равны нулям.

30.17 | 1. В механических системах, состоящих из перемещающихся друг относительно друга тел, суммарные работы и мощности внутренних сил не равны нулям, но они не зависят от выбора систем отсчёта;
2. В рамках рассмотрения одной и той же механической системы при вычислении работ и мощностей одних внутренних сил можно брать различные системы отсчёта;

3. С целью упрощения вычислений суммарной работы двойки противоположных сил удобно брать систему отсчёта, в которой точка приложения одной из её составляющих оказывалась бы неподвижной.

Практически нет ни одной машины, в которой бы отсутствовали подвижные соединения (зубчатые, вращательные, поступательные пары; подшипники качения, скольжения; и т.д.). В них всегда присутствуют силы трения.

О независимости работ и мощностей внутренних сил от выбора систем отсчёта

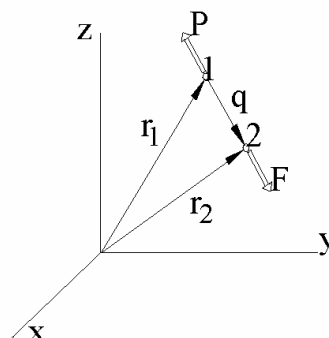


Рисунок 30.6

При вычислении работ и мощностей, идущих на преодоление сил трения в подвижных соединениях, удобно одно из сопряжённых тел принимать за неподвижное. Тогда эти величины будут определяться лишь через относительные скорости (для мощностей) и относительные перемещения (для работ).

Во многих механических системах содержатся упругие элементы (цилиндрические пружины, пластинчатообразные рессоры и т.п.). Каким бы не было абсолютное движение этих элементов, вычислять мощности и работы внутренних их сил также можно по относительным скоростям и перемещениям.

30.5. Понятие о кинетической энергии. Формулы для её вычисления в случаях поступательно и вращательно движущихся тел

Пусть произвольная механическая система состоит из n частиц; m_v - масса, v_v - скорость v -той из них. Тогда:

30.18

величину	$T_v = \frac{m_v \cdot v_v^2}{2}$	называют
кинетической энергией v -той частицы, а		
	$T = \sum_{v=1}^n T_v$ -	
кинетической энергией рассматриваемой механической системы.		

По причине одинаковости скоростей всех точек

30.19

кинетическая энергия поступательно движущегося тела определяется формулой	
	$T_{\Pi} = \frac{m \cdot v^2}{2},$ где
	m - его масса, а v - модуль скорости.

Для вращательно движущегося тела:

$$T = \sum \frac{m_v \cdot v_v^2}{2} = \sum \frac{m_v \cdot (\omega \cdot h_v)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \cdot \sum (m_v \cdot h_v^2) = \frac{I \cdot \omega^2}{2}, \quad \text{т.е.}$$

30.20

кинетическая энергия вращательно движущегося тела определяется формулой	
	$T_{BP} = \frac{I \cdot \omega^2}{2},$ где
	I - момент инерции тела относительно оси вращения и ω - его угловая скорость.

30.6*. Формула для вычисления кинетической энергии сферически движущегося тела

Пусть O - центр сферического движения, а $Oxyz$ - связанная с телом система координат; причём, её оси являются главными осями инерции тела.

В общей формуле -

$$a \quad \left| \quad T = 0,5 \cdot \sum (m_v \cdot v_v^2) - \right.$$

выразим v_v через угловую скорость и геометрические характеристики тела:

Т.к. $\vec{v}_v = \vec{\omega} \times \vec{r}_v$, то по способу перестановки индексов имеем:

$$\vec{v}_v = (\omega_y \cdot z_v - \omega_z \cdot y_v) \cdot \vec{i} + (\omega_z \cdot x_v - \omega_x \cdot z_v) \cdot \vec{j} + (\omega_x \cdot y_v - \omega_y \cdot x_v) \cdot \vec{k}.$$

Но $v_v^2 = \vec{v}_v \cdot \vec{v}_v$, т.е. вектор \vec{v}_v скалярно перемножается сам на себя. Учитываем, что скалярные произведения ортогональных векторов равны нулю и получаем:

$$v_v^2 = (\omega_y \cdot z_v - \omega_z \cdot y_v)^2 + (\omega_z \cdot x_v - \omega_x \cdot z_v)^2 + (\omega_x \cdot y_v - \omega_y \cdot x_v)^2.$$

При возведениях в квадраты средние члены будут содержать попарные произведения различных координат. При подстановке в формулу (а) они дадут центробежные моменты инерции. Принятые оси главные и, поэтому, все центробежные моменты инерции тела равны нулям. Таким образом, от v_v^2 следует сохранить лишь сумму квадратов:

$$б \quad \left| \quad \omega_x^2 \cdot (z_v^2 + y_v^2) + \omega_y^2 \cdot (z_v^2 + x_v^2) + \omega_z^2 \cdot (x_v^2 + y_v^2). \right.$$

После подстановки в формулу (а) выражения (б), получаем:

$$T = 0,5 \cdot \sum \left\{ m_v \cdot \left[\omega_x^2 \cdot (z_v^2 + y_v^2) + \omega_y^2 \cdot (z_v^2 + x_v^2) + \omega_z^2 \cdot (x_v^2 + y_v^2) \right] \right\}.$$

Выражения в круглых скобках приводят к появлению осевых моментов инерции - I_x, I_y, I_z . Таким образом и получается

$$30.21 \quad \left| \begin{array}{l} \text{формула для вычисления кинетической энергии сферически} \\ \text{движущегося тела:} \\ T_{C\Phi} = 0,5 \cdot (I_x \cdot \omega_x^2 + I_y \cdot \omega_y^2 + I_z \cdot \omega_z^2). \end{array} \right.$$

30.7*. Формулы для вычисления кинетической энергии свободно и плоско движущихся тел

Пользуясь законом сложения скорость v -той частицы представляем суммой двух составляющих -

$$a \quad | \quad \vec{v}_v = \vec{v}_c + \vec{v}_{vc}, \quad \text{где}$$

\vec{v}_c - скорость центрмассовой системы отсчёта (относительно инерциальной);

\vec{v}_{vc} - скорость v -той частицы относительно центрмассовой системы.

$$б \quad | \quad v_v^2 = \vec{v}_v \cdot \vec{v}_v = v_c^2 + v_{vc}^2 + 2 \cdot \vec{v}_c \cdot \vec{v}_{vc}$$

Из предыдущих двух подразделов видно, что первые две составляющие (v_c^2 , v_{vc}^2) выражения (б) при подстановке v_v^2 в общую формулу для вычисления кинетической энергии дадут поступательную и сферическую составляющие полной кинетической энергии -

$$T_{\Pi} = \frac{m \cdot v_c^2}{2}, \quad T_{C\Phi} = 0,5 \cdot (I_x \cdot \omega_x^2 + I_y \cdot \omega_y^2 + I_z \cdot \omega_z^2), \quad \text{где}$$

m - масса тела; I_x, I_y, I_z - моменты инерции тела относительно его главных центральных осей инерции; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ - проекции угловой скорости тела в сферическом его движении относительно центрмассовой системы отсчёта.

Выясним, что даст третья составляющая выражения (б) при подстановке v_v^2 в общую формулу для вычисления кинетической энергии. -

$$\begin{aligned} \sum [m_v \cdot (\vec{v}_c \cdot \vec{v}_{vc})] &= \vec{v}_c \cdot \sum (m_v \cdot \vec{v}_{vc}) = \text{на основании понятия центра масс} = \\ &= \vec{v}_c \cdot (m \cdot \vec{v}_{cc}) = \vec{v}_c \cdot (m \cdot 0) = 0. \end{aligned} \quad \text{Итак,}$$

30.22 | кинетическую энергию свободно движущегося тела можно вычислять как сумму двух слагаемых – кинетической энергии поступательного движения (вычисляемую как для материальной точки, движущейся со скоростью центра масс тела и обладающей его массой) и кинетической энергии тела в его сферическом движении относительно центрмассовой системы отсчёта:

$$T_{CB} = T_{\Pi} + T_{C\Phi}.$$

Самостоятельно предлагаем получить результат:

30.23 | кинетическую энергию плоско движущегося тела можно вычислять как сумму двух слагаемых – кинетической энергии поступательного его движения со скоростью центра масс и кинетической энергии во вращательном движении этого тела относительно центрмассовой системы отсчёта:

$$T_{\Pi\Lambda} = T_{\Pi} + T_{BP}.$$

30.8. Закон об изменении кинетической энергии

Является основой 32 - 34 разделов данного «Курса», широко используется для получения рабочих формул в специальных инженерно-механических дисциплинах.

Принимаем к рассмотрению произвольную механическую систему; число её частиц - k . m_v , \vec{v}_v , \vec{a}_v - масса, скорость и ускорение v -той из них; \vec{R}_v^E и \vec{R}_v^I - равнодействующие внешних и внутренних, приложенных к ней сил. Развиваемые равнодействующими \vec{R}_v^E и \vec{R}_v^I мощности: N_v^E , N_v^I . Неподвижная система отсчёта инерциальная.

Записываем основное уравнение динамики для v -той частицы:

$$m_v \cdot \vec{a}_v = \vec{R}_v^E + \vec{R}_v^I.$$

Скалярно умножаем записанное уравнение на \vec{v}_v . Получаем:

$$a \quad \left| \quad (m_v \cdot \vec{a}_v) \cdot \vec{v}_v = m_v \cdot \frac{d\vec{v}_v}{dt} \cdot \vec{v}_v = \frac{m_v}{2} \cdot \frac{d(\vec{v}_v^2)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_v \cdot v_v^2}{2} \right) = \frac{dT_v}{dt}, \right.$$

$$б \quad \left| \quad \vec{R}_v^E \cdot \vec{v}_v = N_v^E; \quad \vec{R}_v^I \cdot \vec{v}_v = N_v^I \right.$$

и, поэтому:

$$в \quad \left| \quad \frac{dT_v}{dt} = N_v^E + N_v^I \quad (v = 1, 2, \dots, k). \right.$$

(в) - это k мысленно представляемых записанными в столбец равенств - второе под первым, третье под вторым и т.д. (с индексами 1, 2, 3 и т.д. k).

Почленно складываем левые и правые части равенств (в):

$$\frac{d}{dt}(\sum T_v) = \sum N_v^E + \sum N_v^I. \quad \text{Итак, получен}$$

$$30.24 \quad \left| \begin{array}{l} \text{закон об изменении кинетической энергии через мощности:} \\ \dot{T} = N^{E+I} - \\ \text{производная по времени от кинетической энергии для любой} \\ \text{механической системы равна сумме мощностей, развиваемых} \\ \text{всеми внешними и внутренними силами, действующими на точки} \\ \text{этой механической системы.} \end{array} \right.$$

Распространены и две другие записи закона об изменении кинетической энергии.

После умножения математического выражения 30.24 на dt , получаем

$$30.25 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{закон об изменении кинетической энергии в дифференциальной} \\ \text{форме:} \quad \quad \quad dT = dA^{E+I} \\ \text{элементарное изменение кинетической энергии для любой} \\ \text{механической системы равно суммарной элементарной работе всех} \\ \text{внешних и внутренних сил, действующих на точки этой} \\ \text{механической системы.} \end{array} \right.$$

Пусть t_1 и t_2 - два, отличающиеся на конечную величину, момента времени. Интегрируя выражение 30.25 - $\int_{(t_1)}^{(t_2)} dT = \int_{(t_1)}^{(t_2)} dA^{E+I}$ - получаем

$$30.26 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{закон об изменении кинетической энергии в конечной} \\ \text{(интегральной) форме:} \quad \quad \quad T_2 - T_1 = A_{1-2}^{E+I} - \\ \text{для любой механической системы изменение кинетической энергии} \\ \text{за конечный промежуток времени } (t_2 - t_1) \text{ равно суммарной} \\ \text{работе за тот же промежуток времени всех внешних и внутренних} \\ \text{сил, действующих на эту механическую систему.} \end{array} \right.$$

Замечания: 1. В отличие от ранее рассмотренных законов динамики, здесь обязателен учёт не только внешних, но и внутренних сил;

2. Если механическая система состоит из абсолютно твёрдых тел и нерастяжимых нитей, а трением в трущихся друг о друга телах пренебрегается (по причине их малости во многих конкретно решаемых задачах), то внутренние силы можно не учитывать.

Системы, в которых суммарные мощности (и работы) внутренних сил равны нулям, называют механическими системами с идеальными связями.

Для механических систем с идеальными связями математические выражения 30.24-26 принимают вид: $\dot{T} = N^E$; $dT = dA^E$; $T_2 - T_1 = A_{1-2}^E$.

Корректное использование закона об изменении кинетической энергии даёт высоконадёжные предсказания, что проверено тремя столетиями – понятие «работа силы» введено в 1615 году французом Саломоном де Ко (1576-1630); величина $m \cdot v^2$ встречается у Х.Гюйгенса (1629-1695), но не имеет названия; 50 лет спустя Лейбниц назвал её живой силой; кинетической энергией (половинкой живой силы), в сочетании с понятием «работа», оперировал Г.Кориолис (1792-1843).

30.9. Примеры на применение закона об изменении кинетической энергии

ПРИМЕР 30.1.- Скорость падения диска с разматыванием навёрнутой на него нити

Дано. – На рис.30.7 изображён сплошной однородный диск с намотанной на него нитью, свободный конец которой прикреплен к потолку. G - вес диска, r - радиус. Диск начинает падать из положения 1.

Требуется. - Определить скорость центра C во втором его положении (определяемом расстоянием h).

Решение.- Принимаем к рассмотрению диск с прилегающим к его жолобу вертикальным участком нити. \vec{S} - сила, действующая на принятую к рассмотрению систему со стороны отброшенной части нити.

Для решения задачи используем закон изменения кинетической энергии в конечном виде - $T_2 - T_1 = A_{1-2}^{E+I}$.

Т.к. в начальном положении скорости всех частиц равны нулю, то $T_1 = 0$.

Теперь вычислим кинетическую энергию диска во втором его положении.

Диск совершает плоское движение. Следовательно: $T_2 = T_{2\Pi} + T_{2BP}$.

Поступательная составляющая кинетической энергии: $T_{2\Pi} = 0,5 \cdot m \cdot v_c^2$.

Для определения вращательной составляющей кинетической энергии необходимо знать угловую скорость диска (ω) в центромассовой системе отсчёта. P - мгновенный центр скоростей; поэтому $v_c = r \cdot \omega \quad \mapsto \quad \omega = \frac{v_c}{r}$.

Имеем ввиду, что момент инерции сплошного однородного диска определяется формулой $I = 0,5 \cdot m \cdot r^2$.

$$\text{Итак, } T_{2BP} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{m \cdot r^2}{2} \right) \cdot \left(\frac{v_c}{r} \right)^2 = \frac{m \cdot v_c^2}{4}; \quad T_2 = \frac{3}{4} \cdot (m \cdot v_c^2).$$

Работа внутренних сил равна нулю. $A_{1-2}^E = A_{1-2}^S + A_{1-2}^G = 0 + h \cdot G$.

$$\text{Итак: } v_c = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot g \cdot h}.$$

О скорости падения диска с разматыванием нити

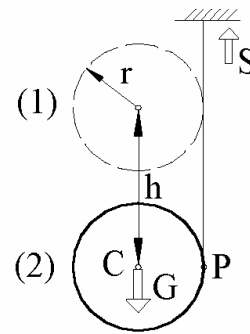


Рисунок 30.7

ПРИМЕР 30.2.- *Определение коэффициента трения скольжения по пройденному пути*

Дано. – Тело в положении «1» имеет скорость v (см. рис.30.8). На него действуют сила тяжести \vec{G} , нормальная реакция \vec{N} и сила трения скольжения \vec{F} . Пройденный телом до остановки (на рис.8 положение «2») путь равен s .

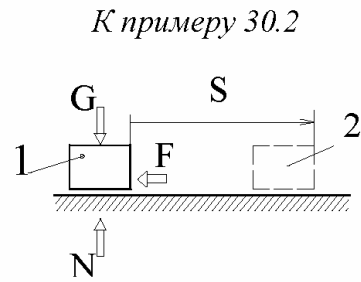


Рисунок 30.8

Требуется. - Определить коэффициент трения скольжения f .

Решение.- Кинетическая энергия тела: в первом его положении -

$$T_1 = 0,5 \cdot m \cdot v^2;$$

во втором - $T_2 = 0$.

$$A_{1-2}^E = A_{1-2}^G + A_{1-2}^N + A_{1-2}^F = 0 + 0 - s \cdot F = -s \cdot (f \cdot N) = -s \cdot (f \cdot G).$$

Таким образом, получаем: $0 - 0,5 \cdot m \cdot v^2 = -s \cdot (f \cdot G) \quad \mapsto \quad f = \frac{v^2}{2 \cdot g \cdot s}$.

ПРИМЕР 30.3.- *Забивка сваи*

Дано. – Груз A (рис.30.9), весом $G = 5000$ Н, падает с высоты $H = 1$ м. Он, ударя по свае B , внедряет её в грунт на глубину $h = 2$ см.

Требуется. - Определить среднюю силу сопротивления грунта (F) внедрению в него сваи.

Решение.- Кинетическая энергия системы «груз-свая»: в начале удара - $T = 0 = A_{0-H}^G = G \cdot H$; в конце удара - 0 .

Работа средней силы сопротивления грунта:

$$A^F = -F \cdot h.$$

Итак,

$$0 - G \cdot H = -F \cdot h \quad \mapsto \quad F = \frac{G \cdot H}{h} = \frac{5000 \cdot 1}{0,02} = 250 \text{ кН}.$$

Что вы можете сказать относительно $A_{H-(H+h)}^G$ и заметили ли, что при решении задачи закон об изменении кинетической энергии применён 2 раза?

К забивке сваи

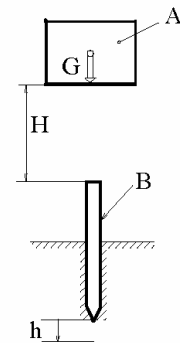


Рисунок 30.9

31. Метод кинетостатики

31.1. Введение в раздел

Применение рассматриваемого опорного факта теоретической механики даёт возможность решать методами статики многие задачи динамики. Особенно удобно использовать этот метод для учёта динамических нагрузок при силовых расчётах инженерных сооружений и конструкций.

Формирование метода связано с именами Я.Бернулли (1654-1705), Я.Германа (1678-1733), Л.Эйлера (1707-1783) и других отечественных учёных. Иногда, поэтому, его называют петербургским принципом. Но наиболее весом вклад в развитие и внедрение в жизнь этого метода у Жана Даламбера (1717-1783). По этой причине для рассматриваемого опорного факта широко распространено иное название - *принцип Даламбера*.

31.2. Понятия, условия и уравнения динамического равновесия

Располагаясь в инерциальной системе отсчёта принимаем к рассмотрению произвольную механическую систему. Представляем её состоящей из частиц, $m_\nu, \vec{v}_\nu, \vec{a}_\nu, \vec{r}_\nu$ - масса, скорость, ускорение и радиус-вектор ν -той из них; \vec{R}_ν^E и \vec{R}_ν^I - равнодействующие внешних и внутренних приложенных сил. Развиваемые равнодействующими \vec{R}_ν^E и \vec{R}_ν^I мощности: N_ν^E, N_ν^I .

Записываем основное уравнение динамики для ν -той частицы:

$$\begin{array}{l|l}
 a & m_\nu \cdot \vec{a}_\nu = \vec{R}_\nu^E + \vec{R}_\nu^I. \\
 31.1 & \left. \begin{array}{l} \text{Вектор} \\ \text{называют силой инерции } \nu\text{-той частицы.} \end{array} \right\} \vec{\Phi}_\nu = -m_\nu \cdot \vec{a}_\nu
 \end{array}$$

Замечание.- Термин «сила инерции» уже встречался – в разделе 4. Но там речь шла о переносной ($\vec{\Phi}^e$) и кориолисовой ($\vec{\Phi}^k$) силах инерции, которые принято называть эйлеровыми силами инерции. Даламберова сила инерции ($\vec{\Phi}_\nu$) - это другое понятие; это понятие, связанное с ускорением частицы относительно инерциальной системы отсчёта. Если даламберову силу инерции связать с ускорениями относительно неинерциальной системы, то она окажется суммой трёх составляющих – двух эйлеровых и относительной ($\vec{\Phi}^r = -m \cdot \vec{a}^r$) сил инерции, т.е.:

$$\vec{\Phi}_\nu = \vec{\Phi}_\nu^e + \vec{\Phi}_\nu^k + \vec{\Phi}_\nu^r.$$

Рекомендация 1.- Среди учёных иногда возникают споры о физическом смысле сил инерции. Эти полемики требуют глубокого знания науки о понятиях, философии и физики, что обучающимися ещё не накоплено. Во избежание мало-

продуктивных затрат учебного времени советуем воздерживаться от вхождения в подобные дискуссии. Рекомендуем до окончания ВУЗа ограничиться лишь таким пониманием:

30.2 | сила инерции – это математическое понятие; это вектор, имеющий размерность силы, по модулю равный произведению массы на ускорение, направленный противоположно ему, который можно включать в систему действующих на частицу сил и в процессе математических преобразований обращаться с ним, как с обычной силой.

С учётом введенного понятия (а) принимает вид:

$$б \quad \left| \quad \vec{R}_v^E + \vec{R}_v^I + \vec{\Phi}_v = 0 \quad (v = 1, 2, 3, \dots, k) \right.$$

(б) мысленно представляется как столбец записанных друг под другом равенств – второе под первым, третье под вторым и т.д. (с индексами 1, 2, 3, ...).

Почленно складывая эти равенства (внешние силы с внешними, внутренние с внутренними, силы инерции с силами инерции), получаем:

$$в \quad \left| \quad \sum \vec{R}_v^E + \sum \vec{R}_v^I + \sum \vec{\Phi}_v = 0 \right.$$

Возвращаемся к (б). Каждую строку умножаем векторно слева на соответствующие радиус-векторы \vec{r}_v ($v = 1, 2, 3, \dots, k$), а затем расположенные по столбцам однотипные члены складываем между собою:

$$з \quad \left| \quad \begin{aligned} \vec{r}_v \times \vec{R}_v^E + \vec{r}_v \times \vec{R}_v^I + \vec{r}_v \times \vec{\Phi}_v &= 0 \quad (v = 1, 2, 3, \dots, k) \\ \vec{m}_{v_o}^E + \vec{m}_{v_o}^I + \vec{m}_{v_o}^\Phi &= 0 \quad (v = 1, 2, 3, \dots, k) \end{aligned} \right.$$

Почленно складывая столбец (з), получаем:

$$\sum \vec{m}_{v_o}^E + \sum \vec{m}_{v_o}^I + \sum \vec{m}_{v_o}^\Phi = 0.$$

Из статики известно, что главные вектор и момент внутренних сил равны нулю. Получили

30.3 | условия динамического равновесия -

$$\vec{R}_\Gamma^{E+\Phi} = 0, \quad \vec{M}_{\Gamma O}^{E+\Phi} = 0$$
 -
 главные вектор и момент от внешних и даламберовых сил инерции равны нулю для любой механической системы.

Проектируя условия динамического равновесия на оси координат, получаем

$$31.4 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{уравнения динамического равновесия} - \\ \sum X^E + \sum X^\Phi = 0, \quad \sum Y^E + \sum Y^\Phi = 0, \quad \sum Z^E + \sum Z^\Phi = 0; \\ \sum m_x^E + \sum m_x^\Phi = 0, \quad \sum m_y^E + \sum m_y^\Phi = 0, \quad \sum m_z^E + \sum m_z^\Phi = 0 - \end{array} \right.$$

Для учёта сил инерции можно использовать формулы:

$$31.5 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_I^\Phi = -m \cdot \vec{a}_c, \quad \vec{M}_{IO}^\Phi = -\dot{\vec{L}}_o. \end{array} \right.$$

(они прямо следуют из законов о движении центра масс и об изменении кинетического момента).

31.3. Связь между главными моментами сил инерции относительно начал инерциальной и центромассовой систем отсчёта -

В предыдущем подразделе введено понятие главного момента сил инерции относительно центра инерциальной системы отсчёта. Преобразуем его. -

$$\begin{aligned} \vec{M}_{IO}^\Phi &= -\sum [\vec{r}_{vo} \times (m_v \cdot \vec{a}_{vo})] = -\sum [(\vec{r}_{co} + \vec{r}_{vc}) \times (m_v \cdot \vec{a}_{vo})] = \\ &= -\vec{r}_{co} \times \sum (m_v \cdot \vec{a}_{vo}) - \sum [\vec{r}_{vc} \times (m_v \cdot \vec{a}_{vo})] = \\ &= \vec{r}_{co} \times (-m \cdot \vec{a}_{co}) - \sum [\vec{r}_{vc} \times m_v \cdot (\vec{a}_{co} + \vec{a}_{vc})] = \\ &= \vec{m}_o(\vec{R}_C^\Phi) - (\sum m_v \cdot \vec{r}_{vc}) \times \vec{a}_{co} - \sum [\vec{r}_{vc} \times (m_v \cdot \vec{a}_{vc})] = \\ &= \vec{m}_o(\vec{R}_C^\Phi) - (m \cdot \vec{r}_{cc}) \times \vec{a}_{co} + \vec{M}_{IC}^\Phi = \vec{m}_o(\vec{R}_C^\Phi) - (m \cdot 0) \times \vec{a}_{co} + \vec{M}_{IC}^\Phi. \end{aligned}$$

Итак:

$$31.6 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{M}_{IO}^\Phi = \vec{M}_{IC}^\Phi + \vec{m}_o(\vec{R}_C^\Phi) - \\ \text{главный момент сил инерции относительно центра } O \text{ инерциальной} \\ \text{системы отсчёта можно вычислять как сумму, составленную из} \\ \text{главного момента сил инерции относительно начала центромассовой} \\ \text{системы отсчёта и момента относительно центра } O \text{ от силы,} \\ \text{приложенной к центру масс и равной главному вектору сил инерции.} \end{array} \right.$$

Рекомендация 2.-

$$31.7 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{При рассмотрении конкретных механических систем силы инерции} \\ \text{удобно группировать по отдельным телам.} \end{array} \right.$$

31.4. Простейшие случаи учёта сил инерции

Поступательное движение тела

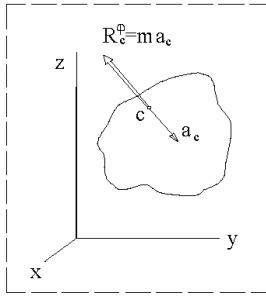


Рисунок 31.1

Вращательное движение фигуры

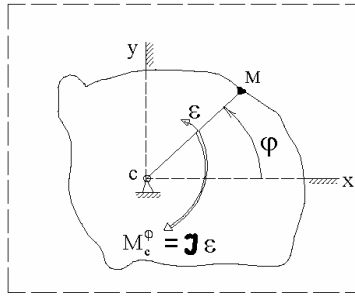


Рисунок 31.2

Плоское движение

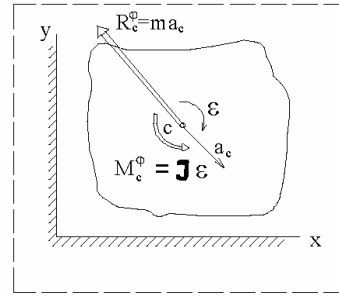


Рисунок 31.3

Для поступательно движущегося тела $\vec{M}_{\Gamma c}^{\Phi} = 0 \mapsto \vec{M}_{\Gamma O}^{\Phi} = \vec{m}(\vec{R}_c^{\Phi})$ и ясно, что \vec{R}_c^{Φ} является равнодействующей сил инерции.

К рис.31.3: для любой частицы тела $z = 0 \mapsto I_{yz} = I_{zx} = 0$ и, поэтому (из 29.6; с учётом того, что применительно к рассматриваемому случаю O - это точка C)

$\vec{M}_{\Gamma C}^{\Phi} = -I_C \cdot \vec{\varepsilon}$ и поэтому $\vec{M}_{\Gamma O}^{\Phi} = -I_C \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{m}_O(\vec{R}_c^{\Phi})$, т.е. силы инерции при приведении их к точке C дают силу $\vec{R}_c^{\Phi} = -m \cdot \vec{a}_c$ и пару с моментом $\vec{M}^{\Phi} = -I_C \cdot \vec{\varepsilon}$.

Ясно, что при вращательном движении вокруг точки C (рис.2) $\vec{R}_c^{\Phi} = 0$, а $\vec{M}_{\Gamma O}^{\Phi} = -I_C \cdot \vec{\varepsilon}$ - силы инерции приводятся к одной паре

31.8 Из приведенных примеров видно: изученные в статике приёмы эквивалентных преобразований обычных сил можно применять и к силам инерции.

Например, силы инерции стержня, наклонно расположенного к оси вращения, приводятся к равнодействующей по закону треугольной эпюры – см.рис.31.4.

Приведение сил инерции стержня, наклонённого к оси вращения

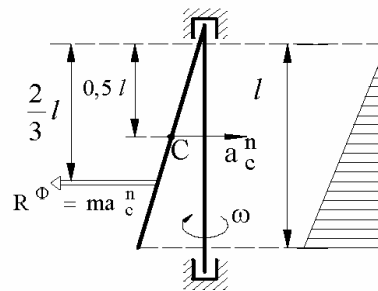


Рисунок 31.4

31.5. Рядовые примеры на применение метода кинестатики

ПРИМЕР 31.1.- Давление автомобиля на мост

Дано. – Автомобиль, весом $G = 50$ кН, движется по выпуклому мосту радиуса $r = 50$ м со скоростью $v = 72$ км/час (см. рис.31.5).

Требуется. - Определить его давление на мост.

Решение.- По закону равенства действия и противодействия давление автомобиля является силой противоположной суммарной нормальной реакции \vec{N} моста на автомобиль.

Поэтому определим \vec{N} , для чего записываем

условие динамического равновесия - $\vec{G} + \vec{N} + \vec{R}^\Phi = 0$ - и проектируем его на вертикальную ось:

$$-G + N + R^\Phi = 0 \quad \mapsto \quad N = G - R^\Phi = G \cdot \left(1 - \frac{v^2}{r \cdot g}\right) = 50 \cdot \left(1 - \frac{20^2}{50 \cdot 9,8}\right) \approx 10 \text{ кН.}$$

Итак, несмотря на то, что автомобиль весит 50 кН, он по причине выпуклости моста и относительно большой скорости движения по нему, производит в 5 раз меньшее давление.

Ответьте на вопрос: «Если мост вогнутый, то с целью минимизации нагрузки на него, что целесообразно делать?»

ПРИМЕР 31.2.- Действующая на лётчика перегрузка

Дано. – Лётчик-испытатель летит по кругу радиуса $r = 15$ км со скоростью $v = 2600$ км/час - см. рис.31.6, где изображены главный вид и вид сверху.

Требуется. - Определить действующую на лётчика перегрузку. Под перегрузкой понимают отношение модуля действующей на пилота реакции \vec{N} кресла к его весу G , т.е. требуется

определить $n = \frac{N}{G}$.

К давлению автомобиля на мост

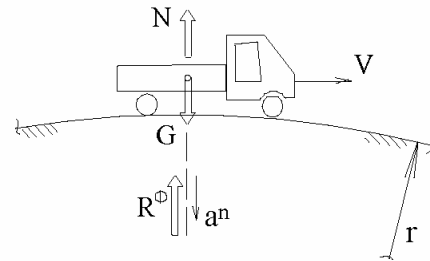


Рисунок 31.5

К действующей на лётчика перегрузке

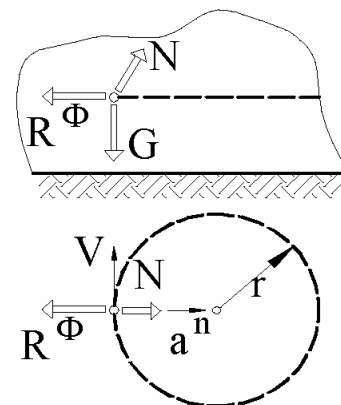


Рисунок 31.6

Решение. - Как и в предыдущем примере - $\vec{G} + \vec{N} + \vec{R}^\Phi = 0$.

Получающийся силовой треугольник прямоугольный. Поэтому:

$$N = \sqrt{(R^\Phi)^2 + G^2} = \sqrt{(m \cdot a^n)^2 + G^2} = \sqrt{\left(\frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{r}\right)^2 + G^2}.$$

Откуда:
$$n = \frac{N}{G} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{g \cdot r}\right)^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{722^2}{9,8 \cdot 15000}\right)^2 + 1} = 3,7.$$

ПРИМЕР 31.3. - Балка с лебёдкой на двух опорах

Дано. - Балка, длиной l , расположена на двух опорах. На ней посередине установлена лебёдка (см. рис.31.7). Веса: балки с лебёдкой - P ; поднимаемого груза - G . Радиус барабана лебёдки - r . При включении двигателя ротор вращается с угловым ускорением ε ; его момент инерции совместно с барабаном лебёдки относительно оси вращения - I .

Требуется. - Составить алгоритм решения задачи по определению реакций на опорах балки с учётом динамических нагрузок.

Решение. - Модуль силы инерции груза:

$$R^\Phi = m \cdot a = \frac{G}{g} \cdot (r \cdot \varepsilon).$$

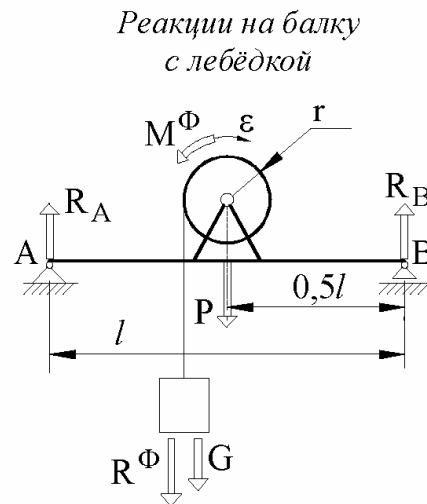


Рисунок 31.7

Момент от сил инерции ротора двигателя и барабана лебёдки: $M^\Phi = I \cdot \varepsilon$.

Теперь, действуя как в статике, составляем уравнения моментов относительно точек A , B и из них определяем реакции на опорах - \vec{R}_B и \vec{R}_A :

$$\sum m_A^E + \sum m_A^\Phi = 0 \quad \mapsto \quad M^\Phi - (G + \Phi) \cdot (0,5l - r) - P \cdot 0,5l + R_B \cdot l = 0 \quad \mapsto$$

$$\mapsto \quad R_B = \dots\dots\dots$$

$$\sum m_B^E + \sum m_B^\Phi = 0 \quad \mapsto \quad -R_A \cdot l + M^\Phi + (G + \Phi) \cdot (0,5l + r) + P \cdot 0,5l = 0 \quad \mapsto$$

$$\mapsto \quad R_A = \dots\dots\dots$$

31.6. Понятие о центре удара

Редко, но встречаются устройства в виде тел с осями вращения, на которые действуют ударные нагрузки. Таким, например, является маятниковый копёр для проведения испытаний материалов на ударную вязкость (с чем будущие инженеры встретятся при изучении курса сопротивления материалов).

Ударные нагрузки могут оказаться источником трясений зданий, оборудования, приборов. Нужно проектировать так, чтобы передаваемые через оси вращения на корпуса и далее на фундаменты, ударные нагрузки в идеале равнялись нулю. И это удаётся делать.

31.9 | Центр удара – это точка вращательно закреплённого тела, при приложении к которой ударная сила не вызывает реакций в опорах.

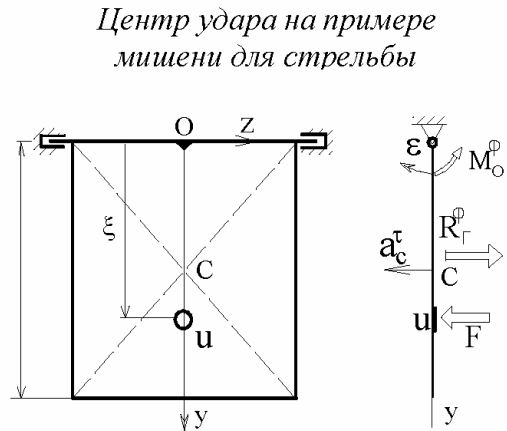


Рисунок 31.8

Рассмотрим это интересное явление на примере мишени, предназначенной для проведения экспериментальных работ со стрелковым оружием – см. рис.8.

Считаем, что она выполнена в форме однородной прямоугольной плиты.

C - центр масс мишени (расположен на пересечении диагоналей). В результате приложения к точке U ударной силы \vec{F} , плита приобретает угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$; \vec{a}_c^τ - соответствующее ему касательное ускорение центра масс. Кроме силы \vec{F} на мишень действуют (при неправильном проектировании) реакции опор (на рисунке не изображены) и распределённые по ней силы инерции.

Т.к. $\omega \approx 0$, то учитываем лишь силы инерции от касательных составляющих ускорений; их интенсивность распределена по треугольному закону - $p^\Phi = k \cdot y$ - и приводятся они, поэтому, к равнодействующей \vec{R}^Φ , расположенной на оси y на расстоянии двух третей ℓ от z .

Условие отсутствия реакций (от ударной силы) в подшипниках определяем через составление и решение двух уравнений динамического равновесия:

$$\sum X^{E+\Phi} = 0 \quad \mapsto \quad F = R^\Phi; \quad \sum m_z^{E+\Phi} = 0 \quad \mapsto \quad F \cdot \xi = R^\Phi \cdot \frac{m \cdot l^2}{3} = 0.$$

$$\text{Откуда } \xi = \frac{2}{3} \cdot \ell$$

31.7. О динамических нагрузках, порождаемых вращательно движущимися твёрдыми телами

31.7.1. Оценки возможных значений динамических нагрузок,

Пусть масса тела $m = 1000$ кг, модуль его угловой скорости - $\omega = 300 \text{ c}^{-1}$. И пусть центр оказался смещённым относительно оси вращения на величину $e = 0,1$ мм.

В этом случае равнодействующая сил инерции оказывается равной:

$$R_c^\Phi = m \cdot a_c^n = m \cdot (e \cdot \omega^2) = 1000 \cdot (0,1 \cdot 10^{-3}) \cdot 300^2 = 9000 \text{ Н} \approx G,$$

где G - вес тела.

Обращаем внимание, что равнодействующая R_c^Φ пропорциональна квадрату угловой скорости, а использованное в примере значение угловой скорости $\omega = 300 \text{ c}^{-1}$ широко распространено в технике – это угловая скорость роторов асинхронных двигателей с одной парой полюсов, скорость вращения роторов мощных паровых турбин; с такой скоростью вращаются маховики двигателей внутреннего сгорания и т.д. Но есть и побольше угловые скорости: известны молочные сепараторы, барабаны которых вращаются со скоростями $600 - 1000 \text{ c}^{-1}$; у многих конструкций газовых турбин роторы вращаются со скоростью 1200 c^{-1} и более. Иногда встречаются скорости вращения до 10000 c^{-1} .

В приведенной числовой иллюстрации непопадание e центра масс на ось вращения принято равным всего $0,1$ мм. Это допустимая погрешность наиболее распространённого в машиностроении мерительного инструмента - штангенциркуля.

Непопадание центра масс на ось вращения – не единственный фактор, порождающий динамические нагрузки; они могут быть и при $e = 0$. Чтобы увидеть это, возвращаемся к результату 31.5 (второй его формуле) данного раздела и 29.6:

$$\vec{M}_{GO}^\Phi = -\dot{\vec{L}}_O;$$

$$\dot{\vec{L}}_O = (I_{yz} \cdot \omega_z^2 - I_{zx} \cdot \varepsilon_z) \cdot \vec{i} - (I_{zx} \cdot \omega_z^2 + I_{yz} \cdot \varepsilon_z) \cdot \vec{j} + (I_z \cdot \varepsilon_z) \cdot \vec{k} = \vec{M}_{GO}^E.$$

Считая вращение равномерным, получаем:

$$\vec{M}_{GO}^\Phi = -\dot{\vec{L}}_O = I_{zx} \cdot \omega^2 \cdot \vec{j} - I_{yz} \cdot \omega^2 \cdot \vec{i} \quad \mapsto \quad M_{GO}^\Phi = \sqrt{I_{zx}^2 + I_{yz}^2} \cdot \omega^2.$$

Для дальнейшей оценки воспользуемся примером 4 из раздела 6, где получены математические выражения для центробежных моментов инерции диска,

нормаль к плоскости которого составляет с осью вращения угол α -

$$I_{zx} = \frac{m \cdot R^2}{8} \cdot \sin(2\alpha); \quad I_{yz} = 0. \quad \text{Применительно к этому случаю получаем:}$$

$$M_{\Gamma O}^{\Phi} = \frac{m \cdot R^2}{8} \cdot \sin(2\alpha) \cdot \omega^2.$$

Пусть $m = 1000$ кг, $R = 0,5$ м, $\omega = 300 \text{ с}^{-1}$, а погрешности изготовления и монтажа привели к угловому непопаданию главной оси инерции диска в его ось вращения величиной $\alpha = 0,5^\circ \approx 0,01$ радиан. В этом случае:

$$M_{\Gamma O}^{\Phi} = \frac{1000 \cdot 0,5^2}{8} \cdot (2 \cdot 0,01) \cdot 300^2 = 5,6 \cdot 10^4 \text{ Нм.}$$

Если расстояние между подшипниками l м, то на них со стороны вала диска будут действовать силы, величиной 56 кН, что примерно в 6 раз больше веса диска.

Но значимость модулей динамических реакций – это лишь одна сторона вопроса. Вторая сторона: динамические реакции неподвижны относительно тела и вместе с ним вращаются.

31.7.2. О нежелательных явлениях, порождаемых динамическими нагрузками и об условиях их предупреждения

Наличие больших динамических нагрузок приводит к большим износам и, поэтому, к существенно меньшим срокам службы машин и механизмов. Увеличенные нагрузки – это и увеличенные потери на трение, что обуславливает нерациональное использование энергоресурсов.

Но не менее важно другое - в проекциях на оси неподвижной системы отсчёта динамические нагрузки приобретают вид: $F = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$,

т.е. они являются причинами появления колебательных процессов, о негативных проявлениях которых речь будет ещё вестись - в разделе 14. Здесь же обращаем внимание лишь на одно: колебательные процессы являются источниками повышенных уровней шума. Пример из жизни: при покупке домашних холодильников опытные люди всегда интересуются «насколько шумно работает в нём компрессор»; причём, фактор «шумит-нешумит» связывают с производителем этих узлов – японский ли, итальянский и т.д. (поскольку люди знают, что качество изделий одного и того же назначения у различных фирм различны и отдают предпочтение тем, у которых двигатели к компрессорам шумят меньше).

Условие упреждения динамических нагрузок, порождаемых вращательно движущимися телами (цель, на достижение которой должны направлять усилия конструктор, технолог и изготовитель):

31.10 | необходимо стремиться одну из главных центральных осей инерции тела до максимума сблизить с его осью вращения.

Пояснение.- При совпадении главной центральной оси инерции тела с осью вращения динамические нагрузки будут отсутствовать (что видно из рассмотренных формул). Но это идеальный случай. В реальности же погрешности изготовления, монтажа, неоднородность материалов, износы, температурный и пр. факторы приводят к непопаданию главной центральной оси инерции в ось вращения. Количественными характеристиками этих непопаданий являются круги допусков и прочие вероятностные показатели.

С целью уменьшения динамических нагрузок геометрию изготовленного вращательно движущегося тела корректируют – путём удаления, либо добавления, небольшого количества массы (высверливаниями, навариваниями и т.д.). Комплекс операций, связанных с уменьшением динамических нагрузок со стороны вращающихся тел (путём корректировки их геометрии масс) называют балансировкой.

Различают статическую и динамическую балансировки.

Цель статической балансировки: свести до минимума непопадание центра масс на ось вращения. Её принцип основан на свойстве статически неуравновешенных роторов (положенных концами выла на 2 параллельные горизонтальные направляющие) занимать такое положение под действием собственного веса, при котором вертикальная координата центра тяжести оказывается минимальной. Удалениями (снизу), или добавлениями (сверху) небольших количеств масс добиваются того, чтобы балансируемый ротор начал покоиться на направляющих при любом значении угловой координаты.

Цель динамической балансировки: сделать как можно меньшими значения центробежных моментов инерции тела, в обозначение которых входит ось вращения. При динамической балансировке ротор необходимо вращать. Для этого существуют различные балансировочные станки и методы.

Подробное ознакомление с вопросами уравнивания роторов можно начинать с книги: «Основы балансировочной техники. В двух томах. Том 1 - Уравнивание жёстких роторов и механизмов /Под ред. В.А.Щепетильникова (14 авторов).- М.: Машиностроение, 1975.- 528с.».

Полагаем: всё, что можно было от балансировки взять, взято (конструкторами, технологами, изготовителями).

Переходим к рассмотрению возможности дальнейшего понижения динамических нагрузок, а заодно и к рассмотрению ещё одного интересного механического явления.

31.7.3. Понятие о критической угловой скорости и явлении самоцентрирования

До сих пор вал вращающегося тела считался абсолютно твёрдым. Учтём его упругость. На рис.31.9: G - вес, m - масса вращающегося тела, S - ось упругого его вала, жёсткостью c ; O - положение оси S вала при отсутствии вращения; C - центр масс вращающегося тела, а $e = const$ - его смещение относительно оси S вала, \vec{Z} - осевая составляющая реакции на вал; x - расстояние от центра масс до оси вращения O ; \vec{a}_c^n - нормальное ускорение центра масс, $\vec{R}_c^\Phi = -m \cdot \vec{a}_c^n$ - действующая на него сила инерции (вращение считаем равномерным); $\vec{P} = 0,5\vec{P} + 0,5\vec{P}$ - суммарная динамическая реакция; её модуль: $P = c \cdot (x - e)$.

К понятию «критическая угловая скорость»

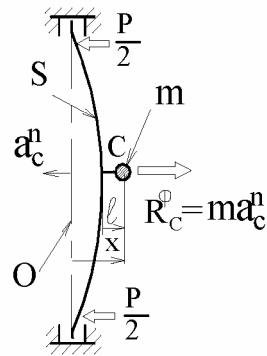


Рисунок 31.9

Применительно к рассматриваемому случаю записываем условие динамического равновесия - $\vec{G} + \vec{Z} + \vec{P} + \vec{R}_c^\Phi = 0$. Проектируем его на ось \vec{x} (которая начинается на на оси вращения O , \perp ей и пересекает ось S вала). Получаем:

$$R_c^\Phi - P = 0 \quad \mapsto \quad m \cdot a_c^n = P = c \cdot (x - e) \quad \mapsto \quad m \cdot (x \cdot \omega^2) = c \cdot (x - e).$$

Откуда:

$$31.11 \quad \left| \quad x = \frac{e}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{kp}} \right)^2}, \quad \text{где} \quad \omega_{kp} = \sqrt{\frac{c}{m}}. \right.$$

Массо-упругую характеристику ω_{kp} называют *критической угловой скоростью вала*.

Из 31.11 видно:

1. Если $\omega = \omega_{kp}$ (вращение происходит с угловой скоростью, равной критической) вал сломается ($x \rightarrow \infty$);
2. При входе в режим больших (по сравнению с ω_{kp}) угловых скоростей центр масс смещается на ось вращения ($x \rightarrow 0$).

$$31.12 \quad \left| \quad \text{Наблюдаемое у вращающихся тел с гибкими валами явление смещения центров масс на оси вращения (при } \omega \gg \omega_{kp} \text{) называют явлением самоцентрирования дисков.} \right.$$

После вхождения диска на работу в режим самоцентрированности массы величина деформации вала (его прогиб) оказывается равной e , а суммарная динамическая реакция - $P = c \cdot e$, т.е. видим:

$$31.13 \quad \left| \quad \text{чем меньше жёсткость вала (чем меньше его диаметр), тем, при прочих равных условиях, меньшими будут передаваемые на опоры динамические нагрузки.} \right.$$

При включении в работу двигателя угловая скорость диска равна нулю и ясно, что при переходе в режим работы $\omega \gg \omega_{kp}$ она в какой-то момент времени окажется равной своему критическому значению. Это всегда надо иметь ввиду (чтобы не было поломок) и не допускать длительной работы вращательно движущегося тела в режиме $\omega = \omega_{kp}$; в противном случае в конструкцию следует вводить устройства, не позволяющие валу в возникшем колебательном процессе наращивать амплитуду (различные преграды-ограничители). Подробнее по этим вопросам можно ознакомиться в специальной литературе.

32. Метод возможных перемещений

32.1. Введение в раздел

Применение метода позволяет решать большое разнообразие задач статики и динамики - есть в разделе «*общее уравнение динамики*» и «*общее уравнение статики*». Метод является и началом аналитической механики (более подробные сведения о которой содержатся в подразделе 34.1).

Если касаться истории появления метода, то в обобщённом виде можно констатировать: ещё раз подтверждается вывод о том, что совершенные науки – это плод учёных многих поколений и стран; и каждый из них делает свой, короткий либо длинный, но всего шаг на многокилометровой эстафетной дистанции, на финише которой находится искомая Человечеством интеллектуальная жемчужина.- Идея установления связи между силами через перемещение точек их приложения имеет более чем двухтысячелетнюю историю. Зачатки этому мы находим в трактатах «Механические проблемы» (3-й век до н.э.; предположительный автор – Аристотель), «Механика» (Герон Александрийский, 1-й век н.э.). Приложили немало усилий к развитию этого принципа Гвидо Убальдо (1545-1607), Галилей (1564-1642), Декарт (1596-1650), И.Бернулли (1667-1748), Ж.Лагранж (1736-1813), Л.Карно (1753-1823) и другие.

Суть, одновременно и парадоксальность (неожиданность, недоверительность на первый взгляд) рассматриваемого метода заключается в том, что действующие в механической системе силы и ускорения можно находить через анализ не действительного движения, обычно сложного, а через анализ *простейших возможных её движений*.

32.2. Понятия действительных и возможных движений. Система обозначений

На любую, принятую к рассмотрению, механическую систему могут действовать различные комплексы сил. Например, на стену здания может действовать ветер со скоростью $1, 2, 3, 4$ и т.д. м/с, может действовать и ветер ураганной силы; углы могут быть $0, 10, \dots, 90$ и т.д. градусов. С ведущим валом зубчатого редуктора транспортёра может быть соединён вал электродвигателя с частотой вращения $2900, 1450, 970$ и т.д. об/мин; на ленте транспортёра перемещаемого материала может быть много и мало.

32.1 | Действительное движение (синоним: перемещение) механической системы – это то, которое она имеет от конкретно действующей системы сил.

- 32.2 | Возможные движения механической системы – это вся бесконечно большая совокупность различных движений, которые механическая система может иметь при поочерёдном действии на неё бесконечно большой совокупности различных систем сил.
- 32.3 | Возможное движение механической системы – это конкретно принятое к анализу одно из возможных её движений.

Для действительных скоростей будем, как и ранее, применять обозначения:
 \vec{v} - скорость точки, или поступательно движущегося тела;
 $\vec{\omega}$ - угловая скорость вращательно движущегося тела.

В действительном движении
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \text{где}$$

$d\vec{r}$ - действительное элементарное перемещение точки;

$d\varphi$ - действительное элементарное угловое перемещение тела;

dt - элементарный промежуток времени при рассмотрении действительного движения.

Скорости при рассмотрении возможного движения, в отличие от действительного, будем обозначать теми же, но прописными (большими) буквами: \vec{V} - возможная линейная и $\vec{\Omega}$ - возможная угловая скорости. При их выражении через линейные и угловые перемещения условились вместо « d »

использовать букву « δ » -
$$\vec{V} = \frac{\delta\vec{r}}{\delta t}, \quad \Omega = \frac{\delta\varphi}{\delta t}, \quad \text{где}$$

$\delta\vec{r}$ - возможное линейное и $\delta\varphi$ - возможное угловое перемещение;

δt - элементарный промежуток времени при рассмотрении возможного движения.

Отличать названиями и обозначениями целесообразно ещё две величины.-

Для обозначения действительных мощностей была задействована буква N .

Причём (см. формулы 30.3-6):
$$N = \frac{dA}{dt}, \quad \text{где}$$

dA - действительная элементарная работа (от действительных сил при действительном движении механической системы).

Мощность же действительно приложенных к механической системе сил, но не на действительном, а на принятом к рассмотрению возможном перемещении,

будем обозначать
$$W = \frac{\delta A}{\delta t} = \sum (\vec{F}_i \cdot \vec{V}_i + \vec{M}_j \cdot \vec{\Omega}_j)$$
 и называть – «возможная

мощность», где δA - это «возможная работа» - элементарная работа действительно приложенных к механической системе сил, но не на действительном, а на принятом к рассмотрению возможном её перемещении.

32.3. Уравнения возможных мощностей и работ

Располагаясь в инерциальной системе отсчёта к рассмотрению принимаем произвольную механическую систему, в любой возможной её конфигурации.

Поясняем понятие «конфигурация»: игла швейной машины может быть в верхнем положении, чему будет соответствовать определённая совокупность положений других деталей, приводящих её в движение; при среднем положении иглы конфигурация деталей в швейной машине будет другой; в нижнем - третьей и т.д.

И пусть принятая к рассмотрению механическая система находится под действием любого действительного комплекса сил. Принятую к рассмотрению механическую систему представляем состоящей из частиц. Для каждой из них на основании рассмотренного в предыдущем разделе записываем:

$$a \quad \left| \quad \vec{R}_v^E + \vec{R}_v^I + \vec{\Phi}_v = 0 \quad (v = 1, 2, 3, \dots) \right.$$

(a) - это множество записанных в столбец равенств – второе под первым, третье под вторым и т.д. (с индексами 1, 2, 3, ...).

Принимаем также к рассмотрению любое возможное перемещение этой системы (при решении конкретной задачи – простейшее). Возможную скорость v -той частицы обозначаем \vec{V}_v ($v = 1, 2, 3, \dots$).

Равенства (a) скалярно умножаем на возможные скорости. Получаем:

$$b \quad \left| \quad W_v^E + W_v^I + W_v^\Phi = 0 \quad (v = 1, 2, 3, \dots) \right.$$

Почленно складываем столбец равенств (b):

$$в \quad \left| \quad \sum W_v^E + \sum W_v^I + \sum W_v^\Phi = 0 \right.$$

Итак, получено

$$32.4a \quad \left| \begin{array}{l} \text{уравнение возможных мощностей:} \quad W^{E+I+\Phi} = 0 \quad - \\ \text{для любой механической системы, при любой возможной её} \\ \text{конфигурации и на любом возможном перемещении суммарная} \\ \text{возможная мощность действующих на неё внешних, внутренних и} \\ \text{даламберовых сил инерции равна нулю.} \end{array} \right.$$

Следствие из 32.4а:

уравнение возможных работ: $\delta A^{E+I+\Phi} = 0$ -

32.4б для любой механической системы, при любой возможной её конфигурации и на любом возможном перемещении суммарная возможная работа действующих на неё внешних, внутренних и даламберовых сил инерции равна нулю.

Напоминаем уже рассматривавшееся в разделе 30: если механическая система состоит из абсолютно твёрдых тел и нерастяжимых нитей, а трением в трущихся друг о друга телах пренебрегается (по причине их малости во многих конкретно решаемых задачах), то внутренние силы можно не учитывать, а системы, в которых суммарные мощности (и работы) внутренних сил равны нулям, называют механическими системами с идеальными связями.

Для механических систем с идеальными связями математические выражения 32.4 принимают вид:

32.5 $W^{E+\Phi} = 0$ - общее уравнение динамики
в форме через возможные мощности;

$\delta A^{E+\Phi} = 0$ - общее уравнение динамики
в форме через возможные работы –
для механических систем с идеальными связями, при любых возможных их конфигурациях и на любых возможных перемещениях суммарная возможная мощность (работа) действующих внешних сил и даламберовых сил инерции равна нулю.

Для механических систем, в которых отсутствует перемещение тел, действующие на частицы силы инерции равны нулю. Равны нулю мощности и работы всех внутренних сил. Мысленно выделяемые из таких механических систем подсистемы возможными движениями обладают. Применяемые к ним уравнения 4 принимают вид:

32.6 $W^E = 0$ - общее уравнение статики
в форме через возможные мощности;

$\delta A^E = 0$ - общее уравнение статики
в форме через возможные работы:
для подсистем, мысленно выделяемых из механических систем с неподвижными телами суммарная возможная мощность (работа) действующих внешних сил равна нулю на любых возможных перемещениях этих подсистем.

Замечание: если ранее изученную совокупность методов решения задач статики называют «геометрической статикой», то изучаемые здесь методы решения задач статики называют «Кинематической (или Аналитической) статикой».

32.4. Понятия об обобщённых координатах и степенях подвижности механических систем. Аксиома и рекомендации по выбору простейших возможных движений

Ранее, применительно к твёрдому телу, уже встречалось понятие «степень подвижности» (термин-синоним: «число степеней свободы»): у вращательно движущегося тела одна степень подвижности (φ); степень подвижности поступательно движущегося тела равна трём (x, y, z); три степени подвижности также у плоско (φ, x_c, y_c) и сферически (φ, ψ, θ) движущихся тел; степень подвижности свободно движущегося тела равна шести ($x_c, y_c, z_c; \varphi, \psi, \theta$).

Аналогично понятие степени подвижности и для механических систем. Но формулировку этого понятия предварим рассмотрением конкретного примера - рельсового подъёмного крана с поворотной платформой. Вот некоторые из переменных, определяющих его положение:

для тележки с колёсами на рельсах - линейная координата x (вдоль рельсового пути; обычно прямолинейная; бывает и криволинейной); поворот платформы относительно вертикальной оси z тележки - угол φ ;

поворот стрелы крана вокруг горизонтальной оси платформы - угол λ ;

длина выпущенной части троса (от груза до блока на стреле) - ξ ;

углы между выпущенной частью троса и осями x, y, z - α, β, γ ;

угловое положение барабана лебёдки - μ ;

имеется у крана много зубчатых пар; положение первого зубчатого колеса одной из них определяется углом φ_1 , второго - φ_2 ; и т.д.

Нашей целью является пояснение вводимых ниже терминов. Для этого 10-ти перечисленных переменных достаточно.

Среди них: φ_2 линейно связана (через передаточное отношение - через отношение чисел зубцов) с φ_1 ; α, β, γ связаны известной зависимостью - $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$; связаны между собой также ξ и μ -

Схема подъёмного крана

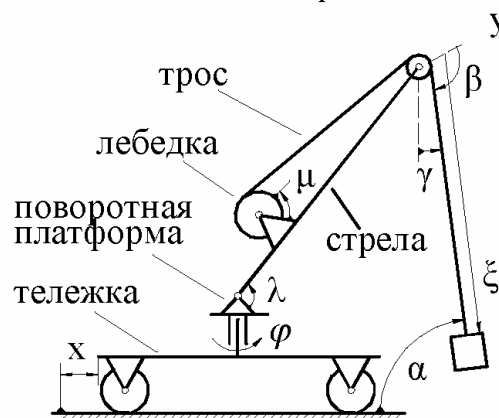


Рисунок 32.1

$\xi = \xi_0 + R \cdot \mu$, т.е. из 10-ти перечисленных в данном абзаце переменных независимых только 6 (мы имеем ввиду, что μ также линейно выражается через φ_1).

При дальнейшем микроанализе перечисленных переменных будем учитывать два варианта постановки инженерно-исследовательской задачи: первый – требуется разработать рекомендации по минимизации промежутка времени на перенос груза из одной точки пространства в другую (при решении которой важное значение имеет установление законов изменения углов α и β); второй вариант – установить максимально возможные динамические нагрузки (с целью их минимизации и дальнейшего учёта в прочностных расчётах).

При первом варианте в качестве независимых переменных можно задействовать $x, \varphi, \lambda, \alpha, \beta, \mu$. При втором явно видно, что независимые переменные α и β являются лишними (ненужными) – для выявления динамических нагрузок важно учесть моменты включения в работу двигателей и коробок скоростей (в эти моменты времени ускорения будут наибольшими; но накладываются ли они друг на друга, или нет? если накладываются, то гасят или усиливают друг друга? как избежать усиливающего наложения; и т.д.).

Хаос в обозначениях неудобен. Поэтому, отвлекаясь от разнообразных прямолинейных, угловых и криволинейных координат вводят

32.7 | *обобщённые координаты* (обозначают: $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_s$) – это независимые переменные, однозначно определяющие положение принятой к исследованию механической системы и задействуемые в динамическом исследовании.

32.8 | *Степень подвижности* принятой к исследованию механической системы – это число её обобщённых координат – S .

32.9 | Быстроту изменения обобщённой координаты при действительном движении системы называют *обобщённой скоростью* и обозначают \dot{q} ; $\left(\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} \right)$

это понятие будет задействовано в разделе 34 – «Уравнения Лагранжа 2-го рода».

При рассмотрении возможного движения механической системы

32.10 | бесконечно малое изменение переменной q называют *вариацией обобщённой координаты* и обозначают δq_i , а соответствующий ей промежуток времени δt – временем вариации;

32.11 | быстроту изменения обобщённой координаты называют *скоростью вариации* и обозначают Δ_i . $\left(\Delta_i = \frac{\delta q_i}{\delta t} \right)$

Возвращаясь к 32.4а, как к главному результату, замечаем, что возможных движений множество. Множество можно составить и уравнений. Но «Сколько нужно их брать при решении конкретных задач? И какие?»

На этот вопрос отвечают аксиома и 2 рекомендации.

Аксиома (о числе линейно независимых уравнений динамики для механической системы):

32.12 | число линейно независимых уравнений, которые можно получить из уравнения возможных мощностей (или возможных работ), равно числу степеней свободы механической системы.

Рекомендация 1.-

32.13 | Проще и быстрее нужная система уравнений получается при одиночных вариациях обобщённых координат,

т.е. при решении конкретных задач целесообразно в памяти держать следующую диагональную матрицу,

$\begin{vmatrix} \Delta_1 & 0 & 0 & \bullet & 0 \\ 0 & \Delta_2 & 0 & \bullet & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_3 & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & \Delta_S \end{vmatrix}$	<p>где 1-й строкой описана одиночная вариация 1-й обобщённой координаты (все вариационные скорости равны нулям, кроме 1-й); по ней составляется 1-е уравнение; 2-й строкой описана одиночная вариация 2-й обобщённой координаты (все вариационные скорости равны нулям, кроме 2-й); по ней составляется 2-е уравнение); и т.д.,</p>
---	---

последней строкой описана одиночная вариация обобщённой координаты S (все вариационные скорости равны нулям, кроме S); по ней составляется последнее уравнение.

В каждом (из S) составленном уравнении Δ (либо δq); с соответствующими индексами - $1, 2, \dots, S$) будет вынесена за общую скобку. А так как в правых частях нули, то эти величины (Δ , либо δq) «сделав своё дело», из уравнений уходят - в них остаются лишь соотношения между возможными скоростями (или перемещениями). Поэтому для Δ (и δq) безразличны и абсолютная величина, и размерность (всё равно, что м/с, что мм за столетие).

В связи с этим

Рекомендация 2:

<p>32.14 для укорочения алгебраических записей (производимых в процессе составления уравнений) матрицу возможных движений целесообразно делать единичной - вместо дельт (Δ), или δq, писать «1». Её будем называть: «матрица возможных перемещений» \Rightarrow</p>	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \bullet & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \bullet & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & 1 \end{vmatrix}$
---	---

32.5. Примеры

ПРИМЕР 32.1.- Простейший полиспаст

Дано. – Два блока, каждый из которых охвачен тросом. Один из концов каждого троса закреплён к потолку (см. рис.32.2). A и C - центры блоков; B и D - точки схода тросов со шкивов. \vec{G} - сила тяжести груза; \vec{T} - поднимающая груз сила.

Требуется. - Определить T , выразив её через G .

Решение. - Изображаем на рисунке возможные скорости точек A , B и D , т.е. векторы

$$\vec{V}_A, \vec{V}_B = \vec{V}_C, \vec{V}_D.$$

Точки входа тросов на шкивы являются мгновенными центрами скоростей, как при действительном движении, так и при возможном. Поэтому $\vec{V}_B = 2 \cdot \vec{V}_A$, $\vec{V}_C = \vec{V}_B$, $\vec{V}_D = 2 \cdot \vec{V}_C = 2 \cdot \vec{V}_B = 2 \cdot (2 \cdot \vec{V}_A) \Rightarrow \vec{V}_D = 4 \cdot \vec{V}_A$.

Применительно к рассматриваемому случаю записываем уравнение возможных мощностей:

$$W^T + W^G = 0 \Rightarrow -T \cdot V_D + G \cdot V_A = 0 \Rightarrow T = \frac{V_A}{V_D} \cdot G = 0,25 \cdot G.$$

Записи через единичную матрицу возможных движений были бы проще. - На рисунке: вместо \vec{V}_A стояла бы единица (рядом с вектором); вместо \vec{V}_B - 2 и вместо \vec{V}_D - 4. А уравнение имело бы вид:

$$W^T + W^G = 0 \Rightarrow -T \cdot 4 + G \cdot 1 = 0 \Rightarrow T = 0,25 \cdot G.$$

ПРИМЕР 32.2.- Поднятие тросом по наклонной плоскости балки на катках

Дано. – Механическая система по рис.32.3.

Требуется. - Определить натяжение T троса, выразив его через веса G - балки и Q - катков. Как и в предыдущей задаче, сопротивления пренебречь.

Решение. - Изображаем на рисунке возможные скорости: для центров катков - 1, для балки - 2.

$$2W^Q + W^G + W^T = 0 \Rightarrow 2(Q \cdot \sin \alpha) \cdot 1 + (G \cdot \sin \alpha) \cdot 2 - T \cdot 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = (Q + G) \cdot \sin \alpha.$$

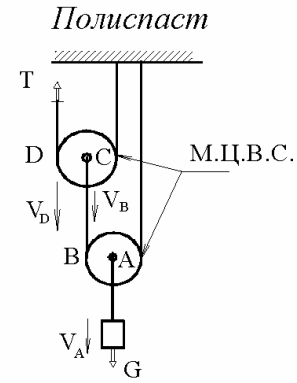


Рисунок 32.2

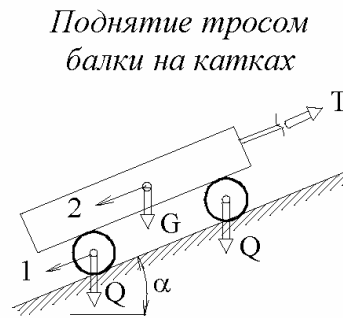


Рисунок 32.3

ПРИМЕР 32.3.- *Определение реакций в трёхопорной балке*

Дано. – На рис.32.4 вверху изображена исходная механическая система. Размеры указаны на рисунке, $P = 120$ кН.

Требуется. – Определить реакции на опорах A , B , C и в шарнире E .

Решение.– Из исходной механической системы выделяем 4 подсистемы. На рис.32.4 они изображены одна под другой. Первая подсистема отличается от исходной лишь тем, что у неё убрана опора C , но её действие учтено реакцией \vec{R}_C . Вторая подсистема отличается от исходной тем, что действие опоры B заменено реакцией \vec{R}_B . У третьей подсистемы вместо опоры A реакция \vec{R}_A .

У каждой из трёх перечисленных механических подсистем степень подвижности равна 1. У четвёртой подсистемы (балка EDC) степень подвижности - два.

За обобщённые координаты для всех 4-х случаев принимаем возможное вертикальное отклонение точки D от горизонтали. За вторую обобщённую координату, определяющую возможное движение 4-й подсистемы принимаем горизонтальное отклонение точки D от вертикали. Теперь видно:

$$\text{для первой подсистемы} - P \cdot 1 - R_C \cdot 2 = 0 \quad \mapsto \quad R_C = 60 \text{ кН};$$

$$\text{для второй подсистемы} - P \cdot 1 - R_B \cdot \frac{4}{3} = 0 \quad \mapsto \quad R_B = 90 \text{ кН};$$

К определению реакций в трёхопорной балке

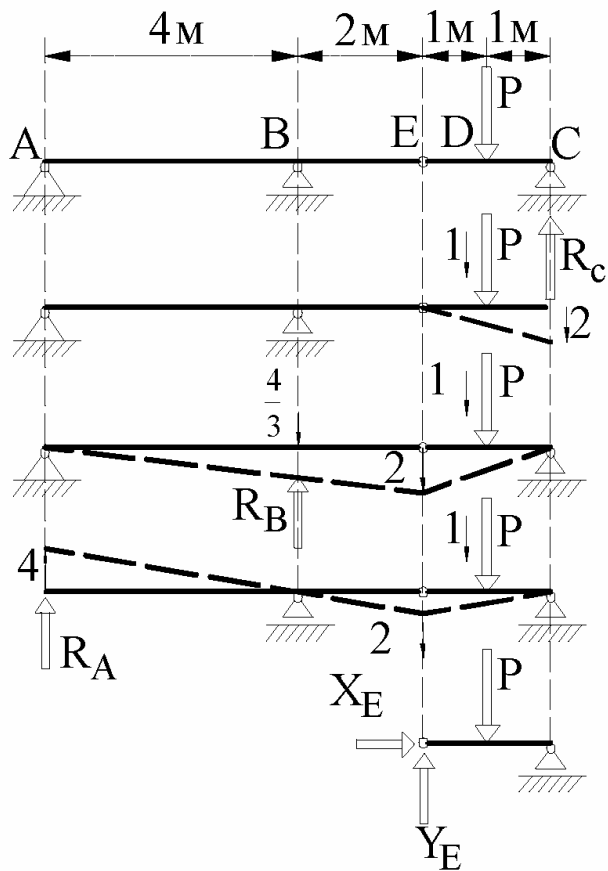


Рисунок 32.4

для третьей подсистемы - $P \cdot l + R_A \cdot 4 = 0 \quad \mapsto \quad R_A = -30 \text{ кН}$ (знак «минус», как и ранее, означает, что в действительности реакция \vec{R}_A направлена вниз).

Для четвёртой подсистемы:
по первой обобщённой координате - $P \cdot l - Y_E \cdot 2 = 0 \quad \mapsto \quad Y_E = 60 \text{ кН}$;
по второй обобщённой координате - $(P \cdot \cos 90) \cdot l + X_E \cdot l = 0 \quad \mapsto \quad X_E = 0$.

Рекомендуем самостоятельно установить значение горизонтальной составляющей реакции на опоре A и проставить единичные векторы 2-х возможных скоростей точки D для четвёртой подсистемы (чтобы они соответствовали приведенным записям).

ПРИМЕР 32.4. - Система «Два блока на неподвижной оси и один на подвижной – трос – две наклонные плоскости – три груза»

Дано. – На рис.32.5 справа-вверху изображён вид сбоку на блоки, вращающиеся вокруг одной неподвижной оси. Наклоны плоскостей (α, β) заданы. Трос нерастяжим. Трением, массами блоков и троса пренебречь. Веса G_1, G_2, G_3 известны.

Составить систему уравнений для определения ускорений грузов ($\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$).

Решение. - Положение заданной механической системы определяется тремя координатами - x_1, x_2, x_3 , которые связаны между собою уравнением

$$L = x_1 + c_1 + x_3 + c_2 + x_3 + c_3 + x_2,$$

где L, c_1, c_2, c_3 - постоянные: L - длина всего троса; c_1 - длина части троса, охватывающей первый блок с неподвижной осью; c_2 - длина части троса, охва-

К определению ускорений в блочно-тросовой системе с $S=2$

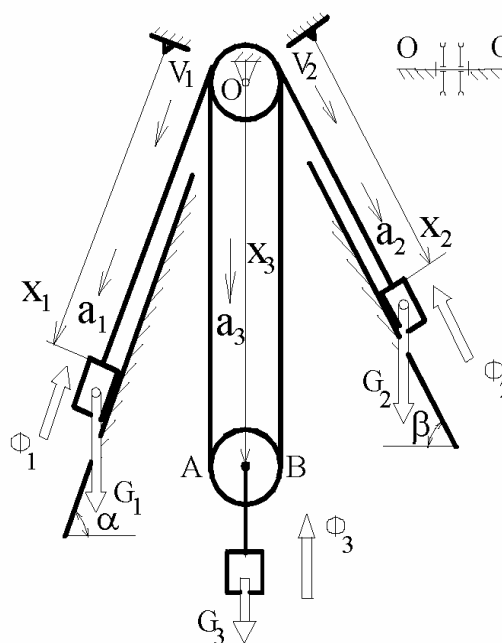


Рисунок 32.5

тывающей нижний блок; c_3 - длина части троса, охватывающей второй блок с неподвижной осью.

Двоекратно взяв производную от уравнения связи получаем:

$$a \quad \left| \quad 0 = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_3 + \ddot{x}_3 + \ddot{x}_2 \quad \mapsto \quad a_1 + 2a_3 + a_2 = 0 .$$

Т.к. уравнение связи между x_1, x_2, x_3 есть, то независимых переменных два. За них принимаем x_1 и x_2 .

Возникает вопрос: «Почему x_1 и x_2 , а не x_1 и x_3 , или x_2 и x_3 »?

Общей рекомендации нет. Можно принять и первый, и второй, и третий варианты - для результата это безразлично, но в подобных случаях анализ на оптимальное решение может потребовать больше времени, чем затрачиваемое на решение случайно взятым (по интуиции) вариантом.

Итак, за независимые переменные принимаем: $q_1 = x_1, q_2 = x_2$.

Выражения для сил инерции: $\vec{\Phi}_1 = -m_1 \cdot \vec{a}_1; \vec{\Phi}_2 = -m_2 \cdot \vec{a}_2; \vec{\Phi}_3 = -m_3 \cdot \vec{a}_3$.

Переходим к составлению двух уравнений.

Вначале варьируем первой обобщённой координатой – см. на рисунке \vec{V}_1 ; модуль для неё, а затем и для \vec{V}_2 , в соответствии с рекомендацией 32.14 принимаем равным единице. Т.к. при первой одиночной вариации скорость центра тяжести 2-го тела равна нулю, то возможные мощности для \vec{G}_2 и $\vec{\Phi}_2$ равны нулям; равна нулю и возможная скорость точки А, т.е. при первой одиночной вариации обобщёнными координатами она является мгновенным центром скоростей. Очевидно, что 1-я вариационная скорость точки В равна единице и направлена вверх и, следовательно, первая вариационная скорость центра нижнего блока направлена вверх и равна 0,5. Таким образом, получаем:

$$W^{E+\Phi} = 0 \quad \mapsto \quad W_1^G + W_1^\Phi + W_2^G + W_2^\Phi + W_3^G + W_3^\Phi = 0 \quad \mapsto \\ \mapsto (G_1 \cdot \sin \alpha) \cdot 1 - (m_1 \cdot a_1) \cdot 1 + 0 + 0 - G_3 \cdot 0,5 + (m_3 \cdot a_3) \cdot 0,5 = 0 . \quad \text{Откуда:}$$

$$b \quad \left| \quad 2G_1 \cdot (g \cdot \sin \alpha - a_1) = G_3 \cdot (g - a_3)$$

Из 2-й одиночной вариации обобщёнными координатами аналогично получается (рекомендуем сделать самостоятельно):

$$в \quad \left| \quad 2G_2 \cdot (g \cdot \sin \beta - a_2) = G_3 \cdot (g - a_3) .$$

Далее из системы линейных уравнений (а) (б) и (в) находятся выражения (через известные) для a_1, a_2 и a_3 и, после двоекратного интегрирования, находятся законы движения первого, второго и третьего грузов.

33. Закон сохранения полной механической энергии

33.1. Введение в раздел

Имеются рядовые задачи, которые удобно решать с использованием рассматриваемого закона.

Используется он и в общетеоретических построениях - уравнения Лагранжа 2-го рода для консервативных систем, теория устойчивости, малые колебания (см. подраздел 34.4 и раздел 35).

Кроме того, ещё и сегодня встречаются изобретатели вечных двигателей. Инженер обязан уметь объяснить окружающим бесперспективность работ над ними и направить энергию заблудившегося в своих научно-технических изысканиях человека на полезные обществу дела. Закон о сохранении полной механической энергии прямо и научно отвечает на этот вопрос.

Ранее рассмотренные опорные факты динамики (закон о движении центра масс; законы об изменениях количества движения, кинетического момента и кинетической энергии; методы кинестатики и возможных перемещений) справедливы для любых механических систем. О законе сохранения механической энергии этого сказать нельзя. Он применим лишь к консервативным системам.

33.1 | Консервативная система – это механическая система, на которую действуют только потенциальные силы.

33.2. Понятие о потенциальных силах и потенциальной энергии.

Критерии потенциальности

В подразделе 30.1 давалось понятие о работе силы на конечном перемещении точки её приложения -

$$A_{1-2} = \int_{(1)}^{(2)} (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz), \quad \text{где}$$

X, Y, Z - проекции силы на оси координат.

33.2 | Силу называют потенциальной, если производимая ею работа не зависит от формы траектории точки приложения, а зависит лишь от начального и конечного её положений.

Из определения следует две эквивалентные формы критерия потенциальности сил (одна удобна в одних случаях, вторая – в других).

Из курса высшей математики известно, что независимость криволинейного интеграла от формы пути равносильна равенству нулю этого интеграла вдоль всякой замкнутой кривой. Поэтому

33.3 | первая форма критерия для потенциальных сил:
если для силы соблюдено математическое условие $\oint (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz) = 0$, то она является потенциальной.

Из курса высшей математики известно и другое: чтобы криволинейный интеграл не зависел от формы пути, необходимо и достаточно, чтобы подинтегральное выражение, т.е. $(X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz)$, было полным дифференциалом некоторой функции координат, т.е.

$$33.4 \quad \left| \begin{array}{l} \text{если сила потенциальная, то обязательно существует такая функция} \\ \text{координат } U = U(x, y, z), \text{ которая удовлетворяет условию:} \\ dU = (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz); \\ \text{её называют силовой, а } \Pi = C - U(x, y, z), \text{ где } C - \\ \text{произвольная постоянная, называют потенциальной энергией} \\ \text{объекта (точки, тела) приложения потенциальной силы.} \end{array} \right.$$

Из 33.4 следует

$$33.5 \quad \left| \begin{array}{l} \text{вторая форма критерия для потенциальных сил:} \\ \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}; \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}; \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} \end{array} \right. .$$

Покажем справедливость результата 33.5.

В соответствии с понятием полного дифференциала:

$$a \quad \left| \quad d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \cdot dz . \right.$$

Из 33.4:

$$б \quad \left| \quad d\Pi = -X \cdot dx - Y \cdot dy - Z \cdot dz . \right.$$

Из (а) и (б):

$$в \quad \left| \quad X = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} . \right.$$

Взяв частную производную от X по y , затем от Y по x и, учитывая известную из курса высшей математики теорему о независимости результата от последовательности взятия производных, получаем:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \cdot \partial y} = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x} .$$

Второе и третье равенства критерия потенциальности 5 показываются аналогично.

33.3. Примеры анализа сил на предмет отнесения их к классу потенциальных

Потенциальная сила зависит лишь от координат точки её приложения. Поэтому силу, с которой действует на электрон электромагнитное поле - $F = e \cdot E \cdot \sin(\omega \cdot t)$ - нельзя отнести к классу потенциальных.

Непотенциальна и сила, с которой на тело действует поток жидкости или воздуха - эта сила зависит от скорости движущихся частиц.

Теперь 2 случая, когда сила зависит от координат точки её приложения.
Первый случай: можно ли отнести к классу потенциальных силу

$$X = x^2 \cdot y, \quad Y = x \cdot y^2, \quad Z = z^2 \quad ?$$

- Нет. Потому, что для неё $\frac{\partial X}{\partial y} = x^2, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = y^2 \quad \mapsto \quad \frac{\partial X}{\partial y} \neq \frac{\partial Y}{\partial x}.$

Второй случай: можно ли отнести к классу потенциальных силу, у которой

$$X = x \cdot y^2, \quad Y = x^2 \cdot y, \quad Z = z^2 \quad ?$$

- Можно. Потому, что в этом случае

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 2 \cdot x \cdot y, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 2 \cdot x \cdot y \quad \mapsto \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}; \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z} = 0.$$

33.6 | Наиболее распространены постоянные силы (например, сила тяжести), упругие силы (упруго деформируется подавляющее большинство инженерных конструкций) и силы гравитации. Они относятся к классу потенциальных;

покажите это самостоятельно (воспользовавшись критерием потенциальности в форме 33.3 или 33.5).

33.4. Формулы для вычисления потенциальной энергии в случаях действия сил тяжести, упругих и гравитационных сил

Из 30.1б и (б) подраздела 33.2 -

$$dA = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz, \quad d\Pi = -X \cdot dx - Y \cdot dy - Z \cdot dz \quad \mapsto$$

$$a \quad | \quad d\Pi = -dA \quad \mapsto \quad \Pi = C - A_{1-2} = C + A_{2-1},$$

т.е. потенциальную энергию объекта, находящегося под действием потенциальной силы, удобно вычислять через работу этой силы на конечном перемещении точки её приложения. Формулы для вычисления работ сил тяжести, упругой и гравитационной приводились в подразделе 30.2.

Таким образом. -

- 33.7 | Потенциальную энергию тела, находящегося под действием силы тяжести, можно вычислять по формуле:

$$\Pi^G = h \cdot G, \quad \text{где}$$
 h - высота, на которое поднято тело над плоскостью, принятой за плоскость с нулевым уровнем потенциала.
- 33.8 | Потенциальная энергия пружины: $\Pi^{Ip} = 0,5 \cdot c \cdot x^2$, где x - величина её деформации, c - жёсткость.
- 33.9 | Гравитационно-потенциальная энергия тела:

$$\Pi^{Ip} = -\frac{\gamma \cdot M \cdot m}{h}, \quad \text{где}$$
за нулевой уровень потенциала принята сфера радиуса $h \rightarrow \infty$ с центром в притягивающей массе.

33.5. Закон сохранения полной механической энергии

Расположив себя в инерциальной системе отсчёта к рассмотрению принимаем консервативную систему.

Представляем её состоящей из частиц.

В соответствии с (а) предыдущего подраздела

$$d\Pi_v = -dA_v \quad \mapsto \quad d(\Pi_v + A_v) = 0, \quad v = 1, 2, 3, \dots$$

Как и ранее, последняя запись в развёртке мысленно представляется в виде столбца выражений (в 1-й строке нижний индекс - 1; во 2-й - 2; в 3-й - 3 и т.д.). Складывая все строки почленно получаем:

$$d(\sum \Pi_v + \sum A_v) = 0.$$

Обозначаем и называем:

$\Pi = \sum \Pi_v$ - потенциальная энергия консервативной системы.

Учитываем (см. 30.25), что $d(\sum A_v) = dT$, где

T - кинетическая энергия системы.

После интегрирования получаем

- 33.10 |
$$T + \Pi = \text{const}(t) \quad \text{или} \quad T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2 = \dots = T_j + \Pi_j = \dots$$

- для консервативных систем полная механическая энергия (сумма кинетической и потенциальной энергий) является постоянной во времени величиной.

ПРИМЕР 33.1. - Кулисный механизм с пружиной

Дано. – На рис.33.1: $OA = 0,15$ м – кривошип, его момент инерции относительно точки O - $I_{AO} = 0,02$ кгм², BC – кулиса с моментом инерции относительно точки C - $I_{BC} = 0,12$ кгм²; масса ползуна A - $m = 2$ кг; $\varphi = 30^\circ$, $A_1O \perp BC$; между ползуном и заплечиками B расположена пружина с жёсткостью $c = 3000$ Н/м. Механизм расположен в горизонтальной плоскости и внешними силами не нагружен. В 1-м положении (A_1) пружина недеформирована, а угловая скорость кривошипа - $\omega_1 = 100$ с⁻¹.

К примеру на закон сохранения полной механической энергии

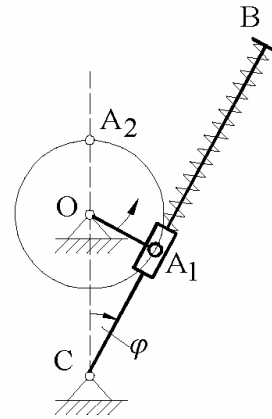


Рисунок 33.1

Определить угловую скорость кривошипа во втором его положении (A_2).

Решение.- Применяем закон сохранения полной механической энергии:

$$a \quad \left\{ \quad \quad \quad T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2 .\right.$$

В первом положении (A_1):

$$T_1 = 0,5 \cdot I_{AO} \cdot \omega_1^2 + 0,5 \cdot m \cdot (AO \cdot \omega_1)^2 = 0,5 \cdot 0,02 \cdot 100^2 + 0,5 \cdot 2 \cdot (0,15 \cdot 100)^2 = 325 \text{ (кг м}^2\text{)/с}^2.$$

Потенциальная энергия в первом положении $\Pi_1 = 0$ (по условию).

Во втором положении (A_2) кинетическая энергия кулисы $\neq 0$. Но несложно

видеть, что $\omega_{BC} = \frac{\omega_2}{3}$ и поэтому:

$$T_2 = 0,5 \cdot I_{AO} \cdot \omega_2^2 + 0,5 \cdot m \cdot (AO \cdot \omega_2)^2 + 0,5 \cdot I_{BC} \cdot \left(\frac{\omega_2}{3}\right)^2 = \left(0,5 \cdot 0,02 + 0,5 \cdot 2 \cdot 0,15^2 + \frac{0,5 \cdot 0,12}{3^2}\right) \cdot \omega_2^2 \quad \mapsto \quad T_2 \approx 0,04 \cdot \omega_2^2.$$

$$\Pi_2 = \frac{c \cdot x^2}{2} = \frac{3000 \cdot (0,45 - 0,26)^2}{2} \approx 54 \text{ (кг м}^2\text{)/с}^2.$$

Подставляем вычисленные значения для T_1 , P_1 , T_2 , P_2 в (а) и получаем:

$$325 + 0 = 0,04 \cdot \omega_2^2 + 54 \quad \mapsto \quad \omega_2 \approx 82c^{-1}.$$

33.6. О вечных двигателях

Открытие закона сохранения полной механической энергии во многом обусловлено имевшим место в обществе настроением создавать «вечные двигатели». Идея о возможности создания «perpetuum mobile» появилась в 12 веке. Упоминает о нём в своём трактате индийский математик и астроном Бхаскар Ачарья (1114-1185). Пропагандировал работу над созданием вечных двигателей Роджер Бэкон (1214-1292). До наших дней дошла «Книга рисунков» (1235-1240 годы) французского инженера и архитектора Виллара д'Оннекура, где вечный двигатель предложен в форме колеса с шарнирно прикреплёнными к его ободу молоточками.

По поводу невозможности создания вечного двигателя, опираясь на данные науки того времени (в основе которых, как и сегодня лежали опытные данные), высказывали своё мнение многие крупные учёные.- Леонардо да Винчи (1452-1519): «Искатели вечного движения, какое количество пустейших замыслов пустили вы в мир»! Кардано (1501-1576): «Нельзя устроить часы, которые заводились бы сами собою и сами поднимали гири, движущие механизм». Галилей (1564-1642): «Машины не создают движение; они только его превращают. Кто надеется на другое, тот ничего не понимает в механике». Известны также работы Стевина (1548-1620) и Уилкинса (1599-1658). Зачатки современного научного обоснования бесперспективности работ по созданию вечных двигателей имеются у Гюйгенса (1629-1695): «Тело не может под действием тяжести подняться выше той высоты, с которой оно упало». Перечень фамилий учёных, советовавших не заниматься изобретением вечных двигателей, будет продолжен, но пока 2 констатации:

экспериментально-теоретические данные и назойливость «изобретателей» вечных двигателей вынудили Парижскую Академию наук в 1775 году принять официальное постановление, что впредь она «не будет рассматривать никакой машины, дающей вечное движение», ибо «Создание вечного двигателя абсолютно невозможно»;

и всё же, несмотря на созревшую в обществе ясность в рассматриваемом вопросе, по данным Британского патентного бюро с 1850-го по 1903 год было подано около 600 заявок на вечные двигатели; аналогичная картина наблюдалась и в других странах; к сожалению, вопрос с изобретателями вечных двигателей не прост; такие энтузиасты встречаются и по сей день – см., например, книгу «Бродянский В.М. Вечный двигатель – прежде и теперь.- М.:, 1989 – 256 с.».

Далеко не все имеют инженерное образование, что обязывает нас пояснить результат $T + П = const(t)$ - в том направлении, чтобы инженер мог не на эмоциональном, а строго научном уровне (с формулами, фамилиями, опираясь на многовековой опыт) убедительно пояснить, при необходимости, бесперспективность занятий по поиску вечных двигателей.

Если бы было получено не $T_1 + П_1 = T_2 + П_2 = \dots = T_j + П_j = \dots$, а

$$T_1 + П_1 < T_2 + П_2 < \dots T_j + П_j < \dots,$$

тогда можно было бы говорить о наличии явления приращения механической энергии с возрастанием времени и рекомендовать проводить работы по созданию вечного двигателя. Более того, из опыта хорошо известно, что в реальных системах в процессе преобразования одного вида механической энергии в другой происходит ещё и нагрев деталей (это за 800 лет работы над вечными двигателями повседневно наблюдали и энтузиасты, и их оппоненты), т.е. 33.10 отображает идеализированную механическую систему. Если же учитывать потери на нагрев, то следует констатировать: полная механическая энергия системы со временем уменьшается (рассеивается) и справедливыми оказываются противоположные неравенства:

$$33.11 \quad | \quad T_1 + П_1 > T_2 + П_2 > \dots T_j + П_j > \dots$$

Заканчивая рассматривать вопрос о бесперспективности работ над созданием «perpetuum mobile», заметим:

в течение прошедших 800 лет были «успехи» и у создателей вечных двигателей - Орфиреус (1680-1745), Кили (19-й век, умер в 1896) и другие, но всегда выяснялось - это были мошенники;

вопрос был не прост – это сейчас есть чёткие количественные критерии к вопросу о бесперспективности работ над созданием «perpetuum mobile»; тогда этого не было; ныне используемые понятия и количественные характеристики (потенциальная и кинетическая энергии, кинетический потенциал; консервативные и неконсервативные системы) были разработаны лишь к середине 19-го века; даже термин «энергия» был введен только в 1807 г. – Т.Юнг (1773-1829), вошёл же он в жизнь позже - благодаря стараниям У.Ренкина (1820-1872) и У.Томсона-Кельвина (1824-1907);

закон о сохранении механической энергии лишь наполовину решал проблему; но затем стал известен механический эквивалент тепловой энергии (4190 Нм/ккал), другие результаты, позволяющие заключить: усилиями С.Карно (1796-1832), Р.Майера (1814-1878), Д.Джоуля (1818-1889) и ряда других учёных 19-го века проблема была закрыта полностью – появился закон сохранения энергии в широком плане, учитывавшем не только кинетическую и потенциальную, но тепловую, магнитную, электрическую, звуковую и световую энергии.

33.7*. Уравнение невозмущённой траектории космического аппарата. Понятие о трёх космических скоростях

33.7.1. Понятие о невозмущённой траектории

Для выявления движения космического аппарата (КА) надо учитывать действия многих притягивающих его тел. Такой точный подход, известный среди специалистов как «задача N тел», наталкивается на огромные математические трудности. Даже для трёх тел задача решена лишь для нескольких частных случаев. Поэтому на практике для выявления траектории движения КА используют следующий двухэтапный подход.-

Полагают, что на КА действует сила лишь со стороны близлежащего притягивающего центра – Земли, Солнца и т.д.; действием других тел и ускорением близлежащего притягивающего центра относительно инерциальной системы пренебрегают.

33.12 | Траекторию КА, вычисленную в предположении действия лишь одного, наиболее значимого притягивающего центра, называют невозмущённой.

При необходимости более точного определения траектории КА, начинают учитывать другие, наиболее существенные гравитационные силы.

33.13 | Поправки к невозмущённой траектории, учитывающие влияние на неё других, менее значимых притягивающих центров, называют возмущениями к траектории.

Например, невозмущённую траекторию КА, расположенного недалеко от Земли, могут корректировать возмущениями Луны, Марса, Венеры, Солнца и т.д.

33.7.2*. Вывод уравнения, описывающего невозмущённую траекторию

На рис.2: Cx - полярная ось инерциальной системы отсчёта; φ - полярный угол; Cx_1 - радиус-векторная ось (начинается в притягивающем центре и всё время проходит через материальную точку (через КА)); ось y_1 во времени $\perp x_1$ и расположена в плоскости $x - x_1$; α - угол, под которым скорость \vec{v} КА расположена к оси Cx_1 .

На основании закона сложения скоростей записываем:

$$a \quad \left| \quad \vec{v} = \dot{\varphi} \cdot r \cdot \vec{j}_1 + \dot{r} \cdot \vec{i}_1.$$

К выводу уравнения невозмущённой траектории КА

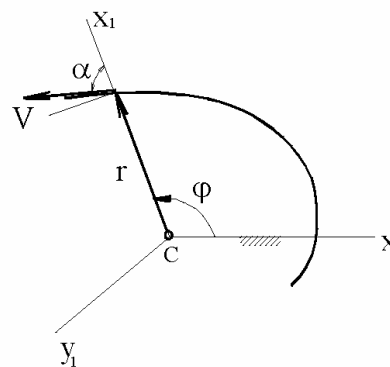


Рисунок 33.2

(а) проектируем на ось $Cy_1 \quad \mapsto$

$$б \quad \left| \quad \quad \quad v \cdot \sin \alpha = \dot{\varphi} \cdot r .\right.$$

В подразделе 22.6 (закон площадей Кеплера) было получено:

$$в \quad \left| \quad \quad \quad r \cdot v \cdot \sin \alpha = const(t) .\right.$$

Из (б) и (в):

$$з \quad \left| \quad \quad \quad \dot{\varphi} \cdot r^2 = const(t) = \text{обозначаем} = k .\right.$$

Система естественных и искусственных небесных тел с высоким уровнем точности является консервативной и к ней применим закон сохранения полной механической энергии.

$$T + \Pi = T_o + \Pi_o \quad \mapsto \quad \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{\gamma \cdot M \cdot m}{r} = \frac{m \cdot v_o^2}{2} - \frac{\gamma \cdot M \cdot m}{r_o} .$$

Сокращая на $0,5m$ и учитывая, что $v^2 = \dot{\varphi}^2 \cdot r^2 + \dot{r}^2$, а $\gamma \cdot M = \lambda = const$ (гравитационный параметр), из последнего выражения получаем:

$$д \quad \left| \quad \quad \quad \dot{\varphi}^2 \cdot r^2 + \dot{r}^2 - \frac{2\lambda}{r} = v_o^2 - \frac{2\lambda}{r_o}\right.$$

Теперь учитываем, что - см (з):

$$\dot{\varphi}^2 \cdot r^2 = \frac{\dot{\varphi}^2 \cdot r^4}{r^2} = \frac{k^2}{r}; \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{k}{r^2} .$$

(д) принимает вид:

$$е \quad \left| \quad \quad \quad \frac{k^2}{r^2} + \left(\frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{k}{r^2} \right)^2 = v_o^2 + 2\lambda \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o} \right) .\right.$$

Вводим новую переменную s -

$$s = \frac{k}{r} \quad \mapsto \quad r = \frac{k}{s}; \quad \frac{ds}{dr} = -\frac{k}{r^2}; \quad dr = -\frac{r^2}{k} \cdot ds = -\frac{k}{s^2} \cdot ds .$$

Теперь (е) принимает вид:

$$ж \quad \left| \quad \quad \quad s^2 + \left(\frac{ds}{d\varphi} \right)^2 = v_o^2 + \frac{2\lambda}{k} \cdot s - \frac{2\lambda}{r_o} .\right.$$

С целью получения табличного интеграла ещё раз делаем замену переменной:

$$з \quad \left| \quad u = s - \frac{\lambda}{k} \quad \mapsto \quad du = ds; \quad u = \frac{k}{r} - \frac{\lambda}{k}.$$

Чтобы получить квадрат разности и заменить переменную s на u , в (жс) добавляем и отнимаем $\left(\frac{\lambda}{k}\right)^2$. С целью уменьшения длины математических выражений, вводим также постоянную

$$и \quad \left| \quad A = \sqrt{v_o^2 + \left(\frac{\lambda}{k}\right)^2} - \frac{2\lambda}{r_o}.$$

Таким образом, (жс) преобразовано к табличному интегралу:

$$к \quad \left| \quad \frac{du}{\sqrt{u^2 - A^2}} = d\varphi \quad \mapsto \quad \cos(\varphi - \delta) = \frac{u}{A},$$

где δ - величина, определяемая из начальных условий -

$$л \quad \left| \quad \delta = \varphi_o - \arccos \frac{u_o}{A}.$$

Переходя от u к r , из (к) получаем:

$$r = \frac{k}{\frac{\lambda}{k} + A \cdot \cos(\varphi - \delta)}, \quad \text{или}$$

$$33.14 \quad \left| \quad r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(\varphi - \delta)}; \quad \leftarrow \quad p = \frac{k^2}{\lambda}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{k^2}{\lambda^2} \cdot \left(v_o^2 - \frac{2\lambda}{r_o}\right)}.$$

Получено известное уравнение конических сечений в полярной системе координат, т.е 33.14 - это уравнение, отображающее окружность, эллипс, параболу и гиперболу: при $e = 0$ - окружность; при $e < 1$ - эллипс; $e = 1$ - парабола и при $e > 1$ - гипербола.

33.7.3. Анализ уравнения невозмущённой траектории КА

Случай $e = 0$ (круговая орбита)

$\vec{r} \perp \vec{v}$. Тогда, из (6) и (2): $k = r_o \cdot v_o \cdot \sin 90^\circ = r_o \cdot v_o$ и видно, что

$$33.15 \quad \left| \begin{array}{l} e = 0 \quad \text{при} \quad v_o = \sqrt{\frac{\lambda}{r_o}}; \end{array} \right.$$

и действительно:

$$e = \sqrt{1 + \frac{v_o^2 \cdot r_o^2}{\lambda^2} \cdot \left(\frac{\lambda}{r_o} - \frac{2\lambda}{r_o} \right)} = \sqrt{1 + \frac{\lambda}{r_o} \cdot \frac{r_o^2}{\lambda^2} \cdot \left(-\frac{\lambda}{r_o} \right)} = 0.$$

Вычисляем круговую скорость КА, находящегося на расстоянии 200 км от поверхности Земли (где можно пренебречь сопротивлением атмосферы):

$$v_{1(200)} = \sqrt{\frac{\lambda}{r_o}} = \sqrt{\frac{3,9860 \cdot 10^5}{6371 + 200}} \approx 7,8 \text{ км/с.}$$

7,8 км/с называют 1-й космической скоростью - КА становится искусственным спутником Земли.

Случай $e = 1$ (параболическая траектория КА)

Из 33.14 без пояснений видно, что

$$33.16 \quad \left| \begin{array}{l} e = 1 \quad \text{при} \quad v_o = \sqrt{\frac{2\lambda}{r_o}}, \end{array} \right.$$

т.е.

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\lambda}{r_o}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,9860 \cdot 10^5}{6371}} \approx 11,2 \text{ км/с.}$$

Это вторая космическая скорость – при ней КА улетает за пределы сферы земного притяжения.

По рассматриваемым формулам можно подсчитать: чтобы КА смог покинуть пределы Солнечной системы ему необходимо сообщить скорость $v_3 = 16,7$ км/с. Эту скорость называют 3-й космической.

Подробное ознакомление с механикой космических полётов можно начать с книги «Левантовский В.И. Механика космического полёта в элементарном изложении. - М.: Наука, 1974.- 488 с.».

Итак, как и ранее рассмотренные опорные факты, закон сохранения механической энергии надёжен и доверителен - имеет не менее, чем двухвековую проверку. Надо только корректно им пользоваться. Но это уже другой вопрос.

34. Уравнения Лагранжа 2-го рода

34.1. Введение в раздел

Имеется большой массив методов исследования механических явлений, начала которым положил Ж.Л.Лагранж (1731-1813) – изданием в 1788 г. книги «Аналитическая механика». Характеризуя содержащиеся в ней методы, автор писал: «в них нет ни построений, ни геометрических или механических рассуждений; они требуют только алгебраических операций».

Если говорить о конечных результатах, то «Аналитическая механика» - это учение о составлении дифференциальных уравнений применительно к механическим системам, подробное ознакомление с чем можно начинать с книги, например: «Бутенин Н.В. Введение в аналитическую механику.- М.: Наука, 1971.- 264 с.».

Действующие учебные планы не предусматривают изучение будущими инженерами полного курса аналитической механики, но иметь первое представление о применяемых там подходах необходимо. Такая учебная задача и решается через рассмотрение уравнений Лагранжа 2-го рода и изученным в разделе 32 методом возможных перемещений.

Почему 2-го рода, где 1-го? - В упомянутой «Аналитической механике» имеются и уравнения 1-го рода, но за прошедший более чем двухвековой промежуток времени они для инженерного образования потеряли актуальность (их значимость сохранилась лишь для узких специалистов).

Уравнения Лагранжа 2-го рода как и закон о сохранении полной механической энергии нельзя применить к любой механической системе, но если в условиях решения конкретной задачи накладываемые ограничения приемлемы, то главными преимуществами этих уравнений оказываются:

- нет забот с выбором принимаемой к рассмотрению механической системы и сложностей с учётом реакций связей;

- нет забот и с поиском необходимой для решения задачи системы уравнений; одинаковость вычислительные процедур у всех конкретных задач, решаемых через уравнения Лагранжа 2-го рода.

Эти уравнения удобны не только для решения отдельных задач динамики, но и для общетеоретических построений (теорий устойчивости, малых колебаний и других).

34.2. Классификация связей

- необходима для описания рамок применимости уравнений Лагранжа 2-го рода.

- 34.1 | Тела, явление сцепления и прочие причины, накладывающие ограничения на перемещение принятой к рассмотрению механической системы, называют *связями*.
- 34.2 | Связи могут выражаться уравнениями и неравенствами. В первом случае их называют *удерживающими* (синоним: двухсторонними); во втором – *неудерживающими* (односторонними).

Примеры удерживающих и неудерживающих связей

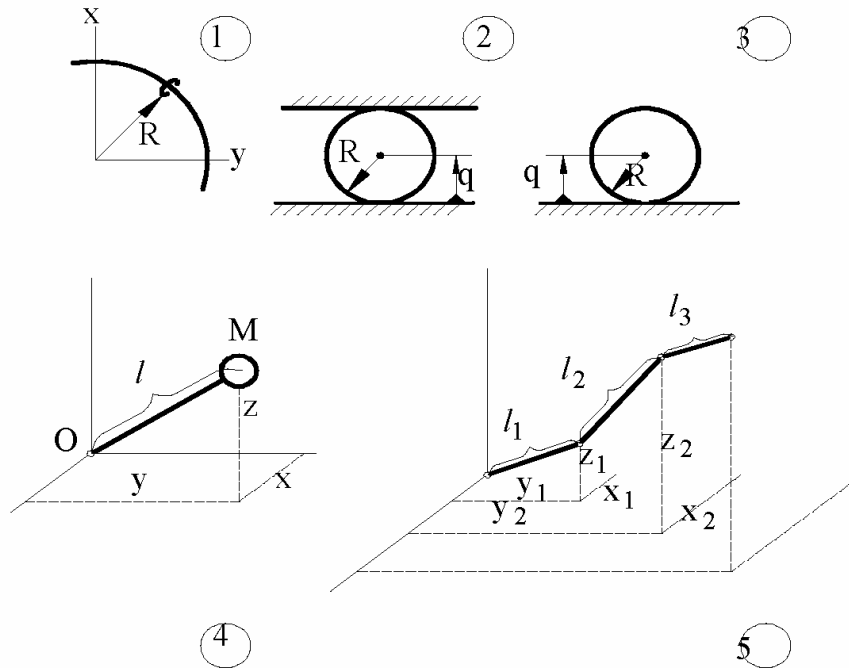


Рисунок 34.1

На рис.34.1.- 1 – на кольцо, радиуса R , надето колечко; кольцо для колечка – связь, описываемая уравнением $x^2 + y^2 = R^2$. - Связь удерживающая.

2 – мяч (или шар) между двумя плоскостями. Связь описывается равенством $q = R$. Связь удерживающая.

3 – мяч на плоскости $\mapsto q \geq R \mapsto$ связь неудерживающая.

4 – материальная точка M на конце стержня $\mapsto x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \mapsto$ связь удерживающая.

если 4 – материальная точка М на конце нити $\mapsto x^2 + y^2 + z^2 \leq \ell^2 \mapsto$
связь неудерживающая.

5 – трёхстержневая со сферическими шарнирами система . Её положение определяется тремя точками –

с координатами $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3$ -, которые связаны уравнениями:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \ell_1^2 = 0; \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - \ell_2^2 = 0; \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 - \ell_3^2 = 0 \quad \mapsto$$

число степеней свободы - $S = 3 \cdot 3 - 3 = 6$; связи удерживающие.

34.3 | Уравнения Лагранжа 2-го рода выводятся в предположении, что все связи удерживающие.

Связи бывают *стационарные* и *нестационарные*. Иначе: зависящие и независящие от времени.

Все рассмотренные (по рис.34.1) удерживающие связи стационарные. Пример нестационарной связи: точка движется по наружной поверхности резиновой сферы, которая надувается компрессором. Радиус оболочки – переменная во времени величина, т.е. связь описывается уравнением:

$$x^2 + y^2 + z^2 - [R(t)]^2 = 0.$$

34.4 | Уравнения Лагранжа 2-го рода выводятся для механических систем, содержащих как стационарные, так и нестационарные связи.

Связи делят также на *голономные* и *неголономные*.

Голономные – это связи, которые удаётся представить математическими зависимостями между координатами (определяющими положение одних тел относительно других).

Все рассмотренные на рис.1 удерживающие связи голономные.

Однако встречаются случаи, когда попытки получить голономные связи к успеху не приводят. В частности, это не удаётся сделать для шара, катящегося без проскальзывания по поверхности - в составляемые уравнения входят не только координаты, но и производные от них по времени, а проинтегрировать эти дифференциальные уравнения никто не может. Такие связи называют неголономными; иначе: неинтегрируемыми.

34.5 | Уравнения Лагранжа 2-го рода выводятся в предположении, что все связи голономные.

34.3 Вывод уравнений Лагранжа 2-го рода

34.3.1. Главные предпосылки к выводу

Располагая себя в инерциальной системе отсчёта, принимаем к рассмотрению механическую систему с удерживающими и голономными связями.

S - степень её подвижности;

$q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_S$ - обобщённые координаты;

$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_i, \dots, \dot{q}_S$ - обобщённые скорости.

Принятую к рассмотрению механическую систему представляем состоящей из частиц. Их положение относительно инерциальной системы определяем радиус-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_v, \dots$

Т.к. к рассмотрению принята система с удерживающими и голономными связями, в которой наряду со стационарными могут быть и нестационарные связи, то в общем случае радиус-векторы \vec{r} будут функциями не сложнее, чем

$$a \quad \left| \quad \vec{r}_v = \vec{r}_v(q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_S; t) \quad \leftarrow v = 1, 2, 3, \dots$$

т.е. написанный в правой части нижний индекс v при \vec{r} означает, что для различных частиц функции различны – положение каких-то из них могут определяться всеми независимыми переменными, положение других может оказаться функцией 1-й, 2-х, 3-х и т.д. переменных.

34.3.2. Понятие об обобщённых силах.

Уравнения динамического равновесия в обобщённых силах

В разделе 32 получено уравнение возможных работ:

$$\delta A^E + \delta A^I + \delta A^P = 0.$$

Оно справедливо для любого возможного перемещения системы. Но для решения конкретных задач все возможные перемещения не нужны. Нужны лишь в количестве, обеспечивающем составление максимума независимых друг от друга уравнений, а их S (S - число степеней свободы механической системы). Причём, нужны такие возможные перемещения, при которых алгебраические преобразования сводятся до минимума. А там же (в разделе 32) было показано, что простота достигается одиночными вариациями обобщённых координат.

В развёрнутом виде эти простейшие, в количестве S , уравнения предстают в виде столбца уравнений из S строк, с соответствующими нижними индексами, а в свёрнутом виде:

$$\delta A_i^E + \delta A_i^I + \delta A_i^P = 0 \quad \leftarrow (i = 1, 2, \dots, S).$$

Делим левую и правую части записанного уравнения на вариацию i -той обобщённой координаты (на δq_i). Получающиеся отношения называют:

$$Q_i^E = \frac{\delta A_i^E}{\delta q_i} - i\text{-тая внешняя обобщённая сила; } Q_i^I = \frac{\delta A_i^I}{\delta q_i} - i\text{-тая внутренняя}$$

обобщённая сила; $Q_i^\Phi = \frac{\delta A_i^\Phi}{\delta q_i} - i\text{-тая обобщённая сила инерции.}$

Итак, получены

$$б \quad \left| \begin{array}{l} \text{уравнения возможных работ и мощностей в обобщённых силах -} \\ Q_i^E + Q_i^I = -Q_i^\Phi \quad \leftarrow (i = 1, 2, \dots, S). \end{array} \right.$$

12.3.3. Рекомендация по вычислению обобщённых сил

$$Q_i^E = \frac{\delta A_i^E}{\delta q_i} = \frac{\delta A_i^E : \delta t}{\delta q_i : \delta t} = \frac{W_i^E}{\delta q_i : \delta t} = \frac{W_i^E}{V_{qi}} = \frac{\sum (\vec{R}_v^E \cdot \vec{V}_{vi})}{V_{qi}} = \sum (\vec{R}_v^E \cdot \vec{u}_{vi}), \quad \text{где}$$

\vec{u}_{vi} - возможная скорость v -той точки, выраженная в долях скорости V_{qi} одиночной вариации i -той обобщённой координаты (или – передаточное отношение от i -той обобщённой координаты к v -тому объекту механической системы – частице, телу). Итак,

$$34.6 \quad \left| \begin{array}{l} \text{формулы для вычисления обобщённых сил:} \\ Q_i^E = \sum (\vec{R}_v^E \cdot \vec{u}_{vi}); \quad Q_i^I = \sum (\vec{R}_v^I \cdot \vec{u}_{vi}) \quad \leftarrow (i = 1, 2, \dots, S), \quad \text{где} \\ \vec{u}_{vi} - \text{вектор передаточного отношения от } i\text{-той обобщённой коор-} \\ \text{динаты к } v\text{-той точке.} \end{array} \right.$$

Т.к. результат не зависит от скорости вариации обобщённой координаты (см. раздел 32), то при конкретных расчётах скорости вариаций обобщёнными координатами (V_{qi}) можно принимать равными единице (делить на единицу всегда проще), например 1 м/с.

34.3.4 Три математические зависимости, используемые в непосредственном выводе уравнений Лагранжа 2-го рода

Действительная скорость v -той частицы:

$$\vec{v}_v = \dot{\vec{r}}_v = \text{применяем правило взятия производной функции многих переменных} = \\ = \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i + \dots + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_s} \cdot \dot{q}_s + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} \quad \mapsto \quad \text{Т.к.}$$

$\vec{r}_v = \vec{r}_v(q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_S; t)$, то в записанных частных от него производных не могут появиться обобщённые скорости. Поэтому:

$$в \quad \left| \quad \frac{\partial \vec{v}_v}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \quad \leftarrow (i = 1, 2, \dots, S).$$

Из множества возможных движений частиц принимаем подмножество, описываемое выражением:

$$\vec{V}_v = \frac{\delta \vec{r}_v}{\delta t} = \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_1} \cdot \frac{\delta q_1}{\delta t} + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_2} \cdot \frac{\delta q_2}{\delta t} + \dots + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \cdot \frac{\delta q_i}{\delta t} + \dots + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_S} \cdot \frac{\delta q_S}{\delta t} + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t},$$

которое в свою очередь, сужаем до S - ограничиваемся одиночными вариациями обобщённых координат. Тогда:

$$\vec{V}_{vi} = \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_1} \cdot 0 + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_2} \cdot 0 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \cdot \frac{\delta q_i}{\delta t} + \dots + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_S} \cdot 0 + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} \cdot 0 \quad \text{и при } \frac{\delta q_i}{\delta t} = 1,$$

о допустимости чего уже говорилось, получаем:

$$з \quad \left| \quad \vec{V}_{vi} = \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \cdot 1 \mapsto \quad \frac{\vec{V}_{vi}}{1} = \vec{u}_{vi} = \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \quad \leftarrow (i = 1, 2, \dots, S).$$

Для третьей математической зависимости используем правило взятия производной от произведения двух функций:

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{v}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \right) = \frac{d\vec{v}_v}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} + \vec{v}_v \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \right) \quad \mapsto$$

$$д \quad \left| \quad \frac{d\vec{v}_v}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\vec{v}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \right) - \vec{v}_v \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \right).$$

34.3.5. Непосредственный вывод уравнений Лагранжа 2-го рода

Начинаем с (б):

$$Q_i^E + Q_i^I = -Q_i^{\Phi} = -\sum (\vec{\Phi}_v \cdot \vec{u}_{vi}) = \sum \left[\left(m_v \cdot \frac{d\vec{v}_v}{dt} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \right] = \text{учитываем (д)} =$$

$$= \sum \left[m_v \cdot \frac{d}{dt} \left(\vec{v}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \right) - m_v \cdot \vec{v}_v \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \right) \right] = A - B, \quad \text{где:}$$

$$A = \sum \left[m_v \cdot \frac{d}{dt} \left(\vec{v}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \right) \right] = \sum \left[m_v \cdot \frac{d}{dt} \left(\vec{v}_v \cdot \frac{\partial \vec{v}_v}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] = \sum \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{m_v \cdot \vec{v}_v^2}{2} \right) \right] \right\} =$$

$$= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left[\sum \left(\frac{m_v \cdot v_v^2}{2} \right) \right] \right\} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right);$$

$$B = -\sum \left[m_v \cdot \vec{v}_v \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \right) \right] = -\sum \left[m_v \cdot \vec{v}_v \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{d\vec{r}_v}{dt} \right) \right] = -\sum \left(m_v \cdot \vec{v}_v \cdot \frac{\partial \vec{v}_v}{\partial q_i} \right) =$$

$$= -\sum \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{m_v \cdot \vec{v}_v^2}{2} \right) = -\frac{\partial}{\partial q_i} \left[\sum \left(\frac{m_v \cdot v_v^2}{2} \right) \right] = -\frac{\partial T}{\partial q_i}.$$

Итак, получены

уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$34.7 \quad \left| \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i^E + Q_i^I \quad \leftarrow (i = 1, 2, \dots, S). \right.$$

Замечание: для механических систем с идеальными связями, что часто принимается в практике расчётов (с целью преодоления проблем, возникающих при учёте внутренних сил), $Q_i^I = 0$.

ПРИМЕР 34.1.- Двухтросовая система, с тремя грузами, неподвижным и подвижным шкивами

Дано. - На рис.34.2: x_1, x_2, x_3, x_4 - координаты, определяющие положения тел H, O, D, A . Их массы: $m^H = 200$ кг; $m^r = 100$ кг; $m^D = 300$ кг; $m^A = 600$ кг. Ось O вращения подвижного шкива (радиуса $r = 0,15$ м и имеющего жёлоб под нерастяжимый трос $DEFH$) соединена с грузом A также нерастяжимым тросом $ABCO$, который переброшен через шкив BC (с неподвижной осью вращения и жёлобом под этот трос; его радиус $R = 0,25$ м). Угловые положения шкивов определяются переменными φ^r - подвижного и φ^R - неподвижного шкивов. OF -

К примеру 34.1 - на уравнения Лагранжа 2-го рода

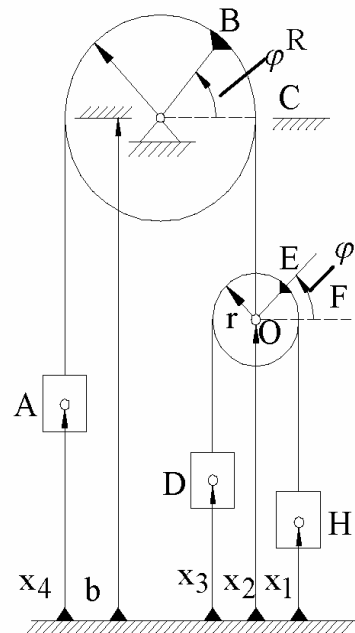


Рисунок 34.2

подвижная горизонталь. Моменты инерции шкивов: $I^R = 2 \text{ кгм}^2$; $I^r = 1 \text{ кгм}^2$.

Требуется. - Определить ускорения всех тел.

Решение. - Положение системы определяется 6-ю координатами. Записываем уравнения связей и из них, взяв производные, устанавливаем связи между скоростями и ускорениями:

$$\begin{array}{l|l}
 & x_4 + ABO + x_2 = \text{const}(t) \quad \mapsto \quad \dot{x}_4 + \dot{x}_2 = 0, \\
 & \dot{\dot{x}}_4 + \dot{\dot{x}}_2 = 0; \\
 б & x_3 + DEH + x_1 = 2x_2 + \pi \cdot r \quad \mapsto \quad \dot{x}_3 + \dot{x}_1 = 2 \cdot \dot{x}_2, \\
 & \dot{\dot{x}}_3 + \dot{\dot{x}}_1 = 2 \cdot \dot{\dot{x}}_2; \\
 в & BC + b = BCO + x_2 \quad \mapsto \quad R \cdot \dot{\varphi}^R + b = BCO + x_2 \quad \mapsto \quad R \cdot \dot{\varphi}^R = \dot{x}_2, \\
 & R \cdot \dot{\dot{\varphi}}^R = \dot{\dot{x}}_2; \\
 г & EFH + x_1 = EF + x_2 \quad \mapsto \quad \dot{x}_1 = r \cdot \dot{\varphi}^r + \dot{x}_2, \\
 & \dot{\dot{x}}_1 = r \cdot \dot{\dot{\varphi}}^r + \dot{\dot{x}}_2.
 \end{array}$$

Видим, что шесть координат связаны между собою 4-мя уравнениями. Поэтому число степеней свободы рассматриваемой системы равно двум.

За обобщенные координаты принимаем $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$.

Находим выражение кинетической энергии через обобщенные скорости:

$$T = T^H + T^r + T^D + T^A + T^R \quad \mapsto$$

$$T = \frac{m^H \cdot \dot{x}_1^2}{2} + \left(\frac{m^r \cdot \dot{x}_2^2}{2} + \frac{I^r \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2}{2r^2} \right) + \frac{m^D \cdot (2\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2}{2} + \frac{m^A \cdot \dot{x}_2^2}{2} + \frac{I^R \cdot \dot{x}_2^2}{2R^2}$$

$$\text{Видим, что} \quad \frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0.$$

Теперь находим выражения частных производных от кинетической энергии по обобщенным скоростям:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} &= m^H \cdot \dot{x}_1 + \frac{I^r \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)}{r^2} - m^D \cdot (2\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = \\
 &= \left(m^H + \frac{I^r}{r^2} + m^D \right) \cdot \dot{x}_1 - \left(\frac{I^r}{r^2} + 2 \cdot m^D \right) \cdot \dot{x}_2 =
 \end{aligned}$$

$$= \left(200 + \frac{1}{0,15^2} + 300 \right) \cdot \dot{x}_1 - \left(\frac{1}{0,15^2} + 2 \cdot 300 \right) \cdot \dot{x}_2 = 544 \cdot \dot{x}_1 - 644 \cdot \dot{x}_2;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} &= m^r \cdot \dot{x}_2 - \frac{I^r \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)}{r^2} + 2 \cdot m^D \cdot (2\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + m^A \cdot \dot{x}_2 + \frac{I^R \cdot \dot{x}_2}{R^2} = \\ &= - \left(\frac{I^r}{r^2} + 2 \cdot m^D \right) \cdot \dot{x}_1 + \left(m^r + \frac{I^r}{r^2} + 4 \cdot m^D + m^A + \frac{I^R}{R^2} \right) \cdot \dot{x}_2 = \\ &= - \left(\frac{1}{0,15^2} + 2 \cdot 300 \right) \cdot \dot{x}_1 + \left(100 + \frac{1}{0,15^2} + 4 \cdot 300 + 600 + \frac{2}{0,25^2} \right) \cdot \dot{x}_2 = \\ &= -644 \cdot \dot{x}_1 + 1976 \cdot \dot{x}_2. \end{aligned}$$

Итак, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = 544 \cdot \ddot{x}_1 - 644 \cdot \ddot{x}_2;$ $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) = -644 \cdot \ddot{x}_1 + 1976 \cdot \ddot{x}_2.$

Теперь вычисляем обобщённые силы.

Скорость вариации 1-й обобщённой координаты принимаем сонаправленной с \bar{x}_1 и по модулю равной 1. Тогда

$$\begin{aligned} Q_1^E &= Q_1^H + Q_1^r + Q_1^D + Q_1^A = -(m^H \cdot g) \cdot 1 + (m^r \cdot g) \cdot 0 + (m^D \cdot g) \cdot 1 + (m^A \cdot g) \cdot 0 \quad \mapsto \\ Q_1^E &= (m^D - m^H) \cdot g = (300 - 200) \cdot 9,8 = 980 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Рекомендация:

34.8 | чтобы не запутываться со знаками (плюс или минус) скорости вариаций обобщённых координат направляйте в сторону положительного отсчёта самих координат.

Скорость вариации 2-й обобщённой координаты принимаем сонаправленной с \bar{x}_2 и по модулю также равной 1. Тогда

$$\begin{aligned} Q_2^E &= Q_2^H + Q_2^r + Q_2^D + Q_2^A = (m^H \cdot g) \cdot 0 - (m^r \cdot g) \cdot 1 - (m^D \cdot g) \cdot 2 + (m^A \cdot g) \cdot 1 \quad \mapsto \\ Q_2^E &= (m^A - m^r - 2 \cdot m^D) \cdot g = (600 - 100 - 2 \cdot 300) \cdot 9,8 = -980 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Итак, составлена система 2-х уравнений:

$$544 \cdot \ddot{x}_1 - 644 \cdot \ddot{x}_2 = 980 \quad \Leftrightarrow \quad -644 \cdot \ddot{x}_1 + 1976 \cdot \ddot{x}_2 = -980.$$

Из которых:

$$\ddot{x}_1 = 1,876 \text{ м/с}^2; \quad \ddot{x}_2 = 0,064 \text{ м/с}^2.$$

Из (а) - (г): $\ddot{x}_4 = -0,064 \text{ м/с}^2; \quad \ddot{x}_3 = -1,748 \text{ м/с}^2;$

$$\ddot{\varphi}^R = 0,256 \text{ с}^{-2}; \quad \ddot{\varphi}^r = 12,1 \text{ с}^{-2}.$$

34.4. Уравнения Лагранжа 2-го рода для консервативных систем

12.4.1. Математические зависимости к непосредственному выводу уравнений Лагранжа 2-го рода в форме через кинетический потенциал

Напоминаем (см. предыдущий раздел): консервативные – это системы, в которых действуют только потенциальные силы (и внешние, и внутренние).

34.9 | Кинетический потенциал (иначе: функция Лагранжа) – это величина, определяемая разностью кинетической (T) энергии системы и потенциальной (Π), т.е. $L = T - \Pi$.

Потенциальная энергия системы – это сумма потенциальных энергий всех частиц системы:

$$\Pi = \sum \Pi_v .$$

Потенциальная энергия является функцией лишь координат и, поэтому, для любой (ν -той) частицы справедливо:

$$\Pi_\nu = \Pi_\nu(q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_s).$$

Возможное изменение потенциальной энергии ν -той частицы, соответствующее одновременной вариации всех обобщённых координат:

$$\delta \Pi_\nu = \frac{\partial \Pi_\nu}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \frac{\partial \Pi_\nu}{\partial q_2} \cdot \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \Pi_\nu}{\partial q_i} \cdot \delta q_i + \dots + \frac{\partial \Pi_\nu}{\partial q_s} \cdot \delta q_s .$$

При одиночной вариации i -той обобщённой координаты возможное изменение потенциальной энергии равно:

$$\delta \Pi_{\nu i} = \frac{\partial \Pi_\nu}{\partial q_1} \cdot 0 + \frac{\partial \Pi_\nu}{\partial q_2} \cdot 0 + \dots + \frac{\partial \Pi_\nu}{\partial q_i} \cdot \delta q_i + \dots + \frac{\partial \Pi_\nu}{\partial q_s} \cdot 0, \quad \text{т.е.}$$

$$a \quad \left| \quad \delta \Pi_{\nu i} = \frac{\partial \Pi_\nu}{\partial q_i} \cdot \delta q_i \quad \mapsto \quad \frac{\delta \Pi_{\nu i}}{\delta q_i} = \frac{\partial \Pi_\nu}{\partial q_i} .$$

На основании рассмотренного в предыдущем разделе ($dA = -d\Pi$) записываем:

$$\delta A_{\nu i}^\Pi = -\delta \Pi_{\nu i} \quad -$$

б | возможная работа потенциальных сил (внутренних и внешних), приложенных к ν -той частице от одиночной вариации i -той обобщённой координаты, равна взятой со знаком «минус» вариации потенциальной энергии этой же частицы и соответствующая той же одиночной вариации.

34.4.2. Непосредственный вывод уравнений

Преобразуем правую часть уравнений 34.7:

$$Q_i^\Pi = \text{см. пункт 12.3.3} = \frac{\delta A_i^\Pi}{\delta q_i} = \frac{\sum \delta A_{vi}^\Pi}{\delta q_i} = \sum \frac{\delta A_{vi}^\Pi}{\delta q_i} = \text{см. (б) и (а)} =$$

$$= -\sum \frac{\delta \Pi_{vi}}{\delta q_i} = -\sum \frac{\partial \Pi_v}{\partial q_i} = -\frac{\partial (\sum \Pi_v)}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}. \quad \text{Полученное выражение}$$

подставляем в 34.7:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad \mapsto \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_i} = 0.$$

Учитывая 34.9 и то, что

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (T - \Pi) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad (\Pi \text{ есть функция}$$

обобщённых координат, но не скоростей), окончательно получаем

$$34.10 \quad \left| \begin{array}{l} \text{уравнения Лагранжа 2-го рода через кинетический потенциал:} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \leftarrow (i = 1, 2, \dots, S). \end{array} \right.$$

ПРИМЕР 34.2.- Галопирование и подпрыгивание вагона

Дано. – Наложённые на вагон связи позволяют его центру масс перемещаться лишь вдоль оси y (см. рис.34.3) и поворачиваться вокруг Cz . Момент инерции относительно оси Cz и масса вагона (с учётом перевозимого груза) известны. Известны расстояния l между пружинами и их жёсткости (c).

Требуется определить частоты углового (галопирования) и вдоль оси y (подпрыгивание) колебаний.

Решение. - Кинетическая энергия вагона:

К примеру 34.2 на уравнения Лагранжа 2-го рода

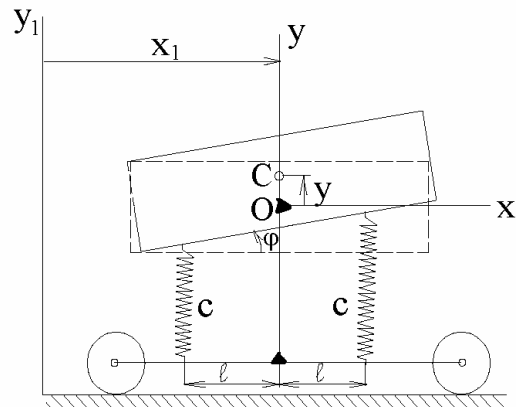


Рисунок 34.3

$$T = 0,5 \cdot m \cdot (\dot{x}_1^2 + \dot{y}^2) + 0,5 \cdot I \cdot \dot{\varphi}^2.$$

Потенциальная энергия системы «вагон-пружины»:

$$\text{от силы тяжести} - \Pi^G = y \cdot G + const;$$

$$\text{правой пружины} - \Pi' = 0,5 \cdot c \cdot p^2 = 0,5 \cdot c \cdot (\delta_{CT} - y - \ell \cdot \varphi)^2;$$

$$\text{левой пружины} - \Pi'' = 0,5 \cdot c \cdot \lambda^2 = 0,5 \cdot c \cdot (\delta_{CT} - y + \ell \cdot \varphi)^2, \quad \text{где}$$

p и λ - отличающиеся друг от друга текущие деформации правой и левой пружин, а $\delta_{CT} = \frac{0,5 \cdot G}{c}$ - их деформации в положении статического

равновесия (когда колебаний нет).

Записываем функцию Лагранжа:

$$L = 0,5 \cdot m \cdot (\dot{x}_1^2 + \dot{y}^2) + 0,5 \cdot I \cdot \dot{\varphi}^2 - (y \cdot G + const) - \\ - 0,5 \cdot c \cdot (\delta_{CT} - y - \ell \cdot \varphi)^2 - 0,5 \cdot c \cdot (\delta_{CT} - y + \ell \cdot \varphi)^2.$$

Берём от неё производные:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I \cdot \dot{\varphi}; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m \cdot \dot{y};$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = c \cdot (\delta_{CT} - y - \ell \cdot \varphi) \cdot \ell - c \cdot (\delta_{CT} - y + \ell \cdot \varphi) \cdot \ell = -2 \cdot c \cdot \ell^2 \cdot \varphi;$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -G + c \cdot (\delta_{CT} - y - \ell \cdot \varphi) + c \cdot (\delta_{CT} - y + \ell \cdot \varphi) = \\ = (2 \cdot c \cdot \delta_{CT} - G) - 2 \cdot c \cdot y = -2 \cdot c \cdot y.$$

Таким образом, получаем 2 уравнения:

$$I \cdot \ddot{\varphi} + 2 \cdot c \cdot \ell^2 \cdot \varphi = 0 \quad \mapsto \quad \ddot{\varphi} + k_\varphi^2 \cdot \varphi = 0 \quad \mapsto$$

$$\varphi = A_\varphi \cdot \sin(k_\varphi \cdot t + \alpha) \quad \leftarrow k_\varphi = \sqrt{\frac{2 \cdot c}{I}} \cdot \ell;$$

$$m \cdot \ddot{y} + 2 \cdot c \cdot y = 0 \quad \mapsto \quad \ddot{y} + k_y^2 \cdot y = 0 \quad \mapsto$$

$$y = A_y \cdot \sin(k_y \cdot t + \beta) \quad \leftarrow k_y = \sqrt{\frac{2 \cdot c}{m}}.$$

35. Начальные сведения об устойчивости равновесия механических систем

35.1. Введение в раздел

Зачатки современной формулировки критерия устойчивости равновесия обнаруживают (применительно к системам, находящимся под действием сил тяжести) у Е.Торичелли (1608-1647).

По заказу Петербургской академии наук «разработать теорию устойчивости корабля» Л.Эйлер (1707-1783) написал и издал двухтомник «Корабельная наука». О важности подобных работ свидетельствуют многие трагические факты. Вот отдельные из них: 7.09.1870 вблизи мыса Финистерре во время пробного плавания (после постройки) был опрокинут налетевшим шквалом английский броненосец «Капитан», из 550 человек спаслось 17; 22.09.1907 г. при спуске на воду на итальянской верфи опрокинулся пассажирский пароход «Принцесса Иоланта», рассчитанный на перевозку 1500 пассажиров; в обоих случаях причина одна – просчёты при проектировании; в 1915 г. в чикагском порту перевернулся пароход, погибло 800 человек (причина – пренебрежение правилами эксплуатации – пароход был рассчитан на 1000 пассажиров, а на борт взято 2400 и в момент отплытия большинство из них вышло на верхнюю палубу).

Стимулировали развитие теории устойчивости также потребности обеспечивать безаварийную работу регуляторов и гироскопов, артиллерийских снарядов, самолётов, автомобилей и других технических объектов.

Ж.Лагранж (1736-1813) сформулировал теорему, определяющую достаточные условия устойчивости равновесия произвольной консервативной системы. Вопросами устойчивости занимались также Л.Дирихле (1805-1859), У.Томсон (лорд Кельвин: 1824-1907), Д.Максвелл (1831-1879), И.Вышнеградский (1832-1895), Э.Раус (1831-1907), Н.Жуковский (1847-1921).

В 1892 году опубликовал свою докторскую диссертацию «Общая задача об устойчивости движения» А.Ляпунов (1857-1918), который дал строгое и удачное определение устойчивости движения.

Дальнейшее продвижение теории устойчивости к своему становлению связано с именами А.Крылова (1863-1945), Н.Четаева (1902-1959) и многих других отечественных и зарубежных учёных.

Подробное ознакомление с вопросом можно начинать с книги: «Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения.- М.: Наука, 1976.- 320 с.».

35.2 Условия равновесия консервативных систем

Перед тем как исследовать систему на устойчивость (или неустойчивость), необходимо определить положение её равновесия.

Из уравнений Лагранжа 2-го рода (в форме через кинетический потенциал – см. 34.10) прямо следуют

35.1 | условия равновесия консервативных систем:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \quad \leftarrow i = 1, 2, \dots, S.$$

35.3. Понятие об устойчивости равновесия

Примеры устойчивого и неустойчивого равновесия

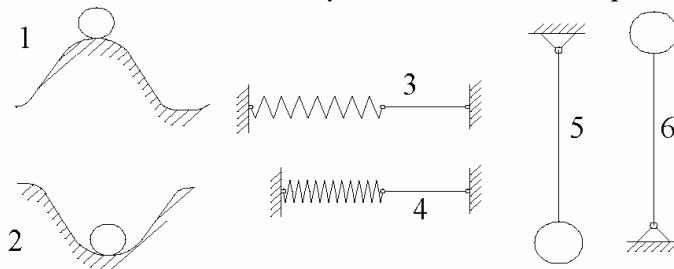


Рисунок 35.1

На рис.35.1: 1 и 2 – мяч на бугорке, и в ямке; 3 и 4 – шарнирное соединение стержня с растянутой, и сжатой пружиной; 5 и 6 – стержень с шариком на конце шарнирно соединённый с потолком, и полом.

Полагаем, что читатель самостоятельно решит, где положение равновесия устойчиво, где неустойчиво.

Но если бы было всё так просто, создавать теорию устойчивости не требовалось бы. Через подраздел будет приведен пример, в котором устойчивость (либо неустойчивость) равновесия не очевидны.

Сейчас же дадим общее понятие:

35.2 | равновесие называют устойчивым, если система после её отклонения (или после придания небольшой начальной скорости) начинает колебаться около своего начального положения, а затем (после затухания колебаний) возвращается в исходное положение.

13.4. Основные результаты общетеоретических исследований устойчивости равновесия механических систем

35.3a | Закон устойчивости равновесия консервативных систем:
положение равновесия консервативной системы устойчиво, если её потенциальная энергия в этом положении имеет строгий минимум.

Напоминание: понятие «строгий минимум» (синонимы: «изолированный минимум», при двух степенях свободы – «потенциальная яма») применимо к системам с несколькими степенями свободы – это минимум функции по всем обобщённым координатам.

Рассматриваемый подраздел является ещё одним примером, иллюстрирующим ранее высказывавшееся мнение о том, что настоящие теории - это плод учёных многих поколений и стран.

Ещё Торричелли, основываясь на результатах, корни которых теряются в глубокой древности (добавляя, естественно, и своё), давал правильные результаты применительно к механическим системам, на которые действуют силы тяжести. В частности, он писал: «Два связанных друг с другом тяжёлых тела не могут сами собой двигаться, если их центры тяжести не опускаются».

Сформулировал результат 35.3а, в виде теоремы, Лагранж, но доказал её Дирихле. Томсон расширил результат 35.3а:

35.3б | равновесие, устойчивое при одних потенциальных силах, сохраняет устойчивость при добавлении гироскопических и диссипативных сил.

Гироскопические силы – это те, работа которых на действительном перемещении всегда равна нулю.

Диссипативные силы – это силы, приводящие к рассеиванию энергии; обычно – это силы трения.

Возникает вопрос об обратимости результата 35.3: «Можно ли утверждать, что при отсутствии строгого минимума потенциальной энергии равновесие будет неустойчивым»? Впервые такой вопрос был поставлен Ляпуновым. И частично на него он ответил сам – двумя теоремами. Затем это было расширено ещё теоремами Н.Четаева и Н.Красовского. И всё же полного ответа на поставленный Ляпуновым вопрос до сих пор нет. Более того, имеются примеры устойчивого равновесия и при отсутствии строгого минимума (см., например, с.195 в книге «Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике.- М.: Наука, 1966.- 300 с.»).

Но инженер действует конкретно, с ответственностью за принимаемые решения, но к сожалению не может ждать появления исчерпывающего ответа на сформулированный Ляпуновым вопрос. Поэтому *рекомендация*:

35.4 | если для положения равновесия минимум потенциальной энергии не установлен, принимайте это положение за неустойчивое, считая, что вероятность возможной ошибки не превысит (ориентировочно) 1%.

35.5. Об исследовании на устойчивость равновесия механических систем с одной степенью свободы

Вначале, учитывая известные из курса высшей математики результаты, заметим: если в положении равновесия оказывается, что

$$\frac{d^2 \Pi}{dq^2} > 0, \text{ то равновесие устойчиво; если } \frac{d^2 \Pi}{dq^2} < 0, \text{ - неустойчиво.}$$

Может оказаться, что в положении равновесия вторая производная от потенциальной энергии по обобщённой координате равна нулю. В этом случае

следует вычислять производные более высокого порядка и если первая из них неравная нулю, окажется чётной и большей нуля – потенциальная энергия имеет минимум и равновесие устойчиво, если меньше нуля – потенциальная энергия имеет максимум и положение равновесия неустойчиво.

Если же первая, отличающаяся от нуля, производная высшего порядка окажется нечётной, то потенциальная энергия в положении равновесия не имеет ни максимума, ни минимума и окончательно решать вопрос надо через эксперимент, либо, в соответствии с результатом 35.4, принимать решение, что равновесие неустойчиво.

ПРИМЕР 35.1 - Исследовать на устойчивость равновесия механическую систему «брусек на цилиндре»

Дано.- На рис.35.2 изображён брусек, толщиной $2 \cdot h$, горизонтально положенный серединой на неподвижный шероховатый цилиндр радиуса r . Это положение принимаем за начальное. Ему соответствуют: K_0 - проекция на плоскость xOy линии бруска, соприкасающейся с цилиндром; C_0 - центр тяжести бруска в начальном положении.

Определить.- Положение равновесия и установить устойчиво ли оно (свалится ли с цилиндра брусек, или нет, если перестать поддерживать его рукой)?

Решение.- Даем малое угловое (φ) перемещение бруску (качением - без проскальзывания, т.к. он по условию шероховатый). Центр его тяжести займёт новое положение - C ; по эвольвенте переместится вверх-вправо и точка K .

За нулевой уровень потенциала принимаем плоскость xOz . Тогда потенциальная энергия бруска будет определяться формулой: $\Pi = G \cdot y_C$.

Выразим y_C через φ . Для этого ломаную $OAKC$ (состоящую из 3-х отрезков прямых - $OA \perp AK \perp KC$) проектируем на ось y (учитывая, что $\overline{AK} = \cup AK_0 = r \cdot \varphi$):

$$y_C = r \cdot \cos \varphi + (r \cdot \varphi) \cdot \sin \varphi + h \cdot \cos \varphi, \quad \text{т.е.}$$

$$\Pi = G \cdot [r \cdot \varphi \cdot \sin \varphi + (r + h) \cdot \cos \varphi].$$

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = G \cdot [r \cdot \sin \varphi + r \cdot \varphi \cdot \cos \varphi - (r + h) \cdot \sin \varphi] = G \cdot [r \cdot \varphi \cdot \cos \varphi - h \cdot \sin \varphi].$$

К примеру
«брусек на цилиндре»

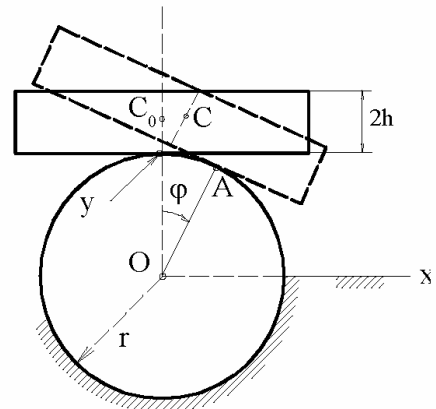


Рисунок 35.2

Чтобы установить положение равновесия, надо приравнять нулю полученную производную. При этом ясно, что $\frac{d\Pi}{d\varphi} = 0$ при $\varphi = 0$.

В рассматриваемом примере положение равновесия было очевидно, но вот устойчиво оно или нет, не видно. Берём ещё одну производную –

$$\frac{d^2\Pi}{dq^2} = G \cdot (r \cdot \cos \varphi - r \cdot \varphi \cdot \sin \varphi - h \cdot \cos \varphi).$$

При $\varphi = 0$ (положение равновесия):

$$\left(\frac{d^2\Pi}{dq^2}\right)_{\varphi=0} = G \cdot (r \cdot \cos 0 - r \cdot 0 \cdot \sin 0 - h \cdot \cos 0) = (r - h) \quad \text{и видим:}$$

$$\text{при } h < r \quad \left(\frac{d^2\Pi}{dq^2}\right)_{\varphi=0} > 0, \quad \text{при } h > r \quad \left(\frac{d^2\Pi}{dq^2}\right)_{\varphi=0} < 0.$$

Вывод: если толщина бруска ($2h$) меньше диаметра цилиндра, то брусок будет лежать на цилиндре; если больше - нет.

35.6*. Краткие сведения об исследовании на устойчивость равновесия механических систем с несколькими степенями свободы (о критерии Сильвестра)

Для исследуемой системы составляют выражение потенциальной энергии. В соответствии с введёнными понятиями оно может быть лишь функцией обобщённых координат (но не скоростей) -

$$a \quad \left| \quad \Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_s). \right.$$

Эту функцию координат заменяют рядом Маклорена. При этом, чтобы избавиться от постоянной составляющей ряда потенциальную энергию системы в положении её равновесия принимают равной нулю.

Обобщённые силы в положении равновесия равны нулю (см. предыдущий подраздел). Поэтому из ряда Маклорена выпадает и линейная составляющая, т.е. коэффициенты при q_i ($i = 1, 2, \dots, S$) оказываются равными нулю.

Квадратичную часть ряда (члены, содержащие попарные произведения обобщённых координат, включая и q_i^2) сохраняют, остальными членами, как величинами более высокого порядка малости, пренебрегают.

Взятое описанным способом из ряда Маклорена математическое выражение называют *квадратичной формой*.

Коэффициенты при попарных произведениях обобщённых координат квадратичной формы определяются через соответствующие частные производные от (a) , т.е. коэффициенты c_{ij} при произведениях $(q_i \cdot q_j)$ определяют по

формуле:
$$c_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \cdot \partial q_j} \right)_0 \quad \leftarrow i, j = 1, 2, \dots, S.$$

По коэффициентам c_{ij} квадратичной формы составляется матрица (размером $S \times S$).

Критерий Сильвестра: если все главные диагональные миноры матрицы коэффициентов квадратичной формы больше нуля, то потенциальная энергия в положении равновесия имеет минимум и, поэтому, положение равновесия устойчиво. В противном случае – нет.

35.7. О явлениях возможного «выбивания» и «выпрыгивания» систем из потенциальных ям

На рис.35.3 изображено две ямы – глубокая и мелкая. У первой $H = 1$ м, у второй $h = 0,1$ мм. V и v – скорости, приобретаемые шариками от случайных на них воздействий – передаваемые через фундамент (землю) толчки, порывы ветра, удары птиц и пр.

Формально-качественные исследования в обоих случаях покажут на устойчивость равновесия, но чтобы шар безвозвратно покинул яму: в 1-м случае ему потребуется начальная скорость (от случайной силы)

$$V = \sqrt{2 \cdot g \cdot H} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 1} = 4,5 \text{ м/с};$$

во 2-м случае всего $v = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 0,0001} = 0,045 \text{ м/с}.$

В следующем разделе мы ознакомимся с явлением резонанса - амплитуды колебаний по причине тех или иных периодических возмущений могут возрасти до такого уровня, что система не сможет возвратиться в положение равновесия и «выпрыгнет» из него. Поэтому

35.5 | *рекомендация:* исследуя системы на устойчивость равновесия следует помнить о случайных силах и резонансах, которые могут приводить к явлениям «выбивания» и «самовыпрыгивания» систем из потенциальных ям.

К потенциальным ямам

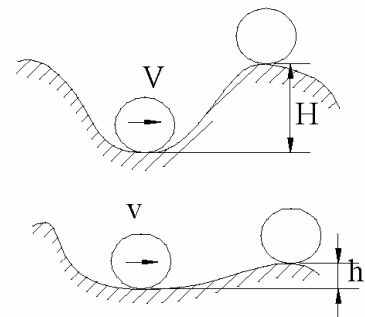


Рисунок 35.3

36. Начальные сведения о колебательных процессах в механических системах

36.1. Введение в раздел

Трудно назвать область техники, в которой бы от специалиста не требовалось знания явлений, наблюдаемых в колебательно движущихся системах.

Их востребованность чаще всего обусловлена необходимостью решать задачи по предупреждению аварий, по устранению (либо снижению) уровней шума и вибраций. Часто такие знания требуются для создания новых объектов техники и технологических процессов.

Некоторые закономерности колебательных процессов известны издавна: Г.Галилей (1562-1642) установил изохронность малых колебаний математического маятника; Х.Гюйгенс (1629-1695) описывал явление синхронизации двух маятниковых часов, установленных на одной балке (многочисленные рассинхронизации их хода всегда заканчивались самосинхронизацией).

При решении дифференциальных уравнений, описывающих колебания, мы пользуемся подстановками Л.Эйлера (1707-1783). Основы теории малых колебаний заложены Ж.Лагранжем (1731-1813) – в его «Аналитической механике». В 1873 г. появился солидный труд «Некоторые общие теоремы, касающиеся колебаний» Д.Стрэтта (он же лорд Рэлей: 1842-1919).

О развитости теории колебаний свидетельствует приводимый в конце раздела далеко не полный список литературы по теории колебаний.

36.2. О практической важности теории колебаний

Франция, 1750-й год. 487 солдат чеканят шаг по мосту длиной 102м близ города Анжера. Частота шага совпала с частотой собственных колебаний моста – сооружение рухнуло – погибло 226 человек. После этого в армиях мира придерживаются правила: «По мостам ходить не в ногу». Незнание этого правила чревато неприятностями -- Петербург, 1915 год, эскадрон гвардейской кавалерии вместе с мостом рухнул в реку Фонтанка - погибло 26 человек.

Жилые дома, административные и производственные здания можно строить с учётом и без учёта возможных сотрясений почвы.

Япония (Токио и Йокогама), 1.09.1923 г. Сильнейшими колебаниями почвы разрушено полностью 128266 и частично 126233 жилых построек – погибло 142807 человек; за 8 секунд землетрясение причинило Японии убытков в 5 раз больше, чем понесённые ею за 19 месяцев русско-японской войны 1904-1905 года.

Аналогичная катастрофа унесла около 200000 жизней 16.12.1920 г. и в Китае (провинция Ганьсу). Землетрясения всегда были и будут. Забывчивость и пренеб-

режительные отношения наказуемы - погибло: в Армении (Спитак) 7.12.1988 г. 150000, в Индии 26.01.2001 г. 70000 человек; и т.д. Всего на Земле ежегодно происходит порядка 100000 землетрясений разной бальности.

По различному можно строить мосты и другие сооружения.

США, 7.11.1940г. в Такомский пролив рухнул недавно пущенный в эксплуатацию мост, длиной 1662 м. Процесс разрушения был заснят на киноплёнку. Это существенно облегчило выявление причины катастрофы - флаттер (одна из разновидностей колебаний). Мост был восстановлен с более широким пролётом и служит до настоящего времени.

Около 80% поломок и аварий приходится на долю недопустимых колебаний, возникающих в различных машинах. Экономисты оценивают, что на восстановление работоспособности машин и механизмов задалживается примерно 50% всех рабочих-машиностроителей и 30% станков. Но к этому необходимо добавить ещё и непредвиденный выход из строя машин, что служит причиной многих простоев и больших потерь изготавливаемой продукции.

Вибрация фундамента приводит к рассеянию механической энергии и, поэтому, к снижению КПД установленной на нём машины. Причём, чем больше амплитуда, тем больше энергии рассеивается. Это специально поставленными опытами в начале 20-го столетия доказал А.Зоммерфельд (1868-1951).

Вибрации увеличивают погрешности приборов и могут выводить их из строя.

Чем выше чистота поверхности детали, тем, как правило, выше её качество (в частности, более высокими оказываются прочностные характеристики). В практике изготовления деталей могут наблюдаться (и наблюдаются) вибрации изготавливаемых деталей и режущих инструментов, что снижает чистоту обрабатываемых поверхностей. Источником подобных вибраций может быть недалеко расположенный другой работающий станок.

Итак,

- 36.1 | знание основных результатов теории колебаний есть средство борьбы за уменьшение ущерба, причиняемого обществу катастрофами и авариями, есть средство увеличения надёжности и долговечности машин, повышения экономической эффективности производства.

Одно из профессиональных заболеваний рабочих горнорудной и угольной промышленности - вибрационная болезнь (боли в суставах верхних и нижних конечностей, головные боли, раздражительность, нарушение сна, боли в сердце), что, в соответствии со списком болезней, является основанием к присвоению групп инвалидности.

Если тракторист не выполняет рекомендаций, направленных на ослабление воздействий низкочастотных колебаний, то у него травмируется хрящевой и связочный аппарат позвоночника и, в результате – радикулит.

Колеблющиеся тела порождают шумы. Специалисты сообщают: во Франции каждый 5-й пациент психиатрических больниц лишился рассудка только из-за шума; в Англии из-за шума каждая 3-я женщина и 4-й мужчина страдают неврозом; в США из 4,5 млн. рабочих, занятых в производстве с интенсивным шумом, 1 млн. страдает значительной потерей слуха.

И не случайно имеются «Санитарные нормы и правила при работе с инструментами, механизмами и оборудованием, создающим вибрации, передаваемые на руки работающих». Аналогичные санитарные нормы имеются и по шуму.

С целью снижения вредного вибрационного и шумового воздействия на человека создаются (и созданы - порядка 50 наименований) различные средства защиты. Среди них: противошумные наушники разных типов (снижающие уровень шума на 10-50 децибелл); специальные рукавицы, применение которых в сочетании с амортизаторами на рукоятках виброинструмента снижает амплитуду передаваемых человеку колебаний в 10 раз; виброзащитная обувь (на «платформе» с надувной полостью); создаются специальные сиденья для тракторов и автомобилей на масло-пневматических подвесках; и т.п. Но прежде, чем заниматься этим

36.2 | надо машины и механизмы проектировать, изготавливать и эксплуатировать так, чтобы они не вибрировали и не шумели.

Специалисты сообщают также: при умственном труде шум снижает работоспособность на 60%, при физическом – на 30.

Итак,

36.3 | знание основных результатов теории колебаний есть средство борьбы за сохранение здоровья, продление жизни и повышение производительности труда людей.

Мы говорили о вреде вибраций. Но люди научились извлекать из них и пользу.

Оказывается, вибрированный бетон более водонепроницаем и, по сравнению с трамбованным, имеет в 2 раза большую прочность на сжатие, в 1,5-1,9 раза большую ударную прочность.

Вибрационный способ измельчения материалов даёт возможность получить более тонкий помол и, как результат, получить более качественный материал. Так, увеличение удельной поверхности цемента с 2500-3000 до 4000-5000 см²/г позволяет повысить предел прочности с 3000-4000 до 5000-7000 Н/см². При этом, время затвердевания цемента значительно сокращается.

Вибрирование применяют для погружения и вытаскивания свай из грунта (усилие вытаскивания при наличии вибраций в 20-50 раз меньше, по сравнению со случаем вытаскивания свай без вибраций).

Вибрирование используется в дорожном строительстве для уплотнения грунтов (виброкатки и пр.), для подбивки щебёнки под шпалы железнодорожного полотна и т.д. В производстве нашли широкое применение вибротранспортёры, виброгрохоты, вибромельницы и другие, им подобные, устройства.

36.4 | Знание основных результатов теории колебаний позволяет использовать их для улучшения технологических процессов и создания специальных машин.

36.3. Основные виды колебаний и главная задача, решаемая в созданной о них теории

36.5 | Принято различать колебания с одной, двумя и т.д., с конечным и бесконечно большим числом степеней свободы. Последние часто называют колебаниями с распределённым параметром.

Частицы тел распределены в пространстве и при попытке строгого подхода часто получается так, что надо рассматривать колебания с распределённым параметром. При их анализе возникают математические трудности. Решения найдены пока для ограниченного числа простейших случаев – струна, прямолинейный стержень, круговое кольцо и некоторые другие. Поэтому при проведении теоретических исследований обычно ограничиваются рассмотрением колебаний с одной, двумя и т.д., с несколькими степенями свободы. В литературе (часть которой приведена в конце раздела) содержится большое количество проверенных рекомендаций по составлению расчётных схем для разнообразных машин и механизмов – см., например, в [14] с.11-18. И этим надо пользоваться. Если же расчётную модель к исследуемой вами механической системе подобрать не удалось, пользуясь литературными данными, не паникуйте – верьте в свои силы. Единственное – не забывайте результаты теоретических исследований, проведенных по составленной вами расчётной схеме, проверять экспериментами и, при необходимости, вносить соответствующие корректировки.

При теоретическом исследовании (с помощью уже изученных опорных фактов и методов теоретической механики) колебательно движущейся системы у вас могут получаться различные виды дифференциальных уравнений.

36.6 | Если в составленных дифференциальных уравнениях показатели степени при обобщённых координатах и их производных равны единицам, а коэффициенты при них – постоянные величины (в конкретных случаях – числа) колебания называют линейными, в противном случае – нелинейными.

По точным аналитическим решениям нелинейных дифференциальных уравнений накоплено мало и чаще всего при получении очередного из них не только инженер, но и математик не знает как его проинтегрировать. По этой при-

чине получаемые нелинейные дифференциальные уравнения заменяют линейными.

Но есть в нелинейных колебаниях и такое, что линейризация дифференциальных уравнений не позволяет увидеть. По этой причине ряд авторов включают в свои книги вопросы и по нелинейным колебаниям (пока об общности подхода говорить рано; речь идёт, как правило, о системах с одной степенью подвижности) – см. [7], [13], [15] и др.

Приводим два примера, когда коэффициенты при обобщённых координатах и их производных оказываются переменными величинами – см. рис.36.1 – качели и переброшенный через шкив канат шахтной подъёмной машины. Кинетический момент определяется как произведение момента инерции (I_O) относительно оси вращения O на угловую скорость ($\dot{\phi}$). Чтобы раскачиваться дети периодически изменяют положение своего центра тяжести относительно оси вращения (изменяют координату x) – поэтому I_O оказывается переменной величиной.

К понятию о параметрических колебаниях

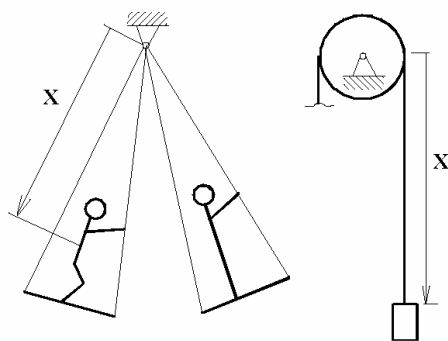


Рисунок 36.1

Длина каната шахтной подъёмной машины может достигать километра и более, а его продольные упругие деформации нескольких десятков сантиметров, т.е. для модели к исследованию канат шахтной подъёмной машины – это пружина с жёсткостью $c = b \cdot x$ (где $b = const$).

- | | |
|------|---|
| 36.7 | Если в составленных дифференциальных уравнениях при обобщённых координатах и/или их производных имеются переменные коэффициенты, колебания называют параметрическими. |
| 36.8 | Если на принятую к рассмотрению систему действуют лишь постоянные внешние силы, но она внутренне устроена так, что колебания всё же возникают, их называют самовозбуждающимися, чаще - автоколебаниями. |

К ним, как частный, но весьма распространённый случай, относят флаттер.

О таком мосте уже упомянуто (во втором подразделе). Причиной разрушения стал ветер, подувший со скоростью 17 м/с, с тем значением, которое для конкретной механической системы и необходимо было, чтобы возбудить колебания недопустимо большой амплитуды. В 30-е годы прошлого столетия по всему миру прокатилась волна катастроф с самолётами; вначале

необъяснимых – на падавших на землю обломках не обнаруживалось ни следов взрыва, ни других известных на то время причин. В конце-концов причина выяснилась – флаттер. Начали его учитывать при проектировании и этот вид катастроф был устранён.

Различают свободные, затухающие и вынужденные колебания.

Свободные колебания уже неоднократно встречались. Для систем с одной степенью свободы см. в подразделах 25.4, 25.6, 26.7, 29.8 и 29.9. Для системы с двумя степенями свободы - подраздел 34.5.

Затухающие колебания будут рассмотрены в следующем подразделе (применительно к линейным системам с одной степенью свободы).

Для целей будущей инженерной практики наиболее интересны вынужденные колебания. Им будет уделено внимание в подразделах 36.5, 36.6 и 36.7.

36.9 | Возмущающие силы могут быть детерминированными функциями времени (т.е. во все моменты времени имеющие строго определённые значения) и случайными.

Детерминированные возмущения описываются не только гармониками (символ «*sin*»); могут быть «выпрямленный синус» (это «*sin*» с удалёнными ниже оси абсцисс его частями), прямоугольный (на графике - прямоугольники, поочерёдно примыкающие снизу и сверху одной стороной к оси времени), пилообразный и т.д. Главное – наличие периодичности. Разложением в ряд Фурье любые периодические функции заменяют аналитической суммой «*sin*»-усов и ведут речь, например, о 1-й, 2-й, 3-й и т.д. гармониках.

При рассмотрении случайных колебаний используется теория вероятностей и математическая статистика. Причём, к случайным колебаниям интерес не просто теоретический. Он определяется запросами практики. В частности, всё колеблется в автомобиле; и не только при его езде по просёлочной ухабистой дороге, но и при движении по, казалось бы, идеальной асфальтовой трассе. Подробно со случайными колебаниями можно ознакомиться в [18].

Перечисленным видам колебательных движений присущи термины: «неограниченный рост амплитуд», «параметрический резонанс» и подобные.

36.10 | Главная задача теории колебаний: выявление условий, позволяющих управлять амплитудами. Чаще всего это делается с целью существенного их снижения и особенно с целью предупреждения возможных резонансных явлений.

В дальнейшем изложении ограничиваемся пояснением сущности резонансных явлений - подробно на примере линейной системы с одной степенью свободы и кратко (приведением в подразделе 7 схематических рекомендаций) по подходу к предупреждению резонансных явлений в механических системах с несколькими степенями свободы.

36.4. Затухающие колебания и аperiodические движения линейных систем с одной степенью свободы и вязким трением

36.4.1. Уравнение и график затухающих колебаний

Излагаемый в подразделе материал может иметь самостоятельное значение - Ш.Кулон (1736-1806) методом затухающих колебаний определял вязкости жидкостей. И всё же излагаемый в подразделе материал более нужен для рассмотрения резонансных явлений – для определения экспериментально-теоретическим способом частот собственных колебаний систем и для получения формулы, по которой вычисляют амплитуды вынужденных колебаний.

36.11 Затухающими колебаниями линейных систем с одной степенью свободы и вязким трением называют движение, описываемое дифференциальным уравнением

$$\ddot{q} + 2n \cdot \dot{q} + k^2 \cdot q = 0 \quad \leftarrow n < k.$$

Называют: n - коэффициент затухания; k - частота собственных колебаний системы.

В случае $n > k$ колебаний не будет, что рассмотрено в 4-м пункте подраздела.

На рис.36.2 изображена схема одной из конкретных механических систем, при описании динамики которой будет получено дифференциальное уравнение 36.11. Предлагаем проделать это самостоятельно. Заметим лишь: в левой нижней части этого рисунка схематически изображён демпфер. Он может иметь различные конструктивные устройства. Главное: на колеблющееся тело с его стороны действует сила сопротивления, подчиняющаяся закону: $\vec{R} = -b \cdot \vec{v}$. Коэффициент b часто называют коэффициентом демпфирования.

Накопленный опыт показывает: при малых скоростях имеет место вязкое трение ($R = b \cdot v$), при больших – турбулентное ($R = b_T \cdot v^2$).

Что значит «малая, большая скорость, где граница»? Это зависит от ряда факторов, но является предметом рассмотрения гидравлики. Главное: опыт показывает - в подавляющем большинстве случаев при рассмотрении колебаний встречается не турбулентное, а вязкое трение.

Дифференциальное уравнение 36.11 может точно математически описывать динамику составленной расчётной схемы (как в изображённом на рисунке 2 слу-

Пример системы с затухающими колебаниями

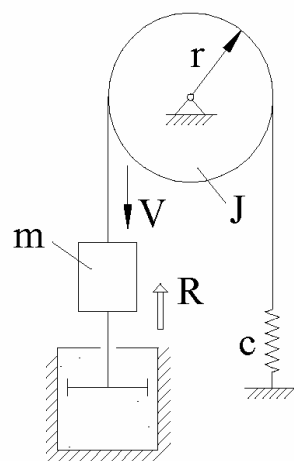


Рисунок 36.2

чае), а может и приближённо (теория малых колебаний превращает нелинейные дифференциальные уравнения в линейные).

По математической классификации дифференциальное уравнение 36.11 относится к линейным однородным, с постоянными коэффициентами, второго порядка, а для них ещё Эйлером предложено решения искать в форме

$$q = e^{r \cdot t} \quad \mapsto \quad \dot{q} = r \cdot e^{r \cdot t} \quad \mapsto \quad \ddot{q} = r^2 \cdot e^{r \cdot t}.$$

Подставив это частное решение в 36.11, получаем:

$$r^2 \cdot e^{r \cdot t} + 2n \cdot (r \cdot e^{r \cdot t}) + k^2 \cdot e^{r \cdot t} = 0 \quad \mapsto \quad r^2 + 2n \cdot r + k^2 = 0.$$

Из последнего выражения (характеристическое уравнение) находим:

$$a \quad \left| \quad r_1 = -n + \sqrt{n^2 - k^2}; \quad r_2 = -n - \sqrt{n^2 - k^2}.$$

В зависимости от соотношения n и k решение разветвляется:

первая ветвь - $n < k$ - «малые сопротивления»;

вторая ветвь - $n > k$ - «большие сопротивления».

Вначале рассматриваем случай малых сопротивлений. Обозначаем и называем:

$$36.12 \quad \left| \quad \begin{array}{l} \kappa = \sqrt{k^2 - n^2} \quad - \\ - \text{ круговая частота затухающих колебаний (сокращённо: частота;} \\ \kappa \text{ - буква из греческого алфавита - «каппа»)} \end{array} \right.$$

Как известно из курса математики, общее решение уравнения 36.11 определяется линейной комбинацией полученных двух частных решений:

$$q = c' \cdot e^{(-n+i \cdot \kappa)t} + c'' \cdot e^{(-n-i \cdot \kappa)t}, \quad \text{где} \quad i = \sqrt{-1}.$$

В соответствии с формулой Эйлера

$$e^{i \cdot \kappa \cdot t} = \cos(\kappa \cdot t) + i \cdot \sin(\kappa \cdot t) \quad \mapsto \quad e^{-i \cdot \kappa \cdot t} = \cos(\kappa \cdot t) - i \cdot \sin(\kappa \cdot t)$$

имеем:

$$\begin{aligned} q &= e^{-n \cdot t} \cdot [(c' + c'') \cdot \cos(\kappa \cdot t) + (c' - c'') \cdot i \cdot \sin(\kappa \cdot t)] = \\ &= e^{-n \cdot t} \cdot [c_1 \cdot \cos(\kappa \cdot t) + c_2 \cdot \sin(\kappa \cdot t)]. \end{aligned}$$

С целью дальнейшего преобразования (замена постоянных c_1, c_2 другими - A и α) подключаем к рассмотрению тригонометрическую формулу $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$ и используем изображённый на рис.3 справа-вверху прямоугольный треугольник ($c_1 = A \cdot \sin \alpha; \quad c_2 = A \cdot \cos \alpha$). Получаем:

$$36.13a \quad \left| \begin{array}{l} q = A \cdot e^{-nt} \cdot \sin(\kappa \cdot t + \alpha) - \\ \text{уравнение затухающих колебаний,} \end{array} \right.$$

у которого постоянные A и α определяются из начальных условий. Выведем соответствующие формулы. Для этого вначале запишем выражение для обобщённой скорости (получаемое из уравнения 13а):

$$б \quad \left| \begin{array}{l} \dot{q} = A \cdot e^{-nt} \cdot [\kappa \cdot \cos(\kappa \cdot t + \alpha) - n \cdot \sin(\kappa \cdot t + \alpha)]. \end{array} \right.$$

Пусть при $t=0$ $q = q_0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$. Тогда, из 13а и (б):

$$q_0 = A \cdot \sin \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \dot{q}_0 = A \cdot (\kappa \cdot \cos \alpha - n \cdot \sin \alpha).$$

Из системы двух последних уравнений и находятся постоянные A , α :

$$36.13б \quad \left| \begin{array}{l} A = \frac{q_0}{\sin \alpha}; \quad \text{tg} \alpha = \frac{\kappa}{n + (\dot{q}_0 : q_0)}. \end{array} \right.$$

График затухающих колебаний

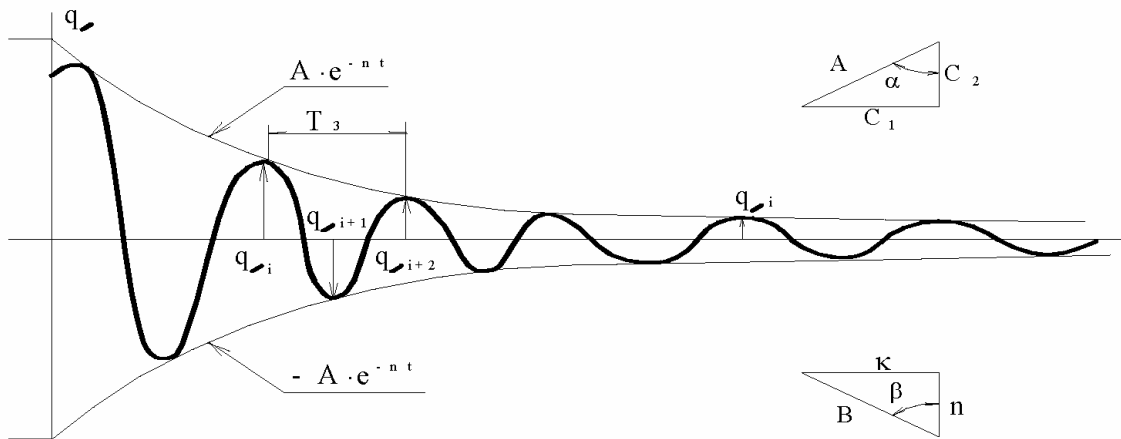


Рисунок 36.3

Из уравнения видно, что график расположен между линиями $A \cdot e^{-nt}$ и $-A \cdot e^{-nt}$. На графике: $q_i, q_{i+1}, q_{i+2}, \dots, q_j, \dots$ - экстремальные значения обобщённой координаты. Промежуток времени T_3 между соседними максимумами (между q_i и q_{i+2} ; либо минимумами) называют периодом затухающих колебаний.

Выясним, изменяется ли период в процессе затухания колебаний и введём количественную характеристику быстроты затухания.

36.4.2. Период затухающих колебаний. Декремент колебаний

Определим моменты времени $(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_j, \dots)$, в которые обобщённые координаты имеют экстремальные значения.

Известно, что при исследованиях функции на экстремум надо приравнять нулю её производную. Поэтому из (б) получаем:

$$n \cdot \sin(\kappa \cdot t_i + \alpha) - \kappa \cdot \cos(\kappa \cdot t_i + \alpha) = 0$$

С целью дальнейшего преобразования подключаем к рассмотрению тригонометрическую формулу $\sin(\gamma - \beta) = \sin \gamma \cdot \cos \beta - \cos \gamma \cdot \sin \beta$ и изображённый внизу-справа на рис.3 прямоугольный треугольник ($\kappa = B \cdot \sin \beta$, $n = B \cdot \cos \beta$). Получаем:

$$B \cdot \sin[(\kappa \cdot t_i + \alpha) - \beta] = 0 \quad \mapsto \quad (\kappa \cdot t_i + \alpha) - \beta = i \cdot \pi \quad \leftarrow i = 1, 2, 3, \dots$$

Откуда

$$36.14 \quad \left| \quad \begin{aligned} t_i &= \frac{i \cdot \pi + \beta - \alpha}{\kappa}; & t_{i+2} &= \frac{(i+2) \cdot \pi + \beta - \alpha}{\kappa} & \mapsto \\ t_{i+2} - t_i &= T_3 = \frac{2\pi}{\kappa} & - \end{aligned} \right.$$

формула для вычисления периода затухающих колебаний, который, как видим, постоянен во времени и определяется по такой же формуле как и период свободных колебаний, но через круговую частоту *затухающих* колебаний (связанных с круговой частотой свободных колебаний формулой 36.12).

Теперь выясним чему равно отношение соседних максимумов обобщённой координаты. Для этого подставляем в 36.13а t_i и t_{i+2} :

$$q_i = A \cdot e^{-n \cdot t_i} \cdot \sin(\kappa \cdot t_i + \alpha); \quad q_{i+2} = A \cdot e^{-n \cdot t_{i+2}} \cdot \sin(\kappa \cdot t_{i+2} + \alpha).$$

Разделив первое на второе получаем:

$$36.15 \quad \left| \quad \frac{q_i}{q_{i+2}} = \lambda = e^{n \cdot (t_{i+2} - t_i)} = e^{n \cdot T_3} \quad - \text{декремент колебаний} - \right.$$

количественная характеристика быстроты затухания колебаний.

Иногда для характеристики быстроты затухания колебаний используют *логарифмический декремент колебаний* - $L_D = \ln \lambda = n \cdot T_3$.

36.4.3. Формулы к экспериментально-теоретическому способу определения коэффициентов сопротивления среды и периодов собственных колебаний систем

Экспериментально определяемыми величинами считаем: T_3 - период затухающих колебаний и Θ - промежуток времени, в течение которого максимум обобщённой координаты уменьшится в a раз.

Аналогично тому как была получена формула 36.15 (через соотношение значений максимумов) имеем: $a = e^{n\Theta} \mapsto$

36.16 $\left\{ \begin{array}{l} n = \frac{\ln a}{\Theta} \quad - \text{ формула к экспериментальному способу} \\ \text{определения коэффициентов затухания (а по ним коэффициентов} \\ \text{демпфирования и вязкостей жидкостей, других характеристик сопротивления} \\ \text{среды).} \end{array} \right.$

Для предупреждения резонансных явлений важно знать частоты собственных колебаний систем (иногда с высокой точностью).

Это можно сделать по формуле (получается из 36.12, 36.14 и 36.16):

36.17 $\left\{ \begin{array}{l} k = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_3}\right)^2 + \left(\frac{\ln a}{\Theta}\right)^2} \quad - \text{ формула к экспериментальному} \\ \text{способу определения частоты собственных колебаний систем.} \end{array} \right.$

36.4.4. Уравнение и график аperiodических затухающих движений

Рассматриваем случай больших сопротивлений -

$$\ddot{q} + 2n \cdot \dot{q} + k^2 \cdot q = 0 \quad \leftarrow n > k.$$

Теперь корнями характеристического уравнения являются вещественные числа и решение описывается суммой двух экспонент -

36.18 $\left\{ \begin{array}{l} q = \frac{c_1}{e^{a \cdot t}} + \frac{c_2}{e^{b \cdot t}} \quad - \text{ уравнение, описывающее движение системы в случае} \\ \text{больших сопротивлений.} \end{array} \right.$

Подробное исследование уравнения 36.18 имеет малую значимость. По этой причине ограничиваемся лишь приведением графиков (см. рис.36.4), качественно описывающих возможные движения системы в рассматриваемом случае, и замечаем:

1. Линии, соответствующие уравнению 36.18, асимптотически приближаются к оси времени, не пересекая её, либо пересекая всего лишь раз;

2. При $n = k$ решение отличается от 36.18, но также получается линия, асимптотически приближающаяся к оси времени.

Качественные графики затухающих движений

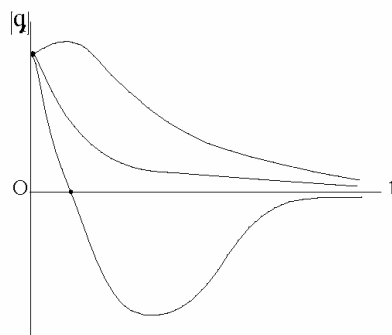


Рисунок 36.4

36.5. Вынужденные колебания линейных систем с одной степенью свободы

Вынужденными колебаниями линейных систем с одной степенью свободы и вязким трением называют движение, описываемое дифференциальным уравнением

$$36.19 \quad \ddot{q} + 2n \cdot \dot{q} + k^2 \cdot q = h \cdot \sin(p \cdot t + \delta), \quad \text{где}$$

левая часть уравнения взята из 36.11. В правой части:
 h - возмущающая амплитуда; p - возмущающая частота; $(p \cdot t + \delta)$ - возмущающая фаза; δ - начальная возмущающая фаза.

Если говорить о конкретных примерах, то уравнение 36.19 будет получено для системы, изображённой на рис.2, если вы рядом с силой \vec{R} изобразите и силу $F = F_{max} \cdot \sin(p \cdot t + \delta)$. Рекомендуем проделать это самостоятельно.

По математической классификации 36.19 - это дифференциальное уравнение второго порядка, линейное, с постоянными коэффициентами и правой частью (неоднородное, т.е. имеющее функцию времени в явном виде). Поэтому: общее решение уравнения 36.19 можно представлять суммой двух составляющих –

$$a \quad | \quad q = q_1 + q_2, \quad \text{где}$$

q_1 - общее решение дифференциального уравнения $\ddot{q} + 2n \cdot \dot{q} + k^2 \cdot q = 0$ и
 q_2 - частное решение неоднородного уравнения.

Составляющая q_1 достаточно подробно рассмотрена в предыдущем подразделе (и малые, и большие сопротивления; изображены графики). Здесь заметим лишь, что по прошествии небольшого промежутка времени после появления возмущающей силы (до минуты - нескольких минут; например, после включения в работу двигателя) составляющая q_1 становится пренебрежимо малой по сравнению с q_2 . Последняя же, как увидим, во времени сохраняется (поэтому её называют стационарной составляющей вынужденных колебаний); причём она может достигать громадных значений. По этим причинам в вынужденных колебаниях основной интерес представляет q_2 .

Если хотят подчеркнуть, что речь идёт о вынужденных колебаниях без учёта затухающей составляющей, то употребляют термин: «чисто вынужденные колебания».

Переходные процессы для механических колебаний имеют относительно небольшую значимость. Поэтому в дальнейшем будут иметься ввиду чисто вынужденные колебания.

Частное решение (q_2) находим методом неопределённых коэффициентов. При этом, с целью упрощения записей, обозначаем

$$\text{б) } \quad (p \cdot t + \delta) - \varepsilon = \gamma(t) = \text{просто} = \gamma \quad \leftarrow \varepsilon = \text{const}.$$

Т.к. в правой части 36.19 записано $h \cdot \sin(p \cdot t + \delta)$, то решение ищем в форме

$$q_2 = B \cdot \sin \gamma \quad \mapsto \quad \dot{q}_2 = B \cdot p \cdot \cos \gamma \quad \mapsto \quad \ddot{q}_2 = -B \cdot p^2 \cdot \sin \gamma.$$

Полученную тройку выражений подставляем в 36.19, причём правую его часть записываем также с учётом обозначения (б). Получаем:

$$-B \cdot p^2 \cdot \sin \gamma + 2n \cdot p \cdot B \cdot \cos \gamma + B \cdot k^2 \cdot \sin \gamma \equiv h \cdot \sin \varepsilon \cdot \cos \gamma + h \cdot \sin \gamma \cdot \cos \varepsilon.$$

Откуда (приравнивая алгебраические выражения при $\sin \gamma$ и $\cos \gamma$) находим

$$\left[h \cdot \sin \varepsilon = 2n \cdot p \cdot B; \quad h \cdot \cos \varepsilon = B \cdot (k^2 - p^2) \right] \quad \mapsto$$

$$36.20a \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{где} \\ \text{tg } \varepsilon = \frac{2n \cdot p}{k^2 - p^2} = \frac{2 \cdot x \cdot z}{1 - z^2}, \\ z = \frac{p}{k} \text{ - коэффициент расстройки; } \quad x = \frac{n}{k} \text{ - относительный коэффициент затухания (безразмерный коэффициент демпфирования);} \end{array} \right.$$

$$B = \frac{h}{2n \cdot p} \cdot \sin \varepsilon = \frac{h}{2n \cdot p} \cdot \frac{\text{tg } \varepsilon}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \varepsilon}} = \text{с учётом 36.20a} = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4 \cdot n^2 \cdot p^2}},$$

т.е.:

$$36.20б \quad \left\{ \begin{array}{l} q_2 = B \cdot \sin[(p \cdot t + \delta) - \varepsilon], \quad \text{где} \\ B = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4 \cdot n^2 \cdot p^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4 \cdot x^2 \cdot z^2}} \cdot \frac{h}{k^2} - \\ \text{- уравнение чисто вынужденных колебаний.} \end{array} \right.$$

B является размерной величиной. Для обобщённых же оценок амплитуд вынужденных колебаний более удобны безразмерные величины. Главной из них является коэффициент динамичности (μ). Введём это понятие.

Если частота вынужденных колебаний p стремится к нулю (при $p = 0$ нагрузки называют статическими), то $B = B_{ст} = \frac{h}{k^2}$.

36.21a

Коэффициент динамичности – это отношение амплитуды вынужденных колебаний к амплитуде колебаний той же системы, при тех же действующих силах, с одним лишь отличием – частота возмущающей силы стремится к нулю (если говорить о конечных величинах – то частота возмущающей силы меняется очень медленно, положим за один год на один полный период):

$$\mu = \frac{B}{B_{ст}} = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4 \cdot x^2 \cdot z^2}}.$$

Относительный коэффициент затухания x различен для различных систем. z является непрерывной переменной даже в рамках одной системы (что будет показано в следующем подразделе).

Графики, отображающие уравнения 36.21a и 36.20a, представлены на рис.36.5 и 36.6.

Коэффициент динамичности

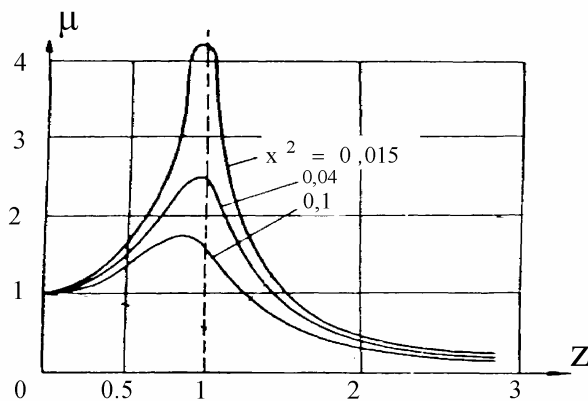


Рис.5

Сдвиг по фазе

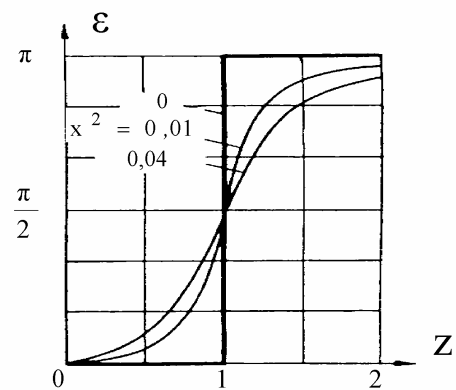


Рис.6

Из них видно:

1. Максимальные значения μ (при фиксированных x , особенно при небольших их значениях) мало отличаются от резонансных ($z = 1$) и, поэтому, в практических расчётах максимальные коэффициенты динамичности можно оценивать резонансными значениями, т.е.

вычислять по формуле:
$$\mu_{max} \approx \mu_{PE3} = \frac{1}{2x}.$$

36.21б

При малых сопротивлениях (что широко распространено – колебания в воздушной среде, без демпфирующих устройств) они могут принимать очень большие значения. Например, при $x = 0,001$ $\mu_{max} = 500$;

2. Сдвиг по фазе между гармониками, описывающими вынужденные колебания и возмущающую силу, может быть различным в интервале от 0 до 180° :

2.1. При резонансе равен 90° ;

2.2. При малых z (по отношению к 1,0) сдвиг по фазе близок к 0° ; при больших – близок к 180° (близок к противофазе).

ПРИМЕР 36.1. - Дисбалансные вынужденные колебания линейной системы с одной степенью свободы

На рис.36.7: балка на двух опорах с установленным на нём четырёхполюсным (номинальная угловая скорость $\omega = 150 \text{ c}^{-1}$) асинхронным электродвигателем с короткозамкнутым ротором; A - ось вращения ротора; DA - подвижная горизонталь; $AB = e = 0,1 \text{ мм}$ – величина дисбаланса; φ - координата, определяющая угловое положение ротора; O' - неподвижная горизонталь, на которой расположен центр A вращения при недеформированной балке; O - неподвижная горизонталь, на которой расположен центр A вращения при неработающем двигателе; δ_{CT} - прогиб балки (деформация упругого элемента – пружины) от статической нагрузки (при неработающем двигателе); $(\delta_{CT} + q)$ - текущая деформация балки при работающем двигателе; $(P_1 + P_2) = c \cdot (\delta_{CT} + q)$ - модуль суммарной реакции на опорах; $c = 1,2 \cdot 10^7 \text{ Н/м}$ - жёсткость балки; $m = 100 \text{ кг}$ - масса ротора; $M = 500 \text{ кг}$ - масса статора (неподвижной части электродвигателя и других жёстко связанных с ним деталей). Массой балки пренебречь; $\Phi_A = M \cdot \ddot{q}$ - сила инерции от статора; $G_1 = m \cdot g$, $G_2 = M \cdot g$ - веса ротора и статора; $\Phi_B^e = m \cdot \ddot{q}$ - модуль переносной силы инерции ротора; $\Phi_B^r = m \cdot (e \cdot \dot{\varphi}^2)$ - модуль относительной силы инерции ротора; $R = b \cdot \dot{q}$ - модуль силы вязкого сопротивления, где $b = 6 \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}$.

Для составления дифференциального уравнения рассматриваемого дисбалансного колебания используем метод кинетостатики:

$$(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) + \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{R} + \vec{\Phi}_A + \vec{\Phi}_B^e + \vec{\Phi}_B^r = 0.$$

К примеру о дисбалансных вынужденных колебаниях

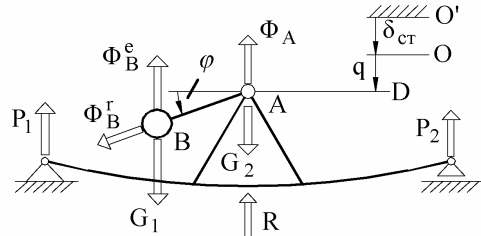


Рисунок 36.7

Проектируем составленное векторное равенство на ось q :

$$\begin{aligned} & -(P_1 + P_2) + (G_1 + G_2) - R - (\Phi_A + \Phi_B^e) + \Phi_B^r \cdot \sin \varphi = 0 \quad \mapsto \\ & -c \cdot (\delta_{CT} + q) + (m + M) \cdot g - b \cdot \dot{q} - (M + m) \cdot \ddot{q} + m \cdot e \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) = 0 \quad \mapsto \\ & -c \cdot q - b \cdot \dot{q} - (M + m) \cdot \ddot{q} + m \cdot e \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) = 0 \quad \mapsto \\ & \ddot{q} + 2n \cdot \dot{q} + k^2 \cdot q = h \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad \text{где} \end{aligned}$$

$$n = \frac{b}{2(M + m)} = \frac{6}{2(500 + 100)} = 0,005 \text{ с}^{-1};$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{M + m}} = \sqrt{\frac{1,2 \cdot 10^7}{500 + 100}} = 100 \cdot \sqrt{2} \approx 141 \text{ с}^{-1};$$

$$h = \frac{m \cdot e \cdot \omega^2}{M + m} = \frac{100 \cdot 0,0001 \cdot 150^2}{500 + 100} = 0,375 \text{ м/с}^2.$$

Определяем, по формуле 36.20б, амплитуду вынужденных колебаний, соответствующую работе системы при номинальной угловой скорости ($\omega = p = 150 \text{ с}^{-1}$) ротора электродвигателя:

$$B = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot n^2 \cdot \omega^2}} = \frac{0,375}{\sqrt{(141^2 - 150^2)^2 + 4 \cdot 0,005^2 \cdot 150^2}} = \dots = 0,15 \text{ мм.}$$

Видим, что с прочностной точки зрения при номинальном режиме работы амплитуда колебаний незначительна. Но ... разберёмся с инженерной сутью вопроса.

Взятый к рассмотрению в пример четырёхполюсный асинхронный электродвигатель с короткозамкнутым ротором чаще всего и применяется для привода различных механизмов. На рис.36.8 представлена обобщённая его механическая характеристика, где жирной линией (от 150 с^{-1} до, примерно, 140 с^{-1}) изображён рабочий её участок. У очень многих рабочих машин нагрузка (M , н·м) является переменнно-случайной величиной и, поэтому, возможны режимы работы с различными угловыми скоростями.

К примеру о дисбалансных вынужденных колебаниях

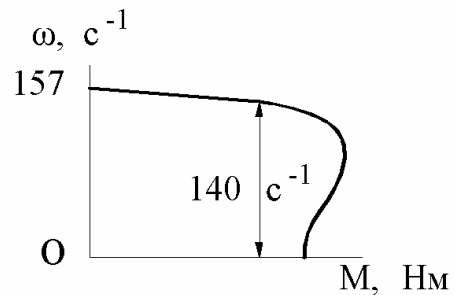


Рисунок 36.8

Асинхронные двигатели применяют не только с 4-мя полюсами, но с 2-мя, 6-ю, 8-ю, иногда и более полюсами. У них левые границы рабочих участков вместо 157 с^{-1} равны, соответственно, 235 с^{-1} , 118 с^{-1} , 78 с^{-1} , а правые границы также примерно на 10% меньше левых. У электродвигателей постоянного тока с так называемым параллельным возбуждением рабочие участки механических характеристик подобны рассмотренному на рис.8. У электродвигателей же постоянного тока с последовательным соединением обмоток рабочие участки механических характеристик крутопадающие, т.е. правые границы не на 10% меньше левых, а от в несколько раз до в несколько десятков раз меньше левых. Аналогична картина имеет место и для двигателей внутреннего сгорания. Итак,

36.22 | при рассмотрении вынужденных колебаний анализ всегда надо начинать с предпосылки: частота возмущающей силы (p , или как в рассматриваемом случае, ω) - плавающая величина - она может принимать любые значения в определённом интервале (диапазоне).

Но задачи по установлению этих интервалов являются предметом рассмотрения других наук, в частности электропривода.

Заканчиваем рассмотрение примера. Рабочие угловые скорости расположены в диапазоне $(140-157) \text{ с}^{-1}$. Частота собственных колебаний системы ($k = 141 \text{ с}^{-1}$) попала в этот диапазон. При $\omega = k = 141 \text{ с}^{-1}$ из 36.20б получаем:

$$B = \frac{h}{2n \cdot \omega} = \frac{0,375}{2 \cdot 0,005 \cdot 141} = 0,27 \text{ м} = 270 \text{ мм},$$

т.е. понятно, что полуметрового размаха ($2B = 540 \text{ мм}$) колебаний рассматриваемая механическая система не достигнет - авария произойдёт до этого.

36.6. О необходимости учёта других гармоник при рассмотрении вынужденных колебаний

Возмущающими силами могут быть не только отдельно взятые гармоники (как в рассмотренном примере). Часто инженер имеет дело с разнообразными периодическими функциями времени, отличными от отдельно взятых гармоник.

Два примера периодически изменяющихся во времени сил

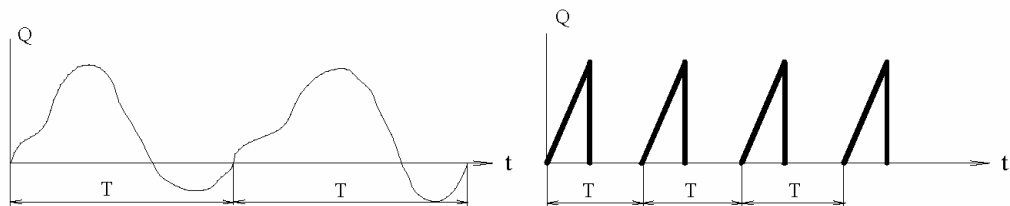


Рисунок 36.9

На рис.36.9 представлено 2 таких примера: слева – периодическая непрерывная (например в двигателях внутреннего сгорания); справа – периодическая, кусочная, с разрывами 1-го рода. T - их периоды.

Из курса высшей математики известна теорема Дирихле, в соответствии с которой всякая периодическая кусочно-непрерывная с разрывами 1-го рода (либо без разрывов) функция может быть представлена рядом Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2} \cdot a_0 + \sum_{j=1}^N [a_j \cdot \sin(j \cdot p \cdot t + \delta_j)], \quad p = \frac{2\pi}{T}, \quad \text{где}$$

p - частота 1-й (синоним: основной) гармоники;

$j = 1, 2, 3, \dots, N$ - номера 1-й, 2-й, 3-й и т.д. гармоник;

a_0 и a_j - постоянные; методы их определения хорошо разработаны: в [3] на с.552-556 см. таблицу из 47 наиболее распространённых видов периодических функций, разложенных в ряд Фурье; в [13] на с.74-88 - «Практический гармонический анализ»; в [6] на с.127-182 - «Элементы гармонического анализа».

В случае, если возмущающая сила является периодической функцией времени, то чисто вынужденные колебания определяются суммой частных решений дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{q} + 2n \cdot \dot{q} + k^2 \cdot q &= h_1 \cdot \sin(p \cdot t + \delta_1), & \ddot{q} + 2n \cdot \dot{q} + k^2 \cdot q &= h_2 \cdot \sin(2p \cdot t + \delta_2), \\ \ddot{q} + 2n \cdot \dot{q} + k^2 \cdot q &= h_3 \cdot \sin(3p \cdot t + \delta_3) \quad \text{и т.д., что в общем виде можно записать:} \end{aligned}$$

$$\ddot{q} + 2n \cdot \dot{q} + k^2 \cdot q = h_j \cdot \sin(j \cdot p \cdot t + \delta) \quad \leftarrow j = 1, 2, 3, \dots$$

и, на основании известной из курса высшей математики теоремы о наложении решений, получаем:

$$36.23 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{чисто вынужденные колебания при периодической (состоящей из} \\ \text{гармоник) возмущающей силе определяются выражениями -} \\ q_2 = \sum q_j = \sum \{B_j \cdot \sin[(j \cdot p \cdot t + \delta_j) - \varepsilon_j]\}, \quad \text{где} \\ B_j = \frac{h_j}{\sqrt{[k^2 - (j \cdot p)^2]^2 + 4 \cdot n^2 \cdot (j \cdot p)^2}} \quad \leftarrow \uparrow j = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right.$$

Из полученного общетеоретического результата видим: громадные амплитуды колебаний у механической системы могут возбуждать не только первые (основные) гармоники, но и более высокого порядка.

Рекомендуемый подход по предупреждению резонансных явлений

У находящейся в эксплуатации механической системы массы и коэффициенты жёсткости отличаются от идеализированного расчётного варианта.

И не только по причине разбросов, обусловленных допусками на изготовление деталей. Могут отличаться, например, по причине происходящих во времени износов (абразивных, коррозионных и др.), что приводит к некоторым изменениям масс и коэффициентов жёсткости. Соединительные муфты и двигатели (это значит и моменты инерции) ещё на стадии монтажа механической системы могут несколько отличаться от идеального варианта. К тем или иным (особенно неподвижным) деталям могут быть прикреплены посторонние предметы (приборы, контролирующие устройства). И т.д., и т.п.

С целью гарантирования безотказной работы механической системы инженер устанавливает интервал возможных значений круговой частоты собственных её колебаний

$$k_{min} \div k_{max} = \text{например} = 240 \div 250 \text{ с}^{-1}.$$

Устанавливает и интервалы возможных значений круговых частот для периодической возмущающей силы. Например:

$$p_{min} \div p_{max} = 80 - 85 \text{ с}^{-1}. \quad \text{Тогда:}$$

$$2p = 160 \div 170 \text{ с}^{-1}; \quad 3p = 240 \div 255 \text{ с}^{-1}; \quad 4p = 320 \div 340 \text{ с}^{-1}.$$

Видно: есть опасность, что система может войти в резонанс от 3-й гармоники. Поэтому, по формуле 36.23 целесообразно определить резонансное значение амплитуды, вынуждаемое 3-й гармоникой - $B_3 = \frac{h_3}{2n \cdot k} = \dots$ Эта амплитуда может оказаться несущественной.

36.24 | Накопленный научно-инженерный опыт позволяет рекомендовать учитывать всего 3, но не более 5-ти нижних гармоник. Некоторое теоретическое основание к этому см. в [6] на с.148-152 – «Порядок убывания коэффициентов Фурье».

Если гармоника оказалась всё же резонансно опасной, то следует провести конструктивные изменения – взять упругие элементы с другими коэффициентами жёсткости, изменить моменты инерции, увеличить массы (если их уже нельзя уменьшить), но сделать так, чтобы $(k_{min} \div k_{max})$ вошёл в нерезонансный интервал круговых частот. Если иметь ввиду рассматриваемый пример, то надо сделать так, чтобы $(k_{min} \div k_{max})$ вошёл в интервал $(180 \div 230) \text{ с}^{-1}$, либо $(270 \div 300) \text{ с}^{-1}$.

Сложнее, но примерно такие же подходы имеют место при рассмотрении колебаний с несколькими степенями свободы.

являются алгебраическими выражениями от масс и моментов инерции тел системы;

c (в том же количестве S^2) называют коэффициентами жёсткости (часто квазиупругими коэффициентами) - они в дифференциальные уравнения попадают из выражений для потенциальных сил.

Большого количества ($2S^2$) коэффициентов a и c не следует бояться - число степеней свободы (S) обычно не столь велико - до десятка; матрицы симметричные; много нулевых элементов; из ненулевых больше постоянных, но в общем случае следует рассчитывать на наличие и коэффициентов, зависящих от обобщённых координат.

Подэтан 2.2 - линеаризация дифференциальных уравнений.

Для чего это нужно? - В случае нескольких степеней свободы подходы к решению разработаны практически *лишь для линейных систем*.

Обычно встречаются голономные, стационарные связи. Их и будем иметь в виду. Такое ограничение позволяет констатировать: если и присутствуют переменные коэффициенты, то они являются функциями не сложнее, чем функции координат - $f = f(q_1, q_2, \dots, q_S)$; имеется в виду, что для различных коэффициентов эти функции в общем случае различны.

Колебания происходят около положений устойчивого равновесия систем и, поэтому, начала отсчёта для обобщённых координат принимают такими, чтобы в положении равновесия они равнялись нулю. Тогда каждый из переменных коэффициентов раскладывают в ряд Маклорена и ограничиваются постоянной составляющей, т.е. от

$$f = f(0, 0, \dots, 0) + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial q_1} \right)_0 \cdot q_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial q_2} \right)_0 \cdot q_2 + \dots \right] + \dots + \dots$$

берут лишь первое слагаемое - считают, что $f = const = f(0, 0, \dots, 0)$.

Такой подход уязвим - недостаточно строг в теоретическом плане (сохраняется лишь 1-й член ряда Маклорена, а остальные опускаются - *как бесконечно малые* 1-го, 2-го и т.д. порядков малости; на самом же деле перемещения являются конечными величинами). Однако практика подтвердила продуктивность такого подхода; несмотря на это замечаем: теория колебаний ещё не завершена - она, как одна из отраслей механики, сегодня ещё является передней линией науки; возможно появление и более точных подходов.

Подэтан 2.3 - переход от системы дифференциальных уравнений к частотному определителю.

Целью решения системы (a) является определение круговых частот свободных колебаний системы. Их количество S - k_1, k_2, \dots, k_S .

Для определения частот частные решения системы (а) ищут в виде:

$$б \quad \left| \quad q_1 = A_1 \cdot \sin(k \cdot t + \beta), \quad q_2 = A_2 \cdot \sin(k \cdot t + \beta), \dots, \quad q_S = A_S \cdot \sin(k \cdot t + \beta) \right.$$

Вторые производные по времени от выражений (б):

$$в \quad \left| \quad \ddot{q}_1 = -A_1 \cdot k^2 \cdot \sin(k \cdot t + \beta), \dots, \quad \ddot{q}_S = -A_S \cdot k^2 \cdot \sin(k \cdot t + \beta) \right.$$

Подставляем (б) и (в) в (а):

$$\begin{aligned} & (c_{11} - a_{11} \cdot k^2) \cdot A_1 + (c_{12} - a_{12} \cdot k^2) \cdot A_2 + \dots + (c_{1S} - a_{1S} \cdot k^2) \cdot A_S = 0, \\ & (c_{21} - a_{21} \cdot k^2) \cdot A_1 + (c_{22} - a_{22} \cdot k^2) \cdot A_2 + \dots + (c_{2S} - a_{2S} \cdot k^2) \cdot A_S = 0, \\ & \dots \\ & (c_{S1} - a_{S1} \cdot k^2) \cdot A_1 + (c_{S2} - a_{S2} \cdot k^2) \cdot A_2 + \dots + (c_{SS} - a_{SS} \cdot k^2) \cdot A_S = 0. \end{aligned}$$

Известно, что система линейных (относительно A_1, A_2, \dots, A_S) алгебраических уравнений может иметь решение отличное от нуля лишь в том случае, если её определитель равен нулю. Поэтому получаем

опредетитель для спектра частот собственных колебаний системы:

$$з \quad \left| \begin{array}{cccc} (c_{11} - a_{11} \cdot k^2) & (c_{12} - a_{12} \cdot k^2) & \dots & (c_{1S} - a_{1S} \cdot k^2) \\ (c_{21} - a_{21} \cdot k^2) & (c_{22} - a_{22} \cdot k^2) & \dots & (c_{2S} - a_{2S} \cdot k^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (c_{S1} - a_{S1} \cdot k^2) & (c_{S2} - a_{S2} \cdot k^2) & \dots & (c_{SS} - a_{SS} \cdot k^2) \end{array} \right| = 0$$

Подэтап 2.4 - составление частотного многочлена

Разворачивая частотный определитель получают

$$д \quad \left| \begin{array}{c} \text{частотное уравнение} \\ b_0 - b_1 \cdot Y + b_2 \cdot Y^2 - b_3 \cdot Y^3 + \dots + (-1)^S \cdot b_S \cdot Y^S = 0, \end{array} \right. \quad \text{где}$$

$Y = k^2$ - квадраты неизвестных (определяемых) частот собственных колебаний системы. $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_S$ - числовые коэффициенты; при принятой расстановке знаков положительны; для их нахождения достаточно знания числовых матриц квазиупругих и инерционных коэффициентов:

$$\left\| \begin{array}{cccc} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1S} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2S} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{S1} & c_{S2} & \dots & c_{SS} \end{array} \right\| \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1S} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2S} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{S1} & a_{S2} & \dots & a_{SS} \end{array} \right\|.$$

В частности, их можно определять по предложенным нами (Игнатищев Р.М.) формулам:

$$b_0 = |c| = \sum_{\alpha=0}^{z=S} i \vec{\Delta}_{K2}^i ; \quad b_1 = \sum_{\alpha=1}^{z=S-1} i \vec{\Delta}_{K2}^i ; \quad b_2 = \sum_{\alpha=2}^{z=S-2} i \vec{\Delta}_{K2}^i ;$$

$$b_3 = \sum_{\alpha=3}^{z=S-3} i \vec{\Delta}_{K2}^i ; \dots \dots \dots ; \quad b_{S-1} = \sum_{\alpha=S-1}^{z=1} i \vec{\Delta}_{K2}^i ; \quad b_S = \sum_{\alpha=S}^{z=0} i \vec{\Delta}_{K2}^i ,$$

где \sum и Δ , как обычно, символы сумм и определителей, нижний индекс «K2» символизирует о том, что речь идёт о комбинированной матрице, составленной из двух других - путём замены столбцов (или строк) одной матрицы на столбцы второй;

« $i \rightarrow i$ » символизирует, что столбцы одной матрицы замещаются столбцами второй с теми же номерами (i меняется на i);

α - количество столбцов, взятых из $\|a\|$ и заместивших столбцы с соответствующими номерами в $\|c\|$; удобство для запоминания - α и a являются первыми буквами двух алфавитов (греческого и латинского)

z - количество столбцов в комбинированной матрице, сохранившихся от $\|c\|$.

При этом, рассматриваются все различные замещения, без повторений и перестановок. Например, при $S = 5$ b_1 и b_4 определяются как суммы 5 соответствующих определителей; b_2 и b_3 - как суммы определителей 10-ти комбинированных матриц. Вот, в частности, по каким матрицам вычисляется коэффициент b_2 : сссаа; ссаса; ссаас; сасса; сасас; саасс; ассаа; ассас; асасс; аассе.

Многочлен (d) с $S = 2 \div 4$ решается чисто - имеются точные аналитические выражения; но нет проблем с решением (практически с любой степенью точности) и многочленов, у которых $S > 4$ - см., например, [8]. При этом, обращаем внимание, что все корни не только вещественны, но и положительны; если выясняется противное, то считайте: где-то допущена некорректность; в частности, может оказаться, что положение равновесия, относительно которого вы рассматриваете колебания, неустойчиво.

Подэтан 2.5 - выявление диапазонов возможного изменения частот.

В общем случае расчёт состоит из нескольких приближений. Выполняется с применением ЭЦВМ.

Как и для одной степени свободы инженер рассматривает возможные отклонения в массах, моментах инерции и жёсткостях упругих элементов. Поэтому инерционные и квазиупругие коэффициенты в общем случае расположены в определённых интервалах.

При расчёте в первом приближении для квазиупругих и инерционных коэффициентов берутся средние значения, затем левые и правые границы их интервалов.

Третий этап - согласование собственных частот колебаний системы с частотами возмущающих сил.

На линию согласования наносится цепочка отрезков, отображающих интервалы частот собственных колебаний системы. Возможны 2 варианта: первый - наложение собственных частот на частоты возмущающих сил отсутствует; второй вариант – наложения есть.

При первом варианте расчёт заканчивается. При втором - продолжается – до достижения частотной согласованности.

С целью согласования частот принимавшиеся широкие интервалы разбросов масс, моментов инерции, жёсткостей и возмущающих частот сужаются; соответственно ужесточаются требования к эксплуатационникам. Если и в этом случае полного согласования достичь не удалось, механическую систему целесообразно снабдить устройствами, ограничивающие амплитуды возможных резонансных колебаний, а в инструкцию по эксплуатации механической системы ввести соответствующие запретно-предупредительные указания, исключающие возможность наложения какого бы то ни было из звеньев цепочки частотных интервалов возмущающей силы на звенья цепочки интервалов частот собственных колебаний системы.

Литература к теории колебаний

1. Алексеев С.П., Казаков А.М., Колотилов Н.Н. Борьба с шумом и вибрацией в машиностроении.- М.: Машиностроение, 1970.- 208 с.
2. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний.- М.: Высшая школа, 1972 (и посл. издания).- 416 с.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов.- М.: Наука, 1981.- 720с.
4. Бутенин Н.В. Теория колебаний.- М.: Высшая школа, 1963 (и посл. издания).- 190 с.
5. Вибрационные преобразователи движения /Под ред. проф. К.М.Рагульскиса.- Л.: Машиностроение, 1984.- 64 с.
6. Жевержеев В.Ф., Кальницкий Л.А., Сапогов Н.А. Специальный курс высшей математики для ВТУЗов.- М.: Высшая школа, 1970.- 416с.

7. Житомирский В.К. Механические колебания и практика их устранения.- М.: Машиностроение, 1966.- 175 с.
8. Загускин В.Л. Справочник по численным методам решения уравнений.- М.: Физматгиз, 1960.- 214 с.
9. Измерение вибрации сооружений /Под ред. д-ра техн. наук И.С.Шейнина.- Л.: Стройиздат, 1974.- 254 с.
10. Дашинимаев Ж.Д., Шкалик В.С. Измерение параметров вибраций машин и механизмов. Улан-Удэ, 1974.- 107 с.
11. Коритынский Я.И. Колебания в текстильных машинах.- М.: Машиностроение, 1973.- 320 с.
12. Маслов Г.С. Расчёты колебаний валов. Справочник.- М.: Машиностроение, 1980 (и посл. издания).- 151 с.
13. Обморшев А.Н. Введение в теорию колебаний.- М.: Наука, 1965 (и посл. издания).- 276 с.
14. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний.- М.: Наука, 1971 (и посл. издания).- 240 с.
15. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник. /Под общей ред. И.А.Биргера и Я.Г.Пановко.- Том 3.- М.: Машиностроение, 1968.- 567 с.
16. Руководство по проектированию виброизоляции машин и оборудования.- М.: Стройиздат, 1972.- 159 с.
17. Светлицкий В.А., Стасенко И.В. Сборник задач по теории колебаний.- М.: Высшая школа, 1973.- 454 с.
18. Светлицкий В.А. Случайные колебания механических систем.- М.: Машиностроение, 1976.- 215 с.
19. Тихомиров Ю.Ф. Промышленные вибрации и борьба с ними.- Киев: Техника, 1975.- 180 с.
20. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний.- М.: Высшая школа, 1975 (и посл. издания).- 248 с.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ УЧЕБНАЯ И СПРАВОЧНАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учебник.- М.: Высшая школа, 1995.- 415 с.
2. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики: Учебное пособие.- М.: Наука.-
Т.1. Статика и кинематика.- 1982.- 352 с.
Т.2. Динамика.- 1983.- 640с.
3. Яблонский А.А., Никифорова В.А. Курс теоретической механики: Учебник.- Ч.1.- М.: Высшая школа, 1977.- 368 с.
Яблонский А.А. Курс теоретической механики: Учебник.- Ч.2.- М.: Высшая школа, 1977.- 432 с.
4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник.- М.: Высшая школа, 1990.- 607 с.
5. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: Учебн. пособие.- В 2-х томах.- С.-Петербург: Высшая школа, 1998.- 736 с.
6. Прикладная механика: Учеб. пособие / А.Т.Скойбеда, А.А.Миклашевич, Е.Н.Левковский и др.; Под общ. ред. А.Т.Скойбеда.-Мн.: Выш. шк., 1997.- 522 с. (Раздел «Теоретическая механика – с. 3-158).
7. Федута А.А. и др. Теоретическая механика и методы математики: Учебно-справочное пособие / А.А.Федута, А.В.Чигарев, Ю.В.Чигарев.- Мн.: УП «Технопринт», 2000.- 504 с.
8. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие.- М.: Наука, 1986.- 480 с.
9. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: Учебное пособие.- В 2-х томах.- М.: Наука, 1990.- Т.1 – 672 с.; Т.2 – 640 с.
10. Сборник коротких задач по теоретической механике: Учебное пособие /Под редакцией О.Э.Кепе.- М.: Высшая школа, 1989.- 358с.
11. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие / Под ред. А.А.Яблонского.- М.: Высшая школа, 1985.- 367 с.