

**ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**  
**РЕШЕБНИК**  
Учебное пособие

Изложены алгоритмы и примеры решения задач статики, кинематики и динамики из курса теоретической механики, изучаемого в технических вузах.

Каждой задаче отведен отдельный раздел, содержащий общую постановку задачи, план ее решения с необходимыми теоретическими пояснениями и пример. Кроме того, в раздел включены десять задач для самостоятельного решения и ответы к ним. Разобраны характерные ошибки и даны ответы на типичные вопросы, возникающие при решении задач.

Приведены программы решения некоторых задач в системе Maple V.

Книга может быть использована как при очной, так и при дистанционной формах обучения.

Для студентов и преподавателей технических вузов.

Ил. 187.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b> . . . . .	8
<b>I. СТАТИКА</b> . . . . .	11
<b>Глава 1. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ</b> .	14
1.1. Простая стержневая система . . . . .	14
1.2. Равновесие цепи . . . . .	21
1.3. Теорема о трех силах . . . . .	26
<b>Глава 2. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ</b>	31
2.1. Равновесие тяжелой рамы . . . . .	31
2.2. Ферма. Аналитические методы расчета . . . . .	37
2.3. Ферма. Графический расчет . . . . .	45
2.4. Расчет составной конструкции . . . . .	54
2.5. Конструкция с распределенными нагрузками . . . . .	61
2.6. Расчет системы трех тел, соединенных шарниром . . . . .	67
<b>Глава 3. РАВНОВЕСИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ</b> . . .	74
3.1. Трение скольжения . . . . .	74
3.2. Трение качения . . . . .	80
<b>Глава 4. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ</b> . . .	86
4.1. Пространственная ферма . . . . .	86
4.2. Момент силы относительно оси . . . . .	91
4.3. Равновесие вала . . . . .	94
4.4. Определение усилий в стержнях, поддерживающих плиту . .	101
4.5. Тело на сферической и стержневых опорах . . . . .	106
4.6. Приведение системы сил к простейшему виду . . . . .	111
<b>Глава 5. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ</b> . . . . .	118
5.1. Центр тяжести плоской фигуры . . . . .	118
5.2. Пространственная стержневая система . . . . .	122
5.3. Центр тяжести объемного тела . . . . .	125

<b>II. КИНЕМАТИКА</b>	129
Глава 6. <b>КИНЕМАТИКА ТОЧКИ</b>	131
6.1. Движение точки в плоскости	131
6.2. Путь, пройденный точкой	136
6.3. Движение точки в пространстве	137
6.4. Естественный способ задания движения точки	140
6.5. Движение точки в полярных координатах	144
Глава 7. <b>ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА</b>	149
7.1. Вращательное движение тела	149
7.2. Передача вращения	152
Глава 8. <b>ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА</b>	158
8.1. Скорости точек многозвенного механизма	158
8.2. Ускорения точек многозвенного механизма	170
8.3. Уравнение трех угловых скоростей	179
8.4. Уравнение трех угловых ускорений	183
8.5. Кинематические уравнения плоского движения	188
Глава 9. <b>СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ</b>	195
9.1. Сложное движение точки в плоскости	195
9.2. Сложное движение точки в пространстве	202
9.3. Движение точки по звену механизма	209
9.4. Механизм с муфтой	216
Глава 10. <b>СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА</b>	222
10.1. Скорость и ускорение точки тела	222
<b>III. ДИНАМИКА</b>	226
Глава 11. <b>ДИНАМИКА ТОЧКИ</b>	228
11.1. Постоянные силы	228
11.2. Переменные силы	232
Глава 12. <b>ДИНАМИКА СИСТЕМЫ</b>	236
12.1. Теорема о движении центра масс	236
12.2. Кинетическая энергия механической системы	241
12.3. Теорема об изменении кинетической энергии	247
12.4. Теорема о моменте количества движения системы	253
12.5. Динамический расчет механизма с неизвестным параметром	257

12.6. Плоское движение системы . . . . .	266
12.7. Динамические реакции в подшипниках ротора . . . . .	272
<b>Глава 13. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА . . . . .</b>	<b>279</b>
13.1. Принцип возможных скоростей . . . . .	279
13.2. Общее уравнение динамики (одна степень свободы) . . . . .	288
13.3. Общее уравнение динамики (две степени свободы) . . . . .	294
13.4. Уравнение Лагранжа 2-го рода (две степени свободы) . . . . .	300
13.5. Уравнение Лагранжа. Неслинейные уравнения движения . . . . .	307
13.6. Уравнение Лагранжа 2-го рода для консервативных систем . . . . .	318
13.7. Функция Гамильтона . . . . .	324
13.8. Уравнения Гамильтона . . . . .	326
<b>Глава 14. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ . . . . .</b>	<b>336</b>
14.1. Система с двумя степенями свободы . . . . .	336
14.2. Колебания узла фермы . . . . .	343
<b>IV. РЕШЕНИЯ В СИСТЕМЕ MAPLE V . . . . .</b>	<b>349</b>
<b>Глава 15. ПРОГРАММЫ ПО СТАТИКЕ . . . . .</b>	<b>350</b>
15.1. Расчет фермы . . . . .	350
15.2. Центр тяжести плоской фигуры . . . . .	355
<b>Глава 16. ПРОГРАММЫ ПО КИНЕМАТИКЕ . . . . .</b>	<b>358</b>
16.1. Кинематика точки . . . . .	358
16.2. Механизм с двумя степенями свободы . . . . .	361
16.3. Скорости точек плоского механизма . . . . .	364
<b>Глава 17. ПРОГРАММЫ ПО ДИНАМИКЕ . . . . .</b>	<b>368</b>
17.1. Принцип возможных скоростей . . . . .	368
17.2. Динамика машины с кулисным приводом . . . . .	370
17.3. Колебания системы с двумя степенями свободы . . . . .	373
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ . . . . .</b>	<b>375</b>
<b>ИМЕННОЙ И ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ . . . . .</b>	<b>377</b>

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Теоретическая механика — одна из важнейших дисциплин в техническом вузе. Решение задач по этой дисциплине всегда представляет определенную трудность для студента. Вызвано это многообразием тем или обилием уравнений и теорем, множеством методов, уровнем абстракции при решении задач или какими-либо другими причинами — неизвестно. Скорее всего, для студентов младших курсов все эти факторы вместе приводят к тому, что, по общему мнению, теоретическая механика, наряду с математикой и сопротивлением материалов, числится в технических вузах наиболее сложной дисциплиной.

При столкновении с трудной задачей лучшим помощником для студента, самостоятельно изучающего науку, является книга. По теоретической механике существует много учебников. Можно рекомендовать, например, изданный большим тиражом краткий курс Тарга С.М. [19]. Очень хорошо подходит для технических вузов учебник [5]. В этих учебниках и во многих других после изложения теории дается несколько примеров решения задач. Ознакомление с готовыми решениями<sup>\*)</sup> — один из способов обучения, но не самый лучший. Если ставить перед собой цель научиться решать задачи (а не решить вот эту — конкретную задачу), то лучше всего овладеть секретами мастерства: алгоритмами и схемами решений, методами и специальными приемами. РЕШЕБНИК “Теоретическая механика” ставит перед собой именно такую цель. Продолжая традиции РЕШЕБНИКА “Высшая математика” [10] и РЕШЕБНИКА “Высшая математика.

---

<sup>\*)</sup> В сети Интернет существуют специальные страницы, где приводятся готовые решения заданий и задач по теоретической механике. Форма и содержание таких решений часто не удовлетворяют самым скромным запросам, не говоря уже о том, что научить они мало чему смогут.

Специальные разделы” [2], в книге даны, во-первых, четкая постановка задачи, во-вторых, конкретный план действий и, наконец, пример решения задачи по этому плану. В качестве примеров взяты задачи из сборника задач Мещерского И.В. [14] или задачи близкие к ним. В конце каждого параграфа приведены десять задач, которые могут быть решены студентами самостоятельно, а некоторые, наиболее сложные, соответствуют по уровню курсовым работам. За образец для таких работ взяты задания из сборников Яблонского А.А. [17] и Новожилова И.В., Зацепина М.Ф. [15].

Ко всем задачам даны не только ответы, но и, как правило, промежуточные результаты. Это упрощает проверку решения. Числовые ответы приведены с двумя или тремя знаками после запятой, предполагая, что данные в задаче имеют соответствующую точность.

Там, где это необходимо, после решения задачи даются ответы на характерные вопросы, возникающие у студентов в процессе решения. За двадцать лет преподавания теоретической механики автор накопил достаточное число таких вопросов. Даны также предостережения о возможных ошибках в решении задач.

В последней части РЕШЕБНИКА приведены примеры решения задач с использованием универсальной математической системы Maple V, позволяющей решить задачу в аналитическом виде и изобразить исследуемое явление, например, движение механизма, на экране компьютера.

Полные тексты приведенных здесь программ и программы для решения других задач механики с примерами, подробными пояснениями и графическим представлением результатов можно найти на авторской странице Интернет: [www.academiaxxi.ru/solverTM.html](http://www.academiaxxi.ru/solverTM.html).

Ссылка на РЕШЕБНИК “Высшая математика” обозначена как *Решebник ВМ* с указанием соответствующего параграфа.

В дополнение к этой книге и к программам для Maple V распространяется пакет программ РЕШЕБНИК.ТМ, представляющий собой электронную версию РЕШЕБНИКА, разработанную на основе пакета AcademiaXXI. С помощью пакета программ РЕШЕБНИК.ТМ студент сможет проще решать многие задачи теоретической механики, уделяя больше сил и времени разбору сути задачи и физического явления, лежащего в основе задачи, предоставляя компьютеру рутинную часть работы, связанную с математическими выкладками и численным счетом.

Для преподавателей теоретической механики автор разработал специальную программу-генератор задач, создающую тексты усло-

вий и ответов по 50 темам статики, кинематики и динамики. Тексты задач и рисунки в формате  $\text{\LaTeX}$  могут быть использованы для очного и дистанционного обучения. Программа содержит сотни тысяч вариантов задач и используется автором в его педагогической работе. По десять задач из почти всех разделов программы-генератора приведены в этой книге в качестве примеров.

# Часть I

## СТАТИКА

В статике изучается равновесие тел под действием сил и свойства систем сил, необязательно находящихся в равновесии.

Задачи статики можно условно разделить на три типа: задачи на равновесие системы сходящихся сил, т.е. сил, линии действия которых пересекаются в одной точке (глава 1), задачи произвольной плоской системы сил (главы 2,3) и задачи пространственной системы сил (глава 4).

Нахождение координат центра тяжести (глава 5) тоже считается задачей статики. Хотя силы в этой задаче явно не присутствуют, основные формулы задачи следуют из уравнений равновесия системы параллельных сил.

Искомыми величинами в задачах статики могут быть реакции опор, усилия в элементах конструкций, геометрические (размеры, углы) и материальные (вес, коэффициент трения) характеристики систем. В статически определимых задачах число уравнений равновесия совпадает с числом неизвестных. Именно такие задачи и будут рассмотрены в этой части.

Для решения задач статики потребуются понятия проекции силы на ось и момента силы относительно точки и оси. Напомним, что проекция вектора силы  $\vec{F}$  на ось  $x$  определяется по формуле  $F_x = F \cos \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между положительным направлением оси и вектором силы, отсчитываемый против часовой стрелки. Если угол острый, то проекция положительная, если тупой — отрицательная.

Общее определение момента  $\vec{M}_O$  силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$  дается векторным произведением

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r}_0 \times \vec{F}, \quad (1)$$

где  $\vec{r}_0$  — радиус-вектор точки приложения вектора силы относительно точки  $O$ . Модуль момента вычисляем по формуле  $M_O(\vec{F}) = r_0 F \sin \gamma$ ,



где  $\gamma$  — угол между векторами  $\vec{r}_0$  и  $\vec{F}$ . Направление вектора момента вычисляется по правилу векторного произведения. Плечо  $h$  силы относительно точки  $O$  — это кратчайшее расстояние от точки до линии действия силы;  $h = r_0 \sin \gamma$ .

Вектор момента перпендикулярен плоскости, в которой располагаются силы. Поэтому в задачах статики плоской системы сил момент можно рассматривать как скалярную величину — величину проекции вектора момента на нормаль к плоскости (ось  $z$ ). Индекс  $z$  для сокращения записи часто опускают и отождествляют момент силы  $M_O$  относительно точки на плоскости со скалярной величиной —  $M_{Oz}$ . Отсюда вытекает практическое правило определения момента силы относительно точки в плоских задачах статики. Для вычисления момента силы относительно точки  $O$  (рис. 1) сначала находим проекции силы на оси, а затем момент вычисляем по формуле  $M_{Oz}(F) = -F_x \cdot y_0 + F_y \cdot x_0$ . Другой способ вычисления момента:  $M_{Oz}(F) = \pm F h$ , где  $h$  — плечо силы относительно точки  $O$ .

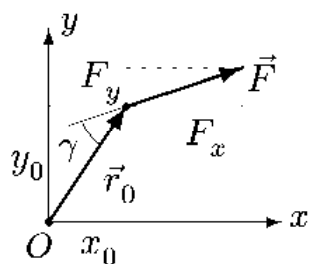


Рис. 1

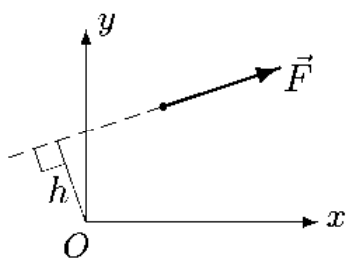


Рис. 2

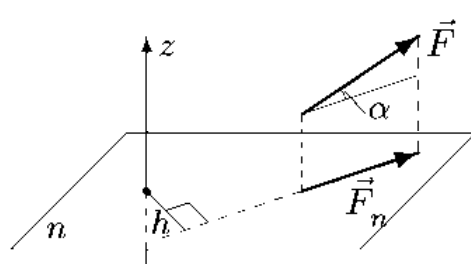


Рис. 3

Знак определяется по правилу векторного произведения. Если сила поворачивает тело относительно центра по часовой стрелке — момент отрицательный, против часовой стрелки — положительный. На рис. 2 момент силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$  отрицательный. Если сила или линия ее действия пересекает точку, то момент силы относительно этой точки равен нулю.

При решении задач пространственной статики (§ 4.3 – § 4.6) требуется вычислять момент силы относительно оси, или, что то же, проекцию момента силы относительно точки (1) на ось, проходящую через нее. Иногда эту величину удобнее искать как момент проекции  $\vec{F}_n$  силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью (рис. 3). Знак определяем по направлению вращения вокруг оси с точки зрения наблюдателя, находящегося на конце оси. Если вращение происходит по часовой стрелке, то момент отрицательный, против часовой стрелки — положительный.

Момент силы относительно оси равен нулю, если сила параллельна оси или пересекает ее, т.е., если сила и ось лежат в одной плоскости.

Кроме сил в статике рассматриваются и пары сил. Пара — это совокупность двух равных параллельных противоположно направленных сил. Пара характеризуется моментом — суммой моментов ее сил относительно некоторой точки. Легко показать, что положение точки не существенно и на величину момента не влияет, поэтому момент пары является свободным вектором. Напомним, что вектор силы является вектором скользящим. В зависимости от знака момента пары на плоскости изображать пару будем изогнутой стрелкой  $\curvearrowright$  или  $\curvearrowleft$ . Не путать эту стрелку с вектором пары! Вектор пары перпендикулярен ее плоскости.

Решение двух задач статики в системе Maple V приведено в § 15.1, 15.2. Большинство задач статики сводится к решению систем линейных уравнений. Рутинную часть работы по составлению и решению уравнений можно поручить Maple V. Простейшая программа может выглядеть, например, так:

```
eq1:=Xa*2.5+Ya*3.1=20:  
eq2:=-Xa*1.5+Ya*10=-12.5:  
solve({eq1,eq2},{Xa,Ya});
```

Записывая уравнение на компьютере, а не на бумаге, вы достигнете сразу же нескольких целей. Во-первых, компьютер выполняет математические действия, часто весьма громоздкие. Во-вторых, уравнение легко поправить и сразу же пересчитать, если вы ошиблись при составлении уравнения и ответ не сходится. В-третьих, решение удобно оформить, распечатав его на принтере. Можно вывести график, таблицу результатов и т.д. Все эти действия можно выполнить и в других системах, в частности, в пакете AcademiaXXI, представленном на сайте [www.academiaxxi.ru](http://www.academiaxxi.ru).

## Глава 1

# ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

При изучении темы ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ вы научитесь составлять уравнения проекций и решать задачи равновесия плоских стержневых систем методом вырезания узлов. Этот метод лежит в основе компьютерной программы расчета ферм (§15.1).

### 1.1. Простая стержневая система

*ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Плоская шарнирно-стержневая конструкция закреплена на неподвижном основании и нагружена в шарнирах силами. Найти усилия в стержнях.*

#### ПЛАН РЕШЕНИЯ

Рассматриваем равновесие внутренних шарниров системы, не соединенных с неподвижным основанием. Такие шарниры будем называть узлами. Действие каждого стержня заменяем его реакцией — силой, направленной из узла к стержню. Усилие — это проекция реакции стержня на внешнюю нормаль к сечению. Если в результате решения задачи реакция стержня, приложенная таким образом к узлу, оказывается отрицательной, то стержень сжат, в противном случае стержень растянут.

1. Вырезаем узел, соединенный только с двумя стержнями. Действие стержней заменяем их реакциями.

2. Для полученной системы сходящихся сил составляем уравнения равновесия в проекциях на выбранные для этого узла оси.

3. Решаем систему двух линейных уравнений и находим искомые усилия.

4. Вырезаем очередной узел системы, тот, к которому подходят не более двух стержней с неизвестными усилиями. Составляем и решаем уравнения равновесия в проекциях на оси, выбранные для этого

узла. Этот пункт плана выполняем несколько раз для всех узлов до нахождения всех усилий.

5. Для проверки решения мысленно отделяем конструкцию от основания, заменяя действие рассеченных стержней найденными реакциями. Проверяем выполнение условий равновесия полученной системы сил.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Существуют фермы <sup>\*)</sup>, у которых к каждому узлу присоединены более двух стержней. Например, на рис. 4 изображена конструкция (сетчатая ферма В.Г.Шухова), к каждому узлу которой подходит по три стержня. Диагональные стержни расположены в разных плоскостях и не пересекаются.

Здесь нельзя определять усилия по предложенной схеме, переходя от одного узла к другому, так как нет узла, с которого можно начать расчет. В этом случае сначала составляются уравнения равновесия отдельных узлов, а потом совместно решается система полученных уравнений. Систему можно решать любым известным способом (*Решбник ВМ*, §2.1).

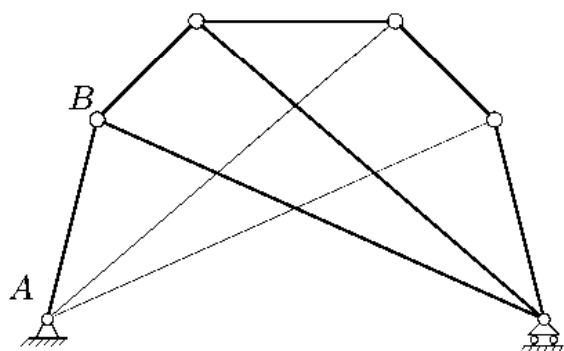


Рис. 4

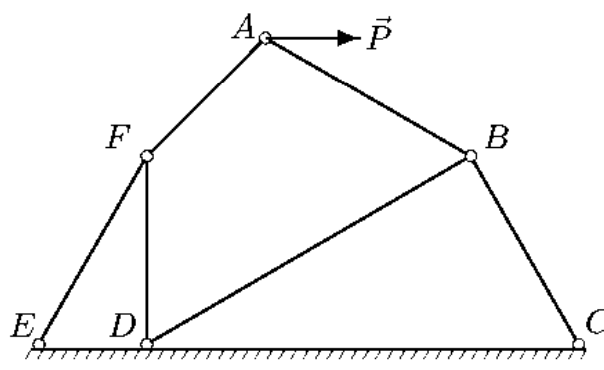


Рис. 5

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Для упрощения уравнений равновесия одну из осей координат можно направить вдоль стержня с неизвестным усилием. Для каждого узла можно выбрать свою систему координат.

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** Углы между осями и векторами усилий легче определять, если проводить через узлы вспомогательные вертикальные или горизонтальные прямые.

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.** Усилия в стержнях можно найти с помощью системы Maple V (Программа 1, с. 350).

<sup>\*)</sup> Шарнирно-стержневая конструкция, нагруженная в шарнирах силами, называется фермой. Весом стержней фермы и трением в шарнирах пренебрегают.

ПРИМЕР. Плоская шарнирно-стержневая конструкция закреплена на неподвижном основании шарнирами  $E, D, C$  и нагружена в шарнире  $A$  горизонтальной силой  $P = 100$  кН (рис. 5). Даны углы:  $\angle DFA = 135^\circ, \angle ABD = 60^\circ, \angle DCB = 60^\circ, \angle BDC = 30^\circ, \angle DFE = 30^\circ$ . Найти усилия в стержнях.

### РЕШЕНИЕ

Конструкция состоит из шести стержней, соединенных тремя шарнирами (узлами). Узлы фермы находятся в равновесии. Для каждого узла  $A, B, F$  составляем по два уравнения равновесия в проекциях на выбранные оси. Из шести уравнений находим шесть искомых усилий.

1. Решение задачи начинаем с рассмотрения узла  $A$ , так как этот узел соединен только с двумя стержнями  $AB$  и  $AF$ . При вырезании узла действие каждого стержня заменяем силой, направленной из шарнира к стержню (рис. 6).

2. Составляем уравнения равновесия. Для упрощения уравнений ось  $y$  направляем по стержню  $AB$ . Получаем

$$\begin{aligned}\sum X_i &= S_{AF} \cos 15^\circ - P \sin 30^\circ = 0, \\ \sum Y_i &= -S_{AF} \sin 15^\circ + S_{AB} + P \cos 30^\circ = 0.\end{aligned}$$

где  $X_i$  — проекции силы  $i$  на ось  $x$ , а  $Y_i$  — проекции силы  $i$  на ось  $y$ .

3. Решаем уравнения. Из первого уравнения системы находим усилие  $S_{AF} = 51.76$  кН, из второго — усилие  $S_{AB} = -73.21$  кН.

4. Рассматриваем узел  $F$ . К нему подходят три стержня (рис. 7).

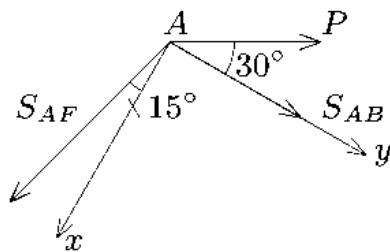


Рис. 6

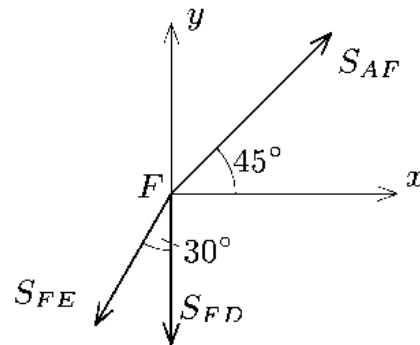


Рис. 7

Усилие в одном из них уже известно  $S_{AF} = 51.76$  кН. Усилия в двух других находим из уравнений для проекций:

$$\sum X_i = -S_{FE} \sin 30^\circ + S_{AF} \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum Y_i = -S_{FE} \cos 30^\circ - S_{FD} + S_{AF} \sin 45^\circ = 0.$$

Находим  $S_{FE} = 73.21$  кН,  $S_{FD} = -26.79$  кН.

Составляем уравнения равновесия узла  $B$  в проекциях на оси, направленные по стержням  $BC$  и  $BD$  (рис. 8):

$$\sum X_i = S_{DB} + S_{AB} \sin 30^\circ = 0,$$

$$\sum Y_i = S_{BC} - S_{AB} \cos 30^\circ = 0.$$

Решая уравнения, получаем:  $S_{DB} = -S_{AB} \sin 30^\circ = 73.21 \cdot 0.5 = 36.6$  кН,  $S_{BC} = S_{AB} \cos 30^\circ = -73.21 \cdot 0.866 = -63.4$  кН.

5. Проверка. Рассматриваем равновесие конструкции в целом.

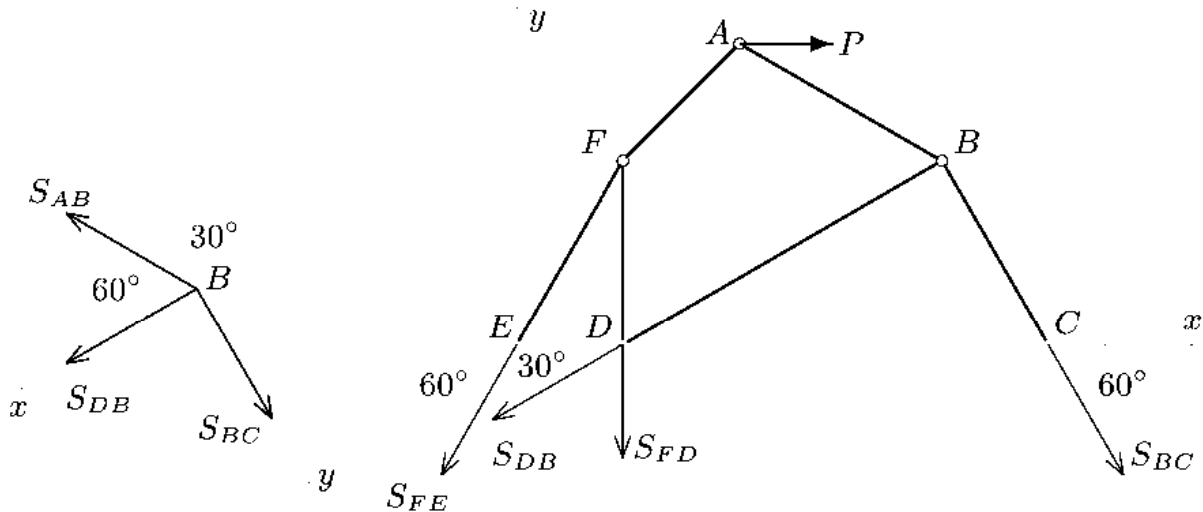


Рис. 8

Рис. 9

Горизонтальным сечением отскаем ферму от основания. Действия стержней заменяем силами, которые направляем, как и раньше, по внешним нормальям к сечениям стержней, т.е. вниз (рис. 9).

Система сил, действующих на ферму, не является сходящейся. Для такой системы справедливы три уравнения равновесия, одно из которых — уравнение моментов. Составление уравнения моментов — тема задач статики произвольной плоской или пространственной системы сил (§2.1 – 3.2). Для того, чтобы не выходить за пределы темы поставленной задачи, в решении которой используются только уравнения проекций, составим два уравнения проекций на оси  $x$  и  $y$  всех сил, действующих на ферму целиком:

$$\sum X_i = -S_{FE} \cos 60^\circ - S_{DB} \cos 30^\circ + S_{BC} \cos 60^\circ + P = 0,$$

$$\sum Y_i = -S_{FE} \sin 60^\circ - S_{FD} - S_{DB} \sin 30^\circ - S_{BC} \sin 60^\circ = 0.$$

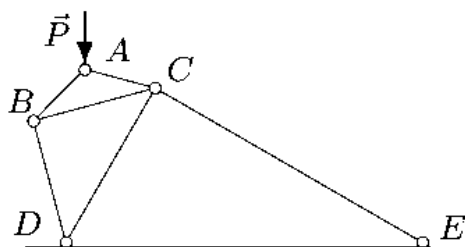
Суммы равны нулю. Это подтверждает правильность решения.

Результаты расчетов в кН заносим в таблицу:

$S_{AF}$	$S_{AB}$	$S_{FE}$	$S_{FD}$	$S_{DB}$	$S_{BC}$
51.76	-73.21	73.21	-26.79	36.60	-63.40

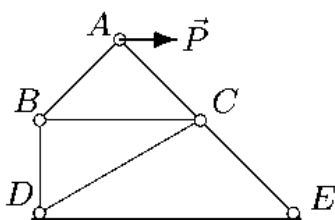
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Плоская шарнирно-стержневая конструкция закреплена на неподвижном основании и нагружена в одном шарнире вертикальной или горизонтальной силой  $P$ . Найти усилия в стержнях (в кН).

1.



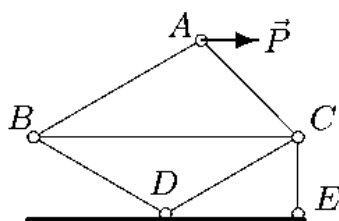
$P = 1$  кН,  
 $\angle ACB = 30^\circ$ ,  $\angle ABC = 30^\circ$ ,  
 $\angle BDC = 45^\circ$ ,  $\angle BCD = 45^\circ$ ,  
 $\angle CDE = 60^\circ$ ,  $\angle CED = 30^\circ$ .

2.



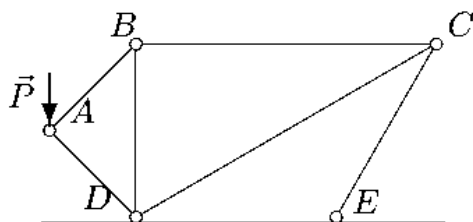
$P = 2$  кН,  
 $\angle ACB = 45^\circ$ ,  $\angle ABC = 45^\circ$ ,  
 $\angle BDC = 60^\circ$ ,  $\angle BCD = 30^\circ$ ,  
 $\angle CDE = 30^\circ$ ,  $\angle CED = 45^\circ$ .

3.

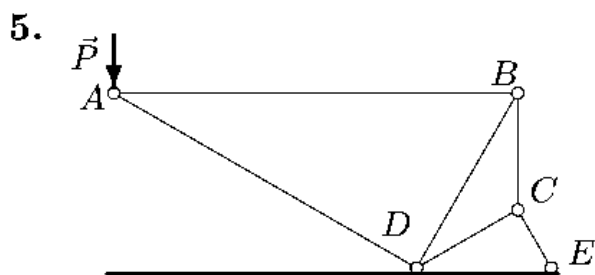


$P = 3$  кН,  
 $\angle ACB = 45^\circ$ ,  $\angle ABC = 30^\circ$ ,  
 $\angle BDC = 120^\circ$ ,  $\angle BCD = 30^\circ$ ,  
 $\angle CDE = 30^\circ$ ,  $\angle CED = 90^\circ$ .

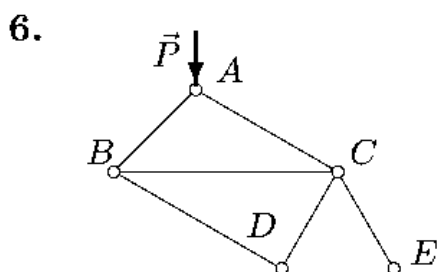
4.



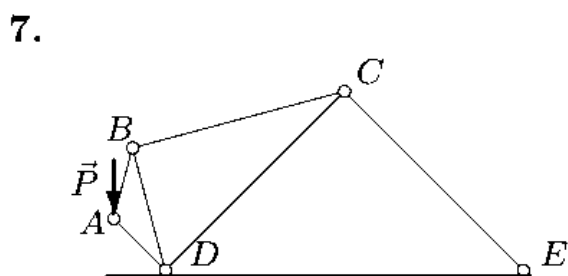
$P = 4$  кН,  
 $\angle ABD = 45^\circ$ ,  $\angle ADB = 45^\circ$ ,  
 $\angle BDC = 60^\circ$ ,  $\angle BCD = 30^\circ$ ,  
 $\angle CDE = 30^\circ$ ,  $\angle CED = 120^\circ$ .



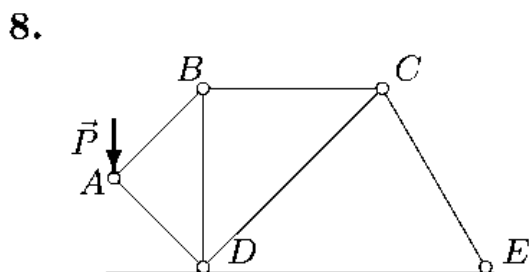
$P = 5 \text{ кН}$ ,  
 $\angle ABD = 60^\circ$ ,  $\angle ADB = 90^\circ$ ,  
 $\angle BDC = 30^\circ$ ,  $\angle BCD = 120^\circ$ ,  
 $\angle CDE = 30^\circ$ ,  $\angle CED = 60^\circ$ .



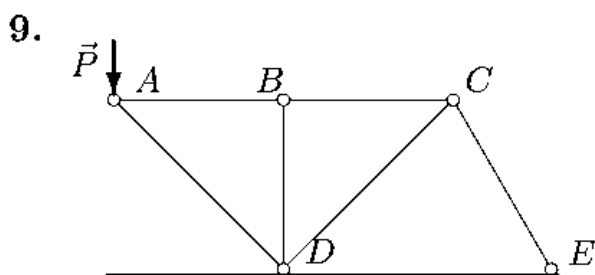
$P = 6 \text{ кН}$ ,  
 $\angle ACB = 30^\circ$ ,  $\angle ABC = 45^\circ$ ,  
 $\angle BDC = 90^\circ$ ,  $\angle BCD = 60^\circ$ ,  
 $\angle CDE = 60^\circ$ ,  $\angle CED = 60^\circ$ .



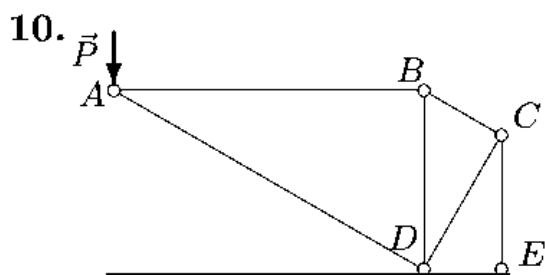
$P = 7 \text{ кН}$ ,  
 $\angle ABD = 30^\circ$ ,  $\angle ADB = 30^\circ$ ,  
 $\angle BDC = 60^\circ$ ,  $\angle BCD = 30^\circ$ ,  
 $\angle CDE = 45^\circ$ ,  $\angle CED = 45^\circ$ .



$P = 8 \text{ кН}$ ,  
 $\angle ABD = 45^\circ$ ,  $\angle ADB = 45^\circ$ ,  
 $\angle BDC = 45^\circ$ ,  $\angle BCD = 45^\circ$ ,  
 $\angle CDE = 45^\circ$ ,  $\angle CED = 60^\circ$ .



$P = 9 \text{ кН}$ ,  
 $\angle ABD = 90^\circ$ ,  $\angle ADB = 45^\circ$ ,  
 $\angle BDC = 45^\circ$ ,  $\angle BCD = 45^\circ$ ,  
 $\angle CDE = 45^\circ$ ,  $\angle CED = 60^\circ$ .



$P = 10 \text{ кН}$ ,  
 $\angle ABD = 90^\circ$ ,  $\angle ADB = 60^\circ$ ,  
 $\angle BDC = 30^\circ$ ,  $\angle BCD = 90^\circ$ ,  
 $\angle CDE = 60^\circ$ ,  $\angle CED = 90^\circ$ .



## Ответы

	$S_{AB}$	$S_{AC}$	$S_{AD}$	$S_{BC}$	$S_{BD}$	$S_{CD}$	$S_{CE}$
1	-1.115	-0.816	—	0.966	-0.558	-0.472	-0.106
2	1.414	-1.414	—	-1.000	1.000	0.732	-1.932
3	2.196	-1.553	—	-3.804	2.196	5.660	-3.928
4	2.828	—	-2.828	2.000	-2.000	-3.464	2.000
5	8.660	—	-10.000	15.000	-17.321	7.500	12.990
6	-5.379	-4.392	—	10.392	-7.608	-7.856	5.321
7	5.715	—	-2.092	2.858	-4.950	-2.475	1.429
8	5.657	—	-5.657	4.000	-4.000	-3.586	2.928
9	9.000	—	-12.728	9.000	0.000	-8.069	6.588
10	17.321	—	-20.000	20.000	-10.000	-34.641	40.000

Ответы на типичные вопросы, возникающие при решении задачи

1. Почему в задаче не указаны длины стержней?

Решение задачи зависит только от углов между стержнями и от внешних нагрузок. Длины стержней не нужны.

2. После вырезания узла получилась система двух уравнений с тремя (или более) неизвестными.

Во-первых, см. Замечание 1. Во-вторых, этого можно избежать, если рассматривать всякий раз узел с двумя неизвестными реакциями. В-третьих, возможно не было замечено, что одно из усилий уже было найдено.

Предупреждение типичных ошибок

1. Меняя направление реакции стержня, при переходе от рассмотрения равновесия узла на одном его конце к равновесию другого, не надо менять знак усилия.

2. Не надо вырезать опорные шарниры. Из этого ничего не получится. Реакции основания вы не знаете!

3. Для метода вырезания узлов характерно накопление ошибок округления. Поэтому рекомендуем промежуточные результаты получать с повышенной точностью, т.е. с четырьмя-пятью знаками после запятой.

4. Не стоит вводить для одного усилия два обозначения, например, усилие  $S_{AB}$  при рассмотрении узла  $A$  и  $S'_{AB}$  для  $B$ . Записывая (или держа в уме) естественное в этом случае соотношение для противоположно направленных векторов реакций:  $\vec{S}'_{AB} = -\vec{S}_{AB}$ , можно по ошибке знак минус отнести и к величинам усилий, хотя на самом деле это одно и то же значение, а минус уже учтен при изображении векторов в разные стороны.

## 1.2. Равновесие цепи

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** *Определить положение равновесия плоского шарнирно-стержневого механизма, состоящего из последовательно соединенных невесомых стержней. Механизм расположен в вертикальной плоскости. В крайних точках механизм шарнирно закреплен на неподвижном основании. Средние шарниры нагружены силами. Найти усилия в стержнях.*

Особенностью задачи является необычный для статики объект исследования — механизм, имеющий возможность двигаться. При определенном соотношении нагрузок и геометрических параметров механизм принимает положение равновесия. В качестве искомой величины может быть угол или какая-либо другая геометрическая характеристика конструкции.

**ПЛАН РЕШЕНИЯ**

1. Записываем уравнения равновесия узлов системы в проекциях.
2. Решаем полученную систему уравнений. Определяем усилия в стержнях и искомый угол.
3. Проверяем равновесие конструкции в целом, освобождая ее от внешних связей. Проверочным уравнением может быть уравнение проекций на какую-либо ось.

**ПРИМЕР <sup>\*</sup>**. Определить положение равновесия плоского симметричного шарнирно-стержневого механизма. Концы  $A$  и  $E$  шарнирно закреплены на неподвижном основании. Три внутренних шарнира  $B$ ,  $C$  и  $D$  нагружены одинаковой вертикальной нагрузкой  $Q$ .

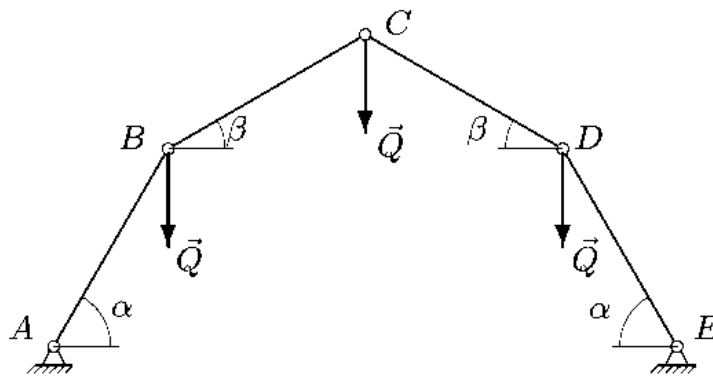


Рис. 10

В положении равновесия  $\alpha = 60^\circ$ . Определить угол  $\beta$  и усилия в стержнях (рис. 10). Весом стержней пренебречь.

<sup>\*</sup>) Задача 2.39 из сборника И.В. Мещерского.

## РЕШЕНИЕ

Конструкция, данная в условии задачи, представляет собой механизм, находящийся в равновесии только при некоторых определенных нагрузках. При изменении направлений и величин нагрузок меняется и конфигурация конструкции. Одной из неизвестных величин задачи (помимо усилий в стержнях) является угол  $\beta$ . Для решения задачи используем метод вырезания узлов (§1.1).

1. Записываем уравнения равновесия узлов системы. Составим уравнения равновесия узла  $C$  (рис.11):

$$\sum X_i = -S_{BC} \cos \beta + S_{CD} \cos \beta = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = -Q - S_{BC} \sin \beta - S_{CD} \sin \beta = 0. \quad (2)$$

Конструкция симметрична, поэтому уравнения равновесия узлов  $B$  и  $D$  запишутся одинаково. Рассмотрим равновесие узла  $B$  (рис.12).

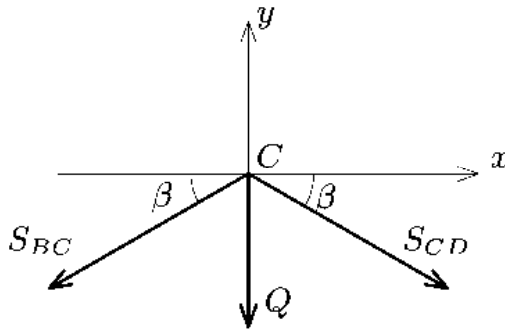


Рис. 11

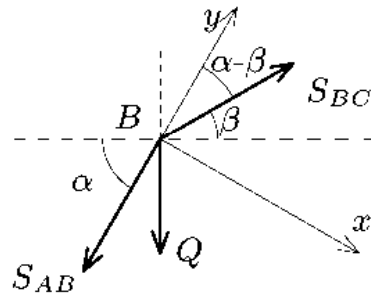


Рис. 12

Для упрощения уравнений направим ось  $y$  по стержню  $AB$ , ось  $x$  — перпендикулярно  $AB$ . Тогда, уравнение равновесия в проекции на ось  $x$  содержит только одну неизвестную величину:

$$\sum X_i = S_{BC} \sin(\alpha - \beta) + Q \cos \alpha = 0, \quad (3)$$

$$\sum Y_i = S_{BC} \cos(\alpha - \beta) - S_{AB} - Q \sin \alpha = 0. \quad (4)$$

2. Решаем систему уравнений (1–4). Из (1) получаем, что  $S_{CD} = S_{BC}$ . Это равенство объясняется симметрией конструкции и симметрией нагрузок. Из (2) и (4) с учетом полученного равенства находим

$$Q = -2S_{BC} \sin \beta, \quad (5)$$

$$S_{AB} = S_{BC} \cos(\alpha - \beta) - Q \sin \alpha. \quad (6)$$

Выражаем  $S_{BC}$  из (5) и подставляем в (3):

$$-Q \sin(\alpha - \beta) / (2 \sin \beta) + Q \cos \alpha = 0.$$

Так как  $Q \neq 0$ , то после сокращения на  $Q$  получаем уравнение для  $\beta$ :

$$-\sin(\alpha - \beta) + 2 \cos \alpha \sin \beta = 0,$$

или  $3 \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$ ,  $\operatorname{tg} \beta = 0.577$ ,  $\beta = 30^\circ$ . Из (5) получаем усилие  $S_{BC} = -Q / (2 \sin \beta) = -Q$ . Стержень  $BC$  сжат. Из (6) находим усилие

$$S_{AB} = S_{BC} \cos(60^\circ - 30^\circ) - Q \sin 60^\circ = -Q\sqrt{3}.$$

В силу симметрии задачи  $S_{BC} = S_{CD}$ ,  $S_{AB} = S_{DE}$ .  
Результаты расчетов заносим в таблицу:

$\operatorname{tg} \beta$	$\beta$	$S_{AB}$	$S_{BC}$	$S_{CD}$	$S_{DE}$
0.577	$\pi/6$	$-Q\sqrt{3}$	$-Q$	$-Q$	$-Q\sqrt{3}$

3. Проверка. Рассмотрим равновесие всей конструкции в целом.

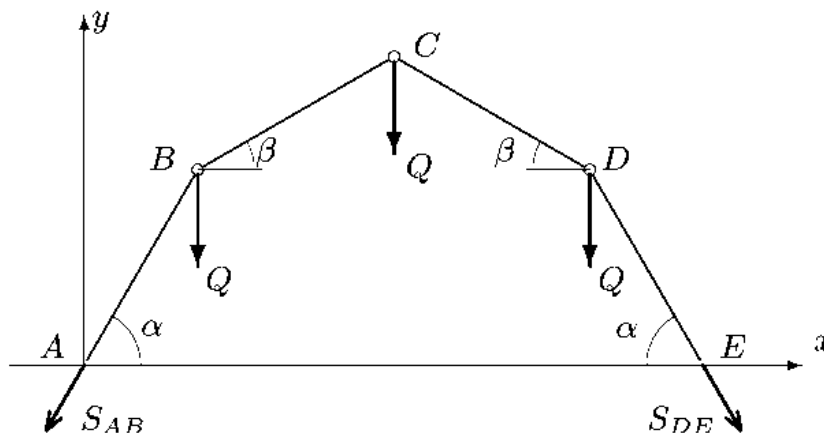


Рис. 13

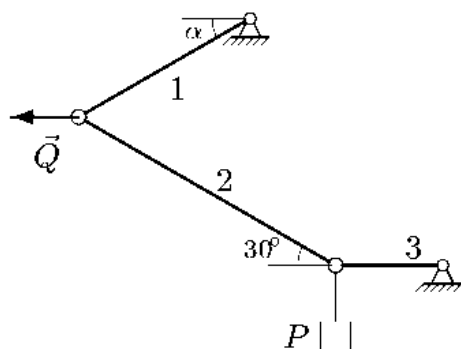
Отсечая стержни от основания, заменим их действие реакциями, направленными по внешним нормальям к сечениям стержней, т.е. вниз (рис. 13). Уравнение проекций на ось  $x$  составлять не имеет смысла — в силу симметрии оно лишь подтвердит, что  $S_{AB} = S_{DE}$ . Проверяем равенство нулю суммы проекций всех сил на вертикаль:

$$\sum Y_i = -3Q - S_{AB} \cos 30^\circ - S_{DE} \cos 30^\circ = -3Q + 2Q\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Задача решена верно.

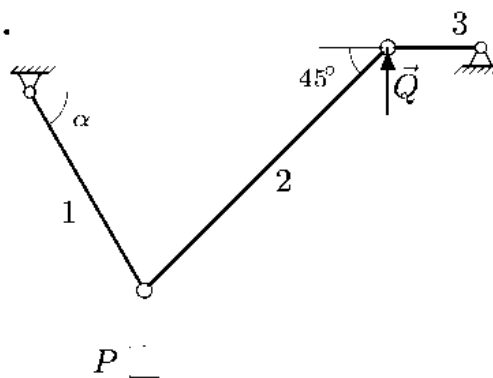
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Определить положение равновесия плоского шарнирно-стержневого механизма, состоящего из трех последовательно соединенных невесомых стержней. Механизм расположен в вертикальной плоскости. В крайних точках механизм шарнирно закреплен на неподвижном основании. Средние шарниры нагружены вертикальными или горизонтальными силами или грузом  $P$ . Найти угол  $\alpha$  (в рад) и усилия в стержнях 1, 2, 3 (в кН).

1.



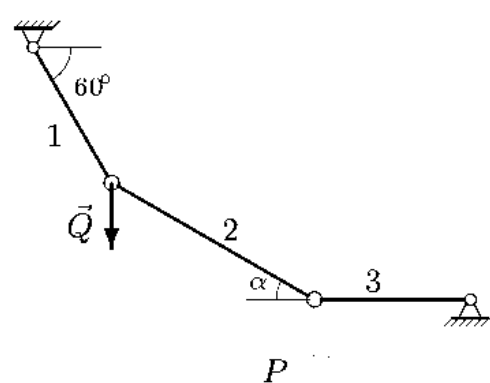
$$P = 70 \text{ кН}, Q = 240 \text{ кН}.$$

2.



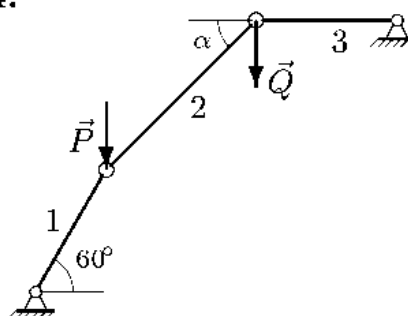
$$P = 90 \text{ кН}, Q = 30 \text{ кН}.$$

3.



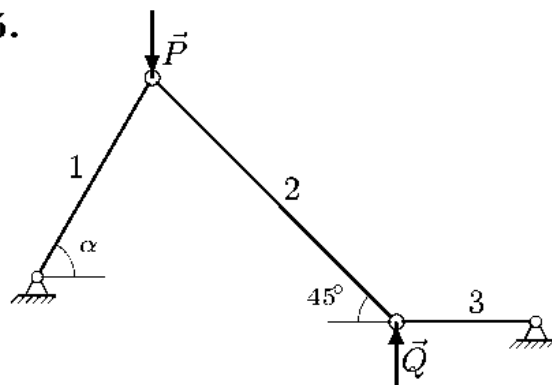
$$P = 80 \text{ кН}, Q = 160 \text{ кН}.$$

4.



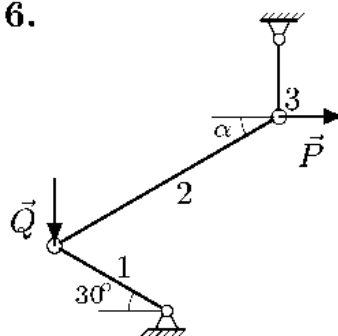
$$P = 40 \text{ кН}, Q = 50 \text{ кН}.$$

5.

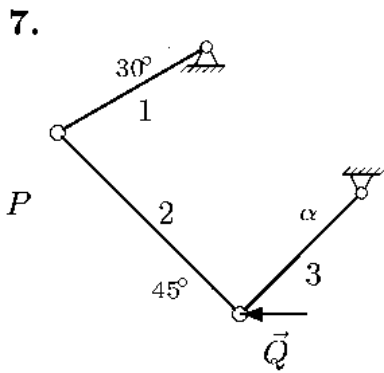


$$P = 45 \text{ кН}, Q = 20 \text{ кН}.$$

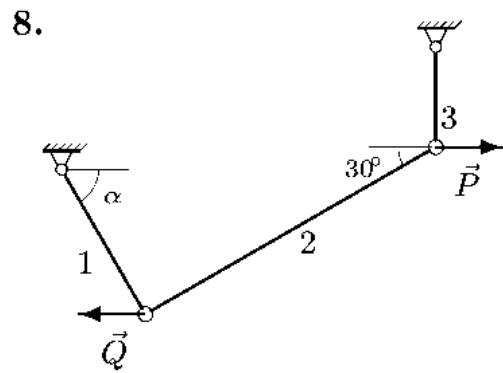
6.



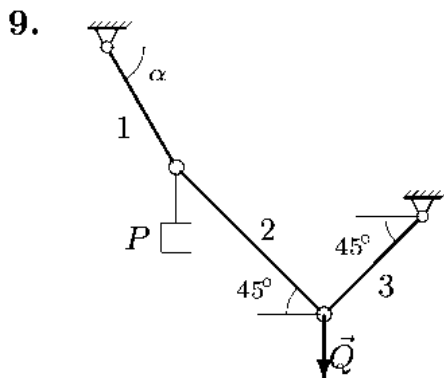
$$P = 50 \text{ кН}, Q = 60 \text{ кН}.$$



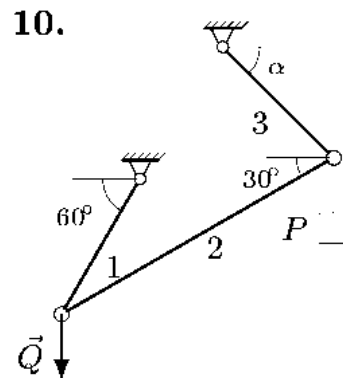
$P = 90 \text{ кН}, Q = 110 \text{ кН}.$



$P = 30 \text{ кН}, Q = 40 \text{ кН}.$



$P = 100 \text{ кН}, Q = 270 \text{ кН}.$



$P = 20 \text{ кН}, Q = 10 \text{ кН}.$

Отвeты

	$\text{tg } \alpha$	$\alpha$	$S_1$	$S_2$	$S_3$
		рад	кН		
1	0.589	0.533	137.852	140.000	121.244
2	2.000	1.107	67.082	42.426	30.000
3	0.577	0.524	277.128	160.000	138.564
4	0.962	0.766	-103.923	-72.111	-51.962
5	1.250	0.896	-32.016	-28.284	-20.000
6	0.623	0.557	-57.735	58.900	31.132
7	1.078	0.823	65.885	-80.692	77.836
8	1.732	1.047	-20.000	34.641	17.321
9	1.741	1.049	271.017	190.919	190.919
10	1.732	1.047	17.321	-10.000	17.321

Отвeты на типичные вопросы, возникающие при решении задачи, и предупреждение типичных ошибок см. с. 20.

### 1.3. Теорема о трех силах

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** Тело находится в равновесии под действием трех сил, одна из которых известна, у другой известно только направление, а у третьей не известны ни величина, ни направление. Используя теорему о трех силах, найти неизвестные силы.

#### ПЛАН РЕШЕНИЯ

В теореме о трех силах утверждается, что если на тело, находящееся в равновесии, действуют три непараллельные силы (включая реакции опор), то они лежат в одной плоскости, и линии их действия пересекаются в одной точке.

1. Найдем точку пересечения линий действия двух сил, направления которых известны. Через эту точку должна пройти и линия действия третьей силы.

2. Имея направления векторов трех сил, строим из них силовой треугольник. Начало одного вектора является концом другого. Если тело находится в равновесии, то сумма векторов сил, действующих на него, равна нулю. Следовательно, треугольник сил должен быть замкнут.

3. Из условия замкнутости треугольника по направлению заданной силы определяем направление обхода треугольника и, следовательно, направления искомых сил.

4. Находим стороны силового треугольника — искомые силы.

**ПРИМЕР <sup>\*</sup>**). Горизонтальный невесомый стержень  $AB$  находится в равновесии под действием трех сил, одна из которых вертикальная сила  $F = 5$  кН (рис. 14), другая — реакция опорного стержня  $CD$ , а третья — реакция неподвижного шарнира  $A$ . Используя теорему о трех силах, найти неизвестные реакции опор.

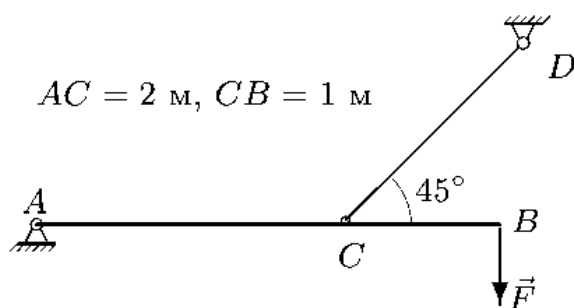


Рис. 14

<sup>\*</sup>) Задача 2.29 из сборника И.В. Мещерского.

## РЕШЕНИЕ

1. Найдем точку пересечения линий действия двух сил, направления которых известны. Определим направление линии действия третьей силы.

На стержень  $AB$  действуют три силы: заданная сила  $\vec{F}$ , реакция  $\vec{R}_A$  шарнира  $A$  и реакция  $\vec{R}_D$  стержня  $CD$ . При этом линия действия вектора  $\vec{R}_D$  известна. Она совпадает со стержнем  $CD$ , так как стержень нагружен только двумя силами в точках  $C$  и  $D$  (вес стержня не учитывается). Согласно аксиоме статики эти силы равны по величине и направлены вдоль  $CD$  в разные стороны. Направление реакции шарнира  $A$  определяем по теореме о трех силах. Линии действия сил  $\vec{F}$ ,  $\vec{R}_D$  и  $\vec{R}_A$  пересекаются в точке  $O$  (рис. 15). Следовательно,  $AO$  — линия действия силы  $\vec{R}_A$ . Известны только линии действия сил  $\vec{R}_D$  и  $\vec{R}_A$ , поэтому векторы на рис. 15 не изображаем, пока из силового треугольника не узнаем их направления.

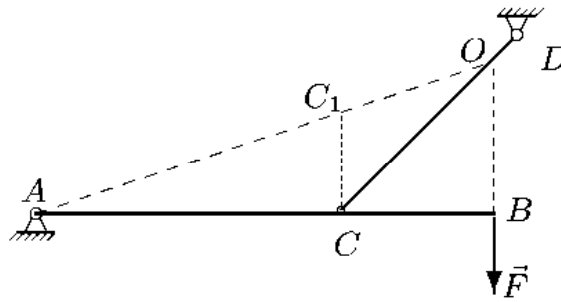


Рис. 15

2. Строим силовой треугольник. Сумма векторов сил, находящихся в равновесии, равна нулю, следовательно, треугольник, составленный из  $\vec{F}$ ,  $\vec{R}_D$  и  $\vec{R}_A$ , должен быть замкнут.

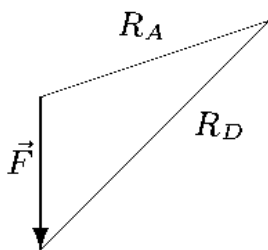


Рис. 16

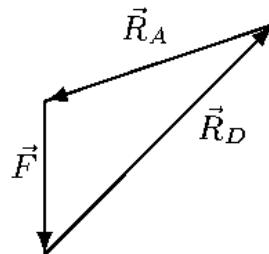


Рис. 17

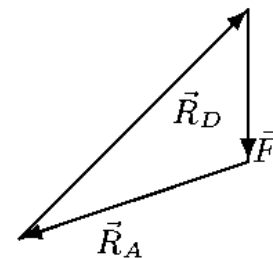


Рис. 18

Треугольник строим, начиная с известной силы  $\vec{F}$  (рис. 16). Через начало и конец вектора  $\vec{F}$  проводим прямые, параллельные направлениям  $\vec{R}_D$  и  $\vec{R}_A$ .



3. Из условия замкнутости треугольника по направлению внешней силы  $\vec{F}$  определяем направление обхода треугольника и, следовательно, направления реакций опор.

Замкнутость треугольника сил означает, что начало одной силы совпадает с концом другой. Отсюда определяем направление обхода треугольника, которое может быть различным в зависимости от способа построения силового треугольника (рис. 17 — против часовой стрелки, рис. 18 — по часовой стрелке). Направления и величины сил в обоих случаях одни и те же.

Изобразим реакции с учетом найденных направлений (рис. 19).

4. Определяем длины сторон силового треугольника — величины реакций опор. Найти стороны треугольника сил означает решить задачу. В нашем случае известны углы (по построению) и сторона  $F$  треугольника. Две другие стороны находятся по теореме синусов.

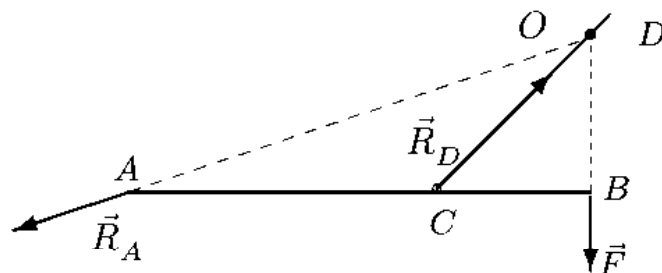


Рис. 19

Можно поступить иначе, используя свойства подобия. На рис. 15 найдем треугольник подобный силовому. В ряде случаев этот треугольник очевиден. В общем же, для получения такого треугольника надо выполнить дополнительные построения: провести линии, проходящие через характерные точки (шарниры, точки приложения сил и т.п.), параллельно сторонам силового треугольника. Проведем, например, вертикаль  $CC_1$ . Образуется треугольник  $CC_1O$ , подобный силовому (рис. 15, 17). Подобие следует из условия параллельности сторон треугольников.

Найдем стороны треугольника  $CC_1O$ :

$$OB = CB = 1 \text{ м}, \quad OC = \sqrt{2}CB = \sqrt{2} = 1.414 \text{ м}.$$

Из подобия  $\triangle AOB$  и  $\triangle ACC_1$  имеем соотношения

$$AC_1/AO = AC/AB = CC_1/OB.$$

Отсюда вычисляем длины:  $AO = \sqrt{AB^2 + OB^2} = \sqrt{10}$ ,  $AC_1 = 2\sqrt{10}/3$ ,  $C_1O = \sqrt{10}/3 = 1.054 \text{ м}$ ,  $CC_1 = (2/3)OB = 0.667 \text{ м}$ .

Из условия подобия треугольника сил и  $\triangle CC_1O$  следует, что

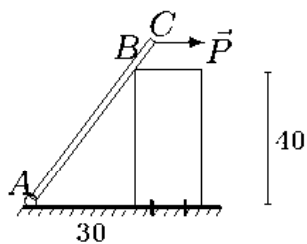
$$F/CC_1 = R_A/C_1O = R_D/CO.$$

Из этих пропорций находим искомые величины:

$$R_A = F \cdot C_1O/CC_1 = 7.901 \text{ кН}, \quad R_D = F \cdot CO/CC_1 = 10.607 \text{ кН}.$$

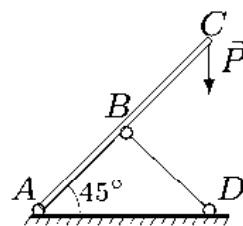
**УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.** Тело находится в равновесии под действием трех сил, одна из которых известный вес тела  $G$  или внешняя нагрузка  $P$ , другая — реакция опоры в точке  $B$  (гладкая опора или опорный стержень) с известным направлением, а третья — реакция неподвижного шарнира  $A$ . Используя теорему о трех силах, найти неизвестные реакции опор (в кН). Размеры указаны в см.

1.



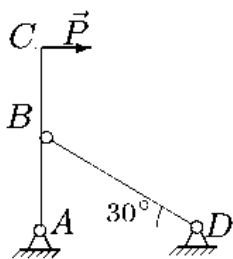
$$P = 10 \text{ кН}, \quad AC = 60 \text{ см}$$

2.



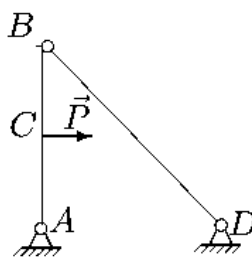
$$P = 20 \text{ кН}, \quad AB=BD=CB$$

3.



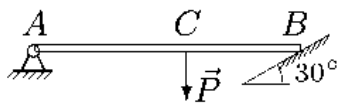
$$P = 30 \text{ кН}, \quad AB=BC$$

4.



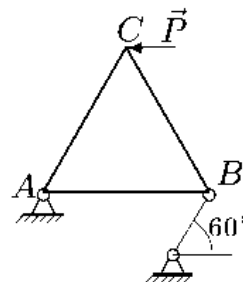
$$P = 40 \text{ кН}, \quad AB=AD, \quad AC=BC$$

5.



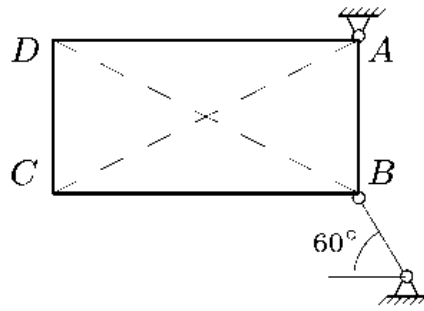
$$P = 25 \text{ кН}, \quad 3AC = 4CB$$

6.



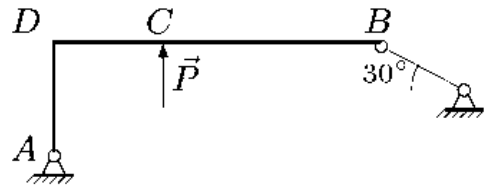
$$P = 35 \text{ кН}, \quad AB=BC=CA$$

7.



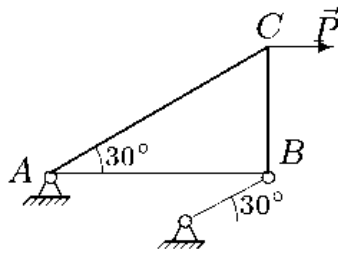
$$G = 45 \text{ кН}, 2AB = BC$$

8.



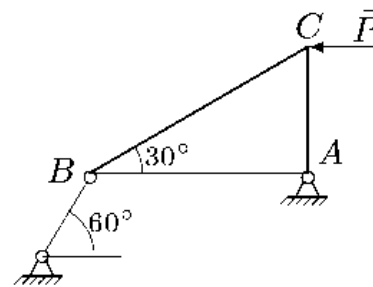
$$P = 10 \text{ кН}, BD = 3AD = 3DC.$$

9.



$$P = 90 \text{ кН}$$

10.



$$P = 70 \text{ кН}$$

Ответы

	$R_A$	$R_B$		$R_A$	$R_B$
1	-9.600	6.210	6	34.999	60.621
2	-28.284	20.000	7	-90.000	55.769
3	-69.282	45.826	8	4.226	8.695
4	-28.284	28.284	9	-103.923	187.350
5	-16.496	13.521	10	-46.667	61.734

### Предупреждение типичных ошибок

1. Размеры на чертеже сил, приложенных к телу (рис.15), измеряются в единицах длины (м, см), а на силовом треугольнике (рис. 17, 18) в единицах сил (Н, кН). Не надо принимать линейные расстояния  $AO$ ,  $CO$  и  $BO$  за величины соответствующих сил.

2. Реакция гладкого основания перпендикулярна поверхности основания. Реакция гладкой поверхности тела о неподвижную опору перпендикулярна поверхности тела.

3. В данной задаче должно быть только три силы. Лишние силы возникают, если прикладывать вес тела там, где его нет, или если реакцию в шарнире  $A$  раскладывать на составляющие.

## Глава 2

# ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

Изучив в предыдущем разделе систему сходящихся сил и уравнения проекций, в разделе ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ вы научитесь составлять уравнения моментов, более эффективно находить усилия в стержнях фермы и определять реакции опор составных конструкций.

Почти все задачи этого раздела заканчиваются решением системы линейных уравнений. Простейший способ выполнения этой трудоемкой процедуры с помощью Maple V приведен на с. 13.

## 2.1. Равновесие тяжелой рамы

*ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.* Тяжелая однородная рама расположена в вертикальной плоскости и опирается на неподвижный шарнир и наклонный невесомый стержень. К раме приложены внешние сосредоточенные силы и моменты. Учитывая погонный вес рамы, найти реакции опор.

### ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Согласно аксиоме о связях, освобождаем раму от связей. Действие опор заменяем их реакциями. Выбираем систему координат. В неподвижном шарнире имеются две неизвестные составляющие реакции (горизонтальная и вертикальная), а в невесомом опорном стержне — одна неизвестная реакция, направленная вдоль стержня. Все наклонные силы раскладываем на составляющие вдоль осей координат.

2. К центру каждого участка рамы прикладываем его вес, вычисленный по формуле  $G_k = l_k \rho$ , где  $l_k$  — длина участка,  $\rho$  — погонный вес рамы (вес единицы длины стержня, из которого составлена рама).

3. Составляем уравнение моментов всех сил, действующих на раму, относительно неподвижного шарнира. Определяем из этого уравнения реакцию опорного стержня.

4. Составляем уравнения проекций всех сил на оси  $x$  и  $y$ . Из этих уравнений определяем составляющие реакции неподвижного шарнира (горизонтальную и вертикальную).

5. Выполняем проверку решения, составляя уравнение моментов относительно какой-либо точки, не лежащей на линиях действия искомых реакций.

Пример. Тяжелая однородная рама расположена в вертикальной плоскости и опирается на неподвижный шарнир  $A$  и наклонный невесомый стержень  $H$ . К раме приложены внешние сосредоточенные силы  $P = 20$  кН,  $Q = 10$  кН и момент  $M = 100$  кНм. Дано:  $\gamma = 60^\circ$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 50^\circ$ ,  $AB = 2$  м,  $BC = 4$  м,  $CD = 6$  м,  $DH = 4$  м,  $KC = 2$  м (рис. 20). Учитывая погонный вес рамы  $\rho = 4$  кН/м, найти реакции опор.

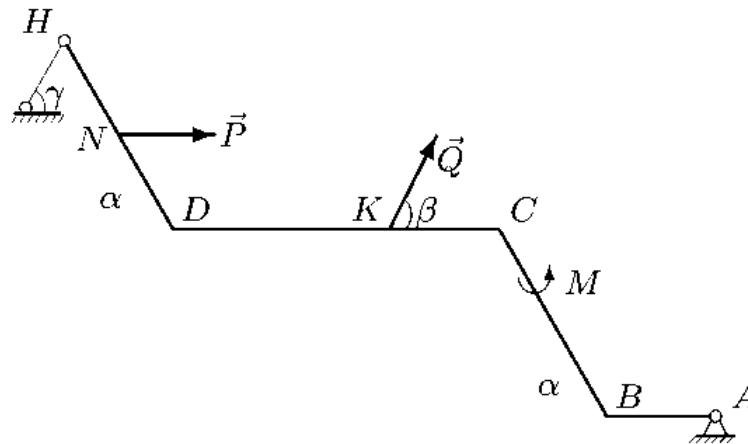


Рис. 20

### РЕШЕНИЕ

1. Освобождаем раму от связей. Действие опор заменяем их реакциями (рис. 21). Выбираем систему координат с началом в точке  $A$ . В неподвижном шарнире  $A$  реакция  $R_A$  имеет две неизвестные компоненты  $X_A$  и  $Y_A$ . Невесомый опорный стержень в шарнире  $H$  заменяем на его реакцию, направленную по стержню (т.е. под углом  $\gamma$  к горизонту).

2. К центру каждого участка рамы (всего четыре прямолинейных участка) прикладываем его вес, вычисленный по формуле  $G_k = l_k \rho$ , где —  $l_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$  — длины отрезков рамы  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DH$ ,  $\rho$  — погонный вес рамы.

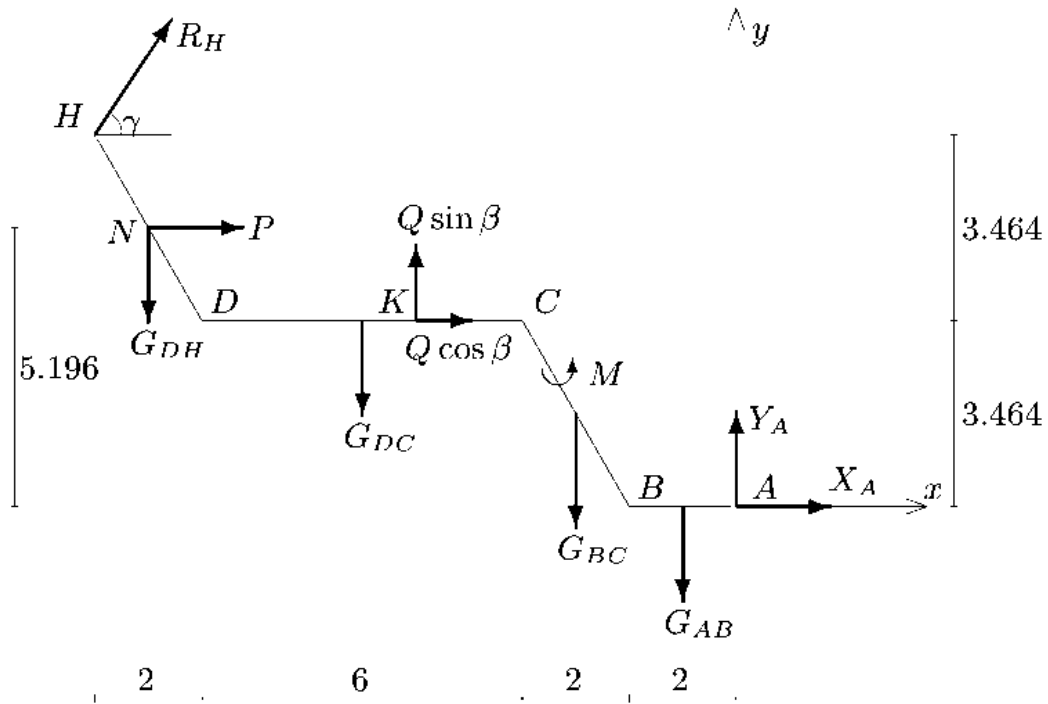


Рис. 21

3. Составляем уравнение моментов относительно шарнира А, выделяя в нем для удобства счета отдельные слагаемые:

$$\sum M_A = M_A(R_H) + M_A(P) + M_A(Q) + M_A(G_k) + M = 0. \quad (1)$$

Момент  $M_A(R_H)$  реакции опоры

$$M_A(R_H) = R_H h = -R_H((HD + CB) \sin \alpha \cos \gamma + (HD \cos \alpha + DC + CB \cos \alpha + AB) \sin \gamma),$$

где  $h$  — плечо реакции  $R_H$  взятое со знаком момента.

Моменты сил  $P$  и  $Q$  и момент  $M_A(G_k)$  сил тяжести участков:

$$M_A(P) = -P(ND + CB) \sin \alpha = -103.923 \text{ кНм},$$

$$M_A(Q) = -Q \cos \beta CB \sin \alpha - Q \sin \beta (KC + CB \cos \alpha + AB) = -69.282 \text{ кНм},$$

$$M_A(G_k) = G_{DH}((ND + CB) \cos \alpha + DC + AB) + G_{DC}(DC/2 + CB \cos \alpha + AB) + G_{CB}(CB/2 \cos \alpha + AB) + G_{AB}AB/2.$$

Вычисляя величины сил тяжести участков

$$G_{AB} = 2 \cdot 4 = 8 \text{ кН}, \quad G_{BC} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ кН}, \\ G_{DC} = 6 \cdot 4 = 24 \text{ кН}, \quad G_{DH} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ кН},$$

получаем  $M_A(G_k) = 400$  кНм.

В итоге уравнение моментов (1) принимает вид

$$-13.856R_H - 103.923 - 69.282 + 400 + 100 = 0.$$

Отсюда находим реакцию стержня

$$R_H = \frac{326.795}{13.856} = 23.584 \text{ кН.}$$

4. Реакции  $X_A$  и  $Y_A$  определяем из уравнений проекций:

$$\sum X_i = X_A + Q \cos \beta + R_H \cos \gamma = 0,$$

$$X_A = -36.792 \text{ кН,}$$

$$\sum Y_i = Y_A - G_{AB} - G_{BC} - G_{DC} - G_{DH} + Q \sin \beta + R_H \sin \gamma = 0,$$

$$Y_A = 34.915 \text{ кН.}$$

Ответы заносим в таблицу. Моменты — в кНм, силы — в кН.

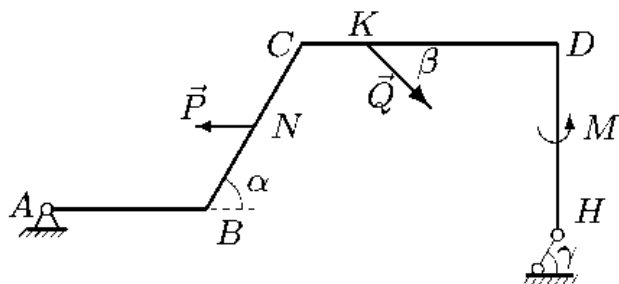
$M_A(Q)$	$M_A(P)$	$\sum_k M_A(G_k)$	$h$	$X_A$	$Y_A$	$R_H$
-69.282	-103.923	400	-13.856	-36.792	34.915	23.584

5. Проверка. Составляем сумму моментов всех сил, действующих на раму, включая найденные реакции опор, относительно произвольной точки, например,  $K$ . Этот выбор оправдывается тем, что в уравнение моментов войдут все найденные реакции, а известная сила  $Q$  не войдет (ее проверять не требуется), и уравнение будет на два слагаемых короче

$$\begin{aligned} \sum M_K = & -R_H \cdot 3.464 \cos \gamma - R_H \cdot 6 \sin \gamma - P \cdot 1.732 + M + G_{DH} \cdot 5 + \\ & + G_{DC} \cdot 1 - G_{BC} \cdot 3 - G_{AB} \cdot 5 + Y_A \cdot 6 + X_A \cdot 3.464 = 0. \end{aligned}$$

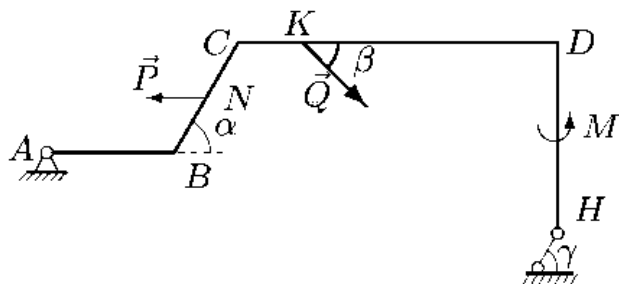
*УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Тяжелая однородная рама расположена в вертикальной плоскости и опирается на неподвижный шарнир  $A$  и наклонный невесомый стержень  $H$ . К раме приложены горизонтальная сила  $P$ , наклонная сила  $Q$  и момент  $M$ . Учитывая погонный вес рамы  $\rho$ , найти реакции опор.*

1.



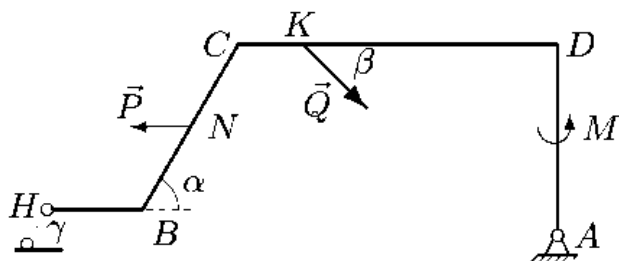
$\rho = 1 \text{ кН/м}, P = 5 \text{ кН},$   
 $Q = 11 \text{ кН}, M = 30 \text{ кНм},$   
 $\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ, \gamma = 30^\circ,$   
 $AB = 5 \text{ м}, BC = 6 \text{ м},$   
 $CD = 8 \text{ м}, DH = 6 \text{ м},$   
 $CK = 2 \text{ м}, CN = 3 \text{ м}.$

2.



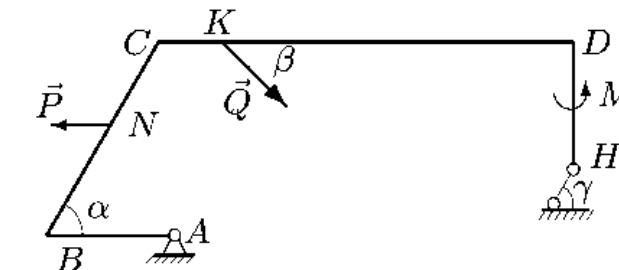
$\rho = 2 \text{ кН/м}, P = 6 \text{ кН},$   
 $Q = 12 \text{ кН}, M = 50 \text{ кНм},$   
 $\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ, \gamma = 45^\circ,$   
 $AB = 4 \text{ м}, BC = 4 \text{ м},$   
 $CD = 10 \text{ м}, DH = 6 \text{ м},$   
 $CK = 2 \text{ м}, CN = 2 \text{ м}.$

3.



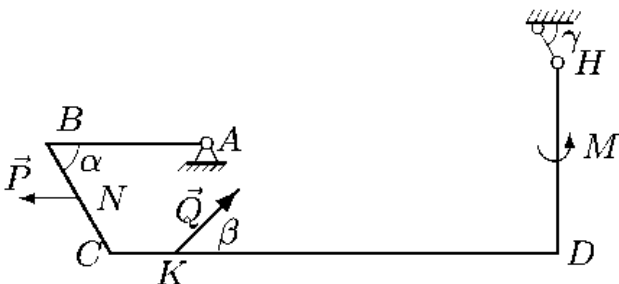
$\rho = 3 \text{ кН/м}, P = 8 \text{ кН},$   
 $Q = 13 \text{ кН}, M = 70 \text{ кНм},$   
 $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 60^\circ,$   
 $HB = 3 \text{ м}, BC = 6 \text{ м},$   
 $CD = 10 \text{ м}, DA = 6 \text{ м},$   
 $CK = 2 \text{ м}, CN = 3 \text{ м}.$

4.



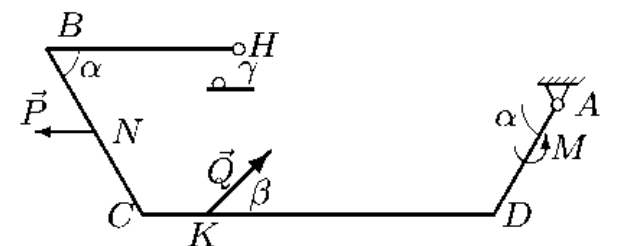
$\rho = 1 \text{ кН/м}, P = 6 \text{ кН},$   
 $Q = 14 \text{ кН}, M = 30 \text{ кНм},$   
 $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 30^\circ,$   
 $AB = 4 \text{ м}, BC = 7 \text{ м},$   
 $CD = 13 \text{ м}, DH = 4 \text{ м},$   
 $CK = 2 \text{ м}, CN = 3 \text{ м}.$

5.



$\rho = 2 \text{ кН/м}, P = 7 \text{ кН},$   
 $Q = 15 \text{ кН}, M = 50 \text{ кНм},$   
 $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 45^\circ,$   
 $AB = 5 \text{ м}, BC = 4 \text{ м},$   
 $CD = 14 \text{ м}, DH = 6 \text{ м},$   
 $CK = 2 \text{ м}, CN = 2 \text{ м}.$

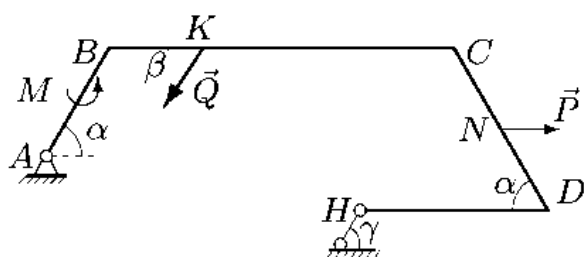
6.



$\rho = 3 \text{ кН/м}, P = 8 \text{ кН},$   
 $Q = 16 \text{ кН}, M = 70 \text{ кНм},$   
 $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 60^\circ,$   
 $HB = 6 \text{ м}, BC = 6 \text{ м},$   
 $CD = 11 \text{ м}, DA = 4 \text{ м},$   
 $CK = 2 \text{ м}, CN = 3 \text{ м}.$

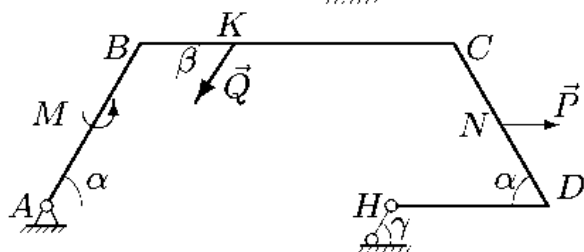


7.



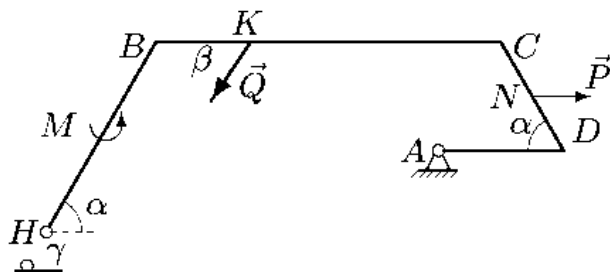
$\rho = 1 \text{ кН/м}$ ,  $P = 7 \text{ кН}$ ,  
 $Q = 17 \text{ кН}$ ,  $M = 30 \text{ кНм}$ ,  
 $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 30^\circ$ ,  
 $AB = 4 \text{ м}$ ,  $BC = 11 \text{ м}$ ,  
 $CD = 6 \text{ м}$ ,  $DH = 6 \text{ м}$ ,  
 $BK = 3 \text{ м}$ ,  $CN = 3 \text{ м}$ .

8.



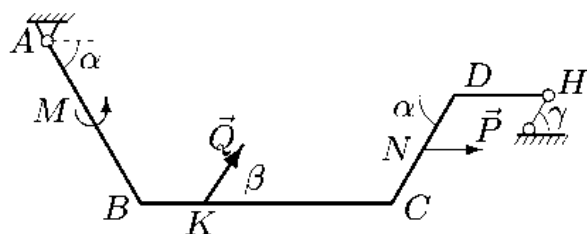
$\rho = 2 \text{ кН/м}$ ,  $P = 8 \text{ кН}$ ,  
 $Q = 18 \text{ кН}$ ,  $M = 50 \text{ кНм}$ ,  
 $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 45^\circ$ ,  
 $AB = 6 \text{ м}$ ,  $BC = 10 \text{ м}$ ,  
 $CD = 6 \text{ м}$ ,  $DH = 5 \text{ м}$ ,  
 $BK = 3 \text{ м}$ ,  $CN = 3 \text{ м}$ .

9.



$\rho = 3 \text{ кН/м}$ ,  $P = 9 \text{ кН}$ ,  
 $Q = 19 \text{ кН}$ ,  $M = 70 \text{ кНм}$ ,  
 $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 60^\circ$ ,  
 $HB = 7 \text{ м}$ ,  $BC = 11 \text{ м}$ ,  
 $CD = 4 \text{ м}$ ,  $DA = 4 \text{ м}$ ,  
 $BK = 3 \text{ м}$ ,  $CN = 2 \text{ м}$ .

10.



$\rho = 2 \text{ кН/м}$ ,  $P = 8 \text{ кН}$ ,  
 $Q = 20 \text{ кН}$ ,  $M = 50 \text{ кНм}$ ,  
 $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 45^\circ$ ,  
 $AB = 6 \text{ м}$ ,  $BC = 8 \text{ м}$ ,  
 $CD = 4 \text{ м}$ ,  $DH = 3 \text{ м}$ ,  
 $BK = 2 \text{ м}$ ,  $CN = 2 \text{ м}$ .

Ответы

	$M_A(Q)$	$M_A(P)$	$\Sigma_k M_A(G_k)$	$h$	$X_A$	$Y_A$	$R_H$
	кНм			м	кН		
1	-104.500	12.990	-243.5	8.696	-34.901	12.963	35.074
2	-84.000	10.392	-468.0	13.107	-30.914	27.478	37.508
3	18.385	27.215	487.5	-14.258	-22.341	47.561	42.298
4	-74.862	20.785	-104.3	4.464	-28.795	23.526	28.746
5	26.136	-12.124	-187.0	9.571	5.480	38.307	12.850
6	-85.259	-6.928	754.5	-9.526	-41.750	3.112	76.873
7	-44.167	-6.062	-251.5	6.500	-34.704	20.820	41.805
8	-46.765	-20.785	-487.0	7.778	-44.868	23.720	64.867
9	131.636	-15.588	281.3	-9.526	-24.027	51.973	49.054
10	138.564	27.713	-313.0	12.538	-23.455	19.225	7.714

### Предупреждение типичных ошибок

1. При вычислении весов участков рамы не надо мельчить участки. Берите прямолинейные участки от одного изгиба до другого или до опоры.

2. Вычисляя момент наклонной силы, учитывайте обе ее составляющие. Не забывайте, что плечо силы относительно точки равно расстоянию от точки до *линии действия силы*, а не до точки приложения силы.

3. Знак сосредоточенного момента (пары) в уравнении моментов не зависит от взаимного расположения точки приложения момента и точки, относительно которой уравнение составляется. Он определяется самим моментом (против часовой стрелки “плюс”, по часовой стрелке “минус”). Точка приложения пары не требует точного задания, так как по свойству пары ее можно переносить в любую точку тела, не меняя воздействия на тело.

4. Точку приложения силы можно переносить вдоль линии действия силы, не меняя воздействия силы на тело (вектор силы в теоретической механике является *скользящим*). Перенеся силу вдоль ее линии действия поближе к точке, относительно которой вычисляется ее момент, можно упростить определение момента.

5. Наклонный стержень одним концом закреплен на неподвижном шарнире. Часто вместо того, чтобы просто отбросить стержень и приложить к телу одну силу  $R_H$ , направленную вдоль стержня, студент изображает две реакции этого шарнира, после чего в задаче количество неизвестных становится больше, чем уравнений. Одновременно с такой ошибкой возникает вопрос, чему равна длина наклонного опорного стержня? Длина стержня в задаче не дана.

6. Вес участков рамы учитывайте только в тех задачах, где это оговорено. В данной задаче рама имеет вес.

## 2.2. Ферма. Аналитические методы расчета

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** *Плоская ферма опирается на неподвижный и подвижный шарниры. К узлам фермы приложены нагрузки. Найти усилия в стержнях фермы методом Риттера<sup>\*)</sup> или методом вырезания узлов.*

---

<sup>\*)</sup> *Август Риттер* (1826-1906) — немецкий механик.

Эта задача является усложненным вариантом задачи из §1.1, где усилия в стержнях можно было легко определить только из уравнений проекций, не находя реакции опор и не привлекая понятие момента силы. Аналогично можно поступить и в этой задаче, однако порядок системы линейных уравнений, описывающей равновесие всех узлов, будет велик, поэтому, во-первых, надежно решить такую систему можно только с помощью компьютера (§ 15.1, с. 350), во-вторых, таким образом будет проделана лишняя работа, так как система уравнений содержит усилия всех стержней, в том числе и тех, которые по условию задачи не требуется определять. Поэтому для решения сложных ферм, содержащих большое число стержней, применим метод Риттера, основная идея которого — независимое определение усилий в стержнях. Эту же идею можно с успехом применять и в других задачах статики.

#### ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Освобождаем ферму от внешних связей. Действие опорных шарниров заменяем их реакциями. Для определения реакций опор составляем три уравнения равновесия.

2. Проверяем найденные реакции, составляя еще одно уравнение равновесия фермы.

3. В тех стержнях, где это возможно, усилия находим методом Риттера<sup>\*)</sup>. Мысленно разделяем ферму на две части, пересекая *три* стержня (сечение Риттера). Действие разрезанных стержней заменяем их усилиями, направляя соответствующие векторы из узлов в сторону сечения, предполагая стержни растянутыми.

Рассматриваем равновесие одной из частей фермы (как правило, где меньше нагрузок). Для стержней, усилия в которых необходимо определить, находим точки Риттера (моментные точки). Они являются точками попарного пересечения линий действия сил в рассеченных стержнях. Искомые усилия определяем из уравнений моментов рассматриваемой части относительно точек Риттера.

Если два стержня в сечении параллельны, то точки Риттера для третьего стержня не существует, и для определения усилия в нем необходимо составить уравнение проекций на ось, перпендикулярную параллельным стержням.

В уравнение метода Риттера всегда входит усилие только одного стержня. Это позволяет искать усилия независимо одно от другого,

---

\*) Другие названия — метод сечений, метод моментных точек.

уменьшая тем самым возможность ошибок и избегая накопления неизбежных погрешностей округления в численных расчетах.

4. Определяем усилия методом вырезания узлов (§ 1.1). Этот метод применяют в тех случаях, когда сечения Риттера для нужного стержня не существует. Вырезаем узел фермы, к которому подходит стержень с искомым усилием. Выбираем оси и составляем уравнения равновесия узла в проекциях. Решаем уравнения относительно искомого усилия. Если к узлу подходит более двух стержней с неизвестными усилиями, то метод вырезания узлов можно комбинировать с методом Риттера.

**ПРИМЕР.** Плоская ферма опирается на неподвижный и подвижный шарниры (рис. 22). К узлам фермы приложены две вертикальные нагрузки  $P = 90$  кН и две наклонные  $Q = 40$  кН и  $F = 38$  кН,  $\alpha = 55^\circ$ ,  $\beta = 15^\circ$ . Найти усилия в стержнях 1–5.

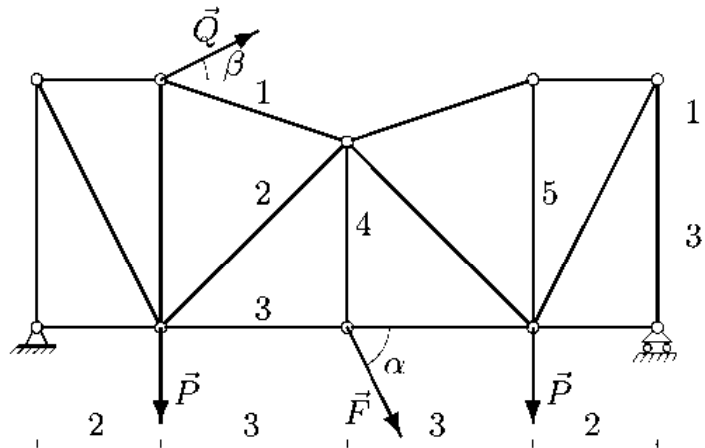


Рис. 22

### РЕШЕНИЕ

1. Освобождаем ферму от внешних связей. Действие опор заменяем их реакциями. Левую (неподвижную) шарнирную опору заменяем двумя составляющими реакции  $X_A$ ,  $Y_A$ , правую (подвижную) — одной вертикальной  $Y_B$  (рис. 23). Для определения реакций опор составляем три уравнения равновесия — уравнение проекций на горизонтальную ось  $x$  и два уравнения моментов относительно опор <sup>\*)</sup>:

$$\sum X_i = X_A + F \cos \alpha + Q \cos \beta = 0,$$

$$\sum M_A = -2 \cdot P + 2Q \sin \beta - 4Q \cos \beta - 5F \sin \alpha - 8P + 10Y_B = 0,$$

$$\sum M_B = 8P - 8Q \sin \beta - 4Q \cos \beta + 5F \sin \alpha + 2P - 10Y_A = 0.$$

<sup>\*)</sup> Уравнение проекций на ось  $y$  оставим для проверки реакций  $Y_A$  и  $Y_B$ .

Система уравнений состоит из трех независимых друг от друга уравнений, решение которых легко найти, подставив численные значения нагрузок и углов из условия

$$Y_A = 81.827 \text{ кН}, \quad Y_B = 118.948 \text{ кН}, \quad X_A = -60.433 \text{ кН}.$$

2. Проверяем найденные вертикальные реакции, составляя уравнение проекций всех сил на ось  $y$ :

$$\begin{aligned} \sum Y_i &= Y_A - P + Q \sin \beta - F \sin \alpha - P + Y_B = \\ &= 81.827 - 90 + 40 \sin 15 - 38 \sin 55 - 90 + 118.948 = 0. \end{aligned}$$

Горизонтальную реакцию  $X_A$  можно проверить, составив еще одно уравнение моментов, например относительно точки  $D$ .

3. Методом Риттера находим усилия в стержнях 1, 2, 3. Сечением I-I (рис. 23) мысленно разделяем ферму на две части, пересекая три стержня. Действие разрезанных частей заменяем их усилиями.

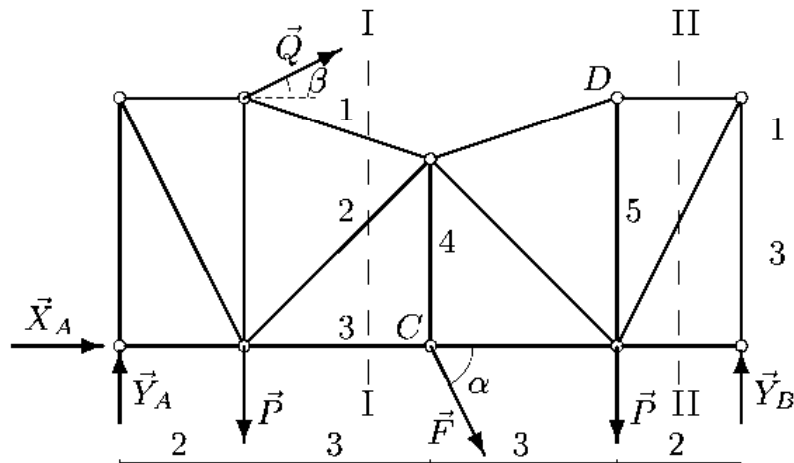


Рис. 23

Рассматриваем левую часть (рис. 24), на которую действуют четыре известных силы  $\vec{X}_A$ ,  $\vec{Y}_A$ ,  $\vec{P}$ ,  $\vec{Q}$  и реакции стержней, направленные из узлов к сечению. Точки Риттера  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  находятся в точках попарного пересечения линий действия сил  $\vec{S}_1$ ,  $\vec{S}_2$ ,  $\vec{S}_3$ . Номер точки Риттера соответствует номеру рассеченного стержня, который через эту точку не проходит.

Точка  $R_2$  находится на продолжении стержня 1. Расстояние до нее легко вычислить, зная угол  $\gamma$  между стержнем 1 и горизонталью:  $\text{tg} \gamma = 1/3$ .

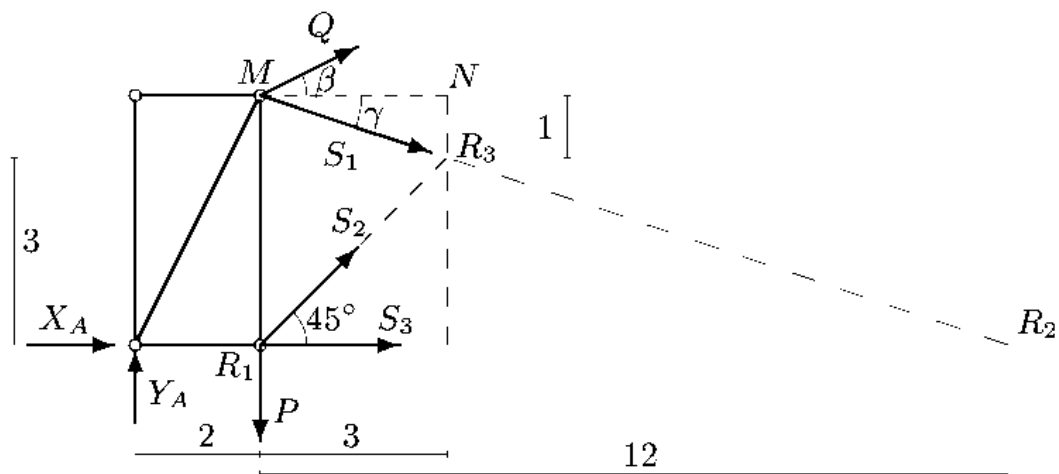


Рис. 24

Уравнения метода Риттера имеют вид

$$\sum M_{R_1} = -4 \cdot S_1 \cos \gamma - 4 \cdot Q \cos \beta - 2 \cdot Y_A = 0,$$

$$\sum M_{R_2} = -12 \cdot S_2 \cos 45 - 4 \cdot Q \cos \beta - 12 \cdot Q \sin \beta + 12 \cdot P - 14 \cdot Y_A = 0,$$

$$\sum M_{R_3} = 3 \cdot S_3 - 1 \cdot Q \cos \beta - 3 \cdot Q \sin \beta + 3 \cdot P - 5 \cdot Y_A + 3 \cdot X_A = 0.$$

Находим решение системы:  $S_1 = -83.854$  кН,  $S_2 = -40.584$  кН,  $S_3 = -130.04$  кН.

4. Методом вырезания узлов определяем  $S_4$ . Вырезаем узел C (рис. 23) и составляем уравнение проекций на ось  $y$  (рис. 25), из которого сразу же определяем искомое усилие:

$$\sum Y_i = S_4 - F \sin \alpha = 0, \quad S_4 = 31.128 \text{ кН.}$$

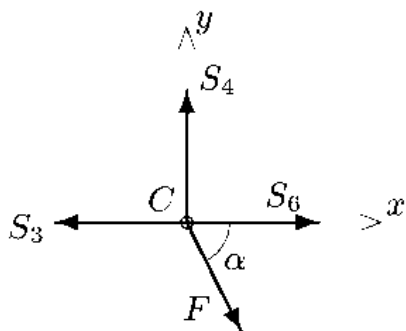


Рис. 25

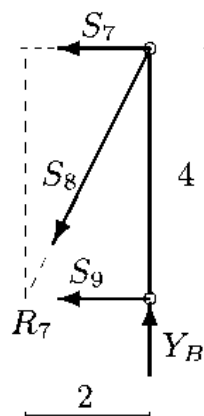


Рис. 26

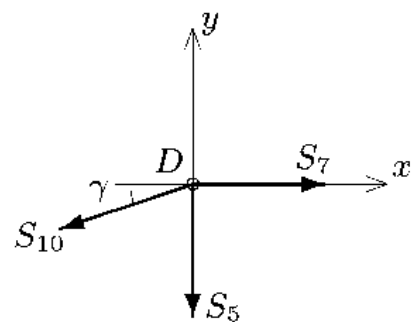


Рис. 27

Усилие больше нуля, следовательно, стержень 4 растянут. Усилие в стержне 5 методом Риттера определить нельзя — не существует сечения, делящего ферму на две части и пересекающего при этом три

стержня. В этом состоит недостаток метода. Поэтому воспользуемся методом вырезания узлов совместно с методом Риттера. Находим  $S_5$  из условия равновесия узла  $D$ . К узлу подходят три стержня с неизвестными усилиями. Одно из них —  $S_7$  легко найти по методу Риттера. Проводим сечение II–II (рис. 23) и рассматриваем правую часть фермы (рис. 26). Для определения  $S_7$  составляем уравнение моментов относительно точки Риттера  $R_7$ :

$$\sum M_{R_7} = S_7 \cdot 4 + Y_B \cdot 2 = 0.$$

Находим  $S_7 = -59.474$  кН. Заметим, что для определения усилия  $S_8$  по методу Риттера, необходимо составить уравнение проекций на ось  $y$ .

Вырезаем узел  $D$  и составляем уравнения равновесия (рис. 27):

$$\sum X_i = S_7 - S_{10} \cos \gamma = 0, \quad \sum Y_i = -S_5 - S_{10} \sin \gamma = 0.$$

Исключая  $S_{10}$ , находим

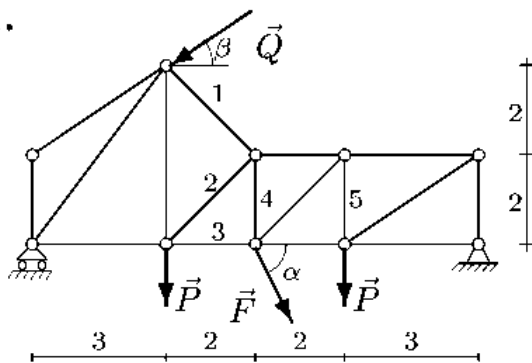
$$S_{10} = S_7 / \cos \gamma, \quad S_5 = -S_{10} \sin \gamma = -S_7 \operatorname{tg} \gamma = 19.825 \text{ кН}.$$

Результаты расчетов в кН занесем в таблицу:

$X_A$	$Y_A$	$Y_B$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$
-60.433	81.827	118.948	-83.854	-40.584	-130.04	31.128	19.825

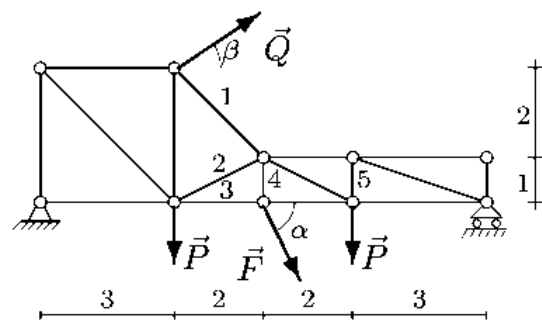
**УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.** Плоская ферма опирается на неподвижный и подвижный шарниры. К узлам фермы приложены две вертикальные нагрузки  $P$  и две наклонные —  $Q$  и  $F$ . Размеры даны в метрах. Найти усилия в стержнях 1–5.

1.

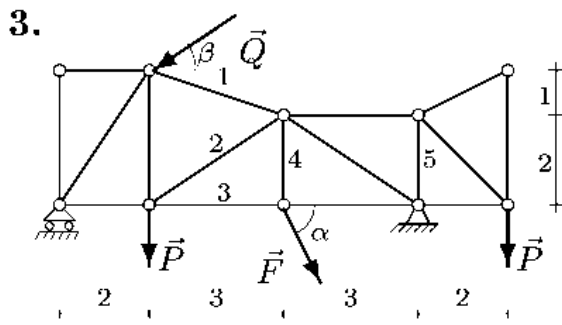


$$P = 2 \text{ кН}, \quad Q = 9 \text{ кН}, \quad F = 9 \text{ кН}, \\ \alpha = 60^\circ, \quad \beta = 30^\circ.$$

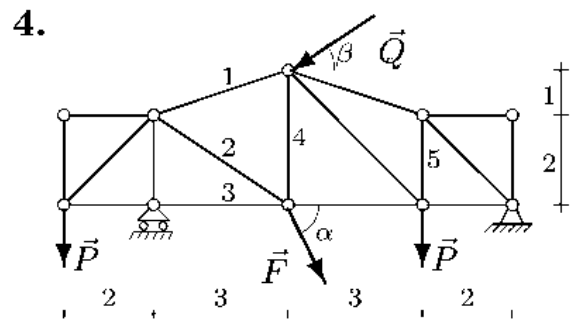
2.



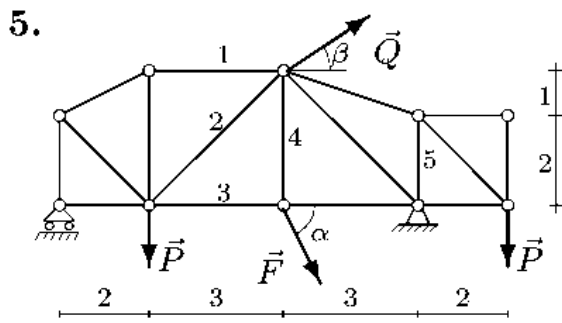
$$P = 2 \text{ кН}, \quad Q = 8 \text{ кН}, \quad F = 10 \text{ кН}, \\ \alpha = 60^\circ, \quad \beta = 15^\circ.$$



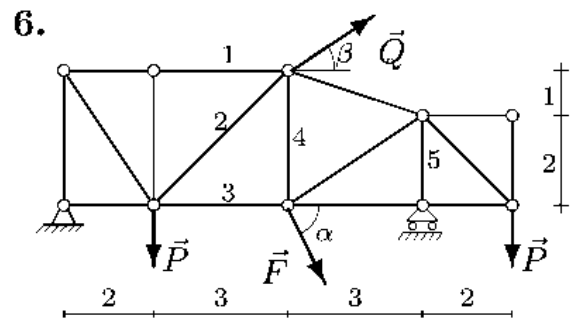
$P = 3 \text{ кН}, Q = 7 \text{ кН}, F = 1 \text{ кН},$   
 $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ.$



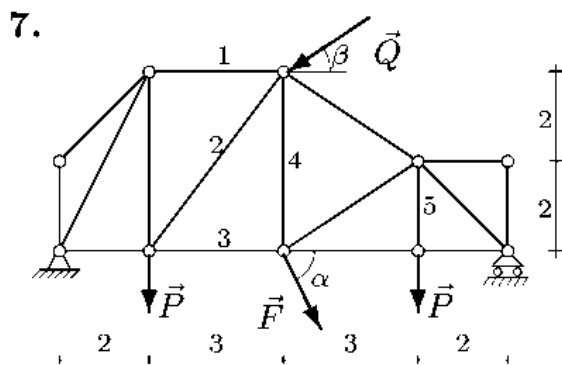
$P = 4 \text{ кН}, Q = 4 \text{ кН}, F = 2 \text{ кН},$   
 $\alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ.$



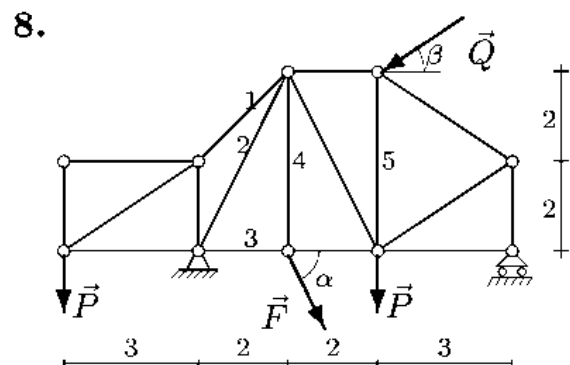
$P = 5 \text{ кН}, Q = 5 \text{ кН}, F = 3 \text{ кН},$   
 $\alpha = 45^\circ, \beta = 45^\circ.$



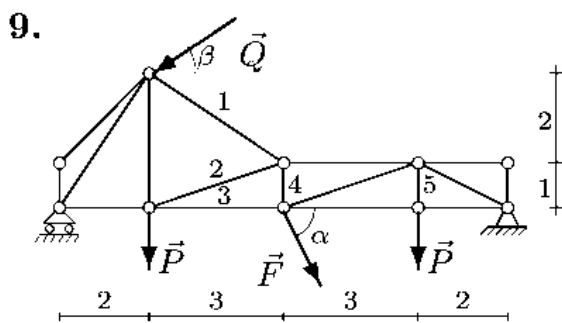
$P = 6 \text{ кН}, Q = 6 \text{ кН}, F = 4 \text{ кН},$   
 $\alpha = 45^\circ, \beta = 15^\circ.$



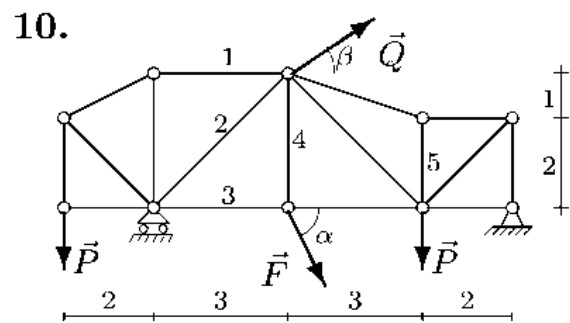
$P = 7 \text{ кН}, Q = 7 \text{ кН}, F = 5 \text{ кН},$   
 $\alpha = 60^\circ, \beta = 15^\circ.$



$P = 8 \text{ кН}, Q = 3 \text{ кН}, F = 7 \text{ кН},$   
 $\alpha = 30^\circ, \beta = 30^\circ.$



$P = 8 \text{ кН}, Q = 5 \text{ кН}, F = 20 \text{ кН},$   
 $\alpha = 45^\circ, \beta = 30^\circ.$



$P = 3 \text{ кН}, Q = 6 \text{ кН}, F = 15 \text{ кН},$   
 $\alpha = 45^\circ, \beta = 45^\circ.$



## Ответы

	Реакции опор, кН			Усилия в стержнях, кН				
	$X_A$	$Y_A$	$R_B$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$
1	3.294	4.129	12.165	-1.880	-9.891	16.118	5.665	-2.129
2	-12.727	2.563	8.027	-14.552	-28.897	41.136	8.660	8.027
3	4.450	4.423	7.393	0.022	1.016	4.084	0.866	-3.000
4	1.096	2.375	9.453	-2.938	8.157	-4.000	-3.525	1.583
5	-5.657	7.942	0.644	-0.429	6.161	-3.927	2.121	-3.333
6	-8.624	1.305	11.971	-0.870	6.640	4.799	-2.485	-11.971
7	4.261	12.776	7.366	-6.388	-7.219	6.458	6.602	7.000
8	-3.464	19.485	1.515	16.971	-26.257	3.206	3.500	-0.742
9	-9.812	14.272	18.370	-9.515	-41.577	51.690	7.870	8.000
10	-14.849	5.477	6.886	2.000	-5.496	1.886	10.607	-1.826

### Предупреждение типичных ошибок

1. Следует помнить три основных свойства сечения Риттера:

- Сечение делит ферму на две части.
- Сечение пересекает ровно три стержня.
- Сечение не проходит через шарниры.

Второе свойство имеет исключения. Существуют фермы, которые одним сечением можно разделить на две, рассекая  $N > 3$  стержней. При этом для одного из стержней существует точка Риттера — точка пересечения остальных  $N - 1$  стержней (подумайте, как выглядит такая ферма).

2. Сечение Риттера не обязательно должно изображаться непрерывной линией. В ферме на рис. 4, с. 15 для определения усилия в стержне  $AB$  надо выполнить разрывное сечение (какое?). Экспериментируя с сечениями, не забывайте про три его основных свойства.

3. Рассматривая одну из частей рассеченной фермы, забудьте на время о существовании другой. Иначе в уравнения равновесия вы можете случайно включить внешние силы или реакции опор отброшенной части.

4. Не стоит беспокоиться, если точка Риттера находится на отрезанной части, располагается где-нибудь далеко или попадает на шарнир. Ее положение может быть где угодно.

5. В уравнения метода Риттера (моментов или проекций) должно войти *только одно* усилие стержня фермы. В этом основной смысл метода Риттера. Очень часто встречается следующая ошибка. Составляя уравнение, студент неправильно выбирает точку Риттера или

составляет не то уравнение, например, уравнение проскций вместо уравнения моментов. При этом в уравнение кроме одного неизвестного усилия входят и другие, ранее найденные. В принципе такое уравнение может быть и верно, и ответ получится верным, но это не метод Риттера, где определение усилий производится *независимо* одно от другого во избежание накопления ошибок.

6. Положение точки Риттера для каждого стержня не зависит от рассматриваемой части. Однако степень сложности уравнения моментов для разных частей фермы может существенно отличаться. Для большей надежности решения уравнение Риттера (в форме уравнения моментов или уравнения проскций) для одной части может служить проверочным для другой.

7. Проверить расчет можно на компьютере. Программа расчета фермы в системе Maple V приведена на с. 350.

## 2.3. Ферма. Графический расчет

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** *С помощью диаграммы Максвелла–Кремоны\*) найти усилия в стержнях фермы.*

### ПЛАН РЕШЕНИЯ

Графический метод расчета ферм является дополнением к аналитическим методам расчета, которые вы изучили в предыдущем параграфе. Диаграмма Максвелла–Кремоны состоит из отдельных силовых многоугольников. Каждый многоугольник соответствует равновесию какого-либо узла фермы.

1. Обозначим усилия в стержнях фермы.
2. Освобождаем ферму от связей. Действие опор заменяем их реакциями. Составляем три уравнения равновесия. Находим реакции.
3. Проверяем найденные реакции, составляя еще одно уравнение равновесия.
4. Изображаем все силы, действующие на ферму (включая найденные аналитически реакции опор), в виде векторов вне фермы. Если реакция опоры отрицательная, то заменяем ее направление на противоположное. Для графического способа требуются только реальные направления реакций.
5. Обозначим буквами или цифрами *внешние поля* — области чертежа, разделенные силами и стержнями фермы.

---

\*) Джеймс Максвелл (1831–1879) — шотландский физик, математик, астроном. Антонио Кремона (1830–1903) — итальянский математик.

6. Обозначаем буквами или цифрами *внутренние поля* — области, ограниченные стержнями фермы.

7. Внешним нагрузкам и усилиям в стержнях даем новые имена — по соседним с силой (или стержнем) полям.

8. Построение диаграммы Максвелла–Кремоны начинаем с многоугольника внешних сил. Выберем направление обхода фермы (по часовой стрелке или против). Начинаем с произвольной силы. Откладывая ее в масштабе и соблюдая направление, обозначим на диаграмме начальную и конечную точку строчными буквами, соответствующими ее новому обозначению по направлению обхода. Следующая сила пристраивается к концу первой и т.д. до замыкания многоугольника внешних сил и реакций опор.

9. Строим точки внутренних полей на диаграмме. Точку, соответствующую внутреннему полю, можно найти, если у этого поля построены точки двух соседних с ней полей.

Таким образом, начинать графический расчет можно с поля, у которого имеется два соседних с ним внешних поля, уже отмеченные на диаграмме. Искомая точка лежит на пересечении прямых, параллельных стержням, имена которых состоят из имени искомой точки и точек найденных внешних полей. Этот пункт выполняем многократно, до полного построения диаграммы. Модули усилий в стержнях равны длинам соответствующих отрезков на диаграмме.

10. Определяем знаки усилий. Рассматриваем шарнир фермы, к которому подходит какая-либо внешняя нагрузка или стержень с усилием известного знака. Равновесие шарнира изображено на диаграмме замкнутым силовым многоугольником с заданным направлением обхода. Сопоставляя направление усилия на диаграмме и его направление в вырезанном узле, определяем знак усилия. Если направление вектора на многоугольнике совпадет с направлением вектора, приложенного к узлу, то усилие больше нуля. В противном случае — усилие меньше нуля, т.е. стержень сжат.

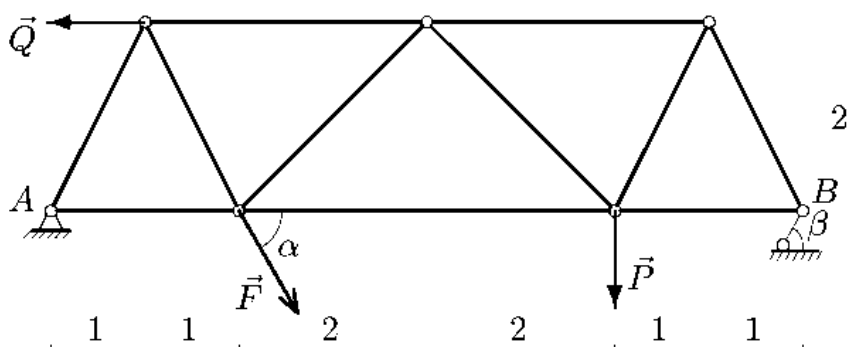


Рис. 28

ПРИМЕР. С помощью диаграммы Максвелла–Кремоны найти усилия в стержнях фермы (рис. 28).  $Q = 15$  кН,  $P = 30$  кН,  $F = 20$  кН,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ . Размеры даны в м.

### РЕШЕНИЕ

1. Обозначаем усилия в стержнях фермы так, как это принято в строительной механике. Усилия в стержнях верхнего пояса (слева направо) —  $O_1, \dots, O_4$ ; диагонали (раскосы) —  $D_1, \dots, D_4$ , усилия в нижнем поясе —  $U_1, U_2, U_3$  (рис. 29).

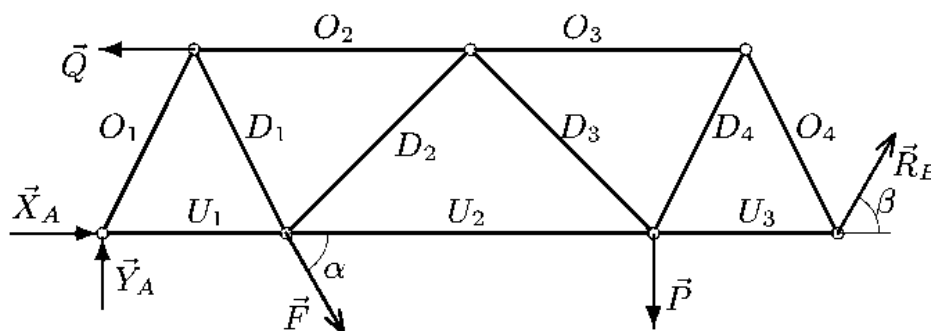


Рис. 29

2. Определяем реакции опор фермы. Реакцию  $\vec{R}_B$  направляем вдоль опорного стержня, т.е. под углом  $\beta$  к горизонту (рис. 29). Составляем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= X_A - Q + F \cos \alpha + R_B \cos \beta = 0, \\ \sum M_A &= Q \cdot 2 - F \cdot 2 \sin \alpha + R_B \cdot 8 \sin \beta - P \cdot 6 = 0, \\ \sum M_B &= Q \cdot 2 + F \cdot 6 \sin \alpha - Y_A \cdot 8 + P \cdot 2 = 0. \end{aligned}$$

Решаем уравнения и получаем следующие значения:

$$X_A = -8.32 \text{ кН}, \quad Y_A = 24.24 \text{ кН}, \quad R_B = 26.65 \text{ кН}.$$

3. Проверяем вертикальные реакции, составляя уравнение проекций на вертикальную ось:

$$\sum Y_i = Y_A - F \sin \alpha - P + R_B \sin \beta = 0.$$

4. Изображаем все силы, действующие на ферму. Реакцию  $X_A$ , которая оказалась в результате решения меньше нуля, направляем в противоположную сторону (рис. 30). Величина этой силы  $|X_A| = 8.32$  кН.

5. Обозначаем внешние поля — области чертежа, разделенные силами и стержнями фермы, —  $C, D, E, G, H, I$  (рис. 31). Чтобы

не внести путаницу, не следует использовать буквы  $A, B, Q, P, F$ , имеющиеся в задаче для обозначения опор и сил.

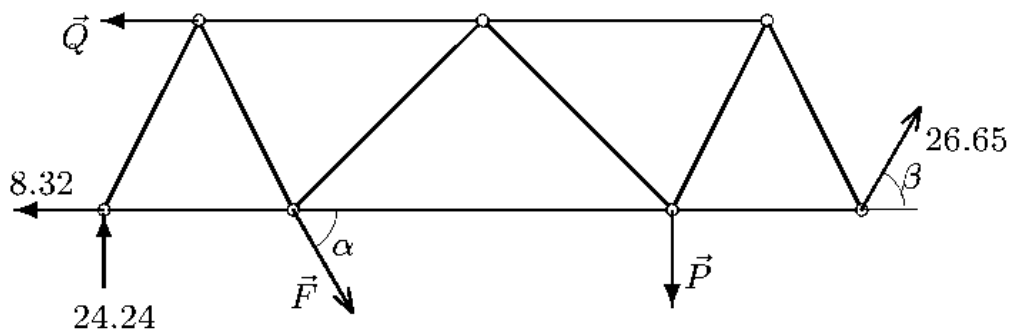


Рис. 30

6. Обозначаем внутренние поля  $K, L, M, N, R$  (рис. 31).

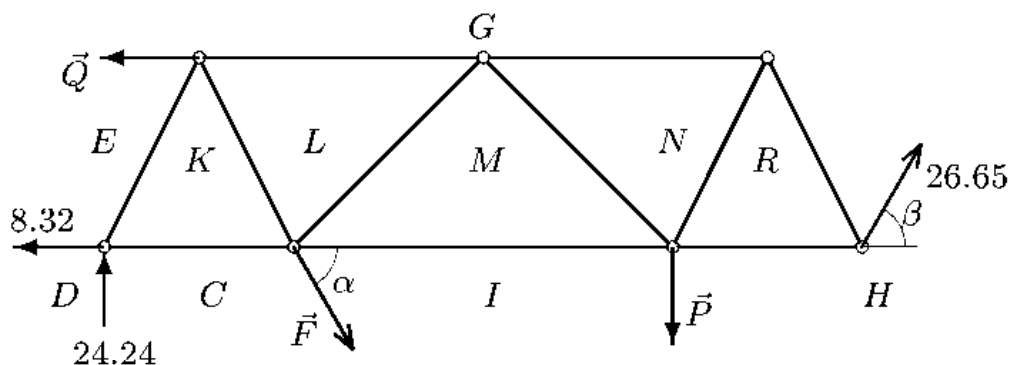


Рис. 31

7. Внешним нагрузкам и усилиям в стержнях даем новые имена — по соседним с силой (или стержнем) полям. Приведем таблицу соответствия имен.

$F$	$P$	$Q$	$X_A$	$Y_A$	$R_B$	$O_1$	$O_2$	$O_3$	$O_4$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	$U_1$	$U_2$	$U_3$
$IC$	$HI$	$EG$	$DE$	$CD$	$GH$	$EK$	$GK$	$GN$	$GR$	$KL$	$LM$	$MN$	$NR$	$KC$	$MI$	$RH$

8. Строим многоугольник внешних сил. Выберем направление обхода фермы по часовой стрелке. Начинаем с произвольной силы, например,  $F = 20$  кН. Откладывая в масштабе эту силу и соблюдая ее направление, обозначаем начальную и конечную точку строчными буквами  $i$  и  $c$ , соответствующими направлению обхода — из поля  $I$  в поле  $C$ . Следующая по часовой стрелке нагрузка — вертикальная реакция опоры  $Y_A = 24.24$  кН. Строим ее в точке  $c$  вслед за силой  $F$ . Конечную точку помечаем буквой  $d$ . Обход фермы продолжаем, пока многоугольник не замкнется. Последней будет сила  $P = 30$  кН, обозначенная как  $HI$ . Конец ее попадает на исходную точку  $i$  (рис. 32).

9. Строим точки внутренних полей на диаграмме. Точку, соответствующую внутреннему полю, можно найти, если у этого поля построены два соседних с ним поля. Таким образом, начинать графический расчет можно с поля  $R$ , у которого соседние поля  $H$  и  $G$  определены на диаграмме, или  $K$  с известными соседними полями  $E$  и  $C$  (рис. 31). Рассматриваем поле  $K$ . По направлению стержней  $EK$  и  $KC$  проводим линии через точки  $e$  и  $c$  диаграммы. Точка их пересечения —  $k$  (рис. 33). Длины  $ek$  и  $kc$  равны абсолютным значениям усилий в соответствующих стержнях.

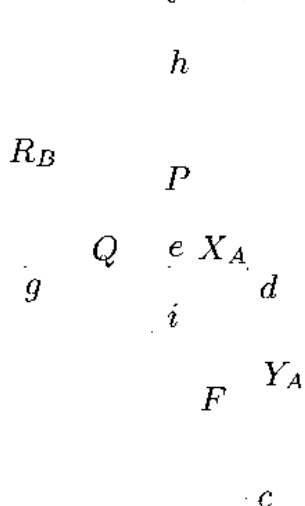


Рис. 32

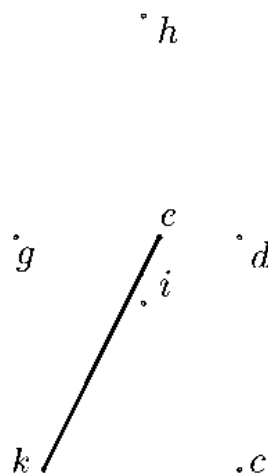


Рис. 33

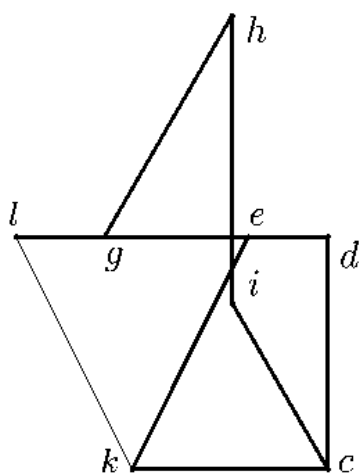


Рис. 34

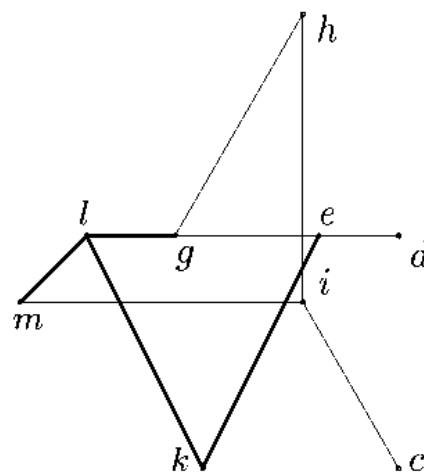


Рис. 35

На рис. 34–37 показано последовательное получение точек  $l$ ,  $m$ ,  $n$  и  $r$ . При получении последней точки автоматически выполняется проверка. Так, если точка  $r$  строилась на пересечении линий  $nr$  и  $gr$ , то проверкой является прямая  $rh$ . Если она параллельна соответствующему стержню  $RH$ , т.е. горизонтальна, то диаграмма построена

верно. Заметим, что для ферм с большим числом узлов построение диаграммы — трудоемкий процесс. Это связано с недостатком метода вырезания узлов, графической интерпретацией которого является диаграмма Максвелла–Кремоны. Недостаток вызван неизбежным накоплением ошибок округления в процессе последовательного расчета узлов.

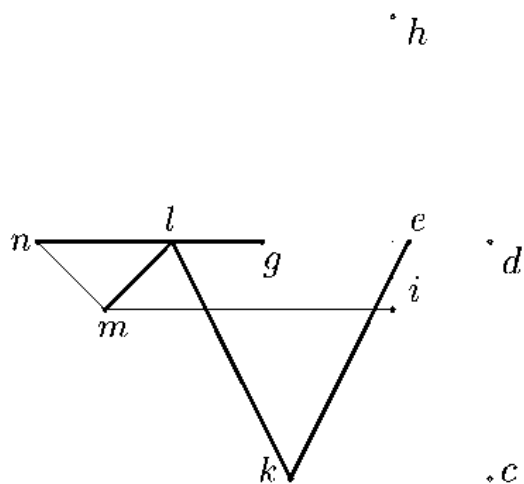


Рис. 36

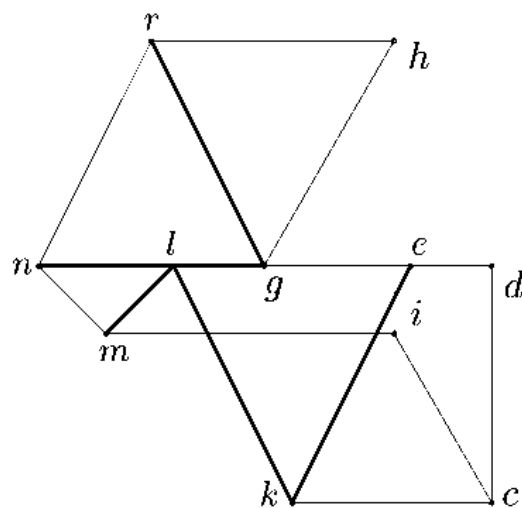


Рис. 37

10. Определяем знаки усилий. Рассмотрим, например, усилие  $O_1$ . Вырезаем узел  $A$ , к которому приложено усилие  $O_1$ . К этому же узлу приложены два известных вектора реакций опор и еще одно усилие  $U_1$  с неизвестным знаком. Как обычно, усилия стержней рисуют выходящими из узла (рис. 38). Затем на диаграмме Максвелла–Кремоны выделяется замкнутый многоугольник сил, изображающий равновесие узла (рис. 39). Направление обхода многоугольника (начало одного вектора совпадает с концом предыдущего) задается по известной силе или по усилию в стержне с ранее определенным знаком.

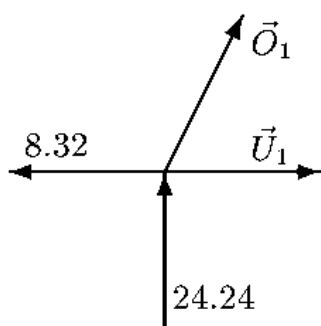


Рис. 38

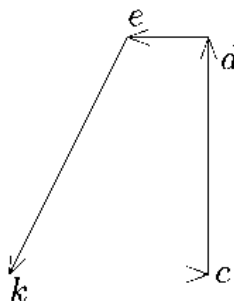


Рис. 39

Здесь обход  $cdek$  против часовой стрелки задает реакция опоры  $Y_A = 24.24$  кН (cd), или  $X_A = 8.32$  кН (de). Если направление вектора

на многоугольнике совпадает с направлением вектора, приложенного к узлу, то усилие больше нуля — стержень растянут. В противном случае — усилие  $O_1$  ( $ek$ ) меньше нуля, что соответствует сжатию стержня. Такие усилия на диаграмме изображаются утолщенными линиями. Кроме того, получаем  $U_1 > 0$ . Аналогично определяются знаки и других усилий. Заметим, что особенно эффективно рассматривать узлы, к которым подходит много стержней и приложена хотя бы одна внешняя нагрузка.

Окончательные результаты в кН заносим в таблицу:

$O_1$	$O_2$	$O_3$	$O_4$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	$U_1$	$U_2$	$U_3$
-27.10	-9.24	-23.08	-25.80	27.10	-9.79	9.79	25.80	20.45	29.49	24.87

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Точность, с которой можно получить усилия графическим способом, обычно невысока. Результаты с тремя знаками после запятой, данные в таблицах, получены, конечно, не графически, а из решения задачи аналитическим методом вырезания узлов <sup>\*)</sup>.

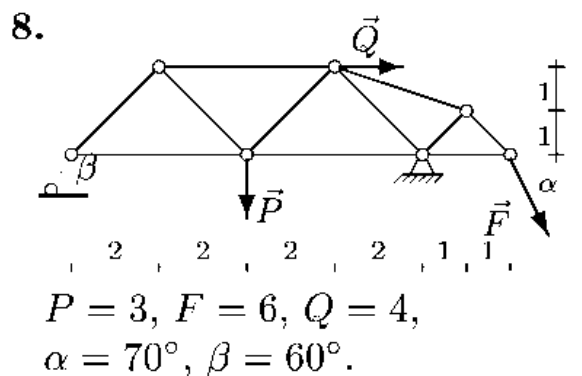
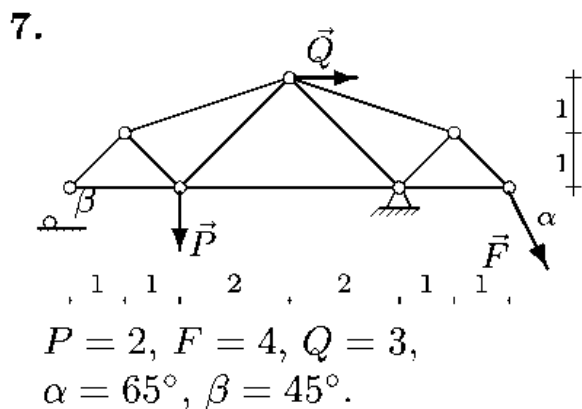
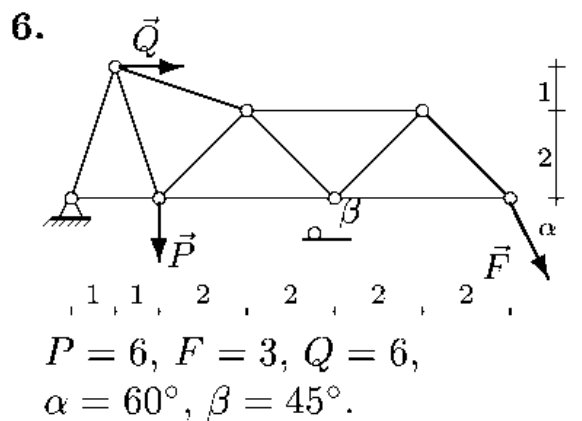
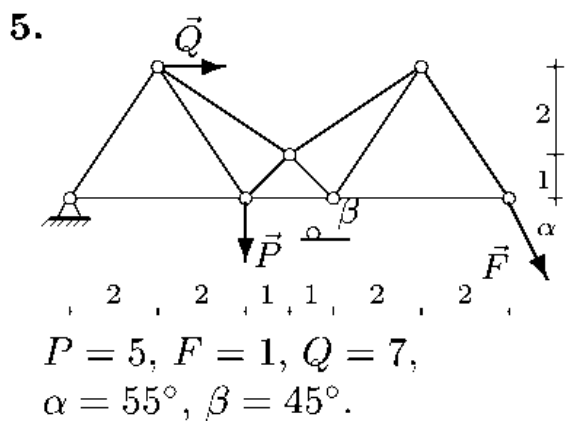
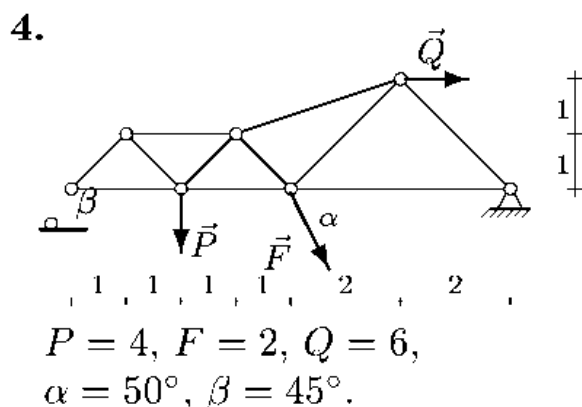
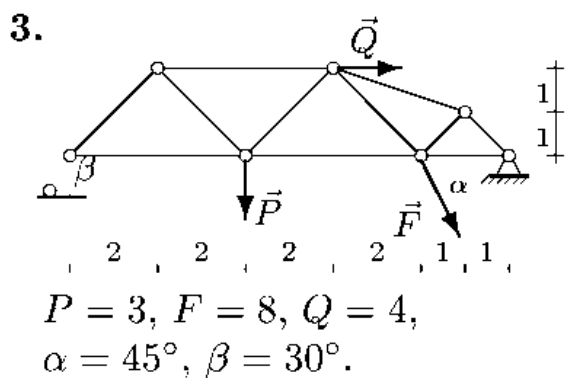
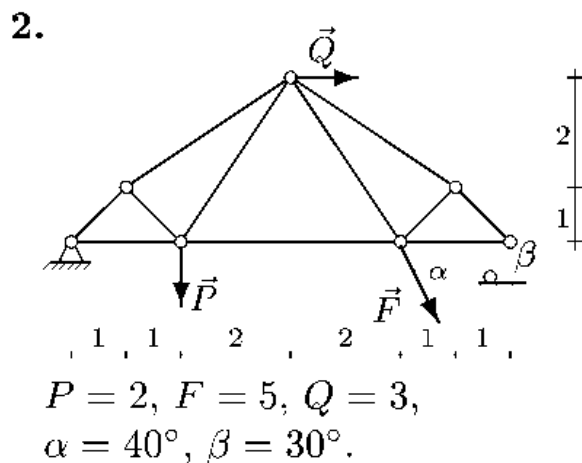
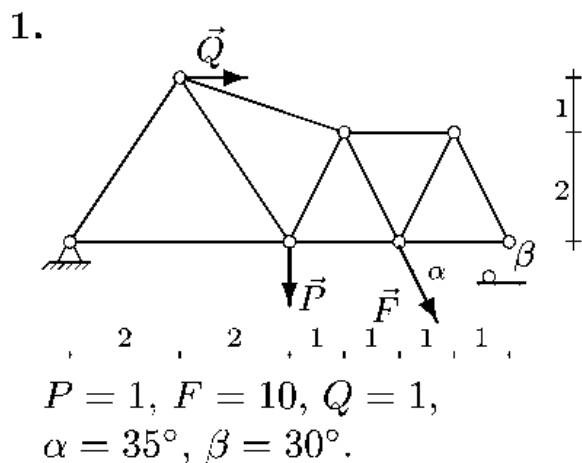
ЗАМЕЧАНИЕ 2. Графический способ расчета ферм в реальной инженерной практике безнадежно устарел, для расчета пространственных ферм он вообще не годится. Однако в учебных целях, для проверки аналитического решения и как пример изящного и быстрого определения усилий с помощью карандаша и линейки, диаграмма Максвелла–Кремоны сохраняет свое значение.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В качестве необычной задачи программирования, предлагаем попробовать найти алгоритм автоматического построения диаграммы Максвелла–Кремоны в системе Maple V, Maple 7, Mathematica 4 или в любом другом пакете, позволяющем работать с графикой. Основное требование к программе — не составлять уравнения равновесия узлов фермы в проекциях. Допустимо найти аналитическим методом реакции опор.

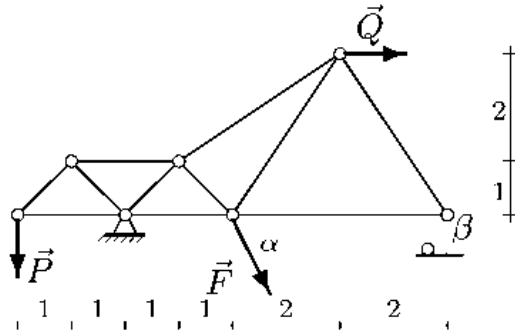
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. С помощью диаграммы Максвелла–Кремоны найти усилия в стержнях плоской фермы, находящейся под действием вертикальной силы  $P$ , наклонной  $F$  и горизонтальной  $Q$ . Одна опора фермы — неподвижный шарнир, другая — наклонный опорный стержень. Размеры даны в метрах, нагрузки — в кН.

<sup>\*)</sup> Программа расчета в системе Maple V приведена на с. 350.





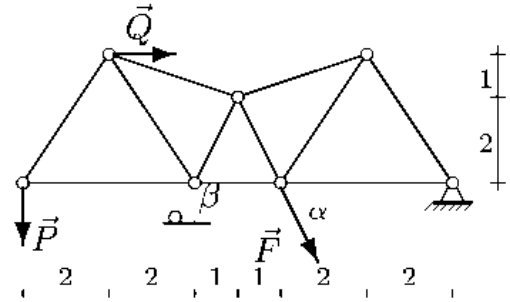
9.



$$P = 4, F = 7, Q = 6,$$

$$\alpha = 75^\circ, \beta = 60^\circ.$$

10.



$$P = 5, F = 9, Q = 7,$$

$$\alpha = 35^\circ, \beta = 30^\circ.$$

Ответы

	Реакции опор, кН			Усилия в стержнях, кН		
	Неподвижный шарнир		Опорный стержень	Нижний пояс		
	$X_A$	$Y_A$		$U_1$	$U_2$	$U_3$
1	-18.158	1.559	10.354	19.197	22.055	11.555
2	-13.820	1.178	8.071	14.998	14.058	11.025
3	-13.348	6.525	4.263	-1.560	-0.298	-6.823
4	-9.552	3.266	3.205	0.000	0.532	-6.286
5	-15.772	-2.379	11.595	14.186	12.875	0.027
6	-16.830	-0.732	13.195	16.586	12.366	-1.098
7	-3.815	6.500	-1.238	0.000	-2.875	-1.935
8	-5.527	9.548	-1.050	-0.384	-5.203	-3.586
9	-10.075	6.841	4.527	-4.000	4.916	4.877
10	-28.705	1.887	16.550	-3.333	-19.195	-27.446

	Усилия в стержнях, кН							
	Верхний пояс				Раскосы			
	$O_1$	$O_2$	$O_3$	$O_4$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$
1	-1.874	-4.172	-5.177	-5.788	3.459	-2.100	0.625	5.788
2	-1.667	-1.700	-5.820	-5.707	0.333	2.120	2.893	1.141
3	-3.014	-4.263	-10.318	-9.228	3.014	1.228	3.386	4.614
4	-3.205	-4.532	-0.841	-4.619	3.205	2.452	-2.828	4.995
5	2.860	-8.280	2.363	0.984	2.660	3.941	-8.583	-2.560
6	0.772	-6.536	5.196	3.674	1.407	6.597	-9.521	-3.674
7	1.238	1.384	5.732	5.127	-0.619	3.447	-6.629	-2.563
8	1.286	1.819	8.915	7.974	-1.286	5.529	-9.516	-3.987
9	5.657	8.000	1.672	-4.712	-5.657	-4.018	5.329	3.597
10	6.009	-0.452	-3.411	-2.268	-5.838	-3.821	2.456	3.565

## 2.4. Расчет составной конструкции

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** *Плоская рама состоит из двух частей, соединенных одним шарниром. На раму действует момент и силы. Учитывая погонный вес, найти реакции опор.*

### ПЛАН РЕШЕНИЯ

Составная конструкция, состоящая из двух тел, соединенных шарниром содержит четыре неизвестные реакции опор. Так как для одного тела под действием плоской системы сил можно составить только три независимых уравнения равновесия, то для определения реакций необходимо рассматривать равновесие каждой части составной конструкции в отдельности.

#### 1-й способ

1. Разбиваем систему на два тела по сочленяющему шарниру. В месте разбиения прикладываем реакции отброшенной части. Внешние связи заменяем их реакциями.

2. Для каждого тела, образованного при разбиении, составляем по три уравнения равновесия.

3. Решаем систему шести уравнений. Определяем реакции опор.

4. Делаем проверку решения, составляя уравнения равновесия целой (нерасчлененной) системы.

#### 2-й способ

1. Разбиваем систему на два тела по сочленяющему шарниру. В месте разбиения прикладываем реакции отброшенной части. Внешние связи заменяем их реакциями.

2. Для каждого тела, образованного при разбиении, составляем уравнения моментов относительно точки сочленения. Полученные уравнения дополняем двумя уравнениями равновесия для всей конструкции в целом.

3. Решаем систему четырех уравнений. Определяем реакции опор.

4. Делаем проверку решения, составляя уравнения равновесия целой (нерасчлененной) системы.

**ПРИМЕР.** Плоская рама состоит из двух частей, соединенных в точке  $C$  шарниром. На раму действует момент  $M = 100$  кНм, горизонтальная сила  $P = 20$  кН и наклонная сила  $Q = 10$  кН. Учитывая погонный вес  $\rho = 4$  кН/м, найти реакции опор (рис. 40). Дано:  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 50^\circ$ ,  $AB = 4$  м,  $BC = 6$  м,  $CD = 4$  м,  $DE = 2$  м,  $KC = 2$  м,  $AN = NB$ .

РЕШЕНИЕ

1-й способ

1. Разбиваем конструкцию на два тела по сочленяющему шарниру  $C$ . Получаем две части (рис. 41–42). Внешние связи конструкции заменяем реакциями.

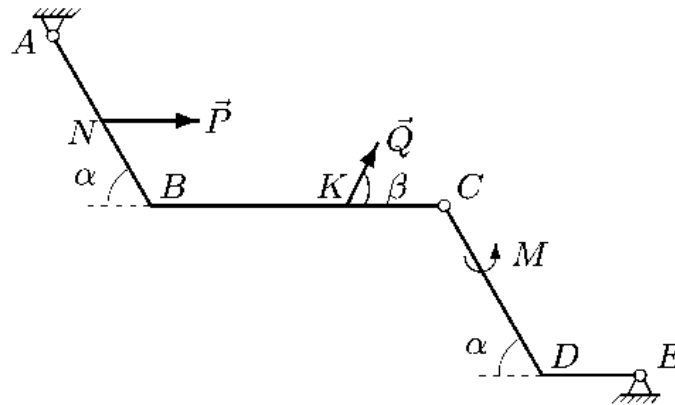


Рис. 40

В точке  $A$  прикладываем реакции  $X_A$  и  $Y_A$ , в точке  $E$  — реакции  $X_E$  и  $Y_E$ . К каждому телу в точке  $C$  прикладываем реакции отброшенной части. Согласно 3-му закону Ньютона, реакции  $X_C$  и  $Y_C$  для разных частей равны по величине и направлены в противоположные стороны.

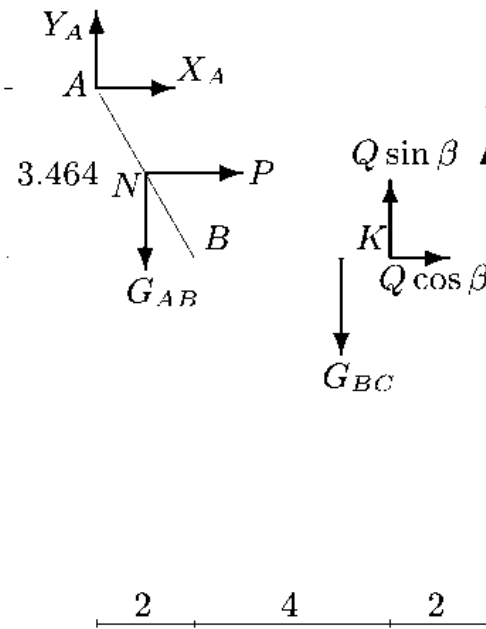


Рис. 41

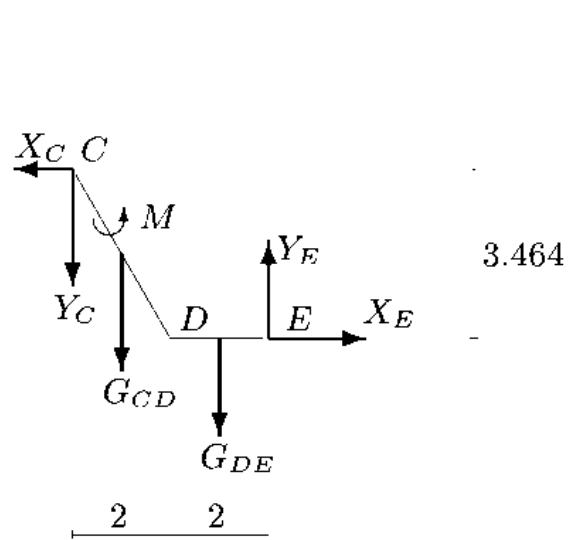


Рис. 42

Система уравнений равновесия двух тел, образованных при разбиении, замыкается — имеем шесть уравнений равновесия (по три уравнения на каждую часть) и шесть неизвестных  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $X_E$ ,  $Y_E$ ,  $X_C$ ,  $Y_C$ .

2. Для каждой отдельной части составим по три уравнения равновесия:

$$\sum X_i^{(\text{лев})} = X_A + P + Q \cos \beta + X_C = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i^{(\text{лев})} = Y_A + Q \sin \beta + Y_C - G_{AB} - G_{BC} = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sum M_{C_i}^{(\text{лев})} = & -X_A AB \sin \alpha - Y_A (AB \cos \alpha + BC) - \\ & - P NB \sin \alpha - Q KC \sin \beta + \\ & + G_{AB} (NB \cos \alpha + BC) + G_{BC} (BC/2) = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\sum X_i^{(\text{прав})} = -X_C + X_E = 0, \quad (4)$$

$$\sum Y_i^{(\text{прав})} = -Y_C + Y_E - G_{CD} - G_{DE} = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sum M_{C_i}^{(\text{прав})} = & X_E CD \sin \alpha + Y_E (DE + CD \cos \alpha) + M - \\ & - G_{DE} (DE/2 + CD \cos \alpha) - G_{CD} (CD/2) \cos \alpha = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

3. Решаем систему (1–6) относительно неизвестных  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $X_E$ ,  $Y_E$ ,  $X_C$ ,  $Y_C$ . Можно использовать любой способ решения системы линейных уравнений (*Решebник ВМ*, §2.1). Рекомендуем наиболее эффективный для таких систем метод исключения Гаусса.

Если для решения использовать компьютер, систему лучше записать в матричном виде, предварительно вычислив правые части системы (1–6) и коэффициенты при неизвестных. Величины сил тяжести участков вычисляем через погонный вес  $\rho$  по формуле  $G = \rho L$ , где  $L$  — длина соответствующего участка. В нашем случае

$$G_{AB} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ кН}, \quad G_{BC} = 4 \cdot 6 = 24 \text{ кН},$$

$$G_{CD} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ кН}, \quad G_{DE} = 4 \cdot 2 = 8 \text{ кН}.$$

Система (1–6) имеет следующий матричный вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3.464 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3.464 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ X_E \\ Y_E \\ X_C \\ Y_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -26.428 \\ 32.339 \\ -134.038 \\ 0 \\ 24 \\ -60 \end{vmatrix}.$$

Результаты расчетов в кН заносим в таблицу:

$X_A$	$Y_A$	$X_E$	$Y_E$	$X_C$	$Y_C$
73.202	-14.943	-99.630	71.282	-99.632	-47.281

4. Делаем проверку решения, составляя уравнения равновесия для целой (нерасчлененной) системы (рис. 43):

$$\begin{aligned}
 \sum M_{E_i}^{(\text{цел})} = & -Y_A((AB + CD) \cos \alpha + BC + DE) + M - \\
 & - P(NB + CD) \sin \alpha - X_A(AB + CD) \sin \alpha - \\
 & - QCD \sin \alpha \cos \beta - Q(KC + CD \cos \alpha + DE) \sin \beta + \\
 & + G_{AB}((NB + CD) \cos \alpha + BC + DE) + \\
 & + G_{BC}(BC/2 + CD \cos \alpha + DE) + \\
 & + G_{CD}((CD/2) \cos \alpha + DE) + G_{DE}(DE/2) = 0,
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 \sum M_{A_i}^{(\text{цел})} = & Y_E((AB + CD) \cos \alpha + BC + DE) + M + \\
 & + PAN \sin \alpha + X_E(AB + CD) \sin \alpha + \\
 & + QAB \sin \alpha \cos \beta + Q(BK + AB \cos \alpha) \sin \beta - \\
 & - G_{DE}(DE/2 + (AB + CD) \cos \alpha + BC) - \\
 & - G_{CD}((AB + CD/2) \cos \alpha + BC) - \\
 & - G_{BC}(BC/2 + AB \cos \alpha) - G_{AB}(AB/2) \cos \alpha = 0.
 \end{aligned} \tag{8}$$

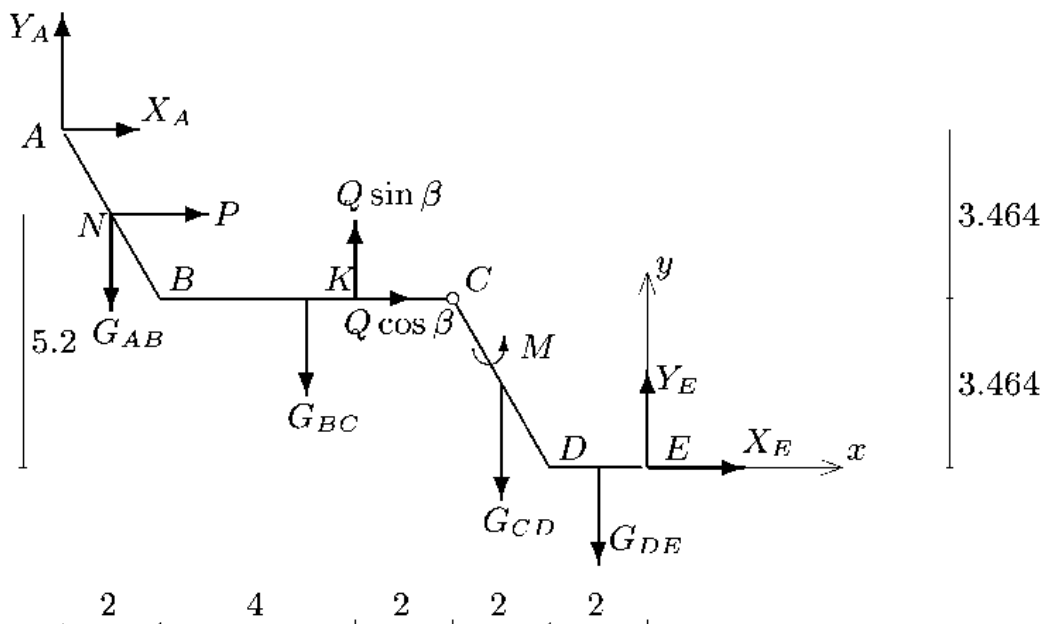


Рис. 43

## 2-й способ

1. Разбиваем конструкцию на два тела по сочленяющему шарниру  $C$ . Получаем две части (рис. 41–42). Внешние связи конструкции заменяем реакциями.

2. Относительно шарнира  $C$  для каждой части конструкции составляем уравнения моментов (3) и (6). Для всей системы в целом составляем уравнения моментов (7,8) относительно опор  $A$  и  $E$ .

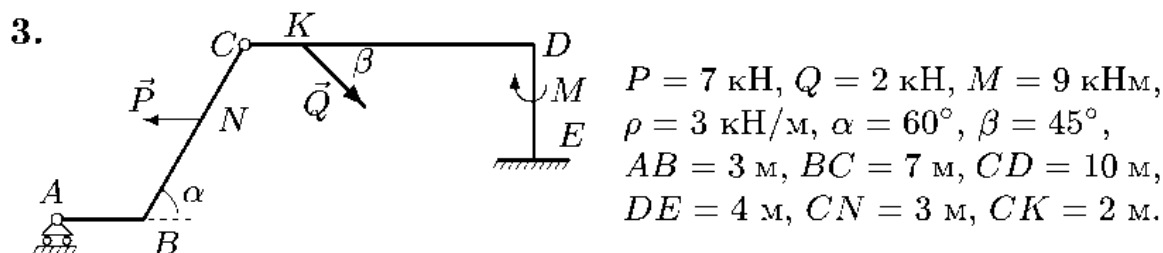
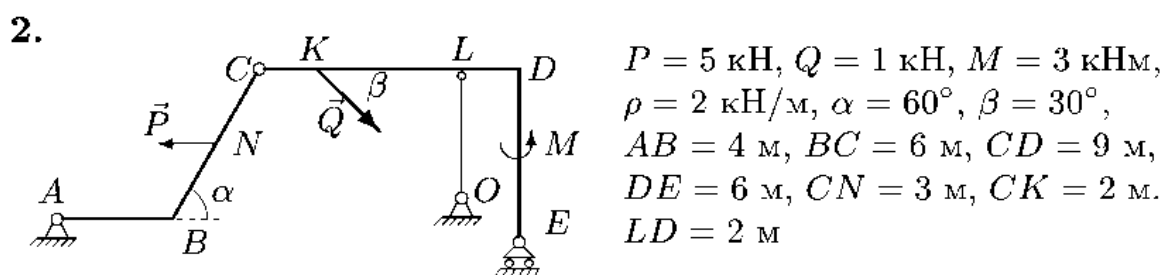
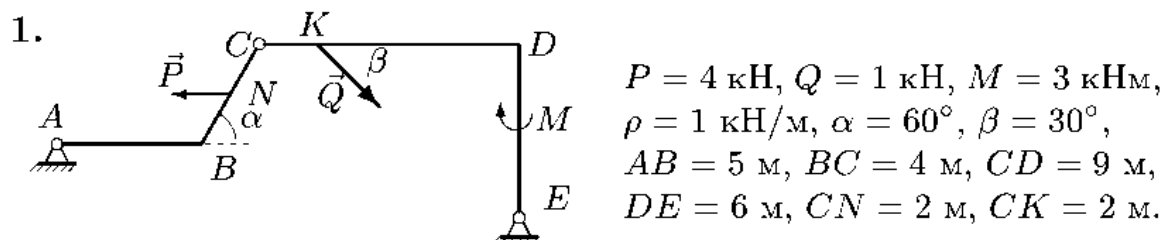
3. Решаем систему четырех уравнений (3,6,7,8) относительно четырех неизвестных, замечая, что система распадается на две: уравнения (3) и (7) для  $X_A$  и  $Y_A$  и уравнения (6) и (8) для  $X_E$  и  $Y_E$ .

4. Делаем проверку решения, составляя уравнения равновесия целой (нерасчлененной) системы (рис. 43):

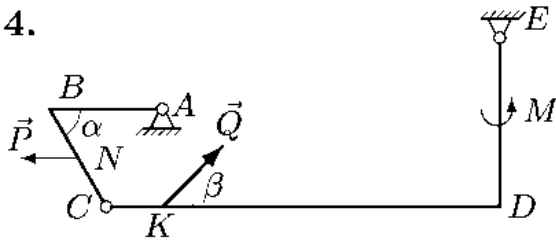
$$\sum X_i^{(\text{цел})} = X_A + P + Q \cos \beta + X_E = 0,$$

$$\sum Y_i^{(\text{цел})} = Y_A + Q \sin \beta - G_{AB} - G_{BC} + Y_E - G_{CD} - G_{DE} = 0.$$

**УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.** Плоская рама состоит из двух частей, соединенных в точке  $C$  шарниром. На раму действует момент  $M$ , горизонтальная сила  $P$  и наклонная сила  $Q$ . Учитывая погонный вес  $\rho$ , найти реакции опор.

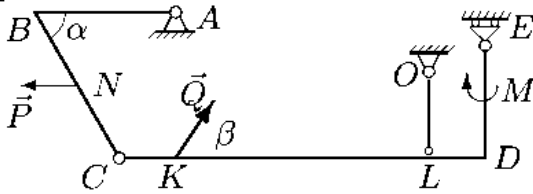


4.



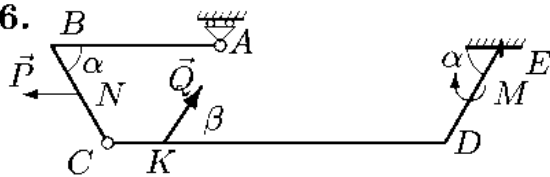
$P = 5 \text{ кН}, Q = 2 \text{ кН}, M = 5 \text{ кНм},$   
 $\rho = 1 \text{ кН/м}, \alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ,$   
 $AB = 4 \text{ м}, BC = 4 \text{ м}, CD = 14 \text{ м},$   
 $DE = 6 \text{ м}, CN = 2 \text{ м}, CK = 2 \text{ м}.$

5.



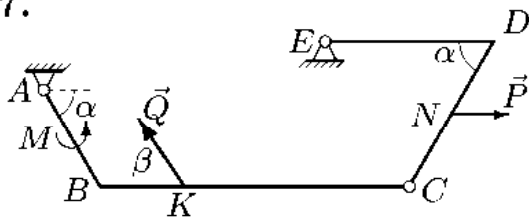
$P = 7 \text{ кН}, Q = 2 \text{ кН}, M = 6 \text{ кНм},$   
 $\rho = 2 \text{ кН/м}, \alpha = 60^\circ, \beta = 60^\circ,$   
 $AB = 5 \text{ м}, BC = 6 \text{ м}, CD = 13 \text{ м},$   
 $DE = 4 \text{ м}, CN = 3 \text{ м}, CK = 2 \text{ м},$   
 $LD = 2 \text{ м}$

6.



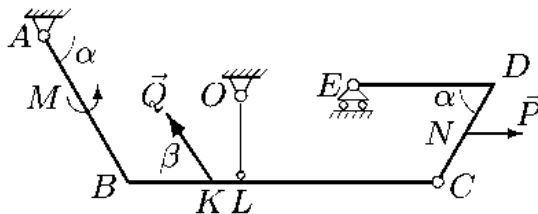
$P = 8 \text{ кН}, Q = 3 \text{ кН}, M = 9 \text{ кНм},$   
 $\rho = 3 \text{ кН/м}, \alpha = 60^\circ, \beta = 60^\circ,$   
 $AB = 6 \text{ м}, BC = 4 \text{ м}, CD = 12 \text{ м},$   
 $DE = 4 \text{ м}, CN = 2 \text{ м}, CK = 2 \text{ м}.$

7.



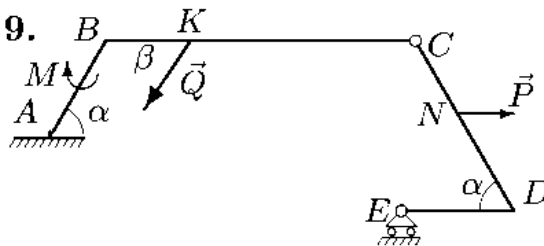
$P = 7 \text{ кН}, Q = 3 \text{ кН}, M = 9 \text{ кНм},$   
 $\rho = 1 \text{ кН/м}, \alpha = 60^\circ, \beta = 75^\circ,$   
 $AB = 4 \text{ м}, BC = 11 \text{ м}, CD = 6 \text{ м},$   
 $DE = 6 \text{ м}, CN = 3 \text{ м}, BK = 3 \text{ м}.$

8.



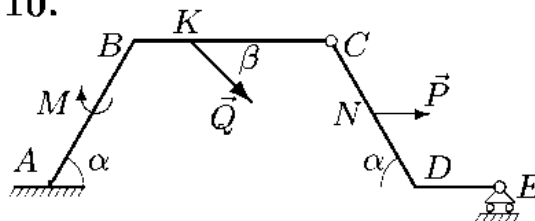
$P = 8 \text{ кН}, Q = 3 \text{ кН}, M = 9 \text{ кНм},$   
 $\rho = 2 \text{ кН/м}, \alpha = 60^\circ, \beta = 75^\circ,$   
 $AB = 6 \text{ м}, BC = 11 \text{ м}, CD = 4 \text{ м},$   
 $DE = 5 \text{ м}, CN = 2 \text{ м}, BK = 3 \text{ м},$   
 $LC = 7 \text{ м}.$

9.



$P = 9 \text{ кН}, Q = 4 \text{ кН}, M = 9 \text{ кНм},$   
 $\rho = 3 \text{ кН/м}, \alpha = 60^\circ, \beta = 75^\circ,$   
 $AB = 4 \text{ м}, BC = 11 \text{ м}, CD = 7 \text{ м},$   
 $DE = 4 \text{ м}, CN = 3 \text{ м}, BK = 3 \text{ м}.$

10.



$P = 6 \text{ кН}, Q = 4 \text{ кН}, M = 9 \text{ кНм},$   
 $\rho = 3 \text{ кН/м}, \alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ,$   
 $AB = 6 \text{ м}, BC = 7 \text{ м}, CD = 6 \text{ м},$   
 $DE = 3 \text{ м}, CN = 3 \text{ м}, BK = 2 \text{ м}.$



## Ответы

	$X_A$	$Y_A$	$X_E$	$Y_E$	$S_{OL}$	$M_A$	$M_E$
	кН					кНм	
1	11.062	8.270	-7.928	16.230	—	—	—
2	4.134	9.499	—	-50.005	91.006	—	—
3	—	9.779	5.586	63.635	—	—	-376.867
4	14.529	18.835	-10.943	7.751	—	—	—
5	6.000	-5.005	—	-188.232	247.505	—	—
6	—	-1.964	6.500	77.366	—	—	-684.804
7	10.323	4.504	-16.547	19.598	—	—	—
8	-7.224	-12.671	—	-5.619	67.392	—	—
9	-7.965	144.598	—	-62.735	—	1559.959	—
10	-9.464	59.348	—	8.652	—	415.158	—

Ответы на типичные вопросы, возникающие при решении задачи

1. *Что представляет собой опора в точке E в варианте 3,6 и в точке A в варианте 9?*

Это жесткая заделка. Реакции заделки — две силы, например,  $X_E$  и  $Y_E$  и момент  $M_E$ .

2. *Куда направлять неизвестные реакции?* Для двусторонних связей (не освобождающихся) реакции — силы принято направлять по положительному направлению осей координат, а моменты — против часовой стрелки. В данной задаче и везде, где это специально не оговорено, связи двусторонние.

3. *Какие еще возможны схемы решения задачи?*

Можно составить систему из шести уравнений, куда войдут по два уравнения равновесия для каждой части и два уравнения равновесия рамы в целом (**2+2+2**). Возможны также варианты **3+2+1**, **3+1+2** и другие схемы<sup>\*)</sup>. Однако, здесь следует проявлять осторожность в выборе вида уравнений. В частности, если для каждой части и для рамы в целом составить уравнение проекций на одну и ту же ось или уравнение моментов относительно одной и той же точки, то три уравнения, например,  $\sum X_i^{(\text{лев})} = 0$ ,  $\sum X_i^{(\text{прав})} = 0$ ,  $\sum X_i^{(\text{цел})} = 0$ , будут зависимыми — сумма уравнений для частей даст уравнение для целой конструкции.

4. *Можно ли разбить раму не по шарниру, а по какой-либо другой точке, например, по угловой?*

<sup>\*)</sup> Невозможно только появление в таких схемах цифры **4**, так как для одного тела в плоской задаче статики более трех независимых уравнений равновесия не существует.

Можно, но не нужно, так как при этом, кроме реакций  $X$  и  $Y$ , в точке разбиения рамы следует добавить еще одну неизвестную величину — момент. Этот момент удерживает от поворота одну часть относительно другой. В шарнире такой момент отсутствует, поэтому его и берут за точку разбиения, чтобы не увеличивать число неизвестных. Определение внутреннего момента в каждой точке рамы составляет одну из задач сопротивления материалов и строительной механики (построение эпюры моментов).

## 2.5. Конструкция с распределенными нагрузками

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** *Найти реакции опор плоской составной рамы, находящейся под действием линейно распределенной нагрузки и нагрузки, равномерно распределенной по дуге окружности.*

### ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Внешние связи заменяем реакциями. Разбиваем систему на два тела по сочленяющему шарниру. К каждой из образовавшихся частей прикладываем реакции шарнира, помня о том, что части взаимодействуют с силами равными по величине и противоположными по направлению.

2. Линейную нагрузку с максимальным значением  $q_{max}$ , распределенную по треугольнику, заменяем на сосредоточенную  $Q$  в центре тяжести треугольника ( $1/3$  длины участка  $L$  нагрузки, считая от прямого угла). Значение нагрузки вычисляем по формуле площади треугольника  $Q = q_{max}L/2$ .

3. Нагрузку  $q$ , равномерно распределенную по дуге окружности радиусом  $R$  с центральным углом  $2\alpha$ , заменим ее равнодействующей  $Q = q \cdot 2R \sin \alpha$ , направленной по биссектрисе центрального угла ([19], § 21).

4. Для каждого тела составляем по три уравнения равновесия.

5. Решаем систему шести уравнений. Определяем реакции опор.

6. Делаем проверку решения, составляя уравнения равновесия для целой (нерасчлененной) системы.

**ПРИМЕР.** Найти реакции опор плоской составной рамы, находящейся под действием линейно распределенной нагрузки с максимальной интенсивностью  $q_1 = 10$  кН/м на вертикальном участке рамы  $AB$

и нагрузки с интенсивностью  $q_2 = 2$  кН/м, равномерно распределенной по дуге  $CK$  окружности с центром в точке  $O$  (рис. 44).  $AB = 3$  м,  $BC = 6$  м,  $DE = 4$  м,  $R = 5$  м,  $CK = \pi R/3$ .

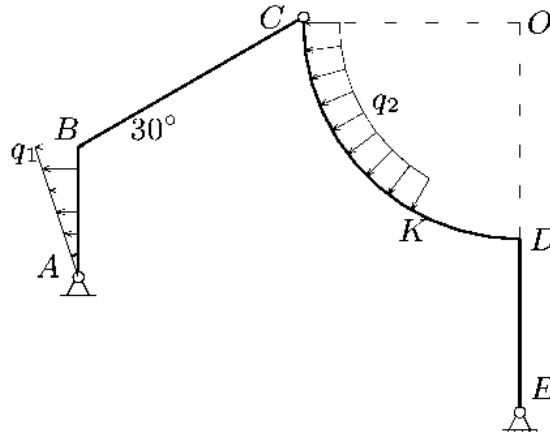


Рис. 44

РЕШЕНИЕ

1. Внешние связи заменяем реакциями  $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_E, \vec{Y}_E$ . Число неизвестных реакций больше трех. Следовательно, для решения задачи необходимо разбить конструкцию на две и рассмотреть равновесие каждой образовавшейся части (рис. 45–46).

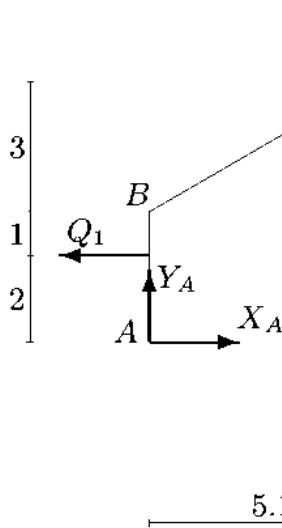


Рис. 45

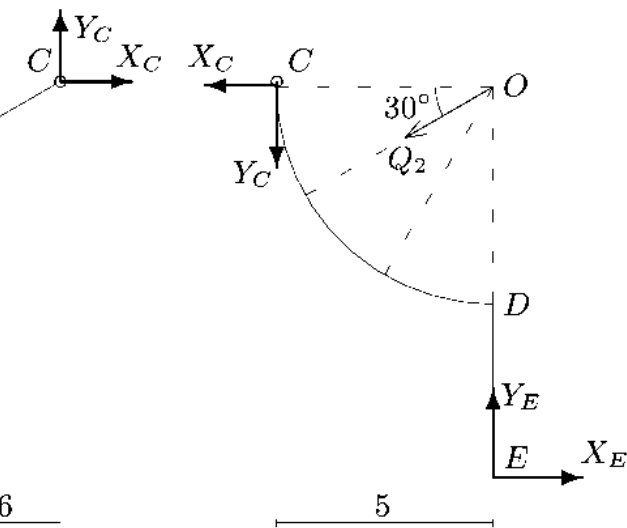


Рис. 46

При разбиении по шарниру к каждой из частей прикладываем реакции шарнира, помня о том, что части взаимодействуют с силами, равными по величине и противоположными по направлению (об этом шла речь в § 2.4, с. 55).

2. Нагрузку, распределенную по линейному закону, заменяем сосредоточенной  $Q_1$ , приложенной к раме на расстоянии  $AB/3$  от максимального значения  $q_1$  в том же направлении (рис. 45). Величина равнодействующей  $Q_1$  вычисляется по формуле площади прямоугольного треугольника с катетами  $AB$  и  $q_1$ :

$$Q_1 = \frac{1}{2} q_1 AB = \frac{1}{2} 10 \cdot 3 = 15 \text{ кН.}$$

3. Нагрузку с интенсивностью  $q_2$ , равномерно распределенную по дуге  $CK$ , заменяем ее равнодействующей

$$Q_2 = q_2 \cdot 2R \sin\left(\frac{CK}{2R}\right) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \sin(\pi/6) = 10 \text{ кН,}$$

направленной по биссектрисе угла  $\angle KOC = 60^\circ$  (рис. 47). Так как  $2R \sin(\pi/6) = CK$ , то величина  $Q_2$  совпадает со значением равнодействующей нагрузки, равномерно распределенной по хорде  $CK$ , той же интенсивности  $q_2$ . Воспользуемся тем, что вектор силы в теоретической механике является скользящим. Для удобства вычисления

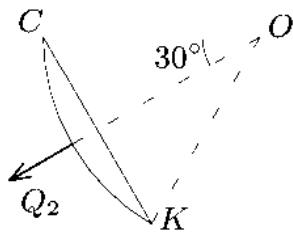


Рис. 47

момента силы  $Q_2$  переносим точку ее приложения вдоль линии действия силы в центр окружности  $O$ . То, что точка  $O$  не принадлежит раме, и сила как-бы “зависает” в воздухе, не должно смущать. Твердое тело  $CDE$  можно мысленно расширить до точки  $O$ , давая, таким образом, силе  $Q_2$  реальную точку приложения.

4. Составляем уравнения равновесия частей рамы:

$$\begin{aligned} \sum X_i^{(\text{лев})} &= X_A + X_C - Q_1 = 0, \\ \sum Y_i^{(\text{лев})} &= Y_A + Y_C = 0, \\ \sum M_{C_i}^{(\text{лев})} &= X_A(AB + BC \sin 30^\circ) - Y_A BC \cos 30^\circ - \\ &\quad - Q_1(AB/3 + BC \sin 30^\circ) = 0, \quad (1) \\ \sum X_i^{(\text{прав})} &= X_E - X_C - Q_2 \cos 30^\circ = 0, \\ \sum Y_i^{(\text{прав})} &= Y_E - Y_C - Q_2 \sin 30^\circ = 0, \\ \sum M_{C_i}^{(\text{прав})} &= X_E(DE + R) + Y_E R - Q_2 R \sin 30^\circ = 0. \end{aligned}$$

5. Решаем систему (1) шести уравнений с шестью неизвестными. Результаты расчетов в кН заносим в таблицу:

$X_A$	$Y_A$	$X_E$	$Y_E$	$X_C$	$Y_C$
18.322	9.609	5.338	-4.609	-3.322	9.609

6. Выполняем проверку решения — составляем уравнения моментов для всей системы в целом (рис. 48):

$$\sum M_{E_i}^{(\text{цел})} = -X_A(R + DE - AB - BC \sin 30^\circ) - Y_A(BC \cos 30^\circ + R) + Q_1(R + DE - AB/3 - BC \sin 30^\circ) + Q_2 \cos 30^\circ(R + DE) = 0,$$

$$\sum M_{A_i}^{(\text{цел})} = X_E(R + DE - AB - BC \sin 30^\circ) + Y_E(BC \cos 30^\circ + R) + (2/3)Q_1 AB - Q_2 \sin 30^\circ(BC \cos 30^\circ + R) + Q_2 \cos 30^\circ(AB + BC \sin 30^\circ) = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно предложить второй способ решения задачи, рассмотренный в предыдущем параграфе (с. 54). Для каждого тела, образованного при разбиении, составляем уравнения моментов относительно точки сочленения  $C$ . Полученные уравнения дополняем двумя уравнениями равновесия для всей конструкции в целом (рис. 48).

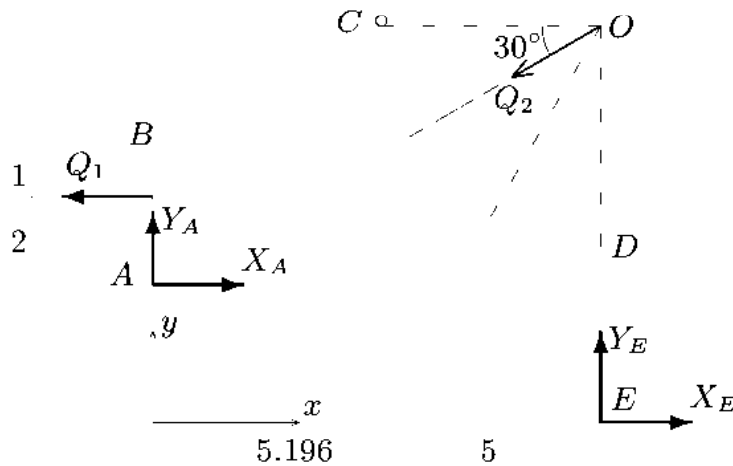
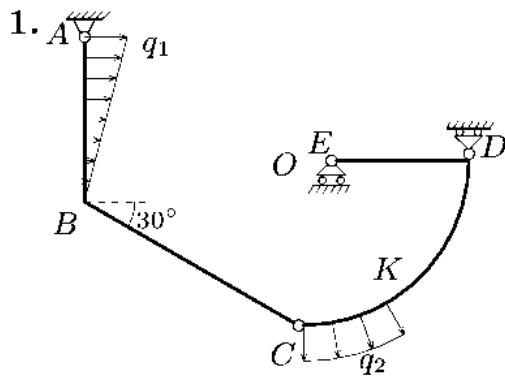


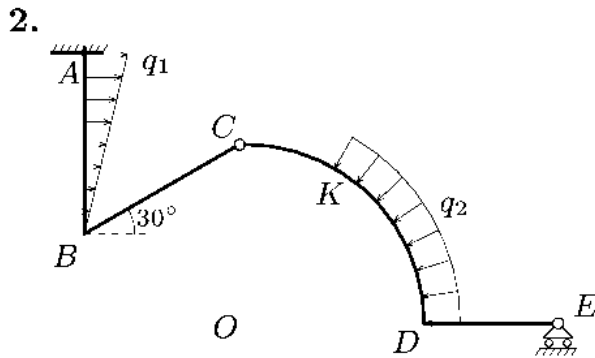
Рис. 48

Для данного примера это уравнения моментов относительно опорных шарниров  $A$  и  $E$ .

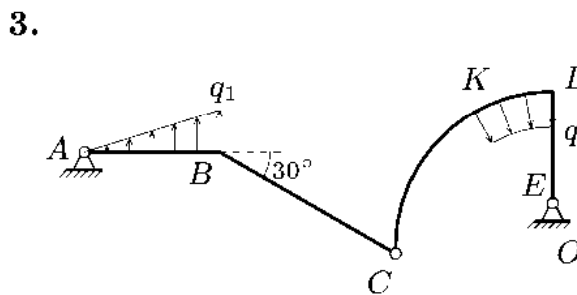
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти реакции опор плоской составной рамы, находящейся под действием линейно распределенной нагрузки с максимальной интенсивностью  $q_1$  и нагрузки с интенсивностью  $q_2$ , равномерно распределенной по дуге окружности. Участок  $CD$  представляет собой четверть окружности радиуса  $R$  с центром в  $O$ .



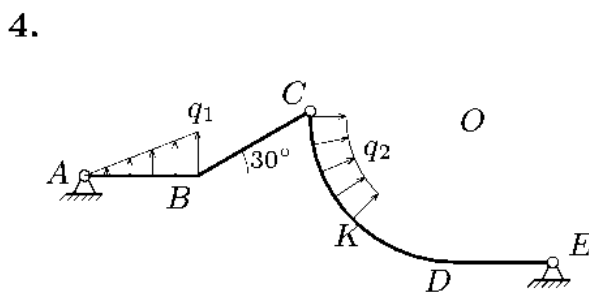
$$\begin{aligned} q_1 &= 11 \text{ кН/м}, & R &= 6 \text{ м}, \\ q_2 &= 5 \text{ кН/м}, & AB &= 6 \text{ м}, \\ & & BC &= 9 \text{ м}, & CK &= \pi R/6 \text{ м}, \\ & & DE &= 5 \text{ м}. \end{aligned}$$



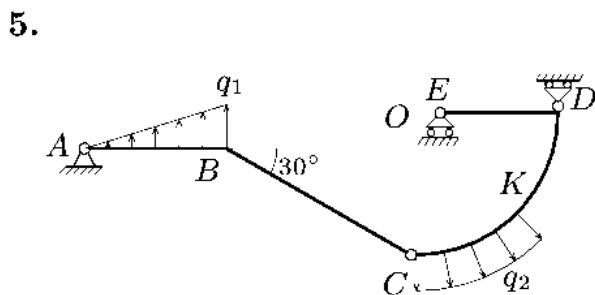
$$\begin{aligned} q_1 &= 8 \text{ кН/м}, & R &= 8 \text{ м}, \\ q_2 &= 7 \text{ кН/м}, & AB &= 8 \text{ м}, \\ & & BC &= 8 \text{ м}, & DK &= \pi R/3 \text{ м}, \\ & & DE &= 6 \text{ м}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} q_1 &= 11 \text{ кН/м}, & R &= 7 \text{ м}, \\ q_2 &= 6 \text{ кН/м}, & AB &= 6 \text{ м}, \\ & & BC &= 9 \text{ м}, & DK &= \pi R/6 \text{ м}, \\ & & DE &= 5 \text{ м}. \end{aligned}$$

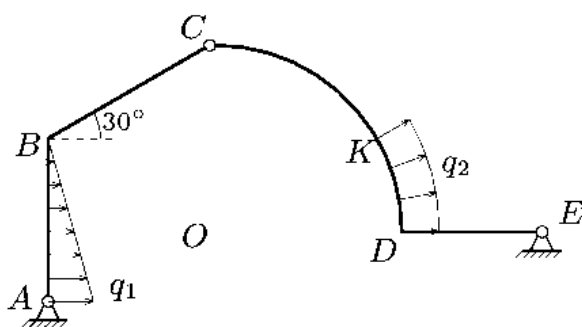


$$\begin{aligned} q_1 &= 11 \text{ кН/м}, & R &= 9 \text{ м}, \\ q_2 &= 5 \text{ кН/м}, & AB &= 7 \text{ м}, \\ & & BC &= 8 \text{ м}, & CK &= \pi R/4 \text{ м}, \\ & & DE &= 6 \text{ м}. \end{aligned}$$



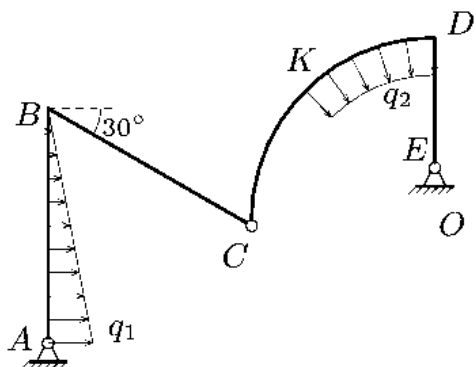
$$\begin{aligned} q_1 &= 9 \text{ кН/м}, & R &= 6 \text{ м}, \\ q_2 &= 7 \text{ кН/м}, & AB &= 6 \text{ м}, \\ & & BC &= 9 \text{ м}, & CK &= \pi R/4 \text{ м}, \\ & & DE &= 5 \text{ м}. \end{aligned}$$

6.



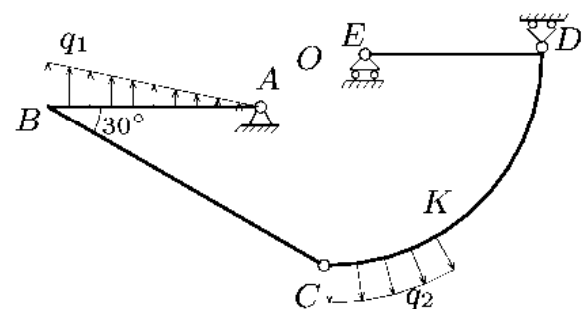
$$\begin{aligned} q_1 &= 11 \text{ кН/м}, & R &= 8 \text{ м}, \\ q_2 &= 4 \text{ кН/м}, & AB &= 7 \text{ м}, \\ BC &= 8 \text{ м}, & DK &= \pi R/6 \text{ м}, \\ DE &= 6 \text{ м}. \end{aligned}$$

7.



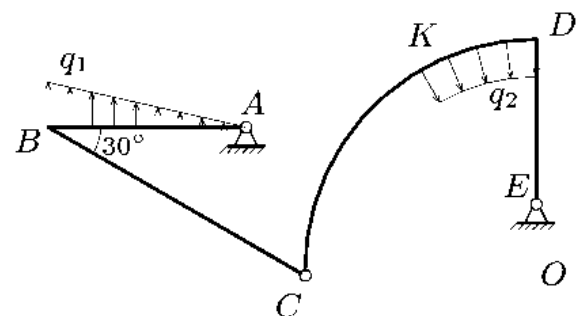
$$\begin{aligned} q_1 &= 9 \text{ кН/м}, & R &= 7 \text{ м}, \\ q_2 &= 8 \text{ кН/м}, & AB &= 9 \text{ м}, \\ BC &= 9 \text{ м}, & DK &= \pi R/4 \text{ м}, \\ DE &= 5 \text{ м}. \end{aligned}$$

8.



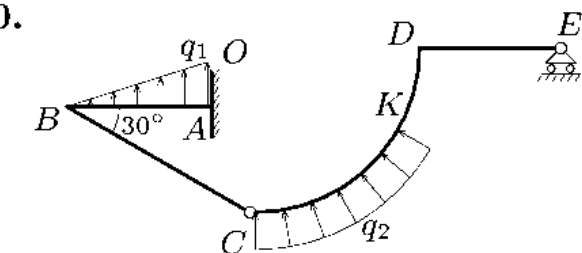
$$\begin{aligned} q_1 &= 11 \text{ кН/м}, & R &= 6 \text{ м}, \\ q_2 &= 5 \text{ кН/м}, & AB &= 6 \text{ м}, \\ BC &= 9 \text{ м}, & CK &= \pi R/6 \text{ м}, \\ DE &= 5 \text{ м}. \end{aligned}$$

9.



$$\begin{aligned} q_1 &= 12 \text{ кН/м}, & R &= 7 \text{ м}, \\ q_2 &= 5 \text{ кН/м}, & AB &= 6 \text{ м}, \\ BC &= 9 \text{ м}, & DK &= \pi R/6 \text{ м}, \\ DE &= 5 \text{ м}. \end{aligned}$$

10.



$$\begin{aligned} q_1 &= 8 \text{ кН/м}, & R &= 7 \text{ м}, \\ q_2 &= 9 \text{ кН/м}, & AB &= 6 \text{ м}, \\ BC &= 9 \text{ м}, & CK &= \pi R/3 \text{ м}, \\ DE &= 6 \text{ м}. \end{aligned}$$

## Ответы

	$X_A$	$Y_A$	$Y_D$	$X_E$	$Y_E$	$M_A$
	кН					кНм
1	-37.019	13.882	4.600	—	-3.482	—
2	16.497	0.287	—	—	27.713	110.646
3	13.010	-27.675	—	-18.637	15.675	—
4	-42.002	-37.663	—	10.182	-14.017	—
5	-12.302	-15.158	11.191	—	6.665	—
6	-34.480	-6.584	—	-20.020	2.297	—
7	29.021	24.549	—	-85.923	15.049	—
8	-4.019	-96.489	-10.875	—	89.363	—
9	-29.207	-43.005	—	24.518	24.505	—
10	31.500	-61.598	—	—	-16.962	122.290

## 2.6. Расчет системы трех тел, соединенных шарниром

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** *Определить реакции опор конструкции, состоящей из трех тел, соединенных в одной точке шарниром.*

### ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Расчленяем конструкцию на три отдельных тела и сочленяющий шарнир в качестве четвертого тела. Считая, что каждое из трех тел в точке сочленения взаимодействует только с осью шарнира, действие оси шарнира на тело заменяем ее реакциями.

2. Записываем по три уравнения равновесия для каждого из тел и два уравнения равновесия в проекциях для системы сил, приложенных к оси шарнира.

3. Решаем систему 11 уравнений с 11 неизвестными.

4. Выполняем проверку решения, составляя дополнительное уравнение равновесия для нерасчлененной конструкции.

**ПРИМЕР.** Определить реакции опор конструкции, состоящей из трех тел, соединенных в точке  $C$  шарниром. В точке  $B$  конструкция опирается на неподвижный шарнир, в точках  $D$  и  $E$  — подвижные шарниры, в точке  $A$  — горизонтальный опорный стержень. На конструкцию действуют силы  $F = 40$  кН,  $P = 20$  кН,  $Q = 10$  кН и сосредоточенные моменты  $M_1 = 100$  кНм,  $M_2 = 30$  кНм (рис. 49);  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ . Размеры на рисунке указаны в метрах.



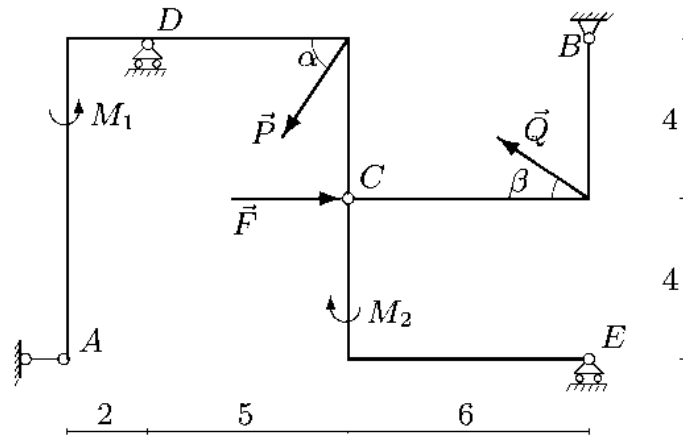


Рис. 49

РЕШЕНИЕ

1. Расчленим конструкцию на три отдельных тела  $ADC$ ,  $CB$ ,  $CE$  и сочленяющий шарнир  $C$  в качестве четвертого тела. Считая, что каждое из трех тел в точке сочленения взаимодействует только с осью шарнира  $C$ , действие оси шарнира на тело заменяем ее реакциями (рис. 50).

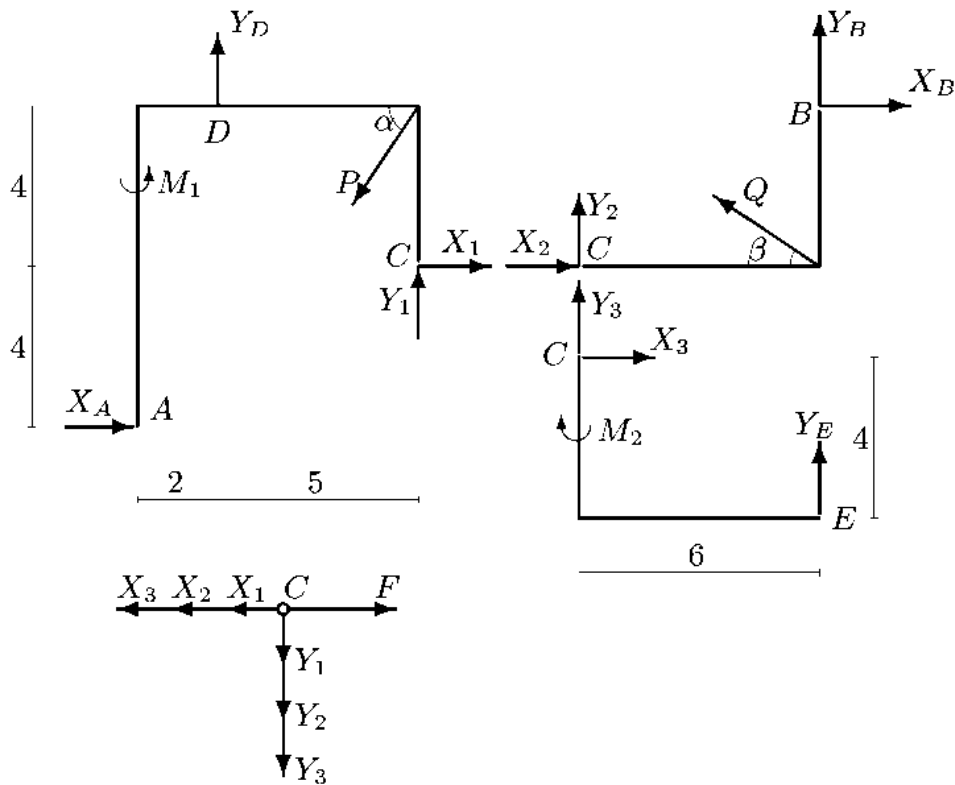


Рис. 50

2. Для каждого из тел ( $AC$ ,  $BC$ ,  $EC$ ) записываем по три уравнения равновесия — два уравнения проекций и уравнение моментов относительно точки  $C$  <sup>\*</sup>). Для системы сил, сходящихся в шарнире  $C$ , составляем два уравнения равновесия в проекциях (рис. 50). Получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\sum X_i^{(AC)} &= X_1 - P \cos \alpha + X_A = 0, \\ \sum Y_i^{(AC)} &= Y_1 - P \sin \alpha + Y_D = 0, \\ \sum M_C^{(AC)} &= X_A \cdot 4 - Y_D \cdot 5 + M_1 + P \cdot 4 \cos \alpha = 0,\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}\sum X_i^{(BC)} &= X_2 - Q \cos \beta + X_B = 0, \\ \sum Y_i^{(BC)} &= Y_2 + Q \sin \beta + Y_B = 0, \\ \sum M_C^{(BC)} &= -X_B \cdot 4 + Y_B \cdot 6 + Q \cdot 6 \sin \beta = 0.\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\sum X_i^{(EC)} &= X_3 = 0, \\ \sum Y_i^{(EC)} &= Y_3 + Y_E = 0, \\ \sum M_C^{(EC)} &= Y_E \cdot 6 - M_2 = 0,\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}\sum X_i^{(C)} &= -X_1 - X_2 - X_3 + F = 0, \\ \sum Y_i^{(C)} &= -Y_1 - Y_2 - Y_3 = 0.\end{aligned}\tag{4}$$

4. Решаем систему 11 уравнений с 11 неизвестными. Результаты расчетов в кН записываем в таблицу:

$X_A$	$Y_D$	$X_B$	$Y_B$	$Y_E$	$X_1$	$Y_1$	$X_2$	$Y_2$	$X_3$	$Y_3$
-10.90	19.28	-10.44	-11.96	5.00	20.90	-1.96	19.10	6.96	0	-5.00

5. Выполняем проверку решения, составляя дополнительное уравнение равновесия для нерасчлененной системы (рис. 51). Моментную точку  $K$  выбираем так, чтобы в уравнения вошли все проверяемые величины  $X_A$ ,  $Y_D$ ,  $X_B$ ,  $Y_B$ ,  $Y_E$ :

$$\begin{aligned}\sum M_K^{(\text{цел})} &= X_A \cdot 4 + Y_D \cdot 2 + M_1 - M_2 + P \cdot \cos \alpha \cdot 4 - \\ &\quad - P \cdot \sin \alpha \cdot 7 + Q \cdot \sin \beta \cdot 13 + Y_E \cdot 13 + Y_B \cdot 13 - X_B \cdot 4 = 0.\end{aligned}$$

---

<sup>\*</sup>) В качестве моментной точки можно выбирать любую, в том числе и не принадлежащую телу.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предложенный способ расчета не является единственным. Например, если из трех частей, соединенных в одном шарнире, можно отделить одну, имеющую в качестве опоры подвижный шарнир (часть  $CE$ , рис. 50), то получится система двух тел, одно из которых ( $CE$ ) имеет три неизвестные реакции. Определить эти реакции можно из системы трех уравнений равновесия этой части.

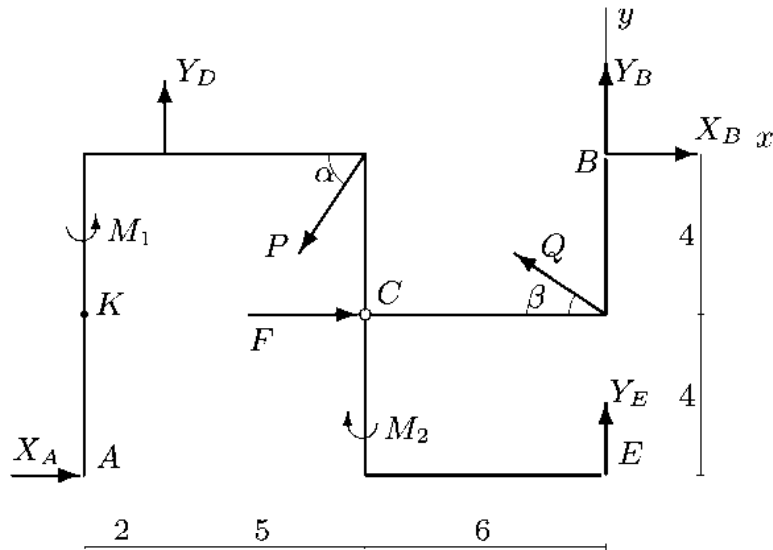
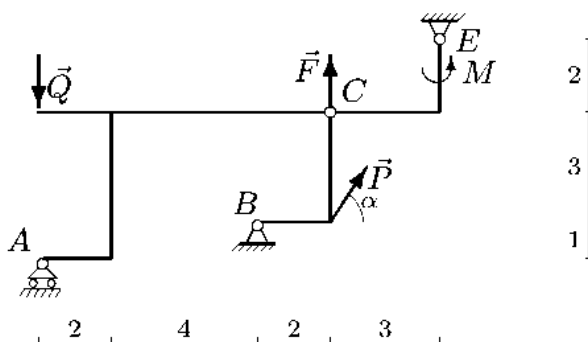


Рис. 51

Затем следует рассмотреть оставшуюся часть, состоящую из двух еще нерасчиленных тел. В качестве дополнительной нагрузки к ним будет приложены (в противоположную сторону) две реакции отброшенной третьей части.

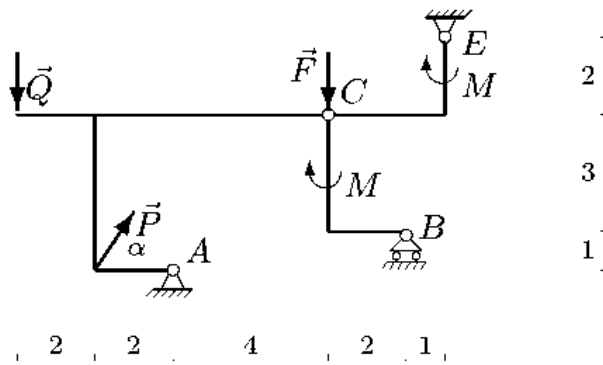
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. *Определить реакции опор конструкции (в кН), состоящей из трех тел, соединенных в точке  $C$  шарниром. Размеры указаны в метрах.*

1.



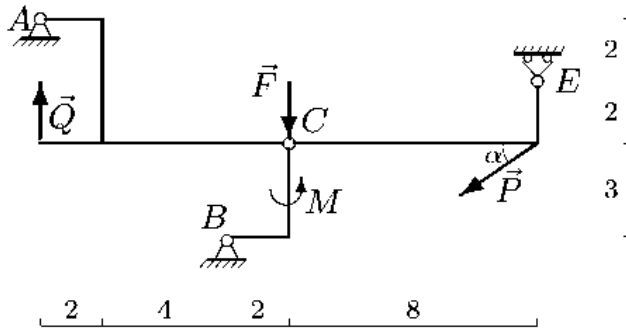
$$\begin{aligned}
 P &= 20 \text{ кН}, \\
 Q &= 30 \text{ кН}, \\
 F &= 70 \text{ кН}, \\
 M &= 100 \text{ кНм}, \\
 \alpha &= 60^\circ.
 \end{aligned}$$

2.



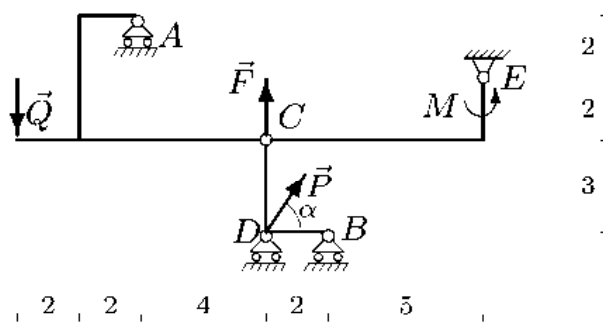
$P = 30 \text{ кН},$   
 $Q = 40 \text{ кН},$   
 $F = 60 \text{ кН},$   
 $M = 75 \text{ кНм},$   
 $\alpha = 60^\circ.$

3.



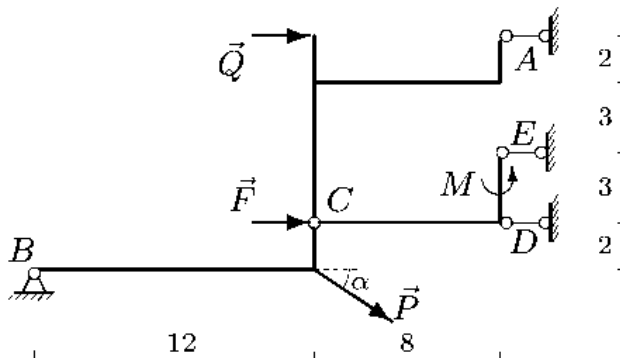
$P = 20 \text{ кН},$   
 $Q = 40 \text{ кН},$   
 $F = 70 \text{ кН},$   
 $M = 125 \text{ кНм},$   
 $\alpha = 30^\circ.$

4.



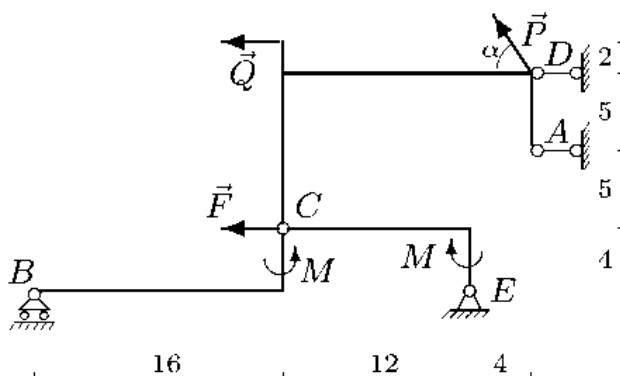
$P = 30 \text{ кН},$   
 $Q = 50 \text{ кН},$   
 $F = 90 \text{ кН},$   
 $M = 175 \text{ кНм},$   
 $\alpha = 60^\circ.$

5.



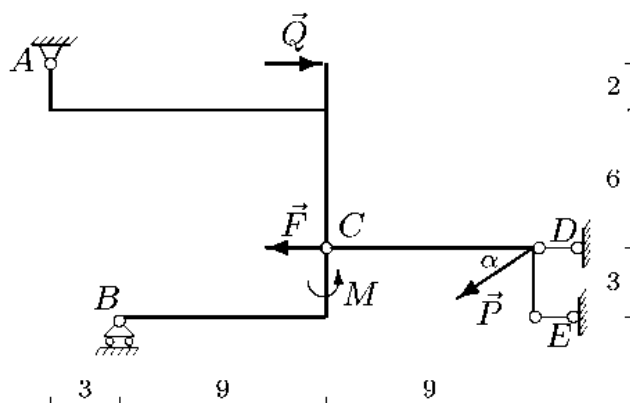
$P = 20 \text{ кН},$   
 $Q = 40 \text{ кН},$   
 $F = 50 \text{ кН},$   
 $M = 125 \text{ кНм},$   
 $\alpha = 30^\circ.$

6.



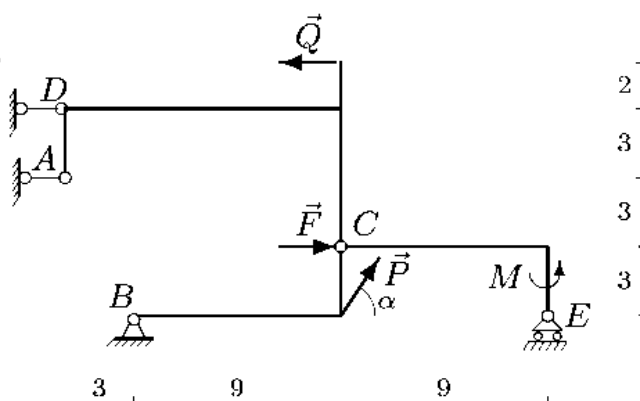
$P = 30 \text{ кН},$   
 $Q = 60 \text{ кН},$   
 $F = 80 \text{ кН},$   
 $M = 175 \text{ кНм},$   
 $\alpha = 60^\circ.$

7.



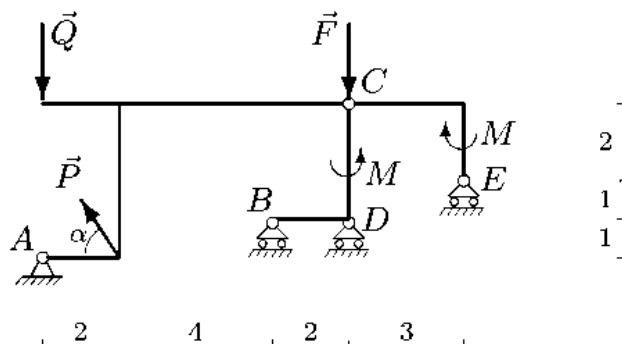
$$\begin{aligned}
 P &= 30 \text{ кН}, \\
 Q &= 60 \text{ кН}, \\
 F &= 90 \text{ кН}, \\
 M &= 225 \text{ кНм}, \\
 \alpha &= 30^\circ.
 \end{aligned}$$

8.



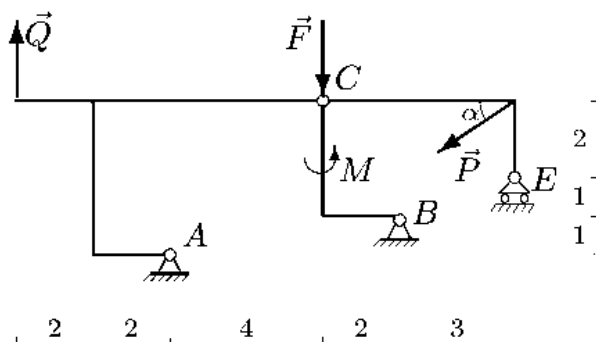
$$\begin{aligned}
 P &= 30 \text{ кН}, \\
 Q &= 60 \text{ кН}, \\
 F &= 100 \text{ кН}, \\
 M &= 275 \text{ кНм}, \\
 \alpha &= 60^\circ.
 \end{aligned}$$

9.



$$\begin{aligned}
 P &= 30 \text{ кН}, \\
 Q &= 70 \text{ кН}, \\
 F &= 90 \text{ кН}, \\
 M &= 50 \text{ кНм}, \\
 \alpha &= 60^\circ.
 \end{aligned}$$

10.



$$\begin{aligned}
 P &= 40 \text{ кН}, \\
 Q &= 60 \text{ кН}, \\
 F &= 90 \text{ кН}, \\
 M &= 100 \text{ кНм}, \\
 \alpha &= 30^\circ.
 \end{aligned}$$

## Ответы

	$X_A$	$Y_A$	$X_B$	$Y_B$	$X_E$	$Y_E$	$X_D$	$Y_D$
1	–	30.000	–74.785	–97.177	64.785	9.856	–	–
2	–103.529	–47.500	–	37.500	88.529	84.019	–	–
3	9.240	–44.620	8.080	74.620	–	10.000	–	–
4	–	100.000	–	–22.500	–15.000	–29.286	–	–114.195
5	–40.000	–	42.679	10.000	41.667	–	–151.667	–
6	–256.148	–	–	10.938	154.505	–36.918	256.643	–
7	–45.000	–10.000	–	25.000	45.000	–	55.981	–
8	–267.449	–	–1.276	4.575	–	–30.556	213.724	–
9	15.000	50.514	–	25.000	–	16.667	–	41.838
10	100.785	–19.215	–66.144	49.215	–	20.000	–	–

Ответы на типичные вопросы, возникающие при решении задачи

1. К какой части отнести нагрузку, приложенную к шарниру  $C$ ?

Эту нагрузку можно отнести к любой части.

2. Чему равна длина опорных стержней, например, горизонтальных  $A$ ,  $D$  и  $E$  в варианте 5?

Для решения задачи длины опорных стержней не нужны. Освобождаясь от опор, реакцию опоры прикладываем к телу, в месте крепления опоры, положение другого конца опорного стержня может быть неопределено. Для опорного стержня самое главное — это его направление. Реакцию опорного стержня направляем вдоль него.

3. В результате решения реакция подвижной опоры оказалась отрицательной. Означает ли это, что опора отрывается от поверхности скольжения?

Нет. Предполагается, что все связи двусторонние, т.е. предусмотрено некоторое ограничение (на рисунке не показано), не позволяющее подвижным опорам отрываться от поверхности. Более точное изображение подвижной опоры:



4. В условии задачи не указана точка приложения момента  $M$ .

Вектор сосредоточенного момента (пары) является свободным. Его можно прикладывать к любой точке тела, не переносите его только с одной части составной конструкции в другую.

## Глава 3

# Равновесие при наличии трения

### 3.1. Трение скольжения

*ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.* Конструкция состоит из двух шарнирно соединенных между собой тел. Одна из опор конструкции представляет собой одностороннюю связь и допускает проскальзывание с трением. Коэффициент трения, размеры конструкции и часть внешних нагрузок заданы. Найти пределы изменения одной из внешних нагрузок, действующей на конструкцию в условии равновесия.

#### ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Задаем направление возможного движения подвижной опоры, скользящей с трением. Прикладываем к этой опоре силу трения, направляя ее в сторону противоположную возможному движению. Предельное значение силы трения связываем с величиной нормальной реакции опоры  $N$  по формуле Кулона  $F_{\text{тр}} = Nf$ , где  $f$  — коэффициент трения, зависящий от свойств контактирующих материалов и заданный в условии задачи.

2. Решаем задачу о равновесии системы тел. Для этого разбиваем систему на две отдельные части, для которых составляем и решаем уравнения равновесия (§ 2.4, § 2.5). Из решения определяем предельное значение нагрузки для заданного направления скольжения опоры.

3. Меняем направление возможного движения системы и направление предельной силы трения. Предыдущий пункт плана выполняем заново и определяем другое предельное значение нагрузки. Два найденных значения нагрузки определяют ту область ее изменения, при которой конструкция находится в равновесии.

**ПРИМЕР.** Конструкция состоит из двух частей, шарнирно соединенных в точке  $C$  (рис. 52). Опора  $B$  представляет собой одностороннюю связь и допускает проскальзывание с коэффициентом трения  $f = 0.2$ , опора  $A$  — неподвижный шарнир. К конструкции приложена пара сил с моментом  $M = 10$  кНм, сила  $Q = 10$  кН под углом  $\alpha = 60^\circ$ .

Размеры даны в метрах. Найти пределы изменения нагрузки  $P$ , действующей под углом  $\beta = 30^\circ$  на конструкцию, в условии равновесия.

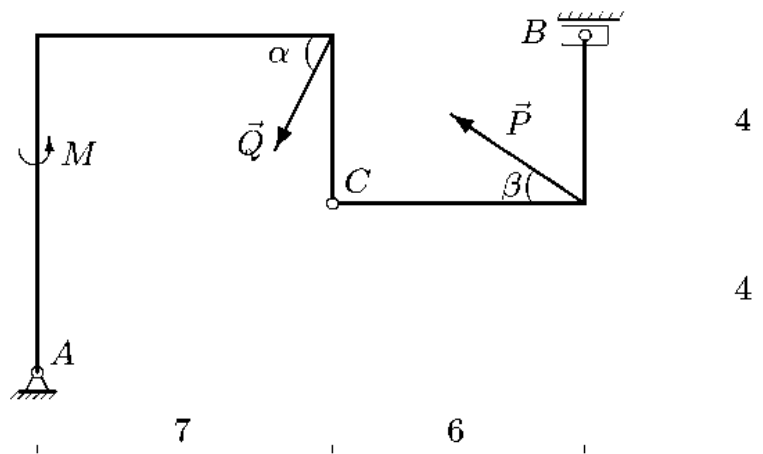


Рис. 52

### РЕШЕНИЕ

1. Задасм направление возможного движения подвижной опоры, скользящей с трением. Предполагая возможное движение ползуна  $B$  влево, силу трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$  направим направо (рис. 53). Предельное значение силы трения связываем с нормальной реакцией опоры  $N$  по формуле Кулона:

$$F_{\text{тр}} = Nf, \quad (1)$$

где  $f = 0.2$  — коэффициент трения.

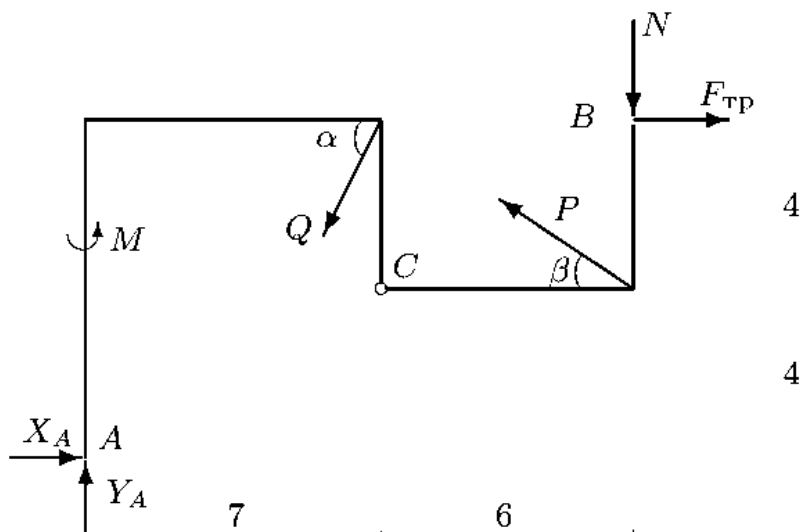


Рис. 53



2. Решаем задачу о равновесии системы тел. Для этого систему разбиваем по шарниру  $C$  на две отдельные части —  $AC$  и  $CB$ . Реакции шарнира  $C$  —  $X_C$ ,  $Y_C$  для левой и правой части направлены в противоположные стороны (рис. 54). К точке  $A$  прикладываем две составляющие реакции неподвижного шарнира  $X_A$ ,  $Y_A$ .

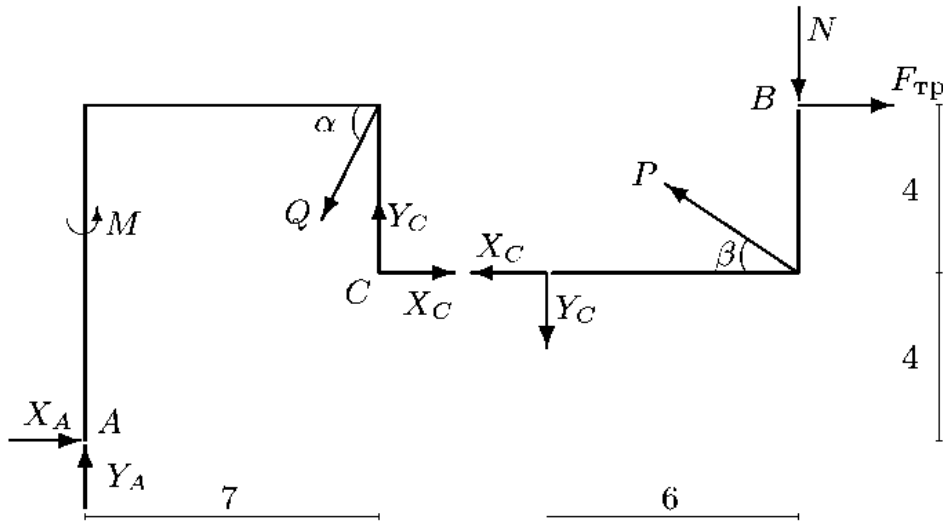


Рис. 54

Действие ползуна заменяем нормальной реакцией  $N$ , направленной вниз, так как ползун по условию задачи является односторонней связью, и силой трения  $F_{\text{тр}}$ . Из множества комбинаций уравнений равновесия (§ 2.4, с. 60) выберем уравнение моментов относительно точки  $A$  для всей системы в целом (рис. 53) и сумму моментов относительно  $C$  для правой части:

$$\sum M_A^{(\text{цел})} = -N \cdot 13 - F_{\text{тр}} \cdot 8 + M - Q \cdot 7 \cdot \sin \alpha + Q \cdot 8 \cdot \cos \alpha + P(4 \cos \beta + 13 \sin \beta) = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_C^{(\text{прав})} = -N \cdot 6 - F_{\text{тр}} \cdot 4 + P \cdot 6 \sin \beta = 0.$$

Уравнения (2) вместе с законом Кулона (1) образуют замкнутую систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными  $N$ ,  $F_{\text{тр}}$ ,  $P$ . Решение системы имеет вид

$$N = \frac{3P}{6 + 4f}, \quad P = \frac{3 + 2f}{0.978 + 0.746f}. \quad (3)$$

При  $f = 0.2$  получаем  $P_1 = 3.015$  кН. Эта нагрузка для движения влево является предельной.

3. Меняем направление возможного движения системы и направление предельной силы трения. Пусть ползун  $B$  движется вправо. Силу  $\vec{F}_{\text{тр}}$  направим в противоположную сторону. Очевидно, знак момента силы  $\vec{F}_{\text{тр}}$  в уравнениях (2) изменится на противоположный, следовательно, решение для нового направления движения будет отличаться от (3) только знаком при  $f$ . Формально подставляя в (3)  $f = -0.2$ , получим  $P_2 = 3.136$  кН. Значения  $P_1$  и  $P_2$  являются границами области равновесия.

Чтобы убедиться, что равновесие соответствует значениям нагрузки между этими числами, определим  $P$  при  $f = 0$ . Действительно, из (3) имеем  $P_1 < P = 3.066$  кН  $< P_2$ .

Из выражения (3) для  $N$  также следует, что при  $f = \pm 0.2$  нормальная реакция  $N > 0$ , поэтому отрыв ползуна  $B$  от поверхности невозможен. Таким образом, рама находится в равновесии при

$$P_{\min} \leq P \leq P_{\max},$$

где

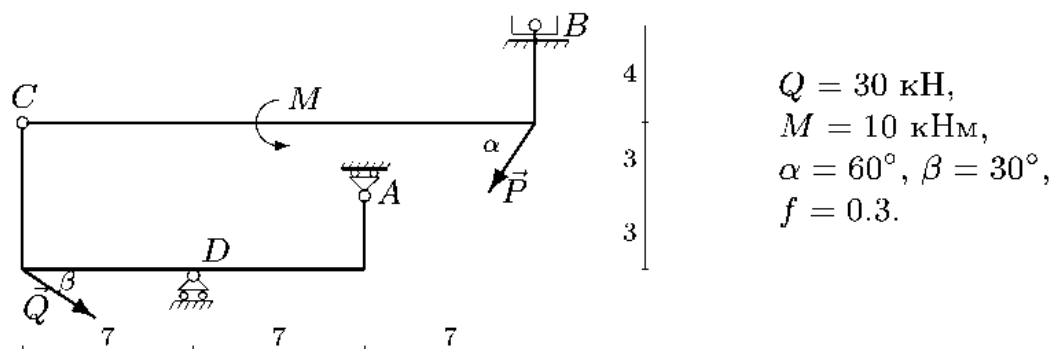
$$P_{\min} = 3.015 \text{ кН}, \quad P_{\max} = 3.136 \text{ кН}.$$

Этим нагрузкам соответствуют следующие значения нормальной реакции:  $N_{(\min)} = 1.330$  кН,  $N_{(\max)} = 1.806$  кН.

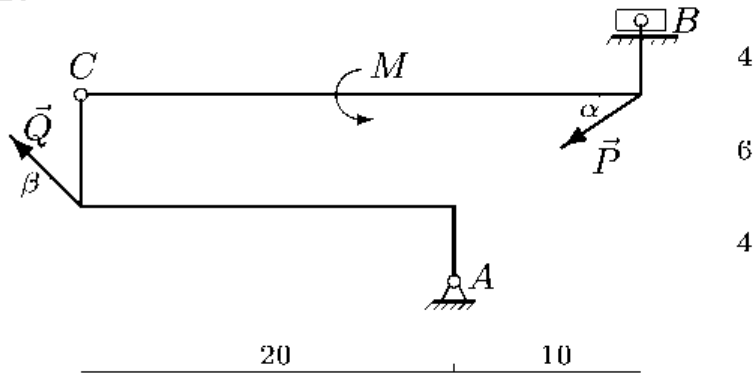
**ЗАМЕЧАНИЕ.** Неравенство  $N_{(\min)} < N_{(\max)}$  не является обязательным.

**УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.** Конструкция состоит из двух шарнирно соединенных между собой тел. Опора  $B$  представляет собой одностороннюю связь и допускает проскальзывание с коэффициентом трения  $f$ . Найти пределы изменения нагрузки  $P$ , действующей на конструкцию в условии равновесия (в кН). Размеры даны в метрах.

1.



2.



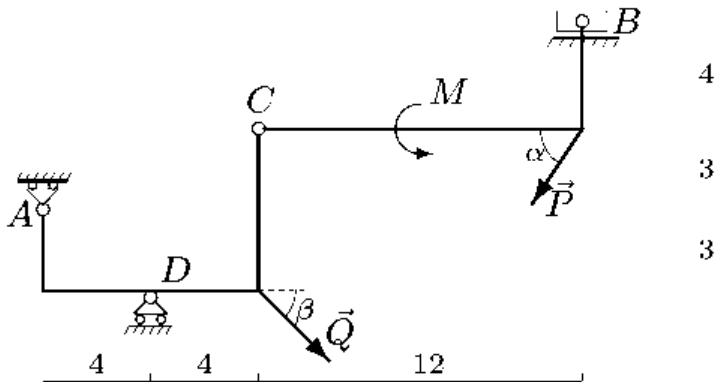
$$Q = 40 \text{ кН},$$

$$M = 20 \text{ кНм},$$

$$\alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ,$$

$$f = 0.1.$$

3.



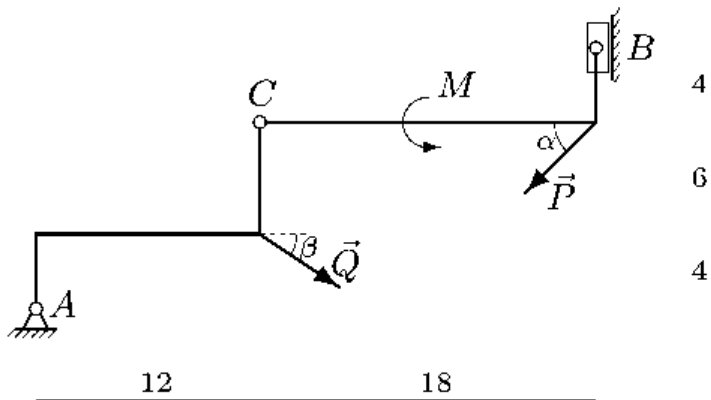
$$Q = 50 \text{ кН},$$

$$M = 30 \text{ кНм},$$

$$\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ,$$

$$f = 0.3.$$

4.



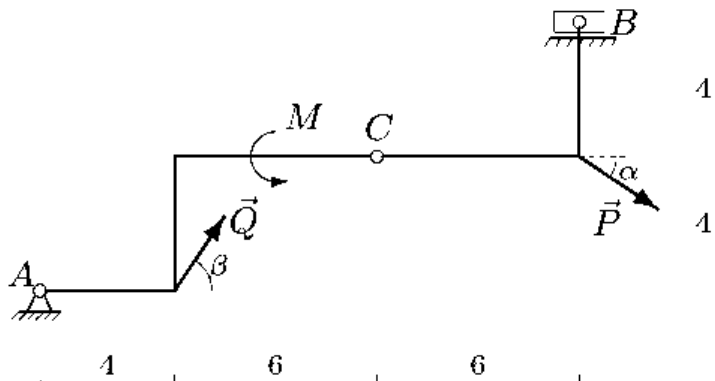
$$Q = 60 \text{ кН},$$

$$M = 40 \text{ кНм},$$

$$\alpha = 45^\circ, \beta = 30^\circ,$$

$$f = 0.1.$$

5.



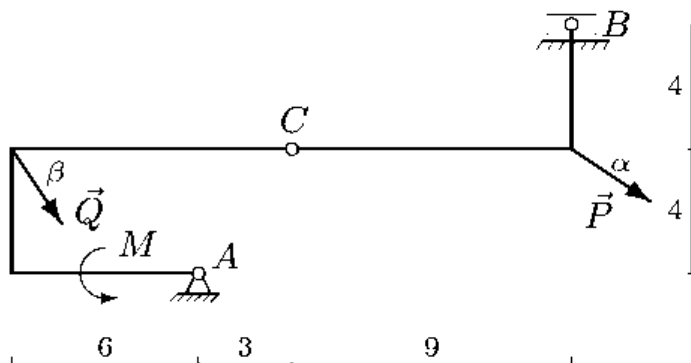
$$Q = 20 \text{ кН},$$

$$M = 70 \text{ кНм},$$

$$\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ,$$

$$f = 0.1.$$

6.



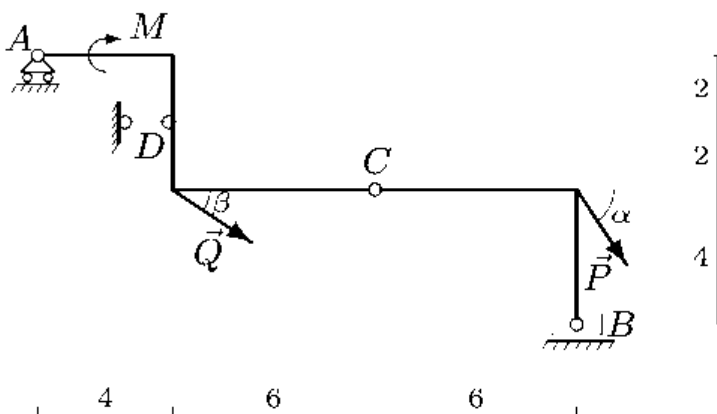
$$Q = 20 \text{ кН},$$

$$M = 70 \text{ кНм},$$

$$\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ,$$

$$f = 0.1.$$

7.



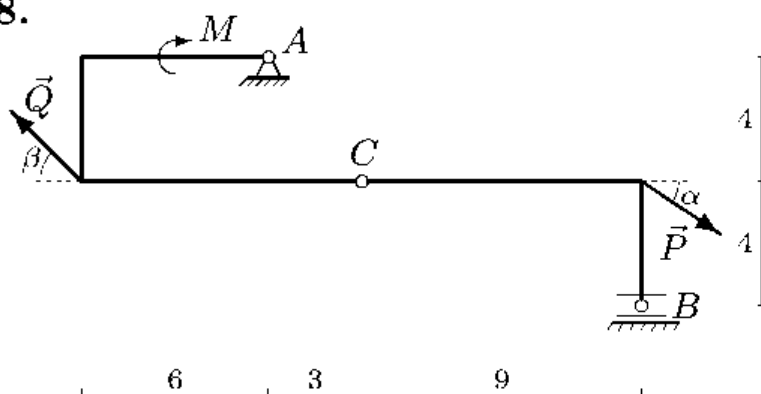
$$Q = 30 \text{ кН},$$

$$M = 80 \text{ кНм},$$

$$\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ,$$

$$f = 0.07.$$

8.



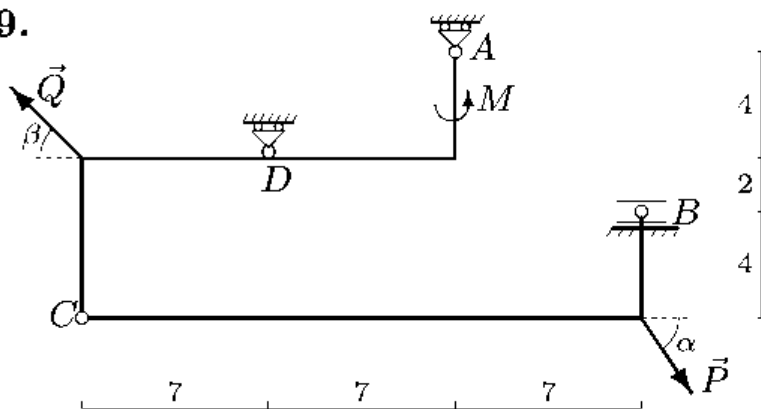
$$Q = 40 \text{ кН},$$

$$M = 90 \text{ кНм},$$

$$\alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ,$$

$$f = 0.1.$$

9.



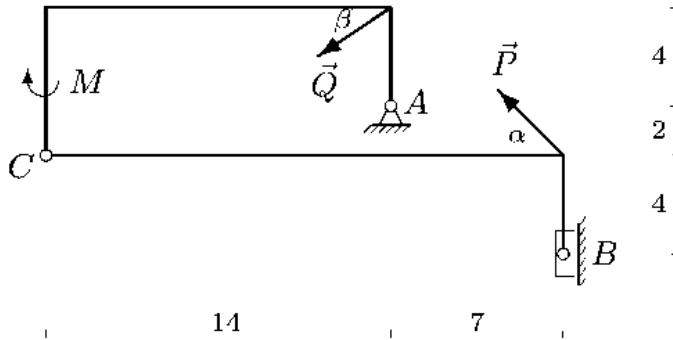
$$Q = 50 \text{ кН},$$

$$M = 100 \text{ кНм},$$

$$\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ,$$

$$f = 0.3.$$

10.



$$Q = 60 \text{ кН},$$

$$M = 120 \text{ кНм},$$

$$\alpha = 45^\circ, \beta = 30^\circ,$$

$$f = 0.1.$$

Ответы

	$P_{\min}$	$N_{(\min)}$	$P_{\max}$	$N_{(\max)}$
1	35.019	28.238	115.080	105.197
2	47.392	22.726	54.669	27.028
3	48.951	36.266	163.360	154.415
4	14.705	66.891	27.849	54.217
5	38.807	18.191	41.937	22.466
6	37.163	19.446	40.139	19.216
7	67.892	61.674	120.648	99.826
8	103.805	49.694	112.148	58.682
9	45.587	41.872	139.065	113.924
10	2.319	18.121	6.877	16.740

### 3.2. Трение качения

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** Система состоит из двух цилиндров, соединенных стержнем. Цилиндры могут кататься без проскальзывания, один цилиндр без сопротивления, другой — с трением качения. В каких пределах меняется внешний момент, приложенный к одному из цилиндров, в условии равновесия системы?

Трение качения происходит за счет деформации цилиндра и опорной поверхности в месте контакта. В результате реакция опоры смещается в сторону возможного движения на половину длины площадки контакта и создаст момент сопротивления. Плечо этого момента принимают за коэффициент трения качения. Таким образом,  $M_{\text{тр}} = N\delta$ , где  $N$  — реакция опоры,  $\delta$  — коэффициент трения качения, имеющий размерность длины. Так в рамках теоретической механики, где изучается твердое тело, для объяснения явления трения качения вводят гипотезу деформируемости. Считают, что область деформаций

в теле мала, а глубиной продавливания цилиндра в поверхность (или величиной смятия цилиндра) пренебрегают. Коэффициент трения качения зависит не только от свойств материала цилиндра и поверхности, но и от радиуса цилиндра.

#### ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Задаем направление возможного движения при достижении условия предельного равновесия. К катящемуся телу (цилиндру, колесу) прикладываем момент трения качения, направляя его в сторону, противоположную возможному движению. Не забываем про силу сцепления в точке контакта, направленную вдоль плоскости.

2. Решаем задачу о равновесии системы тел. Используем метод разбиения системы на отдельные тела. Внешние и внутренние связи заменяем их реакциями. Составляем и решаем уравнения равновесия. Оси координат для уравнения проекций для цилиндрических тел выбираем вдоль нормальной реакции, а уравнение моментов составляем относительно точки касания. Из решения системы уравнений равновесия определяем условие предельного равновесия.

3. Меняем направление возможного движения системы и направление момента трения качения. Решаем задачу заново, определяем второе условие предельного равновесия.

ПРИМЕР. Система состоит из двух цилиндров весом  $G_1 = 20$  Н, и  $G_2 = 30$  Н с одинаковыми радиусами  $R = 50$  см, соединенных однородным стержнем веса  $G_3 = 40$  Н. Цилиндры могут кататься без проскальзывания, цилиндр 1 — без сопротивления, а цилиндр 2 — с трением качения.

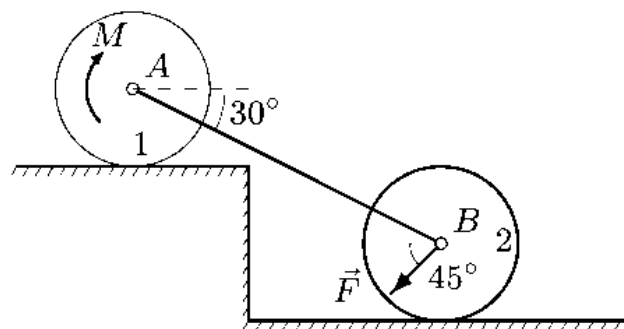


Рис. 55

Коэффициент трения качения  $\delta = 2$  мм. К цилиндру 1 приложена пара с моментом  $M$ . К оси цилиндра 2 приложена наклонная сила  $F = 10$  Н (рис. 55). В каких пределах меняется момент  $M$  в условии равновесия системы?

## РЕШЕНИЕ

1. Задаем направление возможного движения при достижении условия предельного равновесия. Пусть за счет достаточно большой, по сравнению с моментом  $M$ , силы  $F$  произойдет движение системы влево. Тогда момент трения качения, приложенный к цилиндру 2, будет направлен по часовой стрелке (рис. 57). Его величину находим по формуле  $M_{\text{тр}} = N_2 \cdot \delta$ .

2. Решаем задачу о равновесии системы двух цилиндров и стержня. Разбиваем систему на три тела (рис. 56, 57, 58). Внешние связи заменяем реакциями  $F_{\text{сц1}}$ ,  $N_1$ ,  $F_{\text{сц2}}$ ,  $N_2$ .

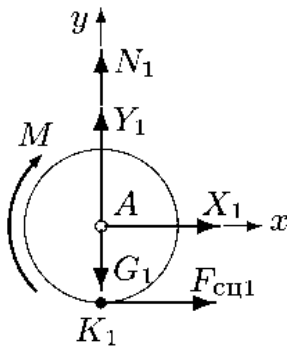


Рис. 56

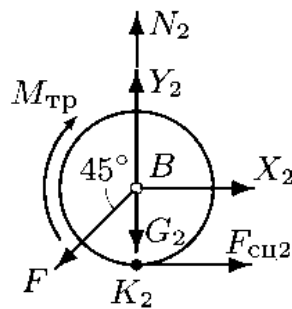


Рис. 57

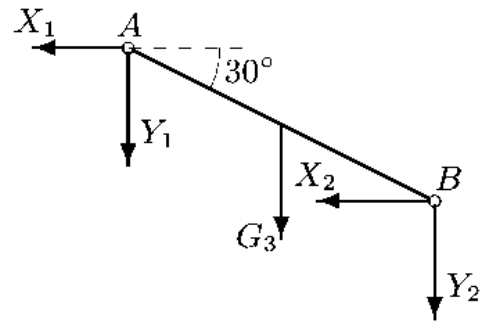


Рис. 58

Реакции  $F_{\text{сц1}}$  и  $F_{\text{сц2}}$  приложены к цилиндрам в точках их касания поверхностей, вызваны силами сцепления (трения) и обеспечивают вращение цилиндров. Реакции внутренних связей —  $X_1$ ,  $Y_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_2$ .

При составлении системы семи уравнений с неизвестными  $X_1$ ,  $Y_1$ ,  $N_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_2$ ,  $N_2$ ,  $M$  избегаем уравнения, в которые входят неизвестные реакции  $F_{\text{сц1}}$  и  $F_{\text{сц2}}$ .

Составляем уравнения равновесия для цилиндра 1 (рис. 56):

$$\begin{aligned} \sum Y_i^{(\text{цил1})} &= Y_1 + N_1 - G_1 = 0, \\ \sum M_{K_1}^{(\text{цил1})} &= -X_1 \cdot R - M = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнения равновесия цилиндра 2 (рис. 57) имеют вид

$$\begin{aligned} \sum Y_i^{(\text{цил2})} &= Y_2 + N_2 - G_2 - F \sin 45^\circ = 0, \\ \sum M_{K_2}^{(\text{цил2})} &= -X_2 \cdot R - M_{\text{тр}} + F \cos 45^\circ R = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения равновесия стержня АВ (рис. 58) имеют вид

$$\begin{aligned} \sum X_i^{(\text{стерж})} &= -X_1 - X_2 = 0, \\ \sum Y_i^{(\text{стерж})} &= -Y_1 - Y_2 - G_3 = 0, \\ \sum M_A^{(\text{стерж})} &= -X_2 \cdot AB \sin 30^\circ - Y_2 \cdot AB \cos 30^\circ - \\ &\quad - G_3(AB/2) \cos 30^\circ = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Из решения системы уравнений (1–3) определяем

$$M = \frac{\sqrt{3}R FR\sqrt{2} - \delta(G_3 + 2G_2 + F\sqrt{2})}{2R\sqrt{3} + \delta}. \quad (4)$$

Радиус и коэффициент трения качения переводим в метры  $R = 0.5$  м,  $\delta = 0.002$  м. Получаем  $M = 3.414$  Нм. Вычисляем нормальные реакции опор:

$$N_1 = 36.058 \text{ Н}, \quad N_2 = 61.013 \text{ Н}.$$

Убеждаемся, что  $N_1 > 0$  и  $N_2 > 0$ , что соответствует наличию опоры. Если реакция опоры равна нулю, то это означает отрыв тела от поверхности, отрицательной реакции опоры  $N \leq 0$  в задаче с односторонней связью не существует (физически не реализуется).

3. Меняем направление возможного движения системы. Пусть за счет действия момента  $M$  произойдет движение системы вправо. Момент трения качения направим против часовой стрелки (рис. 59). Составляя уравнения равновесия для новой системы сил, заметим,

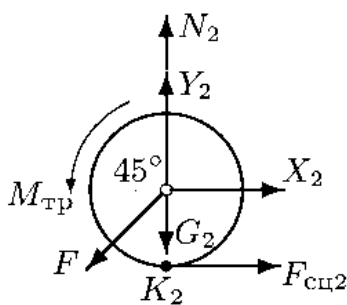


Рис. 59

что отличие от прежней системы проявляется только в знаке  $M_{\text{тр}}$  во втором уравнении равновесия (2). Так как  $M_{\text{тр}} = N_2 \cdot \delta$ , то новое решение для  $M$  будет формально отличаться от (4) только знаком у коэффициента трения  $\delta$ . Поэтому, не решая (и даже не составляя) системы уравнений равновесия типа (1–3) для нового направления

возможного движения, записываем ответ, изменяя знаки у  $\delta$  в (4):

$$M = \frac{\sqrt{3}R FR\sqrt{2} + \delta(G_3 + 2G_2 + F\sqrt{2})}{2R\sqrt{3} - \delta} = 3.658 \text{ Нм}. \quad (5)$$

Точно так же находим нормальные реакции опор:  $N_1 = 35.776$  Н,  $N_2 = 61.295$  Н. При равновесии системы момент, приложенный к

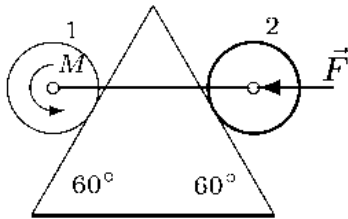


цилиндру 1, изменяется в пределах (в Нм) \*)

$$3.414 \leq M \leq 3.658.$$

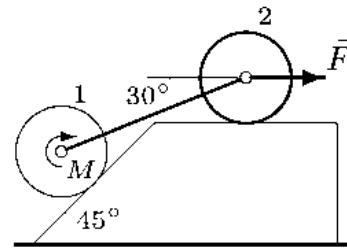
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Система состоит из двух цилиндров весом  $G_1$  и  $G_2$  с одинаковыми радиусами  $R$ , соединенных однородным стержнем весом  $G_3$ . Цилиндры могут кататься без проскальзывания, цилиндр 1 без сопротивления, а цилиндр 2 с трением качения ( $\delta$ ). В каких пределах меняется внешний момент  $M$  при условии равновесия системы?

1.



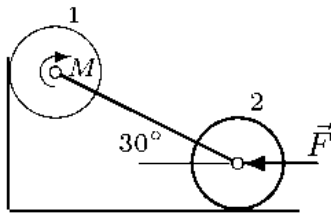
$$G_1 = 10 \text{ Н}, G_2 = 23 \text{ Н}, G_3 = 30 \text{ Н}, \\ F = 5 \text{ Н}, R = 35 \text{ см}, \delta = 3 \text{ мм}.$$

2.



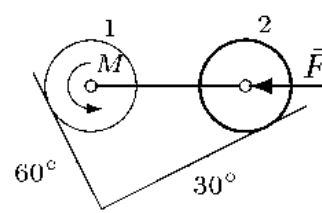
$$G_1 = 22 \text{ Н}, G_2 = 23 \text{ Н}, G_3 = 50 \text{ Н}, \\ F = 10 \text{ Н}, R = 50 \text{ см}, \delta = 4 \text{ мм}.$$

3.



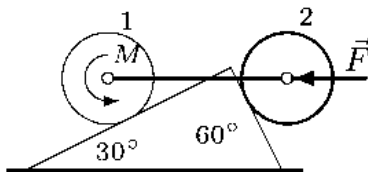
$$G_1 = 5 \text{ Н}, G_2 = 25 \text{ Н}, G_3 = 10 \text{ Н}, \\ F = 30 \text{ Н}, R = 65 \text{ см}, \delta = 5 \text{ мм}.$$

4.



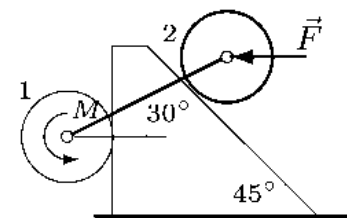
$$G_1 = 24 \text{ Н}, G_2 = 27 \text{ Н}, G_3 = 20 \text{ Н}, \\ F = 20 \text{ Н}, R = 50 \text{ см}, \delta = 3 \text{ мм}.$$

5.



$$G_1 = 25 \text{ Н}, G_2 = 29 \text{ Н}, G_3 = 30 \text{ Н}, \\ F = 25 \text{ Н}, R = 35 \text{ см}, \delta = 1 \text{ мм}.$$

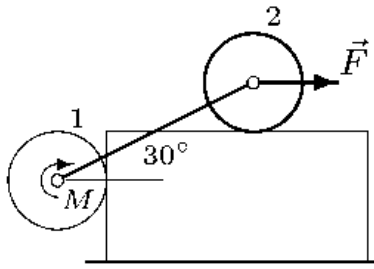
6.



$$G_1 = 21 \text{ Н}, G_2 = 26 \text{ Н}, G_3 = 40 \text{ Н}, \\ F = 5 \text{ Н}, R = 25 \text{ см}, \delta = 2 \text{ мм}.$$

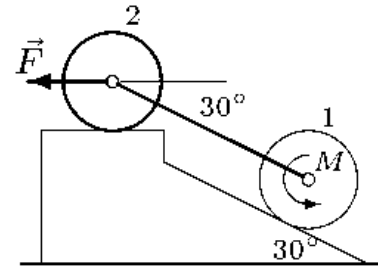
\*) В задачах, где допускается проскальзывание, необходимо находить также силы  $F_{\text{сц1}}$  и  $F_{\text{сц2}}$  и проверять условие проскальзывания  $F_{\text{сц1}} = F_{\text{тр1}} < fN_1$ ,  $F_{\text{сц2}} = F_{\text{тр2}} < fN_2$ , где  $f$  — коэффициент трения скольжения.

7.



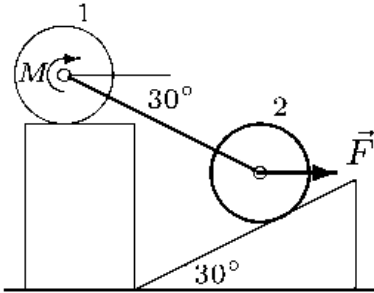
$$G_1 = 22 \text{ H}, G_2 = 24 \text{ H}, G_3 = 50 \text{ H}, \\ F = 10 \text{ H}, R = 40 \text{ см}, \delta = 3 \text{ мм}.$$

8.



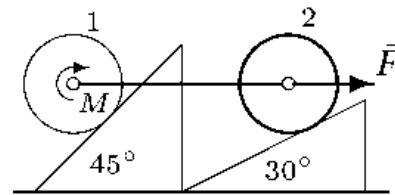
$$G_1 = 23 \text{ H}, G_2 = 24 \text{ H}, G_3 = 30 \text{ H}, \\ F = 15 \text{ H}, R = 55 \text{ см}, \delta = 4 \text{ мм}.$$

9.



$$G_1 = 24 \text{ H}, G_2 = 26 \text{ H}, G_3 = 50 \text{ H}, \\ F = 20 \text{ H}, R = 70 \text{ см}, \delta = 5 \text{ мм}.$$

10.



$$G_1 = 25 \text{ H}, G_2 = 28 \text{ H}, G_3 = 10 \text{ H}, \\ F = 25 \text{ H}, R = 35 \text{ см}, \delta = 1 \text{ мм}.$$

Ответы

	Движение цилиндра 2 по часовой стрелке			Движение цилиндра 2 против часовой стрелки		
	$N_1$	$N_2$	$M$	$N_1$	$N_2$	$M$
	Н		Нм	Н		Нм
1	64.058	74.888	2.841	66.315	77.145	3.297
2	36.095	53.526	11.279	36.352	54.023	10.799
3	30.366	47.532	4.896	29.638	47.111	4.622
4	53.078	42.872	4.308	52.565	42.576	4.456
5	59.996	87.567	8.371	60.499	88.438	8.675
6	93.257	140.078	3.211	100.988	148.699	4.326
7	9.591	54.537	16.585	10.413	55.012	16.395
8	32.909	47.861	0.703	32.909	47.461	1.143
9	40.326	69.191	10.516	41.303	67.500	9.333
10	25.330	38.168	5.984	25.507	38.042	5.922

## Глава 4

# ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

### 4.1. Пространственная ферма

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** *Определить усилия в стержнях пространственной фермы, нагруженной в одном узле силами.*

#### ПЛАН РЕШЕНИЯ

Задача является естественным обобщением задачи § 1.1, с. 14, в которой методом вырезания узлов определялись усилия в простейшей плоской ферме. Этот же метод применим и здесь, единственное отличие — вместо двух уравнений равновесия узла в проекциях на оси в пространственной задаче будет три уравнения.

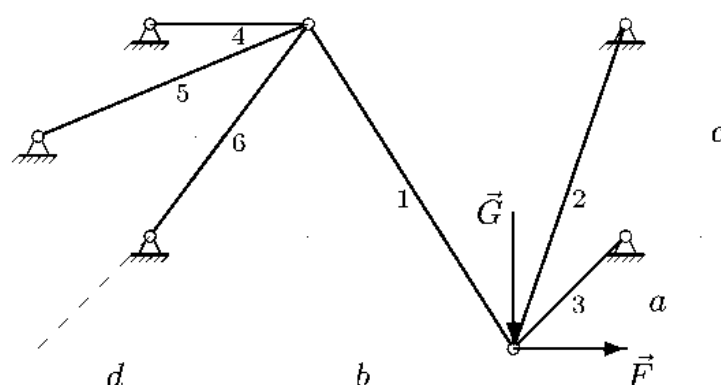


Рис. 60

1. Узлы фермы находятся в равновесии. Вырезаем узлы, заменяя действие стержней их реакциями. Реакцию незагруженного стержня направляем вдоль его оси. Используя правило знаков, согласно которому усилие растянутого стержня считается положительным, реакцию каждого стержня направляем из шарнира по направлению внешней нормали сечения стержня. Расчет начинаем с узла, к которому подходят три стержня с неизвестными усилиями.

2. Для каждого из шарниров составляем по три уравнения равновесия в проекциях. Решаем полученную систему.

**ПРИМЕР.** Найти усилия в стержнях 1–6 пространственной фермы, нагруженной в одном узле вертикальной силой  $G = 100$  кН и горизонтальной  $F = 40$  кН. Даны размеры  $a = 12$  м,  $b = 16$  м,  $c = 10$  м,  $d = 5$  м (рис. 60).

**РЕШЕНИЕ**

1. Узлы  $A$  и  $B$  находятся в равновесии. Вырежем эти узлы, заменяя действие стержней их реакциями, направленными из узла к стержню (рис. 61).

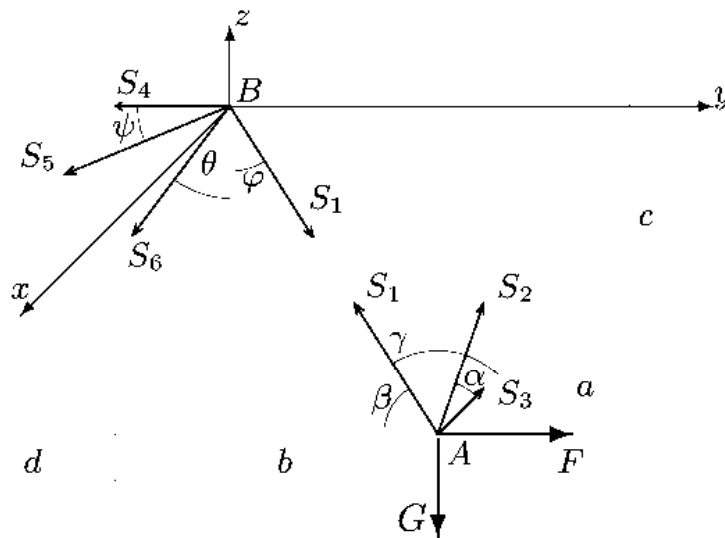


Рис. 61

Стержень 1 является общим для обоих узлов, поэтому на рисунке есть два противоположно направленных вектора с усилием  $S_1$ . Один вектор приложен к узлу  $A$ , другой — к узлу  $B$ .

2. Расчет начинаем с узла  $A$ , к которому подходят три стержня с неизвестными усилиями. Составляем уравнения равновесия узла в проекциях на три оси координат:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= -S_1 \cos \gamma - S_2 \cos \alpha - S_3 = 0, \\ \sum Y_i &= -S_1 \cos \beta + F = 0, \\ \sum Z_i &= S_1 \cos \varphi + S_2 \sin \alpha - G = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Система уравнений (1) содержит три неизвестных усилия  $S_1, S_2, S_3$ .

Вычисляем тригонометрические функции, входящие в уравнения,

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 0.640, & \cos \alpha &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 0.768, \\ \cos \beta &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0.716, & \cos \gamma &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0.537, \\ \cos \varphi &= \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0.447.\end{aligned}$$

Решение системы (1):

$$S_1 = 55.902 \text{ кН}, \quad S_2 = 117.154 \text{ кН}, \quad S_3 = -120 \text{ кН}.$$

Знаки найденных усилий показывают, что стержни 1 и 2 растянуты, а стержень 3 сжат. Составляем уравнения равновесия узла  $B$ :

$$\begin{aligned}\sum X_i &= S_1 \cos \gamma + S_5 \sin \psi = 0, \\ \sum Y_i &= S_1 \cos \beta - S_4 - S_5 \cos \psi - S_6 \sin \theta = 0, \\ \sum Z_i &= -S_1 \cos \varphi - S_6 \cos \theta = 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Уравнения (2) содержат три неизвестных усилия  $S_4$ ,  $S_5$ ,  $S_6$ , усилие  $S_1$  найдено ранее из условия равновесия узла  $A$ . Вычисляем необходимые тригонометрические функции:

$$\begin{aligned}\sin \psi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + d^2}} = 0.923, & \cos \psi &= \frac{d}{\sqrt{a^2 + d^2}} = 0.385, \\ \sin \theta &= \frac{d}{\sqrt{d^2 + c^2}} = 0.447, & \cos \theta &= \frac{c}{\sqrt{d^2 + c^2}} = 0.894.\end{aligned}$$

Решение системы (2):

$$S_4 = 65 \text{ кН}, \quad S_5 = -32.5 \text{ кН}, \quad S_6 = -27.951 \text{ кН}.$$

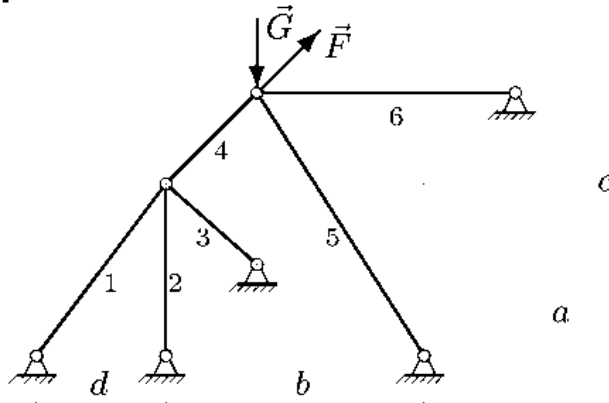
Знаки найденных усилий показывают, что стержни 5 и 6 сжаты, а стержень 4 растянут.

Результаты расчета (в кН) заносим в таблицу:

$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$
55.902	117.154	-120.000	65.000	-32.500	-27.951

**УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.** Найти усилия в стержнях 1–6 пространственной фермы, нагруженной в одном узле вертикальной силой  $\vec{G}$  и горизонтальной  $\vec{F}$ . Ответ выразить в кН.

1.

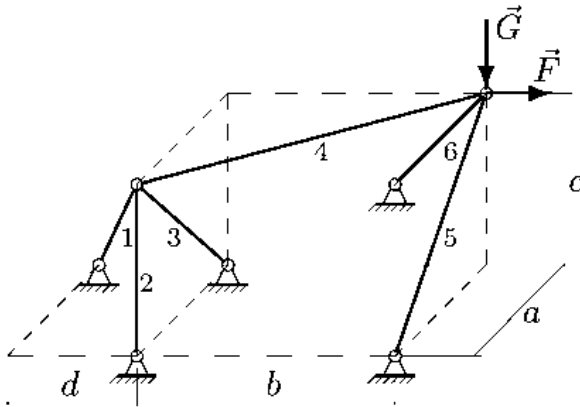


$$a = 2 \text{ м}, b = 3 \text{ м},$$

$$c = 4 \text{ м}, d = 3 \text{ м},$$

$$G = 2 \text{ кН}, F = 1 \text{ кН}.$$

2.

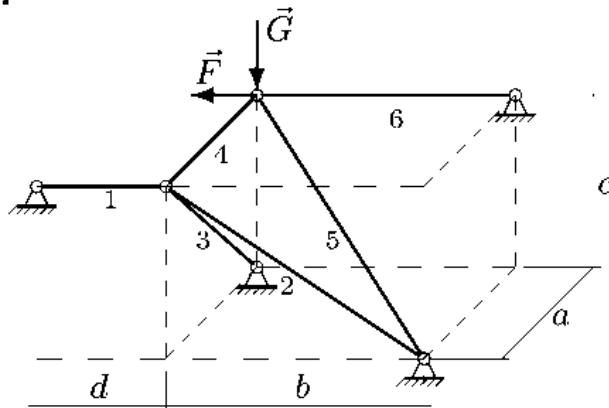


$$a = 4 \text{ м}, b = 6 \text{ м},$$

$$c = 5 \text{ м}, d = 4 \text{ м},$$

$$G = 7 \text{ кН}, F = 6 \text{ кН}.$$

3.

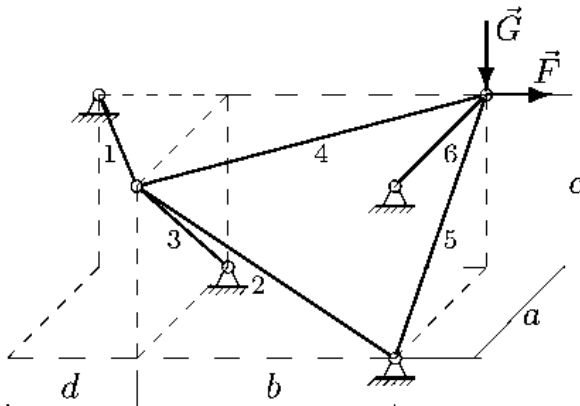


$$a = 5 \text{ м}, b = 4 \text{ м},$$

$$c = 3 \text{ м}, d = 2 \text{ м},$$

$$G = 4 \text{ кН}, F = 2 \text{ кН}.$$

4.

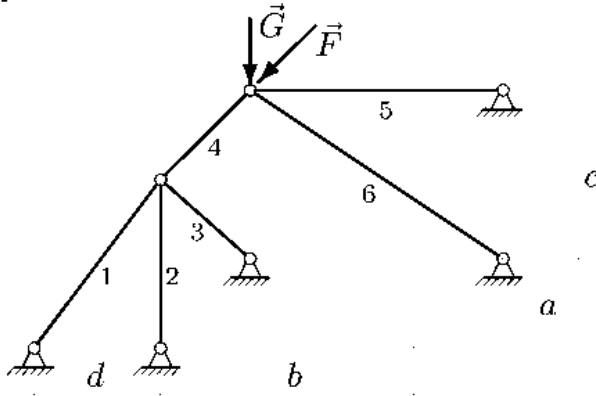


$$a = 7 \text{ м}, b = 6 \text{ м},$$

$$c = 5 \text{ м}, d = 4 \text{ м},$$

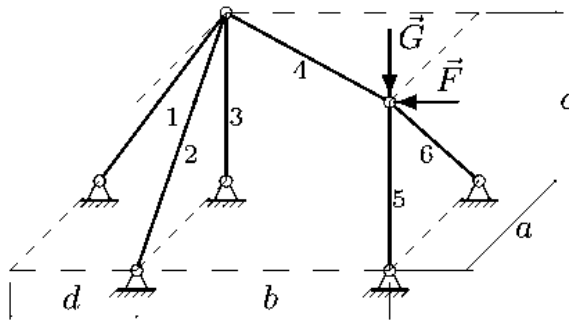
$$G = 6 \text{ кН}, F = 4 \text{ кН}.$$

5.



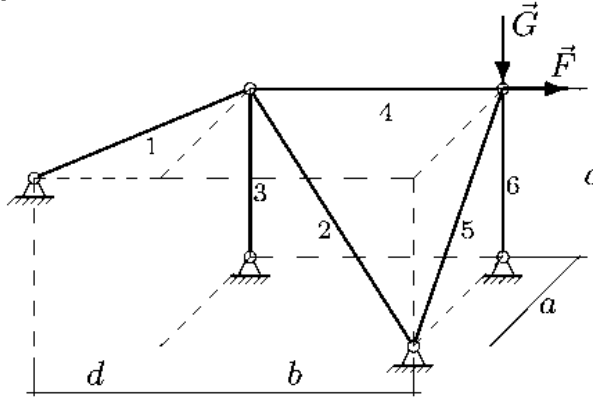
$a = 2 \text{ м}, b = 3 \text{ м},$   
 $c = 4 \text{ м}, d = 3 \text{ м},$   
 $G = 8 \text{ кН}, F = 5 \text{ кН}.$

6.



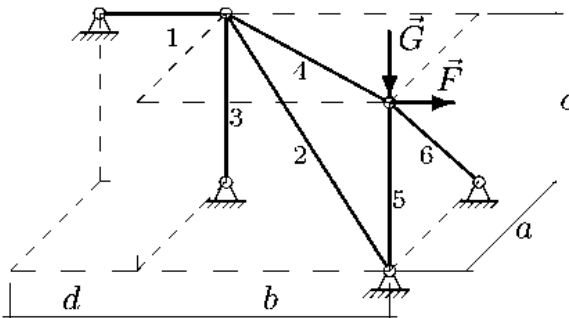
$a = 4 \text{ м}, b = 6 \text{ м},$   
 $c = 5 \text{ м}, d = 3 \text{ м},$   
 $G = 6 \text{ кН}, F = 3 \text{ кН}.$

7.



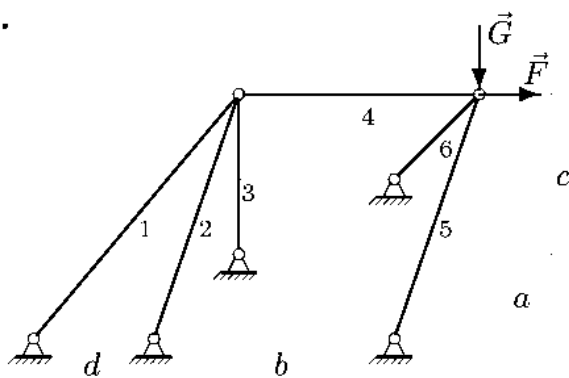
$a = 5 \text{ м}, b = 4 \text{ м},$   
 $c = 3 \text{ м}, d = 1 \text{ м},$   
 $G = 8 \text{ кН}, F = 4 \text{ кН}.$

8.



$a = 7 \text{ м}, b = 6 \text{ м},$   
 $c = 5 \text{ м}, d = 3 \text{ м},$   
 $G = 7 \text{ кН}, F = 3 \text{ кН}.$

9.

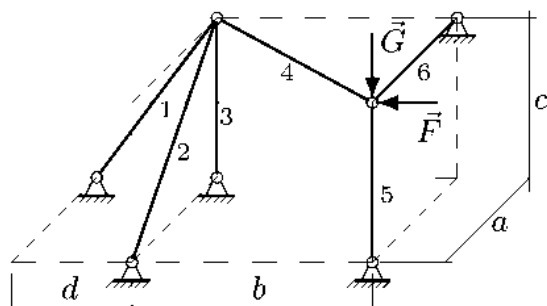


$$a = 2 \text{ м}, b = 3 \text{ м},$$

$$c = 4 \text{ м}, d = 2 \text{ м},$$

$$G = 9 \text{ кН}, F = 8 \text{ кН}.$$

10.



$$a = 4 \text{ м}, b = 6 \text{ м},$$

$$c = 5 \text{ м}, d = 3 \text{ м},$$

$$G = 8 \text{ кН}, F = 7 \text{ кН}.$$

Ответы

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$
1	0.000	4.000	-4.472	2.000	-2.693	1.500
2	11.325	5.000	-16.008	7.211	-8.964	1.600
3	5.333	6.667	-7.775	6.667	-9.428	7.333
4	-32.249	-26.034	28.674	6.146	-10.323	3.733
5	0.000	-10.000	11.180	-5.000	6.000	-10.000
6	-5.831	3.202	2.500	-3.606	-8.500	3.202
7	4.079	-5.657	2.400	4.000	0.000	-8.000
8	0.000	-5.244	2.500	4.610	-4.500	-4.301
9	19.596	-17.889	0.000	8.000	-10.062	4.500
10	-13.606	7.470	5.833	-8.413	-8.000	4.667

## 4.2. Момент силы относительно оси

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** В декартовой системе координат задан вектор силы. Найти моменты силы относительно осей координат.

**ПЛАН РЕШЕНИЯ**

1. Определяем радиус-вектор  $\vec{r}_0$  точки приложения силы.



2. Находим момент силы относительно начала координат как векторное произведение  $\vec{M}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{F}$ . Моменты силы относительно осей  $x, y, z$  являются компонентами  $M_{0x}, M_{0y}, M_{0z}$  вектора  $\vec{M}_0$  \*)).

ПРИМЕР. В декартовой системе координат задан вектор силы  $\vec{F}$  (рис. 62);  $F = 20$  Н,  $a = 6$  м,  $b = 11$  м,  $c = 8$  м. Найти моменты силы относительно осей координат  $x, y, z$ .

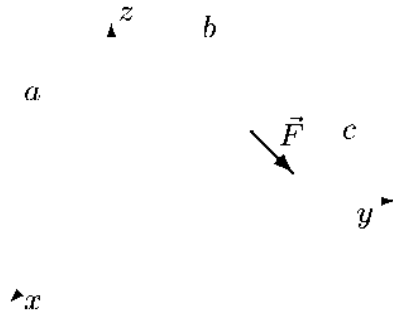


Рис. 62

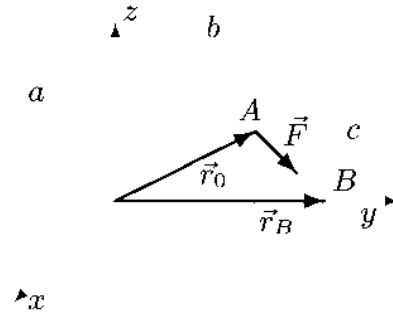


Рис. 63

### РЕШЕНИЕ

1. Определяем радиус-вектор  $\vec{r}_0$  точки приложения силы относительно начала координат (рис. 63):  $\vec{r}_0 = \{a, b, c\}$ .

2. Находим момент силы относительно начала координат:

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix},$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — орты осей  $x, y, z$ . Так как в явном виде компоненты вектора  $\vec{F}$  не заданы, а известна длина вектора и линия  $AB$  его действия, представляем  $\vec{F}$  в виде  $\vec{F} = F\vec{AB}/|AB|$ . Вектор  $\vec{AB}$  вычисляем как разность  $\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_0 = \{-a, 0, -c\}$ . Длина вектора  $|AB| = \sqrt{a^2 + c^2}$ . В результате получаем

$$\vec{F} = \frac{F}{\sqrt{a^2 + c^2}} \{-a, 0, -c\}.$$

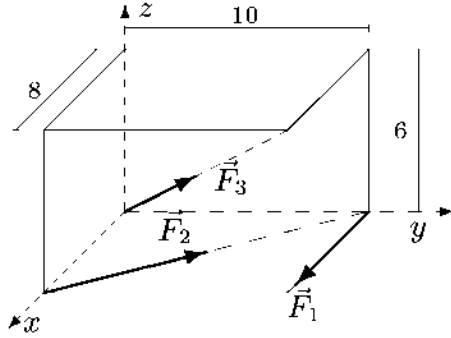
Находим компоненты  $M_{0x}, M_{0y}, M_{0z}$  вектора  $\vec{M}_0$ :

$$\begin{aligned} M_{0x} &= bF_z - cF_y = -cbF/\sqrt{a^2 + c^2} = -176 \text{ Нм}, \\ M_{0y} &= cF_x - aF_z = (-caF + acF)/\sqrt{a^2 + c^2} = 0, \\ M_{0z} &= aF_y - bF_x = abF/\sqrt{a^2 + c^2} = 132 \text{ Нм}. \end{aligned}$$

\*) Модуль вектора момента силы  $\vec{F}$  относительно начала координат:  $M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2}$ .

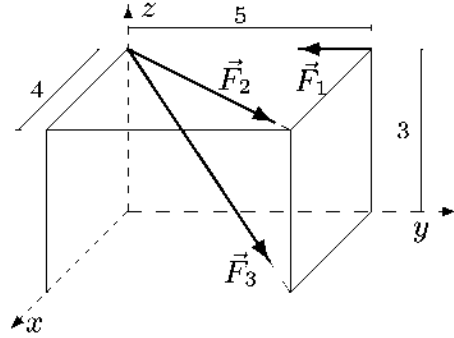
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. В декартовой системе координат даны три силы, приложенные к вершинам параллелепипеда. Найти моменты этих сил относительно осей координат (в Нм). Размеры на рисунках в метрах, силы — в Н.

1.



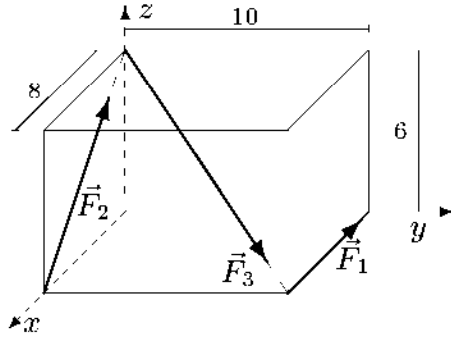
$$F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 4.$$

2.



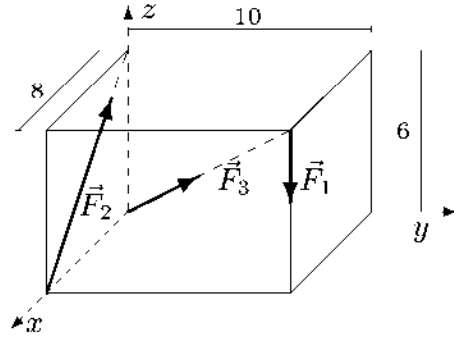
$$F_1 = 2, F_2 = 2, F_3 = 5.$$

3.



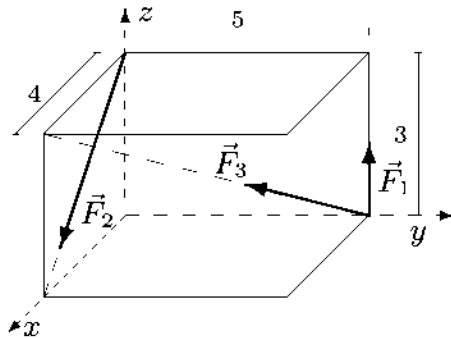
$$F_1 = 3, F_2 = 4, F_3 = 6.$$

4.



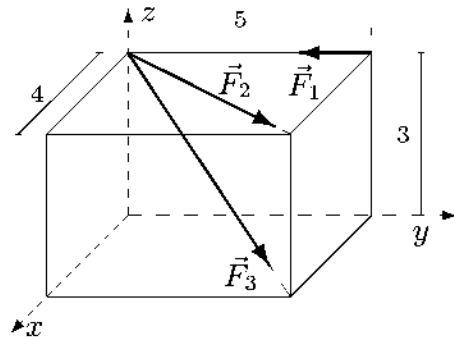
$$F_1 = 4, F_2 = 5, F_3 = 6.$$

5.

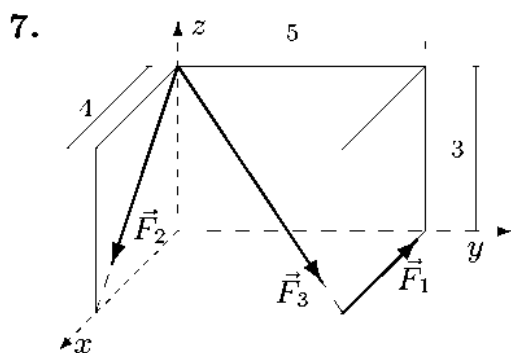


$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2.$$

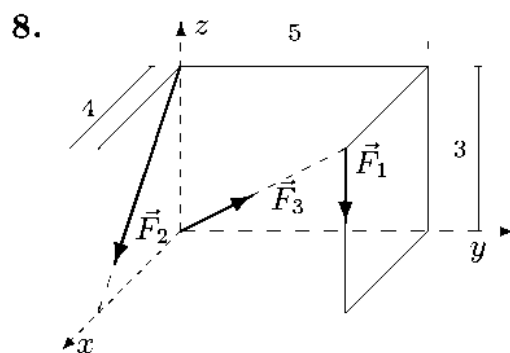
6.



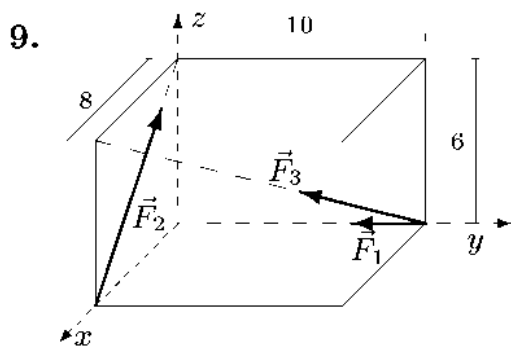
$$F_1 = 2, F_2 = 2, F_3 = 5.$$



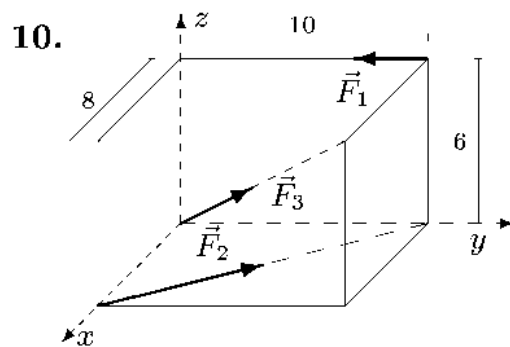
$$F_1 = 3, F_2 = 3, F_3 = 5.$$



$$F_1 = 4, F_2 = 4, F_3 = 5.$$



$$F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 5.$$



$$F_1 = 2, F_2 = 3, F_3 = 6.$$

Ответы

	$M_{1x}$	$M_{1y}$	$M_{1z}$	$M_{2x}$	$M_{2y}$	$M_{2z}$	$M_{3x}$	$M_{3y}$	$M_{3z}$
1	0.000	0.000	-10.000	0.000	0.000	12.494	0.000	0.000	0.000
2	6.000	0.000	0.000	-4.685	3.748	0.000	-10.607	8.485	0.000
3	0.000	0.000	30.000	0.000	-19.200	0.000	-25.456	20.365	0.000
4	-40.000	32.000	0.000	0.000	-24.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	5.000	0.000	0.000	0.000	2.400	0.000	4.243	0.000	-5.657
6	6.000	0.000	0.000	-4.685	3.748	0.000	-10.607	8.485	0.000
7	0.000	0.000	15.000	0.000	7.200	0.000	-10.607	8.485	0.000
8	-20.000	16.000	0.000	0.000	9.600	0.000	0.000	0.000	0.000
9	0.000	0.000	0.000	0.000	-9.600	0.000	21.213	0.000	-28.284
10	12.000	0.000	0.000	0.000	0.000	18.741	0.000	0.000	0.000

### 4.3. Равновесие вала

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Горизонтальный вал может вращаться в цилиндрических шарнирах. К одному шкиву вала приложено нормальное давление и касательная сила сопротивления, пропорциональная давлению. На шкивы вала действуют известные нагрузки. Найти силу давления и реакции шарниров при условии равновесия вала.

### ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Действие каждой из опор заменяем двумя взаимно перпендикулярными реакциями, лежащими в плоскости, перпендикулярной валу.

2. Для определения силы давления составляем уравнение моментов относительно оси вала. Момент силы натяжения ремня, нити и т.п. (наклонной или нет) вычисляем как произведение величины силы на соответствующий радиус со знаком, соответствующим направлению вращения вокруг вала. Уравнение содержит одну неизвестную, которую легко найти.

3. Определяем вертикальные реакции опор вала. Для этого составляем два уравнения моментов относительно осей, совпадающих с линиями действия горизонтальных реакций шарниров. Решаем эти уравнения.

4. Проверяем найденные реакции, составляя уравнение равновесия в проекции на вертикаль.

5. Определяем горизонтальные реакции опор вала. Для этого составляем два уравнения моментов относительно осей, совпадающих с линиями действия вертикальных реакций шарниров.

6. Проверяем горизонтальные реакции, составляя уравнение равновесия в проекции на ось вдоль линии действия горизонтальных реакций.

**ПРИМЕР.** Горизонтальный вал весом  $G = 15$  Н может вращаться в цилиндрических шарнирах  $A$  и  $B$  (рис. 64). К шкиву 1 приложено нормальное давление  $N$  и касательная сила сопротивления  $F = 0.1N$ .

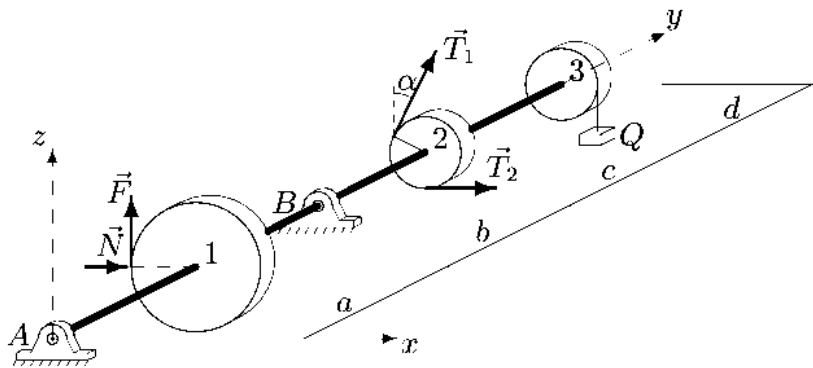


Рис. 64

На шкив 2 действуют силы натяжения ремней  $T_1 = 30$  Н,  $T_2 = 57$  Н. Груз  $Q = 18$  Н висит на нити, навитой на шкив 3. Определить силу давления  $N$  и реакции шарниров в условии равновесия вала. Учесть веса шкивов:  $P_1 = 35$  Н,  $P_2 = 10$  Н,  $P_3 = 15$  Н. Все нагрузки

действуют в вертикальных плоскостях. Известны радиусы шкивов,  $R_1 = 26$  см,  $R_2 = 10$  см,  $R_3 = 11$  см и расстояния между характерными точками вала:  $a = 22$  см,  $b = 25$  см,  $c = 26$  см,  $d = 26$  см. Общая длина вала  $L = a + b + c + d$ ;  $\alpha = 30^\circ$ .

РЕШЕНИЕ

1. Действие цилиндрических опор  $A$  и  $B$  заменим реакциями  $Z_A$ ,  $X_A$  и  $Z_B$ ,  $X_B$  (рис. 65). Вес вала  $\vec{G}$  приложим в центре. Вес груза изобразим вектором  $\vec{Q}$ .

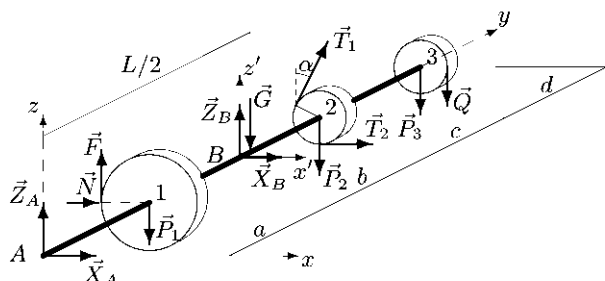


Рис. 65

2. Для определения силы давления составляем уравнение моментов относительно оси вала:

$$\sum M_y = FR_1 + (T_1 - T_2)R_2 + QR_3 = 0.$$

Уравнение содержит одну неизвестную  $F$ . Линии действия остальных сил пересекают ось  $y$  и их моменты относительно оси вала равны нулю.

Из полученного уравнения находим

$$F = -\frac{(T_1 - T_2)R_2 + QR_3}{R_1} = 2.7692 \text{ Н.}$$

По условию  $N = F/0.1 = 27.692$  Н.

3. Определяем вертикальные реакции шарнирных опор вала. Для этого составляем два уравнения моментов относительно горизонтальных осей, проходящих через шарниры  $A$  и  $B$ . Рассматриваем для удобства проекцию всех сил на плоскость  $zy$  (рис. 66). Таким образом вычисление моментов относительно осей сводим к плоской задаче вычисления моментов относительно точек  $A$  и  $B$ .

Знаки моментов сил определяем как в задачах плоской статики: момент силы, вращающей тело вокруг моментной точки против часо-

вой стрелки считается положительным, по часовой стрелке — отрицательным. Моменты сил, перпендикулярных плоскости  $zy$  (и поэтому не изображенных на рис. 66), относительно любой ее точки равны нулю.

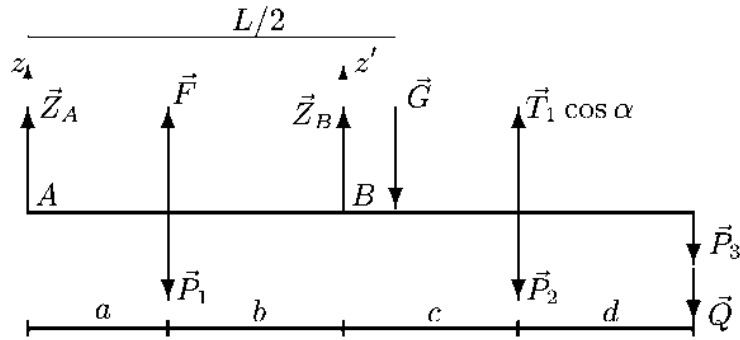


Рис. 66

Решая уравнения

$$\begin{aligned} \sum M_{x(A)} &= (F - P_1)a + Z_B(a + b) + (T_1 \cos \alpha - P_2)(a + b + c) - \\ &\quad - GL/2 - (P_3 + Q)(a + b + c + d) = 0, \\ \sum M_{x'(B)} &= -Z_A(a + b) + (P_1 - F)b - G(L/2 - a - b) + \\ &\quad + (T_1 \cos \alpha - P_2)c - (P_3 + Q)(c + d) = 0, \end{aligned}$$

находим  $Z_A = -11.324$  Н,  $Z_B = 75.574$  Н.

4. Проверяем правильность нахождения вертикальных реакций, составляя уравнение равновесия в проекции на ось  $z$  (рис. 66):

$$\begin{aligned} \sum Z_i &= Z_A + F - P_1 + Z_B - G + T_1 \cos \alpha - P_2 - P_3 - Q = \\ &= -11.324 + 2.769 - 35 + 75.574 - 15 + 30 \cdot 0.866 - 10 - 15 - 18 = 0. \end{aligned}$$

5. Определяем горизонтальные реакции опор вала. Для этого составляем два уравнения моментов относительно осей, совпадающих с линиями действия вертикальных реакций шарниров. Рассматриваем горизонтальную проекцию силовой схемы (рис. 67):

$$\begin{aligned} \sum M_{z(A)} &= -N \cdot a - X_B(a + b) - (T_1 \sin \alpha + T_2)(a + b + c) = 0, \\ \sum M_{z'(B)} &= X_A(a + b) + Nb - (T_1 \sin \alpha + T_2)c = 0. \end{aligned}$$

Решая уравнения, находим  $X_A = 25.100$  Н,  $X_B = -124.792$  Н.

6. Проверяем правильность нахождения горизонтальных реакций, составляя уравнение равновесия в проекции на ось  $x$  вдоль линии

действия горизонтальных реакций:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= X_A + N + X_B + T_1 \sin \alpha + T_2 = \\ &= 25.1 + 27.692 - 124.792 + 15 + 57 = 0. \end{aligned}$$

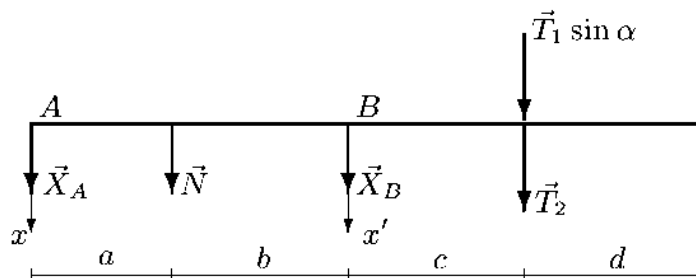


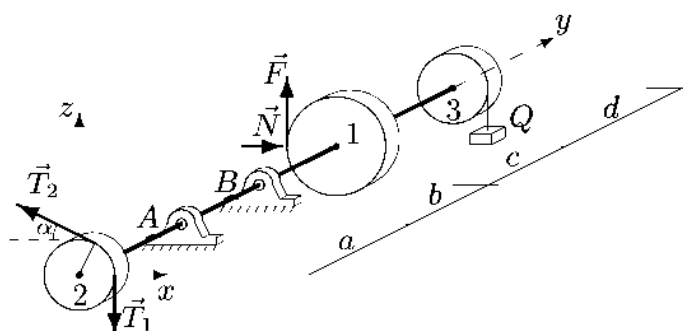
Рис. 67

Результаты расчетов в Н заносим в таблицу:

$N$	$X_A$	$Z_A$	$X_B$	$Z_B$
27.692	25.100	-11.324	-124.792	75.574

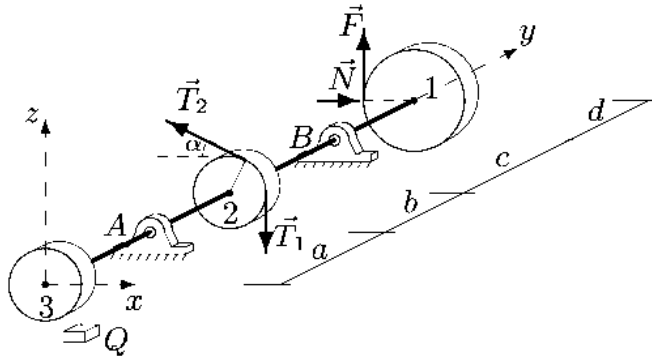
**УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.** Горизонтальный вал весом  $G$  может вращаться в цилиндрических шарнирах  $A$  и  $B$ . К шкиву 1 приложено нормальное давление  $N$  и касательная сила сопротивления  $F$ , пропорциональная  $N$ . На шкив 2 действуют силы натяжения ремней  $T_1$  и  $T_2$ . Груз  $Q$  висит на нити, навитой на шкив 3. Определить силу давления  $N$  и реакции шарниров в условии равновесия вала (в Н). Учесть веса шкивов  $P_1, P_2, P_3$ . Все нагрузки действуют в вертикальной плоскости. Силы даны в Н, размеры — в см.

1.



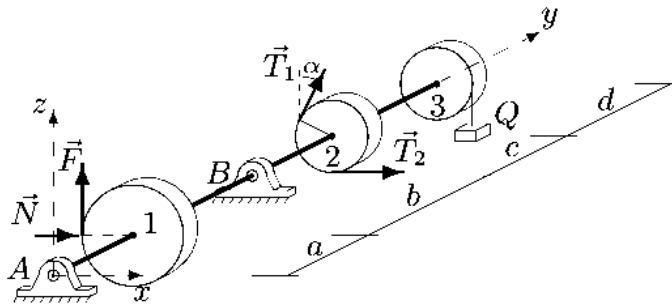
$$\begin{aligned} F &= 0.1N, T_1 = 50, \\ T_2 &= 97, P_1 = 16, \\ P_2 &= 10, P_3 = 14, \\ Q &= 18, G = 25, \\ \alpha &= 30^\circ, R_1 = 14, \\ R_2 &= 8, R_3 = 9, \\ a &= 22, b = 25, \\ c &= 26, d = 23. \end{aligned}$$

2.



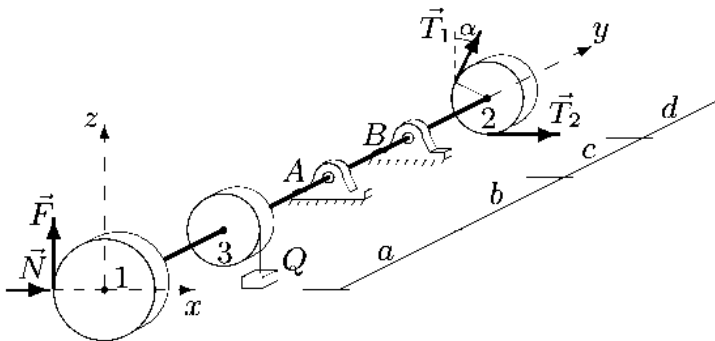
$F = 0.2N, T_1 = 70,$   
 $T_2 = 136, P_1 = 36,$   
 $P_2 = 30, P_3 = 34,$   
 $Q = 22, G = 35,$   
 $\alpha = 60^\circ, R_1 = 18,$   
 $R_2 = 12, R_3 = 13,$   
 $a = 22, b = 26,$   
 $c = 29, d = 23.$

3.



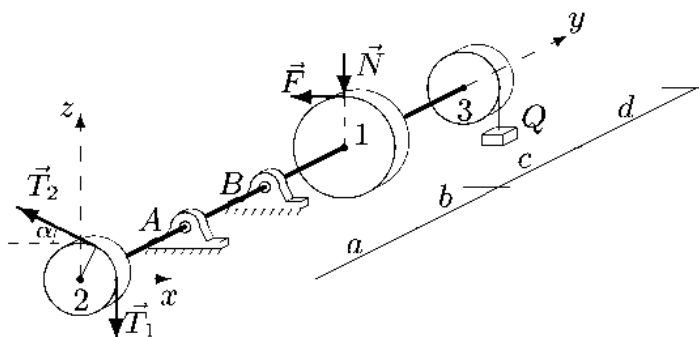
$F = 0.2N, T_1 = 30,$   
 $T_2 = 56, P_1 = 22,$   
 $P_2 = 10, P_3 = 14,$   
 $Q = 22, G = 15,$   
 $\alpha = 30^\circ, R_1 = 26,$   
 $R_2 = 8, R_3 = 9,$   
 $a = 22, b = 26,$   
 $c = 27, d = 26.$

4.



$F = 0.4N, T_1 = 60,$   
 $T_2 = 117, P_1 = 26,$   
 $P_2 = 10, P_3 = 18,$   
 $Q = 18, G = 30,$   
 $\alpha = 30^\circ, R_1 = 26,$   
 $R_2 = 8, R_3 = 10,$   
 $a = 24, b = 27,$   
 $c = 28, d = 28.$

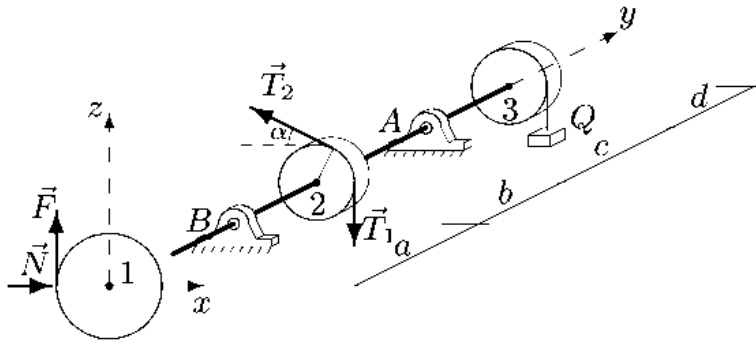
5.



$F = 0.1N, T_1 = 50,$   
 $T_2 = 26, P_1 = 26,$   
 $P_2 = 20, P_3 = 24,$   
 $Q = 10, G = 25,$   
 $\alpha = 45^\circ, R_1 = 16,$   
 $R_2 = 10, R_3 = 11,$   
 $a = 22, b = 23,$   
 $c = 25, d = 23.$

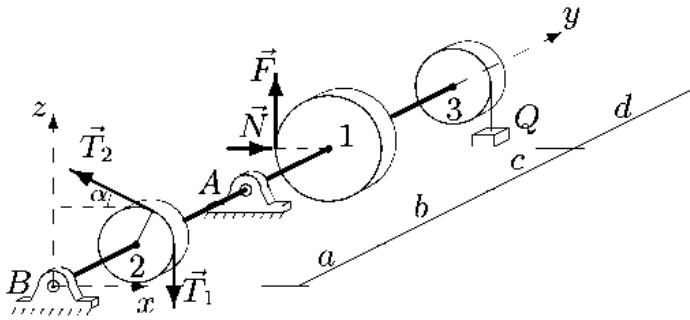


6.



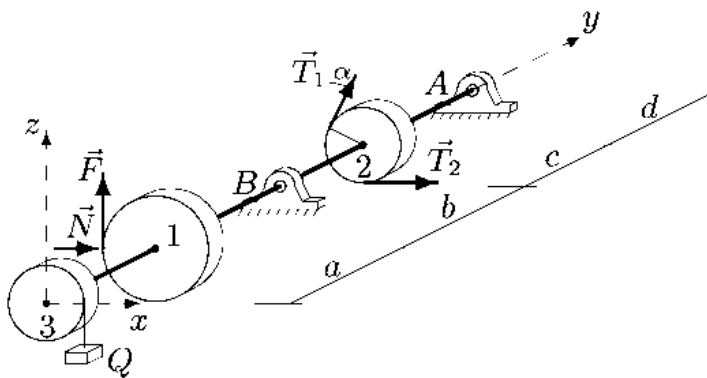
$F = 0.2N, T_1 = 60,$   
 $T_2 = 118, P_1 = 38,$   
 $P_2 = 30, P_3 = 34,$   
 $Q = 14, G = 30,$   
 $\alpha = 60^\circ, R_1 = 22,$   
 $R_2 = 12, R_3 = 13,$   
 $a = 22, b = 24,$   
 $c = 27, d = 24.$

7.



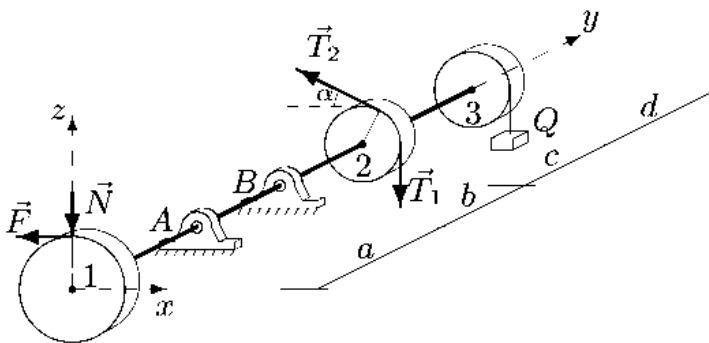
$F = 0.3N, T_1 = 40,$   
 $T_2 = 78, P_1 = 22,$   
 $P_2 = 10, P_3 = 18,$   
 $Q = 14, G = 20,$   
 $\alpha = 30^\circ, R_1 = 18,$   
 $R_2 = 8, R_3 = 10,$   
 $a = 24, b = 26,$   
 $c = 27, d = 26.$

8.



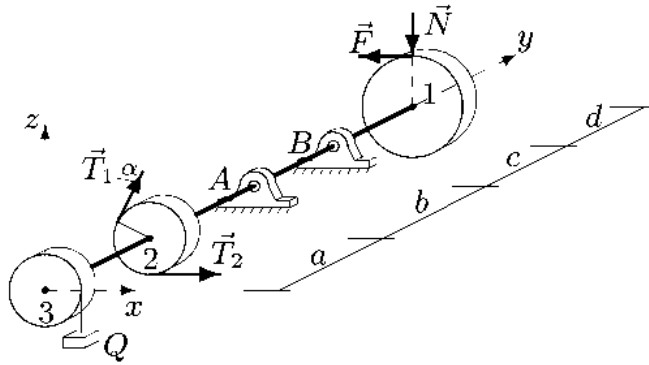
$F = 0.4N, T_1 = 70,$   
 $T_2 = 136, P_1 = 36,$   
 $P_2 = 20, P_3 = 28,$   
 $Q = 22, G = 35,$   
 $\alpha = 45^\circ, R_1 = 28,$   
 $R_2 = 10, R_3 = 12,$   
 $a = 24, b = 28,$   
 $c = 30, d = 28.$

9.



$F = 0.1N, T_1 = 60,$   
 $T_2 = 31, P_1 = 16,$   
 $P_2 = 10, P_3 = 14,$   
 $Q = 26, G = 30,$   
 $\alpha = 30^\circ, R_1 = 14,$   
 $R_2 = 8, R_3 = 9,$   
 $a = 22, b = 27,$   
 $c = 28, d = 23.$

10.



$F = 0.2N$ ,  $T_1 = 70$ ,  
 $T_2 = 37$ ,  $P_1 = 20$ ,  
 $P_2 = 10$ ,  $P_3 = 14$ ,  
 $Q = 10$ ,  $G = 35$ ,  
 $\alpha = 30^\circ$ ,  $R_1 = 22$ ,  
 $R_2 = 8$ ,  $R_3 = 9$ ,  
 $a = 22$ ,  $b = 23$ ,  
 $c = 24$ ,  $d = 25$ .

Ответы

	$N$	$X_A$	$Z_A$	$X_B$	$Z_B$
1	194.286	359.986	-44.654	-470.267	114.726
2	165.000	104.855	84.680	-201.855	-3.459
3	1.154	-58.706	15.924	-24.428	130.614
4	34.038	50.963	218.368	-232.001	-165.945
5	261.250	7.573	-290.264	36.936	693.129
6	136.818	86.784	74.302	-164.602	10.143
7	29.487	-38.734	77.517	-102.395	56.637
8	43.214	-75.085	-75.861	-153.627	166.078
9	411.429	46.826	647.889	21.164	-90.960
10	100.000	-161.833	-130.593	109.833	269.971

#### 4.4. Определение усилий в стержнях, поддерживающих плиту

**Постановка задачи.** Однородная прямоугольная горизонтальная плита известного веса опирается на шесть невесомых шарнирно закрепленных по концам стержней. Вдоль ребра плиты действует сила. Определить усилия в стержнях.

**План решения**

1. Отделим плиту от стержней, заменяя действие стержней их реакциями. Реакции направляем вдоль стержней, от плиты. Вес однородной прямоугольной плиты прикладываем к ее центру вертикально вниз.

2. Две оси системы координат направляем вдоль сторон плиты, третью — перпендикулярно ее плоскости. Начало координат помещаем в точку, в которой сходится наибольшее число стержней. Со-

ставляем уравнения равновесия (три уравнения в проекциях на оси и три уравнения моментов относительно осей). Решаем полученную систему.

3. Выполняем проверку решения, подставляя найденные значения в уравнение моментов относительно какой-либо дополнительной оси.

**ПРИМЕР.** Однородная прямоугольная горизонтальная плита весом  $G = 20$  кН опирается на шесть невесомых шарнирно закрепленных по концам стержней. Вдоль ребра плиты действует сила  $F = 10$  кН (рис. 68). Даны размеры:  $a = 7$  м,  $b = 8$  м,  $c = 6$  м. Определить усилия в стержнях.

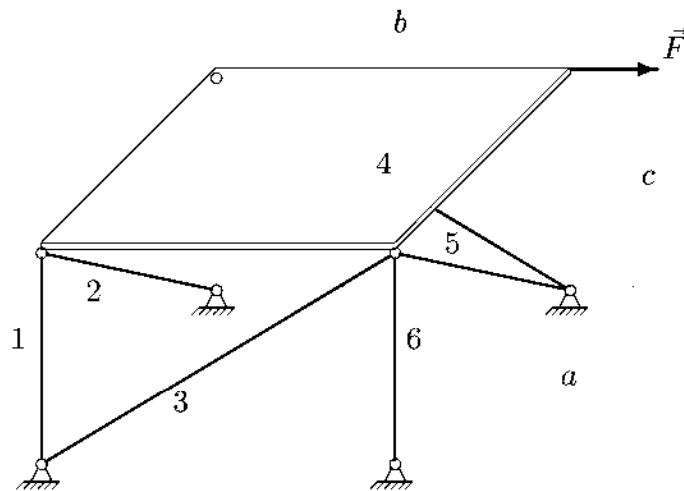


Рис. 68

#### РЕШЕНИЕ

1. Отделяем плиту от стержней, заменяя действие стержней их реакциями. Реакции направляем вдоль стержней, от плиты. Вес однородной прямоугольной плиты прикладываем к ее центру вертикально вниз (рис. 69).

2. Выбираем систему координат (рис. 69) и составляем уравнения равновесия. В уравнение проекций на ось  $x$  не входят силы  $S_1, S_3, S_4, S_6, F$  и  $G$ , лежащие в плоскостях, перпендикулярных  $Ox$ . В уравнение проекций на ось  $y$  не входят силы  $S_1, S_2, S_5, S_6$  и  $G$ , лежащие в плоскостях, перпендикулярных  $Oy$ , а в уравнение проекций на вертикальную ось  $z$  входят все силы, кроме горизонтальной  $F$ :

$$\sum X_i = -S_2 \cos \alpha - S_5 \cos \alpha = 0. \quad (1)$$

$$\sum Y_i = -S_3 \cos \beta + S_4 \cos \beta + F = 0. \quad (2)$$

$$\sum Z_i = -S_1 - S_2 \sin \alpha - S_3 \sin \beta - S_4 \sin \beta - S_5 \sin \alpha - S_6 - G = 0. \quad (3)$$

Линии действия сил  $S_1, S_2, S_3$  пересекают ось  $x$ , поэтому их моменты относительно этой оси равны нулю. Вычисляя момент силы  $S_4$  относительно оси  $x$ , разложим ее на горизонтальную составляющую  $S_4 \cos \beta$  с плечом  $c$  относительно  $x$  и вертикальную —  $S_4 \sin \beta$ , которая пересекает ось и имеет момент равный нулю.

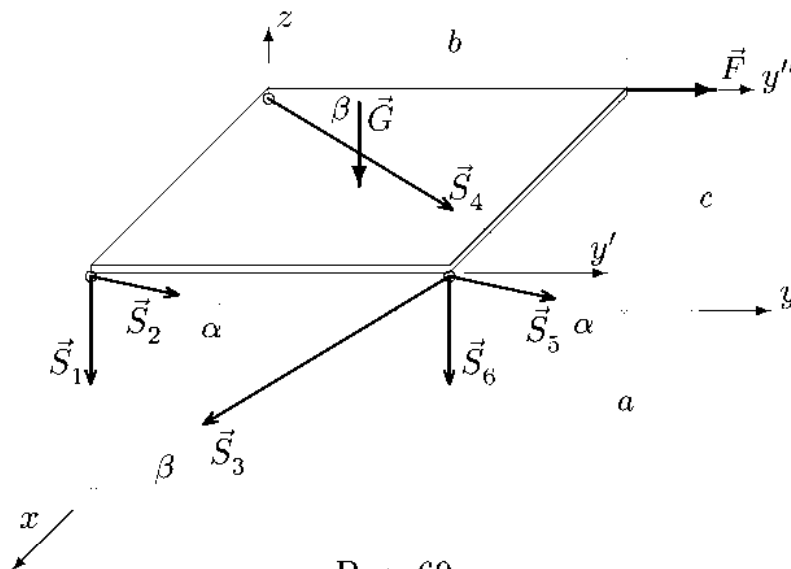


Рис. 69

Аналогично вычисляем моменты других сил и записываем все три уравнения моментов:

$$\begin{aligned} \sum M_{xi} &= -S_4 \cos \beta \cdot c - S_5 \sin \alpha \cdot b - S_6 \cdot b - F \cdot c - G \cdot b/2 = 0, \\ \sum M_{yi} &= S_1 \cdot a + S_3 \sin \beta \cdot a + S_6 \cdot a + G \cdot a/2 = 0, \\ \sum M_{zi} &= -S_3 \cos \beta \cdot a + S_5 \cos \alpha \cdot b = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Находим необходимые значения тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{6}{9.219} = 0.651, & \cos \alpha &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 0.759, \\ \sin \beta &= \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{6}{10} = 0.6, & \cos \beta &= \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = 0.8. \end{aligned}$$

Решая систему шести уравнений (1–4) с шестью неизвестными, получаем значения усилий, которые заносим в таблицу (в кН):

$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$
-2.500	3.841	-4.167	-16.667	-3.841	-5.000

3. Выполняем проверку решения, подставляя найденные значения в уравнение моментов относительно дополнительной оси  $y''$ , проведенной в плоскости плиты параллельно  $y$ :

$$\begin{aligned} \sum M_{y''_i} &= S_1 \cdot a + S_2 \sin \alpha \cdot a + S_3 \sin \beta \cdot a + \\ &\quad + S_5 \sin \alpha \cdot a + S_6 \cdot a + G \cdot a/2 = \\ &= -2.5 \cdot 7 + 3.841 \cdot 0.651 \cdot 7 - 4.167 \cdot 0.6 \cdot 7 - \\ &\quad - 3.841 \cdot 0.651 \cdot 7 - 5 \cdot 7 + 10 \cdot 7 = 0. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Некоторые (или все) уравнения проекций можно заменить на уравнения моментов относительно других осей. Например, в нашей задаче вместо сложного уравнения  $\sum Z_i = 0$ , в которое входят все неизвестные усилия, удобно использовать более простое уравнение моментов относительно оси  $y'$ :

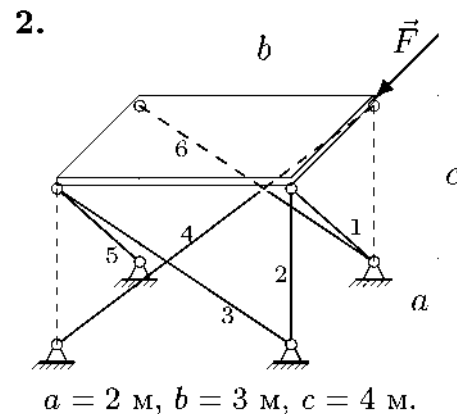
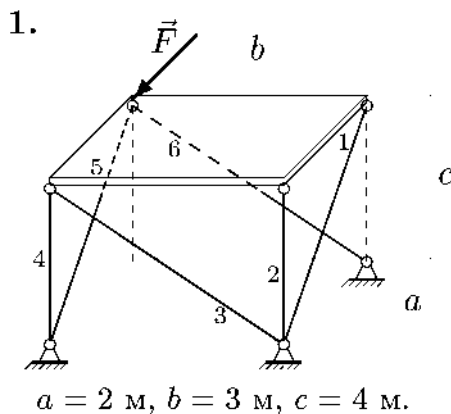
$$\sum M_{y'_i} = -S_4 \sin \beta \cdot a - G \cdot a/2 = 0,$$

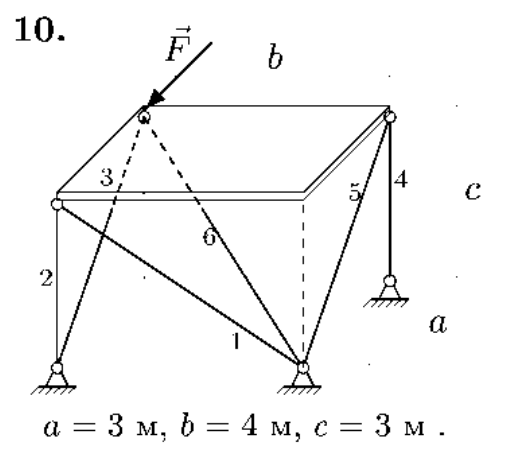
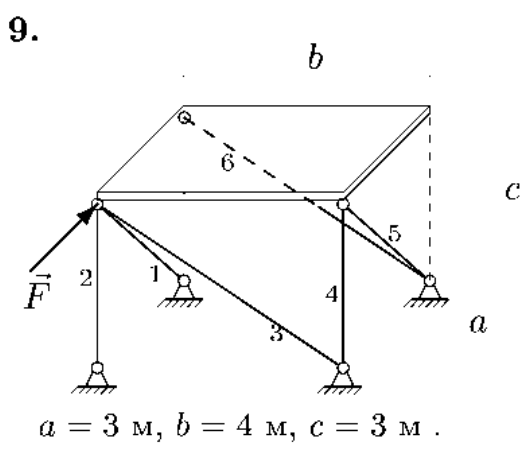
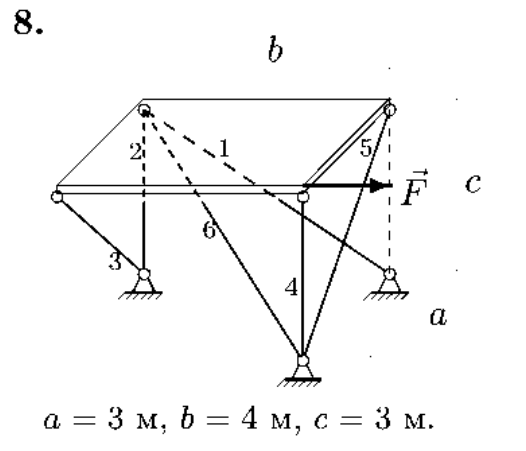
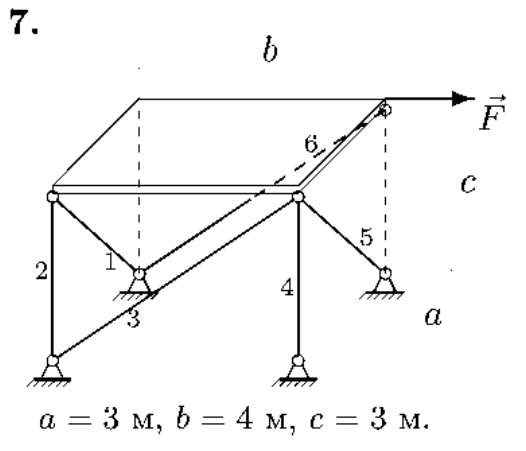
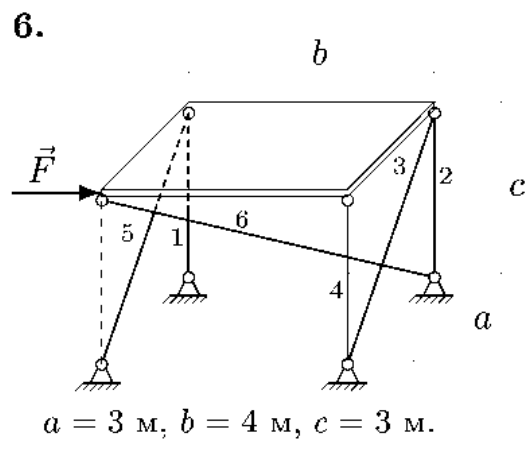
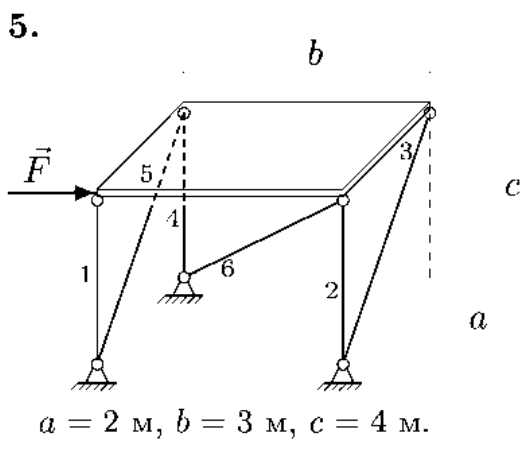
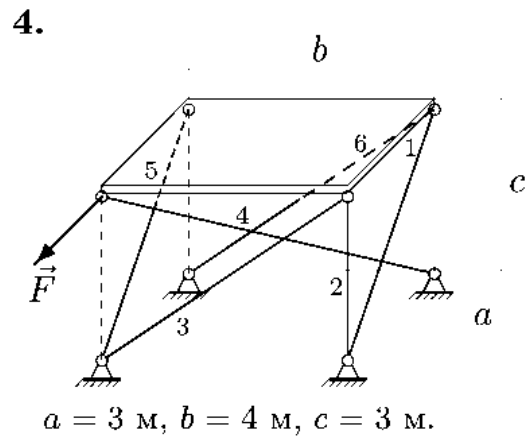
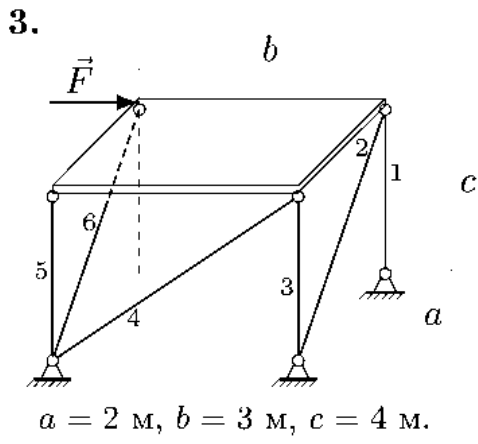
из которого сразу же находится усилие

$$S_4 = -10/0.6 = -16.667 \text{ кН},$$

а уравнение  $\sum Z_i = 0$  можно использовать как проверочное, тем более, что выполнение такой проверки означает правильность сразу всех найденных усилий.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Однородная прямоугольная горизонтальная плита весом  $G = 25 \text{ кН}$  опирается на шесть невесомых шарнирно закрепленных по концам стержней. Вдоль ребра плиты действует сила  $F = 10 \text{ кН}$ . Определить усилия в стержнях (в кН).





## Ответы

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$
1	-8.385	-5.000	-9.375	0.000	-13.975	9.375
2	17.702	-20.000	-5.208	-11.219	-4.658	-5.208
3	-12.500	-14.907	0.000	16.667	-25.833	14.907
4	-1.179	-10.000	-1.389	-3.239	-15.321	-1.389
5	13.333	-39.167	14.907	-25.833	0.000	17.951
6	2.500	-7.500	0.000	-5.000	-10.607	-14.577
7	-28.284	7.500	33.333	-40.000	28.284	-20.833
8	-12.500	-12.500	10.607	-20.000	10.607	0.000
9	31.820	-35.000	20.833	0.000	-17.678	-20.833
10	-16.667	-2.500	-14.142	-2.500	-14.142	19.437

## 4.5. Тело на сферической и стержневых опорах

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** Горизонтальная однородная прямоугольная полка имеет в одной точке сферическую опору и поддерживается двумя невесомыми, шарнирно закрепленными по концам, стержнями (горизонтальным и вертикальным) и наклонной подпоркой. К полке приложена сила, направленная вдоль одного из ее ребер. Определить реакции опор.

### ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Рассматриваем равновесие полки. Действие на полку опорных стержней заменяем их реакциями. Реакции стержней направляем вдоль их осей. Выбираем оси координат с началом в сферической опоре. Реакцию сферической опоры раскладываем на три составляющие вдоль выбранных осей.

2. Составляем систему уравнений равновесия (три уравнения в проекциях на оси и три уравнения моментов относительно осей). Решаем полученную систему.

3. Выполняем проверку решения, подставляя найденные значения в уравнение моментов относительно какой-либо дополнительной оси.

**ПРИМЕР.** Горизонтальная однородная полка весом  $G = 6$  кН имеет в точке  $A$  сферическую опору и поддерживается двумя невесомыми, шарнирно закрепленными по концам, стержнями (горизонтальным и вертикальным) и подпоркой в точке  $B$  (рис. 70). К этой же точке

приложена сила  $F = 5$  кН, направленная вдоль одного из ребер полки. Даны размеры  $a = 2$  м,  $b = 4$  м,  $c = 3$  м. Определить реакции опор.

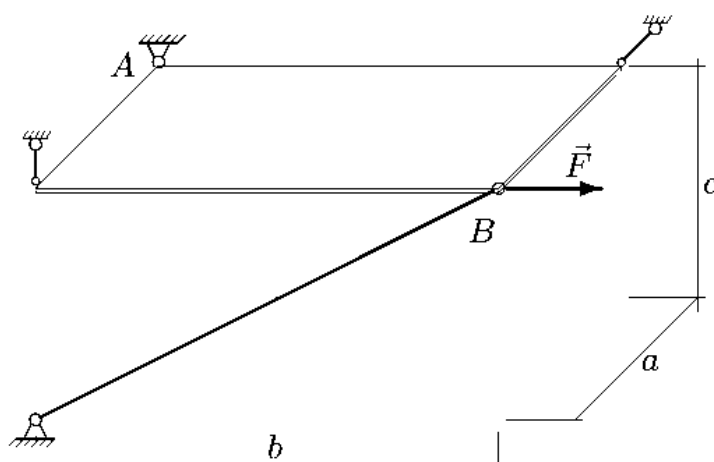


Рис. 70

### РЕШЕНИЕ

1. Рассматриваем равновесие полки. Действие на тело опорных стержней заменяем их реакциями. Реакция  $\vec{V}$  — вертикальная,  $\vec{H}$  — горизонтальная вдоль бокового ребра полки.

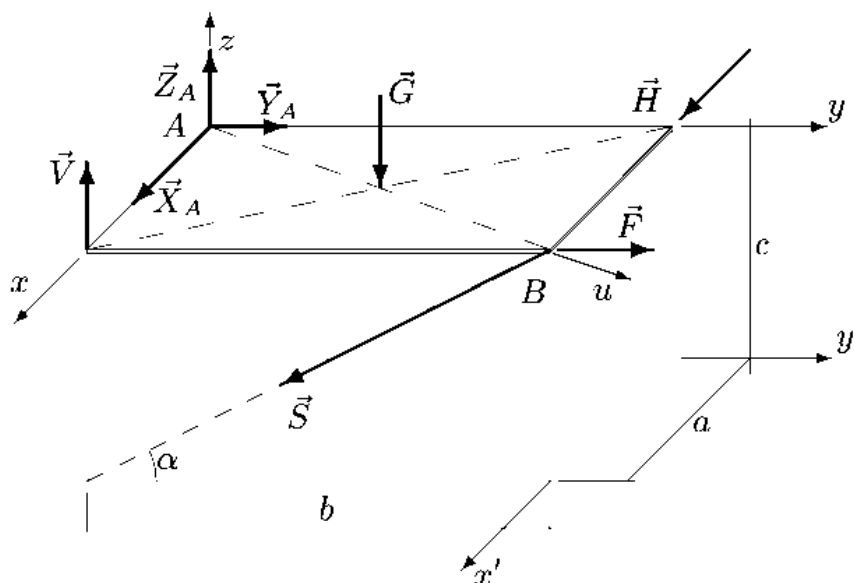


Рис. 71

Усилие  $\vec{S}$  в подпорке направлено вдоль стержня. В сферическом шарнире  $A$  имеется три составляющие реакции  $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$ , которые направляем по осям координат. Так как полка однородная, ее центр тяжести совпадает с геометрическим центром. Сюда приложен вес  $\vec{G}$ . Начало системы координат  $xyz$  помещаем в точку  $A$  (рис. 71).

2. Составляем систему уравнений равновесия, состоящую из трех



уравнений проекций на оси координат всех сил, действующих на полку, и трех уравнений моментов относительно этих же осей (аналогичные уравнения см. § 4.4, с. 103):

$$\begin{aligned}
 \sum X_i &= X_A + H = 0, \\
 \sum Y_i &= Y_A - S \cos \alpha + F = 0, \\
 \sum Z_i &= Z_A + V - S \sin \alpha - G = 0, \\
 \sum M_{x_i} &= -S \cdot b \sin \alpha - G \cdot b/2 = 0, \\
 \sum M_{y_i} &= -V \cdot a + S \cdot a \sin \alpha + G \cdot a/2 = 0, \\
 \sum M_{z_i} &= -H \cdot b - S \cdot a \cos \alpha + F \cdot a = 0.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Так как начало координат находится в сферической опоре, система уравнений равновесия разделяется и становится проще. Из уравнений моментов можно найти независимо от других три неизвестные реакции  $S$ ,  $H$  и  $V$ .

Вычислим значения тригонометрических функций:

$$\sin \alpha = c/\sqrt{b^2 + c^2} = 3/5 = 0.6, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 0.8.$$

Из системы (1), находим реакции и заносим их в таблицу (в кН):

$X_A$	$Y_A$	$Z_A$	$H$	$V$	$S$
-4.5	-9.0	3.0	4.5	0	-5.0

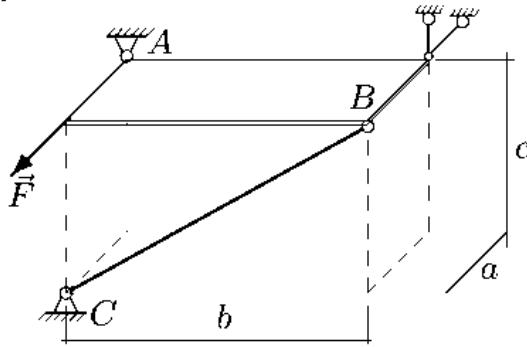
3. Выполняем проверку решения, подставляя найденные значения в уравнение моментов относительно дополнительных осей  $x'$  и  $y'$ , проведенных параллельно соответствующим осям исходной системы координат:

$$\begin{aligned}
 \sum M_{x'i} &= -Y_A \cdot c - Z_A \cdot b - V \cdot b + G \cdot b/2 + S \cdot c \cos \alpha - F \cdot c = 0, \\
 \sum M_{y'i} &= X_A \cdot c - V \cdot a + S \cdot a \sin \alpha + G \cdot a/2 + H \cdot c = 0.
 \end{aligned}$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Из решения системы (1) получается  $V = 0$ . В этом можно убедиться сразу из уравнения моментов относительно дополнительной оси  $u$ , лежащей на диагонали полки  $AB$  (рис. 71). Действительно, все векторы, кроме  $\vec{V}$ , пересекают эту ось и их моменты равны нулю. Уравнение принимает простой вид  $\sum M_u = V \cdot h = 0$ , где  $h$  — некоторое плечо реакции  $\vec{V}$  относительно оси  $AB$ . Не вычисляя  $h \neq 0$ , получаем  $V = 0$ .

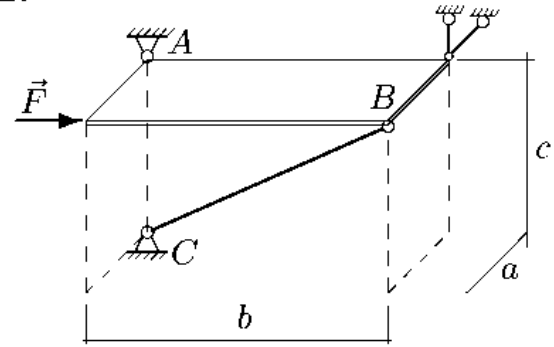
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Горизонтальная однородная прямоугольная полка весом  $G = 2 \text{ кН}$  имеет в точке  $A$  сферическую опору и поддерживается двумя невесомыми, шарнирно закрепленными по концам, стержнями (горизонтальным и вертикальным) и подпоркой  $BC$ . К полке приложена сила  $F = 3 \text{ кН}$ , направленная вдоль одного из ее ребер. Определить реакции опор (в кН).

1.



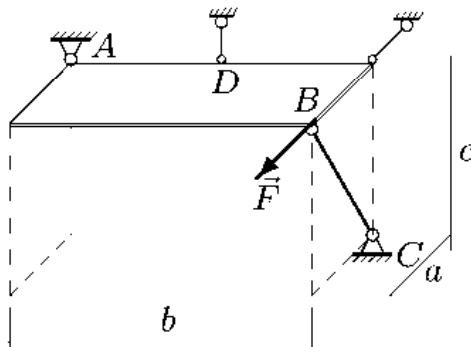
$$a = 2 \text{ м}, b = 6 \text{ м}, c = 4 \text{ м}.$$

2.



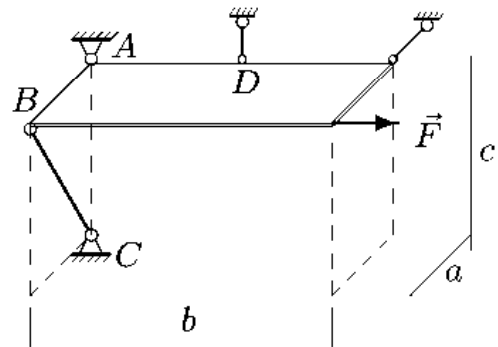
$$a = 3 \text{ м}, b = 8 \text{ м}, c = 3 \text{ м}.$$

3.



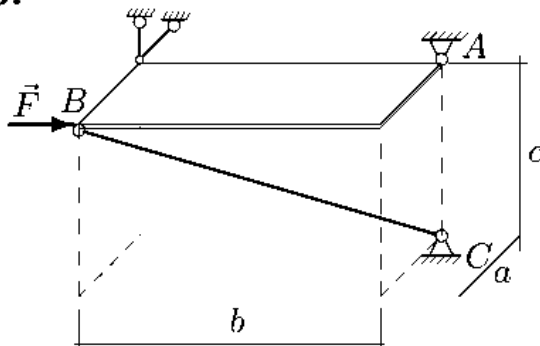
$$a = 5 \text{ м}, b = 8 \text{ м}, c = 3 \text{ м}, \\ AD = 4 \text{ м}.$$

4.



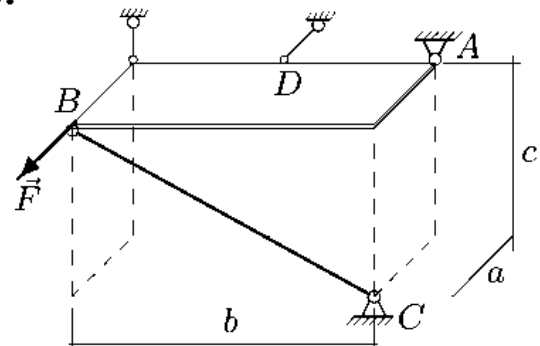
$$a = 6 \text{ м}, b = 10 \text{ м}, c = 4 \text{ м}, \\ AD = 5 \text{ м}.$$

5.



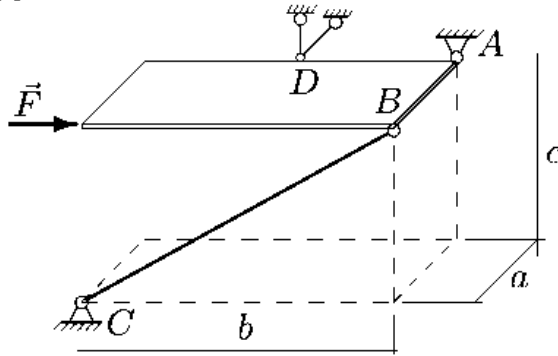
$$a = 3 \text{ м}, b = 8 \text{ м}, c = 3 \text{ м}.$$

6.



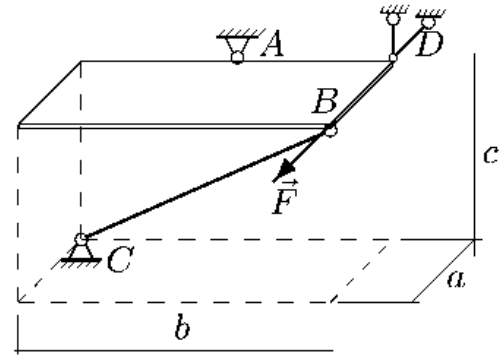
$$a = 3 \text{ м}, b = 8 \text{ м}, c = 3 \text{ м}, \\ AD = 4 \text{ м}.$$

7.



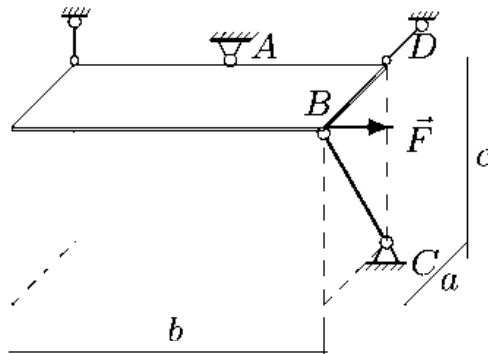
$$a = 5 \text{ м}, b = 8 \text{ м}, c = 3 \text{ м}, \\ AD = 4 \text{ м}.$$

8.



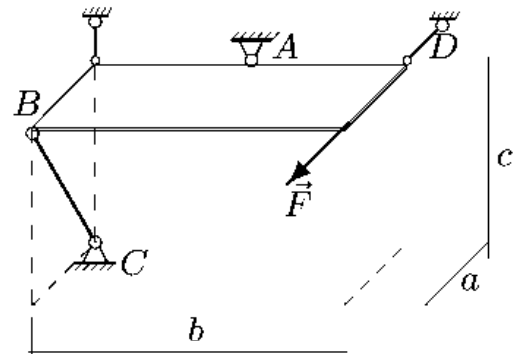
$$a = 6 \text{ м}, b = 10 \text{ м}, c = 4 \text{ м}, \\ AD = 5 \text{ м}.$$

9.



$$a = 6 \text{ м}, b = 10 \text{ м}, c = 4 \text{ м}, \\ AD = 5 \text{ м}.$$

10.



$$a = 5 \text{ м}, b = 8 \text{ м}, c = 3 \text{ м}, \\ AD = 4 \text{ м}.$$

### Ответы

	Стержень		Сферический шарнир			Подпорка BC
	горизонтальный	вертикальный	$X_A$	$Y_A$	$Z_A$	$S$
1	0.500	0.000	-3.500	-1.500	1.000	-1.803
2	1.125	0.000	-2.125	-5.667	1.000	-3.018
3	-4.667	0.000	0.000	0.000	1.000	-1.944
4	1.800	2.000	-3.300	-3.000	-1.000	-1.803
5	-1.125	0.000	0.125	-0.333	1.000	-3.018
6	-4.000	0.000	1.000	2.667	1.000	-2.848
7	-7.083	2.000	7.083	-5.667	-1.000	-2.848
8	-1.500	-1.000	-3.000	-2.500	2.000	-3.082
9	2.100	1.000	-3.600	-3.000	0.000	-1.803
10	-1.333	-1.000	-3.333	0.000	2.000	-1.944

## 4.6. Приведение системы сил к простейшему виду

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** Систему сил, заданную в прямоугольной системе координат, привести к началу координат. Найти точку пересечения центральной винтовой оси с заданной плоскостью.

Привести систему сил к центру  $O$  — означает найти главный вектор  $\vec{R}$  и главный момент  $\vec{M}_O$  системы относительно этого центра. При перемене центра изменяется главный момент. Можно найти точки, относительно которых получается главный момент, параллельный главному вектору. Эти точки образуют центральную винтовую ось (или ось динами), а совокупность главного вектора и параллельного ему главного момента называют динамой или динамическим винтом. Не меняя воздействия на тело, вектор момента можно переносить параллельно самому себе, поэтому динаму часто изображают в виде главного вектора и главного момента, лежащими на одной прямой (на винтовой оси). Если система не уравновешена, то ее можно привести к трем простейшим вариантам — к динаме, силе (равнодействующей), к паре сил.

### ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Вычисляем компоненты главного вектора системы, составляя суммы проекций всех сил на оси координат:

$$R_x = \sum X_i, \quad R_y = \sum Y_i, \quad R_z = \sum Z_i.$$

2. Находим модуль главного вектора  $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ .

3. Вычисляем компоненты главного момента системы относительно начала координат:

$$M_{Ox} = \sum M_{xi}, \quad M_{Oy} = \sum M_{yi}, \quad M_{Oz} = \sum M_{zi}.$$

4. Находим модуль главного момента  $M_0 = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}$ .

5. Определяем скалярный инвариант системы. Система сил имеет две величины, не меняющиеся при перемене центра приведения (инварианты) — главный вектор и скалярное произведение главного вектора на главный момент:

$$I = \vec{R} \cdot \vec{M}_0 = R_x M_{Ox} + R_y M_{Oy} + R_z M_{Oz}.$$

Если  $I = 0$ , то система сил приводится к равнодействующей.

6. Находим минимальный главный момент  $M_* = I/R$ . Проверяем неравенство  $M_* \leq M_0$ . Если  $R = 0$ , то задача решена — система приводится к паре (или уравновешена, если и  $M_0 = 0$ .)

7. Вычисляем шаг винта  $p = M_*/R$ . Если  $p < 0$ , то главный вектор и главный момент направлены по винтовой оси в разные стороны, если  $p > 0$  — в одну сторону, а если  $p = 0$ , то система приводится к равнодействующей.

8. Записываем уравнения центральной винтовой оси <sup>\*)</sup>:

$$\frac{M_{Ox} - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_{Oy} - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_{Oz} - xR_y + yR_x}{R_z} = p. \quad (1)$$

Индексы в уравнениях образуют круговую перестановку  $\overleftarrow{x \rightarrow y \rightarrow z}$ .

Если систему привести к любой точке на центральной винтовой оси, то главный вектор и главный момент будут лежать на этой оси и образовывать динаму.

Из трех уравнений (1) два являются независимыми.

Если один из компонентов главного вектора равен нулю, например,  $R_x = 0$ , то соответствующее уравнение записывается в другой форме:  $M_{Ox} - yR_z + zR_y = 0$ .

9. Находим координаты точки  $A$  пересечения центральной оси с плоскостью  $xy$  (*Решбник ВМ*, §1.11). Если прямая параллельна плоскости  $xy$ , то такой точки не существует. Решая систему (1) при  $z = 0$ , получаем  $y = y_A, z = z_A$ . Аналогично можно найти точки пересечения центральной винтовой оси с плоскостями  $xz$  и  $yz$  (если они существуют).

10. Проверяем решение, приводя систему к любой точке центральной винтовой оси (например,  $x_A, y_A$ ). Для этого новые оси координат, параллельные старым, проводим через выбранную точку и повторяем пп. 3–4 плана. Главный момент должен быть равен минимальному  $M_*$ .

ПРИМЕР. Систему сил  $F_1 = 4$  Н,  $F_2 = 10$  Н,  $F_3 = 21$  Н,  $F_4 = 4$  Н, приложенных к вершинам параллелепипеда, привести к началу координат (рис. 72). Найти координаты точки пересечения центральной винтовой оси с плоскостью  $xy$ .  $a = 3$  м,  $b = 5$  м,  $c = 4$  м.

---

<sup>\*)</sup> Общие уравнения прямой и каноническая форма уравнения прямой см. *Решбник ВМ*, §1.10

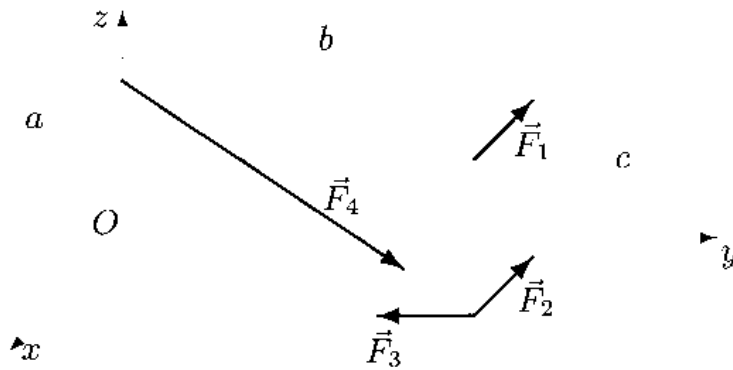


Рис. 72

РЕШЕНИЕ

1. Вычисляем компоненты главного вектора системы. Проекция вектора  $\vec{F}_4$ , лежащего на большой диагонали параллелограмма длиной  $L = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ , вычисляем по формулам

$$\begin{aligned} F_{4x} &= F_4 \cos(\vec{F}_4 \wedge x) = F_4 a/L, \\ F_{4y} &= F_4 \cos(\vec{F}_4 \wedge y) = F_4 b/L, \\ F_{4z} &= F_4 \cos(\vec{F}_4 \wedge z) = -F_4 c/L. \end{aligned}$$

Определяем компоненты главного вектора:

$$\begin{aligned} R_x &= \sum X_i = -F_1 - F_2 + F_{4x} = -12.303 \text{ Н}, \\ R_y &= \sum Y_i = -F_3 + F_{4y} = -18.172 \text{ Н}, \\ R_z &= \sum Z_i = F_{4z} = 2.262 \text{ Н}. \end{aligned}$$

2. Находим модуль главного вектора:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 22.061 \text{ Н}.$$

3. Вычисляем компоненты главного момента системы сил относительно начала координат:

$$\begin{aligned} M_{Ox} &= \sum M_{xi} = -F_{4y}c = -11.314 \text{ Нм}, \\ M_{Oy} &= \sum M_{yi} = -F_1c + F_{4x}c = -9.212 \text{ Нм}, \\ M_{Oz} &= \sum M_{zi} = F_1b + F_2b - F_3a = -7.00 \text{ Нм}, \end{aligned}$$

4. Находим модуль главного момента:

$$M_0 = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} = 16.182 \text{ Нм}.$$

5. Определяем скалярный инвариант системы:

$$I = \vec{R} \cdot \vec{M}_0 = R_x M_{Ox} + R_y M_{Oy} + R_z M_{Oz} = 290.745 \text{ Н}^2\text{м.}$$

Скалярный инвариант не равен нулю, следовательно, система сил приводится к динамсе.

6. Вычисляем минимальный главный момент системы сил:

$$M_* = \frac{I}{R} = \frac{290.745}{22.061} = 13.178 \text{ Нм.}$$

Неравенство  $M_* \leq M_0 = 16.182 \text{ Нм}$  выполняется. Точки, относительно которой момент системы сил меньше  $M_*$ , не существует.

7. Находим шаг винта системы сил:

$$p = \frac{M_*}{R} = 0.597 \text{ м.}$$

Шаг положительный, следовательно, главный момент и главный вектор направлены по центральной винтовой оси в одну сторону.

8. Записываем уравнения центральной винтовой оси:

$$\frac{M_{Ox} - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_{Oy} - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_{Oz} - xR_y + yR_x}{R_z} = p.$$

Из этих трех уравнений только два являются независимыми:

$$\begin{aligned} 2.262y - 18.172z - 3.964 &= 0, \\ -2.262x + 12.303z + 1.644 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

9. Находим координаты точки пересечения центральной оси с плоскостью  $xy$ . Решая систему (2) при  $z = 0$ , получаем, что

$$y = y_A = 1.752 \text{ м}, \quad x = x_A = 0.726 \text{ м.}$$

Основные результаты расчета заносим в таблицу:

$R_x$	$R_y$	$R_z$	$R$	$M_{Ox}$	$M_{Oy}$	$M_{Oz}$	$M_0$	$x_A$	$y_A$
Н				Нм				м	
-12.303	-18.172	-2.263	22.061	-11.314	-9.212	7.000	16.182	0.726	1.752

10. Проверяем решение, приводя систему к точке  $A$  центральной винтовой оси. Через точку  $A$  проводим оси новой системы координат  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , параллельные исходным осям (рис. 73).

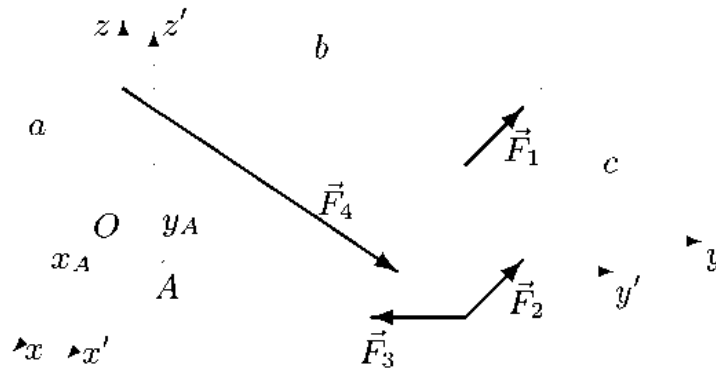


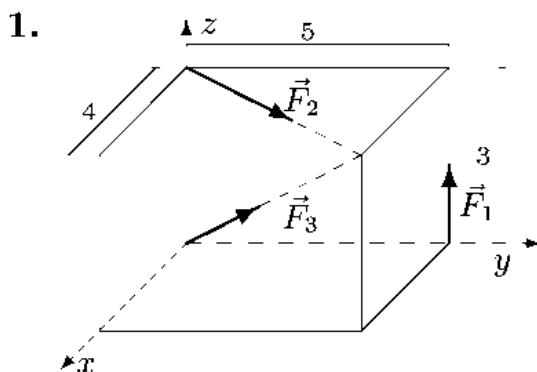
Рис. 73

Получаем моменты заданной системы относительно новых осей координат и величину главного момента относительно центра  $A$ :

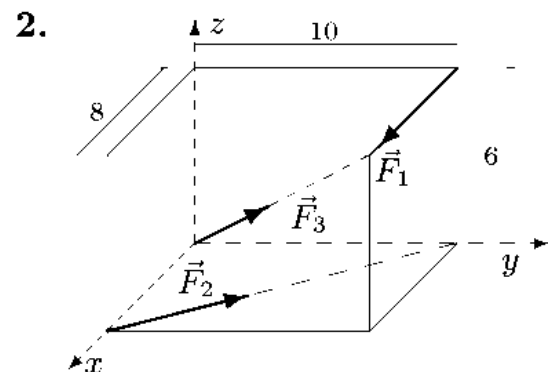
$$\begin{aligned}
 M_{Ax'} &= \sum M_{x'i} = -F_{4z}y_A - F_{4y}c = -7.350 \text{ Нм}, \\
 M_{Ay'} &= \sum M_{y'i} = -F_1c + F_{4x}c + F_{4z}x_A = -10.856 \text{ Нм}, \\
 M_{Az'} &= \sum M_{z'i} = (F_1 + F_2)(b - y_A) - F_{1y}x_A + \\
 &\quad + F_{4x}y_A - F_3(a - x_A) = -1.352 \text{ Нм}, \\
 M_A &= \sqrt{M_{Ax'}^2 + M_{Ay'}^2 + M_{Az'}^2} = 13.179 \text{ Нм}.
 \end{aligned}$$

Главный момент системы  $M_A$  относительно новой точки приведения совпадает с полученным ранее минимальным  $M_*$ , что подтверждает правильность расчетов.

**УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.** Систему трех сил, приложенных к вершинам параллелепипеда, привести к началу координат. Найти координаты точки пересечения центральной винтовой оси с плоскостью  $xu$ . Размеры на рисунках даны в м, силы — в Н.

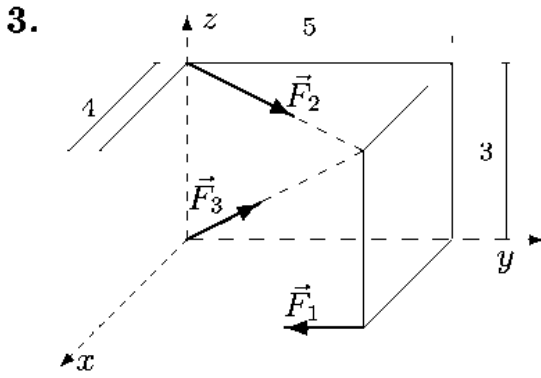


$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2.$$

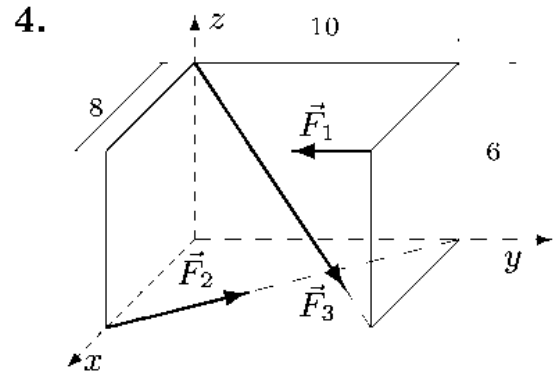


$$F_1 = 2, F_2 = 3, F_3 = 5.$$

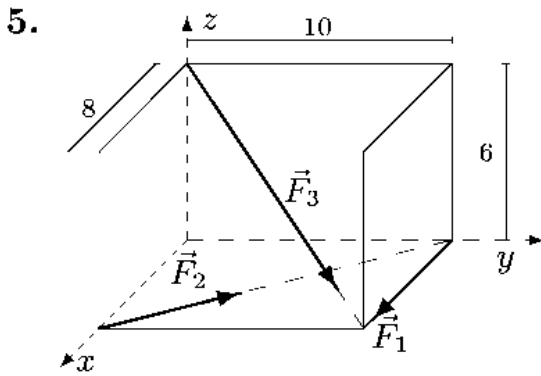




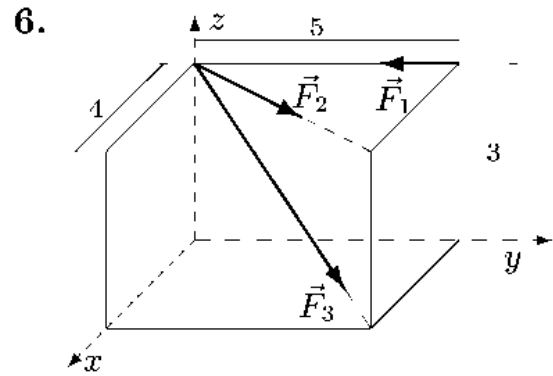
$$F_1 = 3, F_2 = 3, F_3 = 6.$$



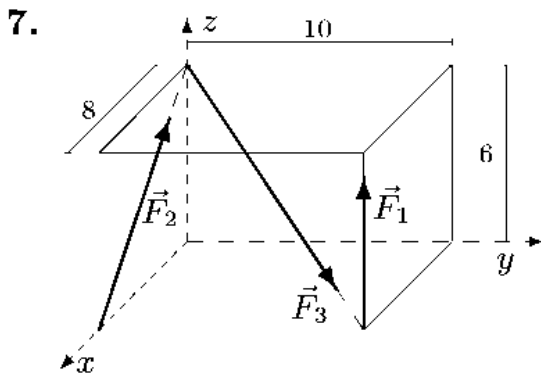
$$F_1 = 4, F_2 = 5, F_3 = 8.$$



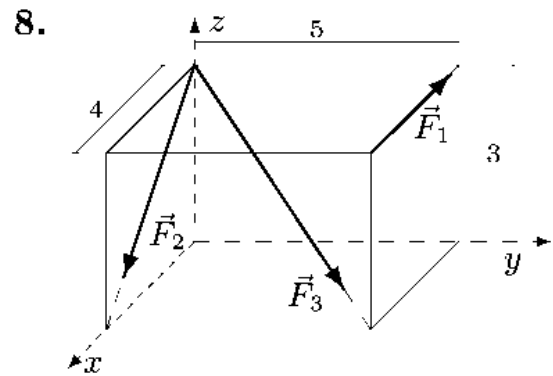
$$F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 4.$$



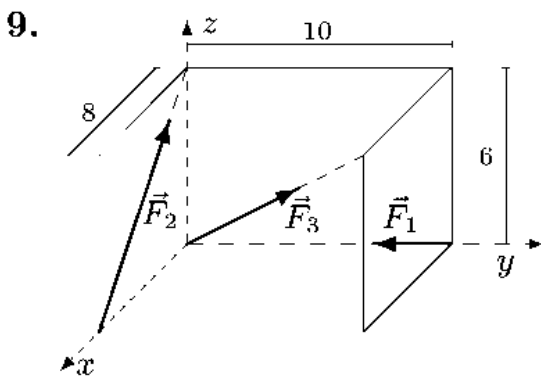
$$F_1 = 2, F_2 = 2, F_3 = 5.$$



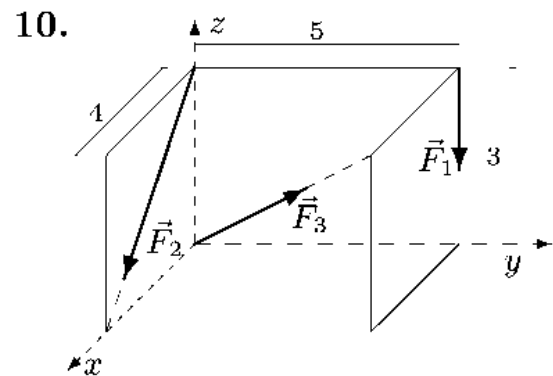
$$F_1 = 3, F_2 = 4, F_3 = 5.$$



$$F_1 = 4, F_2 = 4, F_3 = 6.$$



$$F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 5.$$



$$F_1 = 2, F_2 = 2, F_3 = 3.$$

## Ответы

	$R_x$	$R_y$	$R_z$	$R$	$M_{Ox}$	$M_{Oy}$	$M_{Oz}$	$M_O$	$x_A$	$y_A$
	Н				Нм				М	
1	1.756	2.195	1.849	3.364	2.657	1.874	0.000	3.252	-0.093	0.701
2	2.954	5.878	2.121	6.912	0.000	12.000	-1.259	12.066	-1.721	-1.978
3	5.268	3.585	2.546	6.862	-7.028	5.622	-12.000	15.000	-3.627	-0.677
4	1.402	5.561	-3.394	6.664	-9.941	27.153	-0.765	28.926	2.848	4.228
5	2.013	4.390	-1.697	5.119	-16.971	13.576	2.494	21.876	5.907	10.960
6	4.078	3.097	-2.121	5.543	-9.292	12.233	0.000	15.362	5.767	4.380
7	-0.372	3.536	3.279	4.836	8.787	-26.229	0.000	27.662	3.574	2.215
8	2.594	4.243	-4.946	7.013	-12.728	7.782	20.000	24.951	3.299	1.519
9	1.228	2.536	3.321	4.355	0.000	-9.600	0.000	9.600	1.911	0.475
10	3.297	2.121	-1.927	4.369	-10.000	4.800	0.000	11.092	3.805	3.146

ЗАМЕЧАНИЕ. Решение задачи легко проверить в системе Maple V. Приведем фрагмент программы вычислений<sup>\*)</sup>.

Введены следующие обозначения:  $F[1]$  — сила  $F_1$ ,  $T[1]$  — радиус-вектор точки приложения силы  $F_1$ ,  $R$  — главный вектор,  $M$  — главный момент,  $II$  — скалярный инвариант.

```

> with(linalg):
> F[1]:=vector(3,[-4,0,0]): F[2]:=vector(3,[-10,0,0]):
> F[3]:=vector(3,[0,-21,0]):
> F[4]:=evalm(4*normalize(vector(3,[a,b,-c]))):
> T[5]:=vector(3,[0,0,0]): T[1]:=vector(3,[0,b,c]):
> T[2]:=vector(3,[a,b,0]): T[3]:=vector(3,[a,b,0]):
> T[4]:=vector(3,[0,0,c]):
> R:=evalm(add(F[i],i=1..N)); R0:=evalf(norm(R,2));
> M:=evalm(add(crossprod(T[i],F[i]),i=1..N));
> M0:=evalf(norm(M,2)); II:=dotprod(R,M);

```

Здесь использована библиотека `linalg`. В последних версиях Maple 6,7,8 существует более совершенный пакет `LinearAlgebra`. В этом случае операторы скалярного и векторного произведения необходимо заменить соответственно на `DotProduct` и `CrossProduct`.

## Глава 5

# ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

### 5.1. Центр тяжести плоской фигуры

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** *Найти площадь и координаты центра тяжести плоской фигуры.*

**ПЛАН РЕШЕНИЯ**

1. Разбиваем фигуру на простые отдельные части, положение центров тяжести которых известны.

2. Выбираем систему координат. Вычисляем площади и координаты  $x_i, y_i$  центров тяжести отдельных частей. Площади вырезанных частей берем со знаком минус.

3. Находим общую площадь фигуры по формуле  $A = \sum A_i$ .

4. Определяем координаты центра тяжести фигуры:

$$x_c = \frac{\sum A_i x_i}{A}, \quad y_c = \frac{\sum A_i y_i}{A}.$$

**ПРИМЕР.** Найти площадь и координаты центра тяжести плоской фигуры. Криволинейный участок контура является половиной окружности с центром на оси  $Ox$  (рис. 74). Размеры на рисунке даны в метрах.

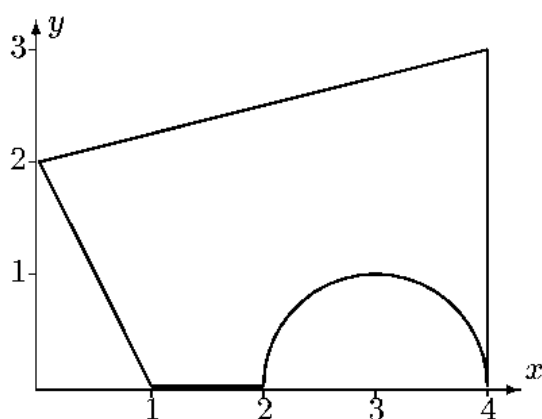


Рис. 74

### РЕШЕНИЕ

1. Разбиваем фигуру на простые отдельные части, положение центров тяжести которых известны.

Центр тяжести прямоугольника находится в его геометрическом центре, положение центра тяжести других фигур, встречающихся в задачах, изображено на рис. 75.

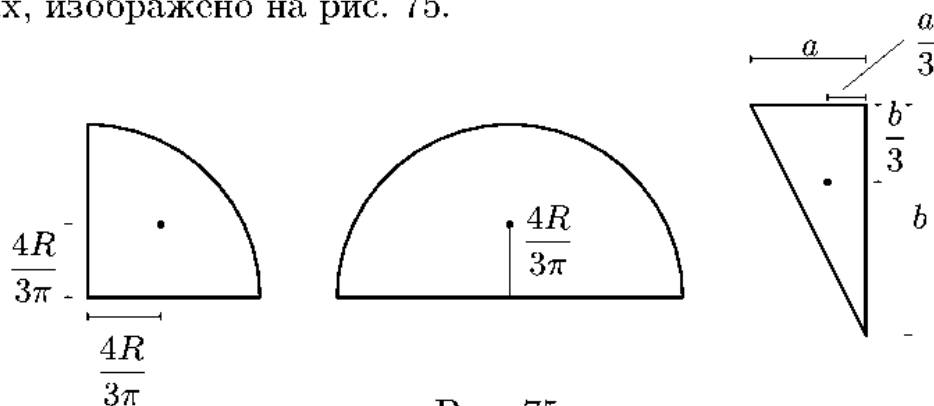


Рис. 75

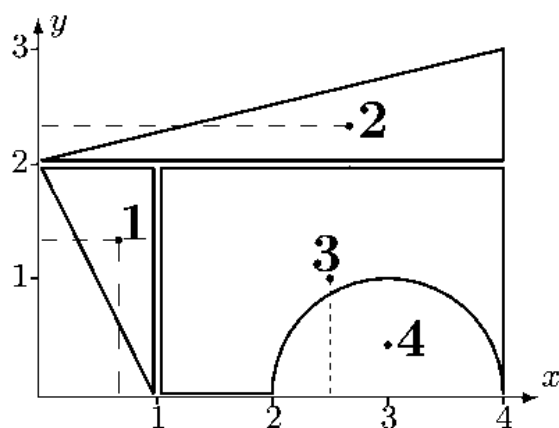


Рис. 76

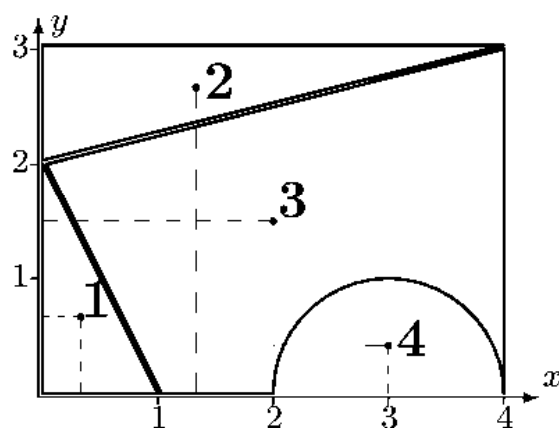


Рис. 77

Представляем фигуру в виде двух треугольников **1,2**, прямоугольника **3** и выреза **4** в виде полукруга (рис. 76).

2. Вычисляем площадь (в м<sup>2</sup>) и координаты центра тяжести (в м) каждого элемента:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1, \quad x_1 = \frac{2}{3} \cdot 1 = 0.667, \quad y_1 = \frac{2}{3} \cdot 2 = 1.333,$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2, \quad x_2 = \frac{2}{3} \cdot 4 = 2.667, \quad y_2 = 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 2.333,$$

$$A_3 = 3 \cdot 2 = 6, \quad x_3 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 2.5, \quad y_3 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,$$

$$A_4 = -\frac{3.142 \cdot 1^2}{2} = -1.571, \quad x_4 = 3, \quad y_4 = \frac{4 \cdot 1}{3 \cdot \pi} = 0.424.$$

Площадь выреза берем со знаком минус.

3. Площадь фигуры  $A = \sum A_i = 1 + 2 + 6 - 1.571 = 7.429 \text{ м}^2$ .

4. Находим координаты центра тяжести всей фигуры:

$$x_c = \frac{\sum A_i x_i}{A} = \frac{0.667 \cdot 1 + 2.667 \cdot 2 + 2.5 \cdot 6 - 3 \cdot 1.571}{7.429} = 2.192 \text{ м},$$

$$y_c = \frac{\sum A_i y_i}{A} = \frac{1.333 \cdot 1 + 2.333 \cdot 2 + 1 \cdot 6 - 0.424 \cdot 1.571}{7.429} = 1.526 \text{ м}.$$

Вычисления удобно свести в таблицу:

$i$	$A_i$	$x_i$	$y_i$	$A_i x_i$	$A_i y_i$
1	1	0.667	1.333	0.667	1.333
2	2	2.667	2.333	5.333	4.667
3	6	2.5	1	15	6
4	-1.571	3	0.424	-4.712	-0.666
$\sum$	7.429			16.288	11.333

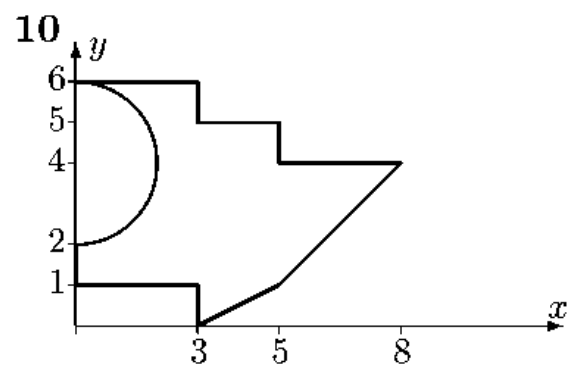
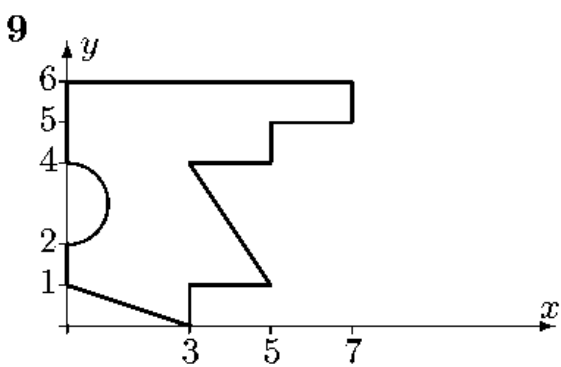
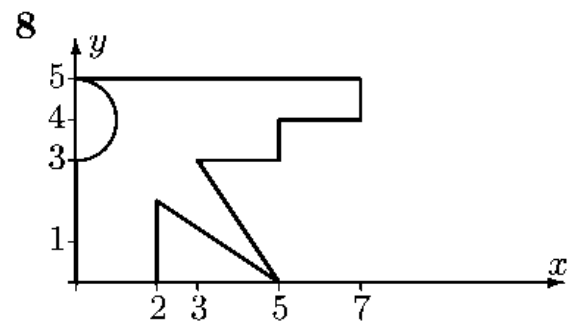
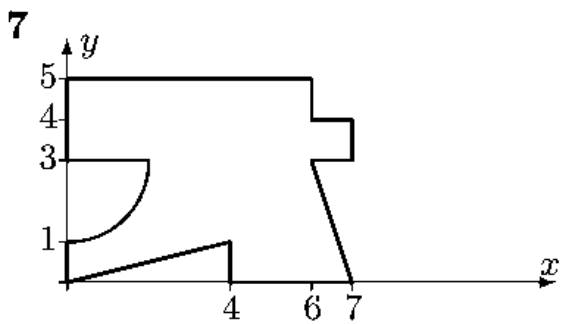
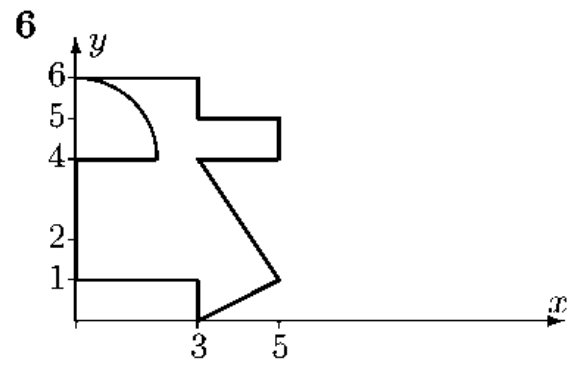
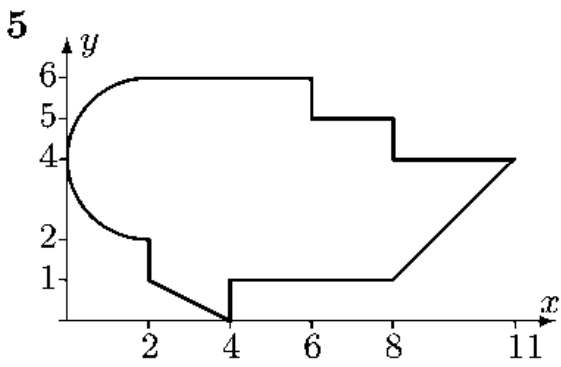
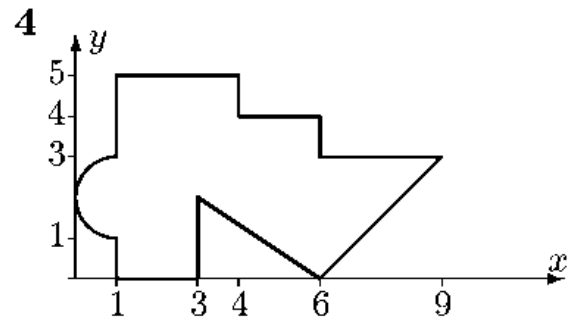
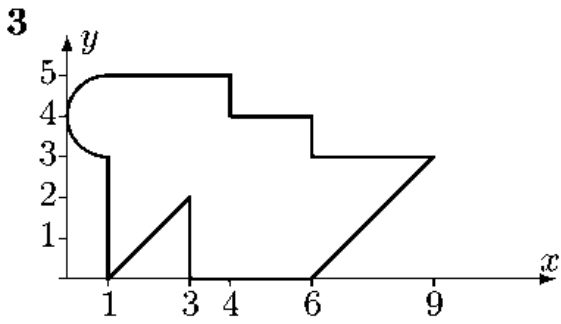
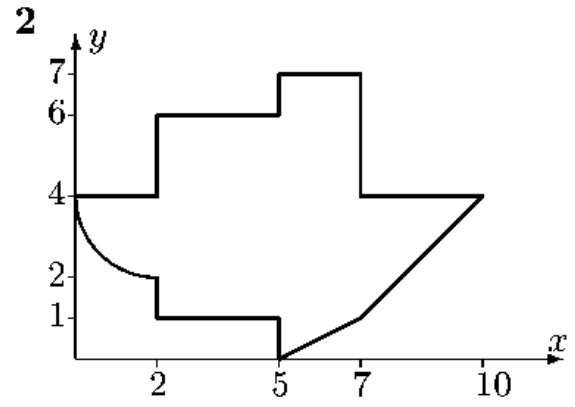
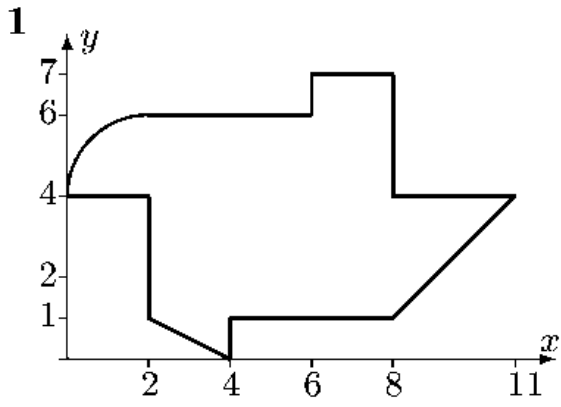
Сначала заполняем столбцы  $A_i, x_i, y_i$ , затем вычисляем статические моменты  $A_i x_i, A_i y_i$ . Внизу записываем суммы столбцов, необходимые для вычисления координат центра тяжести. Таким образом

$$x_c = \frac{16.288}{7.429} = 2.192 \text{ м}, \quad y_c = \frac{11.333}{7.429} = 1.526 \text{ м}.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Большинство задач на определение центра тяжести допускает несколько способов разбиения фигуры. Это можно использовать для проверки решения. Вторым вариантом разбиения фигуры в данном примере состоит из прямоугольника **3** с размерами  $4\text{м} \times 3\text{м}$  и вырезанных из него полукруга **4** и двух треугольников **1** и **2** (рис. 77).

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Решение задачи в системе Maple V методом контурного интегрирования приведено в § 15.2, с. 355.

**УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.** Найти площадь (в  $\text{м}^2$ ) и координаты центра тяжести плоской фигуры (в м). Отметки на осях даны в метрах. Криволинейный участок контура является дугой половины или четверти окружности.



ЗАМЕЧАНИЕ 3. Во всех вариантах фигуру можно разбить на пять частей.

Ответы

	$A$	$x_c$	$y_c$		$A$	$x_c$	$y_c$
1	40.642	5.203	3.627	6	17.858	2.380	2.964
2	35.642	4.764	3.495	7	27.358	3.582	2.653
3	27.071	3.887	2.492	8	19.429	2.668	2.945
4	26.071	3.755	2.441	9	23.929	2.668	3.585
5	39.783	4.702	3.351	10	22.217	3.593	2.950

## 5.2. Пространственная стержневая система

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Найти координаты центра тяжести пространственной фигуры, состоящей из  $N$  однородных стержней.

ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Разбиваем фигуру на отдельные стержни.
2. Выбираем систему координат. Вычисляем длины и координаты  $x_i, y_i, z_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  центров тяжести отдельных стержней. Координаты центра прямолинейного однородного стержня вычисляем как полусумму координат его концов.

3. Находим суммарную длину стержней системы  $L = \sum_{i=1}^N L_i$ .

4. Определяем координаты центра тяжести тела по формулам

$$x_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N L_i x_i, \quad y_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N L_i y_i, \quad z_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N L_i z_i.$$

ПРИМЕР. Найти координаты центра тяжести пространственной фигуры, состоящей из шести однородных стержней (рис. 78). Даны размеры:  $a = 12$  м,  $b = 16$  м,  $c = 10$  м,  $d = 5$  м.

РЕШЕНИЕ

1. Разбиваем фигуру на шесть стержней.
2. Выбираем систему координат (рис. 78). Вычисляем длины и координаты  $x_i, y_i, z_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  центров тяжести отдельных стержней.

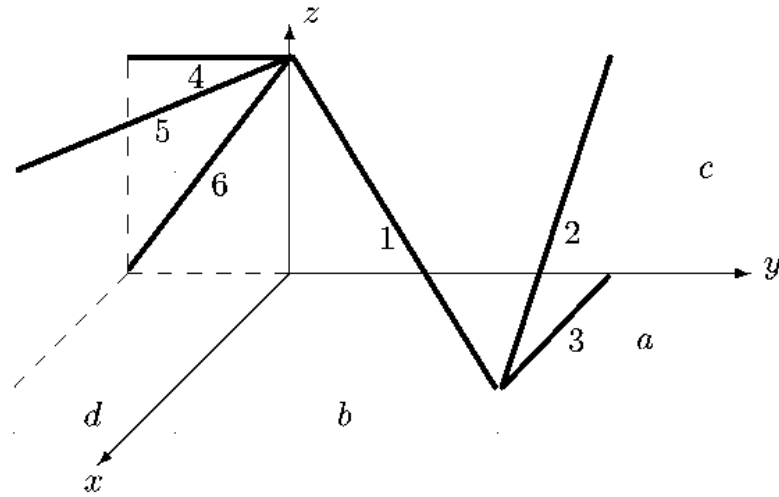


Рис. 78

3. Находим суммарную длину стержней системы:

$$L = \sum_{i=1}^6 L_i = 79.162 \text{ м.}$$

Промежуточные результаты удобно занести в таблицу:

$i$	$L_i$	$x_i$	$y_i$	$z_i$
1	$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$	$a/2$	$b/2$	$c/2$
2	$\sqrt{a^2 + c^2}$	$a/2$	$b$	$c/2$
3	$a$	$a/2$	$b$	0
4	$d$	0	$-d/2$	$c$
5	$\sqrt{a^2 + d^2}$	$a/2$	$-d/2$	$c$
6	$\sqrt{c^2 + d^2}$	0	$-d/2$	$c/2$

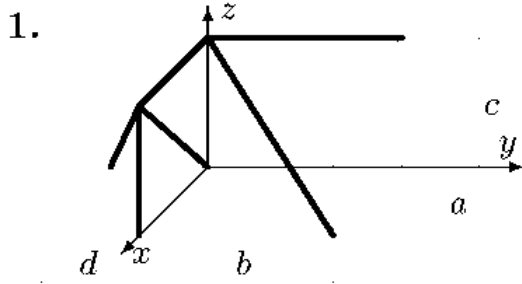
4. Определяем координаты центра тяжести тела по формулам

$$x_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N L_i x_i = 4.774 \text{ м, } y_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N L_i y_i = 6.921 \text{ м,}$$

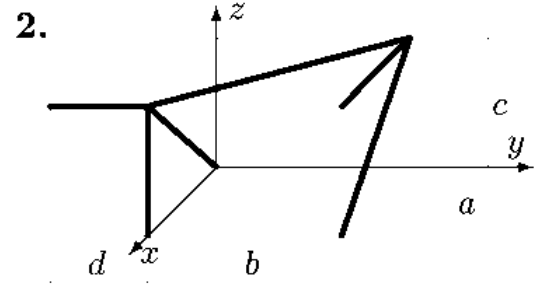
$$z_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N L_i z_i = 5.379 \text{ м.}$$

*УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти координаты центра тяжести пространственной фигуры, состоящей из шести однородных стержней (в метрах). Размеры даны в метрах.*

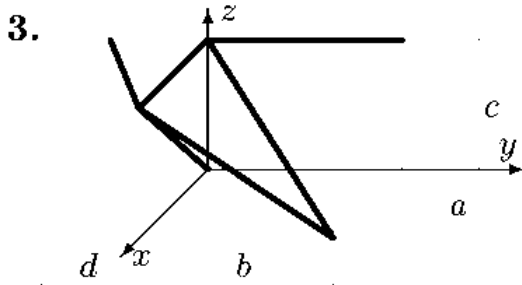




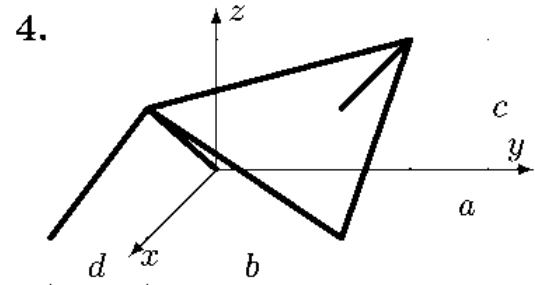
$a = 3, b = 4, c = 3, d = 2.$



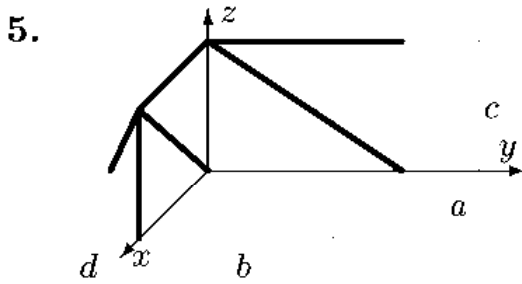
$a = 5, b = 4, c = 3, d = 2.$



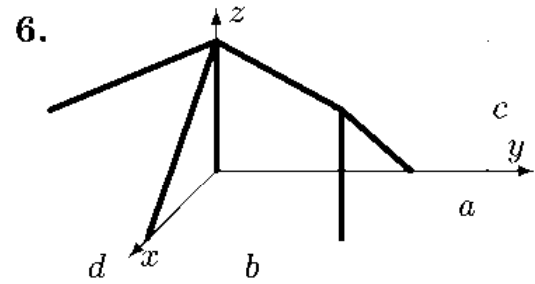
$a = 6, b = 5, c = 4, d = 3.$



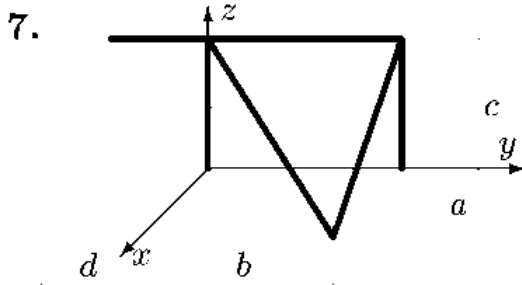
$a = 4, b = 6, c = 5, d = 4.$



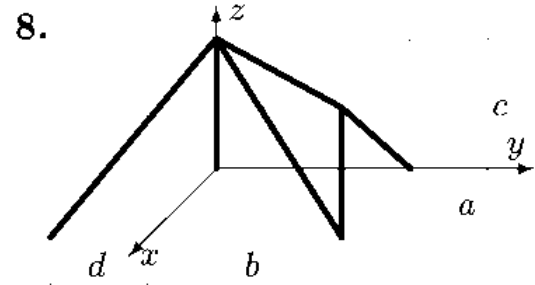
$a = 3, b = 4, c = 3, d = 2.$



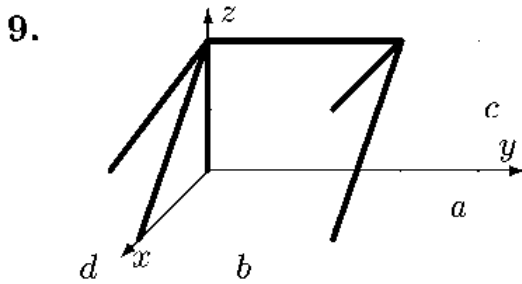
$a = 5, b = 4, c = 3, d = 1.$



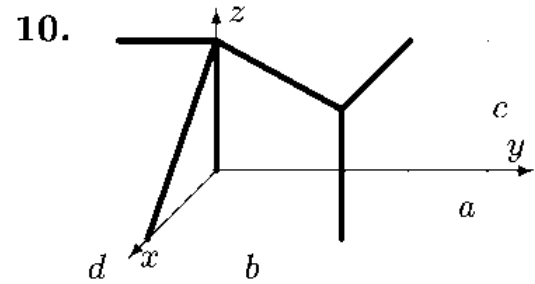
$a = 6, b = 5, c = 4, d = 2.$



$a = 4, b = 6, c = 5, d = 3.$



$a = 3, b = 4, c = 3, d = 1.$



$a = 6, b = 5, c = 4, d = 2.$

## Ответы

	$L$	$x_c$	$y_c$	$z_c$		$L$	$x_c$	$y_c$	$z_c$
1	24.764	1.439	0.605	1.924	6	29.164	2.500	1.563	2.092
2	28.065	2.945	1.929	2.216	7	30.986	1.548	2.856	2.452
3	40.097	3.105	1.007	2.883	8	39.460	2.000	2.680	2.957
4	38.231	2.744	2.476	3.233	9	21.648	0.796	1.635	1.985
5	23.933	1.124	0.556	1.939	10	31.021	2.807	2.177	3.019

В таблице ответов  $L$  — суммарные длины стержней (в м).

## 5.3. Центр тяжести объемного тела

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** Найти координаты центра тяжести однородного объемного тела.

### ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Разбиваем тело на простые части, положение центров тяжести которых известно.

2. Выбираем систему координат. Вычисляем объемы  $V_i$  и координаты  $x_i, y_i, z_i$  центров тяжести отдельных частей. Объемы вырезанных частей берем со знаком минус.

3. Находим общий объем тела по формуле  $V = \sum V_i$ .

4. Определяем координаты центра тяжести тела:

$$x_c = \sum V_i x_i / V, \quad y_c = \sum V_i y_i / V, \quad z_c = \sum V_i z_i / V.$$

**ПРИМЕР.** Найти координаты центра тяжести однородного объемного тела (рис. 79);  $a = 10$  м,  $b = 12$  м,  $c = 6$  м,  $d = 8$  м,  $R = d/2$ .

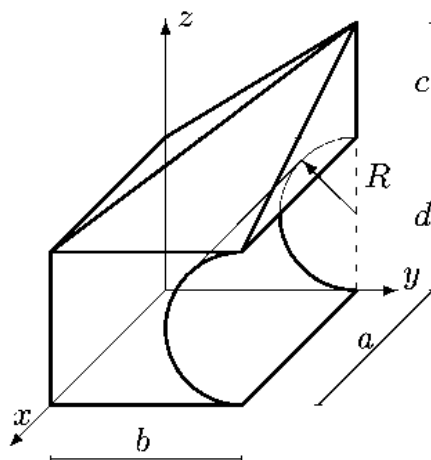


Рис. 79

**РЕШЕНИЕ**

1. Разбиваем тело на пирамиду **1**, параллелепипед **2** и половину цилиндра **3** (рис. 80).

2. Выбираем систему координат. Вычисляем объемы  $V_i$  и координаты  $x_i, y_i, z_i$  центров тяжести отдельных частей. Центр тяжести пирамиды **1** лежит в точке  $C_1$ ,  $C_0C_1 = C_0O_1/4$ ,

$$V_1 = \frac{1}{3}abc, \quad x_1 = \frac{3}{8}a, \quad y_1 = \frac{5}{8}b, \quad z_1 = d + \frac{1}{4}c.$$

Центр тяжести параллелепипеда **2** совпадает с его геометрическим центром:

$$V_2 = abd, \quad x_2 = \frac{1}{2}a, \quad y_2 = \frac{1}{2}b, \quad z_2 = \frac{1}{2}d.$$

Объем половины цилиндра **3** берем со знаком минус:

$$V_3 = -\pi R^2 a/2, \quad x_3 = \frac{1}{2}a, \quad y_3 = b - l, \quad z_3 = \frac{1}{2}d,$$

где  $l = 4R/(3\pi)$  — расстояние по оси  $y$  от оси цилиндра до его центра тяжести <sup>\*)</sup>.

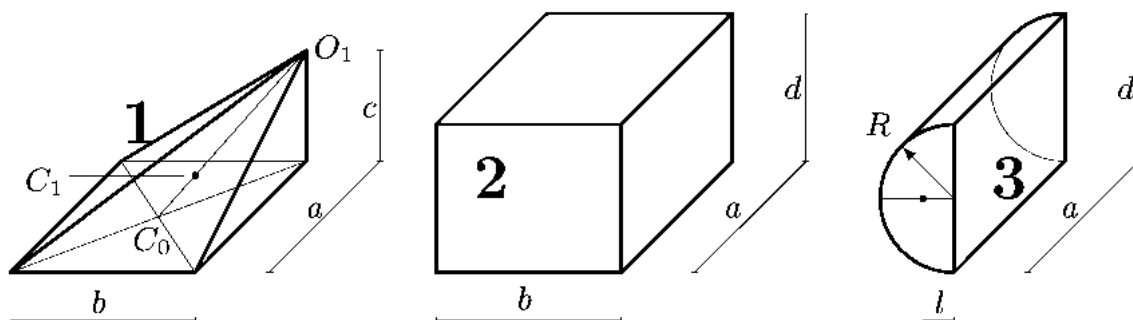


Рис. 80

3. Находим общий объем тела:

$$V = \sum_{i=1}^3 V_i = 240 + 960 - 251.327 = 948.673 \text{ м}^3.$$

<sup>\*)</sup> В общем случае объем тела, лежащего в области  $\Omega$ , можно найти, вычисляя тройной интеграл по области  $V = \iiint_{\Omega} dx dy dz$ , а координаты центра тяжести, например,  $x_c$  однородного тела можно определить по формуле  $x_c = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} x dx dy dz$ ; см. *Решebник ВМ*, §12.9.

4. Определяем координаты центра тяжести тела:

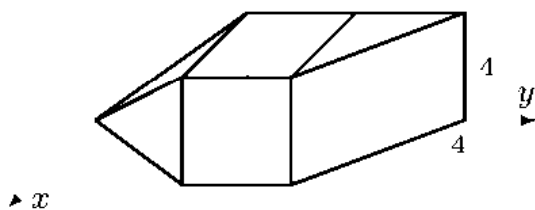
$$x_c = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^3 V_i x_i = \frac{240 \cdot 3.75 + 960 \cdot 5 - 251.327 \cdot 5}{948.673} = 4.684 \text{ м.}$$

$$y_c = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^3 V_i y_i = \frac{240 \cdot 7.5 + 960 \cdot 6 - 251.327 \cdot 10.302}{948.673} = 5.240 \text{ м.}$$

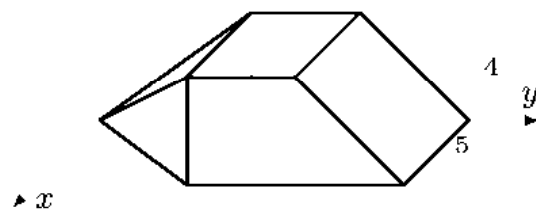
$$z_c = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^3 V_i z_i = \frac{240 \cdot 9.5 + 960 \cdot 4 - 251.327 \cdot 4}{948.673} = 5.391 \text{ м.}$$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти координаты центра тяжести однородного объемного тела. Размеры даны в метрах.

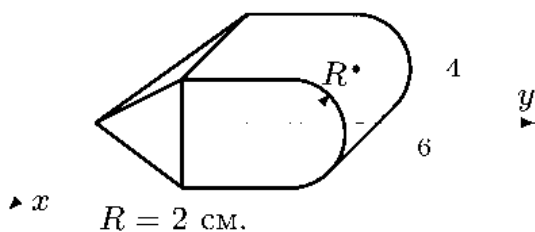
1.  $z \uparrow$  5 4 3



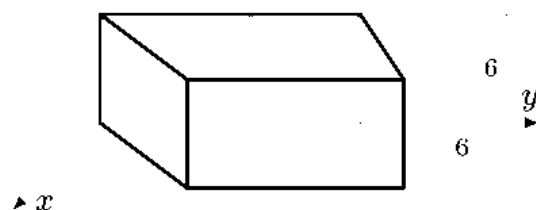
2.  $z \uparrow$  6 5 4



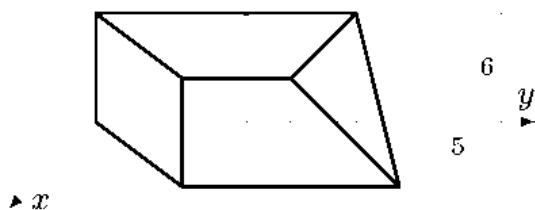
3.  $z \uparrow$  7 6



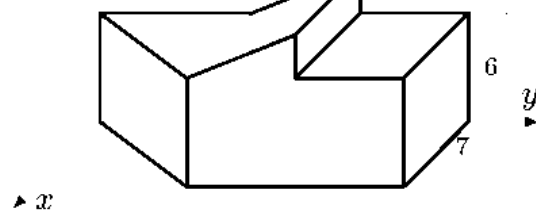
4.  $z \uparrow$  9 8 6

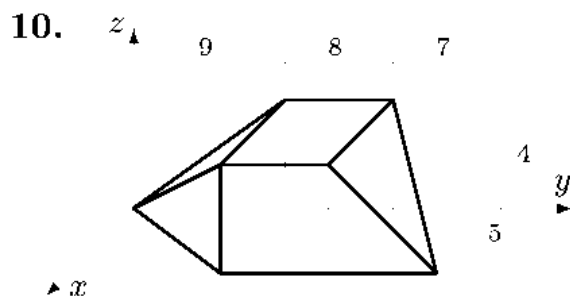
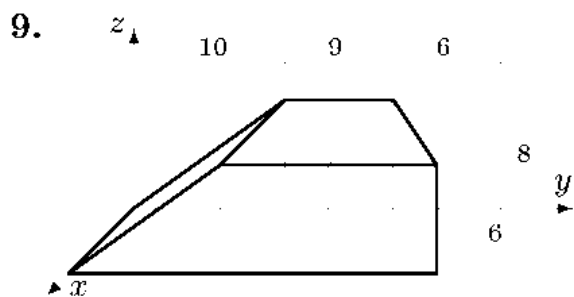
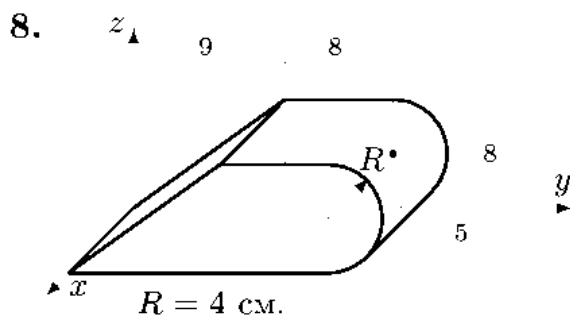
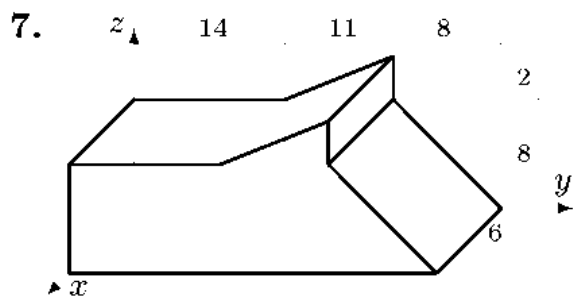


5.  $z \uparrow$  10 9 7



6.  $z \uparrow$  9 7 5





Ответы

	$V$	$x_c$	$y_c$	$z_c$		$V$	$x_c$	$y_c$	$z_c$
1	114.667	1.744	6.872	1.884	6	717.500	3.193	12.584	4.263
2	180.000	2.361	8.463	1.741	7	1458.000	3.000	14.897	5.333
3	237.699	2.823	9.491	1.882	8	625.664	2.500	12.131	3.616
4	558.000	2.903	12.129	3.000	9	816.000	3.176	13.343	3.608
5	490.000	2.334	12.995	2.893	10	266.667	2.469	12.600	1.800

В таблице ответов дан объем тела — в  $\text{м}^3$ , координаты центра тяжести — в м.

## Часть II

### КИНЕМАТИКА

Кинематика — наука о движении геометрических тел. В ней рассматривается само движение без изучения причин, вызывающих это движение. Впервые термин “кинематика” ввел А.Ампер (1775–1836), взяв за основу греческое слово *κίνημα*, означающее движение.

Простейшим объектом в кинематике является точка. В кинематике точки рассматриваются следующие функции времени  $t$ : радиус-вектор  $\vec{r}(t)$ , скорость  $\vec{v}(t)$  и ускорение  $\vec{W}(t)$ :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}, \quad \vec{W}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}.$$

Движение тела в кинематике начинают изучать с поступательного и вращательного движения. Во вращательном движении вводятся понятия угла поворота тела  $\varphi(t)$ , угловой скорости и углового ускорения. Последние две величины векторные, но для вращательного движения их направление всегда постоянно — по оси вращения. Поэтому в решении часто используются скалярные величины  $\omega_z(t) = \dot{\varphi}(t)$ ,  $\varepsilon_z(t) = \dot{\omega}_z(t)$ , имеющие смысл проекций этих векторов на ось вращения  $z$ . Точкой будем обозначать производную по времени.

В плоском движении тела каждая точка тела движется в плоскости, параллельной некоторой фиксированной плоскости. Само тело вовсе не обязательно должно быть плоским. Говорить о скорости тела или его ускорении в общем случае не имеет смысла: тело состоит из множества точек, каждая из которых может иметь свою скорость и ускорение. Исключение составляет поступательное движение тела, при котором равны скорости и ускорения всех точек. Кроме того, в некоторых задачах иногда говорят, например, о скорости катящегося цилиндра или о скорости автомобиля, подразумевая при этом

скорость точек центральной оси цилиндра или скорость кузова автомобиля, принимая его за точку.

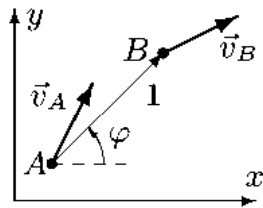
Угловая скорость и ускорение для плоского движения — векторные величины, но их направления всегда перпендикулярны плоскости движения. Введем декартову систему координат, в которой плоскость  $xy$  совпадает с плоскостью движения. Тогда угловая скорость  $\vec{\omega}$  и ускорение  $\vec{\varepsilon}$  направлены вдоль оси  $z$ . В решении задач удобно использовать скалярные величины — проекции этих векторов на ось  $z$ :  $\omega_z$  и  $\varepsilon_z$ .

Скорость точки  $A$  тела при плоском движении вычисляют через известную скорость какой-либо точки  $B$  того же тела, принимаемой за полюс (рис. 81):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \quad \vec{v}_{BA} = \vec{\omega}_1 \times \vec{AB}. \quad (1)$$

Для расчета скоростей точек многозвонного механизма, каждое звено которого совершает плоское движение, формулу (1) применяют

последовательно для всех точек, переходя от одной точки, принимаемой за полюс, к другой. Схему вычислений в этом случае удобно записывать в виде структурных формул (графов [15])



$$A \xrightarrow[\varphi_1]{1} B, \quad (2)$$

где над стрелкой указан номер тела или наименование стержня, которому принадлежат точки, а снизу — угол  $\varphi$  между осью  $x$  и вектором  $\vec{AB}$ . В проекциях на оси  $x, y$  граф (2) даст уравнения

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= v_{Ax} - AB \omega_{1z} \sin \varphi_1, \\ v_{By} &= v_{Ay} + AB \omega_{1z} \cos \varphi_1, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\omega_{1z}$  — проекция угловой скорости тела 1 на ось  $z$ , перпендикулярную плоскости движения<sup>\*)</sup>. Если вращение происходит против часовой стрелки, то  $\omega_{1z} = |\omega_1|$ , а если — по часовой стрелке, то  $\omega_{1z} = -|\omega_1|$ .

Ускорения точек тела при плоском движении связаны формулой

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{AB} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{BA}. \quad (4)$$

<sup>\*)</sup> Правило "трех С" для запоминания формулы (3): в первом уравнении (проекция на ось  $x$ ) "икС", "минуС", "синуС".

## Глава 6

# КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

При изучении темы КИНЕМАТИКА ТОЧКИ вы познакомитесь с простейшими понятиями кинематики. Этот раздел теоретической механики наиболее близко примыкает к математике. Умение дифференцировать и понимать смысл найденных производных — необходимые условия для освоения этой темы.

Проверить и “оживить” решение задачи § 6.1 можно с помощью программы, написанной для математической системы Maple V (§ 16.1, с. 358). Аналогичная программа содержится в [13].

### 6.1. Движение точки в плоскости

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Точка движется по закону*

$$x = x(t), y = y(t). \quad (1)$$

*Для заданного момента времени найти скорость, ускорение точки и радиус кривизны траектории.*

ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Определяем траекторию движения точки, исключая  $t$  из закона движения (1).

2. Дифференцируя (1) по времени  $t$ , находим проекции скорости точки на оси  $x, y$ :

$$v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}. \quad (2)$$

3. Модуль скорости вычисляем по формуле  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ .

4. Дифференцируя (2), находим компоненты вектора ускорения  $W_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$ ,  $W_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$ .

5. Определяем модуль ускорения  $W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2}$ .

6. Вычисляем тангенциальное (касательное) ускорение. Дифференцируя скорость  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ , как сложную функцию времени,



получаем \*)

$$|W_\tau| = \frac{|v_x W_x + v_y W_y|}{v}.$$

7. Вычисляем нормальное ускорение  $W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2}$ .

8. Нормальное ускорение зависит от скорости точки и радиуса кривизны траектории:

$$W_n = \frac{v^2}{R}.$$

Отсюда находим радиус кривизны

$$R = \frac{v^2}{W_n}.$$

ПРИМЕР. Точка движется по закону

$$x = 3 \sin 2t, \quad y = 2 \cos 4t. \quad (3)$$

Для момента времени  $t = t_1 = \pi/12$  найти скорость, ускорение точки и радиус кривизны траектории. Координаты  $x, y$  даны в см, время — в с.

РЕШЕНИЕ

1. Определяем траекторию движения точки, исключая  $t$  из закона движения (3). Параметрическим представлением траектории является сам закон движения (3). Координатную форму уравнения движения точки получаем, исключая из закона движения (3) время:

$$y = 2(1 - 2 \sin^2 2t) = 2(1 - 2(x/3)^2) = 2 - 4x^2/9. \quad (4)$$

Для того, чтобы окончательно получить ответ на вопрос о траектории, необходимо еще выделить область определения функции (4). Не все точки кривой, определяемой этой функцией, являются точками траектории. При  $0 \leq t \leq \pi/4$  имеем

$$0 \leq x \leq 3, \quad (5)$$

---

\*) Эту же формулу можно вывести иначе, исходя из того, что величина  $W_\tau$  равна проекции ускорения на касательную к траектории:

$$|W_\tau| = |\vec{W} \cdot \vec{v}/v| = |v_x W_x + v_y W_y|/v.$$

т.е. траекторией является правая ветвь параболы (4) (рис. 82). График строим по точкам (отмечены звездочками), через равные промежутки времени 0.1 с.

2. Дифференцируя (3) по времени  $t$ , находим проекции скорости точки на оси  $x, y$ :

$$v_x = \dot{x} = 6 \cos 2t, \quad v_y = \dot{y} = -8 \sin 4t. \quad (6)$$

При  $t = \pi/12$  имеем следующие численные значения компонентов скорости:

$$\begin{aligned} v_x &= 6 \cos(\pi/6) = 3\sqrt{3} = 5.196 \text{ см/с}, \\ v_y &= -8 \sin(\pi/3) = -4\sqrt{3} = -6.928 \text{ см/с}. \end{aligned}$$

3. Модуль скорости вычисляем по формуле

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 5\sqrt{3} = 8.66 \text{ см/с}. \quad (7)$$

Вектор скорости  $\vec{v}$  строим на рисунке в масштабе по известным компонентам  $v_x$  и  $v_y$ . Если в вычислениях нет ошибок, то вектор скорости будет направлен по касательной к траектории (рис. 82).

4. Дифференцируя (6), находим компоненты вектора ускорения:

$$\begin{aligned} W_x &= \dot{v}_x = \ddot{x} = -12 \sin 2t, \\ W_y &= \dot{v}_y = \ddot{y} = -32 \cos 4t. \end{aligned}$$

При  $t = \pi/12$

$$\begin{aligned} W_x &= -12 \sin \pi/6 = -6 \text{ см/с}^2, \\ W_y &= -32 \cos \pi/3 = -16 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

5. Определяем модуль ускорения

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = \sqrt{292} = 17.088 \text{ см/с}^2.$$

Вектор ускорения строим на чертеже в масштабе ускорений (не обязательно совпадающем с масштабом скоростей). Вектор ускорения направлен внутрь вогнутости кривой.

6. Вычисляем тангенциальное ускорение <sup>\*)</sup>:

$$|W_\tau| = \frac{|3\sqrt{3}(-6) + (-4\sqrt{3})(-16)|}{5\sqrt{3}} = \frac{46}{5} = 9.2 \text{ см/с}^2.$$

---

<sup>\*)</sup> Наличие тангенциального ускорения точки видно уже из рис. 82. Расстояние между первыми двумя точками меньше, чем между двумя последними, хотя интервал времени одинаков. Характеристикой такого изменения является величина  $W_\tau = \dot{v}_\tau$ .

7. Вычисляем нормальное ускорение:

$$W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2} = \sqrt{292 - (46/5)^2} = 72/5 = 14.4 \text{ см/с}^2.$$

8. Находим радиус кривизны траектории в указанном положении точки:

$$R = \frac{v^2}{W_n} = \frac{75 \cdot 5}{72} = 5.208 \text{ см.}$$

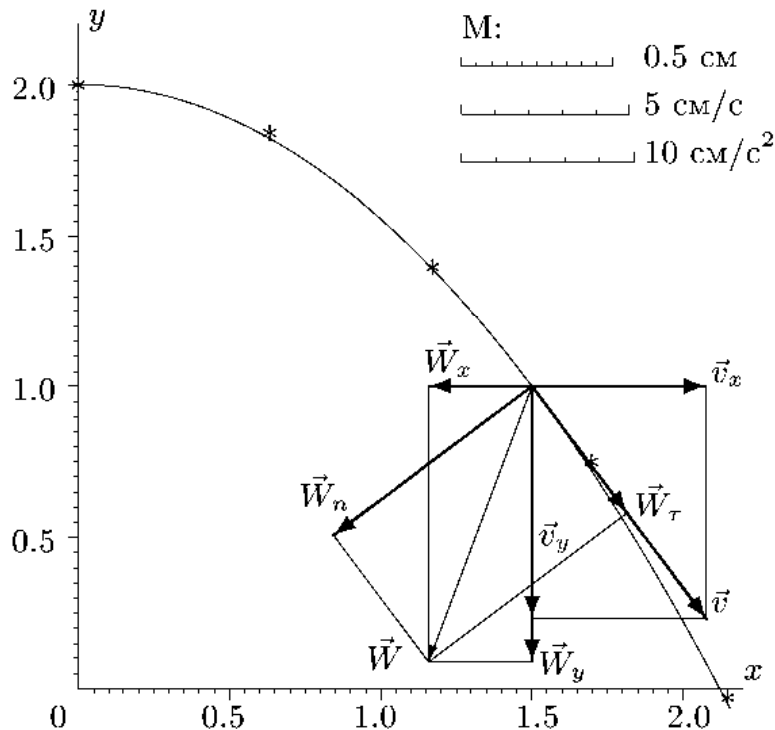


Рис. 82

Центр кривизны траектории лежит на нормали к кривой на расстоянии  $R = 5.208$  см внутри вогнутости кривой. Окружность радиусом  $R$  с центром в этой точке максимально близко совпадает с кривой в малой окрестности от нее.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Точка движется по закону  $x = x(t), y = y(t)$ . Для момента времени  $t = t_1$  найти скорость, ускорение точки и радиус кривизны траектории ( $x$  и  $y$  даны в см,  $t_1$  — в с).

1.  $x = 2 \sin(2t),$   
 $y = 3 + 3 \cos(4t),$   
 $t_1 = \pi/12.$
2.  $x = 100/(t + 2),$   
 $y = (t - 100)/(t + 2)^2,$   
 $t_1 = 2.$
3.  $x = 4e^{2t} + 5,$   
 $y = e^{4t}/4,$   
 $t_1 = 0.3.$
4.  $x = 24t/(1 + t^3),$   
 $y = 24t^2/(1 + t^3),$   
 $t_1 = 0.4.$
5.  $x = 6(2t - \sin(2t)),$   
 $y = 6(1 - \cos(2t)),$   
 $t_1 = 5\pi/12.$
6.  $x = 16/(t + 2),$   
 $y = (40 - 60t)/(t + 2)^3,$   
 $t_1 = 0.6.$
7.  $x = (100/(t^4 + 1) + 1)/8,$   
 $y = t^4,$   
 $t_1 = 1.1.$
8.  $x = (45/(e^{5t} + 1) + 1)/9,$   
 $y = e^{5t},$   
 $t_1 = 0.08.$
9.  $x = 11 \cos(2t)(1 + \cos(2t)),$   
 $y = 11 \sin(2t)(1 + \cos(2t)),$   
 $t_1 = \pi/12.$
10.  $x = 11 \sin(3t),$   
 $y = 21 \cos(3t) + 12,$   
 $t_1 = 5\pi/9.$

### ОТВЕТЫ

	$v_x$	$v_y$	$v$	$W_x$	$W_y$	$W$	$W_\tau$	$W_n$	$R$
	см/с			см/с <sup>2</sup>					см
1	3.46	-10.39	10.95	-4.00	-24.00	24.33	21.50	11.38	10.54
2	-6.25	3.13	6.99	3.13	-2.36	3.92	-3.85	0.71	68.51
3	14.58	3.32	14.95	29.15	13.28	32.04	31.38	6.47	34.52
4	18.49	16.42	24.72	-37.03	22.16	43.15	-12.97	41.16	14.85
5	22.39	6.00	23.18	12.00	-20.78	24.00	6.21	23.18	23.18
6	-2.37	-3.68	4.37	1.82	8.28	8.48	-7.95	2.95	6.48
7	-10.96	5.32	12.19	17.47	14.52	22.72	-9.37	20.69	7.17
8	-6.01	7.46	9.58	5.93	37.30	37.76	25.33	28.01	3.27
9	-30.05	30.05	42.50	-82.11	-98.21	128.01	-11.39	127.50	14.17
10	16.50	54.56	57.00	85.74	-94.50	127.60	-65.64	109.42	29.69

## 6.2. Путь, пройденный точкой

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Точка движется по закону

$$x = x(t), y = y(t). \quad (1)$$

Определить длину пути, пройденного точкой за время  $t_1$ .

ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Дифференцируя (1) по времени  $t$ , находим проекции скорости точки на оси  $x, y$ :  $v_x = \dot{x}$ ,  $v_y = \dot{y}$ .

2. Считая, что время отсчитывается от нуля, находим длину пути <sup>\*)</sup>:

$$S = \int_0^{t_1} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} dt.$$

ПРИМЕР. Точка движется по закону

$$x = at, \quad y = bt^2, \quad (2)$$

где  $a = 3$  м/с,  $b = 2$  м/с<sup>2</sup>. Определить длину пути, пройденного точкой за время  $t_1 = 1$  с.

РЕШЕНИЕ

1. Дифференцируя (2) по времени  $t$ , находим проекции скорости точки на оси  $x, y$ :

$$v_x = \dot{x} = a, \quad v_y = \dot{y} = 2bt.$$

2. Считая, что время отсчитывается от нуля, находим длину пути:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{t_1} \sqrt{a^2 + 4b^2 t^2} dt = \\ &= (1/4) \left( 2t_1 \sqrt{a^2 + 4b^2 t_1^2} + (a^2/b) \ln((2bt_1 + \sqrt{a^2 + 4b^2 t_1^2})/a) \right). \end{aligned}$$

Подставляя числовые значения  $t = t_1 = 1$  с,  $a = 3$  м/с,  $b = 2$  м/с<sup>2</sup>, получаем  $S = 5/2 + (9/8) \ln 3 = 3.736$  м.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Точка движется по закону  $x = x(t), y = y(t)$ . Определить длину пути, пройденного точкой за время  $t_1$  ( $x$  и  $y$  даны в м,  $t_1$  — в с).

---

<sup>\*)</sup> Интегрирование функций см. *Решebник ВМ*, §7.1–8.6.

- |   |   |
|---|---|
| 1. $x = 2 \sin(e^t),$<br>$y = 2 \cos(e^t) + 2,$<br>$t_1 = 1.$         | 2. $x = 2 \ln(t + 1),$<br>$y = 3\sqrt{t + 1},$<br>$t_1 = 2.$                |
| 3. $x = 9t^3,$<br>$y = 12t^3,$<br>$t_1 = 0.3.$                        | 4. $x = 3t^4 + 5$<br>$y = 3t^2,$<br>$t_1 = 0.4.$                            |
| 5. $x = 3 \ln(t + 1),$<br>$y = 3(t + 1),$<br>$t_1 = 1.$               | 6. $x = (3t^2 + 2)/(t^2 + 3),$<br>$y = (2t^2 + 3)/(t^2 + 3),$<br>$t_1 = 2.$ |
| 7. $x = (4t + 3)/(t + 4),$<br>$y = (5t + 4)/(t + 4),$<br>$t_1 = 3.$   | 8. $x = t \sin(3t) + 5,$<br>$y = t \cos(3t),$<br>$t_1 = 2.$                 |
| 9. $x = t^2 \sin(t^2) + 2,$<br>$y = t^2 \cos(t^2) + 3,$<br>$t_1 = 1.$ | 10. $x = t^2 \cos(3t^2 + 2),$<br>$y = t^2 \sin(3t^2 + 2),$<br>$t_1 = 1.$    |

Ответы

1. 3.437 м. 2. 3.116 м. 3. 0.405 м. 4. 0.488 м. 5. 3.666 м.  
6. 1.451 м. 7. 2.209 м. 8. 6.498 м. 9. 1.148 м. 10. 1.884 м.

### 6.3. Движение точки в пространстве

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Точка движется по закону

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (1)$$

Определить скорость, ускорение точки и радиус кривизны траектории в заданный момент времени.

ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Дифференцируя (1) по времени  $t$ , находим проекции скорости точки на оси  $x, y$  и  $z$ :

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}. \quad (2)$$

2. Вычисляем модуль скорости  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ .

3. Дифференцируя (2), находим компоненты вектора ускорения:

$$W_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad W_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad W_z = \dot{v}_z = \ddot{z}.$$

4. Определяем модуль ускорения  $W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}$ .

5. Вычисляем модуль тангенциального ускорения:

$$|W_\tau| = \frac{|v_x W_x + v_y W_y + v_z W_z|}{v}.$$

6. Вычисляем нормальное ускорение  $W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2}$ .

7. Находим радиус кривизны траектории в указанном положении точки:  $R = v^2/W_n$ .

ПРИМЕР. Точка движется по закону

$$x = A \sin kt, \quad y = A \cos kt, \quad z = Bt, \quad (3)$$

где  $A = 3$  см,  $k = 2$  рад/с,  $B = 8$  см/с. При  $t = t_1 = \pi/3$  с найти скорость, ускорение точки и радиус кривизны ее траектории.

РЕШЕНИЕ

1. Дифференцируя (3) по времени  $t$ , находим проекции скорости точки на оси  $x, y$  и  $z$ :

$$v_x = \dot{x} = Ak \cos kt, \quad v_y = \dot{y} = -Ak \sin kt, \quad v_z = \dot{z} = B. \quad (4)$$

2. Вычисляем модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(Ak)^2 + B^2}.$$

3. Дифференцируя (4), находим компоненты вектора ускорения:

$$W_x = \ddot{x} = -Ak^2 \sin kt, \quad W_y = \ddot{y} = -Ak^2 \cos kt, \quad W_z = \ddot{z} = 0.$$

4. Определяем модуль ускорения:

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = Ak^2.$$

5. Вычисляем модуль тангенциального ускорения:

$$|W_\tau| = \frac{-A^2 k^3 \sin kt \cos kt + A^2 k^3 \cos kt \sin kt}{\sqrt{(Ak)^2 + B^2}} = 0.$$

6. Вычисляем нормальное ускорение:

$$W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2} = Ak^2.$$

7. Находим радиус кривизны траектории в указанном положении точки:

$$R = \frac{v^2}{W_n} = \frac{(Ak)^2 + B^2}{Ak^2}.$$

Радиус кривизны в данной задаче не зависит от времени. Кривая представляет собой винтовую линию постоянной кривизны.

Получаем значения искомых величин при  $t = \pi/3$ :

$$v = 10 \text{ см/с}, \quad W = 12 \text{ см/с}^2, \quad R = 8.333 \text{ см}.$$

Ответы занесем в таблицу (скорости — в см/с, ускорения — в см/с<sup>2</sup>, радиус кривизны — в см):

$v_x$	$v_y$	$v_z$	$v$	$W_x$	$W_y$	$W_z$	$W$	$W_\tau$	$W_n$	$R$
-3	-5.196	8	10	-10.392	6	0	12	0	12	8.333

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Точка движется по закону  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ . Определить скорость, ускорение точки и радиус кривизны траектории при  $t = t_1$  ( $x, y$  и  $z$  даны в см,  $t$  и  $t_1$  — в с).

1.  $x = \frac{1}{2} \sin 4t + 2t, y = 12e^{t/2}, z = \frac{1}{2} \sin^2 4t - 2t, t_1 = 0.1.$

2.  $x = \frac{6}{2t+3}, y = \frac{6}{2t+3}, z = 13e^{t/3}, t_1 = 0.2.$

3.  $x = 5(t+1)^{3/10}, y = \frac{1}{2} \sin^2 8t - 4t, z = \frac{1}{2} \sin 8t + 4t, t_1 = 0.3.$

4.  $x = 5\sqrt{4t+5}, y = \frac{1}{2} \sin 4t + 5t, z = \frac{8}{t+2}, t_1 = 0.4.$

5.  $x = 5 \ln(3t+2), y = 16e^{t/3}, z = 7(t+1)^{1/5}, t_1 = 0.5.$

6.  $x = 3t^2 + 3t + 2, y = 2 \ln(2t+2), z = 13e^{t/4}, t_1 = 0.2.$

7.  $x = \frac{1}{2} \sin^2 4t - 4t, y = t^2 + 4t + 4, z = 3 \ln(4t+2), t_1 = 0.3.$



$$8. \quad x = 4t + \frac{1}{2} \cos^2 6t, \quad y = \frac{6}{2t+3}, \quad z = 2t^2 + 3t + 3, \quad t_1 = 0.2.$$

$$9. \quad x = \frac{1}{2} \sin 8t + 5t, \quad y = 15e^{t/4}, \quad z = 6(t+1)^{3/10}, \quad t_1 = 0.4.$$

$$10. \quad x = 12e^{t/2}, \quad y = 3(t+1)^{1/10}, \quad z = 3t + \frac{1}{4} \cos^2 8t, \quad t_1 = 0.1.$$

Ответы

	$v_x$	$v_y$	$v_z$	$v$	$W_x$	$W_y$	$W_z$	$W$	$W_\tau$	$W_n$	$R$
	см/с				см/с <sup>2</sup>						см
1	3.84	6.31	-0.57	7.41	-3.12	3.15	11.15	12.00	0.22	11.99	4.57
2	-1.04	-1.04	4.63	4.86	1.22	1.22	1.54	2.32	0.95	2.11	11.17
3	1.25	-7.98	1.05	8.15	-0.67	5.60	-21.61	22.34	-8.38	20.71	3.21
4	3.89	4.94	-1.39	6.44	-1.18	-8.00	1.16	8.17	-7.10	4.04	10.27
5	4.29	6.30	1.01	7.69	-3.67	2.10	-0.54	4.27	-0.40	4.25	13.91
6	4.20	1.67	3.42	5.66	6.00	-1.39	0.85	6.22	4.55	4.23	7.58
7	-2.65	4.60	3.75	6.50	-11.80	2.00	-4.69	12.85	3.52	12.36	3.42
8	1.97	-1.04	3.80	4.41	26.55	1.22	4.00	26.87	15.05	22.26	0.87
9	1.01	4.14	1.42	4.50	1.87	1.04	-0.71	2.25	1.15	1.94	10.44
10	6.31	0.28	1.00	6.39	3.15	-0.23	0.93	3.30	3.25	0.56	72.54

## 6.4. Естественный способ задания движения точки

Постановка задачи. Точка движется по плоской кривой

$$y = y(x) \tag{1}$$

с постоянной скоростью  $v$ . Определить ускорение точки, радиус кривизны траектории и косинус угла наклона касательной к траектории с осью  $ox$ , при заданном значении  $x$ .

План решения

1. Находим зависимость между компонентами скорости. Дифференцируя (1) по  $t$ , используя правило дифференцирования сложной функции  $y(x(t))$ , получаем

$$v_y = \dot{y} = y' \dot{x} = y' v_x, \tag{2}$$

где штрихом обозначена производная по координате,  $y' = dy/dx$ , а точкой, как всегда, — по времени,  $\dot{x} = dx/dt$ .

2. Дополняя (2) уравнением  $v_x^2 + v_y^2 = v^2$ , получаем систему уравнений, из которой находим компоненты скорости  $v_x$  и  $v_y$ .

3. Находим косинус угла наклона касательной к траектории с осью  $ox$ :  $\cos \alpha = v_x/v$ .

4. Находим зависимость между компонентами ускорения. Дифференцируя (2) по  $t$ , получаем

$$W_y = \frac{dy'}{dt} \dot{x} + y' \ddot{x} = y'' \dot{x}^2 + y' W_x, \quad (3)$$

где  $y'' = d^2y/dx^2$ .

5. Так как по условию  $v = \text{const}$ , то тангенциальное ускорение равно нулю. Отсюда получаем уравнение

$$|W_\tau| = \frac{|v_x W_x + v_y W_y|}{v^2} = 0,$$

которое совместно с (3) даст систему для определения проекций ускорения. Решаем систему и находим  $W_x$  и  $W_y$ .

6. Вычисляем модуль ускорения  $W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2}$ .

7. Согласно п.5, тангенциальное ускорение равно нулю и нормальное ускорение совпадает с полным:  $W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2} = W$ . Так как  $W_n = v^2/R$ , находим отсюда радиус кривизны траектории:

$$R = v^2/W_n.$$

**ПРИМЕР.** Точка движется по плоской кривой

$$y = x \sin \frac{x+1}{3} \quad (4)$$

с постоянной скоростью  $v = 4$  м/с. Определить ускорение точки, радиус кривизны траектории и косинус угла касательной к траектории с осью  $ox$  при  $x = 1$  м.

**РЕШЕНИЕ**

1. Находим зависимость между компонентами скорости. Дифференцируем (4) по  $t$ . Используя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$v_y = \dot{y} = y' \dot{x} = y' v_x, \quad (5)$$

где

$$y' = \left( x \sin \frac{x+1}{3} \right)' = \sin \frac{x+1}{3} + \frac{x}{3} \cos \frac{x+1}{3}.$$

При  $x = 1$  имеем  $y' = 0.88$  и

$$v_y = 0.88v_x.$$

2. Дополняя (5) уравнением  $v_x^2 + v_y^2 = v^2$ , получаем систему уравнений, из которой находим компоненты скорости  $v_x$  и  $v_y$ :

$$v_x = 3.002 \text{ м/с}, \quad v_y = 2.643 \text{ м/с}$$

3. Находим косинус угла касательной к траектории с осью  $ox$ :

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{3.002}{4} = 0.751.$$

4. Находим зависимость между компонентами ускорения. Дифференцируя (5) по  $t$ , получаем

$$W_y = \frac{dy'}{dt} \dot{x} + y' \ddot{x} = y'' \dot{x}^2 + y' W_x,$$

где

$$y'' = \left( \sin \frac{x+1}{3} + \frac{x}{3} \cos \frac{x+1}{3} \right)' = \frac{2}{3} \cos \frac{x+1}{3} - \frac{x}{9} \sin \frac{x+1}{3}.$$

При  $x = 1$  м вычисляем  $y'' = 0.455 \text{ м}^{-1}$ . С учетом ранее найденной величины  $\dot{x} = 3.002$ , получаем

$$W_y = 4.1 + 0.88W_x. \quad (6)$$

5. Из условия  $v = \text{const}$  следует, что

$$|W_\tau| = \frac{|v_x W_x + v_y W_y|}{v^2} = 0.$$

Решая это уравнение совместно с (6), находим проекции вектора ускорения:

$$W_x = -2.035 \text{ м/с}^2, \quad W_y = 2.312 \text{ м/с}^2.$$

6. Вычисляем модуль ускорения:

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = 3.080 \text{ м/с}^2.$$

7. Находим радиус кривизны траектории:

$$R = \frac{v^2}{W_n} = \frac{v^2}{W} = 5.195 \text{ м}.$$

Отвсты заносим в таблицу:

$y'$	$y''$	$v_x$	$v_y$	$\cos(\alpha)$	$W_x$	$W_y$	$W$	$R$
	1/м	м/с			м/с <sup>2</sup>			м
0.880	0.455	3.002	2.643	0.751	-2.035	2.312	3.080	5.195

ЗАМЕЧАНИЕ. В механике гибких стержней и сопротивлении материалов для нахождения радиуса кривизны кривой, заданной в форме  $y = y(x)$ , существует формула

$$R = (1 + y'^2)^{3/2} / y'' \quad (7)$$

Решенная задача представляет собой кинематический вывод этой формулы. Проверку решения можно выполнить, подставив в (7) найденные значения  $y'$  и  $y''$ .

Как и следовало ожидать, радиус кривизны траектории  $R$  от скорости движения точки не зависит, как не зависит, например, форма рельсового пути от скорости движения трамвая (если, конечно, не учитывать деформации).

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Точка движется по плоской кривой  $y = y(x)$  с постоянной скоростью  $v$ . Определить ускорение точки, радиус кривизны траектории и косинус угла наклона касательной к траектории с осью  $ox$  при заданном значении  $x$ .

- |   |   |
|---|---|
| 1. $y = -2x^2 + 5x + 3,$<br>$v = 1 \text{ м/с}, x = 1 \text{ м}.$           | 2. $y = \frac{x^2}{4} + \sin \frac{x}{6},$<br>$v = 5 \text{ м/с}, x = 2 \text{ м}.$ |
| 3. $y = 5 \ln(x/2 + 1),$<br>$v = 5 \text{ м/с}, x = 3 \text{ м}.$           | 4. $y = 3e^{x/5} - 3x,$<br>$v = 7 \text{ м/с}, x = 4 \text{ м}.$                    |
| 5. $y = \frac{34}{x + 2},$<br>$v = 8 \text{ м/с}, x = 5 \text{ м}.$         | 6. $y = 3\sqrt{3x + 1},$<br>$v = 12 \text{ м/с}, x = 6 \text{ м}.$                  |
| 7. $y = \frac{18}{\sin(x/3) + 2},$<br>$v = 3 \text{ м/с}, x = 1 \text{ м}.$ | 8. $y = 7\frac{x}{x + 3},$<br>$v = 4 \text{ м/с}, x = 2 \text{ м}.$                 |

9.  $y = 4 \cos \frac{x}{6} + \frac{x^2}{5}$ ,  
 $v = 5 \text{ м/с}, x = 3 \text{ м}.$

10.  $y = 3 \sin^2 \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{3}$ ,  
 $v = 4 \text{ м/с}, x = 4 \text{ м}.$

**Ответы**

	$y'$	$y''$	$v_x$	$v_y$	$\cos(\alpha)$	$W_x$	$W_y$	$W$	$R$
		1/м	м/с			м/с <sup>2</sup>			м
1	1.000	-4.000	0.707	0.707	0.707	1.000	-1.000	1.414	0.707
2	1.157	0.491	3.269	3.784	0.654	-2.595	2.242	3.429	7.291
3	1.000	-0.200	3.536	3.536	0.707	1.250	-1.250	1.768	14.142
4	-1.665	0.267	3.605	-6.001	0.515	1.532	0.920	1.787	27.422
5	-0.694	0.198	6.573	-4.561	0.822	4.011	5.781	7.037	9.095
6	1.032	-0.082	8.349	8.619	0.696	2.839	-2.750	3.953	36.430
7	-1.047	0.404	2.072	-2.169	0.691	0.867	0.828	1.199	7.507
8	0.840	-0.336	3.063	2.573	0.766	1.552	-1.848	2.413	6.629
9	0.880	0.302	3.753	3.304	0.751	-2.113	2.400	3.198	7.818
10	0.133	-0.619	3.965	0.528	0.991	1.274	-9.562	9.646	1.659

### 6.5. Движение точки в полярных координатах

Постановка задачи. *Задан закон движения точки в полярных координатах:*

$$\rho = \rho(t), \varphi = \varphi(t). \tag{1}$$

*Найти скорость и ускорение точки в полярных, декартовых и естественных координатах в заданный момент времени.*

**План решения**

1. Вычисляем полярные координаты точки в заданный момент времени:  $\rho = \rho(t), \varphi = \varphi(t)$ .

2. Дифференцируя (1) по времени  $t$ , находим производные полярного радиуса  $\rho$  и полярного угла:

$$\dot{\rho} = d\rho/dt, \dot{\varphi} = d\varphi/dt. \tag{2}$$

3. Вычисляем компоненты скорости в полярных координатах:

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}.$$

4. Находим модуль скорости  $v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2}$ .

5. Декартовы  $x$ ,  $y$  и полярные координаты  $\rho$ ,  $\varphi$  связаны соотношениями

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi, \\y &= \rho \sin \varphi.\end{aligned}\tag{3}$$

Дифференцируя (3), вычисляем компоненты скорости точки в декартовых координатах:

$$\begin{aligned}v_x &= v_\rho \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi, \\v_y &= v_\rho \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi.\end{aligned}$$

6. Делаем проверку, вычисляя модуль скорости по декартовым компонентам:  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ .

7. Дифференцируя (2), находим вторые производные полярного радиуса  $\rho$  и полярного угла:  $\ddot{\rho} = d^2\rho/dt^2$ ,  $\ddot{\varphi} = d^2\varphi/dt^2$ .

8. Вычисляем компоненты ускорения точки в полярных координатах:  $W_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2$ ,  $W_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}$ .

9. Модуль ускорения вычисляем по формуле  $W = \sqrt{W_\rho^2 + W_\varphi^2}$ .

10. Вычисляем компоненты ускорения точки в декартовых координатах, дважды дифференцируя (3):

$$\begin{aligned}W_x &= W_\rho \cos \varphi - W_\varphi \sin \varphi, \\W_y &= W_\rho \sin \varphi + W_\varphi \cos \varphi.\end{aligned}$$

11. Делаем проверку, вычисляя модуль ускорения по декартовым компонентам:  $W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2}$ .

12. Находим модуль тангенциального ускорения:

$$|W_\tau| = \frac{|v_x W_x + v_y W_y|}{v},$$

и проверяем его по формуле

$$|W_\tau| = \frac{|v_\rho W_\rho + v_\varphi W_\varphi|}{v}.$$

13. Вычисляем нормальное ускорение  $W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2}$ .

ПРИМЕР. Задан закон движения точки в полярных координатах:

$$\rho = t \sin(3t), \quad \varphi = t^3.\tag{4}$$

Найти скорость и ускорение точки в полярных, декартовых и естественных координатах при  $t = 1$  с. Радиус дан в метрах.

РЕШЕНИЕ

1. Вычисляем полярные координаты точки в заданный момент времени <sup>\*)</sup>:  $\rho = 1 \sin(1) = 0.141$ ,  $\varphi = 1$ .

2. Дифференцируя (4) по времени  $t$ , находим производные полярного радиуса  $\rho$  и полярного угла:

$$\dot{\rho} = \sin(3t) + 3t \cos(3t), \quad \dot{\varphi} = 3t^2. \quad (5)$$

При  $t = 1$  имеем  $\dot{\rho} = -2.829$ ,  $\dot{\varphi} = 3$ .

3. Вычисляем компоненты скорости в полярных координатах:

$$v_\rho = \dot{\rho} = -2.829 \text{ м/с}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi} = 0.141 \cdot 3 = 0.423 \text{ м/с}.$$

4. Вычисляем модуль скорости:  $v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2} = 2.860 \text{ м/с}$ .

5. Вычисляем компоненты скорости в декартовых координатах:

$$v_x = v_\rho \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi = -1.885 \text{ м/с},$$

$$v_y = v_\rho \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi = -2.152 \text{ м/с}.$$

6. Делаем проверку, вычисляя модуль скорости по декартовым компонентам:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1.885^2 + 2.152^2} = 2.860 \text{ м/с}.$$

7. Дифференцируя (5), находим вторые производные полярного радиуса  $\rho$  и полярного угла:

$$\ddot{\rho} = d^2\rho/dt^2 = 6 \cos(3t) - 9t \sin(3t),$$

$$\ddot{\varphi} = d^2\varphi/dt^2 = 6t.$$

При  $t = 1$  получаем  $\ddot{\rho} = -7.210$ ,  $\ddot{\varphi} = 6$ .

8. Вычисляем компоненты ускорения в полярных координатах:

$$W_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = -8.480 \text{ м/с}^2, \quad W_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = -16.126 \text{ м/с}^2.$$

9. Определяем модуль ускорения:  $W = \sqrt{W_\rho^2 + W_\varphi^2} = 18.220 \text{ м/с}^2$ .

---

<sup>\*)</sup> Аргументы тригонометрических функций измеряются в радианах.

10. Находим компоненты ускорения в декартовых координатах:

$$W_x = W_\rho \cos \varphi - W_\varphi \sin \varphi = 8.988 \text{ м/с}^2,$$

$$W_y = W_\rho \sin \varphi + W_\varphi \cos \varphi = -15.849 \text{ м/с}^2.$$

11. Делаем проверку, вычисляя модуль ускорения по декартовым компонентам:

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = \sqrt{8.988^2 + 15.849^2} = 18.220 \text{ м/с}^2.$$

12. Находим модуль касательного ускорения,

$$|W_\tau| = \frac{|v_x W_x + v_y W_y|}{v} = 6.000 \text{ м/с}^2,$$

и проверим его по формуле

$$|W_\tau| = \frac{|v_\rho W_\rho + v_\varphi W_\varphi|}{v} = \frac{|2.829 \cdot 8.48 - 0.423 \cdot 16.126|}{2.86} = 6.000 \text{ м/с}^2.$$

13. Вычисляем нормальное ускорение

$$W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2} = 17.204 \text{ м/с}^2.$$

Ответы заносим в таблицу (скорости — в м/с, ускорения — в м/с<sup>2</sup>):

$v_\rho$	$v_\varphi$	$v$	$v_x$	$v_y$	$W_\rho$	$W_\varphi$	$W$	$W_x$	$W_y$	$W_\tau$	$W_n$
-2.83	0.42	2.86	-1.88	-2.15	-8.48	-16.13	18.22	8.99	-15.85	6.0	17.20

**УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.** *Задан закон движения точки в полярных координатах:  $\rho = \rho(t)$  (в метрах),  $\varphi = \varphi(t)$ . В указанный момент времени найти скорость и ускорение точки в полярных, декартовых и естественных координатах<sup>\*)</sup>.*

1.  $\rho = 22(1 - (t/11)^2)/t,$                       2.  $\rho = 16 \cos^2(\pi t/14),$   
 $\varphi = \arccos(t/11), t = 9 \text{ с.}$                        $\varphi = \cos^2(\pi t/14), t = 10 \text{ с.}$

<sup>\*)</sup> Все кривые, заданные в условиях задач, являются классическими, имеют свои названия и описаны в справочной литературе [4, §1.3].



3.  $\rho = 23/(1 + 2t)$ ,  
 $\varphi = \arccos(t/2)$ ,  $t = 1$  с.
4.  $\rho = 10e^{-t/7}$ ,  
 $\varphi = e^{t/7}$ ,  $t = 2$  с.
5.  $\rho = 6 + 6t\text{tg}^2(\pi t/10)$ ,  
 $\varphi = \cos^2(\pi t/10)$ ,  $t = 3$  с.
6.  $\rho = 7(t/8 + 0.5)^{-3}$ ,  
 $\varphi = (t/8 + 0.5)^3$ ,  $t = 4$  с.
7.  $\rho = 8e^{t/24}$ ,  
 $\varphi = t/3$ ,  $t = 5$  с.
8.  $\rho = 80/t + 10$ ,  
 $\varphi = \arccos(t/10)$ ,  $t = 6$  с.
9.  $\rho = 5t/4 + 8$ ,  
 $\varphi = \arccos(t/8)$ ,  $t = 7$  с.
10.  $\rho = 11 \cos(t/10) + 12$ ,  
 $\varphi = t/10$ ,  $t = 8$  с.

### ОТВЕТЫ

	$\rho$	$\dot{\rho}$	$\varphi$	$\dot{\varphi}$	$v_\rho$	$v_\varphi$	$v$	$v_x$	$v_y$
	м	м/с	рад	рад/с	м/с				
1	0.81	-0.45	0.61	-0.16	-0.45	-0.13	0.47	-0.30	-0.37
2	6.22	3.50	0.39	0.22	3.50	1.36	3.76	2.72	2.59
3	7.67	-5.11	1.05	-0.58	-5.11	-4.43	6.76	1.28	-6.64
4	7.51	-1.07	1.33	0.19	-1.07	1.43	1.79	-1.64	-0.70
5	17.37	15.02	0.35	-0.30	15.02	-5.19	15.89	15.89	0.20
6	7.00	-2.63	1.00	0.38	-2.63	2.63	3.71	-3.63	-0.79
7	9.85	0.41	1.67	0.33	0.41	3.28	3.31	-3.31	0.09
8	23.33	-2.22	0.93	-0.13	-2.22	-2.92	3.67	1.00	-3.53
9	16.75	1.25	0.51	-0.26	1.25	-4.32	4.50	3.19	-3.18
10	19.66	-0.79	0.80	0.10	-0.79	1.97	2.12	-1.96	0.80

	$\ddot{\rho}$	$\ddot{\varphi}$	$W_\rho$	$W_\varphi$	$W$	$W_x$	$W_y$	$ W_\tau $	$W_n$
	м/с <sup>2</sup>	рад/с <sup>2</sup>	м/с <sup>2</sup>						
1	0.06	-0.04	0.04	0.11	0.12	-0.03	0.12	0.07	0.10
2	0.36	0.02	0.06	1.67	1.67	-0.58	1.57	0.66	1.54
3	6.81	-0.19	4.26	4.43	6.14	-1.70	5.90	6.12	0.56
4	0.15	0.03	-0.12	-0.20	0.24	0.17	-0.16	0.09	0.22
5	22.91	0.06	21.36	-7.92	22.78	22.78	-0.21	22.77	0.51
6	1.31	0.09	0.33	-1.31	1.35	1.28	-0.43	1.16	0.70
7	0.02	0.00	-1.08	0.27	1.11	-0.17	-1.10	0.14	1.10
8	0.74	-0.01	0.38	0.28	0.47	0.00	0.47	0.45	0.13
9	-0.00	-0.12	-1.12	-2.66	2.89	0.31	-2.87	2.25	1.81
10	-0.08	0.00	-0.27	-0.16	0.32	-0.08	-0.31	0.04	0.31

## Глава 7

# ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА

При изучении темы ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА вы научитесь решать простые задачи кинематики тела. В таких задачах вводятся векторные величины — угловая скорость  $\vec{\omega}$  и угловое ускорение  $\vec{\varepsilon}$ . Важно понять, что для вращательного движения тела эти векторы постоянно направлены по оси вращения. При сферическом движении (§ 10.1) векторы угловой скорости и углового ускорения могут лежать на разных прямых, и направления их в общем случае зависят от времени.

## 7.1. Вращательное движение тела

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** *Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси. Заданы некоторые кинематические характеристики движения тела и (или) кинематические характеристики движения точки этого тела. Найти остальные кинематические характеристики движения тела или точки.*

### ПЛАН РЕШЕНИЯ

Пусть тело вращается вокруг оси  $z$ . Кинематические характеристики движения тела:

- угол поворота  $\varphi$ ;
- угловая скорость  $\omega_z = \dot{\varphi}$ ;
- угловое ускорение  $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}$ .

Кинематические характеристики точки на теле:

- радиус траектории (расстояние до оси вращения)  $R$ ;
- скорость  $v = \omega R$ , где  $\omega = |\omega_z|$ ;
- ускорение  $W = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$ , где  $\varepsilon = |\varepsilon_z|$ .

1. Записываем систему уравнений для всех величин, входящих в условие задачи. В зависимости от условия возможны три основных варианта решения.

- *Неизвестный закон вращения.* Записываем систему двух уравнений для скорости  $v$  точки, лежащей на расстоянии  $R$  от оси вращения, и ее ускорения  $W$ :

$$\begin{aligned} v &= \omega R, \\ W &= R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для решения задачи необходимо, чтобы три из пяти величин  $(R, v, W, \omega_z, \varepsilon_z)$ , входящих в (1), были заданы в условии.

- *Вращение с постоянной угловой скоростью.* Интегрируя уравнение  $\omega_z = d\varphi/dt$ , при  $\omega_z = \text{const}$ , получаем

$$\varphi = \omega_z t + \varphi_0. \quad (2)$$

Как правило, отсчет ведется от  $\varphi_0 = 0$ , поэтому в системе трех уравнений (1–2) содержатся семь величин  $R, v, W, \omega_z, t, \varphi, \varepsilon_z$ , четыре из которых должны быть заданы в условии задачи.

- *Вращение с постоянным угловым ускорением.* Дважды интегрируя уравнение

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

получаем, при  $\varphi_0 = 0$ ,

$$\begin{aligned} \omega_z &= \varepsilon_z t + \omega_{z_0}, \\ \varphi &= \varepsilon_z t^2 / 2 + \omega_{z_0} t, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\omega_{z_0}$  — начальная угловая скорость. Совместно с (1) получаем систему четырех уравнений для восьми величин  $R, v, W, \omega_z, \varepsilon_z, \varphi, t, \omega_{z_0}$ , четыре из которых должны быть заданы в условии задачи.

## 2. Решаем систему. Находим искомые величины.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Ряд величин задан в тексте задач неявно. Например, угол поворота  $\varphi$  может быть задан числом оборотов  $n = \varphi/(2\pi)$ . Слова “покой” и “остановка” соответствуют математической записи  $\omega_z = 0$ .

**ПРИМЕР.** Диск вращается вокруг неподвижной оси с постоянным угловым ускорением  $0.02 \text{ рад/с}^2$ . Найти ускорение точки, лежащей на расстоянии 4 см от оси вращения, через 7 с после начала движения из состояния покоя.

**РЕШЕНИЕ**

1. В задаче задано постоянное угловое ускорение. Записываем систему уравнений для величин, входящих в условие задачи:

$$\begin{aligned} W &= R\sqrt{\omega_z^2 + \varepsilon_z^2}, \\ \omega_z &= \varepsilon_z t + \omega_{z0}. \end{aligned} \quad (4)$$

По условию задачи диск в начальный момент находился в покое, следовательно,  $\omega_{z0} = 0$ . Кроме того, при  $t = 7 \text{ с}$ , даны значения  $R = 4 \text{ см}$ ,  $\varepsilon_z = 0.02 \text{ рад/с}^2$ . Решая систему двух уравнений (4) с двумя неизвестными  $\omega_z$  и  $W$ , находим

$$\begin{aligned} \omega_z &= 0.02 \cdot 7 = 0.14 \text{ рад/с}^2, \\ W &= 4\sqrt{0.14^2 + 0.02^2} = 0.112 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

Ответ.  $W = 0.112 \text{ см/с}^2$ .

**УСЛОВИЯ ЗАДАЧ**

1. Диск вращается вокруг неподвижной оси с постоянным угловым ускорением  $0.01 \text{ рад/с}^2$ . На каком расстоянии от оси вращения находится точка, ускорение которой через 100 с после начала движения из состояния покоя достигает  $2 \text{ см/с}^2$  ?

2. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по произвольному закону  $\varphi = \varphi(t)$ . В момент, когда угловое ускорение тела равно  $2 \text{ рад/с}^2$ , известно ускорение точки, лежащей на расстоянии 4 см от оси,  $W = 12 \text{ см/с}^2$ . Чему равна в этот момент угловая скорость тела?

3. Колесо вращается вокруг неподвижной оси с постоянным угловым ускорением. На каком расстоянии от оси вращения находится точка, ускорение которой через 4 с после начала вращения из состояния покоя достигает  $9 \text{ см/с}^2$ , а угловая скорость —  $0.3 \text{ рад/с}$ ?

4. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси с постоянным угловым ускорением. Через 34 с после начала движения ускорение точки  $M$ , лежащей на расстоянии 8 см от оси, достигает  $39 \text{ см/с}^2$ . Сколько оборотов сделает тело за это время?

5. Вращаясь с постоянным угловым ускорением, диск радиусом  $R = 6$  см делает 50 оборотов за 250 с после начала движения из состояния покоя. Найти скорость точки, лежащей на его ободе, в этот момент.
6. Вращаясь с постоянной угловой скоростью, диск радиусом  $R = 16$  см делает 60 оборотов за 36 с после начала движения из состояния покоя. Найти скорость точки, лежащей на его ободе, в этот момент.
7. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением. Через какое время колесо сделает 70 оборотов и разовьет угловую скорость 7 рад/с.
8. Диск радиусом  $R = 9$  см вращается вокруг неподвижной оси с постоянным угловым ускорением  $1.2$  рад/с<sup>2</sup> и за некоторое время  $t$  делает 40 оборотов. Начальная угловая скорость диска равна нулю. Найти скорость точки, лежащей на ободе диска, в этот момент.
9. Колесо радиусом  $R = 21$  см, вращаясь вокруг неподвижной оси, увеличивает свою угловую скорость по закону  $\omega = kt^2$ . Через 1.6 с угловое ускорение становится равным 6 рад/с<sup>2</sup>. Найти ускорение точки, лежащей на ободе колеса, в этот момент.
10. Имея угловую скорость  $\omega = 8.5$  рад/с<sup>2</sup>, маховик начинает равномерно тормозить ( $\varepsilon = \text{const}$ ). После 25 оборотов его угловая скорость уменьшится вдвое. Найти время торможения до полной остановки маховика.

Ответы

1.  $R = 2$  см. 2.  $\omega_z = 1.5$  рад/с. 3.  $R = 76.82$  см. 4.  $n = 5.97$ .  
 5.  $v = 15.08$  см/с. 6.  $v = 1.68$  м/с. 7.  $t = 125.66$  с. 8.  $v = 2.21$  м/с.  
 9.  $W = 5$  м/с<sup>2</sup>. 10.  $t = 24.64$  с.

## 7.2. Передача вращения

*ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Механизм состоит из вращающихся на неподвижных осях блоков и поступательно движущихся элементов. Все элементы находятся во фрикционном, зубчатом или ременном зацеплениях. Задана какая-либо кинематическая характеристика одного из тел. Найти кинематические характеристики других тел.*

## ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Определяем кинематические характеристики тела, с заданным законом движения. Если это тело движется прямолинейно поступательно, то скорость и ускорение любой его точки имеет вид

$$v_{\tau} = \frac{d\sigma(t)}{dt}, \quad W_{\tau} = \frac{d^2\sigma(t)}{dt^2},$$

где  $\sigma(t)$  — закон движения тела. При заданном вращательном движении находим угловую скорость и угловое ускорение:

$$\omega_z = \frac{d\varphi(t)}{dt}, \quad \varepsilon_z = \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2},$$

где  $\varphi(t)$  — закон вращения тела (зависимость угла поворота в радианах от времени).

2. Определяем угловую скорость тела, связанного нерастяжимой нитью (ремнем, тросом), фрикционно или зубчатым зацеплением с телом, угловая скорость которого известна:

$$r_1\omega_{z_1} = \pm r_2\omega_{z_2}, \quad (1)$$

где  $r_1, r_2$  — радиусы ободов колес (блоков) 1, 2, на которые надет ремень в случае ременной передачи, или радиусы колес, находящихся в зацеплении;  $\omega_{z_1}, \omega_{z_2}$  — проекции угловых скоростей колес на ось, параллельную осям вращения. Знак минус берем при внешнем зацеплении, или крестообразной ременной передаче, когда вращение колес происходит в разные стороны. При внутреннем зацеплении (рис. 83) или простой ременной передаче (рис. 84) берем знак плюс. Отношение  $r_2/r_1$  называется передаточным числом от тела 1 к телу 2. Для зубчатых соединений аналогом (1) является соотношение угловых скоростей

$$K_1\omega_{z_1} = \pm K_2\omega_{z_2},$$

в которое вместо радиусов  $r_1$  и  $r_2$  входят числа зубцов  $K_1$  и  $K_2$ , пропорциональные длинам окружностей шестеренок.

Если поступательное движение тела 1 передается вращательному движению тела 2 (или наоборот), то связь линейной и угловой скоростей имеет вид

$$v_1 = r_2\omega_{z_2}, \quad (2)$$

где  $r_2$  — радиус обода, находящегося в контакте с поступательно движущимся телом.

3. Повторяя п.2 для всех пар кинематически связанных тел, составляем и решаем систему уравнений для неизвестных линейных и угловых скоростей.

4. Дифференцируя уравнения полученной системы, получаем аналогичную систему для угловых и линейных ускорений. Например, из уравнения (1) следует, что

$$r_1 \varepsilon_{z_1} = \pm r_2 \varepsilon_{z_2}.$$

Аналогично, из (2) следует связь линейного ускорения поступательно движущегося тела и углового ускорения связанного с ним вращающегося тела:

$$W_1 = r_2 \varepsilon_{z_2} = W_2^T,$$

где  $W_2^T$  — тангенциальная составляющая ускорения точки вращающегося тела в месте контакта. Было бы ошибкой считать  $W_1 = W_2$ , так как полное ускорение точки на вращающемся теле включает в себя и нормальную составляющую  $\vec{W}_2 = \vec{W}_2^T + \vec{W}_2^n$ .

Решаем систему уравнений для ускорений.

ПРИМЕР. Механизм состоит из двух колес 1, 3 и блока 2, вращающихся на неподвижных осях. Ведущее колесо 1 механизма соединено ремнем с внутренним ободом блока 2. Внешний обод блока находится во фрикционном зацеплении с колесом 3 (рис. 84). Проскальзывание в точке зацепления отсутствует, ремень считать нерастяжимым.

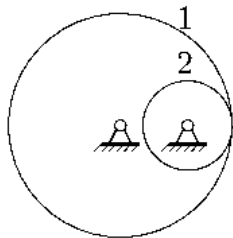


Рис. 83

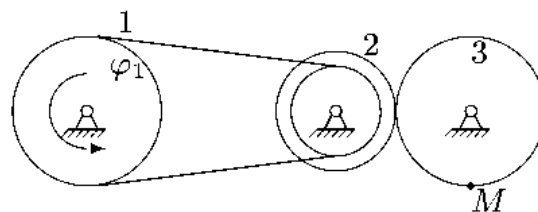


Рис. 84

Задан закон движения ведущего колеса:  $\varphi_1 = t^2(t + 2)$ . Стрелкой указано положительное направление изменения угла  $\varphi_1$ ;  $R_1 = 40$  см,  $R_2 = 26$  см,  $r_2 = 24$  см,  $R_3 = 42$  см. При  $t = 0.5$  с найти ускорение точки  $M$ , лежащей на ободе колеса 3.

РЕШЕНИЕ

1. Находим угловую скорость ведущего колеса 1:

$$\omega_{z_1} = \frac{d\varphi_1}{dt} = 3t^2 + 4t. \quad (3)$$

2. Определяем угловую скорость блока 2, связанного нерастяжимым ремнем с колесом 1:

$$R_1 \omega_{z_1} = r_2 \omega_{z_2}, \quad (4)$$

где  $R_1$  и  $r_2$  — радиусы ободов, огибасмые ремнем.

3. Колеса 2 и 3 находятся во внешнем зацеплении и вращаются в разные стороны <sup>\*)</sup>, следовательно

$$R_2 \omega_{z_2} = -R_3 \omega_{z_3}, \quad (5)$$

Уравнения (3–5) образуют систему, решая которую, при  $t = 0.5$  с, получаем

$$\omega_{z_1} = 2.75 \text{ рад/с}, \quad \omega_{z_2} = 4.583 \text{ рад/с}, \quad \omega_{z_3} = -2.837 \text{ рад/с}.$$

4. Дифференцируя уравнения системы (3–5), получаем аналогичную систему для угловых ускорений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{z_1} &= \frac{d\omega_{z_1}}{dt} = 6t + 4, \\ R_1 \varepsilon_{z_1} &= r_2 \varepsilon_{z_2}, \\ R_2 \varepsilon_{z_2} &= -R_3 \varepsilon_{z_3}. \end{aligned} \quad (6)$$

Решаем систему уравнений для ускорений (6) и получаем

$$\varepsilon_{z_1} = 7 \text{ рад/с}^2, \quad \varepsilon_{z_2} = 11.667 \text{ рад/с}^2, \quad \varepsilon_{z_3} = -7.222 \text{ рад/с}^2.$$

Вычисляем ускорение точки  $M$ :

$$W = R_3 \sqrt{\varepsilon_{z_3}^2 + \omega_{z_3}^4} = 42 \sqrt{7.222^2 + 2.837^4} = 454.23 \text{ см/с}^2.$$

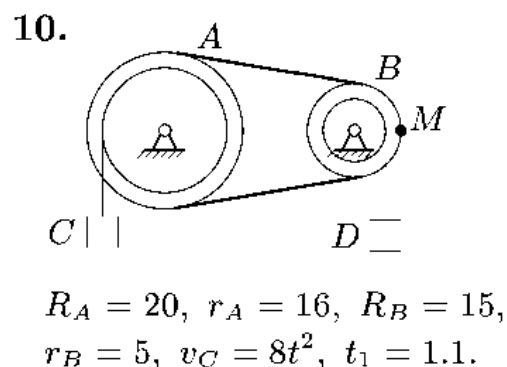
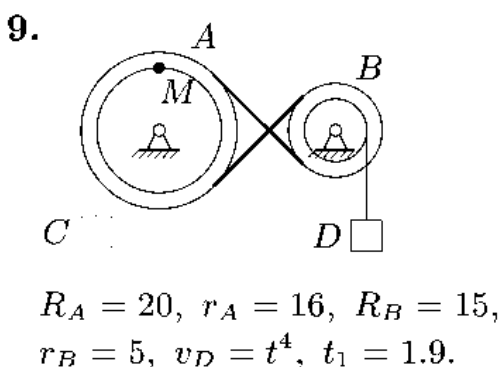
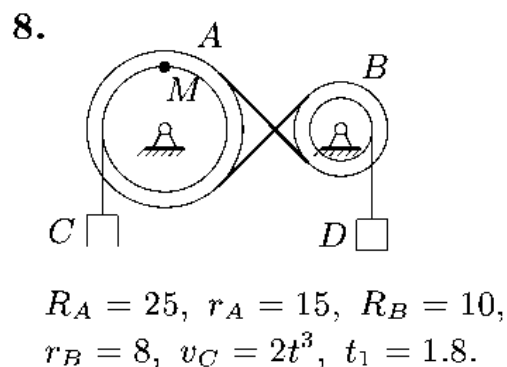
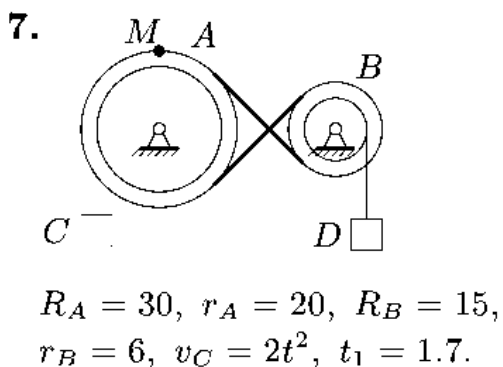
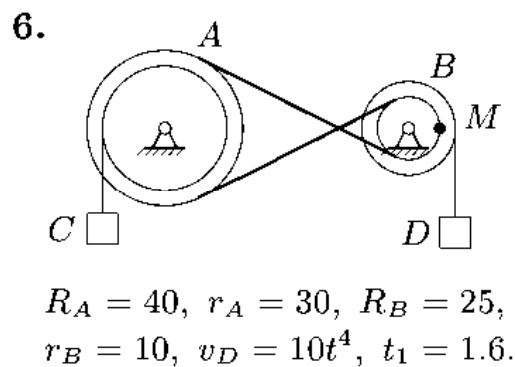
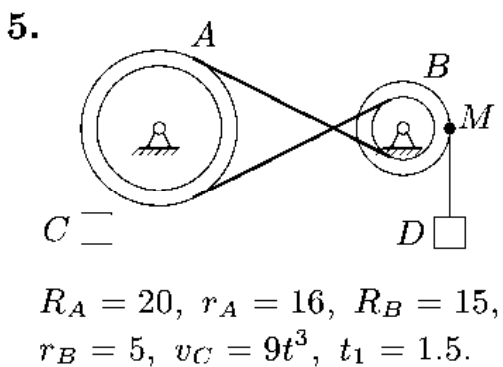
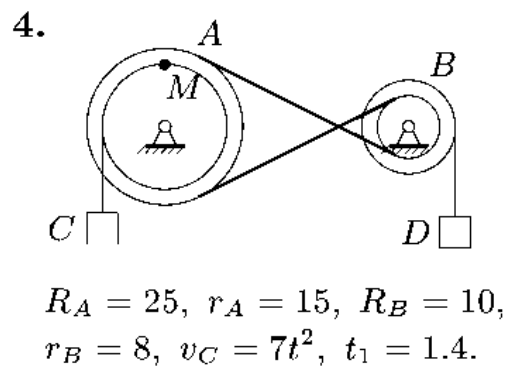
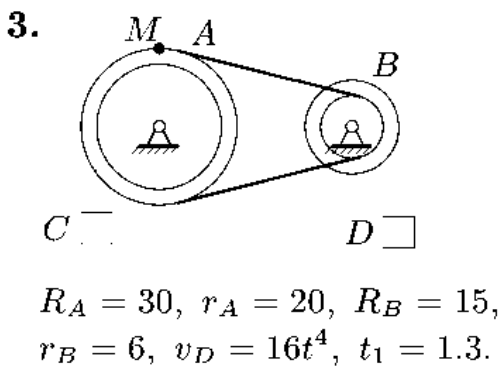
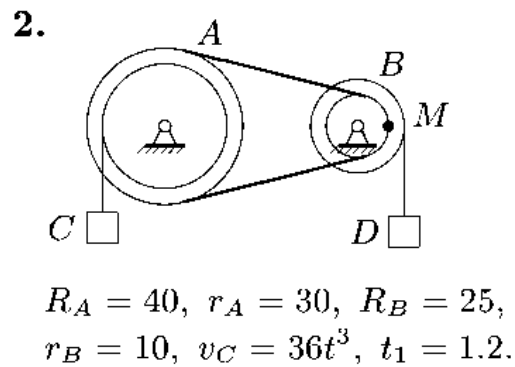
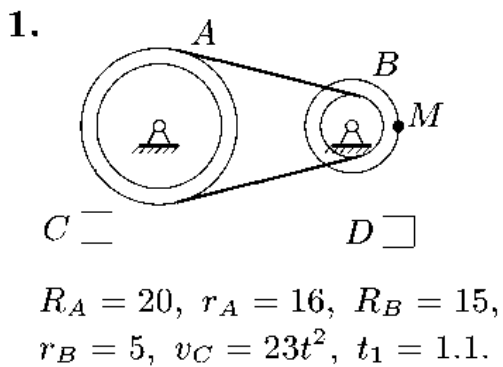
Ответ.  $W = 4.542 \text{ м/с}^2$ .

*УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Механизм состоит из двух вращающихся на неподвижных осях блоков, соединенных нерастяжимым ремнем. Блоки передают движение грузам. Задан закон изменения скорости одного из грузов (в см/с). В указанный момент времени найти скорость другого груза и ускорение точки  $M$  на внутреннем или внешнем ободу одного из блоков. Радиусы даны в см, время — в с.*

---

<sup>\*)</sup> В точке контакта скорости точек колес совпадают по величине и по направлению, чего нельзя сказать об ускорениях.





## Ответы

	$v$	$W_M^n$	$W_M^t$	$W_M$
	см/с	см/с <sup>2</sup>		
1	104.363	726.102	189.750	750.486
2	207.360	687.971	207.360	718.541
3	12.186	11.137	56.243	57.335
4	28.583	12.549	19.600	23.273
5	113.906	864.976	227.813	894.473
6	19.661	68.719	65.536	94.960
7	3.468	2.506	10.200	10.503
8	15.552	9.070	19.440	21.452
9	31.277	61.141	65.846	89.855
10	4.033	9.761	22.000	24.068

### Предупреждение типичных ошибок

1. Соотношение  $r_1\omega_{z_1} = \pm r_2\omega_{z_2}$ , справедливое для зацепления колес, вращающихся на неподвижных осях, не используйте для механизмов, совершающих плоское движение, например, § 12.3, с. 247.

2. Ускорение точки  $M$ , находящейся на *нити*, свисающей с блока в месте ее схода, не совпадает с ускорением точки  $M'$ , лежащей в этом же месте на *блоке*. Точка на нити движется по прямой и ее ускорение  $\vec{W}_M$ . Точка на блоке движется по окружности и ее ускорение имеет две составляющие:  $\vec{W}_{M'}^t = \vec{W}_M$  и  $\vec{W}_{M'}^n$ .

3. Цилиндры 1 и 2 радиусов  $r_1$  и  $r_2$  одного блока (на одной оси) имеют одну и ту же угловую скорость. Иногда по ошибке используют формулу  $r_1\omega_{z_1} = r_2\omega_{z_2}$  вместо  $\omega_{z_1} = \omega_{z_2}$ .

## Глава 8

# ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА

При изучении темы ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА раздела КИНЕМАТИКА, вы научитесь применять аналитические и графические методы для определения скоростей и ускорений точек тел и механизмов. Хотя эти знания имеют самостоятельную ценность, особенно необходимы они будут для решения задач динамики тела и системы.

В § 16.2, с. 361 и § 16.3 с. 364 приведены программы расчета кинематики плоского движения в математической системе Maple V. Анимационные возможности этой системы делают решение наглядным, позволяя глубже понять суть задачи.

Методы решения задачи кинематики плоского движения разнообразны. Выбрать оптимальный путь, который может существенно упростить решение, помогут примеры, приведенные в этой главе.

### 8.1. Скорости точек многозвенного механизма

*ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Плоский многозвенный механизм с одной степенью свободы находится в движении. Известна угловая скорость какого-либо его звена или скорость одной из точек механизма. Найти скорости точек механизма и угловые скорости его звеньев.*

#### ПЛАН РЕШЕНИЯ

Рассмотрим два простых геометрических способа решения задачи, в которых, в отличие от аналитических методов (§ 8.3, 8.5), определяются *модули* скоростей и угловых скоростей. Не оговаривая отдельно, всякий раз под угловой скоростью  $\omega$  будем подразумевать ее модуль  $|\omega|$ .

#### 1-й способ. Мгновенные центры скоростей

1. Определяем положение мгновенного центра скоростей (МЦС) каждого звена. МЦС лежит на пересечении перпендикуляров, про-

веденных к скоростям точек, принадлежащих звену (рис. 85). У тех звеньев, у которых МЦС не существует (скорости двух точек параллельны и не перпендикулярны отрезку, их соединяющему), угловая скорость равна нулю, а скорости всех точек равны. Если векторы скоростей перпендикулярны отрезку их соединяющему, то имеют место два частных случая положения МЦС (рис. 86, 87).

Если тело (колесо, диск, цилиндр) катится по поверхности без проскальзывания, то МЦС этого тела находится в точке касания.

2. Для каждого звена определяем расстояния от его точек до МЦС этого звена.

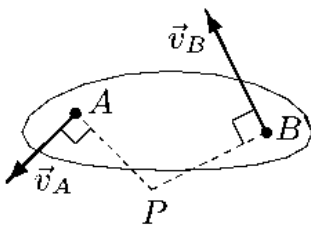


Рис. 85

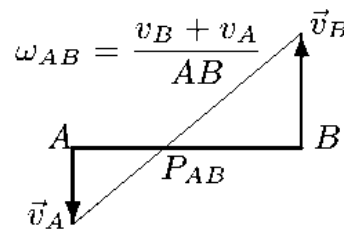


Рис. 86

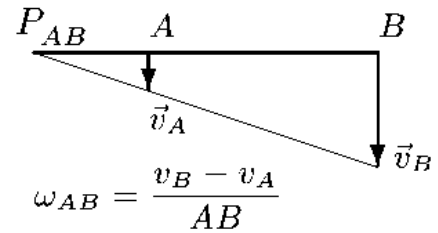


Рис. 87

3. Записываем систему уравнений для скоростей  $N$  точек звена  $i$ , включая точку с известной скоростью:

$$v_k = \omega_i R_{ik}, \quad k = 1 \dots N.$$

Здесь  $\omega_i$  — угловая скорость звена  $i$ ,  $R_{ik}$  — расстояние от МЦС звена  $i$  до точки  $k$ . Решаем систему, определяем угловую скорость звена, а затем скорости всех его точек.

Этот пункт плана выполняем последовательно для всех звеньев механизма. Очередное звено должно иметь общую точку (шарнир) с предыдущим, для которого угловая скорость найдена или известна.

## 2-й способ. План скоростей

1. Как и в методе МЦС ведем расчет, переходя от одного звена к другому, шарнирно с ним соединенному.

Построение начинаем с вектора, величина и направление которого известны или легко вычисляются. Этот вектор в заданном масштабе откладываем от некоторой произвольной точки  $O$  (рис. 91). Его конец определяет первую точку плана скоростей. Точку плана скоростей (конец вектора) отмечаем строчной буквой, соответствующей точке вектора скорости. Пусть первая точка плана скоростей обозначена как  $b$ .

2. Рассматриваем очередное звено, на котором имеется точка с уже известной скоростью. Необходимо, чтобы на этом звене была

еще одна точка с известным направлением вектора скорости (например, ползун или точка звена, совершающего вращательное движение). Пусть эта точка обозначена как  $C$  (рис. 88).

Справедливо правило, согласно которому неизменяемые отрезки механизма, обозначенные прописными буквами, перпендикулярны отрезкам плана скоростей, обозначенными теми же строчными буквами.

Следующая точка плана скоростей лежит на пересечении двух прямых. Одна прямая определяется направлением скорости точки  $C$ , вторая перпендикулярна  $BC$ . Длина полученного отрезка  $Ос$  является модулем скорости  $\vec{v}_c$  (рис. 91).

Скорости остальных точек этого звена (если таковые имеются) найдем по правилу подобия неизменяемых фигур механизма и фигур, обозначенных теми же строчными буквами плана скоростей.

Пункт 2 плана выполняем для всех звеньев механизма (рис. 91–95).

3. После построения плана скоростей определяем угловую скорость каждого звена по простой формуле  $\omega_{IJ} = ij/IJ$ , где  $IJ$  расстояние между точками  $I$  и  $J$  звена,  $ij$  — длина отрезка на плане скоростей.

**ПРИМЕР.** Плоский многозвонный механизм с одной степенью свободы приводится в движение кривошипом  $AB$ , который вращается против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega_{AB} = 2$  рад/с (рис. 88).

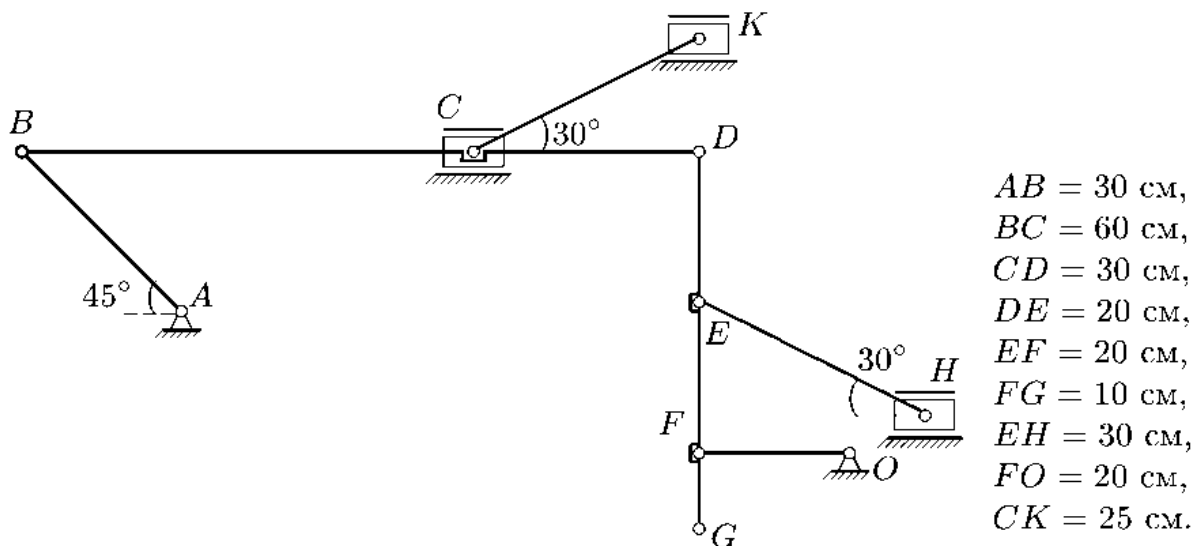


Рис. 88

Ползуны  $C$ ,  $K$ ,  $H$  движутся горизонтально,  $BD \perp DG$ ,  $DG \perp FO$ . Найти скорости точек  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $K$  механизма и угловые

скорости его звеньев  $AB$ ,  $BD$ ,  $DG$ ,  $EH$ ,  $FO$ ,  $CK$ .

РЕШЕНИЕ

1-й способ. Мгновенные центры скоростей

1. Определяем положение мгновенного центра скоростей каждого звена  $AB$ ,  $BD$ ,  $DG$ ,  $CK$ ,  $EH$ ,  $FO$ .

МЦС звеньев  $AB$  и  $FO$  искать не требуется. Они совершают вращательное движение вокруг шарниров  $A$  и  $O$  соответственно. Можно условно считать, что там находятся их МЦС.

Вектор  $\vec{v}_B$  скорости точки  $B$  направим перпендикулярно радиусу  $AB$  против часовой стрелки (рис. 89). Далее, чтобы узнать положение МЦС следующего звена надо знать направления векторов скоростей двух его точек. Следующим звеном будет стержень  $BD$ , имеющий со звеном  $AB$  общую точку  $B$ . У него есть три характерные точки  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Направление вектора скорости точки  $D$  пока неизвестно.

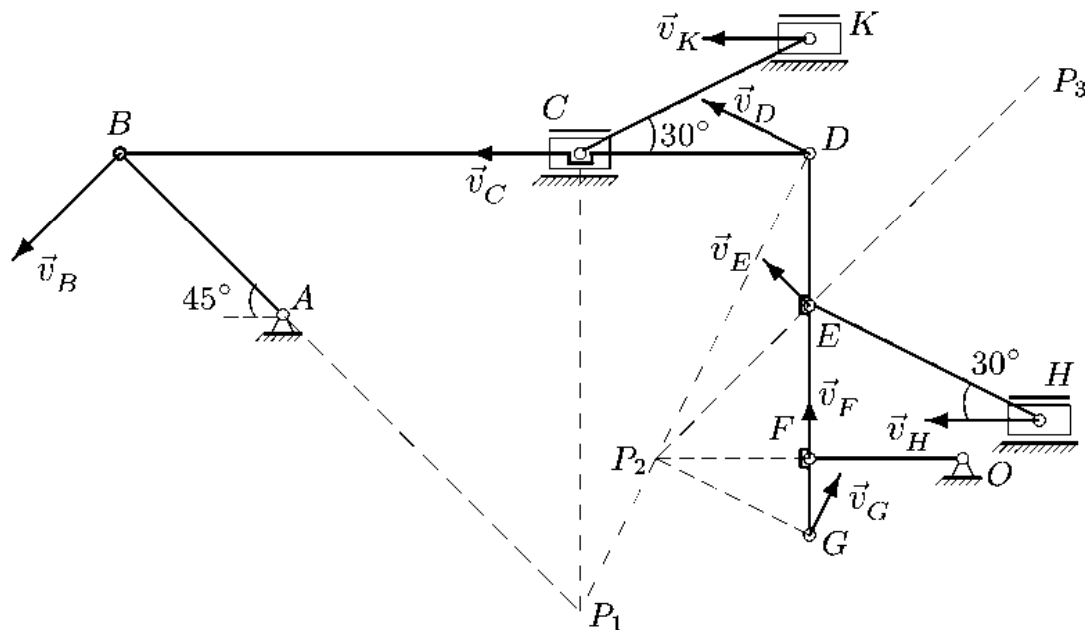


Рис. 89

Остается точка  $C$ . Ползун  $C$  движется строго горизонтально. Вектор скорости  $\vec{v}_C$  направляем по горизонтали налево. Из двух возможных горизонтальных направлений мы выбрали этот вариант, исходя из теоремы о проекции векторов скоростей точек неизменяемого отрезка. Проекции должны быть равны и направлены в одну сторону. Таким образом, известны направления скоростей двух точек тела. Это позволяет определить МЦС звена  $BCD$ . Находим точку  $P_1$  пересечения перпендикуляров, проведенных из точек  $B$  и  $C$ , к векторам  $\vec{v}_B$  и  $\vec{v}_C$  (рис. 89). Теперь определяем направление вектора  $\vec{v}_D$ . Он

будет перпендикулярен радиусу  $P_1D$  и направлен налево, исходя из той же теоремы о проекциях скоростей точек отрезка  $BD$ .

Со стержнем  $BCD$  имеют общие точки два стержня:  $CK$  и  $DG$ . Рассмотрим сначала стержень  $DG$ . Направление вектора скорости точки  $D$  уже известно. Чтобы определить положение МЦС, надо знать направление вектора еще одной точки на этом звене. Такой точкой является  $F$ . Вектор ее скорости перпендикулярен радиусу вращения  $FO$  и направлен вертикально. Перпендикуляры к векторам  $\vec{v}_D$  и  $\vec{v}_F$  задают положение точки  $P_2$ , вокруг которой звено  $DEFG$  совершает мгновенное вращательное движение.

Перпендикулярно радиусам  $P_2G$  и  $P_2E$  проводим вектора  $\vec{v}_G$  и  $\vec{v}_E$ .

Переходим к звену  $EH$ , МЦС которого находим на пересечении перпендикуляров к  $\vec{v}_E$  (продолжение радиуса  $P_2E$ ) и к вектору скорости  $\vec{v}_H$  ползуна  $H$ , движущегося горизонтально. Получаем точку  $P_3$  — МЦС звена  $EH$ .

И, наконец, рассматриваем звено  $CK$ . Скорости  $\vec{v}_K$  и  $\vec{v}_C$  параллельны и не перпендикулярны  $CK$ . Звено  $CK$  совершает мгновенно-поступательное движение. Условно можно сказать, что МЦС звена  $CK$  находится в бесконечности.

2. Определяем расстояния от МЦС звеньев до тех точек этих звеньев, скорости которых надо найти.

*Звено  $BCD$*

$$P_1B = BC / \cos 45^\circ = 60 / 0.707 = 84.85 \text{ см},$$

$$P_1C = BC = 60 \text{ см},$$

$$P_1D = \sqrt{P_1C^2 + CD^2} = 67.08 \text{ см}.$$

*Звено  $DEFG$* . Пользуясь подобием  $\triangle P_1CD \sim \triangle P_2DF$ , находим

$$P_2D = \frac{FD}{P_1C} P_1D = \frac{40}{60} 67.08 = 44.72 \text{ см},$$

$$P_2F = \frac{FD}{P_1C} CD = \frac{40}{60} 30 = 20 \text{ см},$$

$$P_2E = \sqrt{P_2F^2 + EF^2} = \sqrt{20^2 + 20^2} = 28.28 \text{ см},$$

$$P_2G = \sqrt{P_2F^2 + FG^2} = \sqrt{20^2 + 10^2} = 25.98 \text{ см}.$$

*Звено  $EH$*  (рис. 90). Находим расстояния до МЦС:

$$P_3E = EL\sqrt{2} = 36.74 \text{ см},$$

$$P_3H = P_3L + LH = P_3L + EH \cos 60^\circ = 25.98 + 15 = 40.98 \text{ см.}$$

3. Записываем систему уравнений для скоростей трех точек звена  $B CD$ , включая точку  $B$  с известной скоростью:

$$\begin{aligned} v_B &= \omega_{BD} P_1 B, \\ v_C &= \omega_{BD} P_1 C, \\ v_D &= \omega_{BD} P_1 D. \end{aligned}$$

Решаем эту систему. Находим  $\omega_{BD} = v_B / P_1 B = 0.707 \text{ рад/с}$ ,  
 $v_C = 0.707 \cdot 60 = 42.43 \text{ см/с}$ ,  $v_D = 0.707 \cdot 67.08 = 47.43 \text{ см/с}$ .

Система уравнений для скоростей точек звена  $DEFG$  имеет вид

$$\begin{aligned} v_D &= \omega_{DG} P_2 D, \\ v_E &= \omega_{DG} P_2 E, \\ v_F &= \omega_{DG} P_2 F, \\ v_G &= \omega_{DG} P_2 G. \end{aligned}$$

Из первого уравнения вычисляем угловую скорость:

$$\omega_{DG} = v_D / P_2 D = 47.43 / 44.72 = 1.06 \text{ рад/с.}$$

Получаем скорости точек:

$$\begin{aligned} v_E &= 1.06 \cdot 28.28 = 30 \text{ см/с}, \\ v_F &= 1.06 \cdot 20 = 21.21 \text{ см/с}, \\ v_G &= 1.06 \cdot 22.36 = 23.72 \text{ см/с}. \end{aligned}$$

Система уравнений для скоростей точек звена  $EH$  имеет вид

$$\begin{aligned} v_E &= \omega_{EH} P_3 E, \\ v_H &= \omega_{EH} P_3 H. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \omega_{EH} &= v_E / P_3 E = 30 / 36.74 = 0.816 \text{ рад/с}, \\ v_H &= \omega_{EH} P_3 H = 0.816 \cdot 40.98 = 33.46 \text{ см/с}. \end{aligned}$$

Звено  $CK$  совершает мгновенно-поступательное движение. Следовательно, скорости точек  $C$  и  $K$  равны:  $v_K = v_C = 42.43 \text{ см/с}$ . Угловая скорость этого звена равна нулю \*).

\*) Можно считать, что МЦС звена, движущегося мгновенно-поступательно, находится в бесконечности. Поэтому, рассуждая формально, получаем  $\omega_{CK} = v_C / \infty = 0$ .



Частично проверить решение можно графически. Известно, что концы векторов скоростей точек неизменяемого отрезка лежат на одной прямой. Убеждаемся в этом, проводя прямую через концы векторов  $\vec{v}_B$ ,  $\vec{v}_C$  и  $\vec{v}_D$ , отложенных на чертеже в масштабе (рис. 90).

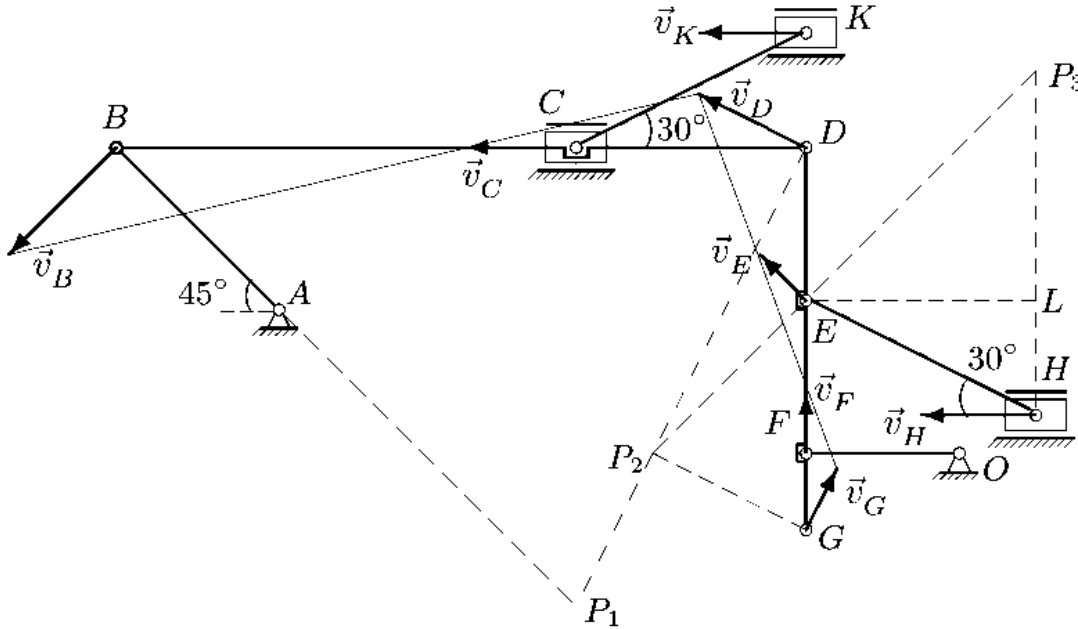


Рис. 90

Аналогично, проверяем скорости  $\vec{v}_D$ ,  $\vec{v}_E$ ,  $\vec{v}_F$  и  $\vec{v}_G$ . Через их концы также можно провести прямую. Остались непроверенными скорости точек E и H. Для этого можно воспользоваться методом построения плана скоростей, см. ниже 2-й способ.

Результаты расчетов помещаем в таблицы. Скорости даны в см/с, угловые скорости — в рад/с.

Точка	B	C	D	E	F	G	H	K
$v$	60.00	42.43	47.43	30.00	21.21	23.71	33.46	42.43

Звено	AB	BD	DG	EH	FO	BK
$\omega$	2.000	0.707	1.060	0.816	1.060	0

**2-й способ. План скоростей**

1. Построение начинаем с вектора, величина и направление которого известны или легко вычисляются. В нашем случае это  $\vec{v}_B$ . Вектор  $\vec{v}_B$  в заданном масштабе откладываем от некоторой произвольной точки O (рис. 91). Все остальные вектора также будем откладывать от этой точки.

Точки плана скоростей (концы векторов) отмечаем соответствующими строчными буквами. Таким образом, положение точки  $b$  на плане скоростей известно.

2. Рассматриваем звено  $BCD$  (рис. 90), на котором имеется точка  $B$  с известной скоростью. Непременные отрезки механизма, обозначенные прописными буквами, перпендикулярны отрезкам плана скоростей, обозначенными теми же строчными буквами,  $BC \perp bc$ . Звено механизма  $BC$  горизонтально.

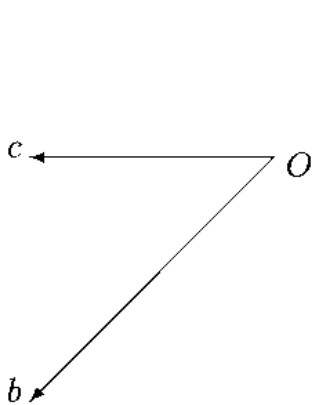


Рис. 91

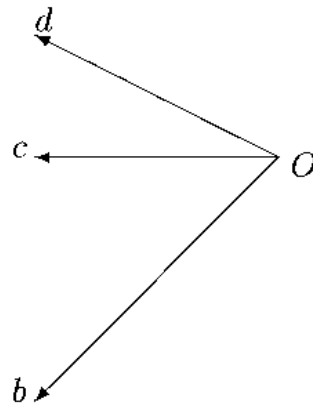


Рис. 92

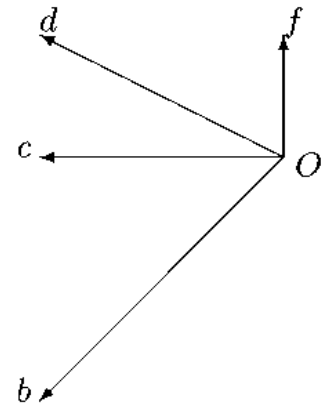


Рис. 93

Следовательно, точка  $c$  плана скоростей лежит на одной вертикали с точкой  $b$ . Известно направление скорости ползуна  $C$ . Точку  $c$  находим на пересечении двух прямых. Вектор  $\vec{v}_C$  изображен отрезком  $Oc$  плана скоростей (рис. 91). Из правила подобия фигур механизма и фигур, обозначенных теми же строчными буквами плана скоростей (в данном случае это отрезки  $BC$  и  $CD$ ), имеем  $BC/CD = bc/cd$ .

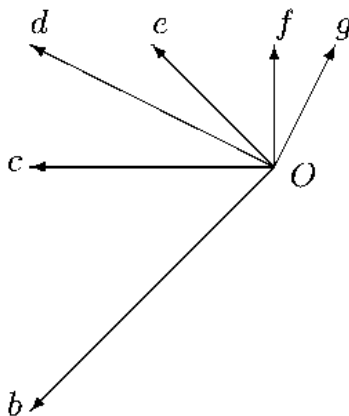


Рис. 94

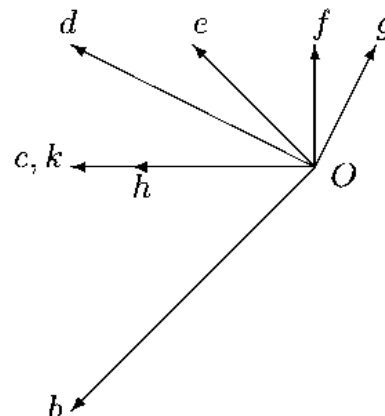


Рис. 95

Так получаем точку  $d$  плана скоростей и, следовательно, величину и направление вектора  $\vec{v}_D$  (рис. 92).

Определяем скорость  $\vec{v}_F$ . Направление этого вектора известно — он перпендикулярен радиусу вращения  $FO$ . По свойству плана

скоростей  $DF \perp df$ . Точка  $d$  на плане уже есть. Проводим через нее горизонтальную прямую (перпендикулярную  $DF$ ) до пересечения с вертикальным направлением вектора скорости  $\vec{v}_F$ . Получаем точку  $f$  (рис. 93). Соединяя ее с центром  $O$ , определяем модуль искомой скорости  $\vec{v}_F$ .

Из соотношения подобия  $DE/DF = de/df$  на отрезке  $df$  находим внутри него конец вектора скорости  $\vec{v}_E$  и вне отрезка, пользуясь пропорцией  $DG/DF = dg/df$ , точку  $g$ , определяющую вектор скорости  $\vec{v}_G$  (рис. 94).

Аналогично, определяем скорость  $\vec{v}_H$  (рис. 95). Здесь  $eh \perp EH$ . Точки  $k$  и  $c$  на плане скоростей совпадают.

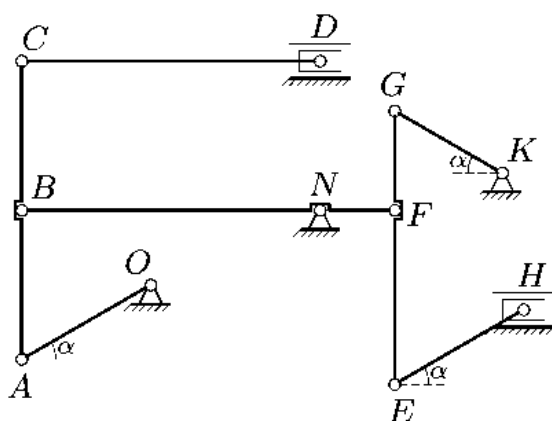
3. Угловые скорости звеньев определяем по простым формулам:

$$\omega_{BD} = bd/BD, \quad \omega_{DG} = dg/DG,$$

$$\omega_{EH} = eh/EH, \quad \omega_{CK} = ck/CK = 0, \quad \omega_{FO} = fo/FO.$$

**УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.** Плоский многозвенный механизм с одной степенью свободы приводится в движение кривошипом, который вращается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью. Найти скорости точек механизма (в см/с) и угловые скорости его звеньев (в рад/с). Размеры даны в см.

1.



$$\omega_{OA} = 1 \text{ рад/с},$$

$$\alpha = 30^\circ,$$

$$AB = 30, BC = 30,$$

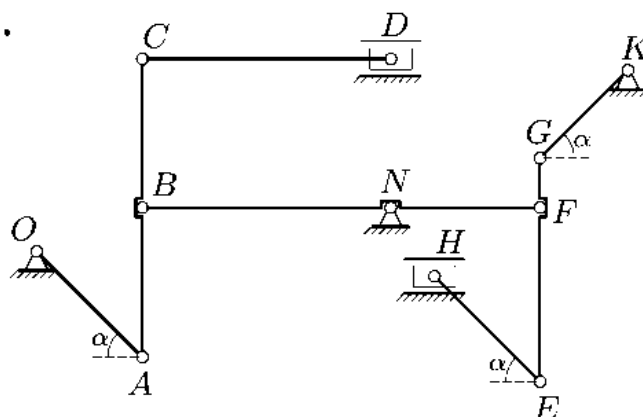
$$NB = 60, NF = 15,$$

$$CD = 60, EH = 30,$$

$$FE = 35, FG = 20,$$

$$OA = 30, KG = 25.$$

2.



$$\omega_{BF} = 2 \text{ рад/с},$$

$$\alpha = 45^\circ,$$

$$AB = 30, BC = 30,$$

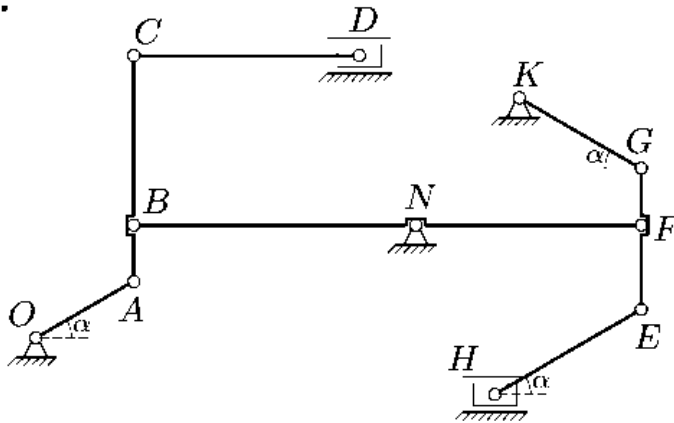
$$NB = 50, NF = 30,$$

$$CD = 50, EH = 30,$$

$$FE = 35, FG = 10,$$

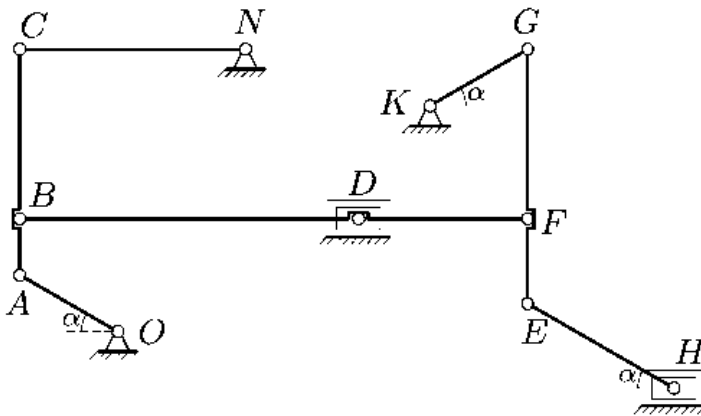
$$OA = 30, KG = 25.$$

3.



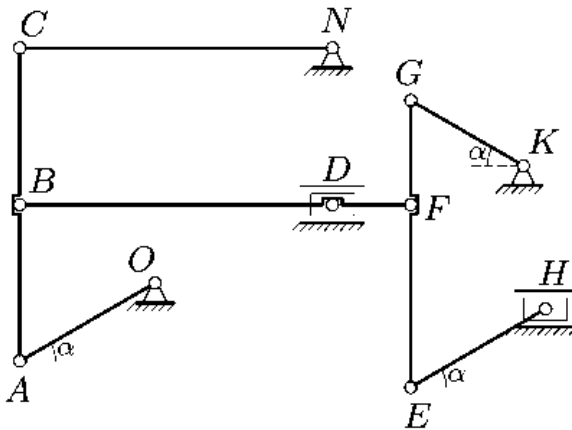
$\omega_{KG} = 1$  рад/с,  
 $\alpha = 30^\circ$ ,  
 $AB = 10, BC = 30,$   
 $NB = 50, NF = 40,$   
 $CD = 40, EH = 30,$   
 $FE = 15, FG = 10,$   
 $OA = 20, KG = 25.$

4.



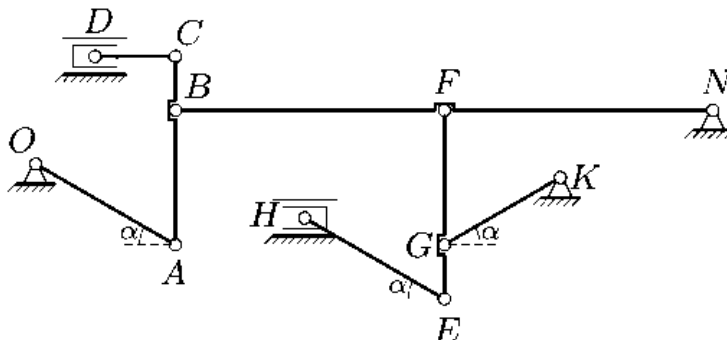
$\omega_{OA} = 3$  рад/с,  
 $\alpha = 30^\circ$ ,  
 $AB = 10, BC = 30,$   
 $DB = 60, DF = 30,$   
 $NC = 40, EH = 30,$   
 $FE = 15, FG = 30,$   
 $OA = 20, KG = 20.$

5.

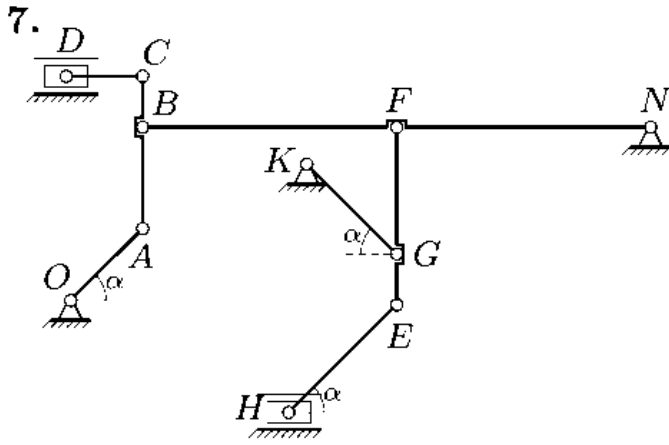


$\omega_{NC} = 1$  рад/с,  
 $\alpha = 30^\circ$ ,  
 $AB = 30, BC = 30,$   
 $DB = 60, DF = 15,$   
 $NC = 60, EH = 30,$   
 $FE = 35, FG = 20,$   
 $OA = 30, KG = 25.$

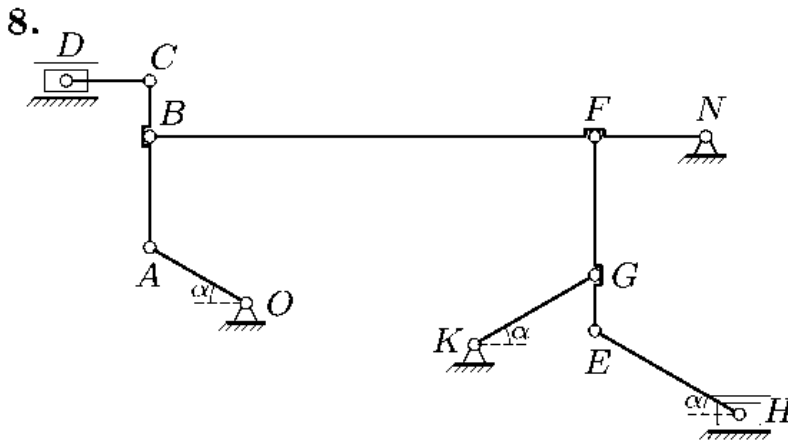
6.



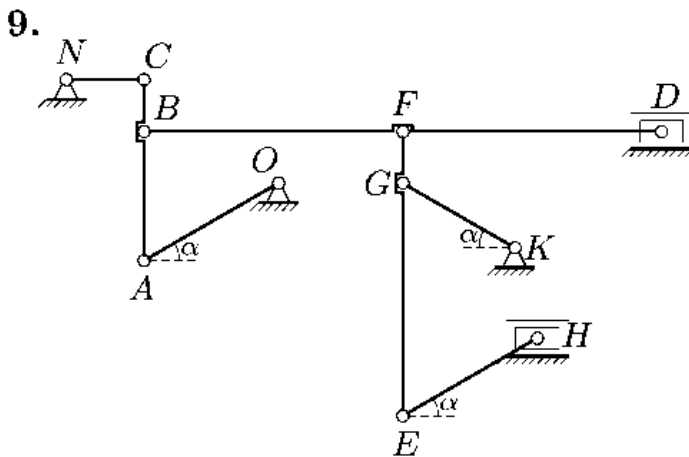
$\omega_{OA} = 2$  рад/с,  
 $\alpha = 30^\circ$ ,  
 $AB = 25, BC = 10,$   
 $BF = 50, NF = 50,$   
 $CD = 15, EH = 30,$   
 $FG = 25, GE = 10,$   
 $OA = 30, KG = 25.$



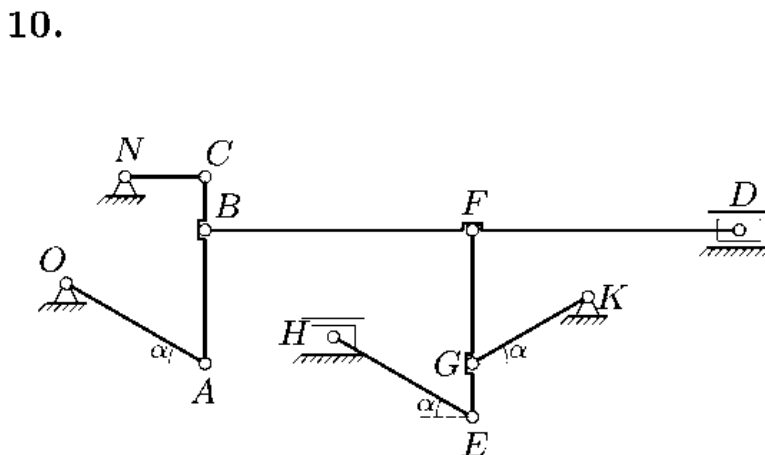
$\omega_{KG} = 1 \text{ рад/с,}$   
 $\alpha = 45^\circ,$   
 $AB = 20, BC = 10,$   
 $BF = 50, NF = 50,$   
 $CD = 15, EH = 30,$   
 $FG = 25, GE = 10,$   
 $OA = 20, KG = 25.$



$\omega_{NB} = 3 \text{ рад/с,}$   
 $\alpha = 30^\circ,$   
 $AB = 20, BC = 10,$   
 $BF = 80, NF = 20,$   
 $CD = 15, EH = 30,$   
 $FG = 25, GE = 10,$   
 $OA = 20, KG = 25.$



$\omega_{NC} = 1 \text{ рад/с,}$   
 $\alpha = 30^\circ,$   
 $AB = 25, BC = 10,$   
 $BF = 50, FD = 50,$   
 $NC = 15, EH = 30,$   
 $FE = 55, FG = 10,$   
 $OA = 30, KG = 25.$



$\omega_{OA} = 2 \text{ рад/с,}$   
 $\alpha = 30^\circ,$   
 $AB = 25, BC = 10,$   
 $BF = 50, FD = 50,$   
 $NC = 15, EH = 30,$   
 $FE = 35, FG = 25,$   
 $OA = 30, KG = 25.$

Ответы \*)

	$v_A$	$v_B$	$v_C$	$v_D$	$v_E$	$v_F$	$v_G$	$v_H$
1	30.000	25.981	30.000	15.000	9.233	6.495	7.500	2.813
2	141.421	100.000	141.421	100.000	218.403	60.000	84.853	150.000
3	31.250	27.063	54.127	46.875	28.641	21.651	25.000	6.250
4	60.000	56.624	51.962	22.500	36.933	34.369	30.000	41.250
5	69.282	62.450	60.000	17.321	35.773	22.913	17.321	41.136
6	60.000	51.962	53.329	12.000	33.407	25.981	30.000	36.000
7	50.000	35.355	39.528	17.678	30.414	17.678	25.000	42.426
8	346.410	300.000	312.250	86.603	77.149	60.000	69.282	83.138
9	17.321	15.203	15.000	2.474	35.746	7.898	8.660	39.280
10	60.000	52.664	51.962	8.571	35.662	27.358	30.000	39.429

	$\omega_{AO}$	$\omega_{AC}$	$\omega_{CD}$	$\omega_{BF}$	$\omega_{GE}$	$\omega_{KG}$	$\omega_{EH}$	$\omega_{CN}$
1	1.000	0.500	0.433	0.433	-0.188	-0.300	-0.250	-
2	-4.714	-3.333	2.000	2.000	6.000	-3.394	2.828	-
3	-1.563	1.563	0.677	0.541	-1.250	1.000	0.833	-
4	3.000	-0.750	-	0.866	-0.250	1.500	-1.000	1.299
5	2.309	0.577	-	1.000	0.433	-0.693	-0.577	1.000
6	2.000	1.200	3.464	-0.520	-0.600	-1.200	1.000	-
7	2.500	-1.768	2.357	-0.354	0.707	1.000	0.833	-
8	17.321	-8.660	-20.000	3.000	1.386	-2.771	2.309	-
9	-0.577	-0.247	-	-0.150	0.680	-0.346	-0.289	1.000
10	2.000	0.857	-	-0.520	-0.943	-1.200	1.000	3.464

Ответы на типичные вопросы, возникающие при решении задачи

1. *Механизм, изображенный на рисунке не может двигаться. Не “заклинит” ли его?*

Вполне возможно, что через некоторое время после начала движения из указанного положения механизм “заклинит”. В задаче не указан интервал изменения времени. Предположите, что он мал или механизм совершает колебательные движения вокруг указанного состояния. Наша задача найти скорости в данный момент времени.

2. *МЦС оказался очень далеко и лежит за пределами чертежа. Что делать?*

\*) В ответах приведены не модули угловых скоростей, а проекции угловых скоростей на ось  $z$ , перпендикулярную чертежу. Знак, определение которого не входило в условие задачи, дает дополнительную информацию о направлении вращения звена.

Уменьшите масштаб длин.

Предупреждение типичных ошибок

1. Выбирая направление вектора скорости, не проводите вектор перпендикулярно чему-попало (чаще всего самому звену). Если это не ползун, у которого направление скорости задается самим ползуном, то вектор должен быть перпендикулярен *радиусу*, соединяющему точку, у которой ищем скорость, с неподвижной или мгновенно-неподвижной точкой *звена*, на котором расположена точка.

2. Распространенная ошибка: определение МЦС как точки пересечения перпендикуляров к скоростям точек разных звеньев. Будьте внимательны, при определении МЦС проводите перпендикуляры к скоростям точек *одного звена!*

3. Хорошая проверка записи формулы  $v_N = \omega_{MN} P_i N$ : буква или цифра обозначения точки  $N$  должна быть в формуле трижды. Во-первых, в обозначении самой скорости  $v_N$ , во-вторых, в индексе угловой скорости, так как точка принадлежит соответствующему звену, и, наконец, в наименовании отрезка, соединяющего МЦС звена, на котором лежит точка и угловая скорость которого используется, с самой точкой. Для большей надежности (но несколько более громоздко) МЦС можно не нумеровать, а приписывать им буквы соответствующего звена. Тогда появляется еще одна проверка, упреждающая возможные ошибки. Наименование звена, например  $MN$ , в формуле для скорости должно появляться дважды:  $v_N = \omega_{MN} P_{MN} N$ .

4. При построении плана скоростей не надо комбинировать два метода, строя на плане скорость, направление которой получено при помощи МЦС. План скоростей полностью независим от метода МЦС и является его хорошей проверкой \*).

## 8.2. Ускорения точек многозвенного механизма

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** *Плоский шарнирно-стержневой механизм состоит из шарнирно соединенных стержней и ползунков. Механизм приводится в движение кривошипом, который вращается с заданной угловой скоростью. В указанном положении механизма найти ускорения всех его шарниров.*

---

\*) Существует еще несколько способов проверки вычисления скоростей точек многозвенного механизма, см. §§ 8.3, 8.5, 16.2, 16.3.

## ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Определяем угловые скорости звеньев и скорости точек механизма (см. § 8.1).

2. Определяем ускорение шарнира, принадлежащего звену с известным законом движения:

$$W = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2},$$

где  $R$  — длина звена. Если задан закон изменения угла поворота  $\varphi(t)$ , то  $\omega = |d\varphi/dt|$ ,  $\varepsilon = d\omega/dt$ .

Если угловая скорость звена постоянна,  $\omega = \text{const}$ , то  $\varepsilon = 0$ . Вектор ускорения в этом случае направляем к центру вращения звена.

3. Для определения ускорения точки  $B$  тела, совершающего плоское движение, воспользуемся векторной формулой

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^n + \vec{W}_{BA}^b. \quad (1)$$

Здесь  $\vec{W}_A$  — известное ускорение точки, выбранной в качестве полюса,  $W_{BA}^n = \omega_{BA}^2 AB$  — центростремительное ускорение условного движения  $B$  вокруг  $A$  по окружности с радиусом  $AB$ ,  $W_{BA}^b = \varepsilon_{BA} AB$  — вращательное ускорение.

Возможны три случая определения ускорения по формуле (1).

А. Точка  $B$  является ползуном, или направление ее вектора ускорения по каким-либо другим причинам известно. В этом случае формула (1) в проекциях на оси координат представляет собой систему двух линейных уравнений для неизвестного модуля ускорения  $a_B$  и неизвестного углового ускорения звена  $\varepsilon_{BA}$ .

Б. В точке  $B$  шарнирно соединены звено  $AB$  и звено  $BC$ , где  $C$  — неподвижный шарнир. Таким образом, точка  $B$  движется по окружности с центром в  $C$ , и ее ускорение можно представить в виде векторной суммы нормального и тангенциального ускорения:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_B^n + \vec{W}_B^\tau. \quad (2)$$

Величину нормального ускорения  $\vec{W}_B^n$  находим, зная скорость точки  $B$ :  $W_B^n = v_B^2/BC$ . Направляем вектор  $\vec{W}_B^n$  по радиусу  $BC$  к центру вращения  $C$ . Вектор  $\vec{W}_B^\tau$  неизвестен лишь по модулю, направление его известно — перпендикулярно радиусу  $BC$ .

В результате, система уравнений (1–2), записанная в проекциях, даст четыре уравнения для четырех неизвестных  $W_B^\tau$ ,  $W_{Bx}$ ,  $W_{By}$ ,  $\varepsilon_{BA}$ . Решая ее, находим ускорение  $\vec{W}_B$ .



В. Точка  $B$  не удовлетворяет случаям А и Б. В этом случае либо она не является шарниром, либо к ней шарнирно присоединено тело, совершающее плоское (не вращательное и не поступательное) движение. Для решения задачи должны быть известны угловая скорость и угловое ускорение звена, на котором находится точка  $B$ . Они могут быть найдены при вычислении скорости и ускорения других точек этого звена. При этих условиях уравнение (1) является векторным уравнением для одной неизвестной  $\vec{W}_B$ .

Этот пункт плана выполняем последовательно для всех звеньев механизма. Очередное звено должно иметь общую точку (шарнир) с предыдущим.

ПРИМЕР. Плоский шарнирно-стержневой механизм состоит из четырех шарнирно соединенных стержней и горизонтально движущегося ползуна  $C$  (рис. 96). Механизм приводится в движение кривошипом  $OA$ , который вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_{OA} = 2$  рад/с. В указанном положении механизма найти ускорения шарниров  $A, B, C$  и точки  $M$ . Даны размеры:  $AO = 2$  см,  $AB = 5$  см,  $AM = 2$  см,  $BD = 3$  см,  $BC = 2$  см,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ .

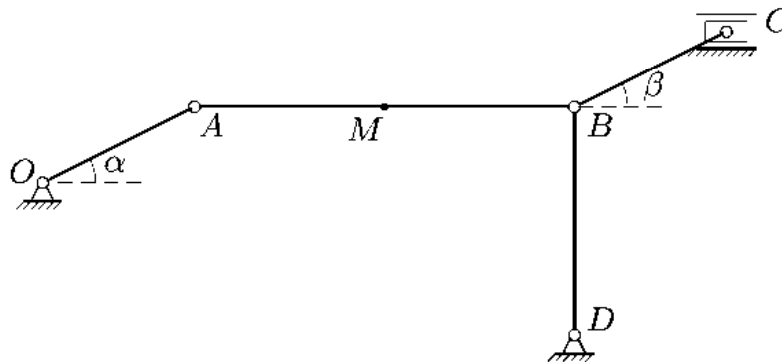


Рис. 96

### РЕШЕНИЕ

1. Определяем угловые скорости звеньев и скорости точек механизма. Находим величину скорости точки  $A$ :

$$v_A = \omega_{OA} \cdot AO = 2 \cdot 2 = 4 \text{ см/с.}$$

Вектор  $\vec{v}_A$  направляем перпендикулярно радиусу  $AO$  против часовой стрелки. Вектор скорости  $\vec{v}_B$  направлен горизонтально. Мгновенный центр скоростей  $P$  звена  $AB$  находится на пересечении перпендикуляров к векторам скоростей точек  $A$  и  $B$  (рис. 97). Находим расстояния

от точек  $A$ ,  $B$ ,  $M$  до МЦС:

$$AP = AB / \cos 30^\circ = 5.774 \text{ см},$$

$$BP = AP \sin 30^\circ = 2.887 \text{ см},$$

$$MP = \sqrt{MB^2 + BP^2} = \sqrt{3^2 + 2.887^2} = 4.163 \text{ см}.$$

Скорости точек находим из системы уравнений

$$v_A = \omega_{AB} AP,$$

$$v_M = \omega_{AB} MP,$$

$$v_B = \omega_{AB} BP.$$

В результате решения получаем

$$\omega_{AB} = v_A / AP = 0.693 \text{ рад/с}, \quad v_B = 2.000 \text{ см/с}, \quad v_M = 2.884 \text{ см/с}.$$

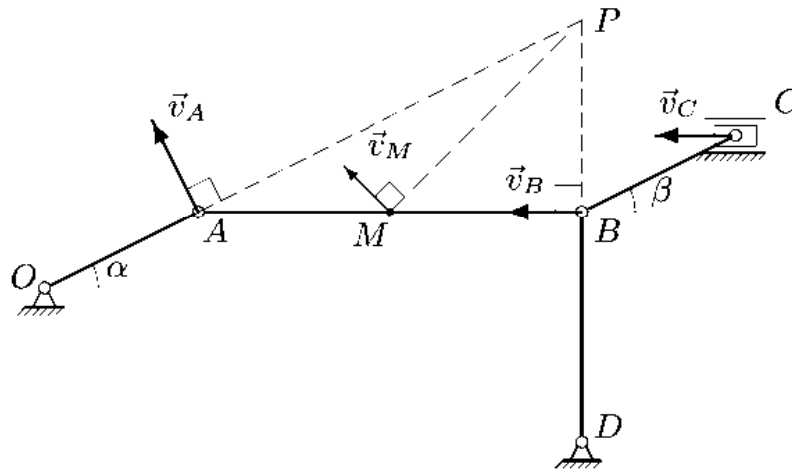


Рис. 97

Найти скорость точки  $C$  не составит труда. Векторы  $\vec{v}_B$  и  $\vec{v}_C$  параллельны и не перпендикулярны отрезку  $BC$ . Следовательно, звено  $BC$  совершает мгновенно-поступательное движение, и скорости всех его точек в этот момент равны. Отсюда,  $v_C = v_B = 2 \text{ см/с}$ . Угловая скорость звена  $BC$  равна нулю.

2. Определяем ускорение шарнира  $A$ , принадлежащего звену  $OA$  с известной постоянной угловой скоростью  $\omega_{OA}$ . Ускорение точки  $A$  состоит только из нормальной составляющей,

$$W_A = \omega_{OA}^2 OA = 4 \cdot 2 = 8 \text{ см/с}^2,$$

и направлено вдоль  $OA$  к центру  $O$  (рис. 98).

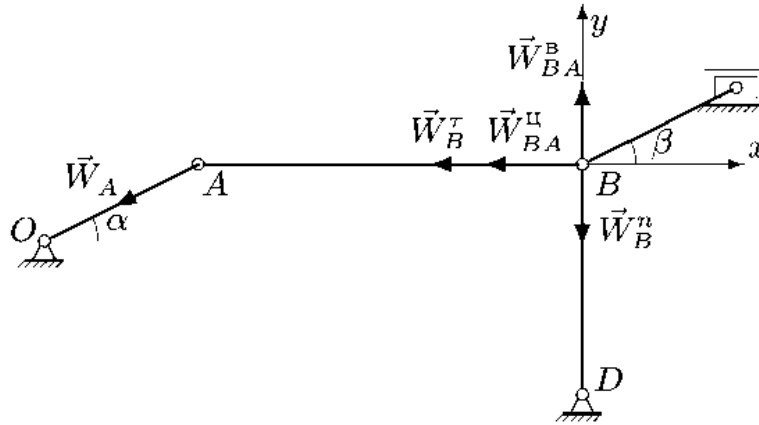


Рис. 98

3. Находим ускорение точки  $B$ . Точка  $B$  движется по окружности с центром в неподвижном шарнире  $D$ , и ее ускорение можно представить в виде векторной суммы нормального и тангенциального ускорений:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_B^n + \vec{W}_B^\tau. \quad (3)$$

С другой стороны, ускорение точки  $B$  выражается через ускорение точки  $A$ , лежащей на том же звене  $AB$ . Рассматривая  $A$  в качестве полюса, имеем

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^\tau + \vec{W}_{BA}^n, \quad (4)$$

Сравнивая (3) и (4), получаем, что

$$\vec{W}_B^n + \vec{W}_B^\tau = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^\tau + \vec{W}_{BA}^n.$$

В проекциях на оси  $x$ ,  $y$  (рис. 98) векторное уравнение (3) дает систему двух уравнений относительно неизвестных  $W_B^\tau$  и  $W_{BA}^n$ :

$$\begin{aligned} -W_B^\tau &= -W_A \cos 30^\circ - W_{BA}^n, \\ -W_B^n &= -W_A \sin 30^\circ + W_{BA}^n, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $W_B^n = v_B^2 / BD = 4/3 = 1.333 \text{ см/с}^2$ ,  $W_{BA}^n = \omega_{AB}^2 AB = 2.401 \text{ см/с}^2$ . Решаем систему (5):

$$\begin{aligned} W_B^\tau &= W_A \cos 30^\circ + W_{BA}^n = 8 \cdot 0.866 + 2.4 = 9.328 \text{ см/с}^2, \\ W_{BA}^n &= -W_B^n + W_A \sin 30^\circ = 2.667 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

Окончательно, величина ускорения точки  $B$

$$W_B = \sqrt{(W_B^n)^2 + (W_B^\tau)^2} = \sqrt{1.333^2 + 9.328^2} = 9.423 \text{ см/с}^2.$$

Вычисление ускорения точки  $M$  выполняем по п.3В плана решения. Действительно, угловая скорость и угловое ускорение звена  $AB$  уже известны:

$$\omega_{AB} = 0.693 \text{ рад/с}, \quad \varepsilon_{AB} = W_{BA}^B / AB = 0.533 \text{ рад/с}^2.$$

Рассматривая  $A$  в качестве полюса (рис. 99), записываем векторное уравнение \*)

$$\vec{W}_M = \vec{W}_A + \vec{W}_{MA}^H + \vec{W}_{MA}^B, \quad (6)$$

где  $W_{MA}^H = \omega_{AB}^2 AM = 0.961 \text{ см/с}^2$ ,  $W_{MA}^B = \varepsilon_{AB} AM = 1.066 \text{ см/с}^2$ . Из (6) определяем проекции  $\vec{W}_M$  на оси координат:

$$\begin{aligned} W_{Mx} &= -W_A \cos 30^\circ - W_{MA}^H = -7.889 \text{ см/с}^2, \\ W_{My} &= -W_A \sin 30^\circ + W_{MA}^B = -2.933 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

Величина ускорения точки  $M$

$$W_B = \sqrt{(W_{Mx})^2 + (W_{My})^2} = 8.416 \text{ см/с}^2.$$

Находим ускорение точки  $C$ . Скорости точек  $B$  и  $C$  звена  $BC$ , совершающего *мгновенно* - поступательное движение, равны, однако, их ускорения различны.

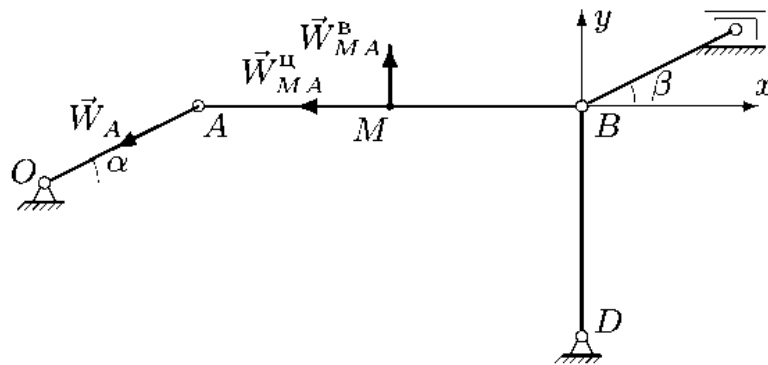


Рис. 99

Для определения  $\vec{W}_C$  воспользуемся векторным равенством (полюс — точка  $B$ )

$$\vec{W}_C = \vec{W}_B + \vec{W}_{CB}^H + \vec{W}_{CB}^B,$$

\*) В качестве полюса можно также брать точку  $B$ , ускорение которой уже найдено.

где  $W_{CB}^n = \omega_{CB}^2 CB = 0$ . Вектор  $\vec{W}_B$  раскладываем на составляющие (рис. 100)

$$\vec{W}_C = \vec{W}_B^n + \vec{W}_B^t + \vec{W}_{CB}^a. \quad (7)$$

Векторное уравнение (7) содержит две неизвестных величины:  $W_{CB}^a$  и  $W_C$ . Записывая (7) в проекциях на оси  $xy$ , получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными. Но можно решить задачу проще.

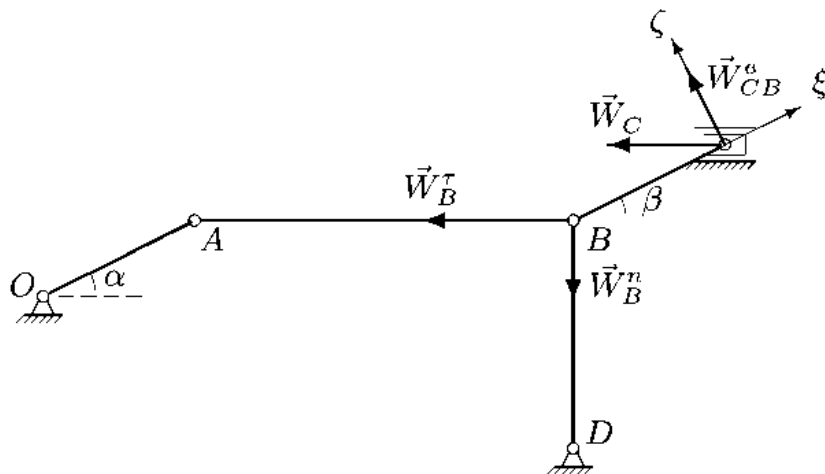


Рис. 100

Спроецируем (7) на ось  $\xi$ , направленную вдоль стержня  $BC$ . При этом в уравнение не войдет модуль неизвестного вектора  $\vec{W}_{CB}^a$ :

$$-W_C \cos 30^\circ = -W_B^t \cos 30^\circ - W_B^n \sin 30^\circ.$$

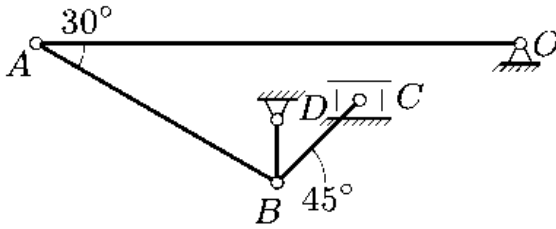
Находим  $W_C$ :  $W_C = W_B^t + W_B^n \operatorname{tg} 30^\circ = 10.098 \text{ см/с}^2$ .

Результаты расчетов помещаем в таблицу (скорости в см/с, ускорения в см/с<sup>2</sup>):

$v_A$	$v_B$	$v_C$	$v_M$	$W_A$	$W_B$	$W_C$	$W_M$
4.000	2.000	2.000	2.884	8.000	9.423	10.098	8.416

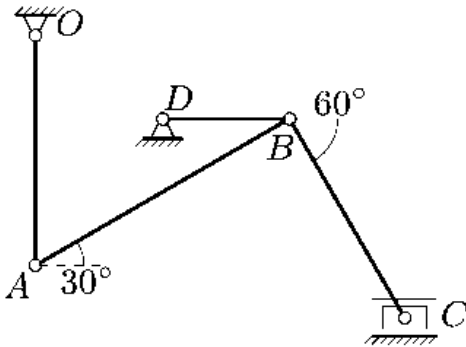
*УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Плоский шарнирно-стержневой механизм состоит из четырех шарнирно соединенных стержней и горизонтально или вертикально движущегося ползуна. Механизм приводится в движение кривошипом, который вращается с заданной постоянной угловой скоростью. В указанном положении механизма найти ускорения всех его шарниров.*

1.



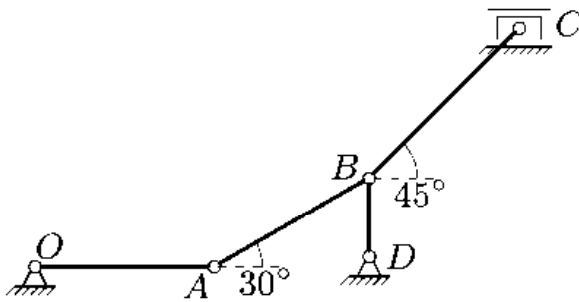
$\omega_{OA} = 1 \text{ рад/с,}$   
 $OA = 108 \text{ см, } DB = 14 \text{ см,}$   
 $AB = 62 \text{ см, } BC = 26 \text{ см.}$

2.



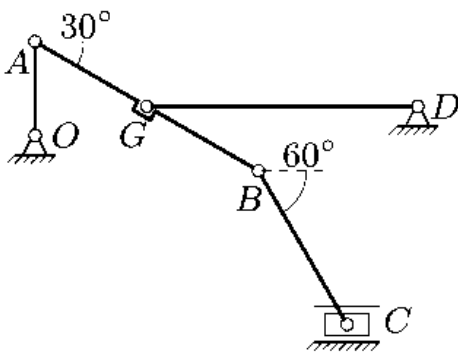
$\omega_{DB} = -4 \text{ рад/с,}$   
 $OA = 29 \text{ см, } DB = 16 \text{ см,}$   
 $AB = 37 \text{ см, } BC = 29 \text{ см.}$

3.



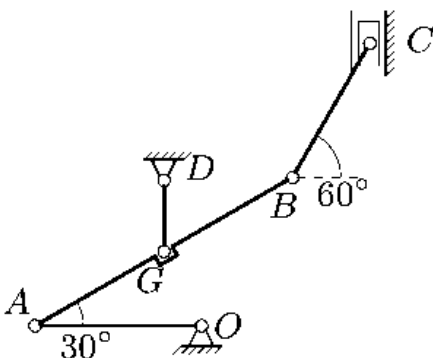
$\omega_{OA} = 3 \text{ рад/с,}$   
 $OA = 27 \text{ см, } DB = 12 \text{ см,}$   
 $AB = 27 \text{ см, } BC = 32 \text{ см.}$

4.



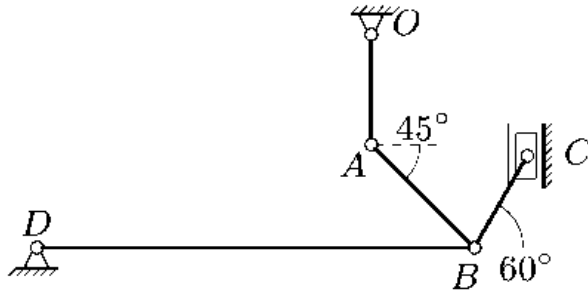
$\omega_{OA} = 1 \text{ рад/с,}$   
 $OA = 29 \text{ см, } BG = 40 \text{ см,}$   
 $DG = 84 \text{ см, } AG = 40 \text{ см,}$   
 $BC = 55 \text{ см.}$

5.



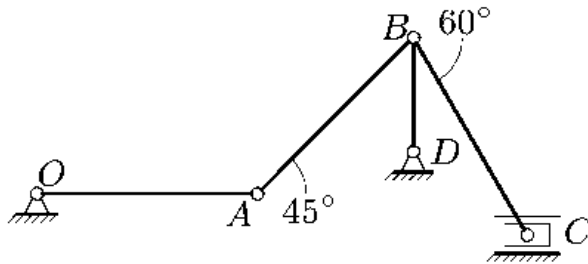
$\omega_{DG} = 1 \text{ рад/с,}$   
 $OA = 28 \text{ см, } BG = 25 \text{ см,}$   
 $DG = 12 \text{ см, } AG = 25 \text{ см,}$   
 $BC = 26 \text{ см.}$

6.



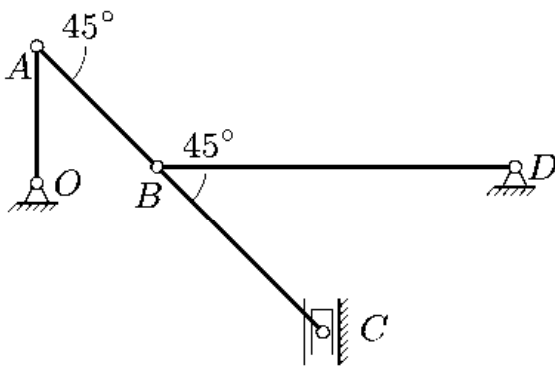
$$\begin{aligned} \omega_{OA} &= 2 \text{ рад/с,} \\ OA &= 30 \text{ см, } DB = 120 \text{ см,} \\ AB &= 40 \text{ см, } BC = 29 \text{ см.} \end{aligned}$$

7.



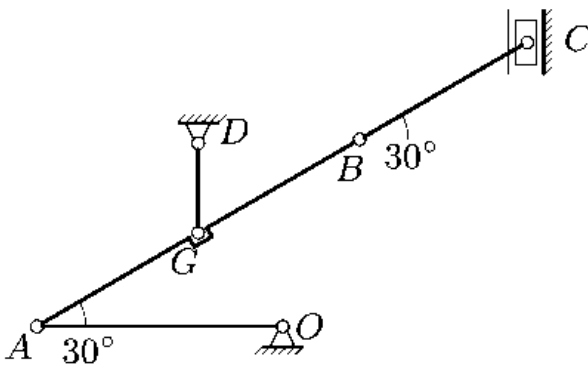
$$\begin{aligned} \omega_{OA} &= -3 \text{ рад/с,} \\ OA &= 31 \text{ см, } DB = 16 \text{ см,} \\ AB &= 31 \text{ см, } BC = 32 \text{ см.} \end{aligned}$$

8.



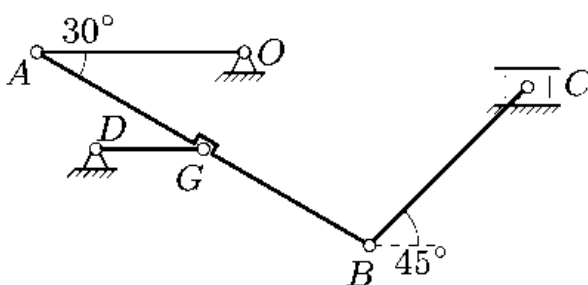
$$\begin{aligned} \omega_{DB} &= 2 \text{ рад/с,} \\ OA &= 32 \text{ см, } DB = 84 \text{ см,} \\ AB &= 40 \text{ см, } BC = 55 \text{ см.} \end{aligned}$$

9.



$$\begin{aligned} \omega_{OA} &= 1 \text{ рад/с,} \\ OA &= 33 \text{ см, } BG = 25 \text{ см,} \\ DG &= 12 \text{ см, } AG = 25 \text{ см,} \\ BC &= 26 \text{ см.} \end{aligned}$$

10.



$$\begin{aligned} \omega_{DG} &= 3 \text{ рад/с,} \\ OA &= 27 \text{ см, } BG = 25 \text{ см,} \\ DG &= 14 \text{ см, } AG = 25 \text{ см,} \\ BC &= 29 \text{ см.} \end{aligned}$$

## Ответы

	$v_A$	$v_B$	$v_C$	$v_G$	$W_A$	$W_B$	$W_C$	$W_G$
	м/с				м/с <sup>2</sup>			
1	1.080	0.624	0.624	—	1.080	2.785	2.564	—
2	0.370	0.640	1.109	—	1.222	2.560	13.859	—
3	0.810	0.468	0.468	—	2.430	5.434	6.942	—
4	0.290	1.046	1.450	0.502	0.290	4.158	21.205	1.936
5	0.208	0.317	0.069	0.120	0.349	0.171	0.504	0.120
6	0.600	0.600	0.600	—	1.200	3.459	3.272	—
7	0.930	0.930	0.930	—	2.790	7.553	4.087	—
8	1.680	1.680	1.680	—	16.970	3.360	3.360	—
9	0.330	0.504	0.330	0.191	0.330	1.489	6.219	0.598
10	0.420	0.420	0.420	0.420	3.378	4.588	8.208	1.260

	$\omega_{AO}$	$\omega_{DB}$	$\omega_{DG}$	$\omega_{AB}$	$\omega_{BC}$	$\varepsilon_{AB}$	$\varepsilon_{BC}$
	рад/с					рад/с <sup>2</sup>	
1	1.000	4.454	—	2.011	0.000	2.836	−15.106
2	−1.274	−4.000	—	−1.997	4.414	0.834	−33.743
3	3.000	−3.897	—	−3.464	0.000	−0.866	8.054
4	1.000	—	−0.598	1.450	−3.653	5.143	−38.076
5	−0.742	—	1.000	−0.960	1.066	−0.362	−1.341
6	2.000	−0.500	—	−2.121	−0.000	3.439	−1.195
7	−3.000	5.813	—	4.243	−0.000	−6.660	33.785
8	−5.250	2.000	—	−5.940	0.000	−4.097	−8.640
9	1.000	—	−1.588	1.524	−2.931	2.738	−25.347
10	−1.556	—	3.000	0.000	−2.048	−15.307	20.356

### 8.3. Уравнение трех угловых скоростей

*ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Подобрать длины звеньев шарнирного четырехзвенника так, чтобы в некоторый момент движения угловые скорости его звеньев были бы равны заданным. Положение опорных шарниров четырехзвенника известно.*

#### ПЛАН РЕШЕНИЯ

Под угловыми скоростями будем понимать проекции соответствующих векторов на ось  $z$ , перпендикулярную плоскости движения. Индекс  $z$  дополнительно указывать не будем, принимая  $\omega_i = \omega_{iz}$ .

1. Последовательно нумеруем шарниры и звенья механизма. Выбираем систему координат, помещая ее начало в один из шарниров механизма. Определяем координаты шарниров.



2. Записываем уравнения трех угловых скоростей<sup>\*)</sup>:

$$\begin{aligned} \omega_1(x_2 - x_1) + \omega_2(x_3 - x_2) + \omega_3(x_4 - x_3) &= 0, \\ \omega_1(y_2 - y_1) + \omega_2(y_3 - y_2) + \omega_3(y_4 - y_3) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x_i, y_i$  и  $x_{i+1}, y_{i+1}$ ,  $i = 1 \dots 3$ , — координаты шарниров на концах звена, имеющего угловую скорость  $\omega_i$ . Шарниры 1 и 4 — опорные. Все угловые скорости и некоторые координаты даны в условии.

3. Решаем систему (1) относительно неизвестных координат. Определяем длины звеньев механизма (расстояния между шарнирами) по формулам

$$L_i = \sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2}, \quad i = 1 \dots 3.$$

**ПРИМЕР.** В положении, изображенном на рис. 101, известны угловые скорости шарнирного четырехзвенника  $OABC$ :  $\omega_{OA} = 2$  рад/с,  $\omega_{AB} = -2$  рад/с,  $\omega_{BC} = 3.5$  рад/с. Найти длины звеньев  $OA$  и  $BC$ ,  $AB \parallel OD$ . Расстояния даны в см,  $AB = 60$  см.

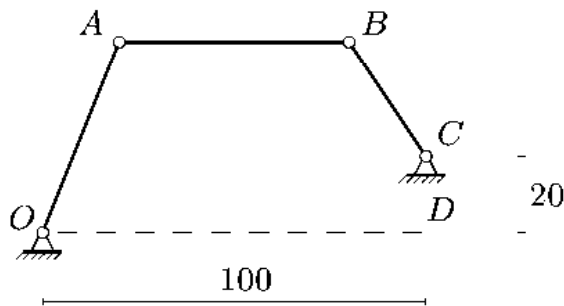


Рис. 101

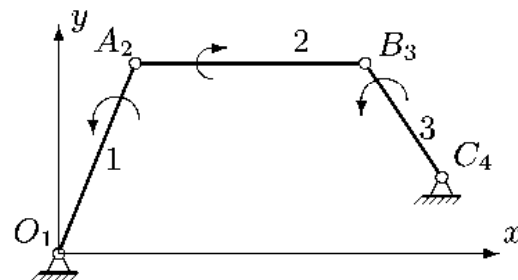


Рис. 102

### РЕШЕНИЕ

1. Последовательно нумеруем шарниры и звенья механизма. Номера шарниров указываем индексами у соответствующих букв. Выбираем систему координат, помещая ее начало в шарнир  $O$ . Определяем координаты шарниров (рис. 102):

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad x_4 = 100 \text{ см}, \quad y_4 = 20 \text{ см}.$$

2. Записываем уравнения трех угловых скоростей (1), где по условию  $x_3 = x_2 + AB$ ,  $y_2 = y_3$ ,  $\omega_{OA} = \omega_1 = 2$  рад/с,  $\omega_{AB} = \omega_2 = -2$  рад/с,

<sup>\*)</sup> Уравнения следуют из координатной формы записи векторной формулы (1), на с. 130, для скоростей точек при плоском движении.

$\omega_{BC} = \omega_3 = 3.5$  рад/с. Система приобретает вид

$$\begin{aligned} -1.5x_2 + 20 &= 0, \\ -1.5y_2 + 70 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

3. Решаем систему (2) относительно  $x_2, y_2$ . Получаем

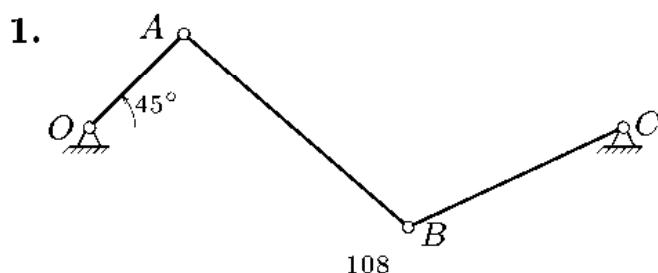
$$x_2 = 13.333 \text{ см}, \quad y_2 = y_3 = 46.667 \text{ см}.$$

Кроме того,  $x_3 = x_2 + 60 = 73.333$  см,  $y_3 = y_2 = 46.667$  см. Определяем длины звеньев:

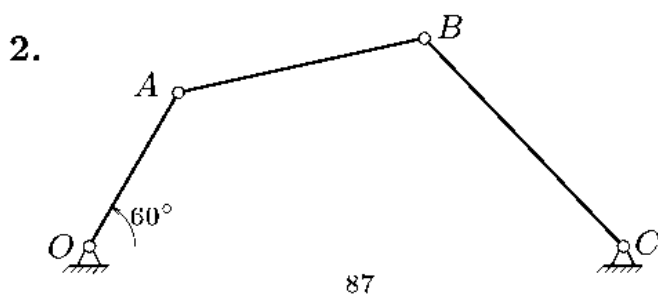
$$OA = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 48.533 \text{ см},$$

$$BC = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2} = 37.712 \text{ см}.$$

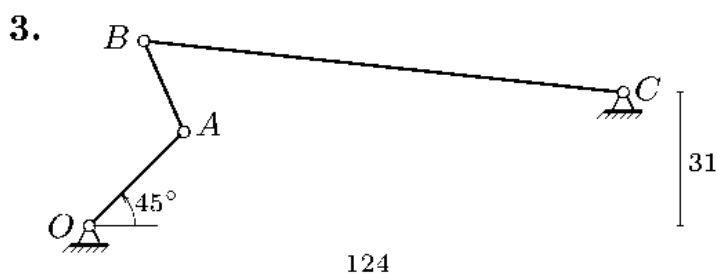
*УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Подобрать длины звеньев (в см) шарнирного четырехзвенника так, чтобы в некоторый момент движения угловые скорости его звеньев были бы равны заданным. Положение опорных шарниров четырехзвенника известно. Расстояния даны в см.*



$$\begin{aligned} \omega_{OA} &= 1 \text{ рад/с}, \\ \omega_{AB} &= 0.2 \text{ рад/с}, \\ \omega_{BC} &= -0.6 \text{ рад/с}, \\ OA &= 27 \text{ см}. \end{aligned}$$

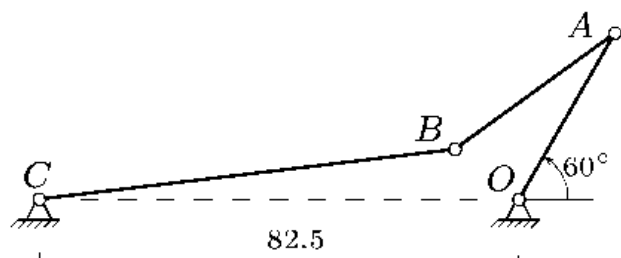


$$\begin{aligned} \omega_{OA} &= 4 \text{ рад/с}, \\ \omega_{AB} &= -3 \text{ рад/с}, \\ \omega_{BC} &= 2 \text{ рад/с}, \\ OA &= 29 \text{ см}. \end{aligned}$$



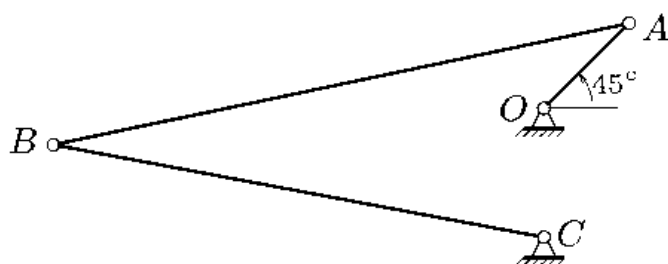
$$\begin{aligned} \omega_{OA} &= 3 \text{ рад/с}, \\ \omega_{AB} &= -4 \text{ рад/с}, \\ \omega_{BC} &= -0.9 \text{ рад/с}, \\ OA &= 31 \text{ см}. \end{aligned}$$

4.



$$\begin{aligned}\omega_{OA} &= -10 \text{ рад/с,} \\ \omega_{AB} &= -17 \text{ рад/с,} \\ \omega_{BC} &= 4 \text{ рад/с,} \\ OA &= 33 \text{ см.}\end{aligned}$$

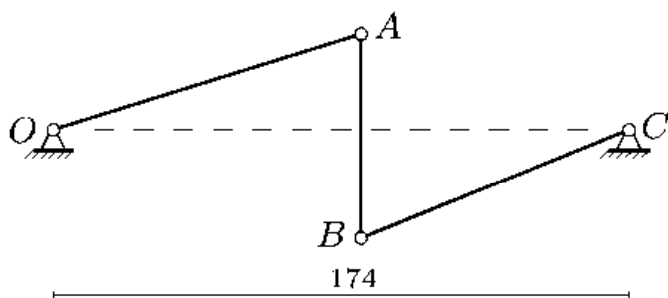
5.



$$\begin{aligned}\omega_{OA} &= 1 \text{ рад/с,} \\ \omega_{AB} &= 0.4 \text{ рад/с,} \\ \omega_{BC} &= 0.3 \text{ рад/с,} \\ OA &= 27 \text{ см.}\end{aligned}$$

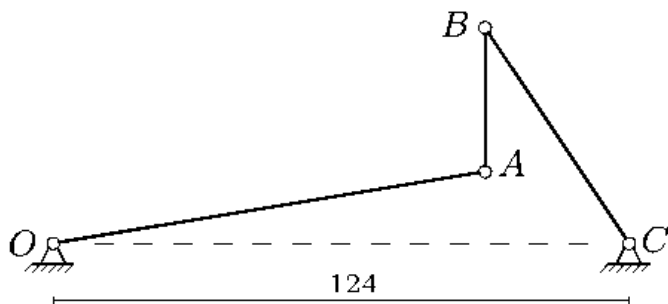
29

6.



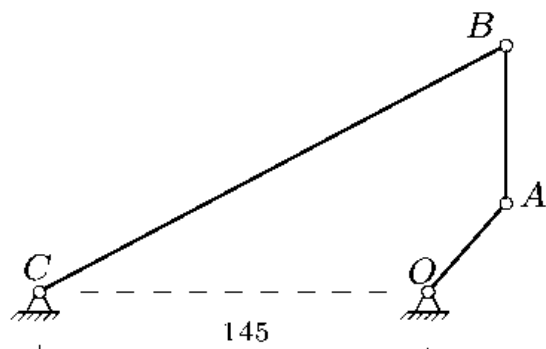
$$\begin{aligned}\omega_{OA} &= -1.7 \text{ рад/с,} \\ \omega_{AB} &= 0.2 \text{ рад/с,} \\ \omega_{BC} &= 2 \text{ рад/с,} \\ AB &\perp OC, \\ AB &= 62 \text{ см.}\end{aligned}$$

7.



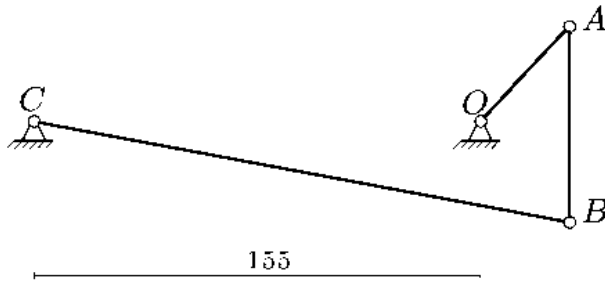
$$\begin{aligned}\omega_{OA} &= -1 \text{ рад/с,} \\ \omega_{AB} &= 5 \text{ рад/с,} \\ \omega_{BC} &= 3 \text{ рад/с,} \\ AB &\perp OC, \\ AB &= 31 \text{ см.}\end{aligned}$$

8.



$$\begin{aligned}\omega_{OA} &= 12 \text{ рад/с,} \\ \omega_{AB} &= -4 \text{ рад/с,} \\ \omega_{BC} &= 2 \text{ рад/с,} \\ AB &\perp OC, \\ AB &= 59 \text{ см.}\end{aligned}$$

9.



$$\begin{aligned} \omega_{OA} &= 18 \text{ рад/с,} \\ \omega_{AB} &= 10 \text{ рад/с,} \\ \omega_{BC} &= 3 \text{ рад/с,} \\ AB &\perp OC, \\ AB &= 68 \text{ см.} \end{aligned}$$

10.



$$\begin{aligned} \omega_{OA} &= 4 \text{ рад/с,} \\ \omega_{AB} &= -4 \text{ рад/с,} \\ \omega_{BC} &= 0.5 \text{ рад/с,} \\ OA &= 33 \text{ см.} \end{aligned}$$

132

Ответы

	OA	AB	BC		OA	AB	BC
1	27.000	57.369	49.889	6	98.772	62.000	86.052
2	29.000	41.824	47.475	7	94.283	31.000	55.886
3	31.000	20.397	110.910	8	45.762	59.000	197.958
4	33.000	32.812	72.911	9	44.362	68.000	189.503
5	27.000	141.549	114.560	10	33.000	22.531	159.049

## 8.4. Уравнение трех угловых ускорений

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** Многозвенный механизм приводится в движение кривошипом, вращающимся с известной угловой скоростью и известным угловым ускорением. Найти угловые скорости и угловые ускорения звеньев механизма.

**ПЛАН РЕШЕНИЯ**

Под угловыми скоростями и ускорениями будем понимать проекции соответствующих векторов на ось  $z$ , перпендикулярную плоскости движения. Индекс  $z$  дополнительно указывать не будем, принимая  $\omega_i = \omega_{iz}$ ,  $\varepsilon_i = \varepsilon_{iz}$ .

1. Нумеруем шарниры и звенья механизма. Выберем систему координат, помещая ее начало в один из шарниров механизма. Определяем координаты шарниров.

2. Выделяем из механизма шарнирные четырехзвенники. Рассмотрим четырехзвенник, шарниры которого последовательно обозначены номерами  $n_1, n_2, n_3, n_4$ , где  $n_1$  и  $n_4$  — номера неподвижных

шарниров. Стержни четырехзвенника имеют номера  $m_1, m_2, m_3$ . Записываем уравнения трех угловых скоростей:

$$\sum_{i=1}^3 \omega_{m_i} (x_{n_i} - x_{n_{i+1}}) = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \omega_{m_i} (y_{n_i} - y_{n_{i+1}}) = 0, \quad (1)$$

где  $\omega_{m_i}$  — угловая скорость  $m_i$ -го звена,  $x_{n_i}, y_{n_i}, x_{n_{i+1}}, y_{n_{i+1}}$  — координаты его концов. Номера шарниров  $n_i, i = 1 \dots 4$ , как и номера звеньев  $m_i, i = 1 \dots 3$ , не обязательно должны быть последовательными числами.

3. Из решения (1) получаем все угловые скорости механизма.

4. Записываем уравнения трех угловых ускорений для каждого четырехзвенника \*) :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{m_i} (x_{n_i} - x_{n_{i+1}}) - \sum_{i=1}^3 \omega_{m_i}^2 (y_{n_i} - y_{n_{i+1}}) &= 0, \\ \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{m_i} (y_{n_i} - y_{n_{i+1}}) + \sum_{i=1}^3 \omega_{m_i}^2 (x_{n_i} - x_{n_{i+1}}) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\varepsilon_{m_i}$  — угловое ускорение  $m_i$ -го звена.

5. Решаем (2) относительно неизвестных угловых ускорений.

ПРИМЕР. Многочленный механизм приводится в движение кривошипом  $OA$ , вращающимся с угловой скоростью  $\omega_{OA} = 1$  рад/с и угловым ускорением  $\varepsilon_{OA} = 2$  рад/с<sup>2</sup> (рис. 103).

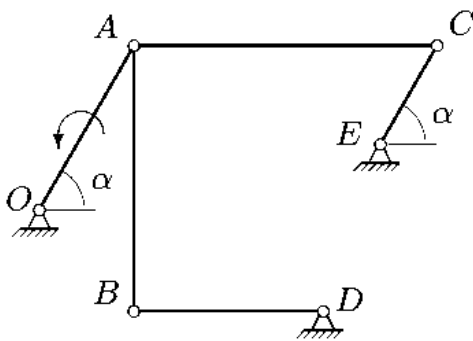


Рис. 103

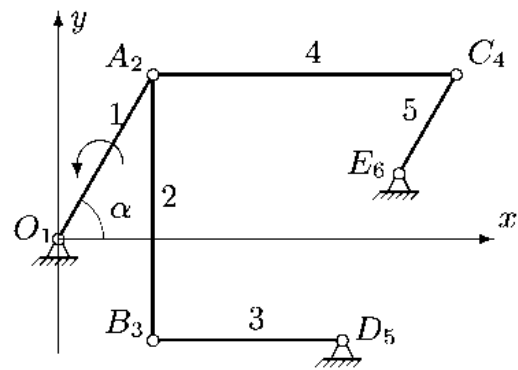


Рис. 104

Дано:  $OA = 50$  см,  $AB = 70$  см,  $BD = 50$  см,  $AC = 80$  см,  $EC = 30$  см;  $AC \perp AB$ ,  $AB \perp BD$ . Найти угловые скорости и угловые ускорения звеньев механизма.

\*) Уравнения следуют из координатной формы записи векторной формулы (4), на с. 130, для ускорений точек при плоском движении.

## РЕШЕНИЕ

1. Нумеруем шарниры и звенья механизма (рис. 104). Выбираем систему координат, помещая ее начало в шарнир  $O$ . Определяем координаты шарниров:

$$\begin{aligned} x_1 = 0, & & y_1 = 0, \\ x_2 = x_3 = OA \cos \alpha, & & y_2 = y_4 = OA \sin \alpha, \\ x_4 = OA \cos \alpha + AC, & & y_3 = OA \sin \alpha - AB, \\ x_5 = OA \cos \alpha + BD, & & y_5 = OA \sin \alpha - AB, \\ x_6 = (OA - CE) \cos \alpha + AC, & & y_6 = (OA - EC) \sin \alpha. \end{aligned}$$

2. Выделяем из механизма шарнирные четырехзвенники (рис. 105, 106). Записываем уравнения трех угловых скоростей для четырехзвенника  $OABD$  (рис. 105),

$$\begin{aligned} \omega_1(x_1 - x_2) + \omega_2(x_2 - x_3) + \omega_3(x_3 - x_5) &= 0, \\ \omega_1(y_1 - y_2) + \omega_2(y_2 - y_3) + \omega_3(y_3 - y_5) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

и для четырехзвенника  $OACE$  (рис. 106),

$$\begin{aligned} \omega_1(x_1 - x_2) + \omega_4(x_2 - x_4) + \omega_5(x_4 - x_6) &= 0, \\ \omega_1(y_1 - y_2) + \omega_4(y_2 - y_4) + \omega_5(y_4 - y_6) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

3. Решаем систему четырех линейных уравнений (3), (4). Получаем угловые скорости звеньев:  $\omega_2 = 0.619$  рад/с,  $\omega_3 = -0.5$  рад/с,  $\omega_4 = 0$ ,  $\omega_5 = 1.667$  рад/с. Из решения следует, что звено  $AC$  движется мгновенно-поступательно. Этот результат очевиден. Его можно было получить сразу из условия задачи, не решая ее. Действительно,  $OA \parallel EC$ , следовательно, векторы скоростей шарниров  $A$  и  $C$  также

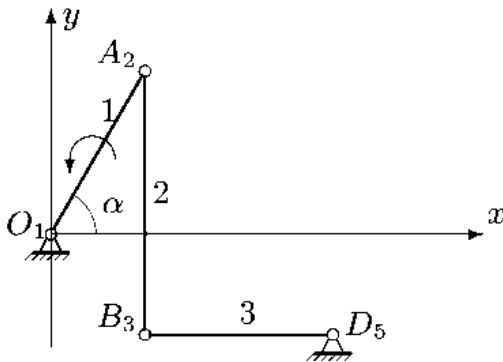


Рис. 105

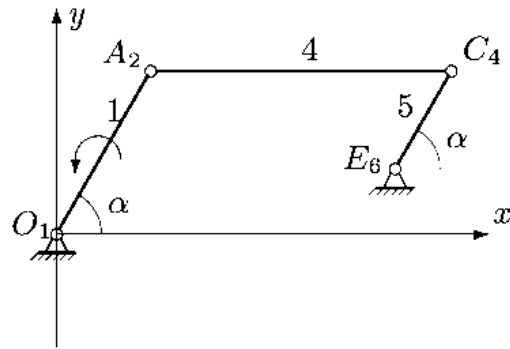


Рис. 106

параллельны и не перпендикулярны  $AC$ . Мгновенного центра скоростей звена  $AC$  не существует (расположен в "бесконечности"), что соответствует  $\omega_4 = 0$ .

4. Записываем уравнения трех угловых ускорений для четырехзвенника  $OABD$  (рис. 105),

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x_1 - x_2) + \varepsilon_2(x_2 - x_3) + \varepsilon_3(x_3 - x_5) - \\ - \omega_1^2(y_1 - y_2) - \omega_2^2(y_2 - y_3) - \omega_3^2(y_3 - y_5) = 0, \\ \varepsilon_1(y_1 - y_2) + \varepsilon_2(y_2 - y_3) + \varepsilon_3(y_3 - y_5) + \\ + \omega_1^2(x_1 - x_2) + \omega_2^2(x_2 - x_3) + \omega_3^2(x_3 - x_5) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

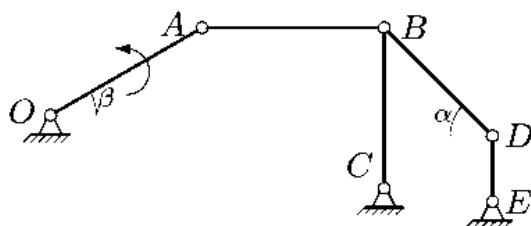
и для четырехзвенника  $OACE$  (рис. 106),

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x_1 - x_2) + \varepsilon_4(x_2 - x_4) + \varepsilon_5(x_4 - x_6) - \\ - \omega_1^2(y_1 - y_2) - \omega_4^2(y_2 - y_4) - \omega_5^2(y_4 - y_6) = 0, \\ \varepsilon_1(y_1 - y_2) + \varepsilon_4(y_2 - y_4) + \varepsilon_5(y_4 - y_6) + \\ + \omega_1^2(x_1 - x_2) + \omega_4^2(x_2 - x_4) + \omega_5^2(x_4 - x_6) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

5. Из решения (5,6) получаем угловые ускорения:  $\varepsilon_2 = 1.773$  рад/с<sup>2</sup>,  $\varepsilon_3 = -0.670$  рад/с<sup>2</sup>,  $\varepsilon_4 = -0.481$  рад/с<sup>2</sup>,  $\varepsilon_5 = 2.692$  рад/с<sup>2</sup>.

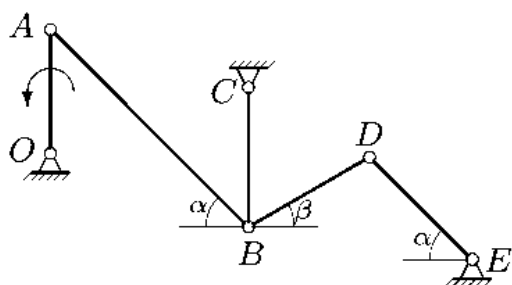
**УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.** Многозвенный механизм приводится в движение кривошипом  $OA$  или  $BC$ , вращающимся с известной угловой скоростью и известным угловым ускорением. Найти угловые скорости (в рад/с) и угловые ускорения (в рад/с<sup>2</sup>) звеньев механизма. Длины звеньев даны в см. Стержни, положение которых не определено углом, вертикальны или горизонтальны.

1.



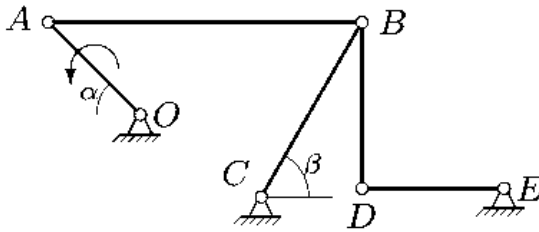
$$\begin{aligned} \omega_{OA} = 2 \text{ рад/с}, \quad OA = 24, \\ \varepsilon_{OA} = 2 \text{ рад/с}^2, \quad AB = 25, \\ \alpha = 45^\circ, \quad BC = 22, \\ \beta = 30^\circ, \quad BD = 21, \\ DE = 9. \end{aligned}$$

2.



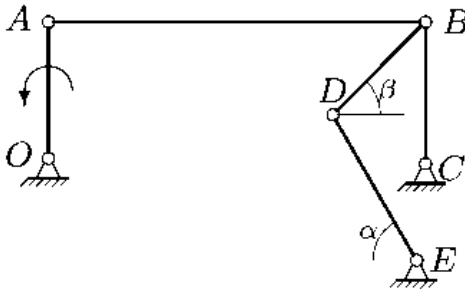
$$\begin{aligned} \omega_{OA} = 3 \text{ рад/с}, \quad OA = 24, \\ \varepsilon_{OA} = 2 \text{ рад/с}^2, \quad AB = 54, \\ \alpha = 45^\circ, \quad BC = 27, \\ \beta = 30^\circ, \quad BD = 27, \\ DE = 28. \end{aligned}$$

3.



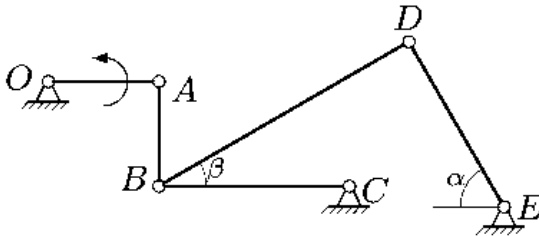
$$\begin{aligned} \omega_{OA} &= 4 \text{ рад/с}, & OA &= 22, \\ \epsilon_{OA} &= 1 \text{ рад/с}^2, & AB &= 53, \\ \alpha &= 45^\circ, & BC &= 34, \\ \beta &= 60^\circ, & BD &= 28, \\ & & DE &= 24. \end{aligned}$$

4.



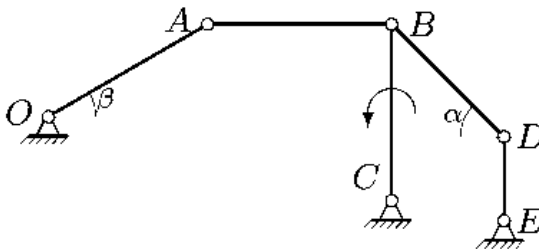
$$\begin{aligned} \omega_{OA} &= 1 \text{ рад/с}, & OA &= 26, \\ \epsilon_{OA} &= 3 \text{ рад/с}^2, & AB &= 72, \\ \alpha &= 60^\circ, & BC &= 27, \\ \beta &= 45^\circ, & BD &= 25, \\ & & DE &= 32. \end{aligned}$$

5.



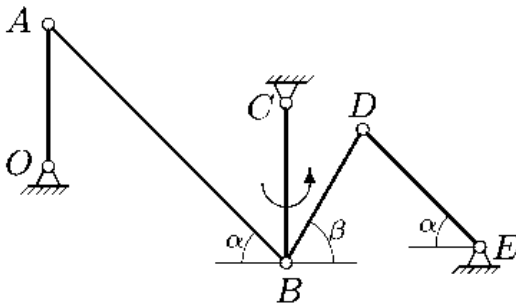
$$\begin{aligned} \omega_{OA} &= 2 \text{ рад/с}, & OA &= 18, \\ \epsilon_{OA} &= 4 \text{ рад/с}^2, & AB &= 17, \\ \alpha &= 60^\circ, & BC &= 31, \\ \beta &= 30^\circ, & BD &= 47, \\ & & DE &= 31. \end{aligned}$$

6.



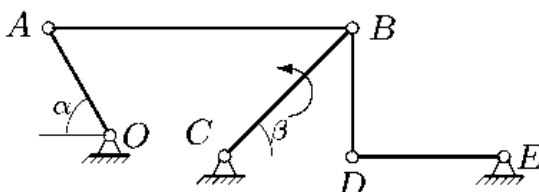
$$\begin{aligned} \omega_{BC} &= 1 \text{ рад/с}, & OA &= 22, \\ \epsilon_{BC} &= 1 \text{ рад/с}^2, & AB &= 22, \\ \alpha &= 45^\circ, & BC &= 21, \\ \beta &= 30^\circ, & BD &= 19, \\ & & DE &= 10. \end{aligned}$$

7.



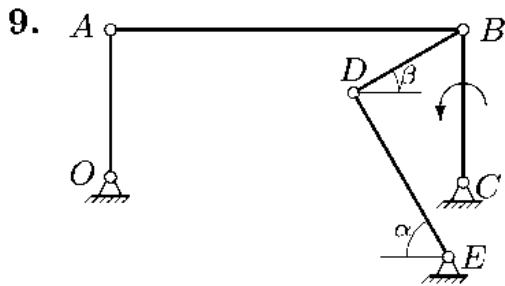
$$\begin{aligned} \omega_{BC} &= 3 \text{ рад/с}, & OA &= 24, \\ \epsilon_{BC} &= 2 \text{ рад/с}^2, & AB &= 57, \\ \alpha &= 45^\circ, & BC &= 27, \\ \beta &= 60^\circ, & BD &= 26, \\ & & DE &= 28. \end{aligned}$$

8.



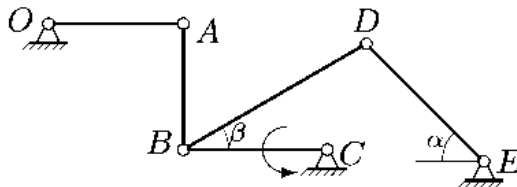
$$\begin{aligned} \omega_{BC} &= 4 \text{ рад/с}, & OA &= 26, \\ \epsilon_{BC} &= 3 \text{ рад/с}^2, & AB &= 64, \\ \alpha &= 60^\circ, & BC &= 38, \\ \beta &= 45^\circ, & BD &= 27, \\ & & DE &= 32. \end{aligned}$$





$$\begin{aligned} \omega_{BC} &= 1 \text{ рад/с}, & OA &= 28, \\ \varepsilon_{BC} &= 4 \text{ рад/с}^2, & AB &= 67, \\ \alpha &= 60^\circ, & BC &= 29, \\ \beta &= 30^\circ, & BD &= 24, \\ & & DE &= 36. \end{aligned}$$

10.



$$\begin{aligned} \omega_{BC} &= 2 \text{ рад/с}, & OA &= 30, \\ \varepsilon_{BC} &= 1 \text{ рад/с}^2, & AB &= 28, \\ \alpha &= 45^\circ, & BC &= 32, \\ \beta &= 30^\circ, & BD &= 47, \\ & & DE &= 37. \end{aligned}$$

Ответы

	$\omega_{OA}$	$\omega_{AB}$	$\omega_{BC}$	$\omega_{BD}$	$\omega_{DE}$	$\varepsilon_{OA}$	$\varepsilon_{AB}$	$\varepsilon_{BC}$	$\varepsilon_{BD}$	$\varepsilon_{DE}$
1	2.00	-1.66	1.09	-0.00	2.67	2.00	-0.79	8.01	-2.55	23.79
2	3.00	0.00	-2.67	-1.95	2.31	2.00	10.69	13.33	-2.17	-9.85
3	4.00	1.85	2.11	2.22	-1.50	1.00	1.12	-4.33	0.08	2.78
4	1.00	0.00	0.96	0.54	0.59	3.00	0.01	2.89	1.26	2.03
5	2.00	0.00	-1.16	-0.66	-0.58	4.00	6.69	-2.32	-1.10	-1.66
6	1.91	-1.65	1.00	0.00	2.10	-9.87	9.42	1.00	-1.72	4.41
7	-3.37	0.00	3.00	2.28	-1.50	19.27	12.81	2.00	-6.43	-4.38
8	4.77	2.65	4.00	3.98	-3.36	15.88	5.78	3.00	32.28	-2.45
9	1.04	0.00	1.00	0.60	0.70	4.14	0.02	4.00	2.10	2.95
10	-2.13	0.00	2.00	1.00	0.90	-1.07	9.45	1.00	1.57	-1.13

## 8.5. Кинематические уравнения плоского движения

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Составить кинематические уравнения плоского многозвенного механизма.

ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Составляем кинематические графы механизма, выбирая наиболее короткие маршруты. Началом и концом графа должна быть точка с известной скоростью. Кинематические графы должны включать в себя все звенья механизма. Некоторые звенья могут входить в разные графы. Обозначения для графов приведены на с. 130.

2. Записываем по два кинематических уравнения в проекциях на оси координат для каждого графа. Получаем систему дифференциальных уравнений.

3. Упрощаем систему уравнений, используя уравнения связей и тригонометрические формулы приведения.

ПРИМЕР 1. Механизм состоит из стержней  $OA$ ,  $AB$ ,  $CD$  и ползунов  $C$  и  $D$ . Ползун  $D$  движется вверх со скоростью  $v_D$  (рис. 107);  $BD = BC$ . Составить кинематические уравнения механизма.

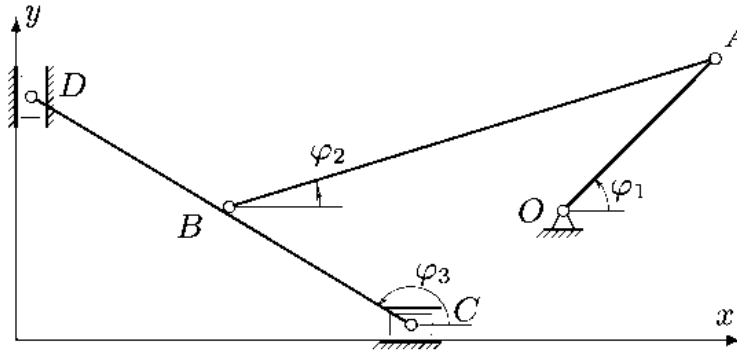


Рис. 107

### РЕШЕНИЕ

1. Составляем кинематические графы:

$$O \xrightarrow[\varphi_1]{OA} A \xrightarrow[\pi+\varphi_2]{AB} B \xrightarrow[\varphi_3]{BD} D, \quad (1)$$

$$C \xrightarrow[\varphi_3]{2CD} D. \quad (2)$$

2. Записываем для каждого графа (1), (2) по два кинематических уравнения в проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned} v_{Dx} &= v_{Ox} - \dot{\varphi}_1 OA \sin \varphi_1 - \dot{\varphi}_2 AB \sin(\pi + \varphi_2) - \dot{\varphi}_3 BD \sin \varphi_3, \\ v_{Dy} &= v_{Oy} + \dot{\varphi}_1 OA \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_2 AB \cos(\pi + \varphi_2) + \dot{\varphi}_3 BD \cos \varphi_3, \\ v_{Dx} &= v_{Cx} - \dot{\varphi}_3 CD \sin \varphi_3, \\ v_{Dy} &= v_{Cy} + \dot{\varphi}_3 CD \cos \varphi_3. \end{aligned} \quad (3)$$

3. Упрощаем систему (3), используя уравнения связей,  $v_{Ox} = 0$ ,  $v_{Oy} = 0$ ,  $v_{Dx} = 0$ ,  $v_{Cy} = 0$ ,  $v_{Dy} = v_D$ ,  $v_{Cx} = v_C$ , и тригонометрические

формулы приведения:

$$\begin{aligned}
 0 &= -\dot{\varphi}_1 OA \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_2 AB \sin \varphi_2 - \dot{\varphi}_3 BD \sin \varphi_3, \\
 v_D &= \dot{\varphi}_1 OA \cos \varphi_1 - \dot{\varphi}_2 AB \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_3 BD \cos \varphi_3, \\
 0 &= v_C - \dot{\varphi}_3 CD \sin \varphi_3, \\
 v_D &= \dot{\varphi}_3 CD \cos \varphi_3.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

ПРИМЕР 2. Плоский манипулятор состоит из жесткой детали  $OAB$ , стержней  $BC$ ,  $AM$ , колеса  $C$  и захвата  $M$ . Даны длины  $OA = R_1$ ,  $BC = R_2$ ,  $AM = R_3$ ,  $AB = R_4$ , и скорость захвата  $M$ ;  $AB \perp OA$ .

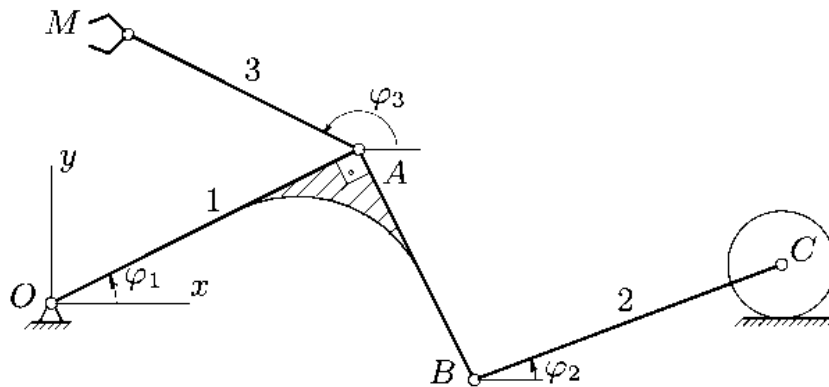


Рис. 108

Составить кинематические уравнения манипулятора <sup>\*)</sup>.

РЕШЕНИЕ

1. Составляем кинематические графы:

$$O \xrightarrow[\varphi_1]{1} A \xrightarrow[3\pi/2+\varphi_1]{1} B \xrightarrow[\varphi_2]{2} C; \quad O \xrightarrow[\varphi_1]{1} A \xrightarrow[\varphi_3]{3} M. \tag{5}$$

2. Записываем по два кинематических уравнения в проекциях на оси координат для каждого графа (5):

$$\begin{aligned}
 v_{Cx} &= v_{Ox} - \omega_{1z} R_1 \sin \varphi_1 - \omega_{1z} R_4 \sin(3\pi/2 + \varphi_1) - \omega_{2z} R_2 \sin \varphi_2, \\
 v_{Cy} &= v_{Oy} + \omega_{1z} R_1 \cos \varphi_1 + \omega_{1z} R_4 \cos(3\pi/2 + \varphi_1) + \omega_{2z} R_2 \cos \varphi_2, \\
 v_{Mx} &= v_{Ox} - \omega_{1z} R_1 \sin \varphi_1 - \omega_{3z} R_3 \sin \varphi_3, \\
 v_{My} &= v_{Oy} + \omega_{1z} R_1 \cos \varphi_1 + \omega_{3z} R_3 \cos \varphi_3.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

<sup>\*)</sup> Задание К-3 из сборника [15]. В задании К-3 скорость точки  $M$  определяется из решения дифференциального уравнения так, чтобы манипулятор захватил деталь, движущуюся по известному закону. В рассматриваемом примере задача захвата не решается, а предполагается, что скорость  $M$  известна из других соображений, в том числе из условия захвата детали.

3. Упрощаем систему (6), используя уравнения связей,  $v_{Ox} = 0$ ,  $v_{Oy} = 0$ ,  $v_{Cy} = 0$ , и тригонометрические формулы приведения:

$$\begin{aligned} v_{Cx} &= -\omega_{1z} R_1 \sin \varphi_1 + \omega_{1z} R_4 \cos \varphi_1 - \omega_{2z} R_2 \sin \varphi_2, \\ 0 &= \omega_{1z} R_1 \cos \varphi_1 + \omega_{1z} R_4 \sin \varphi_1 + \omega_{2z} R_2 \cos \varphi_2, \\ v_{Mx} &= -\omega_{1z} R_1 \sin \varphi_1 - \omega_{3z} R_3 \sin \varphi_{3z}, \\ v_{My} &= \omega_{1z} R_1 \cos \varphi_1 + \omega_{3z} R_3 \cos \varphi_{3z}. \end{aligned} \quad (7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В данной задаче скорости точек механизма можно найти для некоторого промежутка времени, а не для фиксированного момента времени, как в аналогичных задачах § 8.1, § 8.3. Решая нелинейную систему дифференциальных уравнений (4), получаем полную картину движения механизма<sup>\*)</sup>. Для решения системы (4) необходимо дополнить ее начальными условиями:

$$x_c(0) = x_{c_0}, \varphi_1(0) = \varphi_{1_0}, \varphi_2(0) = \varphi_{2_0}, \varphi_3(0) = \varphi_{3_0}, \quad (8)$$

где константы  $x_{c_0}$ ,  $\varphi_{1_0}$ ,  $\varphi_{2_0}$  и  $\varphi_{3_0}$  определяют начальную конфигурацию механизма. В некоторых численных методах для решения системы (4) требуется привести к форме Коши. Уравнения (4) представляют собой систему четырех алгебраических уравнений относительно  $v_C, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3$ . Решая систему, получаем, что

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= v_D \operatorname{tg} \varphi_3, \\ \dot{\varphi}_1 &= v_D \sin(\varphi_2 + \varphi_3) / (2OA \cos \varphi_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)), \\ \dot{\varphi}_2 &= v_D \sin(\varphi_2 + \varphi_3) / (2AB \cos \varphi_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)), \\ \dot{\varphi}_3 &= v_D / (2BD \cos \varphi_3). \end{aligned} \quad (9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В решении задачи следует использовать наиболее короткие графы. В данном случае вместо графа (2) можно было бы выбрать граф

$$O \xrightarrow[\varphi_1]{OA} A \xrightarrow[\pi + \varphi_2]{AB} B \xrightarrow[\pi + \varphi_3]{BC} C.$$

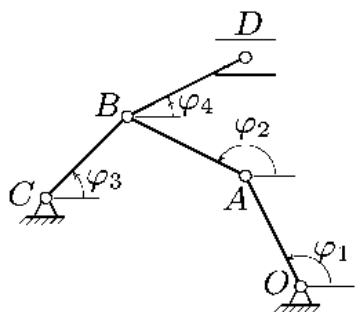
Система дифференциальных уравнений изменится, однако в форме Коши ее вид останется прежним.

<sup>\*)</sup> На странице Интернет кафедры теоретической механики МЭИ [www.termech.mpei.ac.ru](http://www.termech.mpei.ac.ru) можно найти обучающую программу ROBBY2, разработанную Осадченко Н.В. и Корсцким А.В. Программа интегрирует уравнения (4), составленные для задач из сборника [15], анимирует полученное решение и представляет результаты в виде графиков и таблиц.

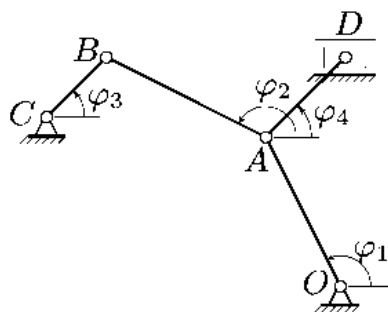
ЗАМЕЧАНИЕ 3. Метод графов широко используется для решения задач кинематики и динамики. Примеры составления графов представлены также на с. 243, 244 310, 313, 316, 327, 329.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Составить кинематические уравнения плоского многозвенного механизма. Ползуны движутся по горизонтальным или вертикальным направляющим. Длины стержней известны.

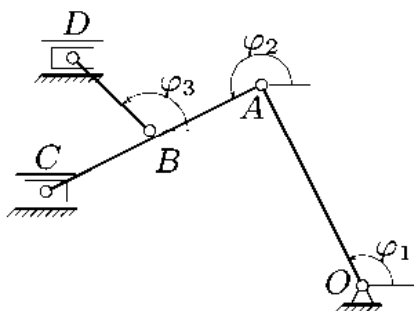
1.



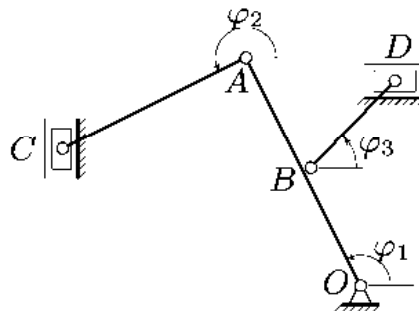
2.



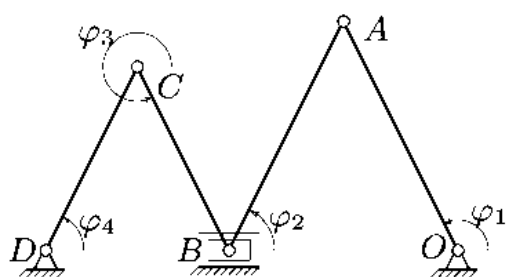
3.  $AB = BC$ .



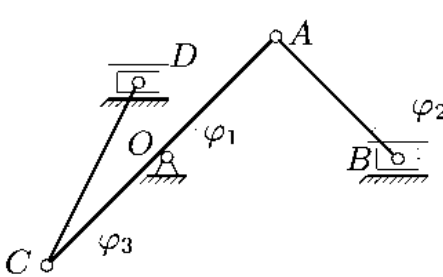
4.  $AB = BO$ .



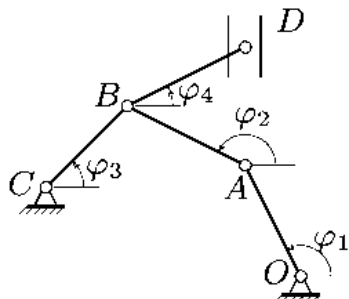
5.



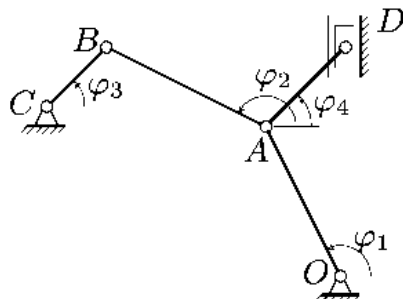
6.



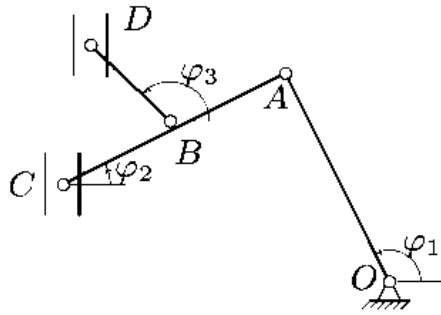
7.



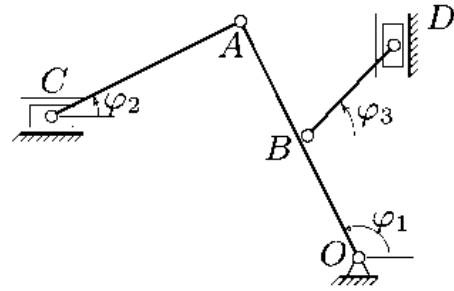
8.



9.  $AB = BC$ .



10.  $AB = BO$ .



Ответы

Кинематические уравнения

1.	$v_D = -\dot{\varphi}_1 OA \sin \varphi_1 - \dot{\varphi}_2 AB \sin \varphi_2 - \dot{\varphi}_4 BD \sin \varphi_4,$ $0 = \dot{\varphi}_1 OA \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_2 AB \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_4 BD \cos \varphi_4,$ $v_D = -\dot{\varphi}_3 CB \sin \varphi_3 - \dot{\varphi}_4 BD \sin \varphi_4,$ $0 = \dot{\varphi}_3 CB \cos \varphi_3 + \dot{\varphi}_4 BD \cos \varphi_4.$
2.	$v_D = -\dot{\varphi}_1 OA \sin \varphi_1 - \dot{\varphi}_4 AD \sin \varphi_4,$ $0 = \dot{\varphi}_1 OA \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_4 AD \cos \varphi_4,$ $v_D = -\dot{\varphi}_3 CB \sin \varphi_3 + \dot{\varphi}_2 AB \sin \varphi_2 - \dot{\varphi}_4 AD \sin \varphi_4,$ $0 = \dot{\varphi}_3 CB \cos \varphi_3 - \dot{\varphi}_2 AB \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_4 AD \cos \varphi_4.$
3.	$v_C = -\dot{\varphi}_1 OA \sin \varphi_1 - 2\dot{\varphi}_2 AB \sin \varphi_2,$ $0 = \dot{\varphi}_1 OA \cos \varphi_1 + 2\dot{\varphi}_2 AB \cos \varphi_2,$ $v_D = v_C + \dot{\varphi}_2 AB \sin \varphi_2 - \dot{\varphi}_3 BD \sin \varphi_3,$ $0 = -\dot{\varphi}_2 AB \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_3 BD \cos \varphi_3.$
4.	$0 = -2\dot{\varphi}_1 AB \sin \varphi_1 - \dot{\varphi}_2 AC \sin \varphi_2,$ $v_C = 2\dot{\varphi}_1 AB \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_2 AC \cos \varphi_2,$ $v_D = -\dot{\varphi}_1 AB \sin \varphi_1 - \dot{\varphi}_3 BD \sin \varphi_3,$ $0 = \dot{\varphi}_2 AB \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_3 BD \cos \varphi_3.$
5.	$v_B = -\dot{\varphi}_1 OA \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_2 AB \sin \varphi_2,$ $0 = \dot{\varphi}_1 OA \cos \varphi_1 - \dot{\varphi}_2 AB \cos \varphi_2,$ $v_B = -\dot{\varphi}_4 DC \sin \varphi_4 - \dot{\varphi}_3 CB \sin \varphi_3,$ $0 = \dot{\varphi}_4 DC \cos \varphi_4 + \dot{\varphi}_3 CB \cos \varphi_3.$

6.	$v_B = -\dot{\varphi}_1 OA \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_2 AB \sin \varphi_2,$ $0 = \dot{\varphi}_1 OA \cos \varphi_1 - \dot{\varphi}_2 AB \cos \varphi_2,$ $v_D = \dot{\varphi}_1 OC \sin \varphi_1 - \dot{\varphi}_3 CD \sin \varphi_3,$ $0 = -\dot{\varphi}_1 OC \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_3 CD \cos \varphi_3.$
7.	$0 = -\dot{\varphi}_1 OA \sin \varphi_1 - \dot{\varphi}_2 AB \sin \varphi_2 - \dot{\varphi}_4 BD \sin \varphi_4,$ $v_D = \dot{\varphi}_1 OA \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_2 AB \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_4 BD \cos \varphi_4,$ $0 = -\dot{\varphi}_3 CB \sin \varphi_3 - \dot{\varphi}_4 BD \sin \varphi_4,$ $v_D = \dot{\varphi}_3 CB \cos \varphi_3 + \dot{\varphi}_4 BD \cos \varphi_4.$
8.	$0 = -\dot{\varphi}_1 OA \sin \varphi_1 - \dot{\varphi}_4 AD \sin \varphi_4,$ $v_D = \dot{\varphi}_1 OA \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_4 AD \cos \varphi_4,$ $0 = -\dot{\varphi}_3 CB \sin \varphi_3 + \dot{\varphi}_2 AB \sin \varphi_2 - \dot{\varphi}_4 AD \sin \varphi_4,$ $v_D = \dot{\varphi}_3 CB \cos \varphi_3 - \dot{\varphi}_2 AB \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_4 AD \cos \varphi_4.$
9.	$0 = -\dot{\varphi}_1 OA \sin \varphi_1 + 2\dot{\varphi}_2 AB \sin \varphi_2,$ $v_C = \dot{\varphi}_1 OA \cos \varphi_1 - 2\dot{\varphi}_2 AB \cos \varphi_2,$ $0 = -\dot{\varphi}_2 AB \sin \varphi_2 - \dot{\varphi}_3 BD \sin \varphi_3,$ $v_D = v_C + \dot{\varphi}_2 AB \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_3 BD \cos \varphi_3.$
10.	$v_C = -2\dot{\varphi}_1 AB \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_2 AC \sin \varphi_2,$ $0 = 2\dot{\varphi}_1 AB \cos \varphi_1 - \dot{\varphi}_2 AC \cos \varphi_2,$ $0 = -\dot{\varphi}_1 AB \sin \varphi_1 - \dot{\varphi}_3 BD \sin \varphi_3,$ $v_D = \dot{\varphi}_2 AB \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_3 BD \cos \varphi_3.$

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.** Для того, чтобы проинтегрировать полученные кинематические уравнения, необходимо скорости ползунов выразить через соответствующие координаты, например,  $v_B = \dot{x}_B$ , задать одну из пяти функций, входящих в уравнения, и выбрать для остальных функций начальные условия.

**Предупреждение типичных ошибок**

1. Кинематические графы являются ориентированными графами. Меняя направление маршрута, меняйте и угол. Следующие два графа эквивалентны:  $A \xrightarrow{\varphi} B$ ;  $B \xrightarrow{\pi+\varphi} A$ .

2. Угловая скорость звена, которому принадлежат точки  $A$  и  $B$  графа  $A \xrightarrow{\varphi} B$ , не обязательно равна  $\dot{\varphi}$ , см., например, с. 243.

## Глава 9

# СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

### 9.1. Сложное движение точки в плоскости

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** Геометрическая фигура вращается вокруг оси, перпендикулярной ее плоскости по известному закону  $\varphi(t)$ . В канале, расположенном на фигуре, движется точка  $M$  по закону  $\sigma = \sigma(t)$ . Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в заданный момент времени  $t = t_1$ .

#### ПЛАН РЕШЕНИЯ

Сложное движение точки  $M$  представляется в виде суммы относительного и переносного. Характерной особенностью этой задачи является то, что траектории относительного, переносного и абсолютного движения лежат в одной плоскости. Ось  $z$ , на которую проецируются векторы переносной угловой скорости и переносного углового ускорения, перпендикулярна этой плоскости и направлена на наблюдателя. Угол поворота считается положительным, если со стороны оси  $z$  он виден против часовой стрелки.

Искомые величины получаем из векторных равенств:

$$\vec{v} = \vec{v}_{от} + \vec{v}_п \quad (1)$$

$$\vec{W} = \vec{W}_{от} + \vec{W}_п + \vec{W}_К, \quad (2)$$

где  $\vec{v}_{от}$ ,  $\vec{W}_{от}$  и  $\vec{v}_п$ ,  $\vec{W}_п$  — соответственно относительные и переносные скорости и ускорения;  $\vec{W}_К = 2\vec{\omega}_п \times \vec{v}_{от}$  — ускорение Кориолиса<sup>\*)</sup>.

1. Вычисляем значение дуговой координаты  $\sigma(t)$  при  $t = t_1$  и определяем положение точки в подвижной системе координат.

2. Дифференцируя  $\sigma(t)$  по времени, находим относительную скорость (скорость точки относительно фигуры):

$$v_{от}^{\tau} = \frac{d\sigma(t)}{dt}.$$

---

<sup>\*)</sup> Кориолис Гаспар Гюстав (1792–1843) французский механик и математик.



Вектор  $\vec{v}_{от}$  направляем по касательной к относительной траектории в сторону увеличения  $\sigma$ , если  $v_{от}^{\tau} > 0$  и в обратную сторону в противном случае;  $v_{от} = |v_{от}^{\tau}|$ .

3. Вычисляем радиус траектории переносного движения  $R_{\Pi}$  — расстояние от точки  $M$  в положении  $t = t_1$  до оси переносного вращения.

4. Находим переносную скорость  $v_{\Pi} = |\omega_{\Pi z}| R_{\Pi}$ , где переносная угловая скорость

$$\omega_{\Pi z} = \frac{d\varphi_{\Pi}(t)}{dt}.$$

Вектор  $\vec{v}_{\Pi}$  направляем перпендикулярно  $R_{\Pi}$  в сторону переносного вращения.

5. Определяем вектор абсолютной скорости, вычисляя компоненты  $v_x, v_y$  векторной суммы (1) на произвольно выбранные оси, и модуль

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

6. Вычисляем относительное ускорение. В случае криволинейной относительной траектории

$$\vec{W}_{от} = \vec{W}_{от}^n + \vec{W}_{от}^{\tau},$$

где

$$W_{от}^{\tau} = \frac{dv_{от}^{\tau}}{dt}, \quad W_{от}^n = \frac{(v_{от}^{\tau})^2}{R},$$

$R$  — радиус кривизны относительной траектории в точке  $M$ . Для прямолинейной траектории относительного движения  $W_{от}^n = 0$ . Вектор  $\vec{W}_{от}^{\tau}$  направляем по касательной к относительной траектории, вектор  $\vec{W}_{от}^n$  — к центру кривизны этой же кривой.

7. Вычисляем переносное ускорение:

$$\vec{W}_{\Pi} = \vec{W}_{\Pi}^{\Pi} + \vec{W}_{\Pi}^B, \quad W_{\Pi}^{\Pi} = \omega_{\Pi z}^2 R_{\Pi}, \quad W_{\Pi}^B = \varepsilon_{\Pi z} R_{\Pi}, \quad \varepsilon_{\Pi z} = \frac{d\omega_{\Pi z}}{dt}.$$

Вектор  $\vec{W}_{\Pi}^B$  направляем перпендикулярно  $R_{\Pi}$ , вектор  $\vec{W}_{\Pi}^{\Pi}$  — к оси переносного вращения (вдоль  $R_{\Pi}$ ).

8. Находим ускорение Кориолиса  $\vec{W}_K$ . Так как в задачах этого типа вектор переносной угловой скорости перпендикулярен вектору относительной скорости, то

$$W_K = 2|\omega_{\Pi z}| |v_{от}| \sin(\pi/2) = 2|\omega_{\Pi z}| |v_{от}|.$$

Направление вектора ускорения Кориолиса можно определить по правилу Жуковского\*) поворотом на  $90^\circ$  вектора относительной скорости по направлению переносного вращения. В результате вектор ускорения Кориолиса в таких задачах будет лежать на одной прямой с  $\vec{W}_{от}^n$  при криволинейном относительном движении, а в случае прямолинейного относительного движения  $\vec{W}_K$  перпендикулярен относительной траектории.

9. Вычисляем абсолютное ускорение по формуле (2) в проекциях на оси координат. Модуль абсолютного ускорения  $W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2}$ .

ПРИМЕР. Прямоугольник  $ABCD$  вращается вокруг оси, проходящей через вершину  $A$ , по закону  $\varphi_{\Pi} = t^2 + t$ . Ось вращения перпендикулярна плоскости прямоугольника (рис. 109). По круговому каналу радиуса  $R = 10$  см с центром в точке  $C$ , расположенному на прямоугольнике, движется точка  $M$ . Дуговая координата точки меняется по закону  $KM = 5\pi t^3/3$  см. Дано:  $AB = 12$  см,  $BC = 15$  см.

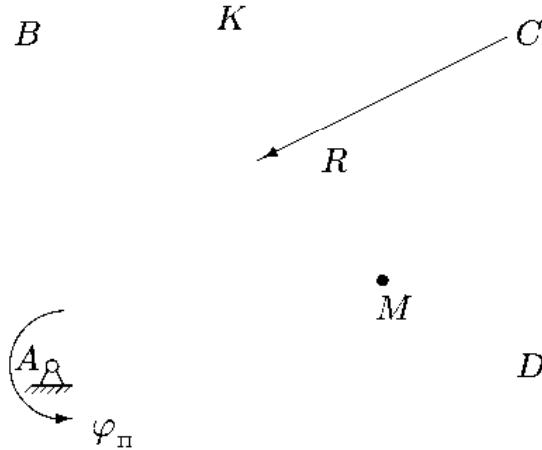


Рис. 109

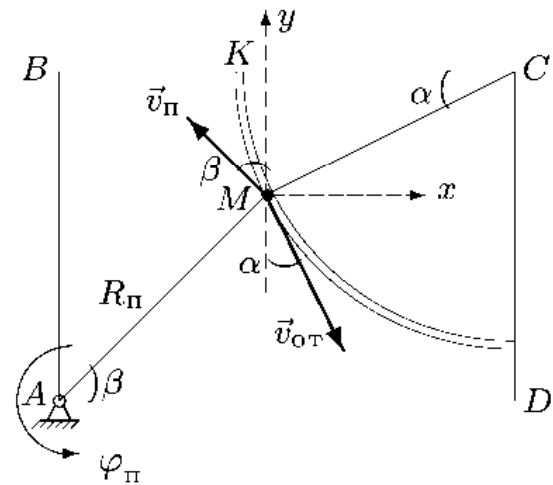


Рис. 110

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки  $M$  при  $t = t_1 = 1$  с.

**РЕШЕНИЕ**

Движение точки  $M$  представим в виде относительного движения по круговому каналу и переносного движения вместе с вращающимся прямоугольником.

1. Вычисляем значение дуговой координаты  $\sigma(t) = KM$ , при

---

\*) Жуковский Николай Егорович (1847-1921) русский ученый, основоположник гидроаэродинамики. Преподавал теоретическую механику в МГУ. Правило Жуковского для общего случая см. с. 204

$t = t_1$ , и определяем положение точки в подвижной системе координат. За время  $t_1$  точка проходит по дуге окружности путь  $KM = 5\pi/3$  см. Центральный угол, соответствующий этой дуге,  $\alpha = KM/R = \pi/6$ . Изображаем точку в этом положении (рис.110).

2. Дифференцируя  $\sigma(t)$  по времени, находим относительную скорость. Находим ее значение при  $t = 1$  с:

$$v_{от} = \frac{d}{dt}KM(t) = 5\pi t^2 = 15.708 \text{ см/с.}$$

Вектор  $\vec{v}_{от}$  направлен по касательной к окружности.

3. Вычисляем радиус траектории переносного движения  $R_{\pi} = AM$

$$R_{\pi} = \sqrt{(AB - R \sin \alpha)^2 + (BC - R \cos \alpha)^2} = 9.444 \text{ см.}$$

4. Находим переносную скорость  $v_{\pi} = |\omega_{\pi_z}|R_{\pi}$ . Переносной скоростью точки является скорость точки прямоугольника, совпадающей в данный момент с  $M^*$ ). Угловая скорость фигуры, при  $t = 1$  с,

$$\omega_{\pi_z} = \frac{d\varphi_{\pi}(t)}{dt} = 2t + 1 = 3 \text{ рад/с.}$$

Отсюда  $v_{\pi} = |\omega_{\pi_z}|R_{\pi} = 3 \cdot 9.444 = 28.333 \text{ см/с.}$

5. Определяем вектор абсолютной скорости по формуле (1).

Модуль абсолютной скорости  $\vec{v} = \vec{v}_{от} + \vec{v}_{\pi}$  находим, просцируя это равенство на неподвижные оси координат  $x, y$  (можно воспользоваться также теоремой косинусов):

$$\begin{aligned} v_x &= v_{от} \sin \alpha - v_{\pi} \sin \beta = -13.141 \text{ см/с,} \\ v_y &= -v_{от} \cos \alpha + v_{\pi} \cos \beta = 5.408 \text{ см/с.} \end{aligned}$$

Тригонометрические функции угла  $\beta$  вычисляем по формулам

$$\begin{aligned} \sin \beta &= (AB - R \sin \alpha)/R_{\pi} = 0.741, \\ \cos \beta &= (BC - R \cos \alpha)/R_{\pi} = 0.671. \end{aligned}$$

Модуль абсолютной скорости  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 14.211 \text{ см/с.}$

---

\*) Иногда переносная скорость обозначается  $v_e$  (от французского слова *emporter*), реже  $v_{tr}$  (от английского слова *transport*), а относительная —  $v_r$  (от английского слова *relativ*). Эти же индексы используются и для других компонентов сложного движения.

6. Вычисляем относительное ускорение. Ускорение точки, движущейся относительно прямоугольника по окружности, имеет нормальную и тангенциальную составляющую:

$$W_{от}^{\tau} = \frac{dv_{от}^{\tau}}{dt} = 10\pi t = 31.416 \text{ см/с}^2, \quad W_{от}^n = \frac{v_{от}^2}{R} = 24.674 \text{ см/с}^2.$$

Модуль относительного ускорения

$$W_{от} = \sqrt{(W_{от}^{\tau})^2 + (W_{от}^n)^2} = 39.747 \text{ см/с}^2.$$

Вектор ускорения  $\vec{W}_{от}^n$  направляем по радиусу окружности к точке  $C$ ,  $\vec{W}_{от}^{\tau}$  — по касательной, в сторону увеличения дуги  $KM$ , так как  $W_{от}^{\tau} > 0$  (рис. 111).

7. Вычисляем переносное ускорение  $\vec{W}_{п} = \vec{W}_{п}^n + \vec{W}_{п}^B$ . Траектория переносного движения точки — окружность радиуса  $R_{п}$  с центром  $A$ . Прямоугольник вращается с угловой скоростью  $\omega_{п_z} = 2t + 1$  и угловым ускорением

$$\varepsilon_{п_z} = \frac{d\omega_{п_z}}{dt} = \frac{d(2t + 1)}{dt} = 2 \text{ рад/с}^2.$$

Отсюда получаем

$$W_{п}^n = \omega_{п_z}^2 R_{п} = 84.996 \text{ см/с}^2, \quad W_{п}^B = \varepsilon_{п_z} R_{п} = 18.888 \text{ см/с}^2.$$

Вектор  $\vec{W}_{п}^B$  направлен против часовой стрелки перпендикулярно радиусу  $R_{п}$ . Вектор  $\vec{W}_{п}^n$  — к центру  $A$ . Модуль переносного ускорения

$$W_{п} = \sqrt{(W_{п}^n)^2 + (W_{п}^B)^2} = \sqrt{84.996^2 + 18.888^2} = 87.069 \text{ см/с}^2.$$

8. Находим ускорение Кориолиса<sup>\*)</sup>. Модуль вектора ускорения  $\vec{W}_K = 2\vec{\omega}_{п} \times \vec{v}_{от}$  определяем по формуле  $W_K = 2|\omega_{п_z}||v_{от}|\sin\gamma$ , где  $\gamma$  — угол между  $\vec{v}_{от}$  и  $\vec{\omega}_{п}$ . Вектор  $\vec{\omega}_{п}$  перпендикулярен плоскости чертежа, следовательно, угол  $\gamma$  равен  $90^\circ$ . Имеем

$$W_K = 2 \cdot 3 \cdot 15.708 = 94.248 \text{ см/с}^2.$$

Направление вектора ускорения Кориолиса получаем по правилу Жуковского — поворотом на  $90^\circ$  вектора относительной скорости

\*) Это ускорение называют иногда поворотным, а в англоязычной литературе — supplementary (дополнительным).

по направлению переносного вращения, т.е. против часовой стрелки (рис. 112).

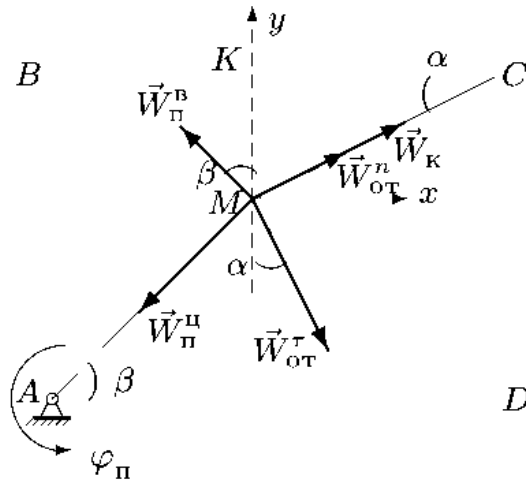


Рис. 111

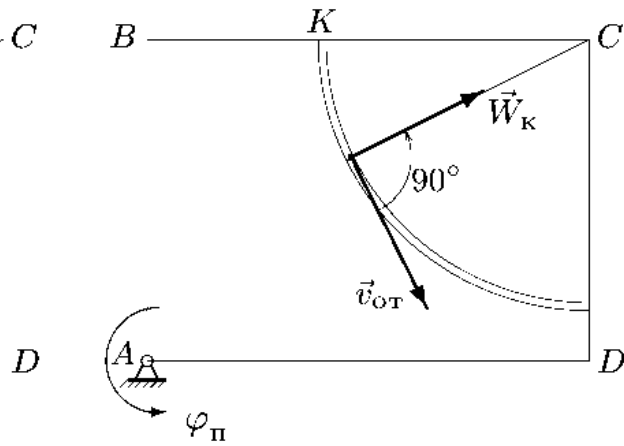


Рис. 112

9. Вычисляем абсолютное ускорение по формуле (2) в проекциях на оси координат (рис. 111):

$$W_x = W_{от}^{\tau} \sin \alpha + (W_{от}^n + W_K) \cos \alpha - W_{\pi}^M \cos \beta - W_{\pi}^B \sin \beta = 47.667 \text{ см/с}^2,$$

$$W_y = -W_{от}^{\tau} \cos \alpha + (W_{от}^n + W_K) \sin \alpha - W_{\pi}^M \sin \beta + W_{\pi}^B \cos \beta = -18.054 \text{ см/с}^2.$$

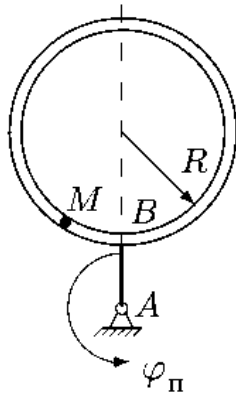
Находим модуль ускорения:  $W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = 50.972 \text{ см/с}^2$ .

Ответы заносим в таблицу. Радиус траектории переносного движения — в см, скорости — в см/с, ускорения — в см/с<sup>2</sup>.

$R_{\pi}$	$v_{от}$	$v_{\pi}$	$v$	$W_{от}$	$W_{\pi}$	$W_K$	$W$
9.444	15.708	28.333	14.211	39.747	87.069	94.248	50.972

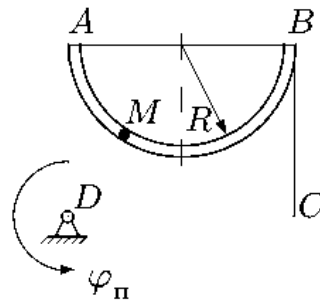
*УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Геометрическая фигура вращается вокруг оси, перпендикулярной ее плоскости. По каналу, расположенному на фигуре, движется точка M по известному закону  $\sigma(t)$ . Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки при  $t = t_1$ . Даны функция  $\sigma(t)$  в см, закон вращения фигуры  $\varphi_{\pi}(t)$  (или постоянная угловая скорость  $\omega_{\pi}$ ), время  $t_1$  и размеры фигуры. Углы даны в рад, угловая скорость — в рад/с, размеры — в см. В задачах 1–4, 8, 9 длина BM или AM — длина дуги окружности.*

1.  $\omega_{\Pi z} = 0.05$ ,  $BM = \frac{2\pi}{3}(t^2 + 50)$ ,



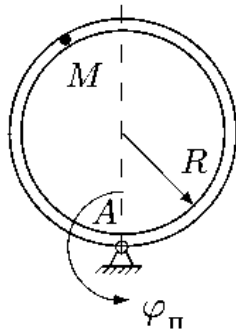
$R = 51$ ,  
 $AB = 2$ ,  
 $t = 1$  c.

2.  $\omega_{\Pi z} = 1.54$ ,  $AM = \frac{\pi}{4}(t^3 + 3)$ ,



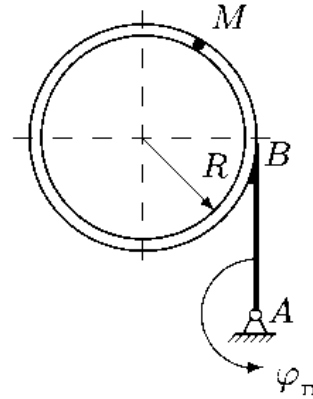
$R = 11$ ,  
 $AD = 13$ ,  
 $t = 2$  c.

3.  $\omega_{\Pi z} = 0.47$ ,  $AM = \frac{\pi}{3}(t^2 + 6t)$ ,



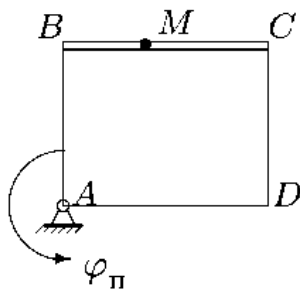
$R = 27$ ,  
 $t = 3$  c.

4.  $\omega_{\Pi z} = 0.39$ ,  $BM = \frac{\pi}{4}(t^2 + 2)t$ ,



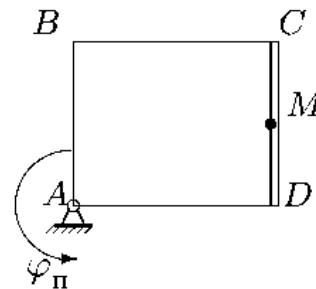
$R = 3$ ,  
 $AB = 8$ ,  
 $t = 1$  c.

5.  $\varphi_{\Pi} = 0.01t^2$ ,  $BM = \frac{2}{3}(t^2 + 51)$ ,



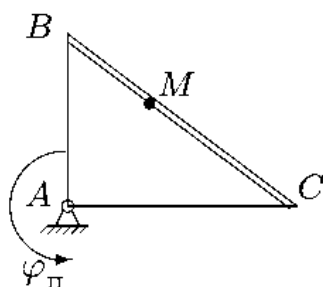
$AB = 28$ ,  
 $BC = 55$ ,  
 $t = 2$  c.

6.  $\varphi_{\Pi} = -0.08t^2$ ,  $DM = \frac{3}{4}(t^3 + 4)$ ,



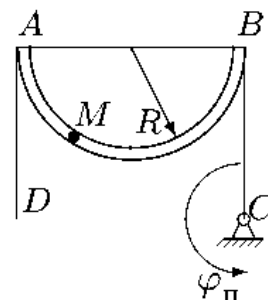
$AB = 31$ ,  
 $BC = 33$ ,  
 $t = 3$  c.

7.  $\varphi_{\Pi} = -0.69t^2$ ,  $BM = \frac{5}{6}(t^2 + 2t)$ ,



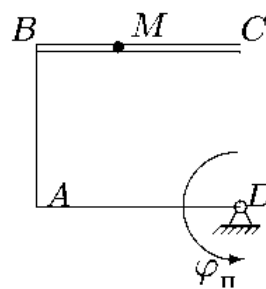
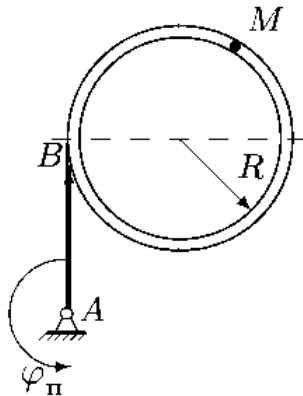
$AB = 2$ ,  
 $AC = 4$ ,  
 $t = 1$  c.

8.  $\omega_{\Pi z} = -0.28$ ,  $AM = \frac{\pi}{6}(t^2 + 3)t$ ,



$R = 14$ ,  
 $AD = 16$ ,  
 $t = 2$  c.

9.  $\omega_{\text{пз}} = -0.04$ ,  $BM = \frac{\pi}{4}(t^2 + 52)$ ,  $R = 61$ ,  $AB = 66$ ,  $t = 3$  с.
10.  $\varphi_{\text{п}} = -0.18t^2$ ,  $BM = \frac{1}{3}(t^3 + 2)$ ,  $AB = 2$ ,  $BC = 3$ ,  $t = 1$  с.



Ответы

	$R_{\text{п}}$	$v_{\text{от}}$	$v_{\text{п}}$	$v$	$W_{\text{от}}$	$W_{\text{п}}$	$W_{\text{К}}$	$W$
	см	см/с			см/с <sup>2</sup>			
1	90.072	4.189	4.504	2.316	4.203	0.225	0.419	4.076
2	6.136	9.425	9.449	2.190	12.411	14.552	29.028	26.262
3	27.000	12.566	12.690	12.629	6.212	5.964	11.812	4.280
4	10.159	3.927	3.962	7.151	6.974	1.545	3.063	9.851
5	46.135	2.667	1.845	2.131	1.333	0.926	0.213	1.151
6	40.368	20.250	19.377	12.000	13.500	11.323	19.440	15.818
7	2.404	3.333	3.317	6.211	1.667	5.653	9.200	14.862
8	27.631	7.854	7.737	6.467	7.674	2.166	4.398	8.046
9	110.586	4.712	4.423	8.130	1.612	0.177	0.377	1.658
10	2.828	1.000	1.018	1.865	2.000	1.082	0.720	2.990

## 9.2. Сложное движение точки в пространстве

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** Геометрическая фигура вращается по заданному закону вокруг неподвижной оси, лежащей в ее плоскости. По каналу, расположенному на фигуре, движется точка  $M$  по известному закону  $\sigma(t)$ . Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки.

ПЛАН РЕШЕНИЯ

Искомые величины получаем из векторных равенств

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{от}} + \vec{v}_{\text{п}}, \quad (1)$$

$$\vec{W} = \vec{W}_{\text{от}} + \vec{W}_{\text{п}} + \vec{W}_{\text{К}}, \quad (2)$$

где  $\vec{v}_{от}$ ,  $\vec{W}_{от}$  и  $\vec{v}_п$ ,  $\vec{W}_п$  — соответственно относительные и переносные скорости и ускорения;  $\vec{W}_К = 2\vec{\omega}_п \times \vec{v}_{от}$  — ускорение Кориолиса. Решение задачи о сложном движении точки в пространстве отличается от аналогичной задачи, где точка движется в плоскости (с. 195) тем, что векторные суммы для абсолютных величин вычисляются по трем компонентам, а ускорение Кориолиса содержит синус угла между вектором переносной угловой скорости и относительной скоростью. Относительная скорость в этих задачах всегда перпендикулярна переносной, что упрощает вычисление модуля их суммы.

1. Вычисляем значение дуговой координаты  $\sigma(t)$  при  $t = t_1$  и определяем положение точки в подвижной системе координат.

2. Дифференцируя  $\sigma(t)$  по времени, находим величину относительной скорости  $v_{от}^r = d\sigma(t)/dt$ . Вектор  $\vec{v}_{от}$  направляем по касательной к относительной траектории в сторону увеличения  $\sigma$ , если  $v_{от}^r > 0$  и в обратную сторону в противном случае;  $v_{от} = |v_{от}^r|$ .

3. Вычисляем радиус траектории переносного движения  $R_п$  — расстояние от точки М в расчетном положении до оси переносного вращения.

4. Находим модуль переносной скорости  $v_п = |\omega_{п_z}|R_п$ , где переносная угловая скорость  $\omega_{п_z} = d\varphi_п(t)/dt$ . Вектор  $\vec{v}_п$  располагается в плоскости перпендикулярной оси вращения и направлен перпендикулярно  $R_п$  в сторону переносного вращения.

5. Определяем величину абсолютной скорости  $v = \sqrt{v_{от}^2 + v_п^2}$ .

6. Вычисляем относительное ускорение. В случае криволинейной относительной траектории

$$\vec{W}_{от} = \vec{W}_{от}^n + \vec{W}_{от}^r,$$

где  $W_{от}^r = dv_{от}^r/dt$ ,  $W_{от}^n = v_{от}^2/R$ ,  $R$  — радиус кривизны относительной траектории в точке М. Для прямолинейной траектории относительного движения  $W_{от}^n = 0$ . Вектор  $\vec{W}_{от}^r$  направляем по касательной к относительной траектории, вектор  $\vec{W}_{от}^n$  — к центру кривизны этой же кривой.

7. Вычисляем переносное ускорение:

$$\vec{W}_п = \vec{W}_п^ц + \vec{W}_п^в, \quad W_п^ц = \omega_{п_z}^2 R_п, \quad W_п^в = \varepsilon_{п_z} R_п, \quad \varepsilon_{п_z} = d\omega_{п_z}/dt.$$

Вектор  $\vec{W}_п^в$  направляем перпендикулярно  $R_п$ , вектор  $\vec{W}_п^ц$  — к оси переносного вращения (вдоль  $R_п$ ).

8. Величину вектора ускорения Кориолиса определяем по формуле

$$W_К = 2|\omega_{п_z}| |v_{от}| \sin \gamma|.$$



Направление вектора ускорения Кориолиса можно определить по правилу Н.Е. Жуковского поворотом на  $90^\circ$  проекции вектора относительной скорости на плоскость, перпендикулярную  $\vec{\omega}_\Pi$ , по направлению переносного вращения.

9. Вычисляем абсолютное ускорение по формуле (2) в проекциях на оси координат. Ось  $z$  направляем по оси вращения. Модуль абсолютного ускорения

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}.$$

ПРИМЕР. Прямоугольник  $ABCD$  вращается вокруг неподвижной оси, проходящей по стороне  $DC$  (рис. 113). По круговому каналу радиуса  $R = 12$  см с центром в точке  $O$ , расположенному на прямоугольнике, движется точка  $M$  по закону  $BM = \pi t(2t - 3)$  см. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки при  $t = t_1 = 2$  с.  $BC = 15$  см;  $\varphi_\Pi = 0.2t^2$ .

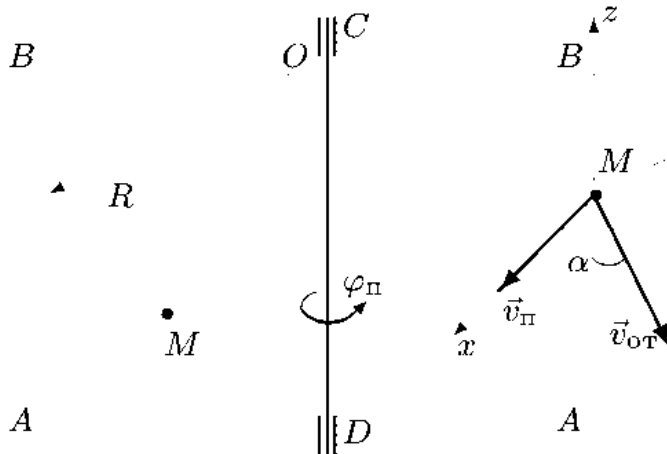


Рис. 113

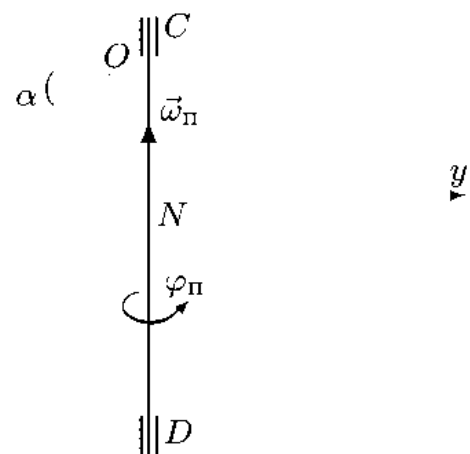


Рис. 114

### РЕШЕНИЕ

1. Вычисляем значение дуговой координаты  $\sigma(t)$  при  $t = t_1$  и определяем положение точки в подвижной системе координат:

$$\sigma(t_1) = BM = \pi 2(2 \cdot 2 - 3) = 2\pi.$$

Находим центральный угол, соответствующий дуге  $BM$ :

$$\alpha = BM/R = 2\pi/12 = \pi/6.$$

Изображаем точку в этом положении (рис. 114).

2. Дифференцируя  $\sigma(t)$  по времени, находим относительную скорость:

$$v_{от}^{\tau} = \frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\pi t(2t - 3) = \pi(4t - 3) = 15.708 \text{ см/с.}$$

3. Траекторией переносного движения является окружность с центром  $N$ . Относительная скорость точки  $M$  направлена по касательной к этой окружности. Траектория лежит в плоскости  $xy$ , перпендикулярной к оси вращения  $DC$  (ось  $z$ ). Находим радиус окружности:

$$MN = R \cos \alpha + OC = R \cos \alpha + BC - R = 12 \cdot 0.866 + 15 - 12 = 13.392 \text{ см.}$$

4. Находим переносную скорость. Вычисляем угловую скорость вращения прямоугольника  $ABCD$ :

$$\omega_{п_z} = \frac{d\varphi_{п}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}0.2t^2 = 0.4t = 0.8 \text{ рад/с.}$$

Вычисляем переносную скорость

$$v_{п} = |\omega_{п_z}|MN = 0.8 \cdot 13.392 = 10.714 \text{ см/с.}$$

5. Определяем величину абсолютной скорости. Вектор  $\vec{v}_{от}$  лежит в плоскости  $zy$ , а  $\vec{v}_{п}$  направлен по оси  $x$ , следовательно, они перпендикулярны. Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_{п}^2 + v_{от}^2} = \sqrt{10.714^2 + 15.708^2} = 19.014 \text{ см/с.}$$

6. Вычисляем относительное ускорение. Находим нормальную составляющую ускорения точки, движущейся по окружности радиуса  $R$ :

$$W_{от}^n = \frac{v_{от}^2}{R} = \frac{15.708^2}{12} = 20.562 \text{ см/с}^2.$$

Тангенциальная составляющая

$$W_{от}^{\tau} = \frac{dv_{от}^{\tau}}{dt} = \frac{d}{dt}\pi(4t - 3) = 4\pi = 12.566 \text{ см/с}^2.$$

Оба вектора лежат в плоскости  $zy$  (рис. 115),  $\vec{W}_{от}^{\tau} \perp \vec{W}_{от}^n$ .

7. Вычисляем компоненты переносного ускорения. Прямоугольник вращается с угловой скоростью  $\omega_{п_z} = 0.4t$  рад/с и угловым ускорением

$$\varepsilon_{п_z} = \frac{d\omega_{п_z}}{dt} = \frac{d}{dt}0.4t = 0.4 \text{ рад/с}^2.$$

Получаем

$$W_{\Pi}^{\Pi} = \omega_{\Pi z}^2 MN = 0.8^2 \cdot 13.392 = 8.571 \text{ см/с}^2,$$

$$W_{\Pi}^B = \varepsilon_{\Pi z} MN = 0.4 \cdot 13.392 = 5.357 \text{ см/с}^2.$$

Вектор  $\vec{W}_{\Pi}^B$  направлен по оси  $x$ , вектор  $\vec{W}_{\Pi}^{\Pi}$  — к оси вращения вдоль оси  $y$ .

8. Величину вектора ускорения Кориолиса определяем по формуле  $W_K = 2|\omega_{\Pi z}||v_{от}| \sin \gamma|$ . Вектор  $\vec{\omega}_{\Pi}$  всегда направлен по оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно против часовой стрелки. В нашем случае — вверх.

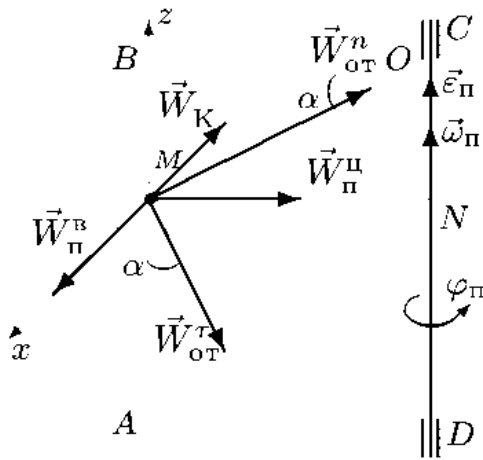


Рис. 115

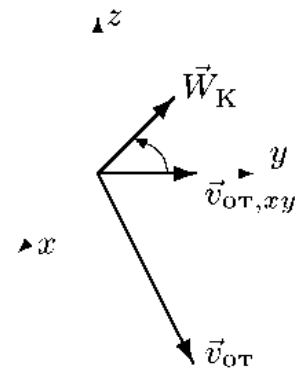


Рис. 116

Угол  $\gamma$  между  $\vec{v}_{от}$  и  $\vec{\omega}_{\Pi}$  равен  $150^\circ$ . Определяем

$$W_K = 2 \cdot 0.8 \cdot 15.708 \cdot 0.5 = 12.566 \text{ см/с}^2.$$

Для того, чтобы найти направление вектора ускорения Кориолиса, воспользуемся правилом Жуковского (рис. 116). Просцируем вектор относительной скорости  $\vec{v}_{от}$  на плоскость перпендикулярную оси вращения, т.е. на плоскость  $xy$ . Повернув проекцию  $\vec{v}_{от,xy}$  по направлению переносного вращения на  $90^\circ$ , получаем направление вектора ускорения Кориолиса. Вектор  $\vec{W}_K$  лежит на оси  $x$  и направлен в сторону отрицательных значений.

9. Вычисляем абсолютное ускорение по формуле (2) в проекциях на оси координат:

$$W_x = W_{\Pi}^B - W_K = -7.209 \text{ см/с}^2,$$

$$W_y = W_{\Pi}^{\Pi} + W_{от}^{\tau} \sin \alpha + W_{от}^n \cos \alpha = 32.661 \text{ см/с}^2,$$

$$W_z = W_{от}^n \sin \alpha - W_{от}^r \cos \alpha = -0.601 \text{ см/с}^2.$$

Окончательно, абсолютное ускорение точки  $M$

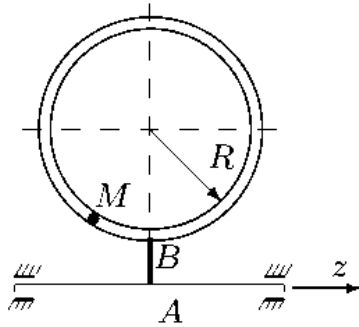
$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = \sqrt{7.209^2 + 32.661^2 + 0.601^2} = 33.453 \text{ см/с}^2.$$

Ответы заносим в таблицу. Радиус траектории переносного движения — в см, скорости — в см/с, ускорения — в см/с<sup>2</sup>.

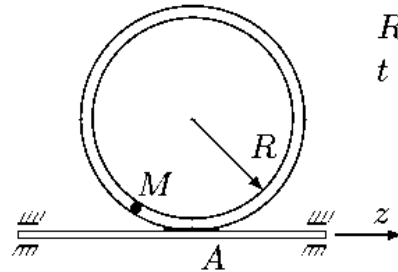
$R_{\Pi}$	$v_{от}$	$v_n$	$v$	$W_{от}^n$	$W_{от}^r$	$W_{\Pi}^n$	$W_{\Pi}^r$	$W_K$	$W$
13.392	15.708	10.714	19.014	20.562	12.566	8.571	5.357	12.566	33.453

**УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.** Геометрическая фигура вращается вокруг неподвижной оси, лежащей в ее плоскости. По каналу, расположенному на фигуре, движется точка  $M$  по известному закону:  $AM = \sigma(t)$  или  $BM = \sigma(t)$  (в см). Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки при  $t = t_1$ . Даны функция  $\sigma(t)$ , закон вращения фигуры  $\varphi_{\Pi}(t)$  (или постоянное угловое ускорение  $\omega_{\Pi z}$ ), время  $t_1$  и размеры фигуры. В задачах 1–6,  $\sigma(t)$  — дуга окружности.

1.  $\omega_{\Pi z} = 0.04$ ,  $BM = \frac{\pi}{4}(t^2 + 50)$ .      2.  $\omega_{\Pi z} = -1.44$ ,  $AM = \frac{\pi}{4}(t^2 + 3)t$ .

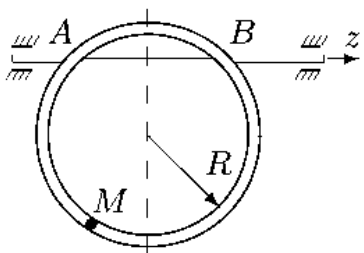


$$R = 51, \\ AB = 26, \\ t = 1 \text{ с.}$$



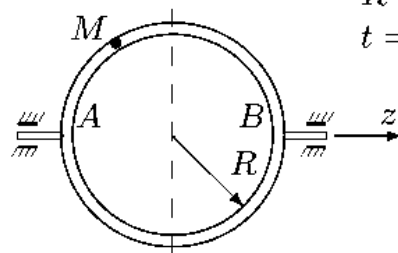
$$R = 14, \\ t = 2 \text{ с.}$$

3.  $\omega_{\Pi z} = 0.86$ ,  $AM = \frac{\pi}{4}(t^2 + 4t)$ .



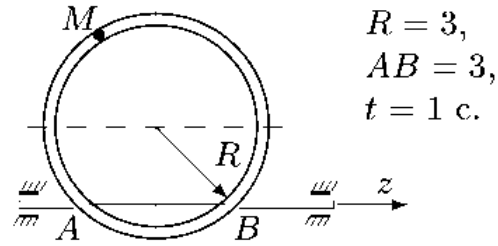
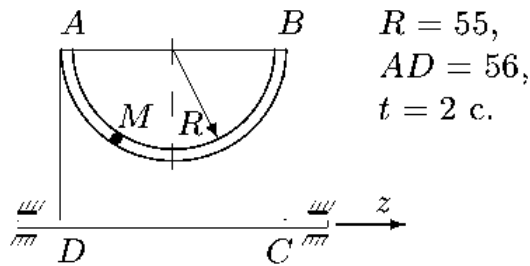
$$R = 12, \\ AB = 12, \\ t = 2 \text{ с.}$$

4.  $\omega_{\Pi z} = 1.14$ ,  $AM = \frac{\pi}{6}(t^3 + 3)$ .

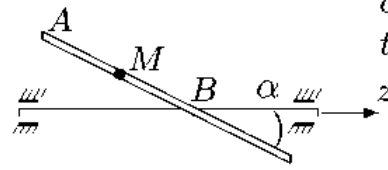
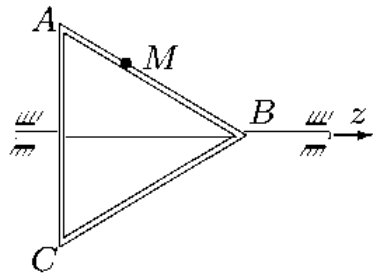


$$R = 11, \\ t = 2 \text{ с.}$$

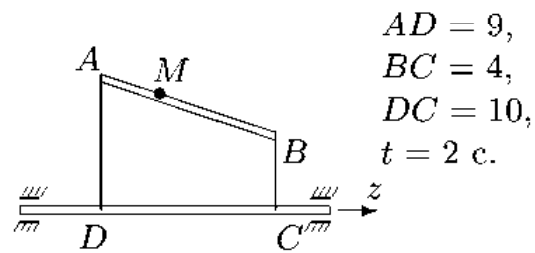
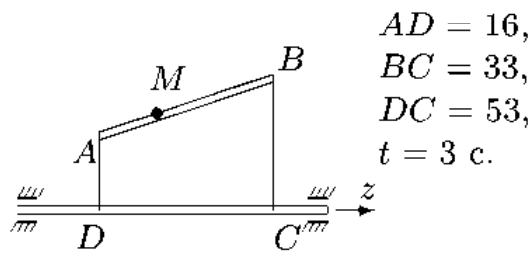
5.  $\omega_{\pi z} = -0.5$ ,  $AM = \frac{2\pi}{3}(t^2 + 51)$ . 6.  $\omega_{\pi z} = 1.21$ ,  $AM = \frac{\pi}{3}(t^3 + 2)$ .



7.  $\varphi_{\pi} = -0.1t^2$ ,  $AM = \frac{1}{4}(t^2 + 2t)$ . 8.  $\varphi_{\pi} = 0.03t^2$ ,  $AM = \frac{1}{6}(t^2 + 3)t$ .  
 $AB = BC = AC = 6$ ,  $t = 1$  c.  $AB = 28$ ,  $\alpha = \pi/4$ ,  $t = 2$  c.



9.  $\varphi_{\pi} = -0.01t^2$ ,  $AM = \frac{1}{4}(t^2 + 52)$ . 10.  $\varphi_{\pi} = 0.14t^2$ ,  $AM = \frac{1}{3}(t^3 + 3)$ .



### Ответы

	$R_{\pi}$	$v_{от}$	$v_{\pi}$	$v$	$W_{от}^n$	$W_{от}^r$	$W_{\pi}^H$	$ W_{\pi}^a $	$W_K$	$W$
	см	см/с			см/с <sup>2</sup>					
1	40.938	1.571	1.638	2.269	0.048	1.571	0.066	0.000	0.089	1.527
2	4.101	11.781	5.905	13.178	9.914	9.425	8.503	0.000	23.992	24.545
3	7.286	6.283	6.266	8.874	3.290	1.571	5.389	0.000	10.439	11.215
4	5.500	6.283	6.270	8.876	3.589	6.283	7.148	0.000	12.406	14.326
5	8.369	8.378	4.184	9.364	1.276	4.189	2.092	0.000	4.189	5.264
6	2.598	3.142	3.144	4.444	3.290	6.283	3.804	0.000	7.603	8.647
7	2.625	1.000	0.525	1.129	0.000	0.500	0.105	0.525	0.200	0.647
8	18.149	2.500	2.178	3.316	0.000	2.000	0.261	1.089	0.424	2.291
9	20.658	1.500	1.239	1.946	0.000	0.500	0.074	0.413	0.055	0.672
10	7.360	4.000	4.122	5.744	0.000	4.000	2.308	2.061	2.004	5.440

### 9.3. Движение точки по звену механизма

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** *Плоский шарнирно-стержневой механизм приводится в движение кривошипом, который вращается с заданной угловой скоростью. Вдоль одного из стержней по известному закону движется точка  $M$ . Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки  $M$ .*

#### ПЛАН РЕШЕНИЯ

Представляем движение точки в виде суммы относительного движения по звену механизма и переносного движения вместе со звеном.

1. Вводим неподвижную систему координат  $xu$ , совмещая ее начало с положением одного из шарниров механизма в заданный момент времени. Вдоль стержня, по которому движется точка, располагаем подвижную ось  $u$ , направляя ее в сторону движения точки. Зная закон относительного движения  $\sigma(t)$  (он задан в условии), определяем положение точки относительно звена и неподвижных осей  $xu$  в расчетный момент. Определяем координаты  $x$  и  $y$  шарниров.

2. Дифференцируя  $\sigma(t)$  по времени, находим проекции относительной скорости и относительного ускорения на ось  $u$ :

$$v_{от}^{\tau} = d\sigma(t)/dt, \quad W_{от}^{\tau} = d^2\sigma(t)/dt^2.$$

Зная угол между осями  $u$  и  $x$ , находим проекции векторов  $\vec{v}_{от}$  и  $\vec{W}_{от}$  на оси  $xu$ .

3. Решаем задачу о скоростях точек многозвенового механизма, используя аналитические методы (§ 8.3, с. 179, § 8.5, с. 188). Вычисляем вектор скорости той точки механизма, в которой в данный момент находится подвижная точка  $M$ . Эта скорость является переносной скоростью для точки  $M$ .

4. Определяем вектор абсолютной скорости,  $\vec{v} = \vec{v}_{от} + \vec{v}_{п}$ , и его модуль,  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ .

5. Решаем задачу об ускорениях точек многозвенового механизма, используя аналитические методы (§ 8.4, с. 183, § 8.5, с. 188). Вычисляем вектор ускорения той точки механизма, в которой в данный момент находится подвижная точка  $M$ . Это ускорение является переносным для точки  $M$ .

6. Находим ускорение Кориолиса:

$$\vec{W}_K = 2\vec{\omega}_п \times \vec{v}_{от},$$

где  $\vec{\omega}_n = \{0, 0, \omega_{nz}\}$  — вектор угловой скорости звена, по которому движется точка.

7. Находим абсолютное ускорение,  $\vec{W} = \vec{W}_n + \vec{W}_{от} + \vec{W}_K$ , и его модуль:  $W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2}$ .

**ПРИМЕР.** Плоский шарнирно-стержневой механизм  $OABC$  приводится в движение кривошипом  $OA = 60$  см, который вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_{OAz} = 3$  рад/с<sup>\*</sup>). Вдоль стержня  $AB$  движется точка  $M$  по закону  $AM = 15t^2 e^{t-2}$  см.

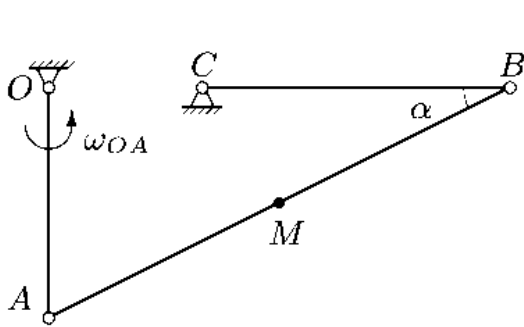


Рис. 117

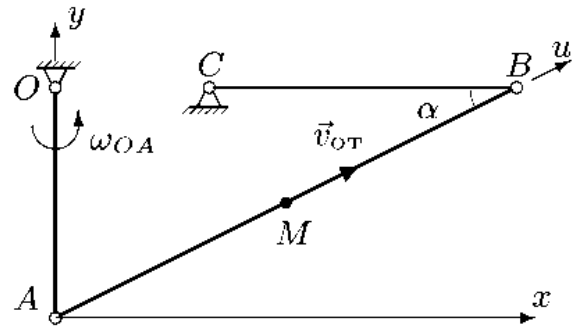


Рис. 118

Положение механизма при  $t = t_1 = 2$  с указано на рис. 117;  $AB = 120$  см,  $BC = 80$  см,  $\alpha = 30^\circ$ . Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки  $M$  в этот момент.

#### РЕШЕНИЕ

Абсолютное движение точки представляем в виде суммы относительного движения по звену  $AB$  и переносного движения вместе с ним. Переносные скорость и ускорение являются соответственно скоростью и ускорением той точки звена, в которой в данный момент располагается точка  $M$ .

1. Вводим неподвижную систему координат  $xy$ , совмещая ее начало с положением шарнира  $A$  механизма в заданный момент времени. Вдоль стержня  $AB$ , по которому движется точка, располагаем подвижную ось  $u$ , направляя ее в сторону движения точки (рис. 118). Зная закон относительного движения  $\sigma(t) = 15t^2 e^{t-2}$ , определяем положение точки относительно звена при  $t = 2$  с:  $AM = \sigma(2) = 60$  см, т.е. точка находится в центре звена  $AB$ . Определяем координаты

<sup>\*</sup>) Проекция угловой скорости на ось  $z$ , перпендикулярную плоскости чертежа,  $\omega_{OAz} > 0$ , следовательно, кривошип вращается против часовой стрелки.

шарниров в неподвижных осях координат:

$$\begin{aligned}x_O &= 0, & y_O &= OA, \\x_A &= 0, & y_A &= 0, \\x_B &= AB \cos \alpha, & y_B &= AB \sin \alpha, \\x_C &= AB \cos \alpha - BC, & y_C &= AB \sin \alpha.\end{aligned}$$

2. Дифференцируя  $\sigma(t)$  по времени, находим проекции относительной скорости и относительного ускорения на ось  $u$ :

$$\begin{aligned}v_{от}^\tau &= \dot{\sigma} = 15e^{t-2}(2t + t^2) = 120 \text{ см/с}, \\W_{от}^\tau &= \ddot{\sigma} = 15e^{t-2}(2 + 4t + t^2) = 210 \text{ см/с}^2.\end{aligned}$$

Угол между осями  $u$  и  $x$  равен  $\alpha = 30^\circ$ . Находим проекции: \*)

$$\begin{aligned}v_{от,x} &= v_{от} \cos \alpha = 103.923 \text{ см/с}, & v_{от,y} &= v_{от} \sin \alpha = 60 \text{ см/с}, \\W_{от,x} &= W_{от}^\tau \cos \alpha = 181.865 \text{ см/с}^2, & W_{от,y} &= W_{от}^\tau \sin \alpha = 105 \text{ см/с}^2.\end{aligned}$$

3. Решаем задачу о скоростях точек многозвенного механизма, используя уравнения трех угловых скоростей (§ 8.3, с. 179):

$$\begin{aligned}\omega_{OA_z}(x_O - x_A) + \omega_{AB_z}(x_A - x_B) + \omega_{BC_z}(x_B - x_C) &= 0, \\ \omega_{OA_z}(y_O - y_A) + \omega_{AB_z}(y_A - y_B) + \omega_{BC_z}(y_B - y_C) &= 0,\end{aligned}$$

где по условию  $\omega_{OA_z} = 3$  рад/с. Решаем систему двух уравнений относительно  $\omega_{AB_z}$  и  $\omega_{BC_z}$ . Подставляя численные значения, получаем  $\omega_{AB_z} = 3$  рад/с,  $\omega_{BC_z} = 3.897$  рад/с. Скорость  $\vec{v}_M$  определяем из равенства

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{AM} = \vec{\omega}_{OA} \times \vec{OA} + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{AM}.$$

Переписываем это равенство в виде

$$\vec{v}_M = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{OA_z} \\ x_A - x_O & y_A - y_O & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{AB_z} \\ x_M - x_A & y_M - y_A & 0 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Получаем

$$\begin{aligned}v_{Mx} &= \omega_{OA_z} OA - \omega_{AB_z} AM \sin \alpha = 90 \text{ см/с}, \\v_{My} &= \omega_{AB_z} AM \cos \alpha = 155.886 \text{ см/с}.\end{aligned}$$

\*) Пробразование координат вектора при переходе к новому базису см. *Решebник ВМ*, §2.8.



Найденная скорость является переносной скоростью для точки  $M$  \*)

$$v_{п.х} = v_{Mx}, \quad v_{п.у} = v_{My}.$$

Модуль переносной скорости  $v_{п} = \sqrt{v_{п.х}^2 + v_{п.у}^2} = 180$  см/с.

4. Определяем проекции,

$$v_x = v_{от.х} + v_{п.х} = 103.923 + 90 = 193.923 \text{ см/с},$$

$$v_y = v_{от.у} + v_{п.у} = 60 + 155.886 = 215.886 \text{ см/с}.$$

и модуль абсолютной скорости:  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 290.194$  см/с.

5. Решаем задачу об ускорениях точек многозвенного механизма, используя уравнения трех угловых ускорений (уравнение (2), с. 184), где  $\varepsilon_{OAz} = 0$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ABz}(x_A - x_B) + \varepsilon_{BCz}(x_B - x_C) - \\ - \omega_{OAz}^2(y_O - y_A) - \omega_{ABz}^2(y_A - y_B) - \omega_{BCz}^2(y_B - y_C) = 0, \\ \varepsilon_{ABz}(y_A - y_B) + \varepsilon_{BCz}(y_B - y_C) + \\ + \omega_{OAz}^2(x_O - x_A) + \omega_{ABz}^2(x_A - x_B) + \omega_{BCz}^2(x_B - x_C) = 0. \end{aligned}$$

Находим  $\varepsilon_{ABz} = 4.662$  рад/с<sup>2</sup>. Вычисляем вектор ускорения той точки механизма, в которой в данный момент находится подвижная точка  $M$ . Это ускорение является переносным для точки  $M$ . Учитывая, что  $\varepsilon_{OAz} = 0$ , записываем векторное равенство

$$\begin{aligned} \vec{W}_M = \vec{W}_A + \vec{\varepsilon}_{AB} \times \vec{AM} + \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{AM}) = \\ = \vec{\omega}_{OA} \times (\vec{\omega}_{OA} \times \vec{OA}) + \vec{\varepsilon}_{AB} \times \vec{AM} + \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{AM}). \end{aligned}$$

Раскрывая векторные произведения по аналогии с (1), вычисляем  $W_{Mx} = -607.504$  см/с<sup>2</sup>,  $W_{My} = 512.222$  см/с<sup>2</sup>. Это ускорение является переносным для точки  $M$ :

$$W_{п.х} = W_{Mx}, \quad W_{п.у} = W_{My}.$$

---

\*) Можно выполнить простую геометрическую проверку вычисления  $v_M$ . Концы векторов  $\vec{v}_A$ ,  $\vec{v}_B$ ,  $\vec{v}_M$  (построенных в масштабе) должны лежать на одной прямой. Векторы  $\vec{v}_A$ ,  $\vec{v}_B$  строим перпендикулярно звеньям  $OA$  и  $BC$  соответственно, а их величины вычисляем по известным угловым скоростям —  $v_A = |\omega_{OAz}|OA = 180$  см/с,  $v_B = |\omega_{BCz}|BC = 311.769$  см/с.

Модуль переносного ускорения  $W_{\Pi} = \sqrt{W_{\Pi.x}^2 + W_{\Pi.y}^2} = 794.628 \text{ см/с}^2$ .

6. Находим ускорение Кориолиса  $\vec{W}_K = 2\vec{\omega}_{\Pi} \times \vec{v}_{\text{от}}$ , где  $\vec{\omega}_{\Pi}$  — вектор угловой скорости звена  $AB$ , по которому движется точка:

$$\vec{W}_K = 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{ABz} \\ v_{\text{от}.x} & v_{\text{от}.y} & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычисляем

$$W_{K.x} = -2\omega_{ABz}v_{\text{от}.y} = -360 \text{ см/с}^2, \quad W_{K.y} = 2\omega_{ABz}v_{\text{от}.x} = 623.538 \text{ см/с}^2.$$

Модуль ускорения Кориолиса \*)

$$|W_K| = \sqrt{W_{K.x}^2 + W_{K.y}^2} = 720 \text{ см/с}^2.$$

7. Вычисляем абсолютное ускорение  $\vec{W} = \vec{W}_{\text{от}} + \vec{W}_{\Pi} + \vec{W}_K$ :

$$\begin{aligned} W_x &= W_{\text{от}.x} + W_{\Pi.x} + W_{K.x} = -785.639 \text{ см/с}^2, \\ W_y &= W_{\text{от}.y} + W_{\Pi.y} + W_{K.y} = 1240.76 \text{ см/с}^2 \end{aligned}$$

и его модуль  $W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = 14.686 \text{ м/с}^2$ .

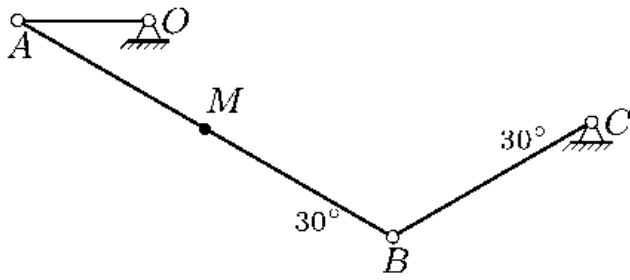
Результаты заносим в таблицу. Скорости в м/с, ускорения — в м/с<sup>2</sup>, угловая скорость — в рад/с, угловое ускорение — в рад/с<sup>2</sup>.

$\omega_{\Pi z}$	$v_{\text{от}}$	$v_{\Pi}$	$v$	$W_{\text{от}}$	$W_{\Pi}$	$W_K$	$W$
3.000	1.200	1.800	2.902	2.100	7.946	7.200	14.686

*УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Плоский шарнирно-стержневой механизм приводится в движение кривошипом  $OA$ , который вращается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Вдоль стержня  $AB$  движется точка  $M$  по закону  $AM = \sigma(t)$  или  $BM = \sigma(t)$  (в см). Положение механизма при  $t = t_1$  указано на рисунке. Стержни, положение которых не задано углом, горизонтальны или вертикальны. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки  $M$  в этот момент.*

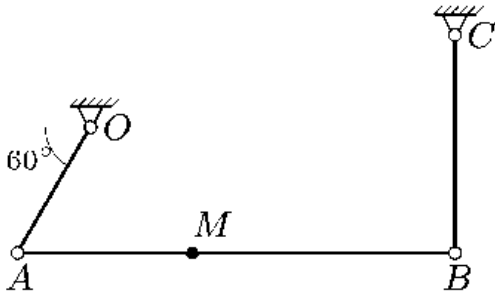
\*) Проверка:  $|W_K| = 2|\omega_{ABz}||v_{\text{от}}|\sin 90^\circ = 720 \text{ см/с}^2$ .

1.



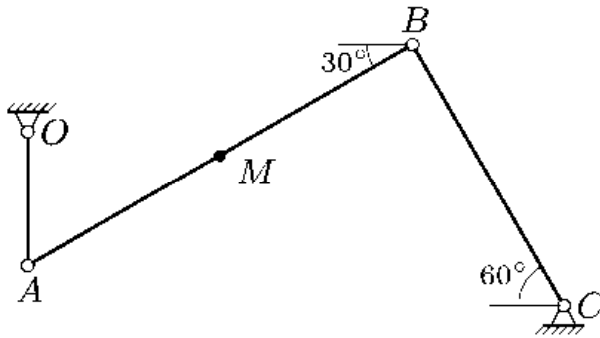
$\omega = 1.4$  рад/с,  $t = 3$  с,  
 $BM = 2t(14 - t)$ ,  
 $OA = 40$  см,  $AB = 132$  см,  
 $BC = 70$  см.

2.



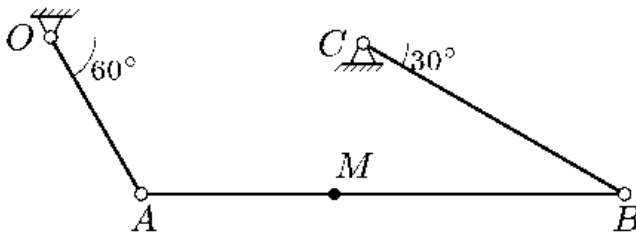
$\omega = 2$  рад/с,  $t = 4$  с,  
 $AM = 8t(2 + \cos(\pi t/3))$ ,  
 $OA = 40$  см,  $AB = 120$  см,  
 $BC = 60$  см.

3.



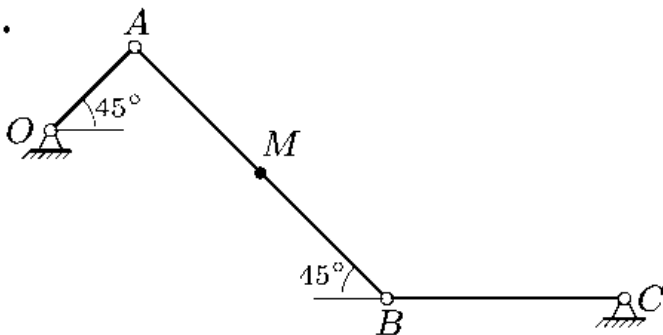
$\omega = 1.3$  рад/с,  $t = 2$  с,  
 $AM = 11t(5 - t)$ ,  
 $OA = 40$  см,  $AB = 132$  см,  
 $BC = 90$  см.

4.



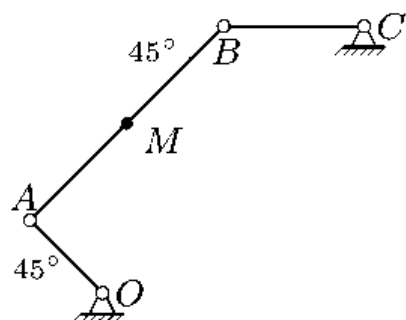
$\omega = 1.4$  рад/с,  $t = 2$  с,  
 $AM = 12t + 8 \sin^2(\pi t/4)$ ,  
 $OA = 30$  см,  $AB = 80$  см,  
 $BC = 50$  см.

5.



$\omega = 2.5$  рад/с,  $t = 1$  с,  
 $BM = 10(\sin(\pi t/6) + t^2)$ ,  
 $OA = 10$  см,  $AB = 30$  см,  
 $BC = 20$  см.

6.



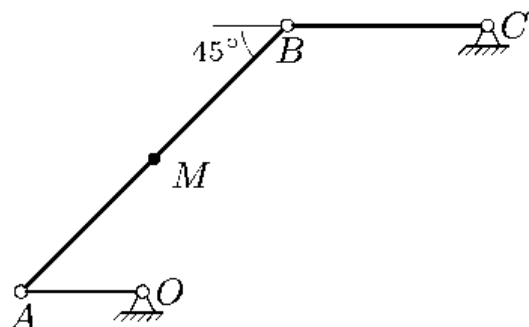
$$\omega = 1.7 \text{ рад/с}, t = 1 \text{ с},$$

$$AM = 20t(3 - t),$$

$$OA = 30 \text{ см}, AB = 80 \text{ см},$$

$$BC = 41 \text{ см}.$$

7.



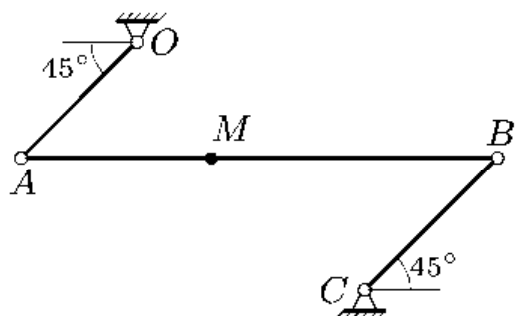
$$\omega = 1.8 \text{ рад/с}, t = 1 \text{ с},$$

$$AM = 24t(3 - t),$$

$$OA = 31 \text{ см}, AB = 96 \text{ см},$$

$$BC = 51 \text{ см}.$$

8.



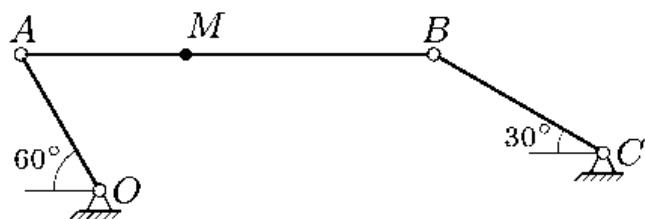
$$\omega = 0.7 \text{ рад/с}, t = 3 \text{ с},$$

$$AM = 13(\sin(\pi t/6) + t^2),$$

$$OA = 112 \text{ см}, AB = 325 \text{ см},$$

$$BC = 128 \text{ см}.$$

9.



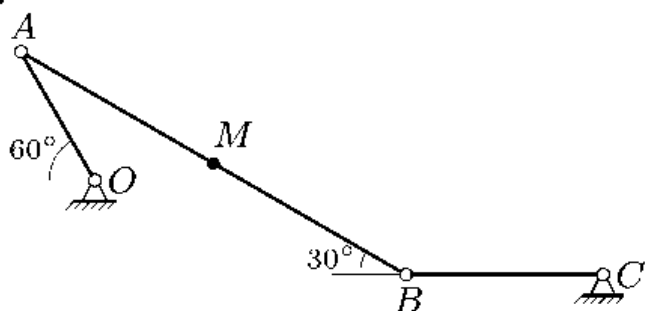
$$\omega = 1.5 \text{ рад/с}, t = 1 \text{ с},$$

$$AM = 21t(3 - t),$$

$$OA = 40 \text{ см}, AB = 105 \text{ см},$$

$$BC = 50 \text{ см}.$$

10.



$$\omega = 2.2 \text{ рад/с}, t = 1 \text{ с},$$

$$BM = 9t(6 - t),$$

$$OA = 30 \text{ см}, AB = 90 \text{ см},$$

$$BC = 40 \text{ см}.$$

## Ответы

	$\omega_{п_z}$	$\varepsilon_{п_z}$	$v_{от}^T$	$v_n$	$v$	$W_{от}^T$	$W_n$	$W_K$	$W$
	рад/с	рад/с <sup>2</sup>	см/с			см/с <sup>2</sup>			
1	0.24	-0.43	-16.00	42.77	34.49	4.00	64.86	7.84	68.01
2	0.33	-0.49	41.02	73.32	112.88	32.06	137.23	27.35	178.02
3	0.20	-0.61	11.00	46.87	57.52	-22.00	36.06	4.33	24.17
4	0.53	0.90	12.00	52.46	61.39	-9.87	88.28	12.60	103.97
5	0.83	5.72	-24.53	27.95	51.09	-18.63	25.58	40.89	33.93
6	-0.64	-1.57	20.00	57.02	40.14	-40.00	150.20	25.50	183.65
7	0.00	0.58	24.00	55.80	42.38	-48.00	83.11	0.00	48.93
8	0.00	-0.45	78.00	78.40	144.49	22.44	43.39	0.00	64.24
9	-0.57	-3.20	21.00	74.94	62.25	-42.00	214.44	24.00	236.39
10	1.27	3.60	-36.00	33.00	69.00	18.00	104.04	91.45	71.18

ЗАМЕЧАНИЕ. В таблице ответов относительные скорость и ускорение даны в проекции на ось  $AB$ .

## 9.4. Механизм с муфтой

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** *Плоский механизм с одной степенью свободы состоит из шарнирно соединенных стержней и муфты, скользящей по направляющему стержню и шарнирно закрепленной на другом стержне или на неподвижном шарнире. Задана угловая скорость ведущего звена механизма. Найти скорость муфты относительно направляющего стержня.*

### ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Представляем движение муфты  $M$  в виде суммы относительного движения по направляющему стержню механизма и переносного движения вместе с этим стержнем. Траекторией относительного движения муфты является прямая. Задачу решаем, используя координатную запись векторных соотношений для скоростей при плоском движении. Выбираем систему координат и определяем координаты всех шарниров механизма и муфты.

2. Мысленно снимаем муфту с механизма и находим скорости шарниров и угловые скорости звеньев получившегося механизма (§ 8.1, с. 158, § 8.3, с. 179, § 8.5, с. 188).

3. Записываем уравнение сложения скоростей:  $\vec{v} = \vec{v}_{от} + \vec{v}_n$ , где абсолютная скорость  $\vec{v}$  или относительная скорость  $\vec{v}_{от}$  выражается

через скорости шарниров механизма. Составляем уравнение

$$\vec{v}_N + \vec{\omega}_{NM} \times N\vec{M} = \vec{v}_{от} + \vec{v}_K + \vec{\omega}_{KM} \times K\vec{M}. \quad (1)$$

Это векторное уравнение содержит две неизвестные величины. Одна из них — искомый модуль вектора относительной скорости  $\vec{v}_{от}$ . Направление этого вектора всегда известно и задается направлением стержня, по которому скользит муфта \*) . В зависимости от варианта задачи второй неизвестной может быть угловая скорость  $\omega_{NM_z}$  или  $\omega_{KM_z}$ , где  $N$  и  $K$  — точки механизма с известными скоростями.

Если муфта *скользит* по стержню  $KM$ , угловая скорость  $\omega_{KM_z}$  которого известна, то неизвестной величиной будет угловая скорость  $\omega_{NM_z}$  звена, шарнирно соединяющего муфту с неподвижной точкой ( $\vec{v}_N = 0$ ) или с шарниром  $N$  механизма с известной скоростью.

Если муфта *шарнирно закреплена* на стержне  $NM$  с известной угловой скоростью  $\omega_{NM_z}$ , то неизвестной величиной будет угловая скорость  $\omega_{KM_z}$  звена, по которому скользит муфта, где точка  $K$  неподвижна или является шарниром с известной скоростью.

Если муфта закреплена на неподвижном шарнире, то абсолютная скорость равна нулю ( $\vec{\omega}_{NM} = 0, \vec{v}_N = 0$ ).

3. Решаем векторное уравнение (1). Определяем  $v_{от}$ .

**ПРИМЕР.** Плоский механизм с одной степенью свободы состоит из шарнирно соединенных стержней и муфты  $D$ , скользящей по направляющему стержню (кривошипу)  $OA$ . Муфта шарнирно закреплена на стержне  $BD$ . Кривошип вращается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью  $\omega_{OA} = 3$  рад/с. Даны длины:  $OA = 40$  см,  $AB = 111$  см,  $BC = 43$  см,  $OC = 62$  см. Найти скорость муфты относительно направляющего стержня в тот момент, когда  $\alpha = 45^\circ$ , а муфта находится на середине кривошипа:  $OD = OA/2$  (рис. 119).

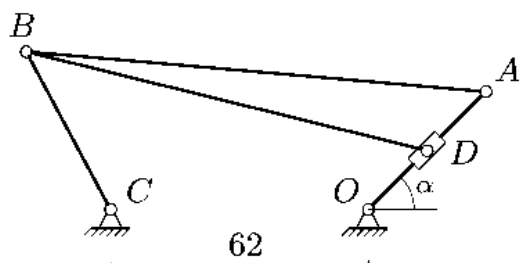


Рис. 119

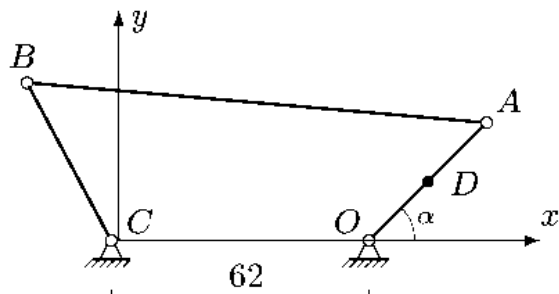


Рис. 120

\*) Направляющий стержень.

## РЕШЕНИЕ

1. Представляем движение муфты  $M$  в виде суммы относительного движения по направляющему стержню  $OA$  и переносного движения вместе с этим стержнем. Выбираем систему координат и определяем координаты всех шарниров механизма и муфты. Помещаем начало координат в точку  $C$  (рис. 120) и вычисляем координаты:

$$\begin{aligned}x_C &= 0, \quad y_C = 0, & x_O &= 62 \text{ см}, \quad y_O = 0, \\x_A &= OC + OA \cos \alpha = 90.284 \text{ см}, & y_A &= OA \sin \alpha = 28.284 \text{ см}, \\x_D &= OC + OD \cos \alpha = 76.142 \text{ см}, & y_D &= OD \sin \alpha = 14.142 \text{ см}.\end{aligned}$$

Координаты точки  $B$  найдем из системы уравнений

$$\begin{aligned}(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 &= AB^2, \\(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 &= BC^2.\end{aligned}$$

Система имеет два решения (задача о точках пересечения двух окружностей с радиусами  $AB$  и  $BC$ ). Выбираем то решение, у которого  $y_B > 0$ :  $x_B = -20.300$  см,  $y_B = 37.908$  см.

Нелинейную систему уравнений удобно решать на компьютере, например, в системе Maple V. Программа решения имеет вид

```
>eqn1:=(XB-XA)^2+(YB-YA)^2=AB^2;
>eqn2:=(XB-XC)^2+(YB-YC)^2=BC^2;
>solve({eqn1,eqn2},{XB,YB});
```

Числа заносятся в десятичной форме:  $AB:=111.0$  и т.д.

2. Мысленно снимаем муфту с механизма (рис. 120) и находим скорости шарниров и угловые скорости звеньев получившегося механизма. Записываем уравнения трех угловых скоростей четырехзвенника  $OABC$  (§8.3, с. 179):

$$\begin{aligned}(y_O - y_A)\omega_{OAz} + (y_A - y_B)\omega_{ABz} + (y_B - y_C)\omega_{BCz} &= 0, \\(x_O - x_A)\omega_{OAz} + (x_A - x_B)\omega_{ABz} + (x_B - x_C)\omega_{BCz} &= 0.\end{aligned}$$

При  $\omega_{OAz} = 3$  рад/с,

$$\begin{aligned}9.63\omega_{ABz} - 37.91\omega_{BCz} &= -28.28 \cdot 3, \\-110.58\omega_{ABz} + 20.30\omega_{BCz} &= -28.28 \cdot 3.\end{aligned}$$

Получаем решение:  $\omega_{ABz} = 1.236$  рад/с,  $\omega_{BCz} = 2.552$  рад/с. Зная  $\omega_{BCz}$ , находим

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_{BC} \times \vec{CB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{BCz} \\ x_B - x_C & y_B - y_C & 0 \end{vmatrix}.$$

Компоненты скорости имеют следующие значения:

$$v_{Bx} = -\omega_{BCz}(y_B - y_C) = -2.552(37.908 - 0) = -96.745 \text{ см/с},$$

$$v_{By} = \omega_{BCz}(x_B - x_C) = 2.552(-20.3 - 0) = -51.802 \text{ см/с}.$$

3. Записываем уравнение сложения скоростей  $\vec{v} = \vec{v}_{от} + \vec{v}_п$ , где абсолютная скорость  $\vec{v}$  выражается через известную скорость шарнира  $B$ . Составляем векторное уравнение

$$\vec{v}_B + \vec{\omega}_{BD} \times \vec{BD} = \vec{v}_{от} + \vec{\omega}_{OA} \times \vec{OD}. \quad (2)$$

Это уравнение содержит две неизвестные величины. Одна из них — искомый модуль вектора относительной скорости  $\vec{v}_{от}$ . Направление этого вектора известно и задается направлением стержня  $OA$ , по которому скользит муфта. Вторая неизвестная — угловая скорость  $\omega_{BD}$ . Подставляем численные значения. Уравнение (2) принимает вид

$$0.707 v_{от}^r + 23.766 \omega_{BD} = 54.315,$$

$$0.707 v_{от}^r + 96.442 \omega_{BD} = 94.232,$$

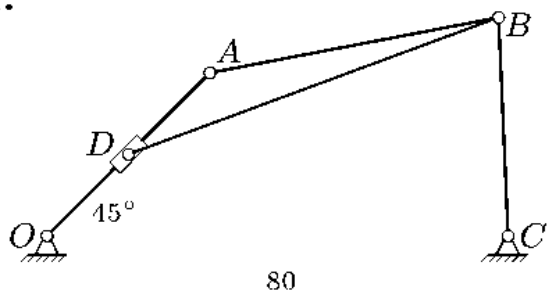
где  $v_{от}^r$  — проекция относительной скорости муфты на ось, направленную от  $O$  к  $A$ . Находим решение системы:  $v_{от}^r = 58.361$  см/с,  $\omega_{BD} = 0.549$  рад/с. Таким образом, в указанный момент муфта движется по стержню  $OA$  вверх со скоростью  $v_{от} = |v_{от}^r| = 58.361$  см/с.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Эту задачу можно решить по крайней мере еще двумя способами. Во-первых, методами аналитической геометрии можно найти расстояние  $S_{OD}(t)$  от шарнира  $O$  до муфты  $D$  как функцию времени. Дифференцируя  $S_{OD}(t)$ , найдем относительную скорость. Во-вторых, можно найти скорость стержня  $OA$  относительно муфты. Подвижная система координат будет связана с муфтой. В этом случае абсолютная скорость точки стержня  $OA$  под муфтой — это скорость точки тела при вращательном движении с угловой скоростью  $\omega_{OAz}$ , переносная — скорость муфты, выраженная через скорость шарнира  $B$ .



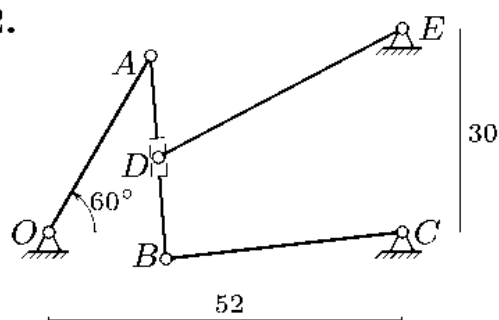
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Плоский механизм с одной степенью свободы состоит из шарнирно соединенных стержней и муфты, скользящей по направляющему стержню и шарнирно закрепленной на другом стержне или вращающейся на неподвижном шарнире. Кривошип  $OA$  вращается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью  $\omega_{OA} = 2$  рад/с. Горизонтальные и вертикальные размеры на рисунках даны для неподвижных шарниров и для линий движения ползунков (в см). Найти скорость муфты  $D$  (или  $E$ ) относительно направляющего стержня (в см/с).

1.



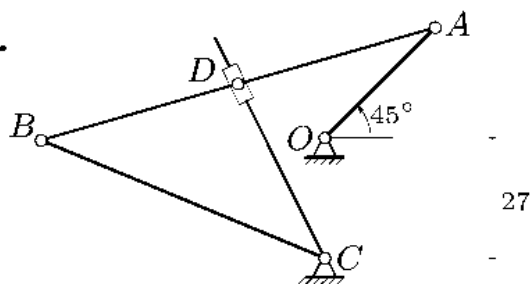
$OA = 40$  см,  $AB = 51$  см,  
 $BC = 38$  см,  $OD = OA/2$ .

2.



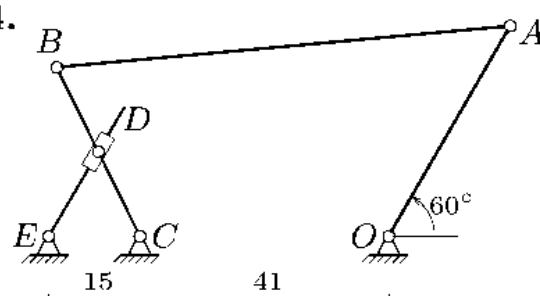
$OA = 30$  см,  $AB = 30$  см,  
 $BC = 35$  см,  $AD = AB/2$ .

3.



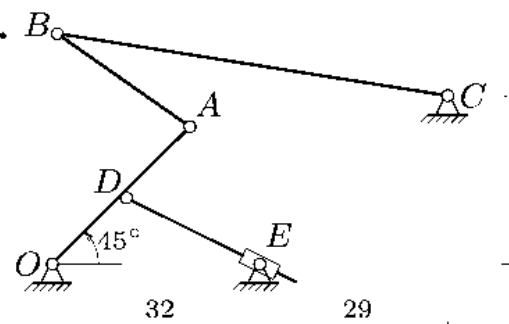
$OA = 35$  см,  $AB = 92$  см,  
 $BC = 69$  см,  $AD = AB/2$ .

4.



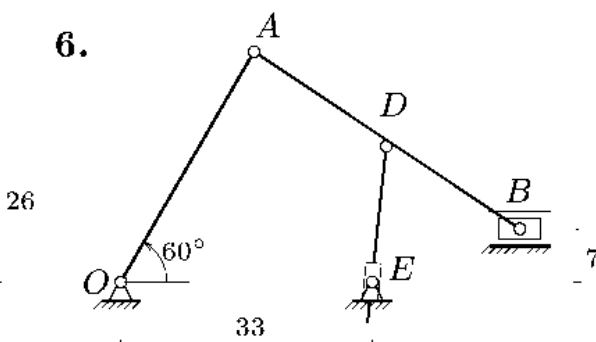
$OA = 40$  см,  $AB = 75$  см,  
 $BC = 31$  см,  $BD = BC/2$ .

5.



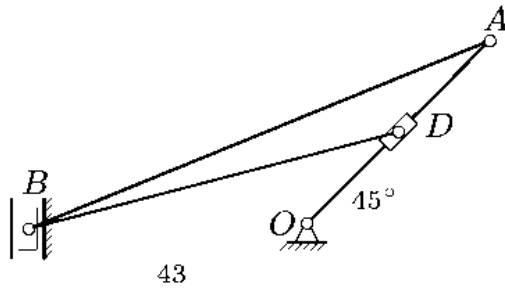
$OA = 30$  см,  $AB = 25$  см,  
 $BC = 61$  см,  $OD = OA/2$ .

6.



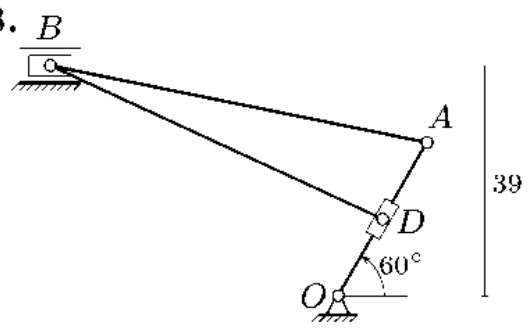
$OA = 35$  см,  $AB = 42$  см,  
 $AD = AB/2$ .

7.



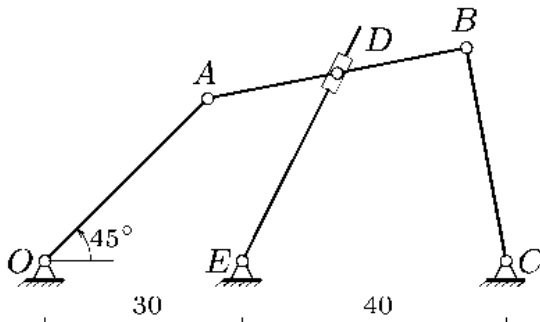
$OA = 40 \text{ см}, AB = 77 \text{ см},$   
 $OD = OA/2.$

8.



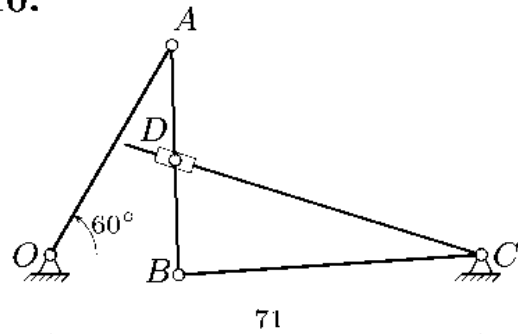
$OA = 30 \text{ см}, AB = 65 \text{ см},$   
 $OD = OA/2.$

9.



$OA = 35 \text{ см}, AB = 40 \text{ см},$   
 $BC = 33 \text{ см}, AD = AB/2.$

10.



$OA = 40 \text{ см}, AB = 38 \text{ см},$   
 $BC = 50 \text{ см}, AD = AB/2.$

Ответы

	$v_A$	$v_B$	$v_D$	$v_{от}$		$v_A$	$v_B$	$v_D$	$v_{от}$
1	80.000	45.296	40.000	29.078	6	70.000	83.975	74.386	9.816
2	60.000	33.792	42.283	24.425	7	80.000	81.943	40.000	0.666
3	70.000	54.609	35.232	15.291	8	60.000	58.095	30.000	254.043
4	80.000	69.994	34.997	29.215	9	70.000	39.044	48.792	0.794
5	60.000	134.577	30.000	28.428	10	80.000	42.040	54.572	46.568

ЗАМЕЧАНИЕ. В ответах, помимо искомой относительной скорости, даны промежуточные результаты — скорости точек  $A$ ,  $B$  и  $D$ . Причем в вариантах 1,2,7,8  $v_D$  — это скорость той точки направляющего стержня, в которой в этот момент находится муфта.

## Глава 10

# СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА

### 10.1. Скорость и ускорение точки тела

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** Твёрдое тело совершает сферическое движение по закону, заданному в углах Эйлера  $\psi$ ,  $\varphi$  и  $\theta$ . Найти скорость и ускорение точки, положение которой дано относительно подвижных осей координат.

#### ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Воспользуемся кинематическими уравнениями Эйлера для определения проекций угловой скорости на подвижные оси координат

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}.\end{aligned}\tag{1}$$

2. Находим проекции скорости  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , на подвижные оси относительно которых задан радиус-вектор точки  $\vec{r}$ .

3. Вычисляем модуль скорости  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ .

4. Дифференцируя по времени  $t$  проекции угловой скорости, получаем компоненты углового ускорения  $\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega}/dt$  в подвижных осях.

5. Ускорение точки представляем в виде векторной суммы

$$\vec{W} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v},$$

где  $\vec{W}_\varepsilon = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$  — вращательное, а  $\vec{W}_\omega = \vec{\omega} \times \vec{v}$  — осеостремительное ускорение.

6. Находим модуль ускорения  $W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}$ .

**ПРИМЕР.** Твёрдое тело совершает сферическое движение по закону, заданному в углах Эйлера  $\psi = 2t$ ,  $\theta = \pi/6$ ,  $\varphi = \sin(2t)$ . При  $t = 1$  с найти скорость и ускорение точки, положение которой относительно подвижных координат задано координатами

$$x = 1 \text{ м}, \quad y = 2 \text{ м}, \quad z = 0.$$

Углы  $\psi$ ,  $\theta$  и  $\varphi$  даны в рад.

### РЕШЕНИЕ

1. Зная зависимости угла прецессии  $\psi$ , угла нутации  $\theta$  и собственного вращения  $\varphi$  от времени, воспользуемся кинематическими уравнениями Эйлера (1) для определения проекций угловой скорости на подвижные оси координат. Подставляя в (1) заданные функции, получаем

$$\begin{aligned}\omega_x &= \sin(\sin(2t)), \\ \omega_y &= \cos(\sin(2t)), \\ \omega_z &= \sqrt{3} + 2 \cos(2t).\end{aligned}$$

При  $t = 1$  вычисляем

$$\omega_x = 0.789 \text{ рад/с}, \quad \omega_y = 0.614 \text{ рад/с}, \quad \omega_z = 0.900 \text{ рад/с}.$$

Модуль угловой скорости тела

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = 1.345 \text{ рад/с}.$$

2. Вычисляем проекции скорости точки на подвижные оси:

$$\begin{aligned}v_x &= \omega_y z - \omega_z y = -1.799 \text{ м/с}, \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z = 0.900 \text{ м/с}, \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x = 0.964 \text{ м/с}.\end{aligned}$$

3. Модуль скорости точки  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = 2.231 \text{ м/с}$ .

4. Дифференцируя по  $t$  проекции угловой скорости, получаем компоненты углового ускорения тела в подвижных осях:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \dot{\omega}_x = 2 \cos(\sin(2t)) \cos(2t), \\ \varepsilon_y &= \dot{\omega}_y = -2 \sin(\sin(2t)) \cos(2t), \\ \varepsilon_z &= \dot{\omega}_z = -4 \sin(2t).\end{aligned}$$

При  $t = 1$  получаем

$$\varepsilon_x = -0.511 \text{ рад/с}^2, \quad \varepsilon_y = 0.657 \text{ рад/с}^2, \quad \varepsilon_z = -3.637 \text{ рад/с}^2.$$

Модуль углового ускорения  $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2} = 3.731 \text{ рад/с}^2$ .

5. Ускорение точки представим в виде векторной суммы:

$$\vec{W} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v},$$

где  $\vec{W}_\varepsilon = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$  – вращательное, а  $\vec{W}_\omega = \vec{\omega} \times \vec{v}$  – осеостремительное ускорение. Вычисляем отдельно их проекции на оси  $x, y$  и  $z$ :

$$\begin{aligned}W_{\varepsilon x} &= \varepsilon_y z - \varepsilon_z y = 7.274 \text{ м/с}^2, \\W_{\varepsilon y} &= \varepsilon_z x - \varepsilon_x z = -3.637 \text{ м/с}^2, \\W_{\varepsilon z} &= \varepsilon_x y - \varepsilon_y x = -1.679 \text{ м/с}^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_{\omega x} &= \omega_y v_z - \omega_z v_y = -0.217 \text{ м/с}^2, \\W_{\omega y} &= \omega_z v_x - \omega_x v_z = -2.379 \text{ м/с}^2, \\W_{\omega z} &= \omega_x v_y - \omega_y v_x = 1.815 \text{ м/с}^2.\end{aligned}$$

Компоненты ускорения получаем, суммируя  $\vec{W}_\varepsilon$  и  $\vec{W}_\omega$ :

$$\begin{aligned}W_x &= 7.274 - 0.217 = 7.057 \text{ м/с}^2, \\W_y &= -3.637 - 2.379 = -6.017 \text{ м/с}^2, \\W_z &= -1.679 + 1.815 = 0.136 \text{ м/с}^2.\end{aligned}$$

6. Модуль ускорения  $W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = 9.275 \text{ м/с}^2$ . Ответы занесем в таблицу. Скорости — в м/с, ускорения — в м/с<sup>2</sup>.

$v_x$	$v_y$	$v_z$	$v$	$W_x$	$W_y$	$W_z$	$W$
-1.799	0.900	0.964	2.231	7.057	-6.017	0.137	9.275

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** При сферическом движении тела векторы угловой скорости и углового ускорения не лежат на одной прямой ( $\omega_x/\varepsilon_x \neq \omega_y/\varepsilon_y \neq \omega_z/\varepsilon_z$ ), а вектор осеостремительного ускорения в общем случае не перпендикулярен вектору вращательного ускорения. В этом можно убедиться, вычислив скалярное произведение  $\vec{W}_\omega \cdot \vec{W}_\varepsilon \neq 0$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Кинематические уравнения Эйлера для определения проекций угловой скорости на неподвижные оси координат имеют вид

$$\begin{aligned}\omega_{x'} &= \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_{y'} &= -\dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_{z'} &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}.\end{aligned}$$

**УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.** Твердое тело совершает сферическое движение по закону, заданному в углах Эйлера. При  $t = 1$  с найти скорость

и ускорение точки, положение которой дано относительно подвижных осей координат. Углы  $\psi$ ,  $\theta$  и  $\varphi$  даны в рад, координаты  $x, y, z$  — в м.

1.  $\psi = \pi/2$ ,  $\theta = 5/(t+2)$ ,  $\varphi = 3(t+1)^{1/10}$ ,  $x = 1$ ,  $y = 1$ ,  $z = 4$ .
2.  $\psi = (t/2) \sin 6t + 3t$ ,  $\theta = \pi/3$ ,  $\varphi = 6/(2t+3)$ ,  $x = 2$ ,  $y = 2$ ,  $z = 1$ .
3.  $\psi = 5(t+1)^{3/10}$ ,  $\theta = 3t^2 + 4t + 2$ ,  $\varphi = \pi/4$ ,  $x = 3$ ,  $y = 3$ ,  $z = 2$ .
4.  $\psi = \pi/3$ ,  $\theta = (t/2) \sin^2 4t - 3t$ ,  $\varphi = t^2 + 3t + 4$ ,  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $z = 4$ .
5.  $\psi = 4 \ln(3t+2)$ ,  $\theta = \pi/6$ ,  $\varphi = 5\sqrt{3t+5}$ ,  $x = 2$ ,  $y = 4$ ,  $z = 3$ .
6.  $\psi = 3t^2 + 2t + 2$ ,  $\theta = 2\sqrt{2t+2}$ ,  $\varphi = \pi/2$ ,  $x = 3$ ,  $y = 1$ ,  $z = 3$ .
7.  $\psi = \pi/3$ ,  $\theta = (t/2) \sin 4t + 3t$ ,  $\varphi = 3\sqrt{4t+3}$ ,  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $z = 4$ .
8.  $\psi = 5t + (t/2) \cos^2 6t$ ,  $\theta = \pi/4$ ,  $\varphi = 3 \ln(3t+2)$ ,  $x = 2$ ,  $y = 3$ ,  $z = 4$ .
9.  $\psi = 4(t+1)^{3/10}$ ,  $\theta = 13e^{t/4}$ ,  $\varphi = \pi/3$ ,  $x = 3$ ,  $y = 2$ ,  $z = 2$ .
10.  $\psi = \pi/6$ ,  $\theta = 15e^{t/2}$ ,  $\varphi = 6(t+1)^{1/10}$ ,  $x = 1$ ,  $y = 4$ ,  $z = 4$ .

### Ответы

	$v_x$	$v_y$	$v_z$	$v$	$W_x$	$W_y$	$W_z$	$W$
	м/с				м/с <sup>2</sup>			
1	-0.324	-2.055	0.595	2.164	0.131	1.050	-1.466	1.476
2	-3.075	0.174	5.802	6.569	8.339	-32.484	5.135	3.538
3	-11.080	-17.204	42.426	47.104	-313.097	-309.026	-176.192	28.228
4	-5.958	4.406	-0.713	7.444	-20.508	-49.249	15.896	21.743
5	-18.938	5.860	4.812	20.400	-30.306	-96.636	10.333	4.454
6	2.229	2.476	-3.054	4.520	14.618	5.558	-23.280	37.251
7	-11.283	2.831	1.405	11.717	-30.351	-8.721	-22.375	27.411
8	-17.259	31.517	-15.008	38.942	-120.979	-315.767	-81.799	171.495
9	-7.026	-4.334	14.872	17.010	-68.814	-10.565	-30.878	13.459
10	-8.553	-48.603	50.742	70.782	-95.343	-645.653	-583.050	39.700

## Часть III

### ДИНАМИКА

Динамика \*) — основной раздел теоретической механики. В динамике изучают механическое движение материальных объектов в связи с силами, приложенными к ним. Простейшим объектом является материальная точка — геометрическая точка, наделенная массой. В главе 11 решаются задачи о движении точки под действием постоянных и переменных сил. Все объекты, о которых там идет речь, принимаются за материальную точку. Для решения текстовых задач, приведенных в § 11.1, 11.2, требуется определенный навык прочтения условия, умение выделить существенное, заметить недосказанное и, главное, не приписать к условию того, чего там нет. Например, если в задаче речь идет об автомобиле, который при некоторых условиях разгоняется за одно время, а при других условиях — за другое, то естественно предположить, что двигатель в обоих случаях один и тот же, и все параметры движения, кроме тех о которых явно сказано, одинаковые. Общий принцип здесь — не вносить в условие дополнительных сложностей и использовать все имеющиеся в тексте данные. Кроме того, для успешного решения этих задач рекомендуем повторить методы интегрирования (*Решебник ВМ*, §7.1–7.10) и методы решения дифференциальных уравнений (*Решебник ВМ*, §11.1–11.11).

В § 12.1–12.6 рассматриваются задачи динамики плоского движения тела и системы тел. В зависимости от постановки задачи применяются различные методы. В некоторых случаях одну и ту же задачу можно решить несколькими способами. Так, задачи § 12.3, § 12.5, § 12.6 можно решить с помощью теоремы об изменении кинетической энергии системы, с помощью общего уравнения динамики или уравнения Лагранжа 2-го рода. Заметим, что большинство трудностей при решении этих задач связаны с кинематикой. Рекомендуем повторить методы вычисления скоростей (§ 8.1, 8.5) и ускорений (§ 8.2)

---

\*) Название “динамика” ввел Г. Лейбниц в 1690 г.

точек тела при плоском движении.

Задача о динамических реакциях подшипников ротора § 12.7 соответствует задаче Д-6 из сборника И.В. Новожилова, М.Ф. Зацепина [15].

В § 13.1 методами аналитической механики решается задача определения реакций опор составной конструкции. Здесь в одной задаче собраны все три раздела механики: методами кинематики находят возможные скорости, искомая реакция определяется из уравнения принципа возможных скоростей, а уравнения статики используются при проверке решения.

Для решения задач динамики системы тел с двумя степенями свободы применяется общее уравнение динамики (§ 13.3) или уравнение Лагранжа 2-го рода (§ 13.4).

Особое внимание уделяется задачам, в которых кинетическая энергия системы зависит от обобщенной координаты. В этом случае решение ограничивается составлением уравнения движения в форме Лагранжа 2-го рода (§ 13.5) или Гамильтона (§ 13.8). При вычислении обобщенных сил в таких задачах важно знать не только модули скорости характерных точек (центров масс, точек приложения сил), но и знаки их проекций. Наибольшие трудности при решении возникают именно здесь. Именно поэтому в этих задачах рекомендуется использовать метод кинематических графов. Для численного решения полученного дифференциального уравнения движения в § 17.2 дана программа для Maple V. С помощью этой программы можно выполнять задание Д-5 из сборника [15].

В § 14.1 с помощью уравнения Лагранжа 2-го рода решена задача о собственных колебаниях системы двух тел, совершающих плоское движение.

Задача колебания узла фермы, разобранный в § 14.2, содержит в себе элементы теории упругости. Стержни фермы не являются твердыми телами, для них допускаются продольные деформации. При определении усилий в стержнях фермы можно воспользоваться программой, написанной для Maple V (§ 15.1).



# Глава 11

## ДИНАМИКА ТОЧКИ

### 11.1. Постоянные силы

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** *Материальная точка движется по прямой или по окружности под действием постоянных по величине сил. Определить закон движения точки или отдельные параметры движения.*

#### ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Выбираем систему координат. Для прямолинейного движения ось  $x$  направляем вдоль линии движения точки. Уравнения движения под действием сил, главный вектор которых обозначим как  $\vec{F}$ , имеют вид

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z.$$

При движении по окружности используем уравнения движения в естественных осях:

$$mv_\tau^2/R = F_n, \quad m\dot{v}_\tau = F_\tau, \quad 0 = F_z.$$

Нормаль  $n$  направлена к центру окружности,  $\tau$  — орт касательной, направленный в сторону увеличения дуговой координаты  $\sigma$ ;  $v_\tau = \dot{\sigma}$ . Ось  $z$  — перпендикулярна плоскости окружности.

Прикладываем к точке все действующие на нее силы.

2. Составляем дифференциальные уравнения движения в проекциях на оси. В проекции на одну из осей уравнение движения вырождается в уравнение равновесия. Если в условии задачи есть трение, то из этого уравнения можно найти силу трения или выразить ее через другие силы.

3. Интегрируем дифференциальное уравнение. Константы интегрирования определяем из начальных условий.

4. Из полученного закона движения определяем необходимые величины.

ПРИМЕР. С аэростата сбросили балласт, падение аэростата замедлилось, и через время  $t_0$  он поднялся на ту высоту, с которой сбросили балласт. Сила сопротивления воздуха  $R = \text{const}$ , подъемная сила аэростата —  $T$ , масса аэростата без балласта —  $m$ . Сколько времени после сброса балласта аэростат опускался?

РЕШЕНИЕ

1. Ось  $y$ , направим вверх, поместив ее начало в нижней точке траектории аэростата. При падении на аэростат действуют силы тяжести  $G = mg$ , сила сопротивления воздуха  $R$  и подъемная сила  $T$  (рис. 121). Аэростат принимаем за материальную точку.

2. Составляем дифференциальное уравнение движения:

$$m\ddot{y} = T + R - G.$$

3. Дважды интегрируем уравнение движения. Для постоянных сил интеграл берется просто:

$$m\dot{y} = (T + R - G)t + C_1,$$

$$my = (T + R - G)t^2/2 + C_1t + C_2.$$

Начальные условия:  $t = 0$ ,  $y = H$ ,  $\dot{y} = -v_0$ . Отсюда находим константы интегрирования  $C_1 = -mv_0$ ,  $C_2 = mH$ . Получаем уравнения

$$\dot{y} = (T + R - G)t/m - v_0, \quad (1)$$

$$y = (T + R - G)t^2/(2m) - v_0t + H. \quad (2)$$

Аналогично составляем уравнение при подъеме аэростата.

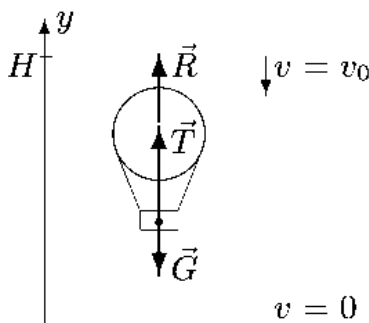


Рис. 121

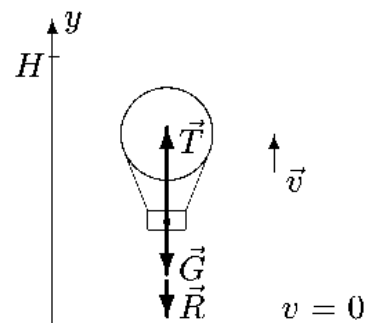


Рис. 122

Сила сопротивления при этом меняет свое направление (рис. 122). Оставляя ось  $y$  прежней, время отсчитываем от нуля с момента подъема:

$$m\ddot{y} = T - R - G.$$

Интегрируя уравнение

$$m\dot{y} = (T - R - G)t + C_3, \quad (3)$$

получаем

$$my = (T - R - G)t^2/2 + C_3t + C_4. \quad (4)$$

Начальные условия:  $t = 0, y = 0, \dot{y} = 0$ . Находим константы интегрирования:  $C_3 = 0, C_4 = 0$ . Из (4) следует

$$y = (T - R - G)t^2/(2m). \quad (5)$$

4. Находим искомое время падения. Обозначаем его за  $t_1$ , а время подъема — за  $t_2$ . По условию  $t_1 + t_2 = t_0$ . Подставляем в (1,2) условия:  $t = t_1, \dot{y} = 0, y = 0$ , а в (5)  $t = t_2, y = H$ . Получаем систему трех уравнений с неизвестными  $t_1, H, v_0$ :

$$0 = (T + R - G)t_1/m - v_0, \quad (6)$$

$$0 = (T + R - G)t_1^2/(2m) - v_0t_1 + H, \quad (7)$$

$$H = (T - R - G)(t_0 - t_1)^2/(2m). \quad (8)$$

Исключая неизвестную высоту  $H$  и неизвестную начальную скорость  $v_0$ , получаем

$$t_1 = t_0 / \left( 1 + \sqrt{(T + R - mg)/(T - R - mg)} \right).$$

#### УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

**1.** Получив начальную скорость  $v_0$ , брусок начал двигаться вверх по наклонной плоскости и, достигнув максимальной высоты, стал спускаться вниз. Угол наклона плоскости равен  $\alpha$ , коэффициент трения  $f$ . На каком расстоянии от исходной точки окажется брусок за время спуска равное времени подъема?

**2.** Материальная точка массой  $m$  движется из состояния покоя по гладкой направляющей радиусом  $R$ , расположенной в горизонтальной плоскости, под действием силы  $Q$ . Определить реакцию направляющей через время  $t$ . Вектор силы направлен внутрь вогнутости окружности и образует постоянный угол  $\alpha$  с вектором скорости.

**3.** Тормозной путь автомобиля на горизонтальной дороге при скорости  $v_0$  равен  $S$ . Коэффициент трения  $f$ . Силу сопротивления воздуха считать постоянной. Чему равен тормозной путь этого автомобиля при той же скорости на спуске  $\alpha$  ?

4. В сухую погоду автомобиль проходит закругление на дороге на предельной скорости  $v_1$ . Найти предельную скорость прохождения этого же поворота после дождя, когда коэффициент трения уменьшится в 4 раза. Считать, что автомобиль не опрокидывается.
5. Автомобиль начинает движение из состояния покоя по окружности радиуса  $R$  с постоянным ускорением  $W$ . Коэффициент трения  $f$ . Через какое время автомобиль соскользнет с окружности?
6. Автомобиль без груза разгоняется с места до скорости  $v_0$  за время  $t_1$ . Коэффициент трения  $f$ . Какую скорость он разовьет за то же время с грузом, составляющим 50% массы автомобиля?
7. Самосвал без груза разгоняется с места до скорости  $v^*$  за время  $t^*$ . Коэффициент трения  $f$ . За какое время разгонится до той же скорости груженный самосвал, масса которого при погрузке увеличилась вдвое?
8. За какое минимальное время автомобиль с постоянной скоростью объедет квадрат со стороной  $a$ , огибая углы по дугам окружности? Коэффициент трения  $f$ . Считать, что на поворотах возможно соскальзывание, но не опрокидывание.
9. Воздушный шар массой  $m$  падает вниз. На высоте  $H$  скорость шара равна  $v_0$ , а ускорение  $W_0$ . Какой балласт необходимо сбросить, чтобы шар мягко ( $v = 0$ ) приземлился? Силу сопротивления воздуха считать постоянной.
10. Тормозной путь автомобиля на горизонтальной дороге при скорости  $v_0$  составляет  $S$ . Чему равен тормозной путь этого автомобиля при той же скорости на спуске  $\alpha$ ? Коэффициент трения считать постоянным.

Ответы

1.  $S = v_0^2 f \cos \alpha / (g(f \cos \alpha + \sin \alpha)^2)$ ,
2.  $N_1 = (Qt \cos \alpha)^2 / (Rm) - Q \sin \alpha$ ,  $N_2 = mg$ ,  $N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$ .
3.  $S_\alpha = 0.5v_0^2 / (g(f \cos \alpha - \sin \alpha) + W_c)$ ,  $W_c = 0.5v_0^2 / S - gf$ .
4.  $v_2 = v_1 / 2$ .
5.  $t = \sqrt{Rfg} / W$ .
6.  $v = (2v_0 - gft_1) / 3$ .
7.  $t = 2v^*t^* / (v^* - fgt^*)$ .
8.  $t = 4a/v + 2v(\pi - 2\sqrt{2}) / (gf)$ , если  $v^2 \leq agf\sqrt{2}/2$ ;  
 $t = 2\pi v / (gf)$ , если  $v^2 > agf\sqrt{2}/2$ .

$$9. m_B = m(v_0^2 + 2W_0H)/(v_0^2 + 2gH).$$

$$10. S_\alpha = v_0^2 S / (v_0^2 \cos \alpha - 2gS \sin \alpha).$$

## 11.2. Переменные силы

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** *Материальная точка движется по прямой или по окружности под действием переменных сил. Определить закон движения точки или отдельные параметры движения.*

### ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Выбираем систему координат. Для прямолинейного движения ось  $x$  направляем вдоль линии движения точки. При движении по окружности используем полярную систему координат с началом в центре окружности.

Прикладываем к точке все действующие на нее силы.

2. Составляем дифференциальные уравнения движения в проекциях на оси.

3. Интегрируем дифференциальное уравнение.

В зависимости от вида сил, действующих на точку, различают следующие случаи.

А. Сила зависит только от времени  $F = F(t)$ . Решение задачи сводится к интегрированию функции  $F(t)$ .

Б. Сила зависит только от координаты точки  $F = F(x)$ . Вводится замена переменной  $W = vdv/dx$ , после чего получается уравнение с разделяющимися переменными.

В. Сила зависит только от скорости точки  $F = F(v)$ . Если в начальных условиях или в вопросе присутствуют время и скорость, то следует использовать замену  $W = dv/dt$ . Если в начальных условиях или в вопросе присутствуют координата и скорость, то вводят замену переменной  $W = vdv/dx$ .

Г. Сила зависит только от скорости точки и от координаты  $F = f_1(v)f_2(x)$ . Если в начальных условиях или в вопросе присутствуют скорость и координата, то вводят замену переменной  $W = vdv/dx$ . Дифференциальное уравнение допускает разделение переменных:  $mv dv / f_1(v) = f_2(x) dx$  (*Решебник ВМ, §11.2*).

Константы интегрирования определяем из начальных условий.

4. Из полученного закона движения определяем необходимые величины.

ПРИМЕР. Грузовик массой  $m$  имеет максимальную скорость  $v_{\max}$  и разгоняется с места до  $v_*$  за время  $t_*$ . Сила сопротивления пропорциональна скорости. Чему равна средняя сила тяги двигателя грузовика?

РЕШЕНИЕ

1. Ось  $x$  системы координат принимаем горизонтальной, начало координат помещаем в начальное положение грузовика. Изображаем грузовик в некоторый промежуточный момент движения. На него действует сила тяжести  $G = mg$ , сила сопротивления  $R = kv$ , пропорциональная скорости  $v$ , с неизвестным пока коэффициентом  $k$ , неизвестная сила тяги  $F$  и реакция опоры  $N$  (рис. 123).

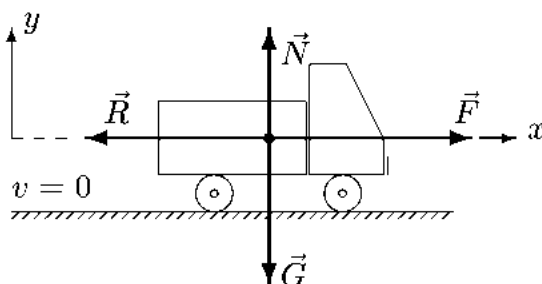


Рис. 123

2. Составляем дифференциальное уравнение движения в проекции на ось  $x$ :

$$m\ddot{x} = F - R.$$

3. Дважды интегрируем уравнение движения. Так как правая часть уравнения является функцией скорости, а в вопросе задачи содержится время, вводим замену  $v = \dot{x}$  и интегрируем уравнение с разделяющимися переменными  $t$  и  $v$ :

$$\frac{m dv}{F - kv} = dt,$$

$$-(m/k) \ln(F - kv) = t + C_1.$$

Начальные условия:  $t = 0$ ,  $x = 0$ ,  $\dot{x} = v = 0$ . Так как в этой задаче не идет речь о расстояниях, то интегрировать второй раз и использовать условие на координату  $x$  не требуется. Из условия на скорость находим константу интегрирования  $C_1 = -(m/k) \ln(F)$ . Зависимость скорости от времени движения принимает вид

$$-(m/k) \ln(1 - kv/F) = t. \quad (1)$$

4. Находим искомую силу тяги  $F$  грузовика, считая ее постоянной. Для этого используем все имеющиеся в задаче данные. Известна максимальная скорость  $v = v_{\max}$ . Необходимым условием экстремума функции  $v = v(t)$  является равенство  $dv/dt = 0$  или  $m\ddot{x} = F - kv_{\max} = 0$ . Отсюда:  $k = F/v_{\max}$ . Подставляем это соотношение в (1), откуда, при  $t = t_*$  и  $v = v_*$ , получаем среднюю силу тяги грузовика

$$F = \frac{mv_{\max}}{t_*} \ln \left( \frac{v_{\max}}{v_{\max} - v_*} \right).$$

#### УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Автомобиль массой  $m$  тормозит, двигаясь по горизонтальной прямой. Сила сопротивления воздуха зависит от скорости,  $R_c = kv$ , коэффициент трения  $f$ . За какое время скорость автомобиля уменьшится с  $v_0$  до  $v_1$ ?

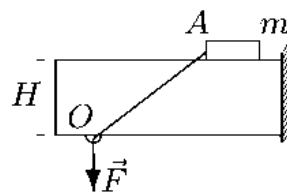
2. Автомобиль массой  $m$  разгоняется до некоторой скорости за время  $t_1$ . Сила сопротивления пропорциональна скорости,  $R_c = kv$ . Чему будет равно время разгона автомобиля до той же скорости, если его силу тяги увеличить вдвое?

3. Материальная точка массой  $m$  движется из состояния покоя по гладкой криволинейной направляющей, расположенной в горизонтальной плоскости, под действием силы  $F = Q \sin kt$ . Сила образует постоянный угол  $\alpha$  с вектором скорости. Определить скорость точки в момент времени  $t$ .

4. Сила сопротивления воды при движении катера пропорциональна скорости,  $R_c = k_1 v$ . При этом максимальная скорость катера  $v_{\max}$ . Найти предельную скорость этого же катера, если бы сила сопротивления зависела от квадрата скорости,  $R_c = k_2 v^2$ .

5. Автомобиль массой  $m$  разгоняется до некоторой скорости за время  $t_1$ . Сила сопротивления пропорциональна скорости,  $R_c = kv$ . Чему будет равно время разгона до той же скорости при отсутствии сопротивления?

6. Брусок  $A$  массой  $m$  начинает движение из состояния покоя по горизонтальной поверхности консоли под действием нити, продетой сквозь неподвижное кольцо  $O$ . В начальном положении брусок находился на расстоянии  $OA = L$  от кольца. Дана толщина консоли  $H$ . Трением и размерами бруска пренебречь. Натяжение нити  $F = \text{const}$ . Найти максимальную скорость бруска.



7. Воздушный шар плавно ( $v_0 = 0$ ) взлетает вертикально вверх с начальным ускорением  $W_0$ . По мере набора высоты  $h$  подъемная сила  $F$  шара уменьшается (за счет охлаждения и уменьшения плотности атмосферы) по закону  $F = F_0 - kh$ , где  $F_0$  и  $k$  известные константы. Чему равна скорость шара на высоте  $H$ ?
8. Автомобиль массой  $m$ , имея скорость  $v_0$ , начинает тормозить. Сила торможения постоянна и равна  $F$ , сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости и в момент начала торможения равна  $R_c$ . Найти тормозной путь автомобиля.
9. Автомобиль массой  $m_1$  без груза разгоняется с места до заданной скорости за время  $t_1$ . Сопротивление пропорционально скорости. За какое время разгоняется до той же скорости автомобиль с грузом  $m_2$ ?
10. Воздушный шар массой  $m_1$  падает вниз. В момент, когда скорость шара равна  $v_0$ , а ускорение  $W_0$ , сбросили балласт  $m_2$ . Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости, подъемная сила равна  $F$ . Как долго после этого будет продолжаться падение шара?

#### Ответы

1.  $t = (m/k) \ln((kv_0 + mgf)/(kv_1 + mgf))$ .
2.  $t_2 = (m/k)(\ln 2 - \ln(1 + e^{-kt_1/m}))$ .
3.  $v = Q/(mk)(1 - \cos kt) \sin \alpha$ .
4.  $v = \sqrt{k_1 v_{\max}/k_2}$ .
5.  $t = (m/k)(1 - e^{-kt/m})$ .
6.  $v = \sqrt{2F(L - H)/m}$ .
7.  $v = \sqrt{2W_0 H - kH^2(W_0 + g)/F_0}$ .
8.  $S = mv_0^2/(2R_c) \ln(1 + R_c/F)$ .
9.  $t_2 = t_1(1 + m_2/m_1)$ .
10.  $t = (1/k)(m_1 - m_2) \ln(1 - kv_0/A)$ ,  $A = (m_1 - m_2)g - F$ ,  
 $k = (m_1(g - W_0) - F)/v_0$ .



## Глава 12

# ДИНАМИКА СИСТЕМЫ

### 12.1. Теорема о движении центра масс

*ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Механизм, состоящий из  $n$  связанных между собой тел, установлен на призме, находящейся на горизонтальной плоскости. Трение между призмой и плоскостью отсутствует. Одно из тел получает перемещение относительно призмы. Куда и на какое расстояние переместится призма?*

#### ПЛАН РЕШЕНИЯ

Для решения задачи используем теорему о движении центра масс. Выбираем систему координат. Одну из осей, например, ось  $x$  направим перпендикулярно линии действия внешних сил. В проекции на ось  $x$  уравнение движения центра масс принимает вид

$$m\ddot{x}_c = 0, \quad (1)$$

где  $x_c$  — координата центра масс системы,  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  — масса всей системы. Дважды интегрируя (1) при условии, что в начальный момент скорость центра масс была равна нулю, получаем

$$mx_c = \text{const}. \quad (2)$$

Координата центра масс системы вычисляется по формуле

$$x_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i x_i. \quad (3)$$

Записывая (2) с учетом (3) один раз для начального положения системы (в покое), а другой раз после смещения одного из тел, получаем формулу, связывающую абсолютные смещения тел системы:

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = 0. \quad (4)$$

1. Абсолютное смещение каждого тела представляем как сумму относительного смещения, зависящего от величины заданного относительного смещения одного из тел, и неизвестного переносного смещения  $\Delta$ , равного абсолютному смещению того тела, относительно которого задавалось смещение.

2. Подставляя абсолютные смещения в (4), получаем уравнение для смещения  $\Delta$ . Решение уравнения дает ответ.

**ПРИМЕР.** Механизм, состоящий из груза  $A$  массой 50 кг, блока  $B$  массой 80 кг (большой радиус  $R = 30$  см, меньший  $r = 10$  см) и цилиндра  $C$  массой 120 кг радиусом  $R_C = r/2$ , установлен на призме  $D$  массой 210 кг, находящейся на горизонтальной плоскости. Трение между призмой и плоскостью отсутствует. Груз  $A$  получает перемещение  $S = 1.2$  м относительно призмы вдоль ее поверхности влево;  $\alpha = 75^\circ$  (рис. 124). Куда и на какое расстояние переместится призма?

### РЕШЕНИЕ

Задаем систему координат. Проекции на горизонтальную ось всех внешних сил (сил тяжести  $G_A, G_B, G_C, G_D$ , реакции опоры  $N$ ), действующих на систему, равны нулю (рис. 125), а трения между призмой  $D$  и опорой по условию нет. Применим к системе следствие из теоремы о движении центра масс в форме (4).

1. Абсолютное смещение тел  $A, B$  и  $C$  представляем как сумму относительного смещения, зависящего от величины  $S$  относительного смещения груза  $A$ , и неизвестного переносного смещения  $\Delta_D$ , равного

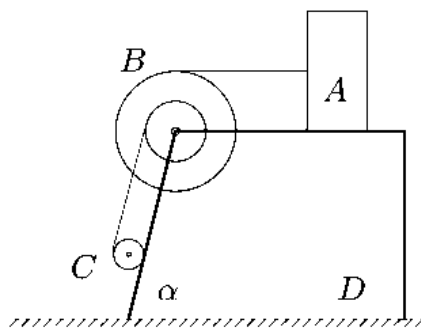


Рис. 124

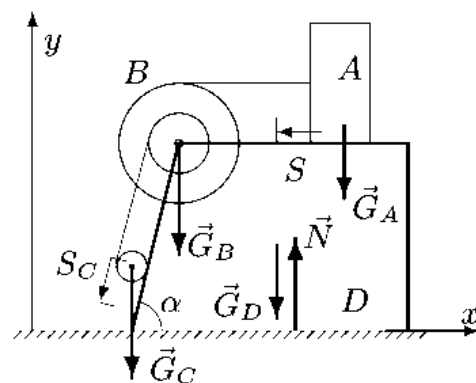


Рис. 125

абсолютному смещению призмы, относительно которой задавалось смещение  $S$ . Обозначим абсолютные смещения координат центров масс тел системы  $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C, \Delta_D$ . Направление оси  $x$  определяет знаки смещений: налево с минусом, направо с плюсом. Предполагаем, что призма сместится направо. Перемещение центра цилиндра

$C$  относительно призмы и перемещение груза  $A$  связаны так же, как связаны их скорости.

Цилиндр  $C$  совершает плоское движение. Абсолютное смещение его центра в проекции на ось  $x$  равно  $\Delta_D - S_C \cos \alpha$ , где  $S_C$  — смещение центра цилиндра вдоль наклонной поверхности призмы. Выразим  $S_C$  через  $S$ . Для этого свяжем скорости груза  $A$  и центра масс цилиндра  $C$ . Мгновенный центр скоростей цилиндра находится в точке касания призмы, поэтому скорость его центра масс относительно призмы вдвое меньше скорости нити, накручиваемой на обод. Скорость груза  $A$  выражаем через угловую скорость блока (рис. 132, с. 249):

$$v_C = 0.5\omega_B r, \quad v_A = \omega_B R. \quad (5)$$

Исключая отсюда  $\omega_B$ , имеем связь скоростей:  $v_C = 0.5v_A r/R$ . Интегрируя это соотношение при нулевых начальных значениях, получаем искомую зависимость:  $S_C = 0.5Sr/R$ . Находим выражение абсолютных смещений всех тел через  $\Delta_D$  и  $S$ :

$$\Delta_A = \Delta_D - S, \quad \Delta_B = \Delta_D, \quad \Delta_C = \Delta_D - 0.5Sr/R \cos \alpha. \quad (6)$$

2. Подставляя абсолютные смещения в (4), получаем уравнение

$$m_A \Delta_A + m_B \Delta_B + m_C \Delta_C + m_D \Delta_D = 0,$$

или

$$m_A(\Delta_D - S) + m_B \Delta_D + m_C(\Delta_D - 0.5Sr/R \cos \alpha) + m_D \Delta_D = 0.$$

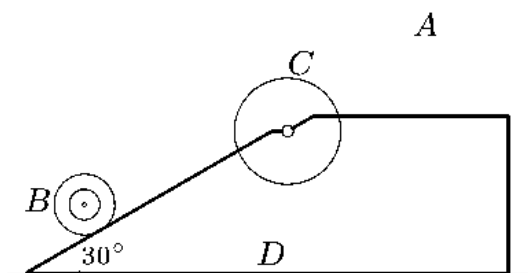
Решаем это уравнение относительно  $\Delta_D$ :

$$\Delta_D = \frac{m_A S + m_C 0.5Sr/R \cos \alpha}{m_A + m_B + m_C + m_D} = 14.39.$$

Призма  $D$  переместится вправо на 14.39 см.

**УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.** Механизм, состоящий из груза  $A$ , блока  $B$  (большой радиус  $R$ , меньший  $r$ ) и цилиндра  $C$  радиуса  $R_C$ , установлен на призме  $D$ , находящейся на горизонтальной плоскости. Трение между призмой и плоскостью отсутствует. Груз  $A$  получает перемещение  $S = 1$  м относительно призмы вдоль ее поверхности влево или (в тех вариантах, где он висит) по вертикали вниз. Куда и на какое расстояние переместится призма?

1.



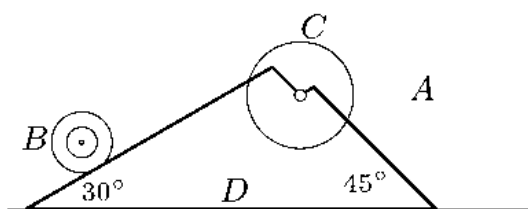
$$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг},$$

$$m_C = 11 \text{ кг}, m_D = 40 \text{ кг},$$

$$R = 16 \text{ см}, r = 8 \text{ см},$$

$$R_C = 28 \text{ см}.$$

2.



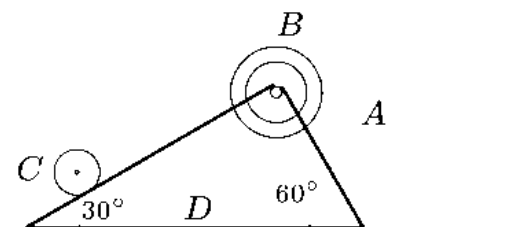
$$m_A = 9 \text{ кг}, m_B = 6 \text{ кг},$$

$$m_C = 14 \text{ кг}, m_D = 51 \text{ кг},$$

$$R = 24 \text{ см}, r = 12 \text{ см},$$

$$R_C = 42 \text{ см}.$$

3.



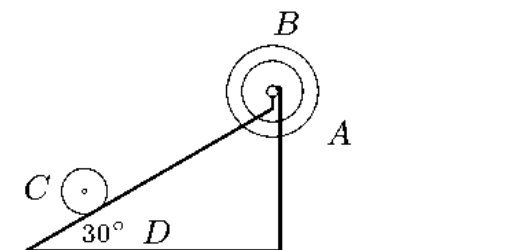
$$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг},$$

$$m_C = 16 \text{ кг}, m_D = 65 \text{ кг},$$

$$R = 48 \text{ см}, r = 32 \text{ см},$$

$$R_C = 24 \text{ см}.$$

4.



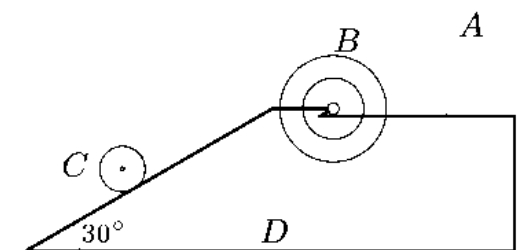
$$m_A = 9 \text{ кг}, m_B = 6 \text{ кг},$$

$$m_C = 19 \text{ кг}, m_D = 76 \text{ кг},$$

$$R = 60 \text{ см}, r = 40 \text{ см},$$

$$R_C = 30 \text{ см}.$$

5.



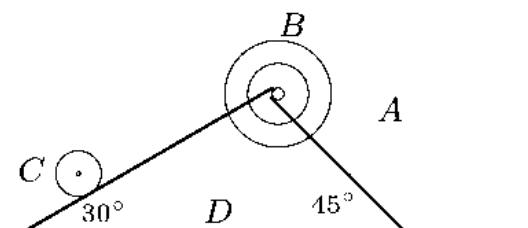
$$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг},$$

$$m_C = 21 \text{ кг}, m_D = 90 \text{ кг},$$

$$R = 28 \text{ см}, r = 16 \text{ см},$$

$$R_C = 12 \text{ см}.$$

6.



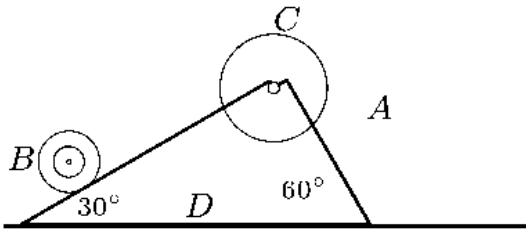
$$m_A = 9 \text{ кг}, m_B = 6 \text{ кг},$$

$$m_C = 24 \text{ кг}, m_D = 51 \text{ кг},$$

$$R = 42 \text{ см}, r = 24 \text{ см},$$

$$R_C = 18 \text{ см}.$$

7.



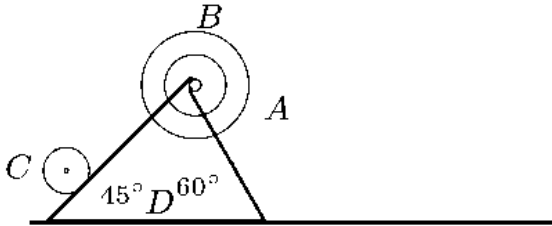
$$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг},$$

$$m_C = 11 \text{ кг}, m_D = 50 \text{ кг},$$

$$R = 32 \text{ см}, r = 16 \text{ см},$$

$$R_C = 56 \text{ см}.$$

8.



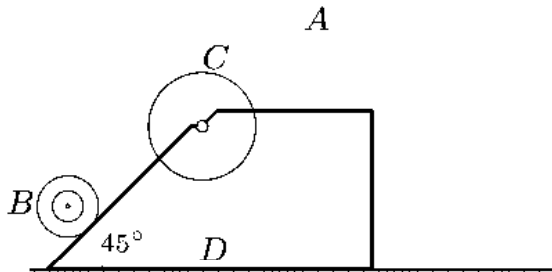
$$m_A = 12 \text{ кг}, m_B = 6 \text{ кг},$$

$$m_C = 27 \text{ кг}, m_D = 65 \text{ кг},$$

$$R = 70 \text{ см}, r = 40 \text{ см},$$

$$R_C = 30 \text{ см}.$$

9.



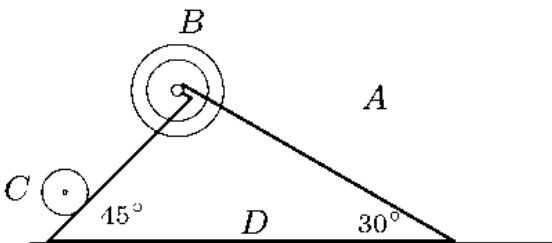
$$m_A = 9 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг},$$

$$m_C = 14 \text{ кг}, m_D = 64 \text{ кг},$$

$$R = 16 \text{ см}, r = 8 \text{ см},$$

$$R_C = 28 \text{ см}.$$

10.



$$m_A = 12 \text{ кг}, m_B = 6 \text{ кг},$$

$$m_C = 22 \text{ кг}, m_D = 80 \text{ кг},$$

$$R = 36 \text{ см}, r = 24 \text{ см},$$

$$R_C = 18 \text{ см}.$$

Ответы. 1. 12.887 см. 2. 20.945 см. 3. 13.597 см. 4. 4.986 см.  
 5. 31.522 см. 6. 27.278 см. 7. 6.760 см. 8. 20.641 см.  
 9. 11.571 см. 10. 12.981 см.

#### Предупреждение типичных ошибок

1. В знаменателе ответа должна стоять сумма масс всех тел системы. Если вместо суммы масс возникла разность, это значит, что при вычислении абсолютного смещения получилась ошибка в знаке. Следите за соответствием направления координатной оси и направлением перемещения.

2. Внутренние силы не влияют на решение задачи. Так, если дополнить условия задач трением качения цилиндров о призму, то

коэффициент трения в решение не войдет. А вот малейшее трение между призмой и неподвижным основанием испортит задачу настолько, что уравнение (4) применять будет уже нельзя, так как не выполняется условие (1). Для более ясного представления задачи можно считать, что призма находится на тонкой пленке воды или масла на идеально полированном столе.

## 12.2. Кинетическая энергия механической системы

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** *Выразить кинетическую энергию механической системы с одной степенью свободы через угловую скорость одного из тел системы или линейную скорость какой-либо ее точки.*

### ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Составляем кинематические графы системы. Угловые скорости тел системы и линейные скорости их центров масс выражаем через заданную скорость (§ 8.5, с. 188).

2. Вычисляем кинетические энергии отдельных тел системы. Для тела, совершающего поступательное движение, кинетическая энергия

$$T = \frac{mv^2}{2}, \quad (1)$$

где  $m$  — масса тела,  $v$  — скорость любой его точки. Напомним, что при поступательном движении скорости всех точек тела равны, а угловая скорость равна нулю. Кинетическая энергия тела, совершающего вращательное движение с угловой скоростью  $\omega$ ,

$$T = \frac{J\omega^2}{2}, \quad (2)$$

$J$  — момент инерции тела относительно оси вращения. Напомним, что у однородного цилиндра радиуса  $R$  момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс,  $J = mR^2/2$ , однородного стержня длиной  $a$ , относительно середины  $J = ma^2/12$ , а относительно конца  $J = ma^2/3$ .

Моменты инерции тела относительно параллельных осей связаны соотношением  $J = J_u + h^2m$ , где  $J_u$  — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс,  $h$  — расстояние между осями (см. также с. 273). Если известен радиус инерции  $i$  тела массы  $m$ , то его момент инерции  $J = mi^2$ .

Кинетическая энергия тела, совершающего плоское движение,

$$T = \frac{mv_u^2}{2} + \frac{J_u \omega^2}{2}, \quad (3)$$

где  $v_u$  — скорость центра масс тела,  $J_u$  — момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс. В частности, кинетическая энергия однородного цилиндра, катящегося без проскальзывания по неподвижной плоскости, вычисляется по формуле

$$T = \frac{mv_u^2}{2} + \frac{mR^2(v_u/R)^2}{4} = \frac{3mv_u^2}{4}. \quad (4)$$

3. Кинетическую энергию системы вычисляем как сумму кинетических энергий отдельных тел:

$$T = \sum_{k=1}^n T_k.$$

ПРИМЕР 1. Выразить кинетическую энергию механической системы с одной степенью свободы (рис. 126) через угловую скорость  $\dot{\varphi}$ . Система состоит из двух однородных цилиндров 1 и 2, радиусом  $R$ , соединенных двухзвенником  $ABC$ . Невесомый стержень  $AB$  жестко

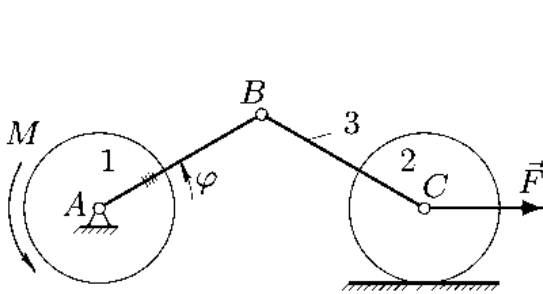


Рис. 126

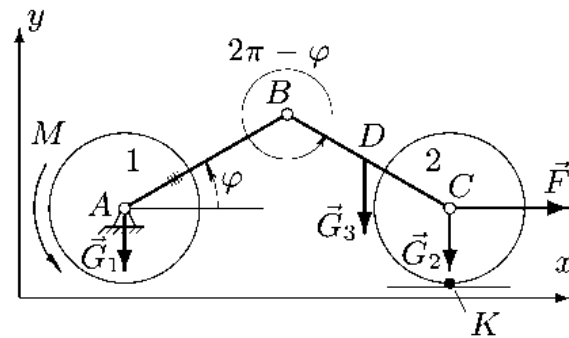


Рис. 127

соединен с цилиндром 1. Массы цилиндров 1 и 2 равны  $m_1$  и  $m_2$ , масса однородного стержня  $BC$  —  $m_3$ . Качение цилиндра происходит без проскальзывания и сопротивления. На цилиндр 1 действует момент  $M$ , к оси  $C$  приложена горизонтальная сила  $F$  \*) .

\*) Условие задачи содержит избыточные данные —  $M, F$ . Они потребуются в дальнейшем для составления нелинейного уравнения движения этой системы в § 13.5, с. 307.

## РЕШЕНИЕ

1. Составляем кинематические графы системы:

$$A \xrightarrow[\varphi]{AB} B \xrightarrow[2\pi-\varphi]{3} C; \quad C \xrightarrow[\pi-\varphi]{CD} D; \quad C \xrightarrow[3\pi/2]{2} K$$

Записываем соответствующие им кинематические уравнения в проекциях на оси  $x$  и  $y$  (рис. 127):

$$\begin{aligned} v_{Cx} &= v_{Ax} - \dot{\varphi} AB \sin \varphi - \omega_{BCz} BC \sin(2\pi - \varphi), \\ v_{Cy} &= v_{Ay} + \dot{\varphi} AB \cos \varphi + \omega_{BCz} BC \cos(2\pi - \varphi), \\ v_{Dx} &= v_{Cx} - \omega_{BCz} CD \sin(\pi - \varphi), \\ v_{Dy} &= v_{Cy} + \omega_{BCz} CD \cos(\pi - \varphi), \\ v_{Kx} &= v_{Cx} - \omega_C R \sin(3\pi/2), \\ v_{Ky} &= v_{Cy} + \omega_C R \cos(3\pi/2). \end{aligned} \quad (2)$$

Точка  $K$  является МЦС цилиндра 2. С учетом кинематических связей  $v_{Kx} = v_{Ky} = v_{Ax} = v_{Ay} = 0$ ,  $v_{Cy} = 0$  из системы (2) получаем выражения скоростей точек  $C$ ,  $D$  и угловой скорости  $\omega_{BCz}$ :

$$\omega_{BCz} = -\dot{\varphi}, \quad v_{Cx} = -2a \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad v_{Dx} = -\frac{3}{2} a \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad v_{Dy} = \frac{1}{2} a \dot{\varphi} \cos \varphi.$$

2. Вычисляем кинетическую энергию тел системы. Цилиндр 1 масса которого  $m_1$ , а момент инерции относительно оси вращения, проходящей через центр масс,  $J_1 = m_1 R^2/2$ , имеет кинетическую энергию

$$T_1 = \frac{J_1 \dot{\varphi}^2}{2} = \frac{\dot{\varphi}^2 R^2 m_1}{4}.$$

Кинетическая энергия однородного цилиндра 2, катящегося без проскальзывания по неподвижной поверхности (с. 242),

$$T_2 = \frac{3m_2 v_C^2}{4} = 3m_2 \dot{\varphi}^2 a^2 \sin^2 \varphi.$$

Кинетическая энергия плоского движения стержня  $BC$ , центр масс которого находится в точке  $D$ ,

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{m_3 v_D^2}{2} + \frac{J_{BC} \omega_{BCz}^2}{2} = \frac{m_3 (v_{Dx}^2 + v_{Dy}^2)}{2} + \frac{m_3 a^2 \omega_{BCz}^2}{24} = \\ &= m_3 \dot{\varphi}^2 a^2 (1/6 + \sin^2 \varphi). \end{aligned}$$



3. Кинетическую энергию системы вычисляем как сумму кинетических энергий отдельных тел:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \dot{\varphi}^2 (a^2(3m_2 + m_3) \sin^2 \varphi + m_1 R^2/4 + m_3 a^2/6).$$

ПРИМЕР 2. Однородный диск 1 массой  $m_1$  радиусом  $R$  шарнирно соединен в точке  $A$  с вертикально движущимся штоком 2 массой  $m_2$ .

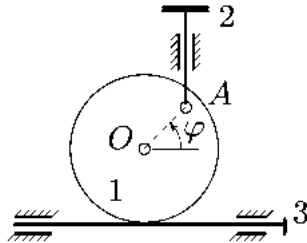


Рис. 128

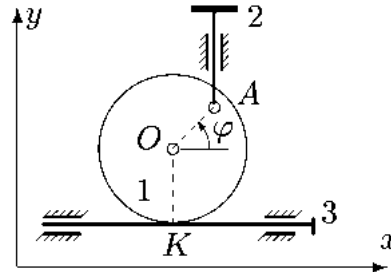


Рис. 129

Диск катится по горизонтальному штоку 3 массой  $m_3$  без проскальзывания;  $OA = a$ ;  $m_1 = m_2 = m_3 = m$ . Выразить кинетическую энергию механической системы (рис. 128) через угловую скорость  $\dot{\varphi}$ .

РЕШЕНИЕ

1. Составляем кинематические графы системы:  $K \xrightarrow{\pi/2} O \xrightarrow{\varphi} A$ ,  $K \xrightarrow{\pi/2} O$ . Записываем соответствующие им кинематические уравнения в проекциях на оси  $x$  и  $y$  (рис. 129)

$$\begin{aligned} v_{Ax} &= v_{Kx} - \dot{\varphi}R \sin(\pi/2) - \dot{\varphi}a \sin \varphi, & v_{Ox} &= v_{Kx} - \dot{\varphi}R \sin(\pi/2), \\ v_{Ay} &= v_{Ky} + \dot{\varphi}R \cos(\pi/2) + \dot{\varphi}a \cos \varphi, & v_{Oy} &= v_{Ky} + \dot{\varphi}R \cos(\pi/2). \end{aligned} \quad (3)$$

По условию задачи  $v_{Ky} = 0$  и  $v_{Ax} = 0$ . Используя эти соотношения (кинематические связи) получаем из (3)

$$v_{Ay} = \dot{\varphi}a \cos \varphi, \quad v_{Ox} = \dot{\varphi}R \sin \varphi, \quad v_{Kx} = \dot{\varphi}(R + a \sin \varphi). \quad (4)$$

2. Вычисляем кинетическую энергию тел системы. Цилиндр 1, масса которого  $m_1$ , а момент инерции относительно оси вращения  $J_1 = m_1 R^2/2$ , имеет кинетическую энергию

$$T_1 = \frac{J_1 \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_1 v_O^2}{2} = \frac{\dot{\varphi}^2 R^2 m_1}{4} + \frac{\dot{\varphi}^2 R^2 m_1 \sin^2 \varphi}{2}.$$

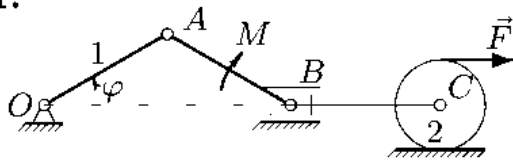
Кинетическая энергия штока 2 —  $T_2 = m_2 v_{Ay}^2/2 = (1/2)m_2 \dot{\varphi}^2 R^2 \cos^2 \varphi$ ,  
 кинетическая энергия штока 3 —  $T_3 = m_3 v_{Kx}^2/2 = m_3 \dot{\varphi}^2 (R + a \sin \varphi)^2/2$ .

3. Кинетическую энергию системы вычисляем как сумму кинетических энергий отдельных тел:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 0.5\dot{\varphi}^2 m(1.5R^2 + (R + a \sin \varphi)^2).$$

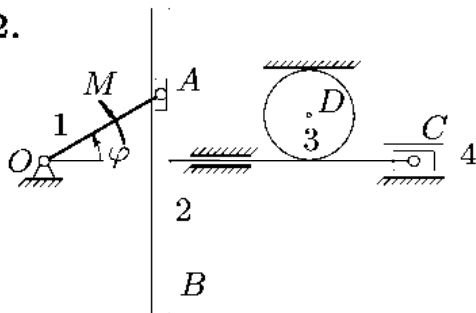
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Выразить кинетическую энергию механической системы с одной степенью свободы через угловую скорость  $\dot{\varphi}$ . Все диски (цилиндры) считать однородными. Качение происходит без проскальзывания.

1.



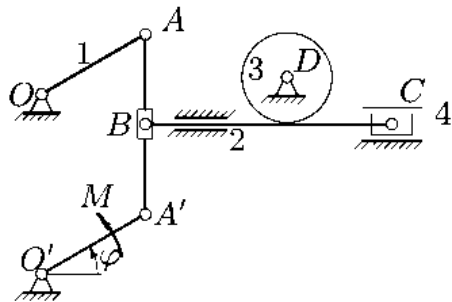
Механизм приводится в движение моментом  $M$ . Кривошип  $OA$  имеет массу  $m_1$ , диск  $C$  —  $m_2$ ;  $OA = AB = a$ , массой ползуна  $B$ , стержней  $AB$  и  $BC$  пренебречь.

2.



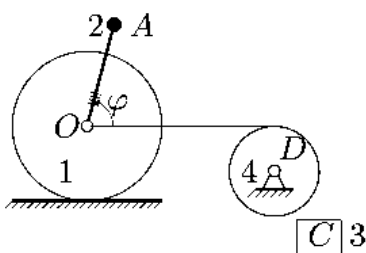
Механизм приводится в движение моментом  $M$ . Ползун  $A$  считать невесомым, кривошип  $OA$  имеет массу  $m_1$ , кулиса  $B$  —  $m_2$ , диск  $D$  —  $m_3$ , ползун  $C$  —  $m_4$ ;  $OA = a$ .

3.



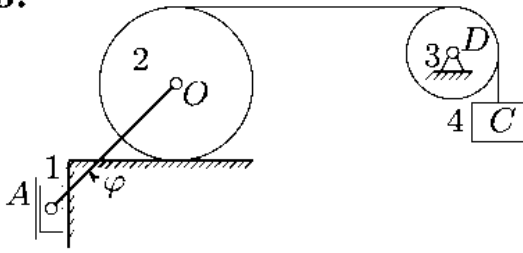
Шарнирный параллелограмм приводится в движение моментом  $M$ . Спарник  $AA'$  считать невесомым, звенья  $OA$  и  $O'A'$  имеют одинаковую массу  $m_1$ . Ползун  $B$  вместе со стержнем  $BC$  имеет массу  $m_2$ , масса диска  $D$  —  $m_3$ , ползуна  $C$  —  $m_4$ ;  $OA = a$ .

4.



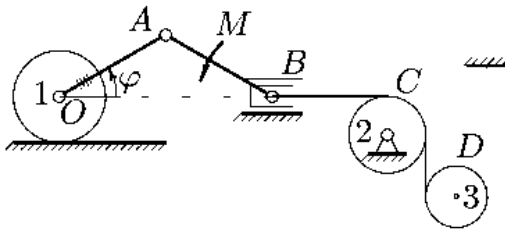
Диск  $O$  радиусом  $R$  массой  $m_1$  соединен с невесомым стержнем  $OA = a$ , на конце которого закреплен груз  $A$  массой  $m_2$ . Груз  $C$  имеет массу  $m_3$ , шкив  $D$  —  $m_4$ .

5.



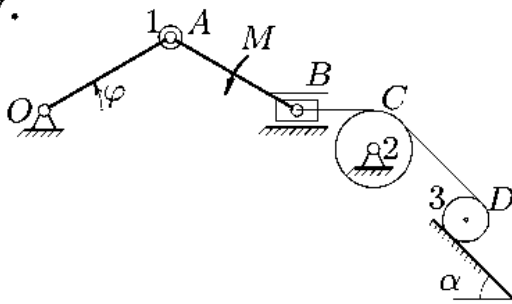
Ползун  $A$  массой  $m_1$ , скользящий по гладкой вертикальной поверхности, соединен с центром цилиндра  $O$  невесомым стержнем  $AO = a$ . Цилиндр  $O$  имеет массу  $m_2$ , диск  $D$  —  $m_3$ , груз  $C$  —  $m_4$ .

6.



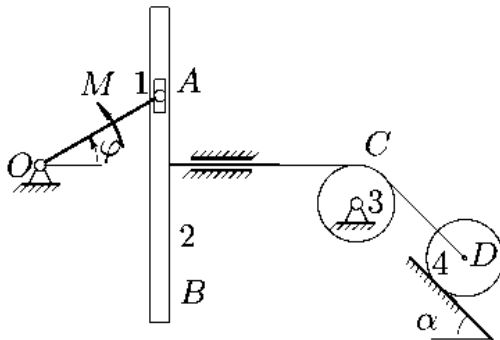
Диск  $O$  радиусом  $R$ , имеющий массу  $m_1$ , соединен с невесомым стержнем  $OA$ . Механизм приводится в движение моментом  $M$ . Массы дисков  $C$  и  $D$   $m_2$  и  $m_3$ ,  $OA = AB = a$ , массой ползуна  $B$  и стержня  $AB$  пренебречь.

7.



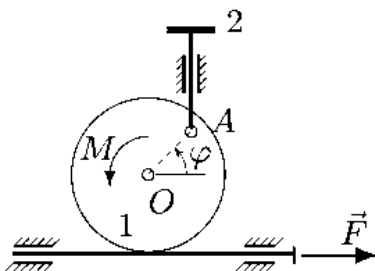
Механизм приводится в движение моментом  $M$ . Кривошип  $OA$  считать невесомым. В шарнире  $A$  сосредоточена масса  $m_1$ . Массы дисков  $C$  и  $D$  —  $m_2$  и  $m_3$ ;  $OA = AB = a$ , массой ползуна  $B$  и стержня  $AB$  пренебречь.

8.

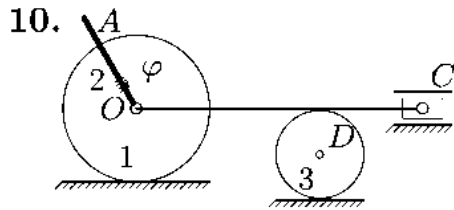


Механизм приводится в движение моментом  $M$ . Кривошип  $OA$  считать невесомым. Ползун  $A$  имеет массу  $m_1$ , кулиса  $B$  —  $m_2$ , массы дисков  $C$  и  $D$  —  $m_3$  и  $m_4$ ;  $OA = a$ .

9.



Однородный диск 1 массой  $m_1$  радиусом  $R$  шарнирно соединен в точке  $A$  с вертикально движущимся штоком 2 массой  $m_2$ . Диск без сопротивления катится по горизонтальному штоку;  $OA = a$ . К горизонтальному штоку приложена сила  $F$ , к диску — момент  $M$ .



Диск  $O$  радиусом  $R$  массой  $m_1$  соединен с однородным стержнем  $OA = a$  массой  $m_2$ . Масса диска  $D$  —  $m_3$ . Массой ползуна и стержня  $OC$  пренебречь.

Ответы

1.  $T = \dot{\varphi}^2 a^2 / 2(m_1/3 + 6m_2 \sin^2 \varphi)$ .
2.  $T = \dot{\varphi}^2 a^2 / 2(m_1/3 + (m_2 + 3m_3/8 + m_4) \sin^2 \varphi)$ .
3.  $T = \dot{\varphi}^2 a^2 / 2(2m_1/3 + (m_2 + m_3/2 + m_4) \sin^2 \varphi)$ .
4.  $T = \dot{\varphi}^2 / 2(R^2(3m_1/2 + m_2 + m_3 + m_4/2) + a^2 m_2 + 2Ra m_2 \sin \varphi)$ .
5.  $T = \dot{\varphi}^2 a^2 / 2(m_1 + (-m_1 + 3m_2/2 + 2m_3 + 4m_4) \sin^2 \varphi)$ .
6.  $T = \dot{\varphi}^2 / 2(3R^2 m_1/2 + (R + 2a \sin \varphi)^2 (m_2 + 3m_3/4)/2)$ .
7.  $T = \dot{\varphi}^2 a^2 / 2(m_1 + (2m_2 + 3m_3/2) \sin^2 \varphi)$ .
8.  $T = \dot{\varphi}^2 a^2 / 2(m_1 + (m_2 + m_3/2 + 3m_4/2) \sin^2 \varphi)$ .
9.  $T = \dot{\varphi}^2 / 2(m_1 R^2/2 + m_2 a^2 + a^2 (m_1 - m_2) \sin^2 \varphi)$ .
10.  $T = \dot{\varphi}^2 / 2(3R^2 m_1/2 + m_2 (R^2 + aR \sin \varphi + a^2/3) + 3/8 m_3 R^2)$ .

## 12.3. Теорема об изменении кинетической энергии

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** *Механическая система, находящаяся в покое, под действием внешних сил приходит в движение. За некоторое время одно из тел системы перемещается на заданное расстояние. Найти скорости, приобретенные телами системы.*

**ПЛАН РЕШЕНИЯ**

1. Выражаем кинетическую энергию системы через скорость  $v_*$  тела, перемещение  $S_*$  которого задано.

2. Вычисляем сумму работ сил, приложенных к системе, на заданном перемещении. Перемещения точек приложения сил и углы поворота тел, к которым приложены моменты, выражаем через  $S_*$ .

3. Из теоремы об изменении кинетической энергии,

$$T_1 - T_0 = \sum_j A_j^e + \sum_j A_j^i, \quad (1)$$

где  $\sum_j A_j^e$ ,  $\sum_j A_j^i$  — работа внешних и внутренних сил, определяем скорость  $v_*$ .

Пример. Механизм, состоящий из груза  $A$ , блока  $B$  и цилиндра  $C$  радиусом  $R_C$ , установлен на неподвижной призме (рис. 130). Под действием сил тяжести из состояния покоя механизм пришел в движение. Даны массы  $m_A = 50$  кг,  $m_B = 80$  кг,  $m_C = 120$  кг, радиусы  $R = 30$  см,  $r = 10$  см,  $R_C = r/2$ , угол  $\alpha = 75^\circ$ , радиус инерции блока  $i = 15$  см, коэффициент трения качения цилиндра о наклонную плоскость  $\delta = 2$  мм, коэффициент трения скольжения груза о горизонтальную поверхность  $f = 0.1$ . Трения на оси блока  $B$  нет. Нити, соединяющие блок с грузом и цилиндром, параллельны плоскостям, по которым перемещаются эти тела. Какую скорость развил груз  $A$ , переместившись на расстояние  $S_A = 1.2$  м?

### РЕШЕНИЕ

Применяем теорему об изменении кинетической энергии системы (1). Для рассматриваемой системы, состоящей из твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями, работа внутренних сил равна нулю:

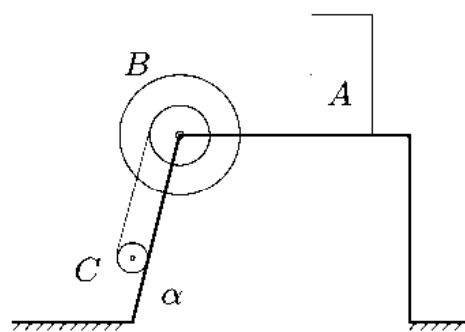


Рис. 130

$\sum_j A_j^i = 0$ . В начальном положении все элементы механизма находились в покое, скорости всех тел были равны нулю, поэтому  $T_0 = 0$ . Кинетическая энергия  $T_1$ , которую получила система после того, как груз переместился вдоль горизонтальной поверхности на расстояние  $S_A$ , зависит от искомой скорости  $v_A$ .

1. Кинетическую энергию системы, состоящую из трех слагаемых

$$T_1 = T_A + T_B + T_C,$$

выражаем через скорость  $v = v_A$ . Груз  $A$  движется поступательно, следовательно, его кинетическая энергия равна  $T_A = m_A v^2/2$ . Телу  $B$  (блок) вращается относительно неподвижной оси:  $T_B = J_B \omega_B^2/2$ . Момент инерции блока относительно оси вращения вычисляем через заданный радиус инерции  $J_B = i^2 m_B$ . Угловую скорость  $\omega_B$  необходимо выразить через искомую скорость  $v$ . Линейная скорость внешнего обода блока совпадает со скоростью груза  $v$ , так как обод связан нерастяжимой нитью с грузом. Для угловой скорости блока записываем формулу  $\omega_B = v/R$ . Выражаем  $T_B$  через скорость  $v$ :

$$T_B = \frac{m_B i^2 v^2}{2R^2}.$$

Тело  $C$  (цилиндр) совершает плоское движение, поэтому

$$T_C = \frac{m_C v_C^2}{2} + \frac{J_C \omega_C^2}{2},$$

$v_C$  — скорость центра масс цилиндра,  $J_C$  — момент инерции цилиндра относительно центральной оси:

$$J_C = \frac{m_C R_C^2}{2} = \frac{m_C (r/2)^2}{2} = \frac{m_C r^2}{8}.$$

Выражаем  $v_C$  и  $\omega_C$  через  $v$ . Точки внутреннего обода блока имеют скорость  $r\omega_B$  или, выражая  $\omega_B$  через скорость груза,  $vr/R$  (рис. 131).

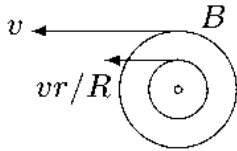


Рис. 131

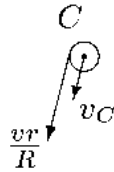


Рис. 132

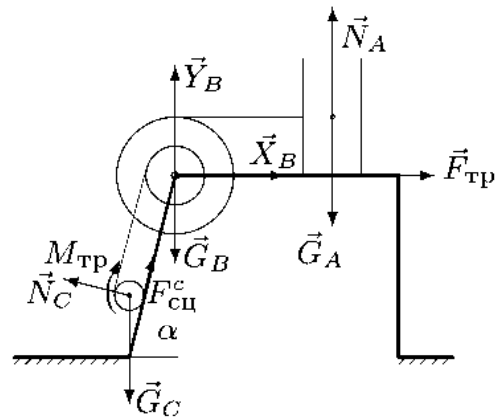


Рис. 133

Цилиндр катится без проскальзывания, поэтому точка его соприкосновения с призмой является мгновенным центром скоростей тела (рис. 132), откуда

$$\omega_C = \frac{vr}{2R_C R} = \frac{v}{R}, \quad (2)$$

$$v_C = \omega_C R_C = \frac{v r}{R 2}. \quad (3)$$

В результате находим кинетическую энергию цилиндра  $C$ :

$$T_C = \frac{m_C r^2 v^2}{8R^2} + \frac{m_C r^2 v^2}{8 \cdot 2R^2} = \frac{3}{16} m_C v^2 \frac{r^2}{R^2}.$$

Кинетическую энергию системы трех тел представляем в виде

$$T_1 = T_A + T_B + T_C = \frac{v^2}{2} \mu_{\text{прив}}, \quad (4)$$

где  $\mu_{\text{прив}} = m_A + m_B i^2/R^2 + 3/8 m_C r^2/R^2$  — приведенная масса системы.

2. Находим сумму работ внешних сил. Изобразим действующие на систему силы (рис. 133). Реакции опор  $\vec{N}_A, \vec{N}_C$  и вес  $\vec{G}_A$  работы не совершают, так как они перпендикулярны перемещениям точек их приложения. Реакции оси  $\vec{X}_B, \vec{Y}_B$  и вес  $\vec{G}_B$  приложены к неподвижным точкам, поэтому их работа также равна нулю. Аналогично, работа силы сцепления, приложенной к цилиндру  $C$  в точке касания, равна нулю. Находим сумму работ остальных сил:

$$\sum_{j=1}^3 A_j = -F_{\text{тр}} S_A + G_C S_C \sin \alpha - M_{\text{тр}} \varphi_C,$$

где  $S_C$  и  $\varphi_C$  — соответственно, смещение центра тяжести и угол поворота цилиндра  $C$ . Находим силу трения скольжения груза  $A$  и момент трения качения цилиндра  $C$ . Имеем  $F_{\text{тр}} = N_A f$ ,  $M_{\text{тр}} = N_C \delta$ , где  $N_A$  и  $N_C$  соответствующие нормальные реакции. Проекция всех сил, действующих на тело  $A$ , на нормаль к поверхности равна нулю. Отсюда,  $N_A = G_A$ . Аналогично, из равенства нулю суммы проекций на нормаль к боковой поверхности призмы всех сил, действующих на цилиндр, получаем  $N_C = G_C \cos \alpha$ . В результате

$$F_{\text{тр}} = G_A f = m_A g f, \quad M_{\text{тр}} = N_C \delta = m_C g \delta \cos \alpha.$$

Так как  $v_C = \dot{S}_C$ ,  $v = \dot{S}_A$ ,  $\omega_C = \dot{\varphi}_C$ , то интегрируя (2) и (3) при нулевых начальных условиях, получаем  $S_C = S_A r/(2R)$ ,  $\varphi_C = S_A/R$ . Суммарную работу выражаем через  $S_A$ :

$$\sum_{j=1}^3 A_j = -m_A g f S_A + m_C g \sin \alpha \frac{S_A r}{2R} - m_C g \delta \cos \alpha \frac{S_A}{R}. \quad (5)$$

3. Кинетическую энергию (4) приравняем сумме работ (5):

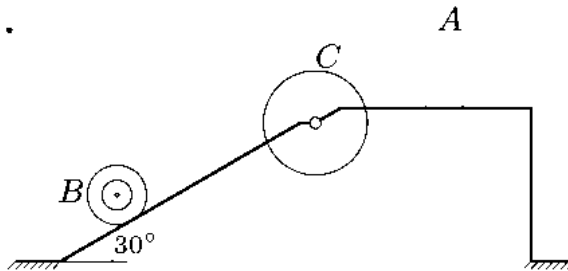
$$\frac{v^2}{2} \mu_{\text{прив}} = g S_A \left( -m_A f + m_C \sin \alpha \frac{r}{2R} - m_C \cos \alpha \frac{\delta}{R} \right).$$

Отсюда получаем:  $v = 2.10$  м/с.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Механизм, состоящий из груза  $A$ , блока  $B$  (большой радиус  $R$ , меньший  $r$ ) и цилиндра  $C$  радиусом  $R_C$ , установлен на призме  $D$ , закрепленной на плоскости. Под действием сил

тяжести из состояния покоя механизм пришел в движение. Между грузом  $A$  и призмой имеется трение (кроме тех вариантов, где груз висит), качение цилиндра (блока) происходит без проскальзывания. Коэффициент трения скольжения груза о плоскость  $f$ , коэффициент трения качения цилиндра (блока)  $\delta$ . Трения на неподвижной оси вращающегося блока (цилиндра) нет. Нити, соединяющие тела, параллельны плоскостям. Какую скорость развил груз  $A$ , переместившись на расстояние  $S = 1$  м?

1.



$$R = 16 \text{ см}, r = 8 \text{ см},$$

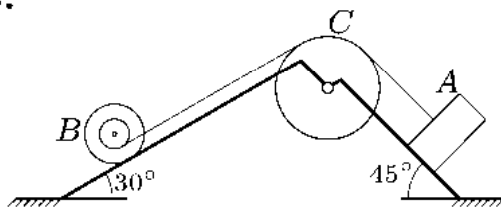
$$R_c = 28 \text{ см}, f = 0.01,$$

$$i = 13 \text{ см}, S_A = 1 \text{ м},$$

$$\delta = 0.1 \text{ мм}, m_A = 6 \text{ кг},$$

$$m_B = 3 \text{ кг}, m_C = 11 \text{ кг}.$$

2.



$$R = 24 \text{ см}, r = 12 \text{ см},$$

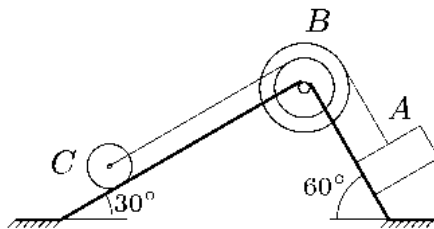
$$R_c = 42 \text{ см}, f = 0.02,$$

$$i = 19 \text{ см}, S_A = 2 \text{ м},$$

$$\delta = 0.2 \text{ мм}, m_A = 9 \text{ кг},$$

$$m_B = 6 \text{ кг}, m_C = 14 \text{ кг}.$$

3.



$$R = 48 \text{ см}, r = 32 \text{ см},$$

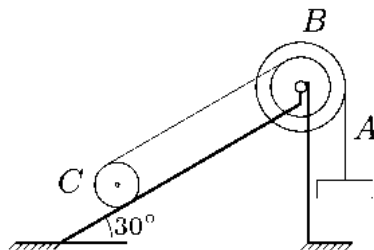
$$R_c = 24 \text{ см}, f = 0.03,$$

$$i = 41 \text{ см}, S_A = 1 \text{ м},$$

$$\delta = 0.3 \text{ мм}, m_A = 6 \text{ кг},$$

$$m_B = 3 \text{ кг}, m_C = 16 \text{ кг}.$$

4.



$$R = 60 \text{ см}, r = 40 \text{ см},$$

$$R_c = 30 \text{ см}, f = 0.04,$$

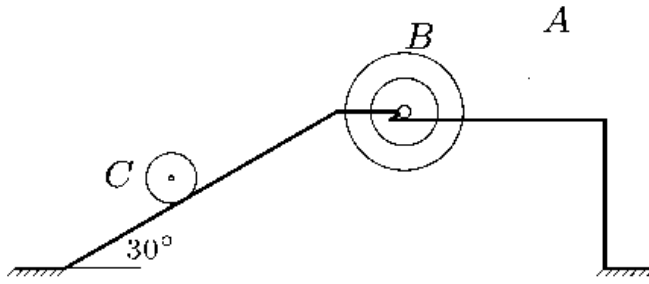
$$i = 51 \text{ см}, S_A = 2 \text{ м},$$

$$\delta = 0.4 \text{ мм}, m_A = 9 \text{ кг},$$

$$m_B = 6 \text{ кг}, m_C = 19 \text{ кг}.$$

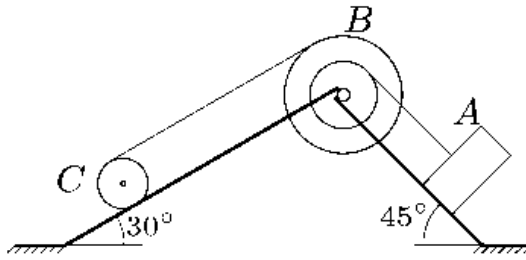


5.



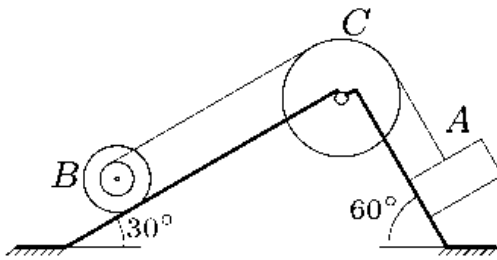
$R = 28 \text{ см}, r = 16 \text{ см},$   
 $R_c = 12 \text{ см}, f = 0.05,$   
 $i = 23 \text{ см}, S_A = 1 \text{ м},$   
 $\delta = 0.1 \text{ мм}, m_A = 6 \text{ кг},$   
 $m_B = 3 \text{ кг}, m_C = 21 \text{ кг}.$

6.



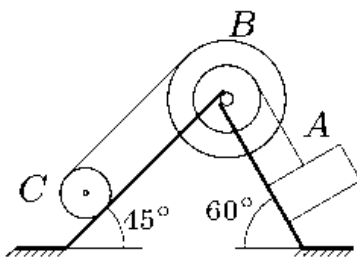
$R = 42 \text{ см}, r = 24 \text{ см},$   
 $R_c = 18 \text{ см}, f = 0.01,$   
 $i = 34 \text{ см}, S_A = 2 \text{ м},$   
 $\delta = 0.2 \text{ мм}, m_A = 9 \text{ кг},$   
 $m_B = 6 \text{ кг}, m_C = 24 \text{ кг}.$

7.



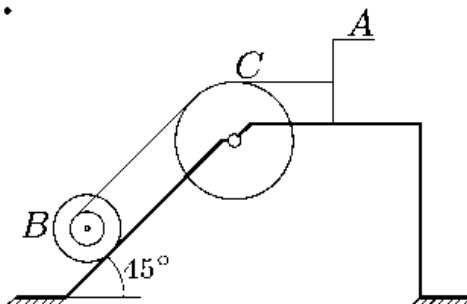
$R = 32 \text{ см}, r = 16 \text{ см},$   
 $R_c = 56 \text{ см}, f = 0.02,$   
 $i = 25 \text{ см}, S_A = 1 \text{ м},$   
 $\delta = 0.3 \text{ мм}, m_A = 6 \text{ кг},$   
 $m_B = 3 \text{ кг}, m_C = 11 \text{ кг}.$

8.



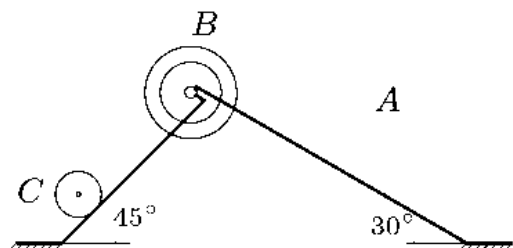
$R = 70 \text{ см}, r = 40 \text{ см},$   
 $R_c = 30 \text{ см}, f = 0.03,$   
 $i = 57 \text{ см}, S_A = 2 \text{ м},$   
 $\delta = 0.4 \text{ мм}, m_A = 12 \text{ кг},$   
 $m_B = 6 \text{ кг}, m_C = 27 \text{ кг}.$

9.



$R = 16 \text{ см}, r = 8 \text{ см},$   
 $R_c = 28 \text{ см}, f = 0.04,$   
 $i = 14 \text{ см}, S_A = 1 \text{ м},$   
 $\delta = 0.1 \text{ мм}, m_A = 9 \text{ кг},$   
 $m_B = 3 \text{ кг}, m_C = 14 \text{ кг}.$

10.



$R = 36$  см,  $r = 24$  см,  
 $R_c = 18$  см,  $f = 0.05$ ,  
 $i = 32$  см,  $S_A = 2$  м,  
 $\delta = 0.2$  мм,  $m_A = 12$  кг,  
 $m_B = 6$  кг,  $m_C = 22$  кг.

Ответы

	$\mu_{\text{прив}}$	$\sum_j A_j$	$v_A$		$\mu_{\text{прив}}$	$\sum_j A_j$	$v_A$
	кг	Нм	м/с		кг	Нм	м/с
1	13.714	9.211	1.159	6	48.604	79.504	1.159
2	55.042	4.474	0.403	7	13.647	40.560	0.403
3	18.855	0.350	0.193	8	55.192	119.894	0.193
4	16.502	114.307	3.722	9	18.354	10.333	3.722
5	108.668	177.056	1.805	10	20.407	5.674	1.805

## 12.4. Теорема о моменте количества движения системы

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** Горизонтальная платформа, на которой расположено  $N$  материальных точек, свободно вращается вокруг вертикальной оси. Как изменится угловая скорость платформы, если в некоторый момент времени точки начнут перемещаться по платформе вокруг оси вращения с заданными скоростями? Трением пренебречь.

**ПЛАН РЕШЕНИЯ**

По условию задачи моменты  $M_{zi}^c$  всех внешних сил относительно оси вращения равен нулю (силы тяжести параллельны вертикальной оси, а реакции подшипников пересекают ось). Поэтому из теоремы об изменении момента количества движения системы, записанной в проекции на ось вращения  $z$ ,

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_{zi}^c$$

следует закон сохранения момента количества движения системы

$$L_{z0} = L_{z1}, \quad (1)$$

где  $L_{z0}$  и  $L_{z1}$  — проекции момента количества движения системы на ось  $z$  до и после относительного движения точек.

1. Вычисляем момент количества движения системы, для случая неподвижных относительно платформы точек:

$$L_{z0} = (J_z + \sum_{i=1}^N m_i R_i^2) \omega_{z0}, \quad (2)$$

где  $J_z$  — момент инерции платформы относительно оси  $z$ , совпадающей с осью вращения,  $\omega_{z0}$  — проекция начальной угловой скорости на ось  $z$ ;  $m_i$ ,  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  — массы точек и радиусы окружностей, на которых они расположены.

2. Вычисляем момент количества движения системы, для случая, когда точки начали двигаться относительно платформы со скоростями  $v_i$ :

$$L_{z1} = J_z \omega_{z1} + \sum_{i=1}^N (m_i R_i (v_i^r + \omega_{z1} R_i)), \quad (3)$$

где  $\omega_{z1}$  — угловая скорость, которую получила платформа.

3. Из уравнения (1) находим угловую скорость  $\omega_{z1}$ .

ПРИМЕР \*) . Круглая горизонтальная платформа вращается без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр масс с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$ ; при этом на платформе стоят четыре человека: два — на краю платформы, а два на расстояниях от оси вращения, равных половине радиуса платформы (рис. 134).

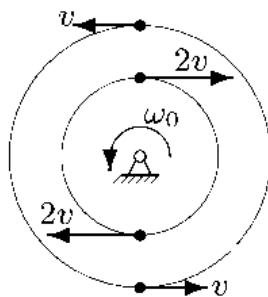


Рис. 134

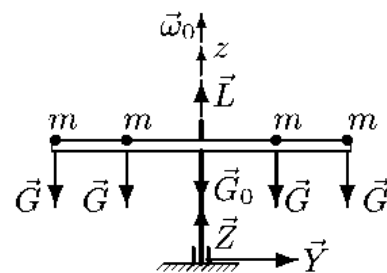


Рис. 135

Как изменится угловая скорость платформы, если люди, стоящие на краю, будут двигаться по окружности в сторону вращения с относительной скоростью  $v$ , а люди, стоящие на расстоянии половины

\*) Задача 37.53 из сборника задач И.В. Мещерского [14].

радиуса от оси вращения, будут двигаться по окружности в противоположную сторону с относительной скоростью  $2v$ ? Людей считать материальными точками одинаковой массы, а платформу — однородным диском.

#### РЕШЕНИЕ

На систему, состоящую из платформы и четырех человек, действуют внешние силы. Ось  $z$  направим по оси вращения. Моменты сил тяжести людей  $\vec{G}$ , платформы  $\vec{G}_0$  и реакций подшипника (реакция  $\vec{X}$  перпендикулярна плоскости чертежа и на рис. 135 не обозначена) относительно оси  $z$  равны нулю (рис. 135). Используем уравнение сохранения момента количества движения (1).

1. Вычисляем момент количества движения системы, когда люди стоят неподвижно на платформе:

$$L_{z0} = (J_z + 2mR^2 + 2m(R/2)^2)\omega_{z0} = (J_z + 2.5mR^2)\omega_{z0},$$

где  $J_z$  — момент инерции платформы,  $m$  — масса каждого человека,  $R$  — радиус платформы.

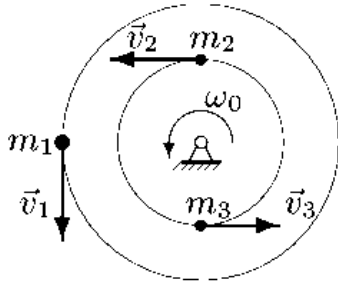
2. Вычисляем момент количества движения системы после того, как люди начали двигаться относительно платформы. У двух человек на внешнем ободе относительные скорости  $v$  и переносные скорости  $\omega_{z1}R$  суммируются,  $v + \omega_{z1}R$ , и момент количества движения вычисляется в виде произведения величины количества движения  $m(v + \omega_{z1}R)$  на плечо  $R$ . У людей на внутреннем ободе переносная скорость меньше в два раза,  $\omega_{z1}R/2$ , направлена в сторону вращения диска. Относительная же скорость  $2v$  направлена в противоположную сторону, поэтому она берется с минусом. В итоге,

$$L_{z1} = J_z\omega_{z1} + 2mR(v + \omega_{z1}R) + 2mR/2(\omega_{z1}R/2 - 2v) = (J_z + 2.5mR^2)\omega_{z1}.$$

3. Из равенства  $L_{z0} = L_{z1}$  следует, что  $\omega_{z1} = \omega_{z0}$ , т.е. угловая скорость вращения платформы не изменилась.

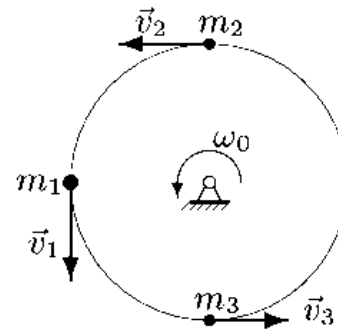
*УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Однородная горизонтальная платформа радиусом  $R = 1$  м и массой  $m_0 = 20$  кг, на которой расположены три материальные точки, свободно вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega_{z0} = 2$  рад/с. Найти угловую скорость платформы после того, как точки начнут перемещаться по платформе со скоростями  $v_i$ ,  $i = 1..3$  по окружностям вокруг оси вращения. Массы даны в кг, относительные скорости — в м/с. Радиус меньшей окружности  $r = 0.7$  м, радиус большей совпадает с радиусом платформы. Трением пренебречь.*

1.



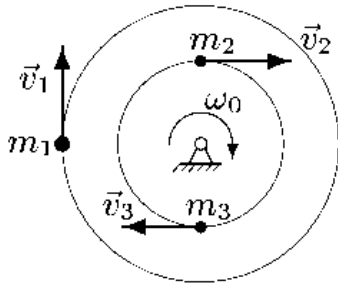
$$m_1 = 19, m_2 = 18, m_3 = 17, \\ v_1 = 1, v_2 = 2, v_3 = 3.$$

2.



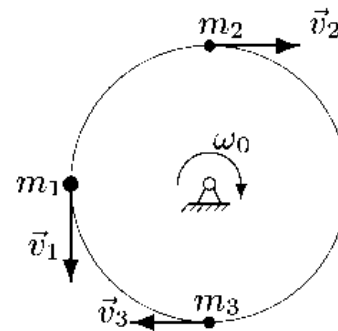
$$m_1 = 18, m_2 = 16, m_3 = 14, \\ v_1 = 2, v_2 = 3, v_3 = 4.$$

3.



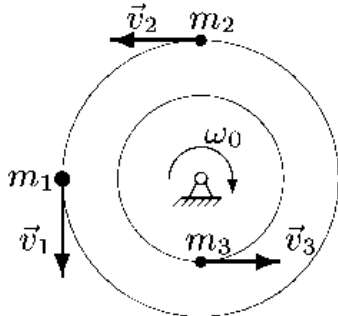
$$m_1 = 17, m_2 = 14, m_3 = 11, \\ v_1 = 3, v_2 = 5, v_3 = 6.$$

4.



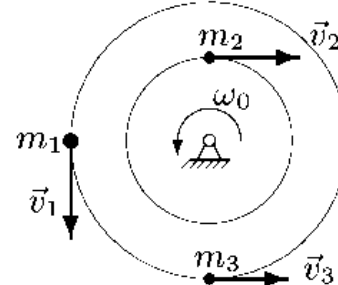
$$m_1 = 19, m_2 = 15, m_3 = 11, \\ v_1 = 4, v_2 = 6, v_3 = 7.$$

5.



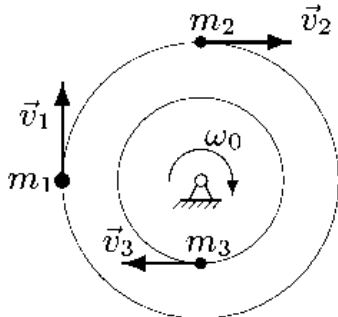
$$m_1 = 19, m_2 = 17, m_3 = 16, \\ v_1 = 2, v_2 = 4, v_3 = 5.$$

6.



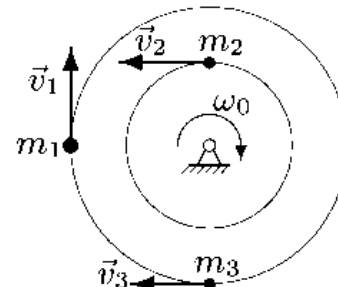
$$m_1 = 18, m_2 = 15, m_3 = 13, \\ v_1 = 3, v_2 = 4, v_3 = 5.$$

7.

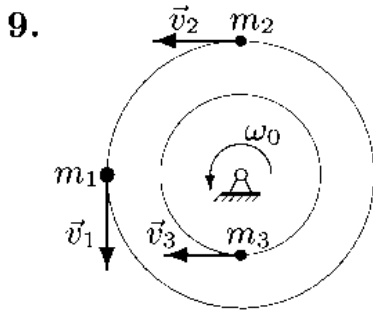


$$m_1 = 17, m_2 = 13, m_3 = 10, \\ v_1 = 4, v_2 = 6, v_3 = 7.$$

8.

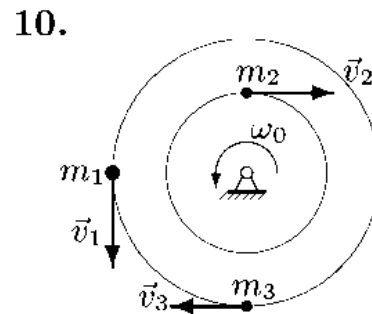


$$m_1 = 16, m_2 = 15, m_3 = 11, \\ v_1 = 1, v_2 = 3, v_3 = 4.$$



$$m_1 = 19, m_2 = 17, m_3 = 14,$$

$$v_1 = 2, v_2 = 3, v_3 = 4.$$



$$m_1 = 18, m_2 = 15, m_3 = 11,$$

$$v_1 = 3, v_2 = 4, v_3 = 5.$$

- Ответы. 1.  $\omega_z = 0.269$  рад/с. 2.  $\omega_z = -0.414$  рад/с.  
 3.  $\omega_z = 1.725$  рад/с. 4.  $\omega_z = -0.345$  рад/с. 5.  $\omega_z = -5.009$  рад/с.  
 6.  $\omega_z = 0.407$  рад/с. 7.  $\omega_z = 2.343$  рад/с. 8.  $\omega_z = -1.357$  рад/с.  
 9.  $\omega_z = 1.058$  рад/с. 10.  $\omega_z = 2.928$  рад/с.

## 12.5. Динамический расчет механизма с неизвестным параметром

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** Механическая система с неизвестным параметром под действием внешних сил приходит в движение из состояния покоя. За некоторое время одно из тел системы перемещается на заданное расстояние и приобретает известную скорость. Найти неизвестный параметр системы и рассчитать движение системы в измененных условиях.

### ПЛАН РЕШЕНИЯ

Постановка задачи по сути представляет собой простой вариант практически важной проблемы идентификации параметров механизма по наблюдаемым характеристикам его движения. Для решения задачи применим теорему об изменении кинетической энергии.

1. Выражаем кинетическую энергию каждого тела системы через известную скорость  $v_0$ :  $T_k = \mu_k v_0^2 / 2$ , где  $\mu_k$  — приведенная масса  $k$ -го тела. Вычисляем суммарную приведенную массу:  $\mu_{\text{прив}} = \sum_k \mu_k$ .

2. Записываем теорему об изменении кинетической энергии:

$$T_1 - T_0 = \sum_j A_j^c + \sum_j A_j^i, \quad (1)$$

Для неизменяемых систем (твердые тела, нерастяжимые нити) внутренние силы работу не совершают:  $\sum_j A_j^i = 0$ . В начальном состоянии система находилась в покое  $T_0 = 0$ . Вычисляем работы внешних сил и записываем (1) в форме

$$\mu_{\text{прив}} \frac{v_0^2}{2} = \sum_j A_j^e. \quad (2)$$

Пусть неизвестная характеристика системы содержится в выражении для работы <sup>\*)</sup>.

3. Решая уравнение (2), определяем неизвестный параметр.

4. Рассчитываем систему в новых условиях. В соответствии с ними вычисляем измененное значение работы  $\sum_j A_{j*}^i$ . Искомую скорость определяем из равенства

$$\mu_{\text{прив}} \frac{v_*^2}{2} = \sum_j A_{j*}^e.$$

**ПРИМЕР.** Механическая система состоит из трех тел, соединенных нитью. Блок  $A$  внутренним ободом катится без проскальзывания по наклонной плоскости, шкив  $B$  (однородный цилиндр) вращается вокруг неподвижной оси. Груз  $D$  закреплен пружиной жесткости  $c$  (рис. 136).

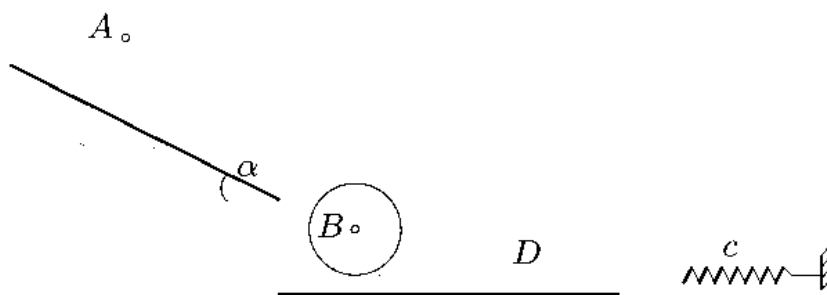


Рис. 136

В начальном положении механизм находится в состоянии покоя, а пружина не напряжена. Переместившись вниз вдоль наклонной плоскости на расстояние  $S_A = 3$  м, блок  $A$  приобретает скорость 2.5 м/с.

<sup>\*)</sup> Аналогично решается задача, когда неизвестная характеристика, например масса, содержится в кинетической энергии.

Определить коэффициент трения качения блока  $A$  о наклонную плоскость. Учесть момент трения на оси цилиндра  $M_{\text{тр.}B} = 4$  Нм, и трение скольжения груза  $D$  о горизонтальную плоскость с коэффициентом  $f_{\text{тр}} = 0.1$ . Даны радиусы  $r_B = 20$  см,  $r_A = 30$  см,  $R_A = 40$  см, радиус инерции блока  $i_A = 24$  см. Известны массы тел  $m_A = 10$  кг,  $m_B = 90$  кг,  $m_D = 36$  кг, угол  $\alpha = 30^\circ$  и жесткость пружины  $c = 20$  Н/м.

Чему будет равна скорость блока  $A$  на перемещении  $S_A$ , если коэффициент трения качения увеличить в 3 раза?

### РЕШЕНИЕ

1. Выражаем кинетическую энергию каждого тела системы через известную скорость  $v_A$  центра блока  $A$ . Блок  $A$  совершает плоское движение. Кинетическая энергия блока  $A$

$$T_A = \frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{J_A \omega_A^2}{2},$$

Здесь  $J_A = m_A i_A^2$  — момент инерции блока относительно центра масс,  $i_A$  — радиус инерции блока. Выражаем угловую скорость блока  $\omega_A$  через скорость центра  $v_A$ . Блок катится без проскальзывания, следовательно, его мгновенный центр скоростей находится в точке касания внутреннего (меньшего) радиуса с плоскостью (рис. 137). Таким образом:  $\omega_A = v_A / r_A$ .

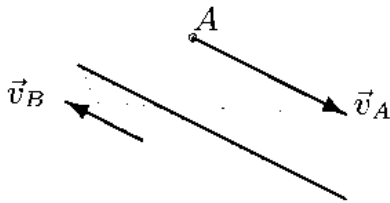


Рис. 137

Кинетическая энергия блока  $A$  имеет вид

$$T_A = \frac{m_A v_A^2}{2} \left( 1 + \frac{i_A^2}{r_A^2} \right).$$

Приведенная масса (коэффициент при  $v_A^2/2$ )

$$\mu_A = m_A \left( 1 + \frac{i_A^2}{r_A^2} \right) = 10 \left( 1 + \frac{24^2}{30^2} \right) = 16.4 \text{ кг.}$$

Цилиндр  $B$  совершает вращательное движение вокруг своей оси,  $T_B = J_B \omega_B^2 / 2$ , где  $J_B = m_B R_B^2 / 2$ . Угловую скорость цилиндра  $B$  выражаем через скорость точки обода:  $\omega_B = v_B / R_B$ . Скорость обода  $v_B$  цилиндра  $B$  совпадает со скоростью внешнего обода блока  $A$ , так как



они связаны нерастяжимой нитью. Расстояние от внешнего обода  $A$  до МЦС блока равно  $R_A - r_A$  (рис. 137). Отсюда получаем выражение для скорости обода:

$$v_B = \omega_A(R_A - r_A) = v_A \frac{R_A - r_A}{r_A} = v_A \frac{10}{30} = \frac{v_A}{3}, \quad (3)$$

и угловой скорости цилиндра:

$$\omega_B = \frac{v_A}{3R_B}. \quad (4)$$

Получаем выражение для кинетической энергии:

$$T_B = \frac{m_B R_B^2 v_A^2}{4 \cdot 9 R_B^2} = \frac{m_B v_A^2}{4 \cdot 9} = \mu_B \frac{v_A^2}{2} = 5 \frac{v_A^2}{2},$$

где приведенная масса  $\mu_B = 5$  кг.

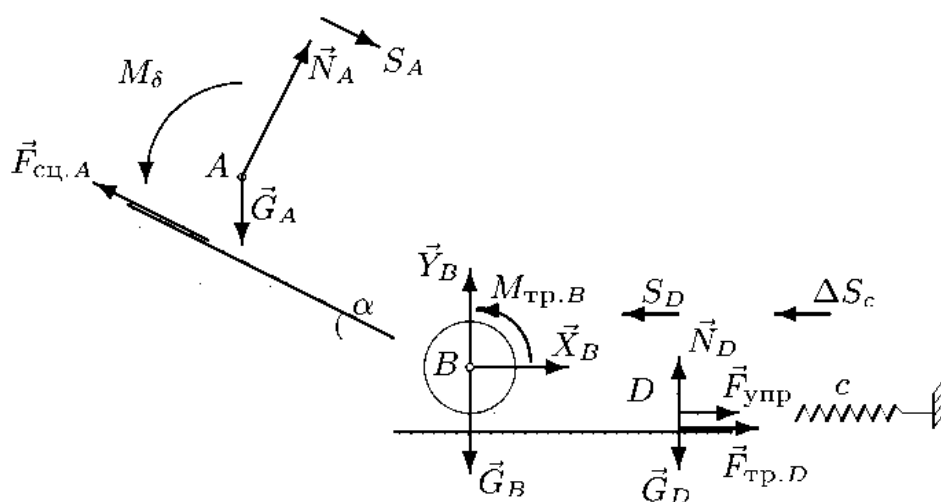


Рис. 138

Груз  $D$  движется поступательно  $T_D = m_D v_D^2 / 2$ . Скорость поступательного движения груза совпадет с линейной скоростью точек обода цилиндра  $B$ :  $v_D = v_B = v_A / 3$ . Кинетическая энергия груза  $D$  имеет вид

$$T_D = \frac{m_D v_A^2}{9 \cdot 2} = 4 \frac{v_A^2}{2}.$$

Приведенная масса  $\mu_D = 4$  кг.

Приведенная масса механизма:  $\mu_{\text{прив}} = \mu_A + \mu_B + \mu_D = 25.4$  кг.

2. Записываем теорему об изменении кинетической энергии

$$\mu_{\text{прив}} \frac{v_A^2}{2} = \sum_j A_j^e. \quad (5)$$

Вычисляем работу внешних сил (рис. 138). Реакции опор  $N_A$  и  $N_D$  перпендикулярны смещениям точек их приложения и их работы равны нулю. Так как блок катится без проскальзывания, то сила сцепления  $F_{\text{сц.}A}$  приложена к МЦС блока и ее работа также равна нулю. Аналогично не совершают работу реакции  $X_B, Y_B$ , приложенные к неподвижной точке. Работа силы тяжести блока  $A$ , катящегося вниз

$$A_{G_A} = m_A g S_A \sin \alpha = 10 \cdot 9.81 \cdot 3 \cdot 0.5 = 147.15 \text{ Дж.}$$

Работа момента сил трения на оси  $B$

$$A_B = -M_{\text{тр.}B} \varphi_B.$$

Угол поворота  $\varphi_B$  цилиндра  $B$  вокруг оси (в радианах) выражаем через  $S_A$ , интегрируя (4) при нулевых начальных условиях. Получаем  $\varphi_B = S_A / (3R_B) = 5$ , откуда  $A_B = -4 \cdot 5 = -20$  Дж. Работа силы трения скольжения  $F_{\text{тр.}D}$  груза  $D$  на перемещении  $S_D$

$$A_D = -F_{\text{тр.}D} S_D = -m_D g f_{\text{тр}} S_A / 3 = -35.32 \text{ Дж,}$$

где перемещение  $S_D = S_A / 3$  получаем, интегрируя (3) при нулевых начальных условиях. Работа силы упругости пружины

$$A_{\text{упр}} = -\frac{c \Delta S_c^2}{2},$$

где  $\Delta S_c$  — удлинение пружины, равное перемещению груза  $D$ ,  $\Delta S_c = S_A / 3 = 1$  м. Вычисляем:  $A_{\text{упр}} = -20 \cdot 1/2 = -10$  Дж.

3. Определяем коэффициент трения качения  $\delta$  блока  $A$ . Согласно (5),

$$\mu_{\text{прив}} \frac{v_A^2}{2} = A_{G_A} + A_B + A_D + A_{\text{упр}} + A_\delta,$$

где  $A_\delta = -M_\delta \varphi_A$  — работа момента сил трения качения  $M_\delta$  на угле поворота  $\varphi_A$  блока  $A$ . При  $v_A = 2.5$  м/с находим

$$A_\delta = \mu_{\text{прив}} \frac{v_A^2}{2} - A_{G_A} - A_B - A_D - A_{\text{упр}} = -2.45 \text{ Дж.}$$

Момент силы трения качения,  $M_\delta = N_A \delta$ , зависит от свойств соприкасающихся тел ( $\delta$ ) и от реакции  $N_A$ , которую можно найти из уравнения проекции на нормаль к наклонной плоскости  $N_A = m_A g \cos \alpha$ . Угол поворота  $\varphi_A = S_A / r_A = 3 / 0.3 = 10$ . В результате получаем

$$m_A g \delta \varphi_A \cos \alpha = 10 \cdot 9.81 \delta \cdot 10 \cdot 0.866 = 2.45,$$

откуда  $\delta = 2.45 / 849.57 = 2.88 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2.88 \text{ мм}$ .

4. Определяем скорость центра блока  $A$  в измененных условиях, при  $\delta_* = 3\delta$ . Вычисляем работу трения качения при  $\delta_* = 3 \cdot 2.88 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ :

$$A_{\delta_*} = -M_{\delta_*} \varphi_A = -m_A g \varphi_A \delta_* \cos \alpha = 3A_\delta = -7.35 \text{ Дж}.$$

Из теоремы об изменении кинетической энергии находим соответствующую скорость

$$\mu_{\text{прив}} \frac{v_*^2}{2} = A_{G_A} + A_B + A_D + A_{\text{упр}} + A_{\delta_*} = 74.47.$$

Вычисляем ответ:

$$v_* = \sqrt{\frac{2 \cdot 74.47}{25.4}} = 2.42 \text{ м/с}.$$

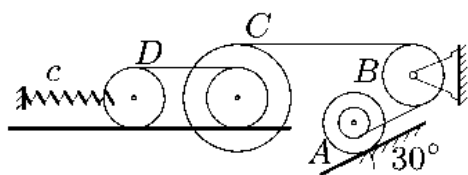
**ЗАМЕЧАНИЕ.** Для решения задачи можно также использовать методы аналитической механики: общее уравнение динамики (§ 13.2), уравнение Лагранжа 2-го рода (§ 13.4) и метод графов для определения скоростей (§ 8.5).

**УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.** *Механическая система, состоящая из четырех тел  $A, B, C, D$  и пружины, под действием внешних сил приходит в движение из состояния покоя. Один из параметров системы (жесткость пружины  $c$  или момент трения  $M_{\text{тр},B}$  на оси  $B$ ) неизвестен. Учитывается трение скольжения с коэффициентом  $f_{\text{тр}}$  и трение качения с коэффициентом  $\delta_{\text{тр}}$ . Заданы радиусы цилиндра и блока. Радиусы инерции даны для блоков, цилиндры считать однородными.*

*Тело  $A$  (груз, цилиндр или блок) опускается вниз или вдоль наклонной плоскости на расстояние  $S_A$  и приобретает скорость  $v_A$ .*

*Чему будет равна скорость  $v_A$ , если этот же процесс произойдет для измененного механизма? Условие изменения оговорено в тексте задач.*

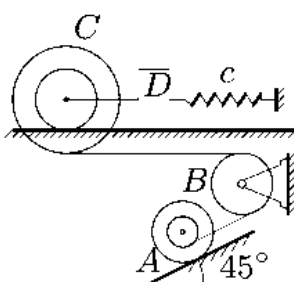
5.



$$\begin{aligned}
 S_A &= 1 \text{ м}, v_A = 136 \text{ см/с}, \\
 m_A &= 2 \text{ кг}, m_B = 120 \text{ кг}, \\
 m_C &= 120 \text{ кг}, m_D = 30 \text{ кг}, \\
 R_B &= 17 \text{ см}, r_c = 16 \text{ см}, \\
 R_c &= 28 \text{ см}, i_c = 20 \text{ см}, \\
 r_D &= 16 \text{ см}, r_A = 16 \text{ см}, \\
 R_A &= 18 \text{ см}, i_A = 17 \text{ см}, \\
 \delta_{\text{тр}} &= 6 \text{ мм}, c = 410 \text{ Н/м}.
 \end{aligned}$$

Условие: момент трения на оси В уменьшить в 8 раз.

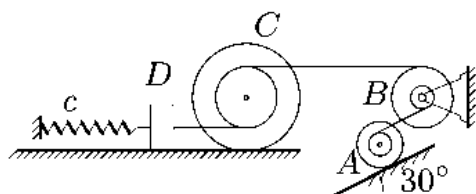
6.



$$\begin{aligned}
 S_A &= 2 \text{ м}, v_A = 85 \text{ см/с}, \\
 m_A &= 7 \text{ кг}, m_B = 300 \text{ кг}, \\
 m_C &= 200 \text{ кг}, m_D = 90 \text{ кг}, \\
 R_B &= 25 \text{ см}, r_c = 24 \text{ см}, \\
 R_c &= 42 \text{ см}, i_c = 28 \text{ см}, \\
 r_A &= 22 \text{ см}, R_A = 25 \text{ см}, \\
 i_A &= 23 \text{ см}, \delta_{\text{тр}} = 9 \text{ мм}, \\
 M_{\text{тр.В}} &= 38 \text{ Н} \cdot \text{м}, f_{\text{тр}} = 0.06.
 \end{aligned}$$

Условие: пружину заменить на четыре такие же, соединенные последовательно.

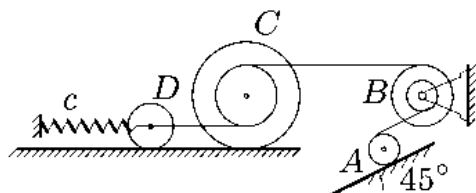
7.



$$\begin{aligned}
 S_A &= 1 \text{ м}, v_A = 49 \text{ см/с}, \\
 m_A &= 7 \text{ кг}, m_B = 4 \text{ кг}, \\
 m_C &= 3 \text{ кг}, m_D = 15 \text{ кг}, \\
 R_B &= 25 \text{ см}, r_B = 23 \text{ см}, \\
 i_B &= 24 \text{ см}, r_c = 24 \text{ см}, \\
 R_c &= 42 \text{ см}, i_c = 28 \text{ см}, \\
 r_A &= 23 \text{ см}, R_A = 25 \text{ см}, \\
 i_A &= 24 \text{ см}, \delta_{\text{тр}} = 8 \text{ мм}, \\
 c &= 5 \text{ Н/м}, f_{\text{тр}} = 0.01.
 \end{aligned}$$

Условие: момент трения на оси В уменьшить в 9 раз.

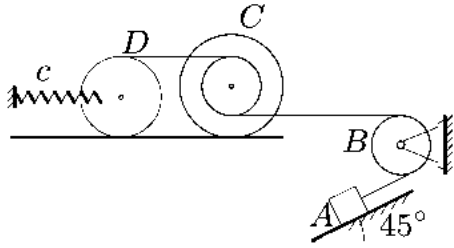
8.



$$\begin{aligned}
 S_A &= 1 \text{ м}, v_A = 23 \text{ см/с}, \\
 m_A &= 37 \text{ кг}, m_B = 16 \text{ кг}, \\
 m_C &= 12 \text{ кг}, m_D = 5 \text{ кг}, \\
 R_B &= 9 \text{ см}, r_B = 7 \text{ см}, \\
 i_B &= 8 \text{ см}, r_c = 8 \text{ см}, \\
 R_c &= 14 \text{ см}, i_c = 12 \text{ см}, \\
 r_D &= 6 \text{ см}, r_A = 7 \text{ см}, \\
 \delta_{\text{тр}} &= 4 \text{ мм}, c = 1 \text{ Н/м}.
 \end{aligned}$$

Условие: убрать пружину.

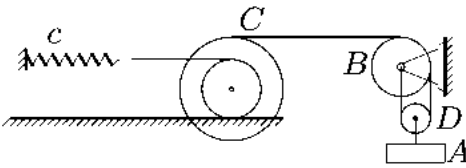
9.



$$\begin{aligned}
 S_A &= 1 \text{ м}, v_A = 8 \text{ см/с}, \\
 m_A &= 25 \text{ кг}, m_B = 40 \text{ кг}, \\
 m_C &= 120 \text{ кг}, m_D = 120 \text{ кг}, \\
 R_B &= 17 \text{ см}, r_c = 16 \text{ см}, \\
 R_c &= 28 \text{ см}, i_c = 20 \text{ см}, \\
 r_D &= 22 \text{ см}, \delta_{\text{тр}} = 6 \text{ мм}, \\
 c &= 4 \text{ Н/м}, f_{\text{тр}} = 0.05.
 \end{aligned}$$

Условие: момент трения на оси В уменьшить в 8 раз.

10.



$$\begin{aligned}
 S_A &= 1 \text{ м}, v_A = 293 \text{ см/с}, \\
 m_A &= 8 \text{ кг}, m_B = 4 \text{ кг}, \\
 m_C &= 3 \text{ кг}, m_D = 10 \text{ кг}, \\
 R_B &= 17 \text{ см}, r_c = 16 \text{ см}, \\
 R_c &= 28 \text{ см}, i_c = 20 \text{ см}, \\
 r_D &= R_B/2, \delta_{\text{тр}} = 6 \text{ мм}, \\
 c &= 2 \text{ Н/м}.
 \end{aligned}$$

Условие: момент трения на оси В уменьшить в 8 раз.

Ответы

	$M_{\text{тр.В}}$	$c$	$\mu_A$	$\mu_B$	$\mu_C$	$\mu_D$	$v_A$
	Нм	Н/м	кг				см/с
1	4.000	3.001	8.000	8.711	29.756	126.024	44.013
2	4.000	1.013	55.500	41.796	229.224	88.163	33.917
3	1.948	4.000	12.000	50.000	49.954	15.868	46.611
4	0.989	13.000	18.000	30.000	51.570	5.950	55.251
5	3.003	410.000	3.784	0.741	0.502	0.073	158.842
6	38.000	117.059	12.925	2.160	12.089	2.304	101.365
7	2.994	5.000	13.451	16.056	7.643	4.859	113.927
8	8.004	1.000	55.500	83.592	55.740	3.689	23.532
9	5.961	4.000	25.000	20.000	986.667	605.000	20.951
10	1.967	2.000	8.000	8.000	4.066	15.000	312.087

В таблице даны момент трения на оси В, жесткость пружины, приведенные массы тел и искомая скорость.

**Предупреждение типичных ошибок**

1. В условии задачи имеются величины, выраженные в м, см, мм. Рекомендуем все величины перевести в м.

2. Сила трения вычисляется по формуле  $F_{\text{тр}} = Nf$ . Не всегда  $N = mg$ . Реакцию  $N$  надо определять из уравнения проекций сил, действующих на тело, на нормаль к поверхности.

## 12.6. Плоское движение системы

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** *Механическая система с одной степенью свободы состоит из тел, совершающих плоское движение. Составить и проинтегрировать дифференциальные уравнения движения системы.*

### ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Разбиваем систему на отдельные тела. Связи заменяем их реакциями.

2. Для каждого тела выбираем систему координат, в которой записываем дифференциальные уравнения движения тела.

3. Записываем кинематические соотношения между скоростями и угловыми скоростями отдельных тел. Дифференцируя эти соотношения, находим связь соответствующих ускорений.

4. Преобразуем и при необходимости интегрируем систему дифференциальных уравнений движения тел и кинематические соотношения.

**ПРИМЕР <sup>\*)</sup>.** К барабану ворота радиуса  $r_1$  и массы  $m_1$  приложен постоянный вращающий момент  $M$  (рис. 139). К концу троса, намотанного на барабан, прикреплена ось  $C$  колеса массой  $m_2$ . Колесо катится без скольжения вверх по наклонной плоскости, расположенной под углом  $\alpha$  к горизонту. Какую угловую скорость приобретет барабан, сделав из состояния покоя  $n$  оборотов? Барабан и колесо считать однородными круглыми цилиндрами. Массой троса и трением пренебречь.

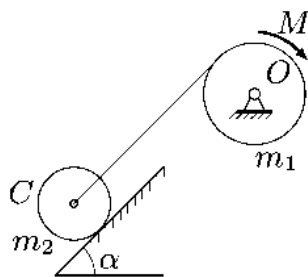


Рис. 139

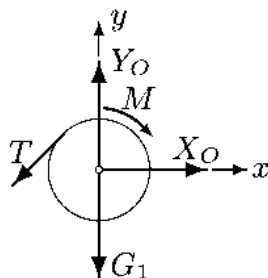


Рис. 140

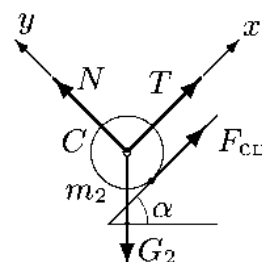


Рис. 141

### РЕШЕНИЕ

1. Разбиваем систему на два отдельных тела (рис. 140, 141). Связи заменяем их реакциями. Действие троса заменяем силой его натяжения  $T$ , которую прикладываем к барабану и колесу во взаимно

<sup>\*)</sup> Задача 38.40 из сборника задач И.В. Мещерского [14]

противоположных направлениях. Действие оси, на которой вращается барабан ворота, заменяем реакциями  $X_0$ ,  $Y_0$ . К катящемуся без проскальзывания колесу  $C$  прикладываем силу сцепления  $F_{\text{сц}}$  и нормальную реакцию опоры  $N$ . Силу сцепления колеса с наклонной плоскостью  $F_{\text{сц}}$  направляем условно вверх (истинное направление будет известно в результате решения задачи). Прикладываем внешние силы: веса  $G_1 = m_1 g$  и  $G_2 = m_2 g$ .

2. Записываем уравнения вращательного движения барабана массой  $m_1$  в выбранной системе координат

$$\begin{aligned} 0 &= X_0 - T \cos \alpha, \\ 0 &= Y_0 - G_1 - T \sin \alpha, \\ J_1 \ddot{\varphi}_1 &= -M + T r_1. \end{aligned} \quad (1)$$

Центр масс барабана неподвижен, поэтому первые два уравнения движения имеют форму уравнений статики.

Рассматриваем движение колеса массой  $m_2$  (рис. 141). Система уравнений движения колеса имеет вид

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{x}_2 &= T + F_{\text{сц}} - G_2 \sin \alpha, \\ 0 &= N - G_2 \cos \alpha, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 &= F_{\text{сц}} R. \end{aligned} \quad (2)$$

Во втором уравнении мы положили  $\ddot{y}_2 = 0$ .

3. Кинематические связи системы

$$\begin{aligned} -\dot{\varphi}_1 r_1 &= \dot{x}_2, \\ -\dot{\varphi}_2 R &= \dot{x}_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Знак минус возникает из-за того, что положительные направления углов поворота (против часовой стрелки) колеса и барабана соответствуют отрицательной проекции скорости оси колеса. Дифференцируем (3) и получаем соотношения для ускорений

$$\begin{aligned} -\ddot{\varphi}_1 r_1 &= \ddot{x}_2, \\ -\ddot{\varphi}_2 R &= \ddot{x}_2, \end{aligned} \quad (4)$$

4. Система восьми уравнений (1), (2), (4) содержит восемь неизвестных  $\ddot{x}_2$ ,  $\ddot{\varphi}_1$ ,  $\ddot{\varphi}_2$ ,  $T$ ,  $F_{\text{сц}}$ ,  $N$ ,  $X_0$ ,  $Y_0$  и разбивается на две. Для первых пяти неизвестных можно выделить систему пяти уравнений.

Учитывая, что моменты инерции однородных цилиндров имеют вид  $J_1 = m_1 r_1^2/2$ ,  $J_2 = m_2 R^2/2$ , получаем

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{x}_2 &= T + F_{\text{сц}} - m_2 g \sin \alpha, \\ m_2 R \ddot{\varphi}_2/2 &= F_{\text{сц}}, \\ m_1 r_1 \ddot{\varphi}_1 &= -M/r_1 + T, \\ -\ddot{\varphi}_1 r_1 &= \ddot{x}_2, \\ -\ddot{\varphi}_2 R &= \ddot{x}_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Исключая неизвестные  $F_{\text{сц}}$ ,  $T$ ,  $\ddot{\varphi}_2$  и  $\ddot{x}_2$ , находим

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{2(m_2 g r_1 \sin \alpha - M)}{r_1^2(m_1 + 3m_2)}. \quad (5)$$

Правая часть (5) не зависит от времени. Обозначим ее за  $-A$ . Получим  $\ddot{\varphi}_1 = -A$ ,  $A > 0$ . Интегрируем (5) при условии, что в начале процесса ( $t = 0$ ) барабан находился в покое ( $\dot{\varphi}_1 = 0$ ), и угол поворота отсчитывается от нуля  $\varphi_1 = 0$ . Получаем уравнения  $\dot{\varphi}_1 = -At$ ,  $\varphi_1 = -At^2/2$ , которые записываем для некоторого момента  $t = t_*$ , когда барабан сделает по часовой стрелке  $n$  оборотов и повернется на отрицательный угол  $-2\pi n$ . Угловая скорость барабана при этом достигнет величины  $\omega$ , которую надо определить в задаче:

$$\omega = -At_*, \quad 2\pi n = At_*^2/2.$$

Исключая неизвестное время  $t_*$ , получаем ответ:

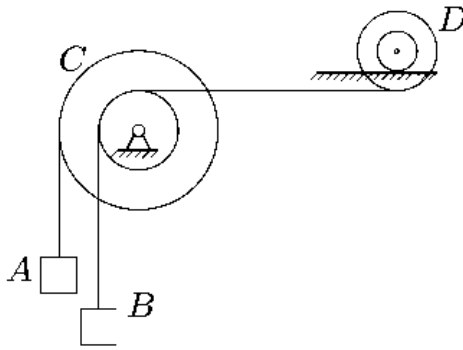
$$t_* = 2\sqrt{\pi n/A}, \quad \omega = -2\sqrt{A\pi n} = -\frac{2}{r_1} \sqrt{2\pi n \frac{M - m_2 g r_1 \sin \alpha}{m_1 + 3m_2}}.$$

Знак минус показывает, что вращение барабана направлено по часовой стрелке. Анализ подкоренного выражения дает ограничение на существование решения:  $M \geq m_2 g r_1 \sin \alpha$ .

*УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Механическая система с одной степенью свободы состоит из тел, совершающих плоское движение. Под действием сил тяжести система из состояния покоя приходит в движение. Какую скорость приобретет груз  $A$ , переместившись (вверх или вниз) на  $S = 1$  м? Качение цилиндра (или блока) происходит без проскальзывания с коэффициентом трения качения  $\delta$ . Коэффициент трения скольжения  $f_{\text{тр}}$ . Радиусы инерции  $i_C, i_D$ . Внешние радиусы  $R_C, R_D$ , внутренние  $r_C, r_D$ .*

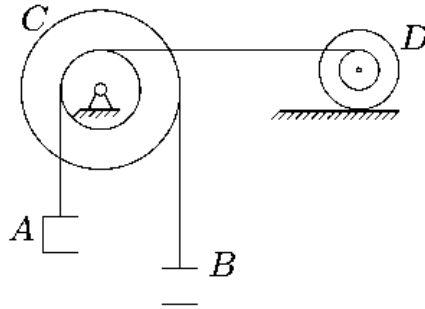


1.



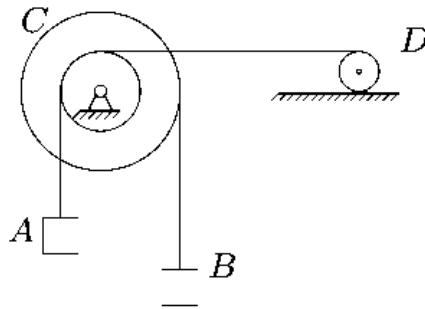
$r_C = 12 \text{ cm}$ ,  $\delta = 2 \text{ mm}$ ,  
 $R_C = 32 \text{ cm}$ ,  $m_A = 5 \text{ кг}$ ,  
 $i_C = 26 \text{ cm}$ ,  $m_B = 2 \text{ кг}$ ,  
 $r_D = 11 \text{ cm}$ ,  $m_C = 7 \text{ кг}$ ,  
 $R_D = 21 \text{ cm}$ ,  $m_D = 9 \text{ кг}$ .  
 $i_D = 16 \text{ cm}$ ,

2.



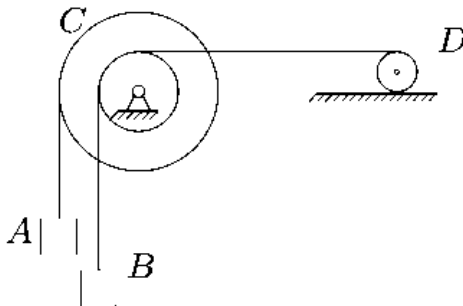
$r_C = 14 \text{ cm}$ ,  $\delta = 2 \text{ mm}$ ,  
 $R_C = 33 \text{ cm}$ ,  $m_A = 12 \text{ кг}$ ,  
 $i_C = 28 \text{ cm}$ ,  $m_B = 2 \text{ кг}$ ,  
 $r_D = 12 \text{ cm}$ ,  $m_C = 8 \text{ кг}$ ,  
 $R_D = 22 \text{ cm}$ ,  $m_D = 8 \text{ кг}$ .  
 $i_D = 17 \text{ cm}$ ,

3.



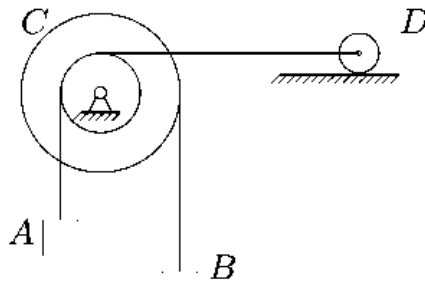
$\delta = 3 \text{ mm}$ ,  
 $r_C = 16 \text{ cm}$ ,  $m_A = 17 \text{ кг}$ ,  
 $R_C = 34 \text{ cm}$ ,  $m_B = 3 \text{ кг}$ ,  
 $i_C = 30 \text{ cm}$ ,  $m_C = 9 \text{ кг}$ ,  
 $r_D = 11 \text{ cm}$ ,  $m_D = 7 \text{ кг}$ .

4.



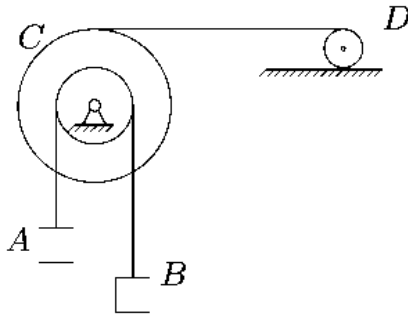
$\delta = 1 \text{ mm}$ ,  
 $r_C = 18 \text{ cm}$ ,  $m_A = 4 \text{ кг}$ ,  
 $R_C = 35 \text{ cm}$ ,  $m_B = 2 \text{ кг}$ ,  
 $i_C = 32 \text{ cm}$ ,  $m_C = 5 \text{ кг}$ ,  
 $r_D = 13 \text{ cm}$ ,  $m_D = 6 \text{ кг}$ .

5.



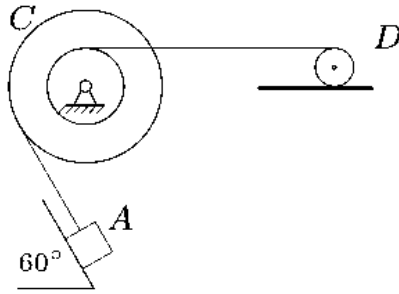
$\delta = 3 \text{ mm}$ ,  
 $r_C = 20 \text{ cm}$ ,  $m_A = 20 \text{ кг}$ ,  
 $R_C = 36 \text{ cm}$ ,  $m_B = 4 \text{ кг}$ ,  
 $i_C = 34 \text{ cm}$ ,  $m_C = 11 \text{ кг}$ ,  
 $r_D = 14 \text{ cm}$ ,  $m_D = 5 \text{ кг}$ .

6.



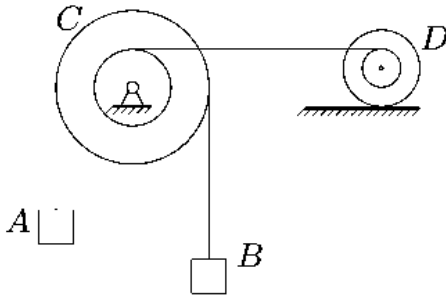
$$\begin{aligned} \delta &= 4 \text{ мм}, \\ r_C &= 22 \text{ см}, & m_A &= 19 \text{ кг}, \\ R_C &= 37 \text{ см}, & m_B &= 6 \text{ кг}, \\ i_C &= 36 \text{ см}, & m_C &= 11 \text{ кг}, \\ r_D &= 16 \text{ см}, & m_D &= 4 \text{ кг}. \end{aligned}$$

7.



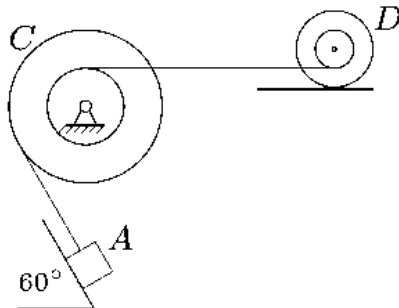
$$\begin{aligned} f_{\text{ТР}} &= 0.7, \\ r_C &= 16 \text{ см}, & \delta &= 2 \text{ мм}, \\ R_C &= 36 \text{ см}, & m_A &= 3 \text{ кг}, \\ i_C &= 30 \text{ см}, & m_C &= 7 \text{ кг}, \\ r_D &= 17 \text{ см}, & m_D &= 9 \text{ кг}. \end{aligned}$$

8.



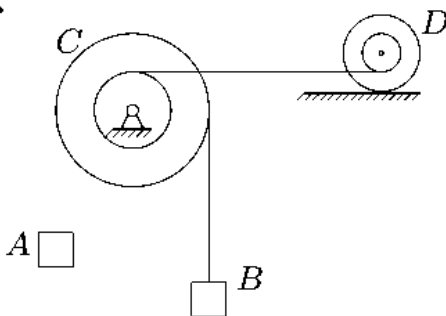
$$\begin{aligned} r_C &= 18 \text{ см}, & \delta &= 2 \text{ мм}, \\ R_C &= 32 \text{ см}, & m_A &= 10 \text{ кг}, \\ i_C &= 32 \text{ см}, & m_B &= 4 \text{ кг}, \\ r_D &= 18 \text{ см}, & m_C &= 6 \text{ кг}, \\ R_D &= 25 \text{ см}, & m_D &= 3 \text{ кг}, \\ i_D &= 23 \text{ см}, \end{aligned}$$

9.



$$\begin{aligned} r_C &= 14 \text{ см}, & f_{\text{ТР}} &= 0.2, \\ R_C &= 29 \text{ см}, & \delta &= 2 \text{ мм}, \\ i_C &= 28 \text{ см}, & m_A &= 6 \text{ кг}, \\ r_D &= 19 \text{ см}, & m_C &= 7 \text{ кг}, \\ R_D &= 27 \text{ см}, & m_D &= 4 \text{ кг}, \\ i_D &= 24 \text{ см}, \end{aligned}$$

10.



$$\begin{aligned} r_C &= 22 \text{ см}, & \delta &= 3 \text{ мм}, \\ R_C &= 38 \text{ см}, & m_A &= 17 \text{ кг}, \\ i_C &= 36 \text{ см}, & m_B &= 6 \text{ кг}, \\ r_D &= 20 \text{ см}, & m_C &= 9 \text{ кг}, \\ R_D &= 28 \text{ см}, & m_D &= 5 \text{ кг}, \\ i_D &= 26 \text{ см}, \end{aligned}$$

### Ответы

1. 2.756 м/с. 2. 1.533 м/с. 3. 1.785 м/с. 4. 3.253 м/с. 5. 1.857 м/с.  
6. 2.078 м/с. 7. 1.873 м/с. 8. 2.389 м/с. 9. 1.682 м/с. 10. 1.756 м/с.

### Предупреждение типичных ошибок

1. Составляя уравнения плоского движения тела, не забывайте, что в уравнении  $J_c \ddot{\varphi} = M_c$  момент инерции берется относительно центра масс тела, момент  $M_c$  также вычисляется относительно центра масс.

2. Характерная ошибка: для катящегося без проскальзывания цилиндра забывают про силу сцепления.

3. Не путайте силу сцепления и *предельную* силу трения, для которой справедливо соотношение  $F_{\text{тр}} = N f_{\text{тр}}$ . В данной постановке задачи проскальзывание не допускается и действует сила сцепления.

4. Ошибки в знаках кинематических соотношений. Для уменьшения возможности таких ошибок иногда удобно использовать общую систему координат для всех тел. В любом случае придерживайтесь одного и того же правила знаков для углов поворота: положительный угол (и момент!) — против часовой стрелки.

5. Изображая реакции внутренних связей, не забывайте про 3-й закон Ньютона (“Силы взаимодействия двух тел равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны”).

6. Проверку решения можно выполнить с помощью теоремы об изменении кинетической энергии (§ 12.3, с. 247). Решение при этом получается значительно проще. Приведем промежуточные ответы для этого способа решения задачи.

	$\mu_B$	$\mu_C$	$\mu_D$	$A_A$	$A_B$	$A_D$
	кг			Нм		
1	0.281	4.621	4.771	49.050	7.357	-0.662
2	11.112	32.000	5.349	117.720	-46.247	-0.462
3	13.547	31.641	2.625	166.770	-62.539	-0.936
4	0.529	4.180	0.595	39.240	10.090	-0.116
5	12.960	31.790	7.500	196.200	-70.632	-1.051
6	6.000	29.455	4.243	186.390	-58.860	-0.825
7	—	4.861	0.667	15.187	—	-0.231
8	4.000	6.000	0.592	98.100	-39.240	-0.077
9	—	6.526	19.009	45.088	—	-0.474
10	6.000	8.078	38.231	166.770	-58.860	-1.065

В таблице даны приведенные массы тел. Скорости и угловые скорости тел выражаются через скорость груза  $A$ . Во всех вариантах

$\mu_A = m_A$ . Сумма работ всех сил, приложенных к телу  $A$  на заданном перемещении обозначена как  $A_A$ . Аналогично  $A_B$  и  $A_D$  — это суммы работ всех сил, приложенных к телам  $B$  и  $D$ .

## 12.7. Динамические реакции в подшипниках ротора

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** *На оси, вращающейся в двух неподвижных подшипниках под действием постоянного внешнего момента, закреплен цилиндр и жесткий невесомый стержень с точечной массой на конце. Ось цилиндра составляет малый угол с осью вращения. Найти динамические составляющие реакций подшипников.*

### ПЛАН РЕШЕНИЯ

Динамические составляющие реакций подшипников  $X_A, X_B, Y_A, Y_B$  на подвижные оси, связанные с вращающимся ротором, удовлетворяют уравнениям [16]

$$\begin{aligned} X_A + X_B &= -m y_c \varepsilon_z - m x_c \omega_z^2, \\ Y_A + Y_B &= m x_c \varepsilon_z - m y_c \omega_z^2, \\ z_A X_A + z_B X_B &= -J_{yz} \varepsilon_z - J_{xz} \omega_z^2, \\ -z_A Y_A - z_B Y_B &= -J_{xz} \varepsilon_z + J_{yz} \omega_z^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $m = \sum_i m_i$  — масса ротора,  $x_c, y_c, z_c$  — координаты его центра масс,  $J_{yz}, J_{xz}$  — центробежные моменты инерции ротора. Ось  $z$  направлена по оси вращения ротора;  $\omega_z, \varepsilon_z$  — угловая скорость и ускорение ротора в проекции на  $z$ ;  $z_A, z_B$  — координаты подшипников  $A$  и  $B$ .

1. Вводим систему координат. Начало координат помещаем в одном из подшипников, например,  $A$ . Ось  $z$  направляем по оси вращения, ось  $x$  направляем так, чтобы ось цилиндра лежала в плоскости  $xz$ . Определяем массу  $m$  системы двух тел и координаты центра масс системы:

$$x_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^2 m_i x_{c_i}, \quad y_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^2 m_i y_{c_i}, \quad z_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^2 m_i z_{c_i}, \quad (2)$$

где  $x_{c_i}, y_{c_i}, z_{c_i}$  — координаты центров масс тел.

2. Вычисляем моменты инерции цилиндра, ось  $\zeta$  которого составляет малый угол с осью вращения  $z$ , относительно осей координат:

$$\begin{aligned} J_{zz}^{(\text{цил})} &= \frac{m_1 R^2}{2} + m_1 (y_{c_1}^2 + x_{c_1}^2), \\ J_{xz}^{(\text{цил})} &= \alpha \frac{m_1 R^2}{4} + m_1 x_{c_1} z_{c_1}, \\ J_{yz}^{(\text{цил})} &= m_1 y_{c_1} z_{c_1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Малый угол  $\alpha$  отсчитывается от оси цилиндра  $\zeta$  к положительному направлению оси  $z$ . Угол берется положительный, если со стороны оси  $y$  поворот оси цилиндра к оси  $z$  виден против часовой стрелки, и отрицательный — если поворот виден по направлению часовой стрелки. Моменты инерции  $J_{yz}^{(\text{цил})}$ ,  $J_{zz}^{(\text{цил})}$  и  $J_{xz}^{(\text{цил})}$  вычислены по теореме Гюйгенса<sup>\*)</sup>. Вторые слагаемые в (3) представляют собой соответствующие моменты инерции центра масс цилиндра относительно начала координат.

3. Вычисляем моменты инерции точечной массы (груза) относительно осей  $x, y, z$

$$J_{zz}^{(\text{груз})} = m_2 (y_{c_2}^2 + x_{c_2}^2), \quad J_{xz}^{(\text{груз})} = m_2 x_{c_2} z_{c_2}, \quad J_{yz}^{(\text{груз})} = m_2 y_{c_2} z_{c_2}.$$

4. Находим суммарные моменты инерции системы

$$\begin{aligned} J_{zz} &= J_{zz}^{(\text{цил})} + J_{zz}^{(\text{груз})}, \\ J_{xz} &= J_{xz}^{(\text{цил})} + J_{xz}^{(\text{груз})}, \\ J_{yz} &= J_{yz}^{(\text{цил})} + J_{yz}^{(\text{груз})}. \end{aligned}$$

5. Вычисляем угловое ускорение ротора  $\varepsilon_z = M_z / J_{zz}$  и угловую скорость ротора в указанный момент  $t$ . Если  $\varepsilon_z = \text{const}$  и  $\omega_z(0) = 0$ , то  $\omega_z = \varepsilon_z t$ .

6. Искомые реакции находим из решения системы (1) при  $z_A = 0$ .

ПРИМЕР. На оси, вращающейся в неподвижных подшипниках  $A$  и  $B$  под действием постоянного момента  $M_z = 0.4$  Нм, закреплен ротор, состоящий из цилиндра массой  $m_1 = 50$  кг и жесткого невесомого стержня длиной  $L = 21$  см с точечной массой  $m_2 = 6$  кг, на конце (рис. 142). Ось цилиндра составляет угол  $\alpha = 0.06$  рад с осью

<sup>\*)</sup> Христиан Гюйгенс (1629–1695) — нидерландский математик, механик, физик и астроном.

вращения  $Az$ . Центр массы цилиндра лежит на оси  $Az$ . Стержень перпендикулярен  $Az$ . Найти динамические составляющие реакций подшипников в момент времени  $t = 3$  с. Ротор вращается из состояния покоя.

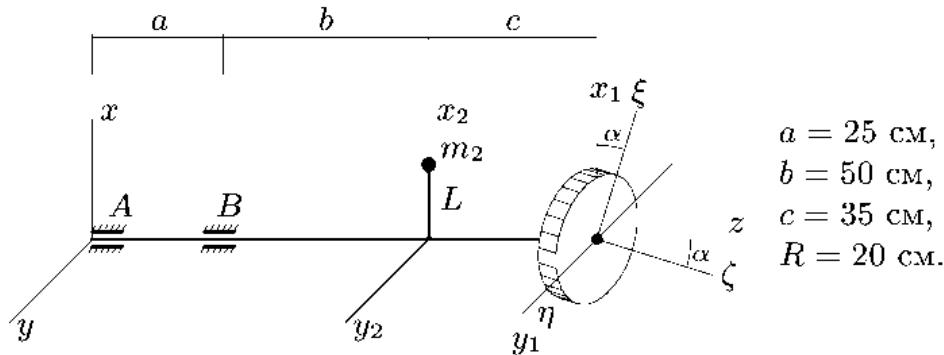


Рис. 142

Введены системы координат  $x_i, y_i, z_i$ ,  $i = 1, 2$ , с осями, параллельными  $x, y, z$ , проходящими через центры масс тел 1 и 2. Ось  $\zeta$  является осью цилиндра и вместе с осями  $x_1$  и  $x_2$  лежит в плоскости  $xz$ . Оси  $\xi$  и  $\eta$  перпендикулярны  $\zeta$ .

#### РЕШЕНИЕ

1. Вводим систему координат. Начало координат помещаем в подшипнике  $A$ , ось  $z$  направляем по оси вращения. Ось цилиндра лежит в плоскости  $xz$ . Определяем массу системы  $m = m_1 + m_2 = 56$  кг и координаты центра масс системы по формуле (2)

$$x_c = \frac{1}{56} 6 \cdot 0.2 = 0.0225 \text{ м}, \quad y_c = 0, \quad z_c = \frac{1}{56} (50 \cdot 1.1 + 6 \cdot 0.85) = 0.982 \text{ м}.$$

2. Вычисляем моменты инерции цилиндра относительно осей координат по формулам (3), где  $\alpha > 0$

$$J_{zz}^{(\text{цил})} = 1 \text{ кг м}^2, \quad J_{xz}^{(\text{цил})} = 0.03 \text{ кг м}^2, \quad J_{yz}^{(\text{цил})} = 0.$$

Угол берется положительный, так как со стороны оси  $y$  поворот оси цилиндра к оси  $z$  виден против часовой стрелки.

3. Вычисляем моменты инерции точечной массы (груза) относительно осей  $x, y, z$

$$J_{zz}^{(\text{груз})} = 0.265 \text{ кг м}^2, \quad J_{xz}^{(\text{груз})} = 0.945 \text{ кг м}^2, \quad J_{yz}^{(\text{груз})} = 0.$$

4. Находим суммарные моменты инерции системы  $J_{zz} = 1.265 \text{ кг м}^2$ ,  $J_{xz} = 0.975 \text{ кг м}^2$ ,  $J_{yz} = 0$ .

5. Вычисляем угловое ускорение ротора  $\varepsilon = M_z/J_{zz} = 0.316 \text{ рад/с}^2$  и угловую скорость ротора в момент  $t = 3 \text{ с}$ . Так как  $\varepsilon = \text{const}$  и  $\omega(0) = 0$ , то  $\omega = 0.316 \cdot 3 = 0.949 \text{ рад/с}$ .

6. Динамические реакции опор вычисляем, решая систему (1) при  $z_A = 0, z_B = a = 0.25 \text{ м}$

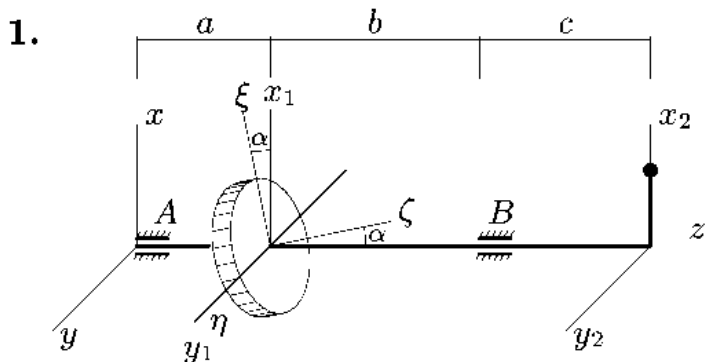
$$X_B = -(J_{yz}\varepsilon + J_{xz}\omega^2)/z_B = -3.512 \text{ Н},$$

$$Y_B = (J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2)/z_B = 1.233 \text{ Н},$$

$$X_A = -m y_c \varepsilon - m x_c \omega^2 - X_B = 2.377 \text{ Н},$$

$$Y_A = m x_c \varepsilon - m y_c \omega^2 - Y_B = -2.494 \text{ Н}.$$

**УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.** На оси, вращающейся в подшипниках  $A$  и  $B$  под действием постоянного момента  $M_z$ , закреплен ротор, состоящий из цилиндра 1 и жесткого невесомого стержня длиной  $L$  с точечной массой 2 на конце. Ось цилиндра составляет малый угол  $\alpha$  с осью вращения  $Az$ . Центр массы цилиндра лежит на оси  $Az$ . Стержень перпендикулярен  $Az$ . Найти динамические составляющие реакций подшипников в момент времени  $t$ . Ротор вращается из состояния покоя. В центрах масс тел 1 и 2 введены системы координат  $x_i, y_i, z_i, i = 1, 2$  с осями, параллельными  $x, y, z$ . Ось  $\zeta$  является осью цилиндра и вместе с осями  $x_1$  и  $x_2$  лежит в плоскости  $xz$ . Оси  $\xi$  и  $\eta$  перпендикулярны  $\zeta$ .



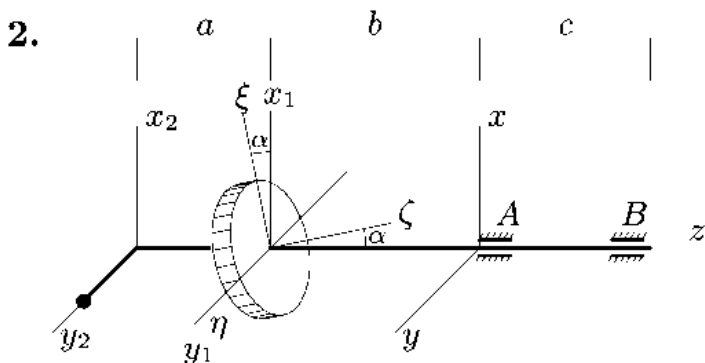
$$a = 20 \text{ см}, b = 50 \text{ см},$$

$$c = 35 \text{ см}, R = 25 \text{ см},$$

$$m_1 = 25 \text{ кг}, m_2 = 6 \text{ кг},$$

$$\alpha = 0.06 \text{ рад}, L = 10 \text{ см},$$

$$M_z = 0.3 \text{ Нм}, t = 3 \text{ с}.$$



$$a = 35 \text{ см}, b = 45 \text{ см},$$

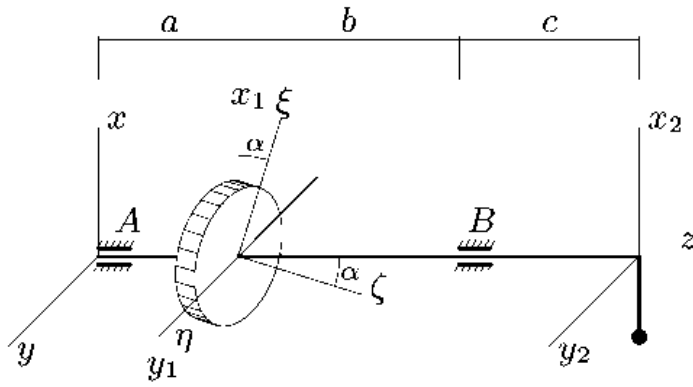
$$c = 40 \text{ см}, R = 40 \text{ см},$$

$$m_1 = 30 \text{ кг}, m_2 = 10 \text{ кг},$$

$$\alpha = 0.08 \text{ рад}, L = 25 \text{ см},$$

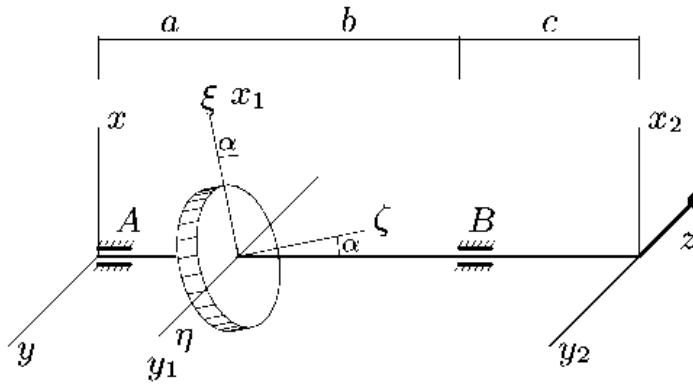
$$M_z = 0.7 \text{ Нм}, t = 4 \text{ с}.$$

3.



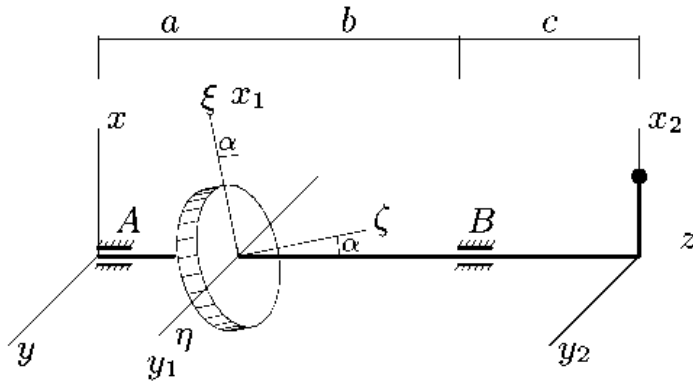
$a = 30 \text{ см}, b = 60 \text{ см},$   
 $c = 45 \text{ см}, R = 40 \text{ см},$   
 $m_1 = 55 \text{ кг}, m_2 = 14 \text{ кг},$   
 $\alpha = 0.1 \text{ рад}, L = 20 \text{ см},$   
 $M_z = 0.8 \text{ Нм}, t = 5 \text{ с}.$

4.



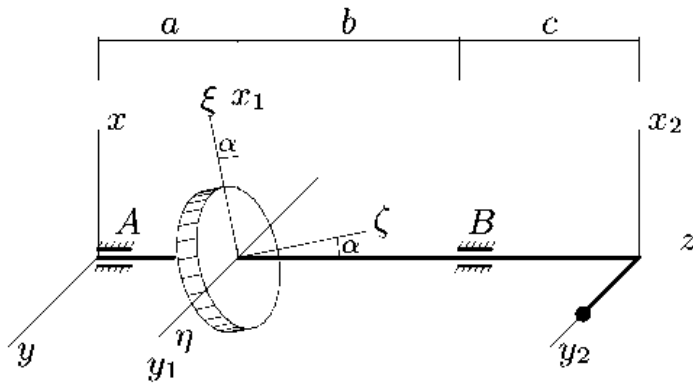
$a = 35 \text{ см}, b = 65 \text{ см},$   
 $c = 50 \text{ см}, R = 40 \text{ см},$   
 $m_1 = 40 \text{ кг}, m_2 = 18 \text{ кг},$   
 $\alpha = 0.12 \text{ рад}, L = 25 \text{ см},$   
 $M_z = 0.5 \text{ Нм}, t = 6 \text{ с}.$

5.



$a = 40 \text{ см}, b = 70 \text{ см},$   
 $c = 55 \text{ см}, R = 45 \text{ см},$   
 $m_1 = 45 \text{ кг}, m_2 = 6 \text{ кг},$   
 $\alpha = 0.1 \text{ рад}, L = 30 \text{ см},$   
 $M_z = 2.5 \text{ Нм}, t = 3 \text{ с}.$

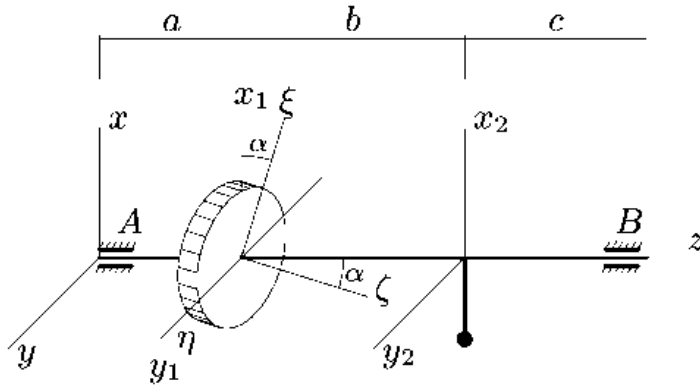
6.



$a = 45 \text{ см}, b = 75 \text{ см},$   
 $c = 60 \text{ см}, R = 50 \text{ см},$   
 $m_1 = 50 \text{ кг}, m_2 = 10 \text{ кг},$   
 $\alpha = 0.12 \text{ рад}, L = 35 \text{ см},$   
 $M_z = 2.2 \text{ Нм}, t = 4 \text{ с}.$

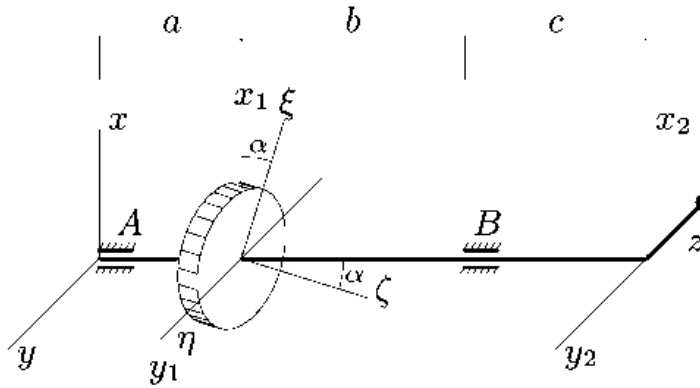


7.



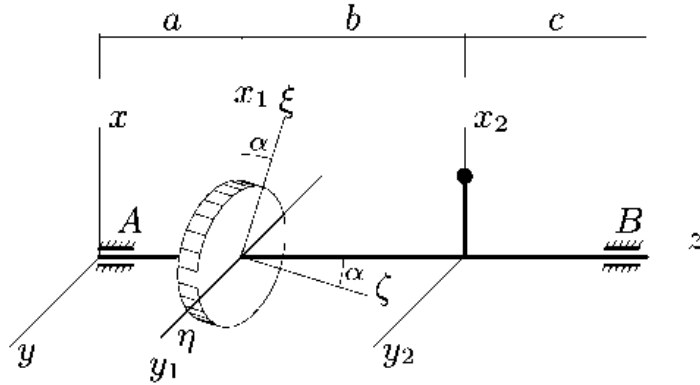
$a = 35 \text{ см}, b = 55 \text{ см},$   
 $c = 45 \text{ см}, R = 45 \text{ см},$   
 $m_1 = 75 \text{ кг}, m_2 = 14 \text{ кг},$   
 $\alpha = 0.14 \text{ рад}, L = 25 \text{ см},$   
 $M_z = 1.7 \text{ Нм}, t = 5 \text{ с}.$

8.



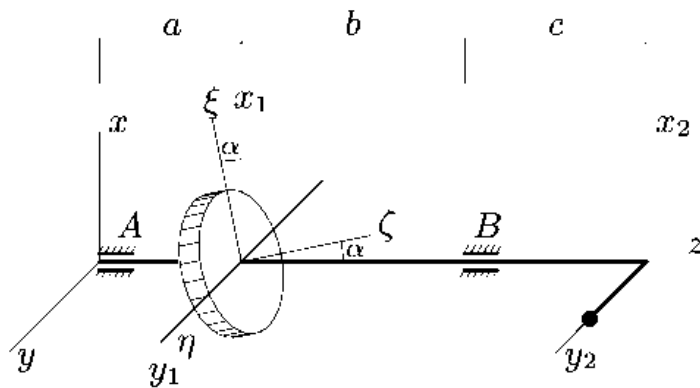
$a = 35 \text{ см}, b = 65 \text{ см},$   
 $c = 50 \text{ см}, R = 45 \text{ см},$   
 $m_1 = 80 \text{ кг}, m_2 = 18 \text{ кг},$   
 $\alpha = 0.16 \text{ рад}, L = 25 \text{ см},$   
 $M_z = 1.4 \text{ Нм}, t = 6 \text{ с}.$

9.



$a = 45 \text{ см}, b = 65 \text{ см},$   
 $c = 55 \text{ см}, R = 55 \text{ см},$   
 $m_1 = 85 \text{ кг}, m_2 = 6 \text{ кг},$   
 $\alpha = 0.14 \text{ рад}, L = 35 \text{ см},$   
 $M_z = 8.6 \text{ Нм}, t = 3 \text{ с}.$

10.



$a = 45 \text{ см}, b = 75 \text{ см},$   
 $c = 60 \text{ см}, R = 50 \text{ см},$   
 $m_1 = 70 \text{ кг}, m_2 = 10 \text{ кг},$   
 $\alpha = 0.16 \text{ рад}, L = 35 \text{ см},$   
 $M_z = 3.7 \text{ Нм}, t = 4 \text{ с}.$

## Ответы

	$J_{xx}$	$J_{xz}$	$J_{yy}$	$J_{yz}$	$J_{zz}$	$X_A$	$Y_A$	$X_B$	$Y_B$
	кгм <sup>2</sup>					Н			
1	8.006	0.607	8.066	0.000	0.841	0.305	-0.095	-0.992	0.309
2	14.300	-0.096	13.675	-2.000	3.025	-1.941	-6.370	1.363	4.228
3	32.665	-3.560	33.225	0.000	4.960	-0.752	0.186	2.573	-0.638
4	48.125	-0.192	47.000	-6.750	4.325	-0.352	-1.060	0.873	3.225
5	25.813	2.742	26.353	0.000	5.096	1.501	-0.340	-5.399	1.223
6	46.875	-0.375	45.650	6.300	7.475	0.082	2.517	-1.112	-7.368
7	24.324	-2.618	25.199	0.000	8.469	1.572	-0.313	1.954	-0.389
8	55.475	0.648	54.350	-6.750	9.225	0.196	-1.964	0.487	5.695
9	30.901	3.210	31.636	0.000	13.591	-0.557	0.098	-7.010	1.231
10	52.175	-0.700	50.950	6.300	9.975	-0.635	4.069	-0.663	-11.774

ЗАМЕЧАНИЕ. Есть простое правило для определения знака центробежного момента цилиндра с наклонной осью. Пусть центр масс цилиндра находится в начале координат (рис. 143). Ось  $\zeta$  направлена по оси цилиндра,  $z$  — по оси вала. Если цилиндр повернут так, что все его точки имеют координаты  $x_i, z_i$  одного знака, то  $J_{xz} > 0$ . В противном случае  $J_{xz} < 0$  (рис. 144). Если  $\alpha = 0$ , то  $z_i = 0$  и  $J_{xz} = 0$ .

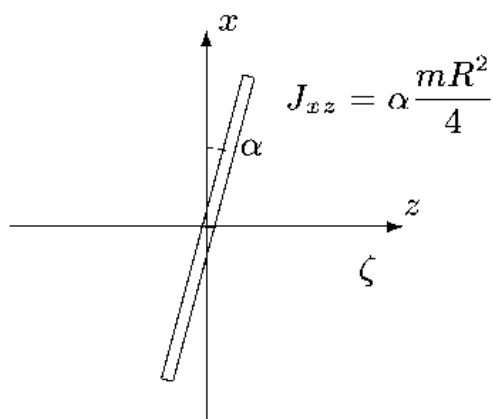


Рис. 143

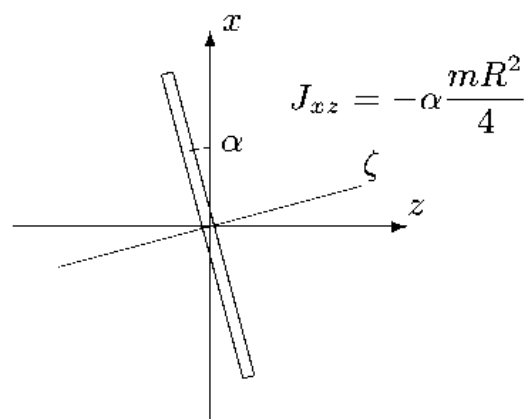


Рис. 144

## Глава 13

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

В главе АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА вы научитесь решению задач статики с помощью принципа возможных скоростей. Вы научитесь также составлять наиболее универсальные уравнения движения динамических систем. К ним относятся общее уравнение динамики, уравнение Лагранжа 2-го рода и уравнения Гамильтона. Первое знакомство с этой темой немного пугает сложностью: вводятся новые термины типа “обобщенные координаты” или “виртуальные перемещения”. На самом деле все просто. Обобщенные координаты — это параметры, однозначно описывающие положение системы, например, углы поворота или обычные декартовы координаты. Виртуальные (или возможные) перемещения — это бесконечно малые воображаемые перемещения, допускаемые связями. Силы, действующие на систему, будем делить на активные и реакции связей.

Для успешного составления уравнений движения системы следует повторить метод кинематических графов вычисления скоростей точек тела при плоском движении (§ 8.5, с. 188).

### 13.1. Принцип возможных скоростей

*ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Плоская система многих тел с идеальными стационарными связями находится в равновесии под действием активных нагрузок. Определить реакции опор системы.*

#### ПЛАН РЕШЕНИЯ

Поставленная задача относится к задачам статики, однако решать ее методами статики, записывая по три уравнения равновесия для каждого из тел системы, не удобно и долго, особенно, если по условию требуется найти только одну реакцию. Используя принцип возможных скоростей, эту задачу (независимо от количества тел механической системы) можно легко решить, составив одно уравнение.

Связь называют идеальной, если работа ее реакции на любом возможном перемещении системы равна нулю. Стационарные (или скле-

рономные) связи не зависят от времени. Будем рассматривать удерживающие (двусторонние) связи (см. с. 51).

1. Освобождаем систему от той связи, реакцию которой надо определить. Действие связи заменяем ее реакцией. Реакция становится активной силой. Система приобретает одну степень свободы. Прикладываем к системе все активные силы. Реакции идеальных связей не указываем. Вводим систему координат.

2. Сообщаем угловую скорость (виртуальную скорость) одному из тел системы, например,  $\vec{\omega}_0$ . Для плоского движения достаточно задания одной составляющей  $\omega_{0z}$ . Выражаем скорости точек приложения сил и угловые скорости тел, к которым приложены моменты, через  $\omega_{0z}$ . В некоторых случаях удобнее задавать линейную скорость какого-либо шарнира механизма.

3. Неизвестную реакцию определяем из принципа возможных скоростей. Для системы с  $N$  силами (в это число входит и неизвестная реакция) получаем

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = 0. \quad (1)$$

Каждое слагаемое представляет собой мощность силы. Мощность момента  $\vec{M}_i$  (пары сил) вычисляем как скалярное произведение  $\vec{M}_i \cdot \vec{\omega}_i$ . После подстановки в (1) кинематических соотношений, заданная величина  $\omega_{0z}$  становится общим множителем. Сокращая на  $\omega_{0z} \neq 0$ , получаем уравнение для искомой реакции. Решаем линейное уравнение с одной неизвестной, находим реакцию.

**ПРИМЕР 1.** Система с идеальными стационарными связями, состоящая из четырех шарнирно соединенных однородных стержней, расположена в вертикальной плоскости и находится в равновесии под действием силы  $F = 20$  Н и момента  $M = 30$  Нм (рис. 145). Известны длины стержней  $OA = 0.3$  м,  $AB = 0.55$  м,  $BD = 0.4$  м,  $BC = 0.3$  м и углы  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ . Учитывая погонный вес стержней,  $\rho = 10$  Н/м, определить горизонтальную реакцию опоры  $C$ .

#### РЕШЕНИЕ

1. Освобождаем систему от горизонтальной связи шарнира  $C$ . неподвижный шарнир заменяем на подвижный (или ползун) с горизонтальной подвижностью<sup>\*)</sup>. Действие горизонтальной связи заменяем

<sup>\*)</sup> Полученную связь считаем двусторонней и идеальной, т.е. точка  $C$  может без сопротивления двигаться только по горизонтали, не отрываясь от опорной поверхности.

ее реакцией  $X_C$  (рис. 146). Реакция  $X_C$  становится активной силой. Система приобретает одну степень свободы. Прикладываем к центру каждого стержня его вес  $G_i = \rho l_i$ , вычисленный через его длину  $l_i$  и погонный вес  $\rho$ . Вводим прямоугольную систему координат с центром в шарнире  $O$ . Вычисляем проекции сил тяжести на ось  $y$ :

$$G_{OAy} = -3 \text{ Н}, G_{ABy} = -5.5 \text{ Н}, G_{CBBy} = -3 \text{ Н}, G_{DBBy} = -4 \text{ Н}. \quad (2)$$

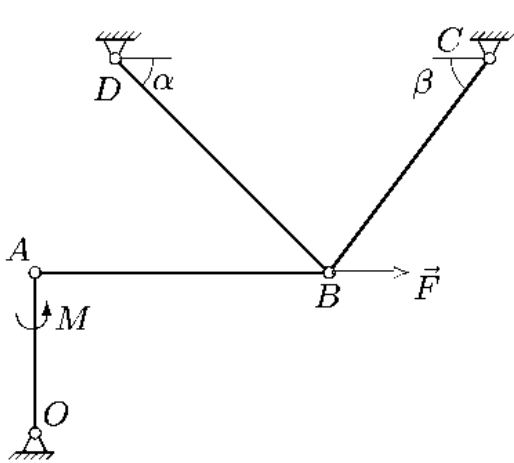


Рис. 145

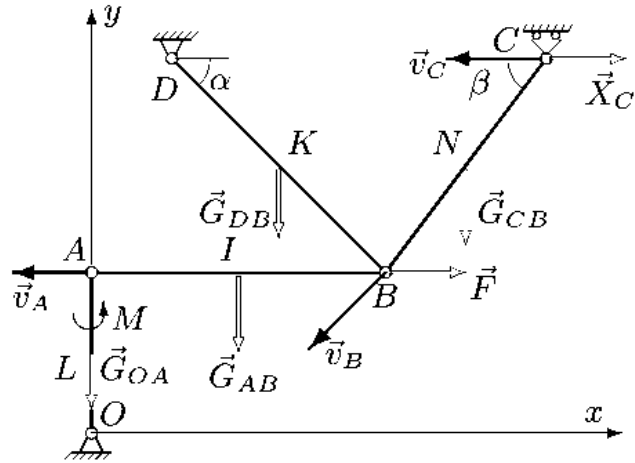


Рис. 146

2. Сообщаем стержню  $OA$  возможную угловую скорость  $\omega_{OA}$ . Выразим скорости точек  $I, N, K, B, C$ , приложения активных сил и реакции  $X_C$  через  $\omega_{OA}$ . Решаем задачу кинематики многосвязного механизма (§ 8.3, с. 179), используя уравнение трех угловых скоростей для четырехзвенника  $OABD$  в векторной форме и выражая скорости одних точек через скорости других. Составляем систему уравнений:

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{\omega}_{OA} \times \vec{OA} + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{AB} + \vec{\omega}_{BD} \times \vec{BD}, \\ \vec{v}_L &= \vec{\omega}_{OA} \times \vec{OL}, \\ \vec{v}_I &= \vec{\omega}_{OA} \times \vec{OI} + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{AI}, \\ \vec{v}_B &= \vec{\omega}_{BD} \times \vec{DB}, \\ \vec{v}_K &= \vec{\omega}_{BD} \times \vec{DK}, \\ \vec{v}_C &= \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BC} \times \vec{BC}, \\ \vec{v}_N &= \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BC} \times \vec{BN}. \end{aligned} \quad (3)$$

Так как шарнир  $C$  заменен на горизонтальный ползун (шарнир с горизонтальной подвижностью), то

$$v_{Cy} = 0. \quad (4)$$

Векторы угловых скоростей при плоском движении имеют только одну составляющую:  $\vec{\omega} = \{0, 0, \omega_z\}$ . Система (3), записанная в проекциях на оси  $x$  и  $y$ , и уравнение (4) содержат пятнадцать уравнений и пятнадцать неизвестных: двенадцать компонентов скоростей точек  $B, C, I, N, K, L$  и три проекции угловых скоростей на ось  $z$ , перпендикулярную плоскости механизма. Решаем систему (3)–(4):

$$\begin{aligned}
 v_{Bx} &= -0.3\omega_{OA}, & v_{By} &= -0.3\omega_{OA}, \\
 v_{Cx} &= -0.819\omega_{OA}, & v_{Cy} &= 0, \\
 v_{Kx} &= -0.15\omega_{OA}, & v_{Ky} &= -0.15\omega_{OA}, \\
 v_{Lx} &= -0.15\omega_{OA}, & v_{Ly} &= 0, \\
 v_{Ix} &= -0.3\omega_{OA}, & v_{Iy} &= -0.15\omega_{OA}, \\
 v_{Nx} &= -0.56\omega_{OA}, & v_{Ny} &= -0.15\omega_{OA}, \\
 \omega_{ABz} &= -0.545\omega_{OA}, & \omega_{DBz} &= -1.061\omega_{OA}, \\
 \omega_{BCz} &= 2\omega_{OA}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

3. Неизвестную реакцию  $X_C$  определяем из принципа возможных скоростей:

$$X_C v_{Cx} + F v_{Bx} + G_{ABy} v_{Iy} + G_{CBY} v_{Ny} + G_{DBY} v_{Ky} + M \omega_{OA} = 0.$$

С учетом (5) получаем

$$\begin{aligned}
 -0.819 X_C \omega_{OA} - 0.3 F \omega_{OA} - 0.15 G_{ABy} \omega_{OA} - 0.15 G_{CBY} \omega_{OA} - \\
 - 0.15 G_{DBY} \omega_{OA} + M \omega_{OA} = 0.
 \end{aligned}$$

Сокращаем на  $\omega_{OA} \neq 0$ , находим, что  $X_C = 31.569$  Н.

Решение задачи в системе Maple V приведено в § 17.1 на с. 368.

**ПРИМЕР 2.** В условиях задачи на с. 281 (рис. 145) определить вертикальную реакцию опоры  $C$ .

#### РЕШЕНИЕ

1. Освобождаем систему от вертикальной связи шарнира  $C$ . Действие связи заменяем ее реакцией  $Y_C$  (рис. 147). Система приобретает одну степень свободы. Прикладываем к центру каждого стержня его вес (2).

2. Сообщаем стержню  $OA$  возможную угловую скорость  $\omega_{OA}$ . Выражаем скорости точек  $A, B, C, I, K, L, N$  приложения активных сил и реакции  $Y_C$  через  $\omega_{OA}$ . Решая задачу кинематики многозвенного

механизма, составляем систему уравнений, которые не отличаются от (3). Вместо уравнения (4) запишем

$$v_{Cx} = 0. \quad (6)$$

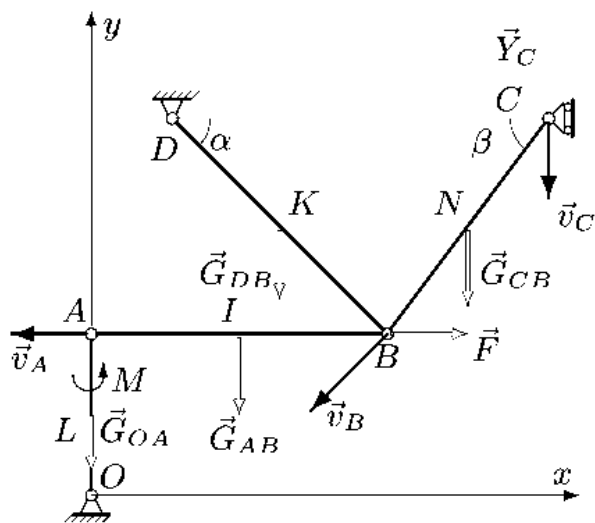


Рис. 147

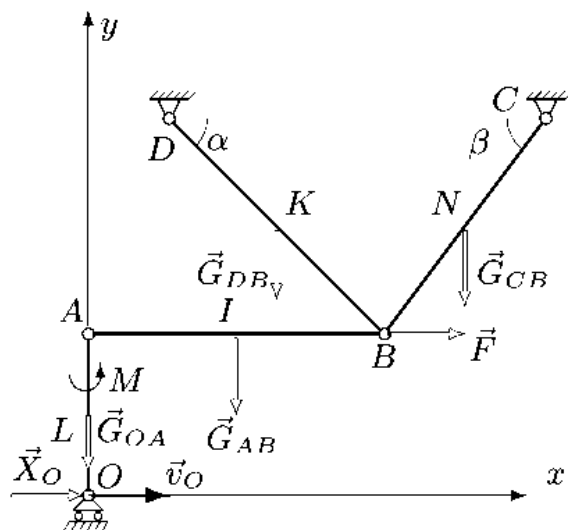


Рис. 148

Решаем систему (3), (6):

$$\begin{aligned}
 v_{Bx} &= -0.3 \omega_{OA}, & v_{By} &= -0.3 \omega_{OA}, \\
 v_{Cx} &= 0, & v_{Cy} &= -0.473 \omega_{OA}, \\
 v_{Kx} &= -0.15 \omega_{OA}, & v_{Ky} &= -0.15 \omega_{OA}, \\
 v_{Lx} &= -0.15 \omega_{OA}, & v_{Ly} &= 0, \\
 v_{Ix} &= -0.3 \omega_{OA}, & v_{Iy} &= -0.15 \omega_{OA}, \\
 v_{Nx} &= -0.15 \omega_{OA}, & v_{Ny} &= -0.387 \omega_{OA}, \\
 \omega_{ABz} &= -0.545 \omega_{OA}, & \omega_{DBz} &= -1.061 \omega_{OA}, \\
 \omega_{BCz} &= -1.155 \omega_{OA}.
 \end{aligned} \quad (7)$$

3. Неизвестную реакцию  $Y_C$  определяем из принципа возможных скоростей:

$$Y_C v_{Cy} + F v_{Bx} + G_{ABy} v_{Iy} + G_{CBY} v_{Ny} + G_{DBY} v_{Ky} + M \omega_{OA} = 0.$$

С учетом (7) получаем

$$\begin{aligned}
 -0.473 Y_C \omega_{OA} - 0.3 F \omega_{OA} - 0.15 G_{ABy} \omega_{OA} - 0.387 G_{CBY} \omega_{OA} - \\
 - 0.15 G_{DBY} \omega_{OA} + M \omega_{OA} = 0.
 \end{aligned}$$

Сокращаем на  $\omega_{OA} \neq 0$ , находим

$$Y_C = 56.18 \text{ Н.}$$

ПРИМЕР 3. В условиях задачи на с. 281 (рис. 145) определить горизонтальную реакцию опоры  $O$ .

#### РЕШЕНИЕ

1. Освобождаем систему от горизонтальной связи шарнира  $O$ . Действие связи заменяем ее реакцией  $X_O$  (рис. 148, с. 283). Система приобретает одну степень свободы. Прикладываем к центру каждого стержня его вес.

2. Сообщаем шарниру  $O$  возможную горизонтальную скорость  $v_O$ . Решение этого примера оказывается существенно проще предыдущих, и связано это с тем, что стержни  $DB$  и  $BC$  образуют жесткий неподвижный треугольник, и скорости всех его точек равны нулю. Поэтому необходимости в составлении сложной системы кинематических уравнений здесь нет.

Точка  $A$  совпадает с МЦС звена  $OA$  (§ 8.1, с. 158). Угловая скорость стержня  $OA$  выразится через заданную скорость:

$$\omega_{OA} = v_O/OA. \quad (8)$$

Скорость  $\vec{v}_L$  точки приложения веса стержня  $OA$  можно не находить, так как очевидно, что мощность вертикальной силы с горизонтальной скоростью точки приложения равна нулю.

3. Неизвестную реакцию  $X_O$  определяем из принципа возможных скоростей:

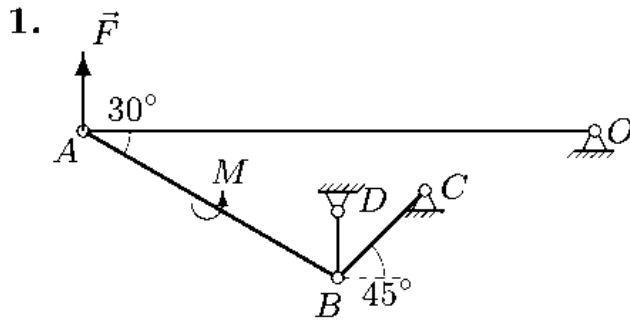
$$X_O v_{Ox} + M \omega_{OA} = 0.$$

С учетом (8) вычисляем

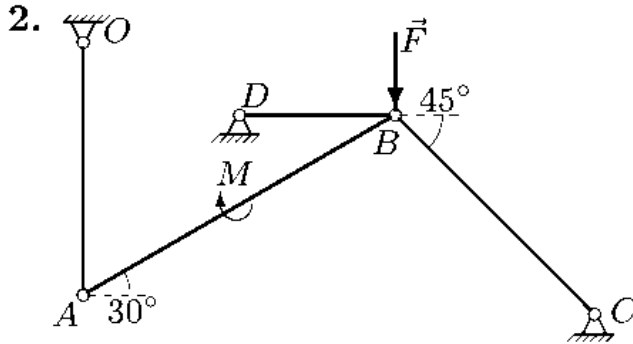
$$X_O = -M/OA = -100 \text{ Н.}$$

*УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Система с идеальными стационарными связями, состоящая из четырех шарнирно соединенных однородных стержней, расположенных в вертикальной плоскости, находится в равновесии под действием силы  $F$  и момента  $M$ . Учитывая погонный вес стержней  $\rho$ , определить реакции опор (в Н).*

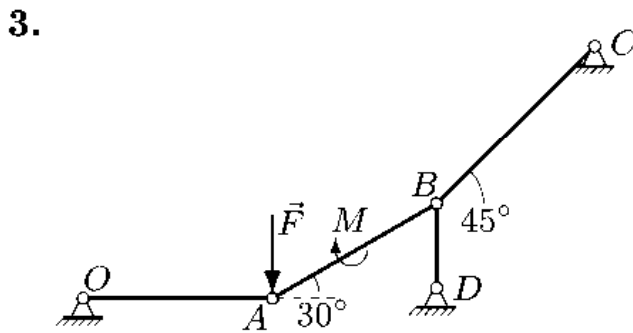




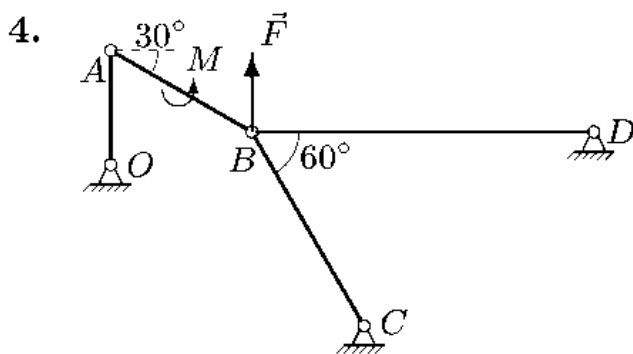
$OA = 108 \text{ cm}, DB = 14 \text{ cm},$   
 $AB = 62 \text{ cm}, BC = 26 \text{ cm}.$   
 $\rho = 40 \text{ H/m}, M = 8 \text{ Hm},$   
 $F = 20 \text{ H}.$



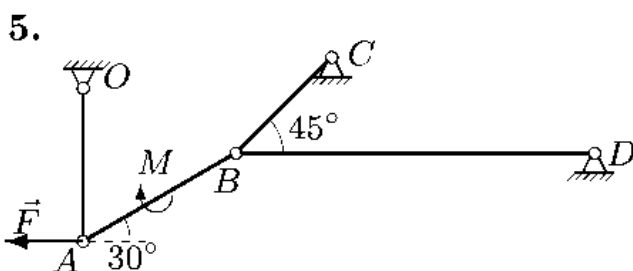
$OA = 26 \text{ cm}, DB = 16 \text{ cm},$   
 $AB = 37 \text{ cm}, BC = 29 \text{ cm}.$   
 $\rho = 50 \text{ H/m}, M = 10 \text{ Hm},$   
 $F = 40 \text{ H}.$



$OA = 27 \text{ cm}, DB = 12 \text{ cm},$   
 $AB = 27 \text{ cm}, BC = 32 \text{ cm}.$   
 $\rho = 30 \text{ H/m}, M = 11 \text{ Hm},$   
 $F = 10 \text{ H}.$

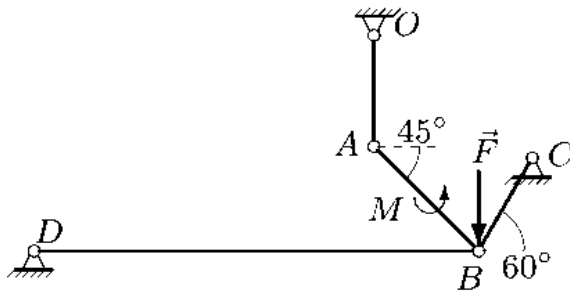


$OA = 28 \text{ cm}, DB = 84 \text{ cm},$   
 $AB = 40 \text{ cm}, BC = 55 \text{ cm}.$   
 $\rho = 60 \text{ H/m}, M = 13 \text{ Hm},$   
 $F = 60 \text{ H}.$



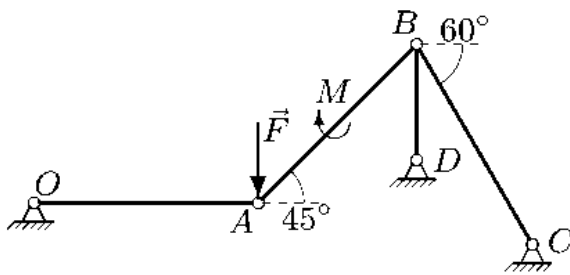
$OA = 26 \text{ cm}, DB = 61 \text{ cm},$   
 $AB = 30 \text{ cm}, BC = 23 \text{ cm}.$   
 $\rho = 30 \text{ H/m}, M = 6 \text{ Hm},$   
 $F = 5 \text{ H}.$

6.



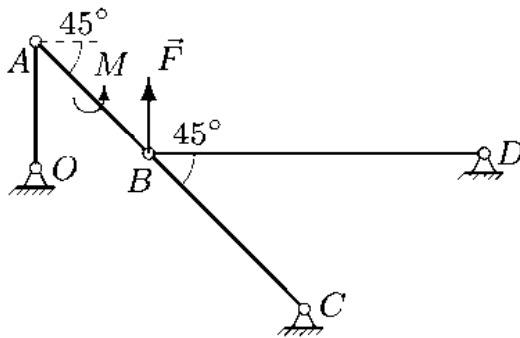
$OA = 30 \text{ cm}$ ,  $DB = 120 \text{ cm}$ ,  
 $AB = 40 \text{ cm}$ ,  $BC = 29 \text{ cm}$ .  
 $\rho = 40 \text{ H/M}$ ,  $M = 13 \text{ HM}$ ,  
 $F = 60 \text{ H}$ .

7.



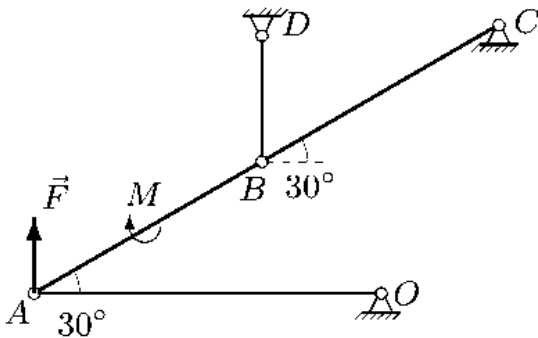
$OA = 31 \text{ cm}$ ,  $DB = 16 \text{ cm}$ ,  
 $AB = 31 \text{ cm}$ ,  $BC = 32 \text{ cm}$ .  
 $\rho = 50 \text{ H/M}$ ,  $M = 17 \text{ HM}$ ,  
 $F = 50 \text{ H}$ .

8.



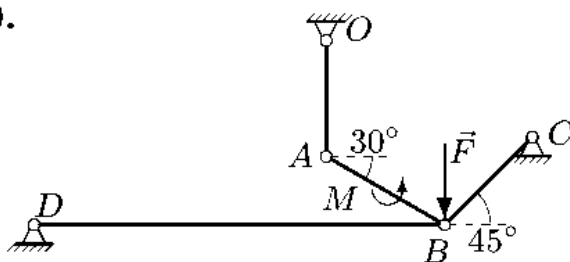
$OA = 32 \text{ cm}$ ,  $DB = 84 \text{ cm}$ ,  
 $AB = 40 \text{ cm}$ ,  $BC = 55 \text{ cm}$ .  
 $\rho = 60 \text{ H/M}$ ,  $M = 17 \text{ HM}$ ,  
 $F = 80 \text{ H}$ .

9.



$OA = 33 \text{ cm}$ ,  $DB = 12 \text{ cm}$ ,  
 $AB = 25 \text{ cm}$ ,  $BC = 26 \text{ cm}$ .  
 $\rho = 30 \text{ H/M}$ ,  $M = 13 \text{ HM}$ ,  
 $F = 40 \text{ H}$ .

10.



$OA = 27 \text{ cm}$ ,  $DB = 96 \text{ cm}$ ,  
 $AB = 32 \text{ cm}$ ,  $BC = 29 \text{ cm}$ .  
 $\rho = 40 \text{ H/M}$ ,  $M = 10 \text{ HM}$ ,  
 $F = 45 \text{ H}$ .

## Ответы

	$X_O$	$Y_O$	$X_C$	$Y_C$	$X_D$	$Y_D$
1	50.055	21.600	-50.055	-44.855	-0.000	87.255
2	-0.000	-8.958	-91.708	98.958	91.708	4.000
3	50.131	4.050	-50.131	-45.331	-0.000	80.681
4	-0.000	66.328	25.304	-27.328	-25.304	25.200
5	-0.000	-13.681	43.081	46.531	-38.081	9.150
6	-0.000	65.962	29.929	57.638	-29.929	24.000
7	12.054	7.750	-12.054	28.878	-0.000	68.372
8	-0.000	91.304	86.404	-69.904	-86.404	25.200
9	158.213	4.950	-158.213	-87.444	-0.000	71.294
10	-0.000	53.284	40.316	46.116	-40.316	19.200

**ЗАМЕЧАНИЕ.** С помощью описанного метода можно определить реакции опор в задачах § 2.4, 2.5. Вычисление реакций заделки, встречающейся в некоторых вариантах, имеет свою особенность. Заделка в плоской задаче (рис. 149) имеет три реакции: момент и две силы. При вычислении *момента* заделку заменяют на неподвижный шарнир (рис. 150). Для определения *горизонтальной реакции* заделку превращают в *скользящую заделку* (горизонтальный ползун с жестко соединенным с ним стержнем), так, что и момент заделки, и вертикальная реакция на горизонтальном перемещении образовавшейся связи работы не совершают (рис. 151). Аналогично поступают и при определении *вертикальной реакции* (рис. 152). Ползун при этом движется по вертикали.

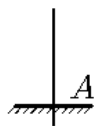


Рис. 149



Рис. 150

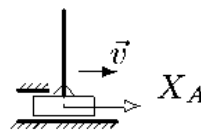


Рис. 151

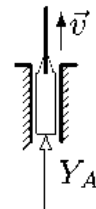


Рис. 152

Ответы на типичные вопросы, возникающие при решении задачи

1. В какую сторону направлять искомую горизонтальную реакцию? Налево или направо?

Направляйте в любую сторону. Знак ответа подскажет истинное направление реакции. Это относится и к вертикальной реакции, и к моменту в заделке.

2. Можно ли находить возможные скорости с помощью мгновенных центров скоростей?

Во избежание ошибок со знаками не рекомендуем определять скорости с помощью МЦС. С помощью этого метода можно определить

только модули скоростей. В простейших случаях, где знак мощности очевиден, можно сделать исключение (Пример 3, с. 284).

#### Предупреждение типичных ошибок

1. При выборе кинематической схемы следует помнить, что отбрасывается только одна связь, и только реакция этой связи на возможной скорости будет иметь ненулевую мощность. Реакции остальных связей, независимо от того, найдены они или еще нет, не должны иметь мощность. Механизм, полученный из уравновешенной конструкции отбрасыванием связи, должен иметь одну степень свободы.

2. Если система, полученная из исходной отбрасыванием одной из связей, превращается в механизм, содержащий четырехзвенник, то в качестве виртуальной скорости удобно брать одну из угловых скоростей четырехзвенника, а остальные угловые скорости определять с помощью уравнения трех угловых скоростей (§ 8.3).

## 13.2. Общее уравнение динамики для системы с одной степенью свободы

*ПОСТАПОВКА ЗАДАЧИ. Плоский шарнирно-стержневой механизм с одной степенью свободы движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и момента  $M$ . В неподвижных шарнирах и ползуне имеется трение, остальные связи идеальные. Известна угловая скорость одного из звеньев механизма. Для заданного положения механизма определить величину  $M$ .*

#### ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Вычисляем угловые скорости звеньев механизма и скорости точек приложения активных сил (§ 8.3, с. 179). В число активных сил включаем силы трения.

2. Вычисляем ускорения точек, надсленных массами (§8.4, с. 183).

3. Вычисляем силы тяжести и силы инерции материальных точек. Силы трения (сопротивления) направлены в сторону, противоположную движению, поэтому записываем их в виде  $\vec{F}_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}} \vec{v}_k / |v_k|$ , где  $\vec{v}_k$  — скорость точки приложения силы,  $F_{\text{тр}}$  — модуль силы. Аналогично выражаем моменты сопротивления  $\vec{M}_{\text{тр}} = -M_{\text{тр}} \vec{\omega}_k / |\omega_k|$ .

4. Записываем общее уравнение динамики:

$$\sum_k \vec{F}_k \cdot \vec{v}_k + \sum_k \vec{\Phi}_k \cdot \vec{v}_k = 0, \quad (1)$$

где  $\vec{F}_k$  — активные силы, приложенные к механизму,  $\vec{\Phi}_k$  — силы инерции. Моменты являются парами сил, которые входят в число активных сил  $\vec{F}_k$ , однако мощности моментов удобнее вычислять в форме  $\sum_k \vec{M}_k \cdot \vec{\omega}_k$ , где  $\vec{\omega}_k$  — угловая скорость тела, к которому приложен момент  $\vec{M}_k$ .

Из полученного уравнения находим искомый момент  $M$ .

**ПРИМЕР.** Плоский шарнирно-стержневой механизм расположен в вертикальной плоскости и приводится в движение моментом  $M_{OA}$ , приложенным к звену  $OA$  (рис. 153). В узлах  $A, B, C$  и в середине звена  $AB$  сосредоточены массы  $m_A = 2$  кг,  $m_B = 3$  кг,  $m_C = 4$  кг,  $m_E = 5$  кг. Задана постоянная сила сопротивления движению ползуна,  $F_{тр} = 10$  Н. В шарнирах  $O$  и  $D$  имеется момент сил трения  $M_{тр} = 15$  Нм. Угловая скорость звена  $OA$  постоянна и равна 2 рад/с.

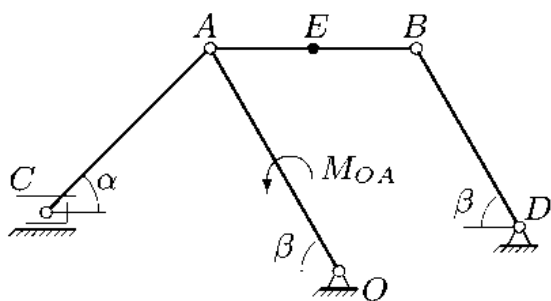


Рис. 153

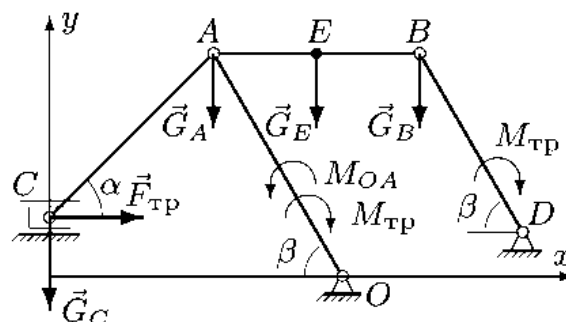


Рис. 154

Пренебрегая массами стержней, определить момент  $M_{OA}$  в указанном положении механизма. Даны размеры:  $OA = 0.5$  м,  $AB = 0.4$  м,  $AC = 0.45$  м,  $BD = 0.4$  м;  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ .

### РЕШЕНИЕ

1. Вычисляем угловые скорости звеньев механизма и скорости точек  $A, B, C, E$ . Вводим систему координат  $xuz$  (рис. 154). Ось  $z$  перпендикулярна плоскости чертежа. Составляем кинематические уравнения:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_{OA} \times \vec{OA} + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{AB} + \vec{\omega}_{BD} \times \vec{BD} &= 0, \\ \vec{v}_A &= \vec{\omega}_{OA} \times \vec{OA}, \\ \vec{v}_B &= \vec{\omega}_{BD} \times \vec{DB}, \\ \vec{v}_C &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AC} \times \vec{AC}, \\ \vec{v}_E &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{AE}, \end{aligned} \quad (2)$$

Так как скорость ползуна горизонтальна и  $v_{Cy} = 0$ , система пяти

векторных уравнений (или десяти скалярных уравнений в проекциях на оси  $x, y$ ) содержит десять неизвестных:  $\omega_{ABz}, \omega_{BDz}, \omega_{ACz}, v_{Ax}, v_{Ay}, v_{Bx}, v_{By}, v_{Ex}, v_{Ey}, v_{Cx}$ . Решая ее, получаем проекции скоростей,

$$\begin{aligned} v_{Ax} = v_{Bx} = v_{Ex} &= -0.866 \text{ м/с}, \\ v_{Ay} = v_{By} = v_{Ey} &= -0.5 \text{ м/с}, \quad v_{Cx} = -1.366 \text{ м/с}, \end{aligned}$$

и угловые скорости,

$$\omega_{BDz} = 2.5 \text{ рад/с}, \quad \omega_{ABz} = 0, \quad \omega_{ACz} = -1.571 \text{ рад/с}.$$

2. Вычисляем ускорения точек  $A, B, C, E$ . Составляем кинематические уравнения с учетом того, что, по условию, стержень  $OA$  вращается равномерно:  $\varepsilon_{OAz} = 0$ ,

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon}_{OA} \times \vec{OA} + \vec{\varepsilon}_{AB} \times \vec{AB} + \vec{\varepsilon}_{BD} \times \vec{BD} + \vec{\omega}_{OA} \times (\vec{\omega}_{OA} \times \vec{OA}) + \\ + \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{AB}) + \vec{\omega}_{BD} \times (\vec{\omega}_{BD} \times \vec{BD}) &= 0, \\ \vec{W}_A = \vec{\omega}_{OA} \times (\vec{\omega}_{OA} \times \vec{OA}), \\ \vec{W}_B = \vec{\varepsilon}_{BD} \times \vec{DB} + \vec{\omega}_{BD} \times (\vec{\omega}_{BD} \times \vec{DB}), \\ \vec{W}_C = \vec{W}_A + \vec{\varepsilon}_{AC} \times \vec{AC} + \vec{\omega}_{AC} \times (\vec{\omega}_{AC} \times \vec{AC}), \\ \vec{W}_E = \vec{W}_A + \vec{\varepsilon}_{AB} \times \vec{AE} + \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{AE}). \end{aligned} \quad (3)$$

Первое уравнение в этой системе представляет собой векторную форму записи уравнения трех угловых ускорений четырехзвенника  $OABD$  (§ 8.4, с. 183). Так как вектор ускорения ползуна горизонтальный и  $W_{Cy} = 0$ , система пяти векторных уравнений (или десяти скалярных в проекциях на ось  $x$  и ось  $y$ ) содержит десять неизвестных:  $\varepsilon_{ABz}, \varepsilon_{BDz}, \varepsilon_{ACz}, W_{Ax}, W_{Ay}, W_{Bx}, W_{By}, W_{Ex}, W_{Ey}, W_{Cx}$ . Решая систему (3), получаем проекции ускорений,

$$\begin{aligned} W_{Ax} = W_{Bx} = W_{Ex} &= 1 \text{ м/с}^2, \quad W_{Ay} = -1.732 \text{ м/с}^2, \\ W_{By} &= -2.309 \text{ м/с}^2, \quad W_{Ey} = -2.021 \text{ м/с}^2, \quad W_{Cx} = 0.839 \text{ м/с}^2, \end{aligned}$$

и угловые ускорения,

$$\varepsilon_{BDz} = 0.722 \text{ рад/с}^2, \quad \varepsilon_{ABz} = -1.443 \text{ рад/с}^2, \quad \varepsilon_{ACz} = -2.974 \text{ рад/с}^2.$$

Концы векторов ускорений точек неизменяемого отрезка лежат на одной прямой. Точка  $E$  лежит в центре отрезка  $AB$ . Отсюда следует простая проверка решения:

$$W_{Ex} = (W_{Ax} + W_{Bx})/2, \quad W_{Ey} = (W_{Ay} + W_{By})/2.$$

3. Вычисляем силы тяжести и силы инерции материальных точек.

Вычисляем силы тяжести:

$$\begin{aligned} G_{Ay} &= -m_A g = -19.62 \text{ Н}, & G_{By} &= -m_B g = -29.43 \text{ Н}, \\ G_{Cy} &= -m_C g = -39.24 \text{ Н}, & G_{Ey} &= -m_E g = -49.05 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Вычисляем силы инерции  $\vec{\Phi} = -m\vec{W}$  по Даламберу: \*)

$$\begin{aligned} \Phi_{Ax} &= -m_A W_{Ax} = -2 \text{ Н}, & \Phi_{Ay} &= -m_A W_{Ay} = 3.464 \text{ Н}, \\ \Phi_{Bx} &= -m_B W_{Bx} = -3 \text{ Н}, & \Phi_{By} &= -m_B W_{By} = 6.927 \text{ Н}, \\ \Phi_{Ex} &= -m_E W_{Ex} = -5 \text{ Н}, & \Phi_{Ey} &= -m_E W_{Ey} = 10.105 \text{ Н}, \\ \Phi_{Cx} &= -m_C W_{Cx} = -3.356 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Силу трения направляем в сторону, противоположную движению ползуна, а моменты трения — в сторону, противоположную вращению соответствующего кривошипа:

$$\begin{aligned} F_{\text{тр.}x} &= -F_{\text{тр}} v_{Cx} / |v_{Cx}|, \\ M_{\text{тр.}BDz} &= -M_{\text{тр}} \omega_{BDz} / |\omega_{BD}|, & M_{\text{тр.}OAz} &= -M_{\text{тр}} \omega_{OAz} / |\omega_{OA}|. \end{aligned}$$

4. Записываем общее уравнение динамики

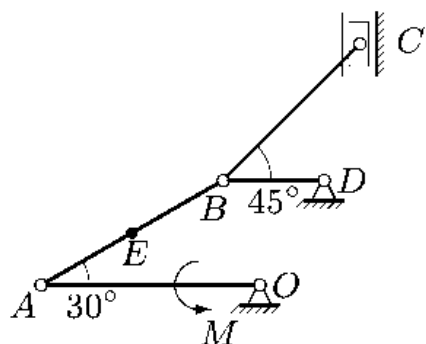
$$\begin{aligned} G_{Ay} v_{Ay} + G_{By} v_{By} + G_{Cy} v_{Cy} + G_{Ey} v_{Ey} + F_{\text{тр.}x} v_{Cx} + \Phi_{Ax} v_{Ax} + \\ + \Phi_{Ay} v_{Ay} + \Phi_{Bx} v_{Bx} + \Phi_{By} v_{By} + \Phi_{Ex} v_{Ex} + \Phi_{Ey} v_{Ey} + \\ + \Phi_{Cx} v_{Cx} + M_{OAz} \omega_{OAz} + M_{\text{тр.}OAz} \omega_{OAz} + M_{\text{тр.}BDz} \omega_{BDz} = 0. \end{aligned}$$

Находим из этого уравнения искомый момент:  $M_{OA} = 140.69 \text{ Нм}$ .

*УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Плоский шарнирно-стержневой механизм с одной степенью свободы движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и момента  $M$ , который вращает звено  $OA$  с постоянной угловой скоростью  $\omega_{OA}$ . В узлах  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и в центре  $E$  звена  $AB$  расположены материальные точки. На осях неподвижных шарниров  $O$  и  $D$  имеется трение с постоянным моментом  $M_{\text{тр}}$ . Сила сопротивления движению ползуна —  $F_{\text{тр}}$ , остальные связи идеальные. Пренебрегая массами стержней, определить величину момента  $M$ .*

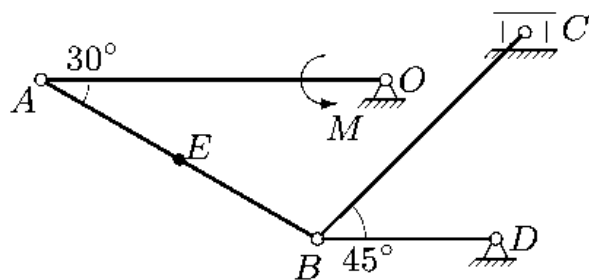
\*) Жан Лерон Даламбер (1717–1783) — французский математик, механик, философ.

1.



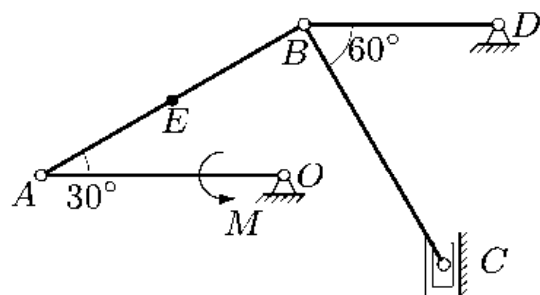
$\omega_{OA_z} = 0.8$  рад/с,  
 $F_{Tp} = 10$  Н,  $M_{Tp} = 5$  Нм,  
 $m_A = 1$  кг,  $m_B = 2$  кг,  
 $m_C = 2$  кг,  $m_E = 2$  кг,  
 $OA = 26$  см,  $DB = 12$  см,  
 $AB = 25$  см,  $BC = 23$  см.

2.



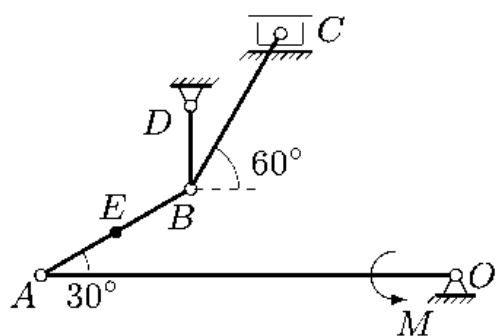
$\omega_{OA_z} = 0.7$  рад/с,  
 $F_{Tp} = 20$  Н,  $M_{Tp} = 10$  Нм,  
 $m_A = 2$  кг,  $m_B = 3$  кг,  
 $m_C = 3$  кг,  $m_E = 4$  кг,  
 $OA = 27$  см,  $DB = 14$  см,  
 $AB = 25$  см,  $BC = 23$  см.

3.



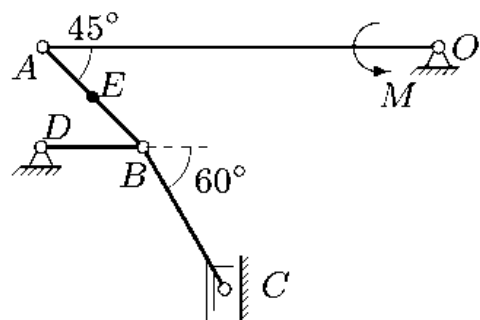
$\omega_{OA_z} = 1$  рад/с,  
 $F_{Tp} = 30$  Н,  $M_{Tp} = 15$  Нм,  
 $m_A = 3$  кг,  $m_B = 4$  кг,  
 $m_C = 4$  кг,  $m_E = 6$  кг,  
 $OA = 20$  см,  $DB = 16$  см,  
 $AB = 25$  см,  $BC = 23$  см.

4.



$\omega_{OA_z} = 0.3$  рад/с,  
 $F_{Tp} = 60$  Н,  $M_{Tp} = 20$  Нм,  
 $m_A = 4$  кг,  $m_B = 5$  кг,  
 $m_C = 6$  кг,  $m_E = 5$  кг,  
 $OA = 60$  см,  $DB = 12$  см,  
 $AB = 25$  см,  $BC = 26$  см.

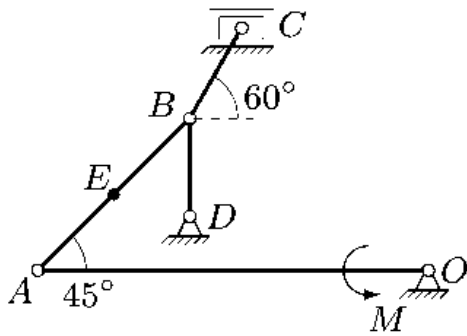
5.



$\omega_{OA_z} = 0.3$  рад/с,  
 $F_{Tp} = 20$  Н,  $M_{Tp} = 25$  Нм,  
 $m_A = 1$  кг,  $m_B = 2$  кг,  
 $m_C = 4$  кг,  $m_E = 5$  кг,  
 $OA = 70$  см,  $DB = 18$  см,  
 $AB = 25$  см,  $BC = 29$  см.

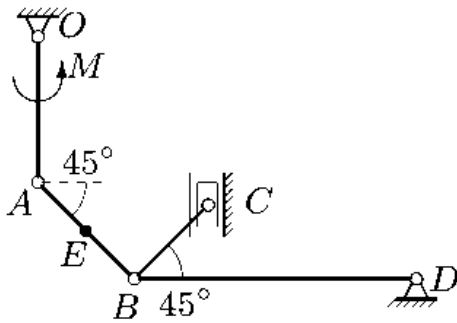


6.



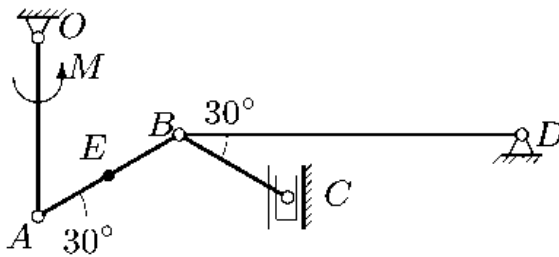
$\omega_{OA_z} = 0.2$  рад/с,  
 $F_{\text{ТР}} = 50$  Н,  $M_{\text{ТР}} = 30$  Нм,  
 $m_A = 2$  кг,  $m_B = 3$  кг,  
 $m_C = 6$  кг,  $m_E = 3$  кг,  
 $OA = 120$  см,  $DB = 30$  см,  
 $AB = 66$  см,  $BC = 32$  см.

7.



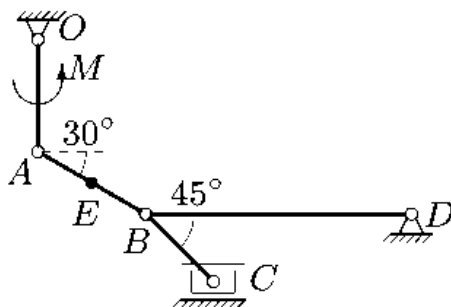
$\omega_{OA_z} = 0.6$  рад/с,  
 $F_{\text{ТР}} = 30$  Н,  $M_{\text{ТР}} = 35$  Нм,  
 $m_A = 3$  кг,  $m_B = 5$  кг,  
 $m_C = 4$  кг,  $m_E = 5$  кг,  
 $OA = 32$  см,  $DB = 62$  см,  
 $AB = 30$  см,  $BC = 23$  см.

8.



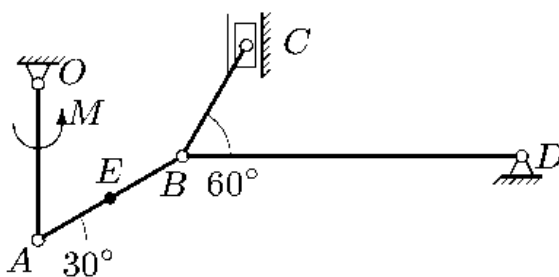
$\omega_{OA_z} = 0.6$  рад/с,  
 $F_{\text{ТР}} = 40$  Н,  $M_{\text{ТР}} = 40$  Нм,  
 $m_A = 4$  кг,  $m_B = 6$  кг,  
 $m_C = 5$  кг,  $m_E = 7$  кг,  
 $OA = 33$  см,  $DB = 63$  см,  
 $AB = 30$  см,  $BC = 23$  см.

9.



$\omega_{OA_z} = 0.7$  рад/с,  
 $F_{\text{ТР}} = 10$  Н,  $M_{\text{ТР}} = 10$  Нм,  
 $m_A = 1$  кг,  $m_B = 3$  кг,  
 $m_C = 2$  кг,  $m_E = 5$  кг,  
 $OA = 27$  см,  $DB = 64$  см,  
 $AB = 30$  см,  $BC = 23$  см.

10.



$\omega_{OA_z} = 0.7$  рад/с,  
 $F_{\text{ТР}} = 20$  Н,  $M_{\text{ТР}} = 15$  Нм,  
 $m_A = 2$  кг,  $m_B = 4$  кг,  
 $m_C = 3$  кг,  $m_E = 3$  кг,  
 $OA = 28$  см,  $DB = 61$  см,  
 $AB = 30$  см,  $BC = 23$  см.

## Ответы

	$v_A$	$v_B$	$v_C$	$v_E$	$W_A$	$W_B$	$W_C$	$W_E$	$M$
	м/с				м/с <sup>2</sup>				Нм
1	0.208	0.208	0.208	0.208	0.166	0.493	0.024	0.313	0.829
2	0.189	0.189	0.189	0.189	0.132	0.332	0.029	0.221	10.537
3	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.265	0.231	0.229	6.702
4	0.180	0.104	0.104	0.104	0.054	0.217	0.042	0.085	60.684
5	0.210	0.210	0.210	0.210	0.063	0.394	0.167	0.179	55.255
6	0.240	0.240	0.240	0.170	0.048	0.192	0.339	0.098	171.402
7	0.192	0.192	0.192	0.136	0.115	0.526	0.582	0.320	24.752
8	0.198	0.343	0.343	0.198	0.119	1.264	1.573	0.573	170.651
9	0.189	0.327	0.327	0.189	0.132	1.385	2.525	0.758	-8.364
10	0.196	0.339	0.339	0.196	0.137	1.229	1.105	0.547	72.748

### 13.3. Общее уравнение динамики для системы с двумя степенями свободы

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** *Механическая система с идеальными стационарными связями имеет две степени свободы. К системе приложены известные активные силы. Найти ускорения тел системы.*

#### ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Выбираем две обобщенные координаты. В качестве обобщенных координат можно брать перемещения точек системы или угловые перемещения тел, однозначно определяющие ее положение.

2. Ускорения центров масс тел и угловые ускорения тел выражаем через вторые производные выбранных обобщенных координат (обобщенные ускорения).

3. Прикладываем к системе активные силы и силы инерции. Вектор силы инерции вычисляем по формуле  $\vec{F} = -m\vec{W}$ , где  $\vec{W}$  ускорение центра масс тела. Вектор момента сил инерции находим по формуле  $\vec{M}^F = -J\vec{\varepsilon}$ , где  $\vec{\varepsilon}$  — угловое ускорение. Реакции идеальных связей не указываем.

4. Даем малое приращение (вариацию) одной из обобщенных координат, фиксируя вторую координату. Составляем первое общее уравнение динамики, представляющее собой равенство нулю суммы элементарных работ всех сил, включая силы инерции, на этом приращении. Так же составляем и второе уравнение, при этом приращение получает другая обобщенная координата.

5. Решаем систему двух алгебраических линейных уравнений с двумя неизвестными обобщенными ускорениями.

**ПРИМЕР.** Механическая система с идеальными стационарными связями имеет две степени свободы и состоит из цилиндра и бруска.

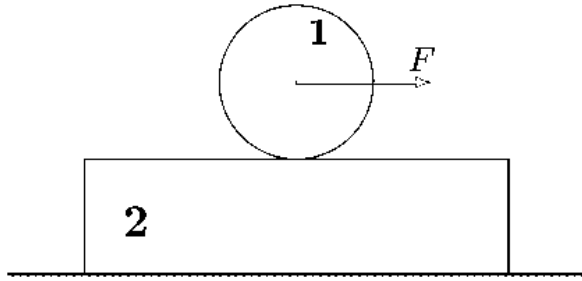


Рис. 155

К оси однородного цилиндра массой  $m_1$  приложена горизонтальная сила  $F$ . Цилиндр катится без проскальзывания по бруску массой  $m_2$ . Трение между бруском и горизонтальным основанием отсутствует (рис. 155). Трением качения пренебречь. Найти ускорение центра масс цилиндра.

**РЕШЕНИЕ**

1. Выбираем две независимые переменные, однозначно описывающие положение системы. Пусть переменная  $x_1$  указывает положение центра цилиндра по отношению к неподвижной системе отсчета, а  $x_2$  — положение бруска относительно той же неподвижной системы

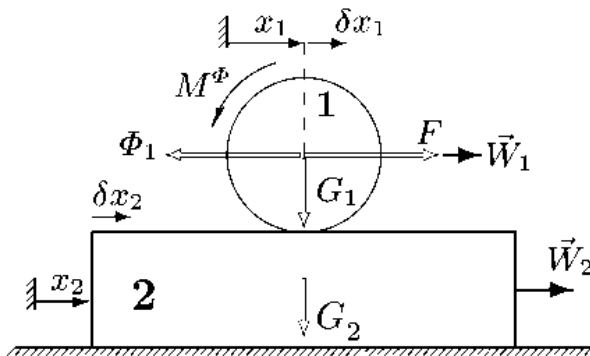


Рис. 156

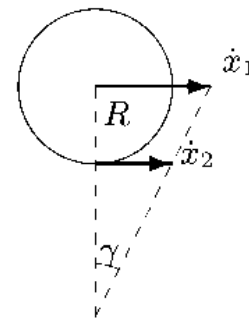


Рис. 157

отсчета. Направляем оси  $x_1$  и  $x_2$  в сторону движения, т.е. направо (рис.156).

2. Ускорения центров масс тел и угловые ускорения тел выражаем через обобщенные ускорения. Ускорение центра цилиндра  $W_1 = \ddot{x}_1$ , ускорение бруска  $W_2 = \ddot{x}_2$ . Для того, чтобы выразить угловое ускорение цилиндра  $\varepsilon$  через ускорения центров бруска и цилиндра, находим положение мгновенного центра скоростей цилиндра (рис.157). Получаем зависимость  $\omega_z = -\text{tg}\gamma = -(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)/R$ . Дифференцируя  $\omega_z$  по времени, находим, что  $\varepsilon_z = -(W_1 - W_2)/R$ .

3. Прикладываем к системе активные силы  $\vec{G}_1, \vec{G}_2$  и силы инерции  $\vec{\Phi}_1$  и  $\vec{\Phi}_2$ , проекции которых на ось  $x$  вычислены по формулам  $\Phi_{1x} = -m_1 W_1, \Phi_{2x} = -m_2 W_2$ , где  $W_1 = \ddot{x}_1, W_2 = \ddot{x}_2$ . К цилиндру прикладываем момент сил инерции. Момент инерции цилиндра относительно центра масс  $J = m_1 R^2/2$ . В проекции на ось  $z$ , перпендикулярную рисунку, получаем, что  $M_z^\Phi = -J\varepsilon_z = m_1 R(W_1 - W_2)/2$ .

4. Даем системе малое приращение обобщенной координаты  $\delta x_1$ , фиксируя координату  $x_2$ :  $\delta x_2 = 0$  (брусек неподвижен, цилиндр поворачивается по часовой стрелке на угол  $\delta\varphi_z = -\delta x_1/R$ ).

Составляем первое общее уравнение динамики как сумму скалярных произведений векторов сил и векторов перемещений:

$$F\delta x_1 + \Phi_{1x}\delta x_1 + M_z^\Phi\delta\varphi_z = 0,$$

или

$$F\delta x_1 - m_1 W_1 \delta x_1 - J \frac{W_1 - W_2}{R} \frac{\delta x_1}{R} = 0.$$

Сокращаем на  $\delta x_1 \neq 0$ , тогда

$$F - m_1 W_1 - \frac{m_1}{2}(W_1 - W_2) = 0. \quad (1)$$

Второе уравнение получаем в предположении, что  $\delta x_2 \neq 0, \delta x_1 = 0$ . Цилиндр, имея неподвижную ось, повернется против часовой стрелки на угол  $\delta x_2/R$ . Получим уравнение  $M_z^\Phi\delta x_2/R + \Phi_{2x}\delta x_2 = 0$ , или

$$J \frac{W_1 - W_2}{R} \frac{\delta x_2}{R} - m_2 W_2 \delta x_2 = 0.$$

Делим уравнение на  $\delta x_2 \neq 0$ ,

$$\frac{m_1}{2}(W_1 - W_2) - m_2 W_2 = 0. \quad (2)$$

5. Решаем систему двух алгебраических линейных уравнений (1), (2) относительно ускорений. Получаем ускорение центра масс цилиндра  $W_1$  и ускорение бруска  $W_2$ :

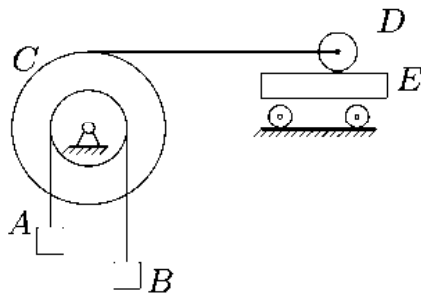
$$W_1 = F \frac{m_1 + 2m_2}{m_1(m_1 + 3m_2)}, \quad W_2 = \frac{F}{m_1 + 3m_2}$$

Интересно проанализировать решение. При  $m_2 = 0$ , т.е. при невесомом бруске, из выражения для  $W_1$  следует, что  $W_1 = F/m_1$ . Такое

ускорение имеет тело массой  $m_1$  при *поступательном* движении под действием силы  $F$ . Таким образом, невесомый брусок, без трения скользящий по плоскости, выполняет для цилиндра роль идеальной смазки, в результате чего цилиндр, лишенный зацепления с неподвижной плоскостью, не вращается, а перемещается поступательно. Если же устремить массу бруска к бесконечности, то получится простое решение о качении без проскальзывания однородного цилиндра по неподвижной плоскости:  $W_1 = 2F/(3m_1)$  <sup>\*)</sup>.

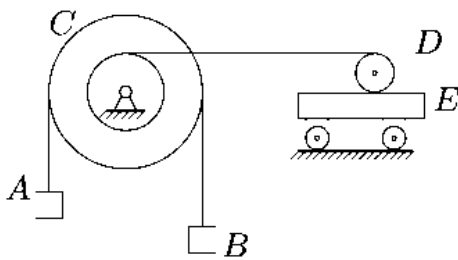
**УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.** Механическая система с идеальными стационарными связями имеет две степени свободы и состоит из пяти тел. Блок (или однородный цилиндр)  $D$  катится без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости или по подвижной тележке массой  $m_E$ . Массой колес тележки пренебречь. Грузы  $A$ ,  $B$  и ось однородного цилиндра  $E$  перемещаются вертикально под действием сил тяжести. Трением качения пренебречь. Найти ускорение груза  $A$ .

1.



$$\begin{aligned} r_c &= 12 \text{ см}, & m_A &= 9 \text{ кг}, \\ R_c &= 28 \text{ см}, & m_B &= 4 \text{ кг}, \\ i_c &= 26 \text{ см}, & m_C &= 4 \text{ кг}, \\ r_D &= 19 \text{ см}, & m_D &= 5 \text{ кг}, \\ & & m_E &= 1 \text{ кг}. \end{aligned}$$

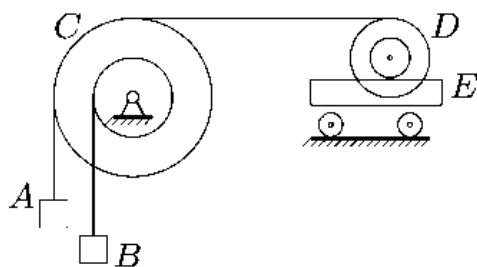
2.



$$\begin{aligned} r_c &= 14 \text{ см}, & m_A &= 4 \text{ кг}, \\ R_c &= 32 \text{ см}, & m_B &= 1 \text{ кг}, \\ i_c &= 28 \text{ см}, & m_C &= 5 \text{ кг}, \\ r_D &= 11 \text{ см}, & m_D &= 7 \text{ кг}, \\ & & m_E &= 2 \text{ кг}. \end{aligned}$$

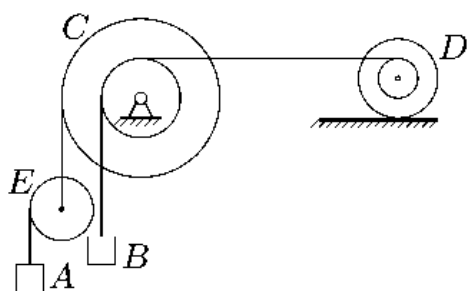
<sup>\*)</sup> Проверим это решение применив, например, теорему об изменении кинетической энергии (§ 12.3, с. 247). Работа силы  $F$  на перемещении  $x_1$  равна  $Fx_1$ . Кинетическая энергия в начальном положении —  $T_0$ , в конечном положении —  $3m_1v_1^2/4$ . Изменение кинетической энергии равно работе силы:  $3m_1v_1^2/4 - T_0 = Fx_1$ . Дифференцируя это равенство по времени  $t$  с учетом  $v_1 = dx_1/dt$  и  $T_0 = \text{const}$ , получаем искомый ответ.

3.



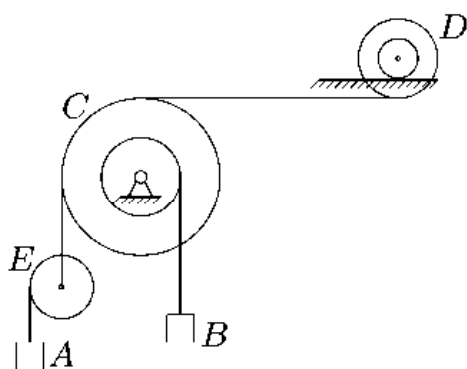
$$\begin{aligned}
 r_c &= 16 \text{ cm}, & m_A &= 6 \text{ кг}, \\
 R_c &= 33 \text{ cm}, & m_B &= 2 \text{ кг}, \\
 i_c &= 30 \text{ cm}, & m_C &= 6 \text{ кг}, \\
 r_D &= 12 \text{ cm}, & m_D &= 6 \text{ кг}, \\
 R_D &= 21 \text{ cm}, & m_E &= 3 \text{ кг}, \\
 i_D &= 17 \text{ cm}, & &
 \end{aligned}$$

4.



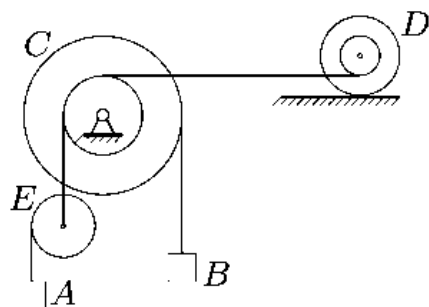
$$\begin{aligned}
 r_c &= 18 \text{ cm}, & m_A &= 7 \text{ кг}, \\
 R_c &= 37 \text{ cm}, & m_B &= 3 \text{ кг}, \\
 i_c &= 32 \text{ cm}, & m_C &= 8 \text{ кг}, \\
 r_D &= 13 \text{ cm}, & m_D &= 8 \text{ кг}, \\
 R_D &= 23 \text{ cm}, & m_E &= 4 \text{ кг}, \\
 i_D &= 18 \text{ cm}, & &
 \end{aligned}$$

5.



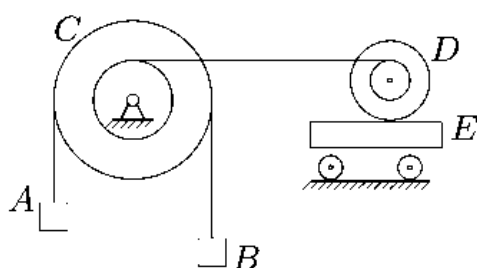
$$\begin{aligned}
 r_c &= 20 \text{ cm}, & m_A &= 15 \text{ кг}, \\
 R_c &= 40 \text{ cm}, & m_B &= 3 \text{ кг}, \\
 i_c &= 34 \text{ cm}, & m_C &= 9 \text{ кг}, \\
 r_D &= 14 \text{ cm}, & m_D &= 9 \text{ кг}, \\
 R_D &= 24 \text{ cm}, & m_E &= 5 \text{ кг}, \\
 i_D &= 19 \text{ cm}, & &
 \end{aligned}$$

6.



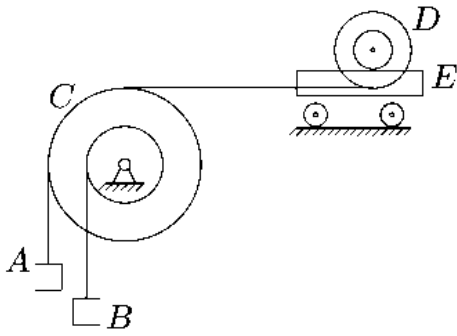
$$\begin{aligned}
 r_c &= 22 \text{ cm}, & m_A &= 26 \text{ кг}, \\
 R_c &= 41 \text{ cm}, & m_B &= 4 \text{ кг}, \\
 i_c &= 36 \text{ cm}, & m_C &= 10 \text{ кг}, \\
 r_D &= 15 \text{ cm}, & m_D &= 8 \text{ кг}, \\
 R_D &= 25 \text{ cm}, & m_E &= 6 \text{ кг}, \\
 i_D &= 21 \text{ cm}, & &
 \end{aligned}$$

7.



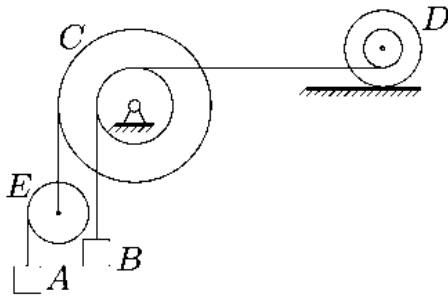
$$\begin{aligned}
 r_c &= 12 \text{ cm}, & m_A &= 15 \text{ кг}, \\
 R_c &= 30 \text{ cm}, & m_B &= 5 \text{ кг}, \\
 i_c &= 26 \text{ cm}, & m_C &= 10 \text{ кг}, \\
 r_D &= 16 \text{ cm}, & m_D &= 7 \text{ кг}, \\
 R_D &= 25 \text{ cm}, & m_E &= 7 \text{ кг}, \\
 i_D &= 22 \text{ cm}, & &
 \end{aligned}$$

8.



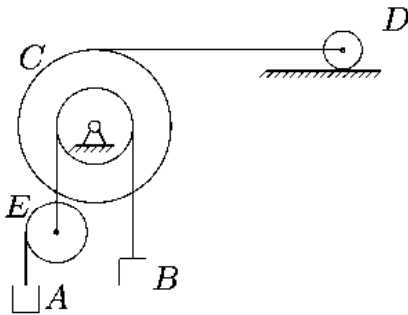
$$\begin{aligned}
 r_C &= 14 \text{ см}, & m_A &= 18 \text{ кг}, \\
 R_C &= 28 \text{ см}, & m_B &= 5 \text{ кг}, \\
 i_C &= 28 \text{ см}, & m_C &= 10 \text{ кг}, \\
 r_D &= 17 \text{ см}, & m_D &= 3 \text{ кг}, \\
 R_D &= 24 \text{ см}, & m_E &= 8 \text{ кг}, \\
 i_D &= 23 \text{ см}, & &
 \end{aligned}$$

9.



$$\begin{aligned}
 r_C &= 18 \text{ см}, & m_A &= 18 \text{ кг}, \\
 R_C &= 33 \text{ см}, & m_B &= 6 \text{ кг}, \\
 i_C &= 32 \text{ см}, & m_C &= 11 \text{ кг}, \\
 r_D &= 18 \text{ см}, & m_D &= 4 \text{ кг}, \\
 R_D &= 26 \text{ см}, & m_E &= 9 \text{ кг}, \\
 i_D &= 25 \text{ см}, & &
 \end{aligned}$$

10.



$$\begin{aligned}
 r_C &= 20 \text{ см}, & m_A &= 8 \text{ кг}, \\
 R_C &= 36 \text{ см}, & m_B &= 4 \text{ кг}, \\
 i_C &= 34 \text{ см}, & m_C &= 4 \text{ кг}, \\
 r_D &= 19 \text{ см}, & m_D &= 5 \text{ кг}, \\
 & & m_E &= 1 \text{ кг}.
 \end{aligned}$$

Ответы

1.  $0.780 \text{ м/с}^2$ . 2.  $3.165 \text{ м/с}^2$ . 3.  $4.951 \text{ м/с}^2$ . 4.  $8.763 \text{ м/с}^2$ .

5.  $8.531 \text{ м/с}^2$ . 6.  $8.804 \text{ м/с}^2$ . 7.  $3.473 \text{ м/с}^2$ . 8.  $5.613 \text{ м/с}^2$ .

9.  $8.485 \text{ м/с}^2$ . 10.  $9.198 \text{ м/с}^2$ .

Ответы на типичные вопросы, возникающие при решении задачи

1. *Радиус цилиндра в задаче не задан. Можно ли решить такую задачу?*

Можно. В процессе решения этот радиус сократится.

2. *Как проверить решение задачи?*

Решить задачу, выбрав другие обобщенные координаты, или другим способом, например, с помощью уравнения Лагранжа 2-го рода (§ 13.4, 300).

Предупреждение типичных ошибок

1. Особое внимание уделите выбору обобщенных координат. Удачный выбор упрощает решение.

2. Силы инерции, введенные в общее уравнение динамики, являются характерной составляющей этого метода. Не вводите силы инерции в других методах, например, при решении задач динамики с помощью теоремы об изменении кинетической энергии или в уравнение Лагранжа 2-го рода.

3. Не путайте близкие по звучанию, но совершенно разные величины: момент инерции и момент сил инерции. В первом случае это физическая характеристика тела, зависящая от распределения масс, например,  $J = mR^2/2$ , для однородного цилиндра относительно его оси, во втором — динамическая величина, зависящая от вращения тела:  $\vec{M}^\Phi = -J\vec{\epsilon}$ .

## 13.4. Уравнение Лагранжа 2-го рода

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** *Механическая система с идеальными стационарными связями имеет две степени свободы. Найти ускорения тел системы.*

**ПЛАН РЕШЕНИЯ.** Постановка задачи не отличается от § 13.3. Разница только в методе решения.

1. Выбираем две обобщенные координаты. В качестве обобщенных координат можно брать угловые или линейные перемещения точек систем, однозначно описывающие ее положение.

2. Вычисляем кинетическую энергию системы.

3. Вычисляем обобщенные силы. Для этого даем системе малое приращение одной из обобщенных координат  $\delta q_1$ , фиксируя вторую координату,  $\delta q_2 = 0$ . Определяем сумму элементарных работ  $\delta A_1$  всех сил на этом приращении. Обобщенную силу определяем по формуле  $Q_1 = \delta A_1 / \delta q_1$ . Так же находим и другую обобщенную силу.

4. Записываем систему уравнений Лагранжа 2-го рода <sup>\*)</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= Q_1, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= Q_2. \end{aligned} \tag{1}$$

5. Решаем систему двух алгебраических линейных уравнений (1) с двумя неизвестными обобщенными ускорениями  $\ddot{q}_1$  и  $\ddot{q}_2$ .

---

<sup>\*)</sup> *Лагранж Жозеф Луи* (1736 – 1813) — французский математик, механик, астроном.



ПРИМЕР 1. Рассмотрим задачу на с. 295, рис. 155. Решим ее с помощью уравнения Лагранжа 2-го рода.

РЕШЕНИЕ

1. Выбираем две независимые переменные  $q_1 = x_1$  и  $q_2 = x_2$ , однозначно описывающие положение системы. Пусть переменная  $x_1$  указывает положение центра цилиндра по отношению к неподвижной системе отсчета, а  $x_2$  — положение бруска относительно той же неподвижной системы отсчета. Направляем оси  $x_2$  и  $x_1$  в сторону движения, т.е. направо (рис.158).

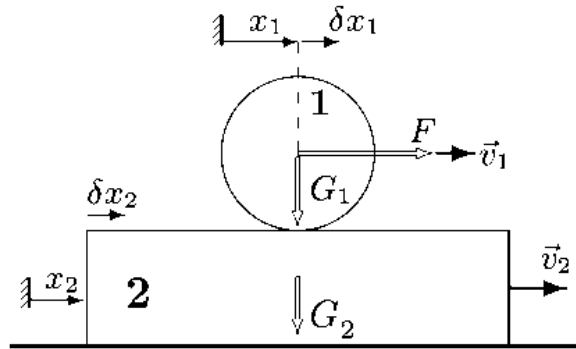


Рис. 158

2. Выражаем кинетическую энергию системы через обобщенные скорости  $\dot{x}_1 = v_1$  и  $\dot{x}_2 = v_2$ .

Кинетическую энергию всей системы представляем в виде суммы кинетических энергий цилиндра и бруска:  $T = T_1 + T_2$ .

Находим кинетическую энергию цилиндра, совершающего плоское движение:

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{J \omega_1^2}{2}. \quad (2)$$

Угловая скорость  $\omega_1$  зависит от разности скоростей центра и точки касания (рис. 157, с. 295). Так как цилиндр катится по бруску без проскальзывания, скорость точки касания равна скорости бруска  $v_2$ :

$$\omega_1 = |v_1 - v_2|/R.$$

Подставляем в (2) момент инерции однородного цилиндра относительно его оси,  $J = m_1 R^2/2$ . В результате получаем выражение для кинетической энергии цилиндра:

$$T_1 = \frac{m_1}{4} (2v_1^2 + (v_1 - v_2)^2).$$

Кинетическая энергия бруска

$$T_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Кинетическая энергия всей системы

$$T = \frac{m_1}{4}(2v_1^2 + (v_1 - v_2)^2) + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

3. Обобщенную силу  $Q_1$  вычисляем по формуле  $Q_1 = \delta A_1 / \delta x_1$ , где  $\delta A_1$  — элементарная работа всех сил на перемещении  $\delta x_1$ . При вычислении элементарной работы  $\delta A_1$  на приращении обобщенной координаты  $x_1$  фиксируется другая обобщенная координата, т.е.  $\delta x_2 = 0$ . Очевидно, что кроме силы  $F$  на таком перемещении ни одна сила работы не совершает, следовательно,  $\delta A_1 = F \delta x_1$  и  $Q_1 = F$ . Аналогично,  $Q_2 = 0$ .

4. Записываем уравнения Лагранжа (1) и вычисляем входящие в них производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial v_1} &= m_1 v_1 + \frac{m_1}{2}(v_1 - v_2), & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial v_1} \right) &= \frac{3m_1}{2} W_1 - \frac{m_1}{2} W_2, \\ \frac{\partial T}{\partial v_2} &= m_2 v_2 + \frac{m_1}{2}(v_2 - v_1), & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial v_2} \right) &= -\frac{m_1}{2} W_1 + \left( \frac{m_1}{2} + m_2 \right) W_2, \\ \frac{\partial T}{\partial x_1} &= 0, & \frac{\partial T}{\partial x_2} &= 0, \end{aligned}$$

где  $W_1 = \dot{v}_1$ ,  $W_2 = \dot{v}_2$ . В результате уравнения Лагранжа принимают вид

$$\begin{aligned} 3W_1 m_1 - W_2 m_1 &= 2F, \\ -W_1 m_1 + W_2 (m_1 + 2m_2) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

5. Решаем систему уравнений (3):

$$W_1 = F \frac{m_1 + 2m_2}{m_1(m_1 + 3m_2)}, \quad W_2 = \frac{F}{m_1 + 3m_2}.$$

**ПРИМЕР 2.** Механическая система с идеальными стационарными связями имеет две степени свободы и состоит из груза  $A$  и однородных цилиндров  $B$  и  $C$ . Цилиндр  $C$  падает вертикально вниз и передает движение цилиндру  $B$  и грузу  $A$ , с которыми он связан нерастяжимой нитью. Нить разматывается с цилиндра  $C$ . Даны массы тел  $m_A$ ,  $m_B$ ,  $m_C$  (рис.159). Найти ускорение груза  $A$ .

### РЕШЕНИЕ

1. Выбираем две независимые переменные  $q_1 = x$  и  $q_2 = \varphi$ , однозначно описывающие положение системы (рис.160). Переменная  $x$  указывает положение груза по отношению к неподвижной системе отсчета, а  $\varphi$  — поворот цилиндра  $C$  (рис.159).

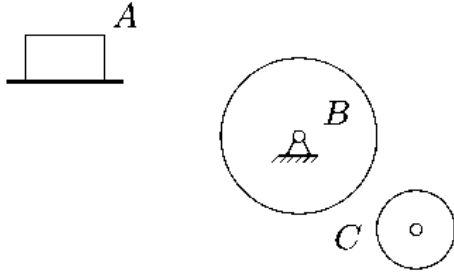


Рис. 159

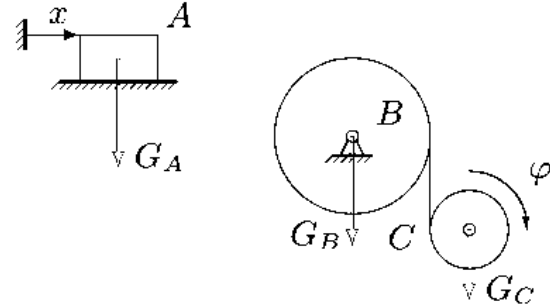


Рис. 160

2. Выразим кинетическую энергию системы через обобщенные скорости  $\dot{x}$  и  $\dot{\varphi}$ .

Кинетическую энергию всей системы представим в виде суммы кинетических энергий груза и цилиндров:  $T = T_A + T_B + T_C$ .

Находим кинетическую энергию поступательного движения груза:

$$T_A = \frac{m_A \dot{x}^2}{2}.$$

Кинетическая энергия вращающегося цилиндра

$$T_B = \frac{J_B \omega_B^2}{2} = \frac{m_B R_B^2 (\dot{x}/R_B)^2}{2 \cdot 2} = \frac{m_B \dot{x}^2}{4}.$$

Находим кинетическую энергию цилиндра  $C$ , совершающего плоское движение:

$$T_C = \frac{m_C v_C^2}{2} + \frac{J_C \omega_C^2}{2}.$$

Угловая скорость цилиндра  $C$  —  $\omega_C = \dot{\varphi}$ . Скорость центра масс складывается из переносной скорости  $\dot{x}$  и относительной  $R_C \dot{\varphi}$ :

$$T_C = \frac{m_C (\dot{x} + R_C \dot{\varphi})^2}{2} + \frac{m_C R_C^2 \dot{\varphi}^2}{4}.$$

Кинетическая энергия всей системы

$$T = (1/2)\dot{x}^2(m_A + m_B/2 + m_C) + \dot{x}\dot{\varphi}m_C R_C + (3/4)\dot{\varphi}^2 m_C R_C^2.$$

3. Обобщенную силу  $Q_x$  вычислим по формуле  $Q_x = \delta A_x / \delta x$ , где  $\delta A_x$  — элементарная работа всех сил на перемещении  $\delta x$ . Фиксируем угол поворота цилиндра  $C$ :  $\delta\varphi = 0$ . Груз  $A$  перемещается по горизонтали на расстояние  $\delta x$ , цилиндр  $B$  поворачивается на некоторый угол, а цилиндр  $C$  поступательно перемещается вниз на расстояние  $\delta x$ . На этом перемещении работу совершает только сила  $m_C g$ , следовательно,  $\delta A_x = m_C g \delta x$  и  $Q_x = m_C g$ . Аналогично, фиксируя перемещение груза ( $\delta x = 0$ ), даем приращение углу поворота цилиндра  $C$  и вычисляем  $Q_\varphi = m_C g R_C$ .

4. Записываем уравнения Лагранжа (1) и вычисляем входящие в них производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= \dot{x}(m_A + 0.5m_B + m_C) + \dot{\varphi} R_C m_C, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) &= \ddot{x}(m_A + 0.5m_B + m_C) + \ddot{\varphi} R_C m_C, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= \dot{x} R_C m_C + 1.5\dot{\varphi} R_C^2 m_C, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \ddot{x} R_C m_C + 1.5\ddot{\varphi} R_C^2 m_C, \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned}$$

В результате уравнения Лагранжа принимают вид

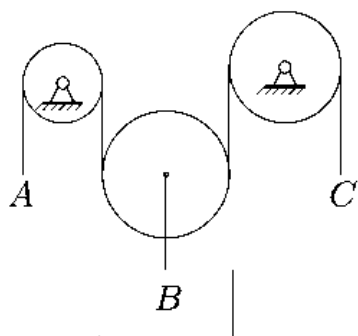
$$\begin{aligned} (m_A + 0.5m_B + m_C)\ddot{x} + m_C R_C \ddot{\varphi} &= m_C g, \\ m_C \ddot{x} + 1.5m_C \ddot{\varphi} R_C &= m_C g. \end{aligned} \tag{4}$$

5. Решаем систему уравнений (4) и находим ускорения:

$$\ddot{x} = \frac{2m_C g}{6m_A + 3m_B + 2m_C}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{2(2m_A + m_B)g}{R_C(6m_A + 3m_B + 2m_C)}.$$

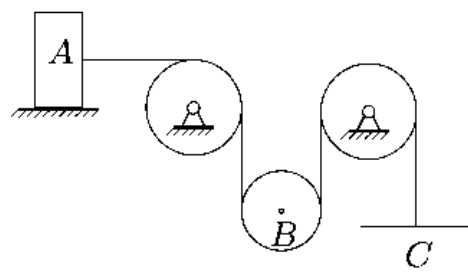
*УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Механическая система с идеальными стационарными связями имеет две степени свободы и движется под действием сил тяжести. Три элемента механизма наделены массами, кратными некоторой массе  $m$ . Трением пренебречь. Подвижные и неподвижные блоки считать однородными цилиндрами. Найти ускорение груза  $A$  или центра цилиндра  $A$ .*

1.



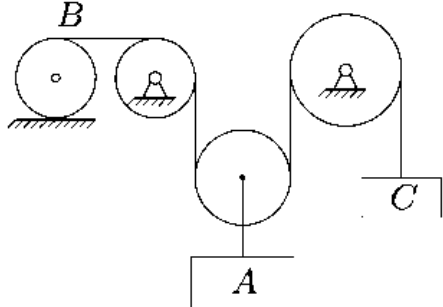
$$m_A = 3m, m_B = 5m, m_C = 4m.$$

2.



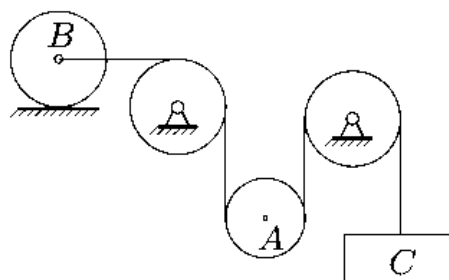
$$m_A = 5m, m_B = 3m, m_C = 3m.$$

3.



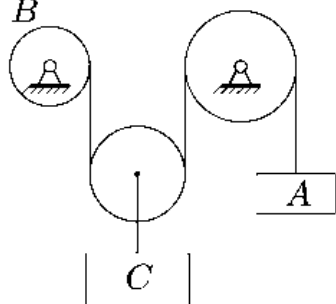
$$m_A = 4m, m_B = 5m, m_C = 4m.$$

4.



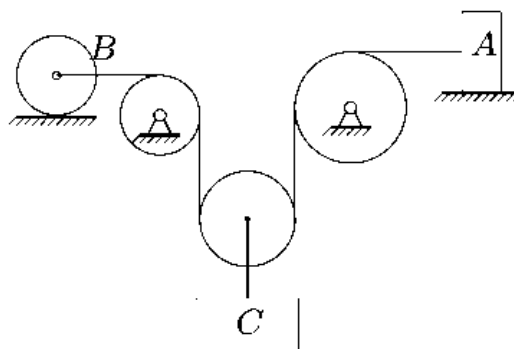
$$m_A = 5m, m_B = 7m, m_C = 4m.$$

5.



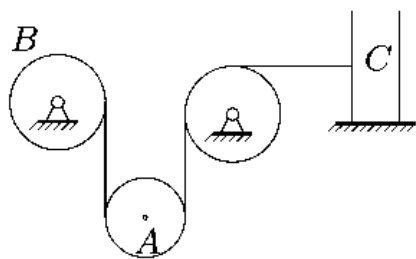
$$m_A = 3m, m_B = 3m, m_C = 2m.$$

6.



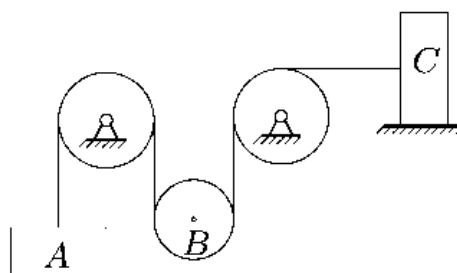
$$m_A = 5m, m_B = 4m, m_C = 3m.$$

7.

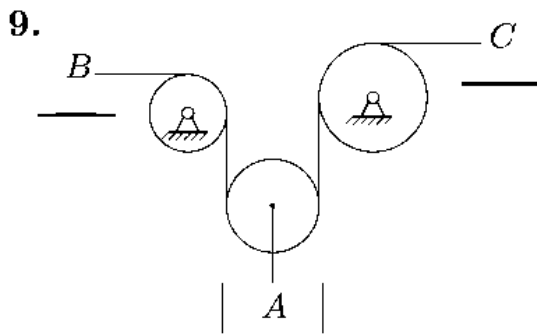


$$m_A = 4m, m_B = 6m, m_C = 7m.$$

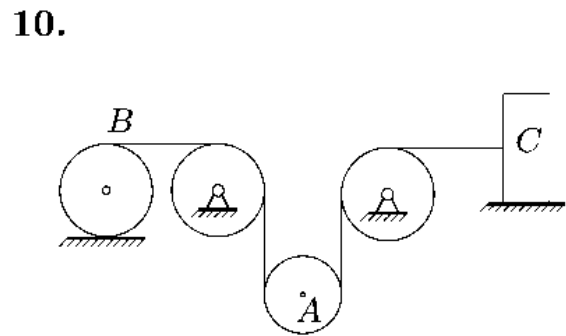
8.



$$m_A = 3m, m_B = 5m, m_C = 8m.$$



$$m_A = 3m, m_B = 4m, m_C = 5m.$$



$$m_A = 4m, m_B = 6m, m_C = 7m.$$

В таблице ответов даны коэффициенты дифференциальных уравнений движения системы и искомое ускорение. Система (после сокращения на  $m$ ) имеет вид

$$a_{11}^u \ddot{x}_1 + a_{12}^u \ddot{x}_2 = Q_1,$$

$$a_{21}^u \ddot{x}_1 + a_{22}^u \ddot{x}_2 = Q_2.$$

В качестве обобщенных координат  $x_1, x_2$  взяты линейные перемещения точек ободов цилиндров с неподвижными осями. Координата  $x_1 > 0$  соответствует повороту левого цилиндра по часовой стрелке,  $x_2 > 0$  — повороту правого цилиндра против часовой стрелки. Коэффициенты  $a_{ij}^u$  — безразмерные,  $Q_1, Q_2$  и  $W_A$  — в  $m/c^2$ .

Ответы

	$a_{11}^u$	$a_{12}^u$	$a_{22}^u$	$Q_1$	$Q_2$	$W_A$
1	4.250	1.250	5.250	-4.905	-14.715	0.355
2	6.125	0.375	4.125	14.715	-14.715	2.636
3	2.875	1.000	5.000	19.620	-19.620	1.559
4	12.375	0.625	5.875	24.525	-14.715	0.305
5	2.000	0.500	3.500	9.810	-19.620	6.540
6	6.750	0.750	5.750	14.715	14.715	2.308
7	4.500	0.500	8.500	19.620	19.620	3.098
8	4.875	0.625	9.875	-4.905	24.525	1.335
9	4.750	0.750	5.750	14.715	14.715	2.475
10	3.750	0.500	8.500	19.620	19.620	3.490

Ответы на типичные вопросы, возникающие при решении задачи \*)

1. Как проверить решение задачи?

Решить задачу, выбрав другие обобщенные координаты или другим способом, например, с помощью общего уравнения динамики (§ 13.3, с. 294).

\*) См. также ответы на с. 299

2. В результате решения получается отрицательное ускорение, а в ответе оно положительное. Что это значит?

В ответе даны абсолютные величины ускорений.

3. Как выразить скорость оси цилиндра, подвешенного на двух нитях и совершающего плоское движение, через скорости нитей (например, цилиндра  $A$  в варианте 10)?

Если скорости нитей  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  направлены в одну сторону, то скорость оси цилиндра  $v = (v_1 + v_2)/2$ . Это следует из того, что концы векторов скоростей точек неизменяемого отрезка (диаметра) лежат на одной прямой. Угловую скорость легче всего выразить, определив положение МЦС цилиндра (рис. 87, с. 159). Получаем:  $\omega = (v_1 - v_2)/(2R)$ , где  $R$  — неизвестный радиус цилиндра (в процессе решения он сократится и в ответ не войдет). Если скорость  $\vec{v}_2$  направлена в сторону, противоположную  $\vec{v}_1$ , то результаты получаются те же, но знак у  $v_2$  заменится на противоположный.

4. В условии не дана масса  $m$ , через которую выражены остальные массы. Какое значение  $m$  брать при решении?

Масса  $m$  сократится в процессе решения и в ответ не войдет.

## 13.5. Уравнение Лагранжа. Нелинейные уравнения движения

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** *Механическая система с одной степенью свободы характеризуется нелинейными кинематическими соотношениями. Составить уравнение движения системы.*

### ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Выбираем обобщенную координату. В качестве обобщенной координаты  $q$  можно брать угол поворота одного из тел системы или декартову координату какой-либо точки, однозначно описывающую положение системы. Часто обобщенная координата задана в условии задачи.

2. Составляем кинематические графы системы. Выражаем через обобщенную скорость  $\dot{q}$  угловые скорости тел и скорости точек приложения активных сил (§ 8.5, с. 188).

3. Вычисляем кинетическую энергию системы (§ 12.2, с. 241).

4. Находим обобщенную силу, вычисляя виртуальные мощности

активных сил:

$$Q = \frac{1}{\dot{q}} \left( \sum_{i=1}^{N_1} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{N_2} \vec{M}_i \cdot \vec{\omega}_i \right).$$

5. Находим частные производные  $\partial T/\partial \dot{q}$  и  $\partial T/\partial q$  и записываем уравнение Лагранжа 2-го рода <sup>\*)</sup>:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q. \quad (1)$$

**ПРИМЕР 1.** Рассмотрим механическую систему, приведенную в примере § 12.2. Составим для нее уравнение движения (рис. 126, с. 242).

**РЕШЕНИЕ**

Вычисление скоростей и кинетической энергии, т.е. выполнение первых трех пунктов плана, подробнее рассмотрены на с. 243.

1. Выбираем обобщенную координату  $\varphi$  — угол поворота цилиндра 1, соединенного со стержнем  $AB$ .

2. Составляем кинематические графы системы (рис. 127, с. 243) и получаем выражения для скоростей и угловых скоростей:

$$\begin{aligned} \omega_{BCz} &= -\dot{\varphi}, & v_{Cx} &= -2a\dot{\varphi} \sin \varphi, \\ v_{Dx} &= -(3/2)a\dot{\varphi} \sin \varphi, & v_{Dy} &= (1/2)a\dot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

3. Вычисляем кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий цилиндров и стержня (с. 244):

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} (A + B \sin^2 \varphi),$$

где  $A$  и  $B$  константы:  $A = m_1 R^2/2 + m_3 a^2/3$ ,  $B = 2a^2(3m_2 + m_3)$ .

4. Находим обобщенную силу, вычисляя виртуальные мощности активных сил:

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}} (\vec{G}_1 \cdot \vec{v}_A + \vec{G}_2 \cdot \vec{v}_C + \vec{G}_3 \cdot \vec{v}_D + \vec{M} \cdot \vec{\omega}_A + \vec{F} \cdot \vec{v}_C).$$

<sup>\*)</sup> Если кинетическую энергию можно представить в виде  $T = 0.5\dot{q}^2 f(q)$ , где  $f(q)$  — известная функция обобщенной координаты, то уравнение Лагранжа 2-го рода имеет вид

$$\ddot{q}f(q) + 0.5\dot{q}^2 f'(q) = Q,$$

где  $f'(q) = df/dq$ .



Горизонтальная плоскость, по которой катится цилиндр, и шарнир, на котором закреплен цилиндр 1, являются идеальными связями. Виртуальные мощности этих реакций равны нулю, и в выражение для  $Q$  эти силы не входят. Аналогично, не входит в обобщенную силу и сила трения, приложенная при отсутствии проскальзывания к неподвижной точке (точке касания поверхности) цилиндра 2. Учитывая выражения для векторов сил,

$$\vec{G}_i = \{0, -m_i g, 0\}, i = 1...3, \vec{F} = \{F, 0, 0\},$$

момента  $\vec{M} = \{0, 0, M\}$ , выражение  $\vec{\omega}_A = \{0, 0, \dot{\varphi}\}$  и соотношения (2), получаем в результате обобщенную силу:

$$Q = M - 0.5m_3 ag \cos \varphi - 2aF \sin \varphi.$$

5. Находим частные производные

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}(A + B \sin^2 \varphi), \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} B \sin 2\varphi,$$

и полную производную по времени

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \ddot{\varphi}(A + B \sin^2 \varphi) + \dot{\varphi}^2 B \sin 2\varphi.$$

Записываем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\ddot{\varphi}(A + B \sin^2 \varphi) + 0.5\dot{\varphi}^2 B \sin 2\varphi = M - 0.5m_3 ag \cos \varphi - 2aF \sin \varphi.$$

**ПРИМЕР 2.** Механическая система с одной степенью свободы обладает нелинейными кинематическими соотношениями (рис. 161). Кривошипно-кулисный механизм состоит из маховика 1, кулисы 2, двигателя со шкивом 3, катка 4 и штока 5. К шкиву 3 приложен момент двигателя  $M_{Dz} = M_0 - k\omega_{3z}$ . Каток своим внешним ободом катится без проскальзывания и без трения качения по горизонтальной поверхности. Внутренним ободом каток также без проскальзывания приводит в движение шток, к которому приложена полезная нагрузка, моделируемая силой  $F_{Hx} = -\mu v_{5x}$ . Трением пальца  $A$  в прорези кулисы 2 пренебрегаем. Шкив 3 считаем однородным цилиндром, момент инерции маховика 1 вместе с пальцем  $A$ , закрепленным на нем, равен  $J_1 = 2.5 \text{ кг м}^2$ . Даны массы:  $m_A = 1 \text{ кг}$ ,  $m_2 = 15 \text{ кг}$ ,  $m_3 = 10 \text{ кг}$ ,  $m_4 = 16 \text{ кг}$ , массу штока 5 считать равной нулю. Даны радиусы:  $R_1 = 0.4 \text{ м}$ ,  $O_1 A = r_1 = 0.1 \text{ м}$ ,  $R_3 = 0.3 \text{ м}$ ,

$r_4 = 0.2$  м,  $R_4 = 0.41$  м; радиус инерции  $i_4 = 0.32$  м. Пусковой момент  $M_0 = -30$  Нм; крутизна статической характеристики двигателя  $k = 0.2$  Нмс; коэффициент сопротивления  $\mu = 950$  Нс/м. Составить уравнение движения системы \*) .

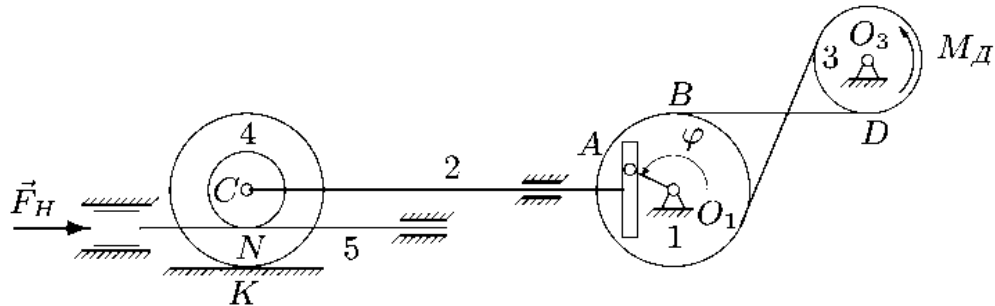


Рис. 161

### РЕШЕНИЕ

1. Выбираем обобщенную координату  $\varphi$  — угол поворота шкива 1, отсчитываемый от горизонтальной оси  $x$  (направленной, как всегда, направо) против часовой стрелки.

2. Составляем кинематические графы системы:

$$O_1 \xrightarrow[\varphi]{r_1} A; \quad O_1 \xrightarrow[\pi/2]{R_1} B; \quad D \xrightarrow[\pi/2]{R_3} O_3; \quad K \xrightarrow[\pi/2]{R_4} C; \quad K \xrightarrow[\pi/2]{R_4 - r_4} N$$

Точка  $K$  является точкой касания внешнего обода блока 4 неподвижной поверхности, проскальзывание отсутствует, поэтому  $\vec{v}_K = 0$ . Шток 5 касается внутреннего обода блока 4 в точке  $N$ , скорость штока  $v_{5x} = v_{Nx}$ . Получаем выражения для проекций скоростей:

$$\begin{aligned} v_{Ax} &= -r_1 \dot{\varphi} \sin \varphi, & v_{Ay} &= r_1 \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ v_{Bx} &= -R_1 \dot{\varphi}, & v_{Dx} &= R_3 \omega_{3z}, \\ v_{Cx} &= -R_4 \omega_{4z}, & v_{Nx} &= v_{5x} = -(R_4 - r_4) \omega_{4z}. \end{aligned} \quad (3)$$

Нить  $BD$  нерастяжимая, отсюда следует кинематическая связь:  $v_{Dx} = v_{Bx}$ . Вместе с (3) это дает  $\omega_{3z} = -(R_1/R_3)\dot{\varphi}$ , т.е. тела 3 и 1 вращаются в разные стороны. Так как шток 2 кулисы является жестким, то  $v_{Ax} = v_{Cx}$ . Отсюда находим угловую скорость блока 4  $\omega_{4z} = (r_1/R_4)\dot{\varphi} \sin \varphi$  и скорость штока  $v_{5x} = -(R_4 - r_4)r_1/R_4 \dot{\varphi} \sin \varphi$ .

3. Вычисляем кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий четырех тел. Маховик 1 с моментом инерции  $J_1$  и

\*) За основу задачи взято задание Д-5 из сборника [15].

шкив 3 с моментом инерции  $m_3 R_3^2/2$  вращаются, каток 4 совершает плоское движение, а кулиса 2 — поступательное:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = \frac{J_1 \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_2 (r_1 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2}{2} + \frac{m_3 R_3^2}{2} \frac{(\dot{\varphi} R_1 / R_3)^2}{2} + \frac{m_4 (r_1 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2}{2} + \frac{m_4 i_4^2 (r_1 / R_4 \dot{\varphi} \sin \varphi)^2}{2}.$$

Для удобства вычислений представим кинетическую энергию в виде

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} (A + B \sin^2 \varphi), \quad (4)$$

где  $A = J_1 + m_3 R_1^2/2$ ,  $B = m_2 r_1^2 + m_4 (i_4 r_1 / R_4)^2 + m_4 r_1^2$ .

4. Вычисляем обобщенную силу:

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}} (\vec{G}_A \cdot \vec{v}_A + \vec{F}_H \cdot \vec{v}_5 + \vec{M}_D \cdot \vec{\omega}_3).$$

Учитывая выражения для векторов

$$\begin{aligned} \vec{G}_A &= \{0, -m_A g, 0\}, & \vec{v}_A &= \{-r_1 \dot{\varphi} \sin \varphi, r_1 \dot{\varphi} \cos \varphi, 0\}, \\ \vec{F}_H &= \{-\mu v_{5x}, 0, 0\}, & \vec{v}_5 &= \{-(R_4 - r_4) r_1 / R_4 \dot{\varphi} \sin \varphi, 0, 0\}, \\ \vec{M}_D &= \{0, 0, M_0 - k \omega_{3z}\}, & \vec{\omega}_3 &= \{0, 0, -(R_1 / R_3) \dot{\varphi}\}, \end{aligned}$$

получаем в результате обобщенную силу, которую представляем в виде суммы  $Q = Q_H + Q_T + Q_D$ , где  $Q_H = -\mu (r_1 (R_4 - r_4) / R_4 \sin \varphi)^2 \dot{\varphi}$ ,  $Q_T = -m_A g r_1 \cos \varphi$ ,  $Q_D = -(M_0 + k \dot{\varphi} R_1 / R_3) R_1 / R_3$ .

5. Находим частные производные

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.5 \dot{\varphi}^2 B \sin 2\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} (A + B \sin^2 \varphi),$$

и полную производную по времени

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \ddot{\varphi} (A + B \sin^2 \varphi) + \dot{\varphi}^2 B \sin 2\varphi.$$

Записываем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\ddot{\varphi} (A + B \sin^2 \varphi) + 0.5 \dot{\varphi}^2 B \sin 2\varphi = Q_T + Q_H + Q_D. \quad (5)$$

Полученное нелинейное дифференциальное уравнение движения системы может быть проинтегрировано численно (§ 17.2).

ПРИМЕР 3. Механическая система с одной степенью свободы обладает нелинейными кинематическими соотношениями (рис. 162).

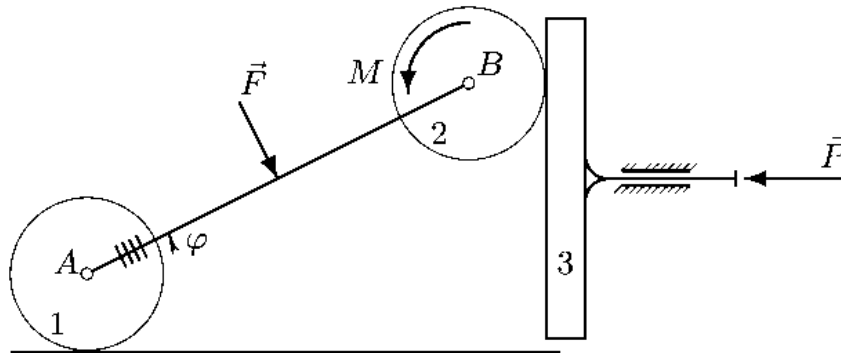


Рис. 162

Система состоит из двух однородных дисков 1, 2 одинакового радиуса  $R$ , невесомого стержня  $AB$  длиной  $a$  и поршня 3, перемещающегося в горизонтальных направляющих. Стержень  $AB$  жестко скреплен с диском 1. Диск 1 катается по горизонтальной поверхности, а диск 2 — по вертикальной поверхности поршня. Качение происходит без проскальзывания и без трения качения. Массы дисков  $m_1$  и  $m_2$ , масса поршня  $m_3$ . К середине стержня приложена сила  $F$ , направленная перпендикулярно  $AB$ . На поршень действует горизонтальная сила  $P$ , а на диск 2 — пара с моментом  $M$ . Составить уравнение движения системы.

### РЕШЕНИЕ

1. Выбираем обобщенную координату  $\varphi$  — угол поворота стержня  $AB$ , отсчитываемый от горизонтальной оси  $x$  (рис. 163).

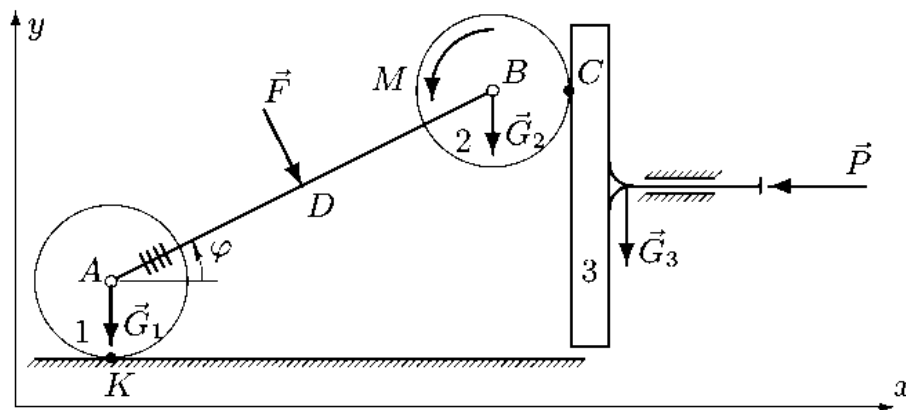


Рис. 163

2. Составляем кинематические графы системы. В качестве на-

чальных и конечных вершин графов берем те точки, скорости которых необходимо вычислить ( $A, B, D$ ) или те, в которых по условию задачи задана какая-либо кинематическая связь ( $K, C$ ):

$$K \xrightarrow{\pi/2} A; \quad A \xrightarrow{\varphi} B; \quad B \xrightarrow{0} C; \quad A \xrightarrow{\varphi} D \quad (6)$$

Записываем уравнения для проекций скоростей, соответствующие графам (6):

$$\begin{aligned} v_{Ax} &= v_{Kx} - R\dot{\varphi} \sin \pi/2, & v_{Ay} &= v_{Ky} + R\dot{\varphi} \cos \pi/2, \\ v_{Bx} &= v_{Ax} - a\dot{\varphi} \sin \varphi, & v_{By} &= v_{Ay} + a\dot{\varphi} \cos \varphi, \\ v_{Cx} &= v_{Bx} - R\omega_{2z} \sin 0, & v_{Cy} &= v_{By} + R\omega_{2z} \cos 0, \\ v_{Dx} &= v_{Ax} - 0.5a\dot{\varphi} \sin \varphi, & v_{Dy} &= v_{Ay} + 0.5a\dot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (7)$$

Точка  $K$  является точкой касания обода диска 1 неподвижной поверхности, проскальзывание отсутствует, поэтому

$$v_{Kx} = 0, \quad v_{Ky} = 0. \quad (8)$$

Поршень 3 и диск находятся в зацеплении в точке  $C$ . Поршень движется поступательно и вертикальные компоненты всех его точек, включая и точку  $C$ , равны нулю:

$$v_{Cy} = 0. \quad (9)$$

С учетом соотношений (8,9) из системы уравнений (7) получаем выражения для скоростей и угловых скоростей:

$$\begin{aligned} v_{Ax} &= -R\dot{\varphi}, & v_{Ay} &= 0, \\ v_{Bx} &= -\dot{\varphi}(R + a \sin \varphi), & v_{By} &= \dot{\varphi} a \cos \varphi, \\ v_{Dx} &= -\dot{\varphi}(R + 0.5a \sin \varphi), & v_{Dy} &= 0.5\dot{\varphi} a \cos \varphi, \\ \omega_{2z} &= -\dot{\varphi}(a/R) \cos \varphi, & v_{Cx} &= -\dot{\varphi}(R + a \sin \varphi). \end{aligned} \quad (10)$$

3. Вычисляем кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий трех тел:

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Однородный диск 1 катится без проскальзывания по неподвижной поверхности и совершает плоское движение (с. 242), поэтому

$$T_1 = \frac{3m_1 v_A^2}{4} = \frac{3m_1 R^2 \dot{\varphi}^2}{4}.$$

Диск 2 также совершает плоское движение,

$$T_2 = \frac{m_2 v_B^2}{2} + \frac{J_2 \omega_{2z}^2}{2}.$$

Момент инерции диска  $J_2 = m_2 R^2 / 2$ . С учетом (10) получаем

$$T_2 = \frac{m_2 \dot{\varphi}^2 (R^2 + a^2 + 2Ra \sin \varphi)}{2} + \frac{m_2 \dot{\varphi}^2 a^2 \cos^2 \varphi}{4}.$$

Кинетическая энергия поступательного движения поршня 3

$$T_3 = \frac{m_3 v_C^2}{2} = \frac{m_3 \dot{\varphi}^2 (R + a \sin \varphi)^2}{2}.$$

Кинетическую энергию всего механизма для удобства вычислений представляем в виде

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} (A + B \sin \varphi + C \sin^2 \varphi),$$

где для констант введены обозначения:  $A = (1.5m_1 + m_2 + m_3)R^2 + 1.5m_2 a^2$ ,  $B = 2Ra(m_2 + m_3)$ ,  $C = a^2(m_3 - m_2/2)$ .

4. Вычисляем обобщенную силу:

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}} (\vec{G}_1 \cdot \vec{v}_A + \vec{G}_2 \cdot \vec{v}_B + \vec{G}_3 \cdot \vec{v}_C + \vec{F} \cdot \vec{v}_D + \vec{P} \cdot \vec{v}_C + \vec{M} \cdot \vec{\omega}_2).$$

Учитывая следующие выражения для векторов,

$$\begin{aligned} \vec{G}_1 &= \{0, -m_1 g, 0\}, \quad \vec{G}_2 = \{0, -m_2 g, 0\}, \quad \vec{G}_3 = \{0, -m_3 g, 0\}, \\ \vec{F} &= \{F \sin \varphi, -F \cos \varphi, 0\}, \quad \vec{P} = \{-P, 0, 0\}, \quad \vec{M} = \{0, 0, M\}, \end{aligned}$$

и соотношения (10), получаем в результате обобщенную силу:

$$Q = -m_2 g a \cos \varphi - F (0.5a + R \sin \varphi) + P (R + a \sin \varphi) - M (a/R) \cos \varphi.$$

5. Находим частные производные,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 0.5 \dot{\varphi}^2 (B \cos \varphi + C \sin 2\varphi), \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= \dot{\varphi} (A + B \sin \varphi + C \sin^2 \varphi), \end{aligned}$$

и полную производную по времени

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = \ddot{\varphi} (A + B \sin \varphi + C \sin^2 \varphi) + \dot{\varphi}^2 (B \cos \varphi + C \sin 2\varphi).$$

Записываем уравнение движения системы:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} (A + B \sin \varphi + C \sin^2 \varphi) + 0.5 \dot{\varphi}^2 (B \cos \varphi + C \sin 2\varphi) = \\ = (P a - F R) \sin \varphi - (m_2 g + M/R) a \cos \varphi + P R - 0.5 F a. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 4. Механическая система с одной степенью свободы с нелинейными кинематическими соотношениями (рис. 164) состоит из однородного диска 1 радиусом  $R$ , стержня 2 длиной  $a$  и невесомого штока,двигающегося без трения в вертикальных направляющих. Диск 1 вращается на оси, закрепленной в нижней точке штока.

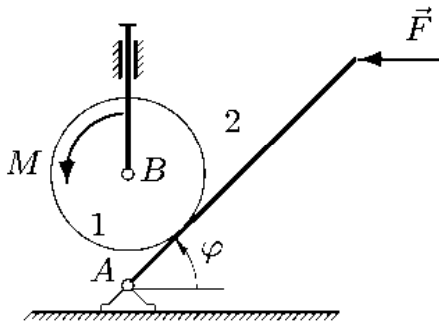


Рис. 164

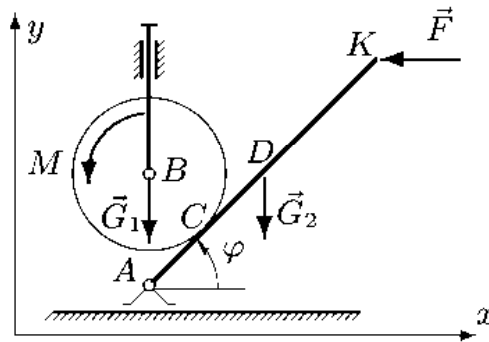


Рис. 165

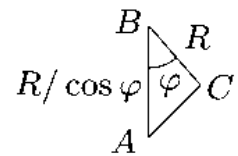


Рис. 166

Стержень 2, вращаясь вокруг неподвижного шарнира  $A$ , касается диска. Диск катится по стержню без сопротивления и проскальзывания. Шток и шарнир  $A$  находятся на одной вертикали. К концу стержня приложена горизонтальная сила  $F$ , к диску — момент  $M$ . Масса диска —  $m_1$ , масса стержня —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы.

РЕШЕНИЕ

1. Выбираем обобщенную координату  $\varphi$  — угол поворота стержня 2, отсчитываемый от горизонтальной оси  $x$  (рис. 165).

2. Составляем кинематические графы системы:

$$A \xrightarrow[\varphi]{2} C \xrightarrow[\varphi+\pi/2]{1} B; \quad A \xrightarrow[\varphi]{2} D; \quad A \xrightarrow[\varphi]{2} K \quad (11)$$

Из треугольника  $ABC$  (рис. 166) имеем  $AC = R \operatorname{tg} \varphi$ . Записываем уравнения для проекций скоростей, соответствующие графам (11):

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= v_{Ax} - R\dot{\varphi} \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi - R\omega_{1z} \sin(\varphi + \pi/2), \\ v_{By} &= v_{Ay} + R\dot{\varphi} \operatorname{tg} \varphi \cos \varphi + R\omega_{1z} \cos(\varphi + \pi/2), \\ v_{Dx} &= v_{Ax} - 0.5a\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad v_{Dy} = v_{Ay} + 0.5a\dot{\varphi} \cos \varphi, \\ v_{Kx} &= v_{Ax} - a\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad v_{Ky} = v_{Ay} + a\dot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

Шарнир  $A$  неподвижен:  $v_{Ax} = v_{Ay} = 0$ ; точка  $B$  движется только по вертикали:  $v_{Bx} = 0$ . С учетом этих соотношений из системы уравнений (12) получаем выражения для линейных и угловых скоростей:

$$\begin{aligned} v_{By} &= R\dot{\varphi} \sin \varphi / \cos^2 \varphi, \quad \omega_{1z} = -\dot{\varphi} \operatorname{tg}^2 \varphi, \\ v_{Dx} &= -0.5\dot{\varphi}a \sin \varphi, \quad v_{Dy} = 0.5\dot{\varphi}a \cos \varphi, \\ v_{Kx} &= -\dot{\varphi}a \sin \varphi, \quad v_{Ky} = \dot{\varphi}a \cos \varphi. \end{aligned} \quad (13)$$

Заметим, что скорость  $v_{By}$  можно получить координатным методом, дифференцируя по времени выражение  $y_B(t)$  (рис. 166):

$$v_{By} = \frac{dy_B}{dt} = \frac{d(y_A + R/\cos \varphi)}{dt} = R\dot{\varphi} \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

3. Вычисляем кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий диска и стержня:  $T = T_1 + T_2$ . Однородный диск 1 совершает плоское движение, поэтому

$$T_1 = \frac{m_1 v_B^2}{2} + \frac{J_1 \omega_{1z}^2}{2}.$$

Момент инерции диска —  $J_1 = m_1 R^2/2$ . С учетом (13) получаем

$$T_1 = \frac{m_1 \dot{\varphi}^2 R^2}{4} (2 \sin^2 \varphi \cos^{-4} \varphi + \operatorname{tg}^4 \varphi).$$

Кинетическая энергия вращения стержня 2 равна  $T_2 = J_2 \dot{\varphi}^2/2$ , где  $J_2 = m_2 a^2/3$  — момент инерции стержня относительно конца (точки  $A$ ). Отсюда получаем, что  $T_2 = m_2 a^2 \dot{\varphi}^2/6$ . Кинетическую энергию всего механизма для удобства вычислений представляем в виде

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \left( A + B \frac{(3 - \cos^2 \varphi) \sin^2 \varphi}{\cos^4 \varphi} \right),$$



где для констант вводим обозначения  $A = m_2 a^2 / 3$ ,  $B = m_1 R^2 / 2$ .

4. Вычисляем обобщенную силу  $Q$ :

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}} (\vec{G}_1 \cdot \vec{v}_B + \vec{G}_2 \cdot \vec{v}_D + \vec{F} \cdot \vec{v}_K + \vec{M} \cdot \vec{\omega}_1).$$

Учитывая выражения для векторов

$$\begin{aligned} \vec{G}_1 &= \{0, -m_1 g, 0\}, \quad \vec{G}_2 = \{0, -m_2 g, 0\}, \\ \vec{F} &= \{-F, 0, 0\}, \quad \vec{M} = \{0, 0, M\}, \end{aligned}$$

и соотношения (13), получаем в результате обобщенную силу:

$$Q = -m_1 g R \sin \varphi / \cos^2 \varphi - 0.5 m_2 g a \cos \varphi + F a \sin \varphi - M \operatorname{tg}^2 \varphi.$$

5. Кинетическую энергию записываем виде  $T = 0.5 \dot{\varphi}^2 f(\varphi)$ , где

$$f(\varphi) = A + B \frac{(3 - \cos^2 \varphi) \sin^2 \varphi}{\cos^4 \varphi}.$$

В этом случае, согласно примечанию на с. 308, уравнение Лагранжа 2-го рода имеет вид

$$\ddot{\varphi} f(\varphi) + 0.5 \dot{\varphi}^2 f'(\varphi) = Q,$$

где

$$f'(\varphi) = \frac{df(\varphi)}{d\varphi} = 4B \frac{(3 - 2 \cos^2 \varphi) \sin \varphi}{\cos^5 \varphi}.$$

В результате получаем уравнение движения системы:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} \left( A + B \frac{(3 - \cos^2 \varphi) \sin^2 \varphi}{\cos^4 \varphi} \right) + 2B \dot{\varphi}^2 \frac{(3 - 2 \cos^2 \varphi) \sin \varphi}{\cos^5 \varphi} = \\ = -m_1 g R \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} - \frac{1}{2} m_2 g a \cos \varphi + F a \sin \varphi - M \operatorname{tg}^2 \varphi. \end{aligned}$$

**УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.** Механическая система с одной степенью свободы характеризуется нелинейными кинематическими соотношениями. Составить уравнение движения системы. Рисунки и тексты вариантов задач приведены на с. 245–247. Даны массы  $m_1 = 6$  кг,  $m_2 = 2$  кг,  $m_3 = 8$  кг,  $m_4 = 1$  кг.

## Ответы

1.  $2\ddot{\varphi}a^2(1 + 6 \sin^2 \varphi) + 6\dot{\varphi}^2 a^2 \sin 2\varphi = M - 3ag \cos \varphi - 4aF \sin \varphi.$
2.  $2\ddot{\varphi}a^2(1 + 3 \sin^2 \varphi) + 3\dot{\varphi}^2 a^2 \sin 2\varphi = M - 3ag \cos \varphi.$
3.  $\ddot{\varphi}a^2(4 + 7 \sin^2 \varphi) + (7/2)\dot{\varphi}^2 a^2 \sin 2\varphi = M - 6ag \cos \varphi.$
4.  $\ddot{\varphi}(2a^2 + 24.5R^2 + 4Ra \sin \varphi) + 2\dot{\varphi}^2 aR \cos \varphi = -2ag \cos \varphi - 8gR.$
5.  $\ddot{\varphi}a^2(6 + 17 \sin^2 \varphi) + 8.5\dot{\varphi}^2 a^2 \sin 2\varphi = 2ag(3 \cos \varphi - \sin \varphi).$
6.  $\ddot{\varphi}(9R^2 + 4(R + 2a \sin \varphi)^2) + 8a\dot{\varphi}^2(R + 2a \sin \varphi) \cos \varphi =$   
 $= -M - 4g(R + 2a \sin \varphi).$
7.  $2\ddot{\varphi}a^2(3 + 8 \sin^2 \varphi) + 8\dot{\varphi}^2 a^2 \sin 2\varphi = -M - 8ag \sin \varphi \sin \alpha.$
8.  $\ddot{\varphi}a^2(6 + 7.5 \sin^2 \varphi) + 3.75\dot{\varphi}^2 a^2 \sin 2\varphi = M - ag \sin \varphi \sin \alpha.$
9.  $\ddot{\varphi}(3R^2 + 2a^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi) + 2\dot{\varphi}^2 a^2 \sin 2\varphi =$   
 $= M + (R + a \sin \varphi)F - 2ag \cos \varphi.$
10.  $\ddot{\varphi}(2a^2/3 + 2Ra \sin \varphi + 14R^2) + \dot{\varphi}^2 Ra \cos \varphi = -3ag \cos \varphi.$

## 13.6. Уравнение Лагранжа 2-го рода для консервативных систем

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** Консервативная механическая система с идеальными стационарными связями, имеющая две степени свободы, движется под действием известных сил. Используя уравнение Лагранжа 2-го рода для консервативных систем, найти ускорения тел системы.

**ПЛАН РЕШЕНИЯ.** Если все силы, действующие на систему потенциальны, то такая система называется консервативной. Обобщенные силы и потенциальная энергия связаны дифференциальными соотношениями  $Q_i = -\partial\Pi/\partial q_i$ , где  $q_i$  — обобщенные координаты.

Постановка задачи совпадает с § 13.4. Отличие — в форме уравнения Лагранжа.

1. Выбираем две обобщенные координаты.
2. Вычисляем кинетическую энергию системы  $T$  через обобщенные скорости  $v_1 = \dot{x}_1$  и  $v_2 = \dot{x}_2$ .
3. Вычисляем потенциальную энергию системы  $\Pi$ .

4. Определяем функцию Лагранжа  $L = T - \Pi^*$ ).

5. Находим частные производные  $\partial L/\partial v_i$  и  $\partial L/\partial x_i$ ,  $i = 1, 2$  и записываем систему уравнений Лагранжа 2-го рода в форме

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0. \quad (1)$$

6. Решаем систему алгебраических линейных уравнений (1) с двумя неизвестными — обобщенными ускорениями  $W_1 = \ddot{x}_1$  и  $W_2 = \ddot{x}_2$ .

ПРИМЕР. Консервативная механическая система с идеальными стационарными связями имеет две степени свободы и представляет

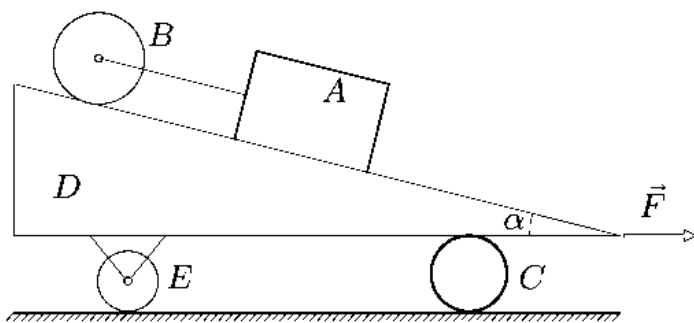


Рис. 167

собой механизм, состоящий из пяти тел. Груз  $A$  массой  $m_A = 10$  кг и однородный цилиндр  $B$  массой  $m_B = 20$  кг шарнирно соединены жестким невесомым стержнем. Призма  $D$  массой  $m_D = 40$  кг опирается на пустотелый цилиндр (трубу)  $C$  и на

колесо  $E$  (однородный цилиндр). Ось колеса соединена с призмой (рис. 167). Используя уравнение Лагранжа 2-го рода для консервативных систем, определить ускорение, которое придает призме горизонтальная сила  $F = 100$  Н. Трением скольжения и трением качения пренебречь. Качение происходит без проскальзывания. Масса трубы  $m_C = 30$  кг, колеса  $m_E = 5$  кг;  $\alpha = 15^\circ$ . Нижняя поверхность призмы параллельна горизонтальному основанию во все время движения.

#### РЕШЕНИЕ

1. Выбираем две независимые переменные, однозначно описывающие движение системы. Пусть переменная  $x_1$  указывает положение призмы  $D$  по отношению к неподвижной системе отсчета, а  $x_2$  — положение оси цилиндра  $B$  относительно призмы (рис. 168).

2. Выражаем кинетическую энергию системы через обобщенные скорости  $\dot{x}_1 = v_1$  и  $\dot{x}_2 = v_2$ . Кинетическая энергия всей системы равна сумме кинетических энергий:  $T = T_A + T_B + T_C + T_D + T_E$ .

\*) Функцию  $L$  называют еще кинетическим потенциалом.

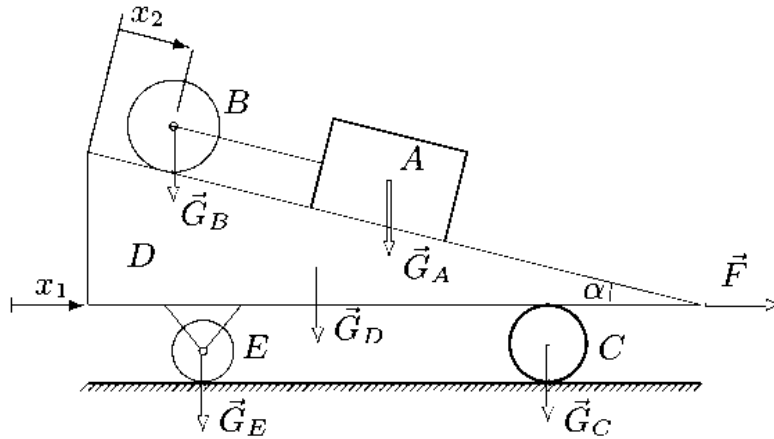


Рис. 168

Записываем кинетическую энергию поступательного движения груза  $A$ , имеющего относительную скорость  $v_2$  и переносную  $v_1$ :

$$T_A = m_A \frac{(v_1 + v_2 \cos \alpha)^2 + (v_2 \sin \alpha)^2}{2}.$$

Кинетическая энергия плоского движения цилиндра  $B$

$$T_B = m_B \frac{(v_1 + v_2 \cos \alpha)^2 + (v_2 \sin \alpha)^2}{2} + \frac{J_B \omega_B^2}{2}.$$

Угловая скорость  $\omega_B$  зависит от скорости относительного движения  $\omega_B = v_2/R_B$ . Момент инерции однородного цилиндра  $B$  относительно его оси  $J_B = m_B R_B^2/2$ . Кинетическая энергия плоского движения трубы  $C$

$$T_C = m_C \frac{(v_1/2)^2}{2} + \frac{J_C \omega_C^2}{2}.$$

Здесь  $\omega_C = v_1/(2R_C)$  — угловая скорость трубы,  $v_1/2$  — скорость ее центра масс;  $J_C = m_C R_C^2$  — момент инерции трубы относительно ее оси. Кинетическая энергия поступательного движения призмы  $T_D = m_D v_1^2/2$ . Кинетическая энергия плоского движения колеса  $E$ , у которого скорость центра масс  $v_1$ , имеет вид (см. с. 242)

$$T_E = \frac{3v_1^2 m_E}{4}.$$

Кинетическая энергия всей системы

$$T = \frac{m_A + m_B + m_C/2 + m_D + 3m_E/2}{2} v_1^2 + (m_A + m_B) v_1 v_2 \cos \alpha + \frac{m_A + 3m_B/2}{2} v_2^2.$$

3. Потенциальная энергия системы

$$\Pi = -x_1 F - x_2 (m_A + m_B) g \sin \alpha.$$

4. Определяем функцию Лагранжа:

$$L = T - \Pi = \frac{m_A + m_B + m_C/2 + m_D + 3m_E/2}{2} v_1^2 + \frac{m_A + 3m_B/2}{2} v_2^2 + (m_A + m_B) v_1 v_2 \cos \alpha + x_1 F + x_2 (m_A + m_B) g \sin \alpha.$$

5. Находим частные производные  $\partial L/\partial v_i$  и  $\partial L/\partial x_i$ ,  $i = 1, 2$  и записываем уравнения Лагранжа (1):

$$\begin{aligned} W_1 \left( m_A + m_B + \frac{m_C}{2} + m_D + \frac{3m_E}{2} \right) + W_2 (m_A + m_B) \cos \alpha &= F, \\ W_1 (m_A + m_B) \cos \alpha + W_2 \left( m_A + \frac{3m_B}{2} \right) &= (m_A + m_B) g \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

6. Решаем полученную систему двух алгебраических линейных уравнений с двумя неизвестными ускорениями  $W_1$  и  $W_2$  и находим

$$W_1 = 0.627 \text{ м/с}^2, \quad W_2 = 1.45 \text{ м/с}^2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В правой части (2) стоят обобщенные силы, соответствующие координатам  $x_1$  и  $x_2$ . Обобщенные силы можно найти, вычисляя мощности активных сил на возможных скоростях:

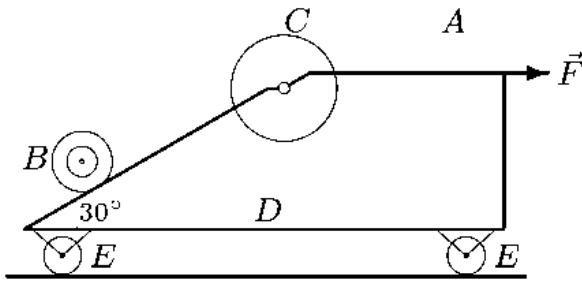
$$Q_j = N_j/\dot{x}_j, \quad j = 1, 2,$$

где  $N_1$  — мощность сил при  $\dot{x}_2 = 0$ , а  $N_2$  — мощность сил при  $\dot{x}_1 = 0$ . Мощность находим суммируя скалярные произведения  $N = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$ ,  $\vec{F}_i$  — силы,  $\vec{v}_i$  — скорости точек их приложения. При этом способе скорости лучше вычислять аналитически (§ 8.5), а скалярные произведения раскрывать в координатной форме.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ. Консервативная механическая система с идеальными стационарными связями имеет две степени свободы и представляет собой механизм, состоящий из груза  $A$ , блока  $B$  (большой радиус  $R$ , меньший  $r$ , радиус инерции  $i_B$ ) и цилиндра  $C$  радиусом  $R_C$ . Механизм установлен на призме  $D$ , закрепленной на осях двух однородных цилиндров  $E$ . К призме приложена постоянная по величине горизонтальная сила  $F$ . Качение цилиндра  $C$  (блока  $B$ ) и цилиндров

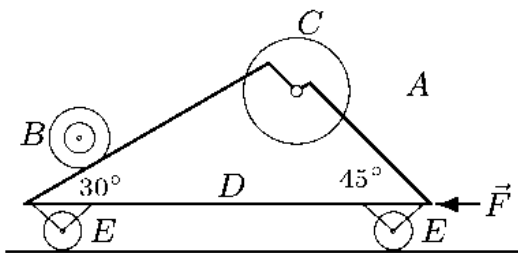
*E* происходит без проскальзывания. Трением качения и скольжения пренебречь. Используя уравнение Лагранжа 2-го рода для консервативных систем, найти ускорение призмы.

1.



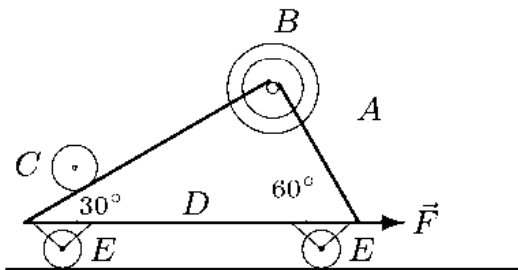
$$\begin{aligned}
 m_A &= 6 \text{ кг}, \\
 R_B &= 16 \text{ см}, \quad m_B = 3 \text{ кг}, \\
 r_B &= 8 \text{ см}, \quad m_C = 11 \text{ кг}, \\
 R_C &= 28 \text{ см}, \quad m_D = 1 \text{ кг}, \\
 i_B &= 13 \text{ см}, \quad m_E = 2 \text{ кг}, \\
 R_E &= 29 \text{ см}, \quad F = 2 \text{ Н}.
 \end{aligned}$$

2.



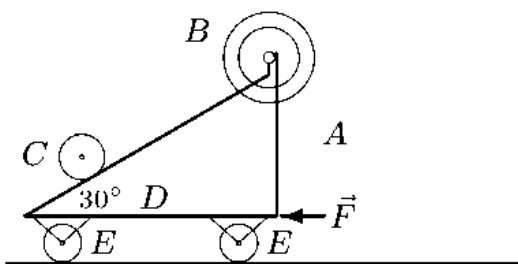
$$\begin{aligned}
 m_A &= 9 \text{ кг}, \\
 R_B &= 24 \text{ см}, \quad m_B = 6 \text{ кг}, \\
 r_B &= 12 \text{ см}, \quad m_C = 14 \text{ кг}, \\
 R_C &= 42 \text{ см}, \quad m_D = 2 \text{ кг}, \\
 i_B &= 19 \text{ см}, \quad m_E = 3 \text{ кг}, \\
 R_E &= 43 \text{ см}, \quad F = 15 \text{ Н}.
 \end{aligned}$$

3.



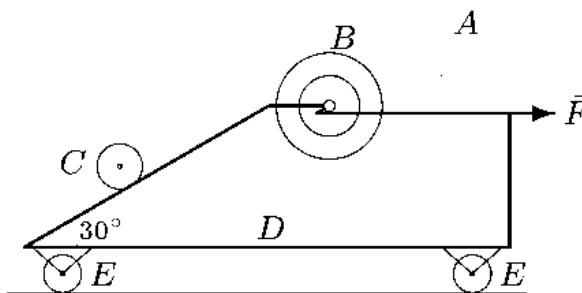
$$\begin{aligned}
 m_A &= 6 \text{ кг}, \\
 R_B &= 48 \text{ см}, \quad m_B = 3 \text{ кг}, \\
 r_B &= 32 \text{ см}, \quad m_C = 16 \text{ кг}, \\
 R_C &= 24 \text{ см}, \quad m_D = 1 \text{ кг}, \\
 i_B &= 41 \text{ см}, \quad m_E = 4 \text{ кг}, \\
 R_E &= 25 \text{ см}, \quad F = 26 \text{ Н}.
 \end{aligned}$$

4.



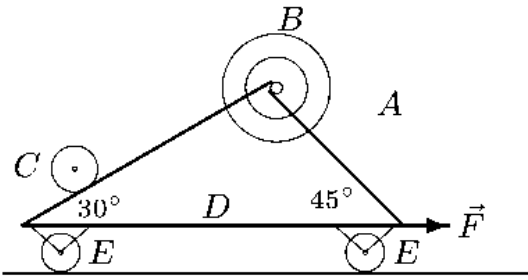
$$\begin{aligned}
 m_A &= 9 \text{ кг}, \\
 R_B &= 60 \text{ см}, \quad m_B = 6 \text{ кг}, \\
 r_B &= 40 \text{ см}, \quad m_C = 19 \text{ кг}, \\
 R_C &= 30 \text{ см}, \quad m_D = 2 \text{ кг}, \\
 i_B &= 51 \text{ см}, \quad m_E = 5 \text{ кг}, \\
 R_E &= 31 \text{ см}, \quad F = 63 \text{ Н}.
 \end{aligned}$$

5.



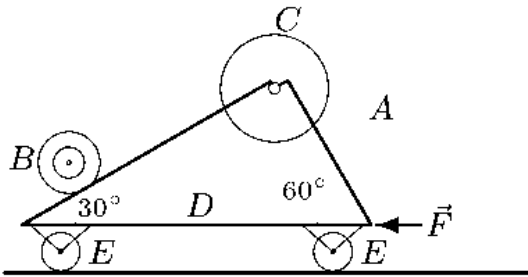
$$\begin{aligned}
 m_A &= 6 \text{ кг}, \\
 R_B &= 28 \text{ см}, \quad m_B = 3 \text{ кг}, \\
 r_B &= 16 \text{ см}, \quad m_C = 21 \text{ кг}, \\
 R_C &= 12 \text{ см}, \quad m_D = 1 \text{ кг}, \\
 i_B &= 23 \text{ см}, \quad m_E = 6 \text{ кг}, \\
 R_E &= 13 \text{ см}, \quad F = 74 \text{ Н}.
 \end{aligned}$$

6.



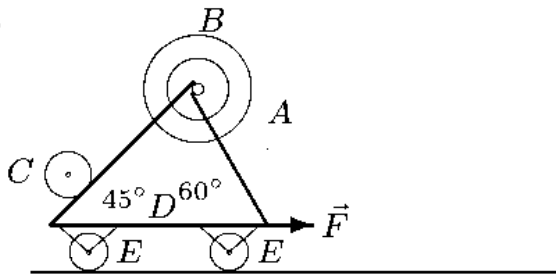
$$\begin{aligned}
 m_A &= 9 \text{ кг}, \\
 R_B &= 42 \text{ см}, & m_B &= 6 \text{ кг}, \\
 r_B &= 24 \text{ см}, & m_C &= 24 \text{ кг}, \\
 R_C &= 18 \text{ см}, & m_D &= 2 \text{ кг}, \\
 i_B &= 34 \text{ см}, & m_E &= 2 \text{ кг}, \\
 R_E &= 19 \text{ см}, & F &= 2 \text{ Н}.
 \end{aligned}$$

7.



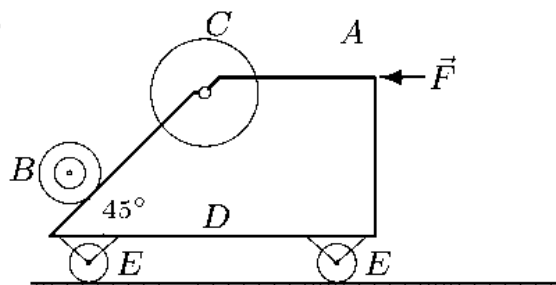
$$\begin{aligned}
 m_A &= 6 \text{ кг}, \\
 R_B &= 32 \text{ см}, & m_B &= 3 \text{ кг}, \\
 r_B &= 16 \text{ см}, & m_C &= 11 \text{ кг}, \\
 R_C &= 56 \text{ см}, & m_D &= 1 \text{ кг}, \\
 i_B &= 25 \text{ см}, & m_E &= 3 \text{ кг}, \\
 R_E &= 57 \text{ см}, & F &= 15 \text{ Н}.
 \end{aligned}$$

8.



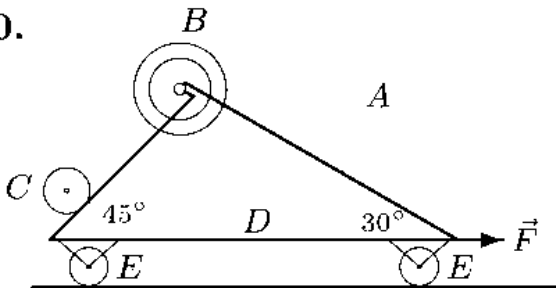
$$\begin{aligned}
 m_A &= 12 \text{ кг}, \\
 R_B &= 70 \text{ см}, & m_B &= 6 \text{ кг}, \\
 r_B &= 40 \text{ см}, & m_C &= 27 \text{ кг}, \\
 R_C &= 30 \text{ см}, & m_D &= 2 \text{ кг}, \\
 i_B &= 57 \text{ см}, & m_E &= 4 \text{ кг}, \\
 R_E &= 31 \text{ см}, & F &= 26 \text{ Н}.
 \end{aligned}$$

9.



$$\begin{aligned}
 m_A &= 9 \text{ кг}, \\
 R_B &= 16 \text{ см}, & m_B &= 3 \text{ кг}, \\
 r_B &= 8 \text{ см}, & m_C &= 14 \text{ кг}, \\
 R_C &= 28 \text{ см}, & m_D &= 1 \text{ кг}, \\
 i_B &= 14 \text{ см}, & m_E &= 5 \text{ кг}, \\
 R_E &= 29 \text{ см}, & F &= 63 \text{ Н}.
 \end{aligned}$$

10.



$$\begin{aligned}
 m_A &= 12 \text{ кг}, \\
 R_B &= 36 \text{ см}, & m_B &= 6 \text{ кг}, \\
 r_B &= 24 \text{ см}, & m_C &= 22 \text{ кг}, \\
 R_C &= 18 \text{ см}, & m_D &= 2 \text{ кг}, \\
 i_B &= 32 \text{ см}, & m_E &= 6 \text{ кг}, \\
 R_E &= 19 \text{ см}, & F &= 74 \text{ Н}.
 \end{aligned}$$

Систему уравнений Лагранжа записываем в виде

$$\begin{aligned}
 a_{11}\ddot{x}_1 + a_{12}\ddot{x}_2 &= Q_1, \\
 a_{21}\ddot{x}_1 + a_{22}\ddot{x}_2 &= Q_2,
 \end{aligned}$$

где введены обобщенные координаты:  $x_1$  — горизонтальное смещение призмы  $D$ ,  $x_2$  — смещение груза относительно призмы. В таблице приведены инерционные коэффициенты системы  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  в кг, обобщенные силы  $Q_1$ ,  $Q_2$  — в Н и ускорение призмы  $W_D$  в проекции на ось  $x$  — в  $\text{м/с}^2$ .

Ответы

	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{22}$	$Q_1$	$Q_2$	$W_D$
1	27.00	-7.73	13.71	2.00	9.81	0.33
2	40.00	16.76	55.04	-15.00	3.57	-0.46
3	38.00	-12.24	18.86	26.00	1.35	0.89
4	51.00	5.48	16.50	-63.00	57.23	-1.67
5	49.00	-37.83	108.67	74.00	180.26	3.82
6	47.00	-24.55	48.60	2.00	40.57	0.65
7	30.00	4.73	13.65	-15.00	41.16	-1.03
8	59.00	-22.71	55.19	26.00	61.93	1.04
9	42.00	-10.41	18.35	-63.00	13.87	-1.53
10	60.00	15.58	20.41	74.00	7.99	1.41

## 13.7. Функция Гамильтона

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** Найти функцию Гамильтона\*) механической системы с двумя степенями свободы по известной функции Лагранжа.

**ПЛАН РЕШЕНИЯ.** Для консервативной механической системы можно ввести функцию Гамильтона

$$H = \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - L, \quad (1)$$

где  $s = 2$  — число степеней свободы,  $L$  — функция Лагранжа (§ 13.6),  $\dot{q}_j$  — обобщенные скорости,  $p_j = \partial L / \partial \dot{q}_j$  — обобщенные импульсы.

1. Дифференцируя функцию Лагранжа по  $\dot{q}_1$  и  $\dot{q}_2$ , находим обобщенные импульсы  $p_1$  и  $p_2$ . Получаем два уравнения, связывающие обобщенные импульсы с обобщенными скоростями и обобщенными координатами:

$$p_j = p_j(\dot{q}_j, q_j), \quad j = 1, 2. \quad (2)$$

\*) Гамильтон Уильям Роуан (1805–1865) — ирландский математик.



2. Решаем систему уравнений (2) относительно обобщенных скоростей:

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(p_j, q_j), \quad j = 1, 2. \quad (3)$$

3. Записываем функцию Гамильтона (1), в которой обобщенные скорости заменяем на выражения (3).

ПРИМЕР. Найти функцию Гамильтона механической системы с двумя степенями свободы по известной функции Лагранжа

$$L = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2 - \dot{q}_2 \cos q_1 + \sin q_2.$$

#### РЕШЕНИЕ

1. Дифференцируя функцию Лагранжа по  $\dot{q}_1$  и  $\dot{q}_2$ , находим обобщенные импульсы  $p_j$ :

$$\begin{aligned} p_1 &= 2\dot{q}_1 + \dot{q}_2, \\ p_2 &= \dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 - \cos q_1. \end{aligned} \quad (4)$$

2. Решаем систему (4) относительно обобщенных скоростей:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= (2p_1 - p_2 - \cos q_1)/3, \\ \dot{q}_2 &= (2p_2 - p_1 + 2 \cos q_1)/3. \end{aligned} \quad (5)$$

3. Записываем функцию Гамильтона (1), в которой обобщенные скорости заменяем на выражения (5):

$$H = \frac{1}{3} (p_1^2 - p_1 p_2 + p_2^2 + (2p_2 - p_1) \cos q_1 + \cos^2 q_1) - \sin q_2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для стационарных связей функция Гамильтона равна полной механической энергии  $H = T + \Pi$ .

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти функцию Гамильтона механической системы с двумя степенями свободы по известной функции Лагранжа;  $q_1, q_2$  — обобщенные координаты.

- |  |  |
|--|--|
| 1. $L = 6\dot{q}_2^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2q_1^2 + 4q_2^2.$ | 2. $L = 2\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 3q_1^2 + 4q_1 q_2.$       |
| 3. $L = 2\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2^2 + 4q_2^2 + 2q_1 q_2.$      | 4. $L = 4\dot{q}_1^2 + 4\dot{q}_2^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 4q_1 q_2.$ |
| 5. $L = \dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1 \cos q_1.$     | 6. $L = \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2\dot{q}_1 q_1 + 2\dot{q}_2 q_2.$        |
| 7. $L = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 3\dot{q}_2 q_2.$   | 8. $L = 2\dot{q}_1^2 + 6\dot{q}_2^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 3q_1^2.$   |
| 9. $L = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_2 \cos q_2.$      | 10. $L = 4\dot{q}_1^2 + 4\dot{q}_2^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 12q_2^2.$ |

Ответы

1.  $H = -6p_1^2 + p_1p_2 - 2q_1^2 - 4q_2^2$ .
2.  $H = p_1p_2 - 2p_2^2 - 3q_1^2 - 4q_1q_2$ .
3.  $H = (1/8)p_1^2 + (1/8)p_2^2 - 4q_2^2 - 2q_1q_2$ .
4.  $H = (4p_1^2 - p_1p_2 + 4p_2^2)/63 - 4q_1q_2$ .
5.  $H = (p_1^2 + p_2^2/2)/4 - p_1 \cos q_1 - \cos^2 q_1$ .
6.  $H = p_1p_2 - 2p_1q_2 - 2p_2q_1 + 4q_1q_2$ .
7.  $H = p_1p_2 - 3p_1q_2 - p_2^2 + 6q_2p_2 - 9q_2^2$ .
8.  $H = (6p_1^2 - p_1p_2 + 2p_2^2)/47 - 3q_1^2$ .
9.  $H = (p_1^2 + p_2^2)/4 - p_2 \cos q_2 + \cos^2 q_2$ .
10.  $H = (4p_1^2 - p_1p_2 + 4p_2^2)/63 - 12q_2^2$ .

## 13.8. Уравнения Гамильтона

*Постановка задачи. Получить уравнения движения в форме Гамильтона для консервативной механической системы с одной степенью свободы.*

План решения

Для консервативной механической системы с одной степенью свободы уравнения Гамильтона \*) имеют вид

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (1)$$

$H$  — функция Гамильтона (§ 13.7),  $q, \dot{q}$  — обобщенная координата и ее скорость,  $p, \dot{p}$  — обобщенный импульс и его скорость (§ 13.7).

1. Выберем обобщенную координату системы. Определяем кинетическую энергию системы  $T$ , выражая скорости и угловые скорости всех тел системы через обобщенную скорость.

2. Определяем потенциальную энергию  $\Pi$  системы как функцию обобщенной координаты.

3. Записываем функцию Лагранжа  $L = T - \Pi$ .

4. Записываем функцию Гамильтона  $H$ , выражая в  $H = p\dot{q} - L$  обобщенную скорость  $\dot{q}$  через обобщенный импульс  $p$  (§ 13.7).

---

\*) Канонические уравнения механики.

5. Вычисляя частные производные функции Гамильтона по обобщенному импульсу  $p$  и обобщенной координате  $q$ , записываем уравнения движения (1).

ПРИМЕР 1. Получить уравнения движения в форме Гамильтона для консервативной механической системы с одной степенью свободы. Система состоит из невесомого стержня  $AB$  длиной  $2a$  и однородного цилиндра массой  $m$  радиусом  $R$ . Под действием вертикальной силы  $F$  стержень скользит по гладкой горизонтальной плоскости, вращая цилиндр. Между стержнем и цилиндром проскальзывание отсутствует. Сила  $F$  приложена к центру стержня, весом стержня пренебречь (рис. 169).

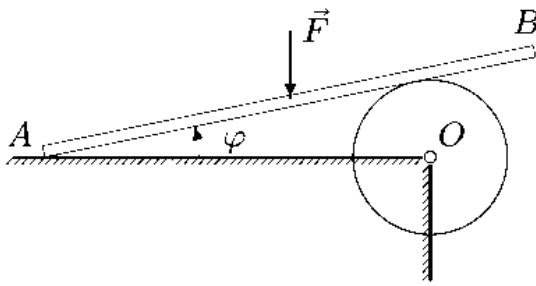


Рис. 169

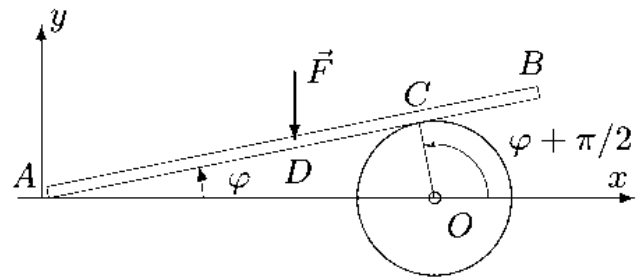


Рис. 170

### РЕШЕНИЕ

1. Выбираем угол  $\varphi$  в качестве обобщенной координаты системы. Определяем кинетическую энергию системы  $T$ , выражая скорости и угловые скорости всех тел системы через  $\dot{\varphi}$ .

Для того, чтобы выразить угловую скорость  $\omega_z$  цилиндра через  $\dot{\varphi}$ , составляем кинематический граф (§ 8.5, с. 188):

$$O \xrightarrow[\varphi + \pi/2]{OC} C \xrightarrow[\varphi + \pi]{CA} A.$$

Здесь  $OC = R$ ,  $CA = R \operatorname{ctg} \varphi$ . В системе координат  $xy$  (рис. 170) этому графу соответствуют кинематические уравнения

$$\begin{aligned} v_{Ax} &= v_{Ox} - R\omega_z \sin(\varphi + \pi/2) - R\dot{\varphi} \operatorname{ctg} \varphi \sin(\varphi + \pi), \\ v_{Ay} &= v_{Oy} + R\omega_z \cos(\varphi + \pi/2) + R\dot{\varphi} \operatorname{ctg} \varphi \cos(\varphi + \pi). \end{aligned} \quad (2)$$

Учитывая уравнения связей,  $v_{Ay} = 0$ ,  $v_{Ox} = v_{Oy} = 0$ , из второго уравнения (2) получаем

$$\omega_z = -\dot{\varphi} \operatorname{ctg}^2 \varphi. \quad (3)$$

Первое уравнение системы (2) в данной задаче не потребовалось. При необходимости из него можно найти скорость  $v_{Ax}$ .

Кинетическую энергию системы, в которой массой обладает только цилиндр, выражаем через обобщенную скорость:

$$T = \frac{J\omega_z^2}{2} = \frac{mR^2\dot{\varphi}^2 \operatorname{ctg}^4 \varphi}{4}.$$

2. Определяем потенциальную энергию  $\Pi$  системы как функцию обобщенной координаты  $\varphi$ . При горизонтальном положении стержня  $\Pi = 0$ . Вычисляем работу силы  $F$  при перемещении в это положение:  $\Pi = Fa \sin \varphi$ .

3. Записываем функцию Лагранжа:

$$L = T - \Pi = \frac{mR^2\dot{\varphi}^2 \operatorname{ctg}^4 \varphi}{4} - Fa \sin \varphi.$$

4. Записываем функцию Гамильтона  $H = p\dot{q} - L$ , выражая обобщенную скорость  $\dot{q} = \dot{\varphi}$  через обобщенный импульс  $p$ . Дифференцируем функцию Лагранжа по обобщенной скорости  $\dot{\varphi}$ , вычисляем обобщенный импульс

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{mR^2\dot{\varphi} \operatorname{ctg}^4 \varphi}{2}.$$

Отсюда находим обобщенную скорость  $\dot{\varphi} = 2p \operatorname{tg}^4 \varphi / (mR^2)$ . Функция Гамильтона приобретает вид

$$H = p\dot{q} - L = \frac{p^2 \operatorname{tg}^4 \varphi}{mR^2} + Fa \sin \varphi.$$

5. Вычисляя частные производные функции Гамильтона по обобщенному импульсу  $p$  и обобщенной координате  $\varphi$ , записываем уравнения движения (1):

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}.$$

В результате получаем, что

$$\dot{\varphi} = \frac{2p \operatorname{tg}^4 \varphi}{mR^2}, \quad \dot{p} = -\frac{4p^2 \sin^3 \varphi}{mR^2 \cos^5 \varphi} - Fa \cos \varphi. \quad (4)$$

Интегрирование нелинейной системы дифференциальных уравнений (4) можно выполнить численно. В системе Maple V для этого предназначен оператор `dsolve` (с. 373).

ЗАМЕЧАНИЕ. Кинематическое соотношение (3) можно получить координатным методом. Из  $\triangle OAC$  (рис. 170) найдем координату  $x_A = x_O - R/\sin \varphi$ . Дифференцируя  $x_A$ , с учетом  $x_O = \text{const}$ , получим  $v_{Ax} = R\dot{\varphi} \cos \varphi / \sin^2 \varphi$ . Из равенства проекций скоростей точек  $A$  и  $C$  на ось  $AC$  имеем  $v_{Ax} \cos \varphi = -\omega_z R$ . Отсюда следует (3).

ПРИМЕР 2. Вывести уравнения движения консервативной механической системы с одной степенью свободы в форме Гамильтона. Система представляет собой планетарный механизм, расположенный в вертикальной плоскости (рис. 171). К сателлитам 1 и 2, закрепленным на водиле  $OA$  длиной  $6r_1$ , приложены моменты  $M_1$  и  $M_2$ .

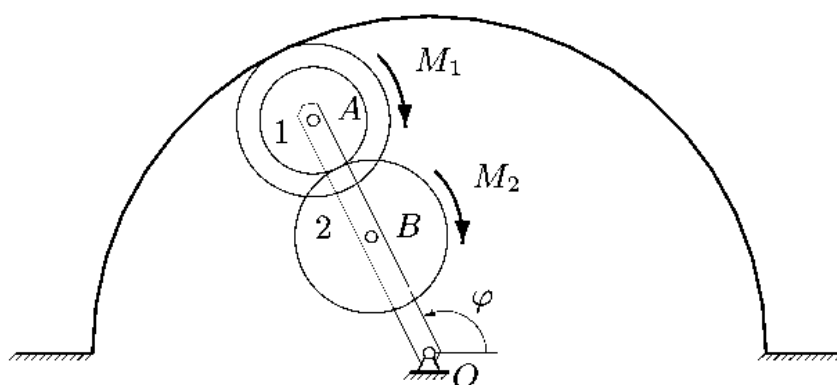


Рис. 171

Даны массы  $m_1, m_2$  и радиусы  $R_1 = R_2 = 2r_1$ . Массой водила  $OA$  и трением на осях пренебруем. Сателлит 1, блок с радиусом инерции  $i_1 = r_1$ , катится без проскальзывания по внутренней поверхности неподвижного цилиндра радиусом  $8r_1$ . Сателлит 2, однородный цилиндр, находится во внешнем зацеплении с меньшим ободом блока 1.

### РЕШЕНИЕ

1. Выбираем угол  $\varphi$  в качестве обобщенной координаты системы. Определяем кинетическую энергию системы  $T$ , состоящую из кинетических энергий тел 1 и 2. Выражаем угловые скорости  $\omega_{1z}, \omega_{2z}$  сателлитов и скорости их осей через обобщенную скорость  $\dot{\varphi}$ . Составляем кинематические графы (§ 8.5, с. 188):

$$O \xrightarrow[\varphi]{OB} B; \quad O \xrightarrow[\varphi]{OA} A; \quad A \xrightarrow[\varphi]{R_1} K, \quad (5)$$

$$B \xrightarrow[\varphi]{R_2} C \xrightarrow[\varphi]{r_1} A. \quad (6)$$

Здесь  $C$  — точка контакта сателлитов,  $K$  — точка контакта сателлита 1 и неподвижного цилиндра (рис. 172). В системе координат  $xy$  этим графам соответствуют следующие кинематические уравнения:

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= v_{Ox} - OB \dot{\varphi} \sin \varphi, & v_{By} &= v_{Oy} + OB \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ v_{Ax} &= v_{Ox} - OA \dot{\varphi} \sin \varphi, & v_{Ay} &= v_{Oy} + OA \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ v_{Kx} &= v_{Ax} - R_1 \omega_{1z} \sin \varphi, & v_{Ky} &= v_{Ay} + R_1 \omega_{1z} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} v_{Ax} &= v_{Bx} - R_2 \omega_{2z} \sin \varphi - r_1 \omega_{1z} \sin \varphi, \\ v_{Ay} &= v_{By} + R_2 \omega_{2z} \cos \varphi + r_1 \omega_{1z} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

Учтем уравнения связей. Точка касания внешнего обода сателлита 1 и неподвижной цилиндрической поверхности при отсутствии проскальзывания является мгновенным центром скоростей, и ее скорость

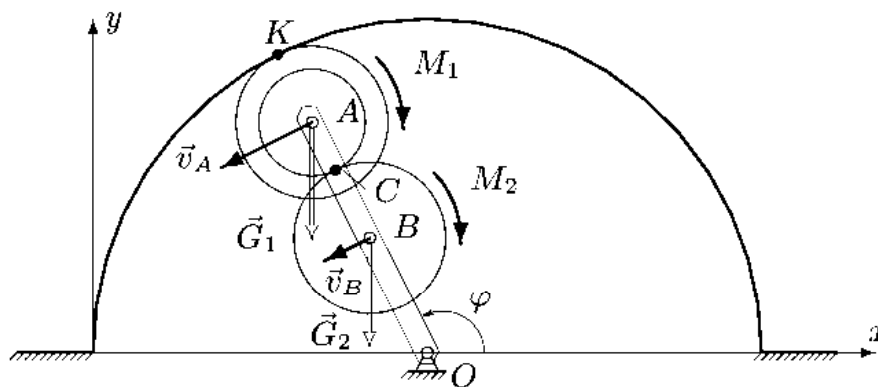


Рис. 172

равна нулю:  $v_{Kx} = v_{Ky} = 0$ . Кроме того  $v_{Ox} = v_{Oy} = 0$ . В итоге из уравнений (7,8) с учетом соотношений между радиусами, данными в условии задачи, получаем угловые скорости

$$\omega_{1z} = -3\dot{\varphi}, \quad \omega_{2z} = 3\dot{\varphi}, \quad (9)$$

и проекции скоростей:

$$\begin{aligned} v_{Ax} &= R_1 \omega_{1z} \sin \varphi = -6r_1 \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ v_{Ay} &= -R_1 \omega_{1z} \cos \varphi = 6r_1 \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ v_{Bx} &= -OB \dot{\varphi} \sin \varphi = -3r_1 \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ v_{By} &= OB \dot{\varphi} \cos \varphi = 3r_1 \dot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (10)$$

Оба сателлита совершают плоское движение. Кинетическую энергию системы выражаем через обобщенную скорость  $\dot{\varphi}$ :

$$T = T_1 + T_2 = \frac{J_1 \omega_{1z}^2}{2} + \frac{m_1 v_A^2}{2} + \frac{J_2 \omega_{2z}^2}{2} + \frac{m_2 v_B^2}{2}.$$

Подставляем сюда выражение для момента инерции блока,  $J_1 = m_1 i_1^2$ , однородного цилиндра,  $J_2 = m_2 R_2^2/2$ , и соотношения (9,10):

$$T = \frac{9\dot{\varphi}^2 r_1^2}{2} (5m_1 + 3m_2). \quad (11)$$

2. Определяем потенциальную энергию  $\Pi$  системы как функцию обобщенной координаты  $\varphi$ . Находим обобщенную силу:

$$Q = \frac{\vec{G}_1 \cdot \vec{v}_A + \vec{G}_2 \cdot \vec{v}_B + \vec{M}_2 \cdot \vec{\omega}_2 + \vec{M}_1 \cdot \vec{\omega}_1}{\dot{\varphi}}.$$

По условию моменты  $M_2$  и  $M_1$  направлены по часовой стрелке, следовательно проекции их векторов на ось  $z$  берем со знаком минус:  $\vec{M}_2 = \{0, 0, -M_2\}$ ,  $\vec{M}_1 = \{0, 0, -M_1\}$ . Векторы сил тяжести имеют вид  $\vec{G}_1 = \{0, -m_1 g, 0\}$ ,  $\vec{G}_2 = \{0, -m_2 g, 0\}$ . Учитывая (9,10), получаем обобщенную силу  $Q$ :

$$Q = -3M_2 + 3M_1 - 3r_1 g(2m_1 + m_2) \cos \varphi.$$

Обобщенная сила и потенциальная энергия связаны дифференциальной зависимостью:

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}. \quad (12)$$

Интегрируя (12), получаем

$$\Pi = 3M_2 \varphi - 3M_1 \varphi + 3r_1 g(2m_1 + m_2) \sin \varphi.$$

Константу интегрирования можно брать произвольной, так как потенциальная энергия вычисляется с точностью до постоянной величины. В данном случае константа равна нулю, что соответствует горизонтальному положению водила в нулевом уровне потенциальной энергии.

3. Записываем функцию Лагранжа  $L$ :

$$L = T - \Pi = \frac{9\dot{\varphi}^2 r_1^2}{2} (5m_1 + 3m_2) - 3M_2 \varphi + 3M_1 \varphi - 3r_1 g(2m_1 + m_2) \sin \varphi.$$

4. Записываем функцию Гамильтона  $H$ , выражая в  $H = p\dot{q} - L$  обобщенную скорость  $\dot{\varphi}$  через обобщенный импульс  $p$ . Дифференцируя функцию Лагранжа по обобщенной скорости  $\dot{\varphi}$ , вычисляем обобщенный импульс  $p$ :

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 9r_1^2 \dot{\varphi} (5m_1 + 3m_2).$$

Отсюда выражаем обобщенную скорость:

$$\dot{\varphi} = \frac{p}{9r_1^2(5m_1 + 3m_2)}.$$

Функция Гамильтона приобретает вид

$$H = \frac{p^2}{18r_1^2(5m_1 + 3m_2)} + 3(M_2 - M_1)\varphi + 3r_1g(2m_1 + m_2)\sin\varphi.$$

5. Вычисляя частные производные функции Гамильтона по обобщенному импульсу  $p$  и обобщенной координате  $\varphi$ , записываем уравнения движения (1):

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}.$$

В результате получаем искомую систему дифференциальных уравнений для функций  $\varphi$  и  $p$ :

$$\dot{\varphi} = \frac{p}{9r_1^2(5m_1 + 3m_2)}.$$

$$\dot{p} = 3(M_1 - M_2) - 3r_1g(2m_1 + m_2)\cos\varphi.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для определения угловых скоростей сателлитов в планетарном механизме можно воспользоваться формулой Виллиса [17]:

$$(\omega_{1z} - \omega_{0z})/(\omega_{2z} - \omega_{0z}) = (-1)^n k,$$

где  $k$  — передаточное число от колеса 1 к колесу 2 (с. 153),  $n$  — число внешних зацеплений между колесами 1 и 2,  $\omega_{0z}$  — угловая скорость водила. В примере 2 во внешнем зацеплении находятся колеса 1 и 2:

$$(\omega_{1z} - \omega_{0z})/(\omega_{2z} - \omega_{0z}) = -R_2/r_1,$$

и во внутреннем — колесо 1 с неподвижным ( $\omega_{\text{цил}} = 0$ ) цилиндром:

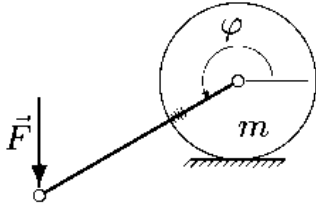
$$(\omega_{1z} - \omega_{0z})/(\omega_{\text{цил}} - \omega_{0z}) = (OA + R_1)/R_1.$$

Отсюда следуют соотношения (9).

*УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Получить уравнения движения в форме Гамильтона для консервативной механической системы с одной степенью свободы. В качестве обобщенной координаты взять угол  $\varphi$  (задачи 1–6, 8–9) или смещение  $x$  (задача 7). Качение цилиндров происходит без проскальзывания, трением ползунков и муфт пренебречь.*

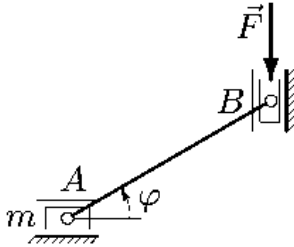


1.



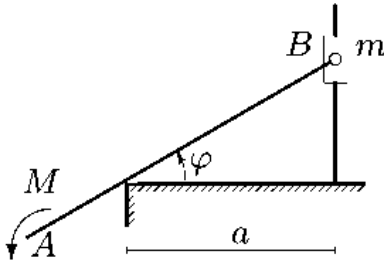
Однородный цилиндр массой  $m$  катится без сопротивления по горизонтальной поверхности. К цилиндру жестко прикреплен невесомый стержень длиной  $a$ , к которому приложена вертикальная сила  $F$ . Радиус цилиндра  $R$ .

2.



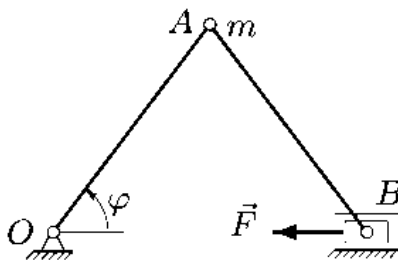
Горизонтально движущийся ползун  $A$  массой  $m$  соединен с вертикально движущимся ползун  $B$ . Массами стержня  $AB$  и ползуна  $B$  пренебречь;  $AB = a$ . На ползун  $B$  действует вертикальная сила  $F$ .

3.



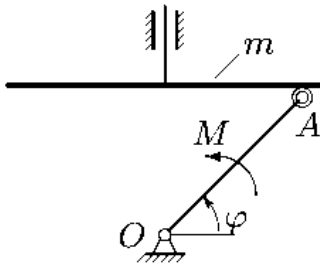
К невесомому стержню  $AB$ , скользящему без сопротивления по ребру опоры, приложен момент  $M$ . Стержень шарнирно соединен с вертикально движущимся ползун  $B$  массой  $m$ .

4.



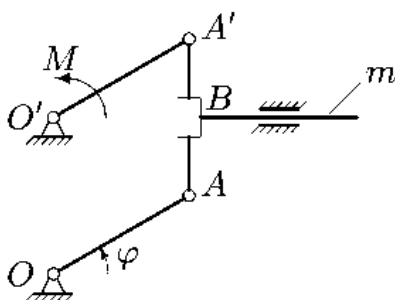
В шарнире  $A$  механизма, состоящего из двух невесомых стержней одинаковой длины  $OA = AB = a$  и горизонтально движущегося ползуна  $B$ , сосредоточена масса  $m$ . К ползуну приложена горизонтальная сила  $F$ .

5.



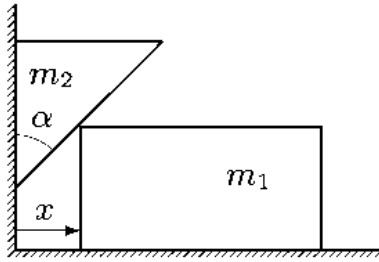
Невесомый кривошип  $OA = a$ , к которому приложен момент  $M$ , приводит в движение вертикально движущийся поршень массой  $m$ . Колесико  $A$ , массой и размерами которого пренебречь, катается без сопротивления по нижней поверхности поршня.

6.



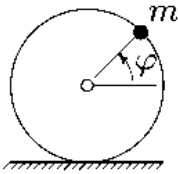
Шарнирный параллелограмм  $OAA'O'$ , состоящий из невесомых стержней, приводится в движение моментом  $M$ . Общая масса муфты  $B$  и горизонтально движущегося штока равна  $m$ ;  $OA = O'A' = a$ .

7.



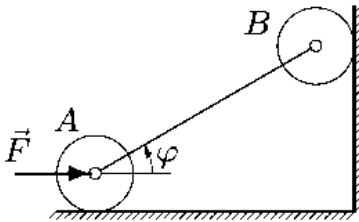
Груз массой  $m_1$  приводится в движение клином массой  $m_2$ , скользящим без трения по неподвижной вертикальной поверхности и по ребру груза. Дан угол  $\alpha$ .

8.



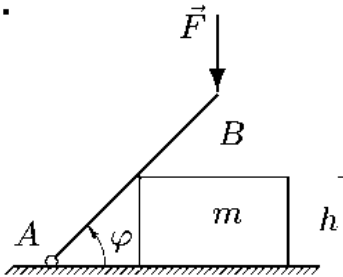
Однородный цилиндр радиуса  $R$ , массой которого можно пренебречь, свободно катается по горизонтальной плоскости. На ободе цилиндра помещена точка массой  $m$ .

9.



Два одинаковых цилиндра, массой  $m$  каждый, соединены невесомым стержнем длиной  $a$ . Цилиндр  $A$  катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости, цилиндр  $B$  — по вертикальной. На ось цилиндра  $A$  действует горизонтальная сила  $F$ .

10.



Невесомый стержень  $AB = a$  вращается вокруг неподвижного шарнира  $A$  под действием вертикальной силы  $F$ , приложенной к его концу  $B$ , сообщая горизонтальное движение параллелепипеду массой  $m$  высотой  $h$ . Стержень скользит по ребру параллелепипеда без трения.

Ответы. Функция Лагранжа  $L$  и уравнения Гамильтона

$$1. L = (3/4)m(R\dot{\varphi})^2 - Fa \sin \varphi,$$

$$\dot{\varphi} = 2p/(3mR^2),$$

$$\dot{p} = -Fa \cos \varphi.$$

$$2. L = (1/2)m(a\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 - Fa \sin \varphi,$$

$$\dot{\varphi} = p/(a^2m \sin^2 \varphi),$$

$$\dot{p} = \cos \varphi(p^2/(ma^2 \sin^3 \varphi) - Fa).$$

3.  $L = (1/2)m(a\dot{\varphi}/\cos^2 \varphi)^2 - a m g \operatorname{tg} \varphi + M\varphi,$   
 $\dot{\varphi} = p \cos^4 \varphi / (ma^2),$   
 $\dot{p} = p^2 \sin 2\varphi \cos^2 \varphi / (ma^2) + M - mga / \cos^2 \varphi.$
4.  $L = (1/2)m(a\dot{\varphi})^2 - mga \sin \varphi - 2Fa \cos \varphi,$   
 $\dot{\varphi} = p / (a^2 m),$   
 $\dot{p} = -a(mg \cos \varphi - 2F \sin \varphi).$
5.  $L = (1/2)m(a\dot{\varphi} \cos \varphi)^2 - mga \sin \varphi + M\varphi,$   
 $\dot{\varphi} = p / (a^2 m \cos^2 \varphi),$   
 $\dot{p} = -p^2 \sin \varphi / (ma^2 \cos^3 \varphi) - mga \cos \varphi + M.$
6.  $L = (1/2)m(a\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + M\varphi,$   
 $\dot{\varphi} = p / (a^2 m \sin^2 \varphi),$   
 $\dot{p} = p^2 \cos \varphi / (ma^2 \sin^3 \varphi) + M.$
7.  $L = (1/2)\dot{x}^2(m_1 + m_2 \operatorname{ctg}^2 \alpha) + m_2 g x \operatorname{ctg} \alpha,$   
 $\dot{x} = p / (m_1 + m_2 \operatorname{ctg}^2 \alpha),$   
 $\dot{p} = m_2 g \operatorname{ctg} \alpha.$
8.  $L = m(R\dot{\varphi})^2(1 + \sin \varphi) - Rmg \sin \varphi,$   
 $\dot{\varphi} = p / (2R^2 m(1 + \sin \varphi)),$   
 $\dot{p} = p^2 \cos \varphi / (4mR^2(1 + \sin \varphi)^2) - mgR \cos \varphi.$
9.  $L = (3/4)ma^2\dot{\varphi}^2 - amg \sin \varphi - Fa \cos \varphi,$   
 $\dot{\varphi} = 2p / (3ma^2),$   
 $\dot{p} = -a(mg \cos \varphi - F \sin \varphi).$
10.  $L = (1/2)m(h\dot{\varphi} / \sin^2 \varphi)^2 - Fa \sin \varphi,$   
 $\dot{\varphi} = p \sin^4 \varphi / (mh^2),$   
 $\dot{p} = -p^2 \sin^2 \varphi \sin 2\varphi / (mh^2) - Fa \cos \varphi.$

## Глава 14

# МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ

В разделе МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ вы научитесь определять частоты малых собственных колебаний механической системы с двумя степенями свободы. Другие темы этого раздела, количество которых так велико, что они могут составить содержание отдельной книги, остались за пределами РЕШЕБНИКА. Задачи о вынужденных колебаниях, колебаниях при наличии сопротивления и многие другие содержатся, например, в [18], [20].

### 14.1. Система с двумя степенями свободы

*Постановка задачи. Механическая система с двумя степенями свободы состоит из твердых тел, соединенных линейно упругими пружинами. Определить частоты собственных колебаний системы.*

#### ПЛАН РЕШЕНИЯ

Задачу решаем с помощью уравнения Лагранжа 2-го рода.

1. Выбираем две обобщенные координаты  $x_1, x_2$ .
2. Вычисляем кинетическую энергию и обобщенные силы. Составляем два уравнения Лагранжа 2-го рода.
3. Записываем полученную систему в стандартной форме уравнений колебаний системы с двумя степенями свободы:

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{x}_1 + a_{12}\ddot{x}_2 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 &= 0, \\ a_{21}\ddot{x}_1 + a_{22}\ddot{x}_2 + c_{12}x_1 + c_{22}x_2 &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $a_{ij}, i, j = 1, 2$ , — инерционные коэффициенты,  $c_{ij}, i, j = 1, 2$ , — обобщенные коэффициенты жесткости или квазиупругие коэффициенты. Решение системы (1) будем искать в форме  $x_1 = A_1 \sin(\omega t + \beta_0)$ ,  $x_2 = A_2 \sin(\omega t + \beta_0)$ , где  $A_1, A_2, \beta_0$  — неизвестные постоянные;  $\omega$  — круговая частота колебаний. Система (1) после сокращения на

$\sin(\omega t + \beta_0)$  примет вид

$$\begin{aligned}(c_{11} - a_{11}\omega^2)A_1 + (c_{12} - a_{12}\omega^2)A_2 &= 0, \\ (c_{12} - a_{12}\omega^2)A_1 + (c_{22} - a_{22}\omega^2)A_2 &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

4. Условием существования нетривиального решения системы (2) для  $A_1$  и  $A_2$  является равенство определителя системы нулю. Отсюда получаем уравнение частот:

$$(c_{11} - a_{11}\omega^2)(c_{22} - a_{22}\omega^2) - (c_{12} - a_{12}\omega^2)^2 = 0.\tag{3}$$

5. Решая (3), находим частоты колебаний системы.

**ПРИМЕР.** Механическая система с двумя степенями свободы состоит из двух однородных цилиндров и двух линейно упругих пружин. Цилиндр  $A$  массой  $m_A = 50$  кг может кататься без проскальзывания и трения качения по горизонтальной поверхности. Его ось соединена с неподвижной стенкой горизонтальной пружиной 1. Ободы

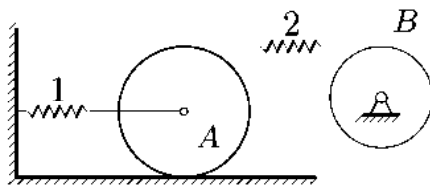


Рис. 173

цилиндров связаны нитью и пружиной 2. Цилиндр  $B$  массой  $m_B = 20$  кг вращается вокруг неподвижной оси. Жесткость пружин, работающих и на сжатие и на растяжение, одинакова:  $c = 90$  Н/м.

Массой пружин пренебречь. Найти частоты собственных колебаний системы.

**РЕШЕНИЕ** \*)

Задачу решим двумя способами. Различие между ними — в выборе обобщенных координат и форме вычисления обобщенных сил в уравнении Лагранжа.

**1-й способ**

1. В качестве обобщенных координат выбираем удлинения пружин (рис. 174). Связи предполагаем идеальными и их реакции на рисунке не показываем.

2. Кинетическую энергию системы, состоящую из суммы кинетических энергий двух тел:  $T = T_A + T_B$ , выразим через обобщенные скорости  $\dot{x}_1$  и  $\dot{x}_2$ . Кинетическая энергия однородного цилиндра  $A$ ,

\*) Решение задачи в системе Maple см. § 17.3, с. 373

катающегося без проскальзывания по неподвижной плоскости, вычисляется по формуле (4) на с. 242:

$$T_A = (3/4)m_A \dot{x}_1^2. \quad (4)$$

Кинетическая энергия вращения цилиндра  $B$  вокруг неподвижной оси имеет вид  $T_B = J_B \omega_B^2 / 2$ , где  $J_B = m_B R_B^2 / 2$ .

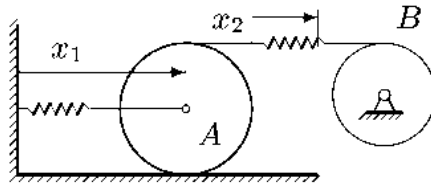


Рис. 174

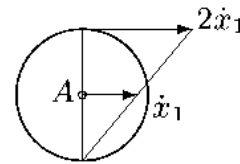


Рис. 175

Левый конец пружины 2 движется со скоростью  $2\dot{x}_1$  (рис. 175), скорость удлинения пружины  $\dot{x}_2$ . Скорость правого конца пружины равна скорости точки обода цилиндра  $B$  и равна сумме  $2\dot{x}_1 + \dot{x}_2$ , отсюда  $\omega_B = (2\dot{x}_1 + \dot{x}_2) / R_B$  — угловая скорость вращения цилиндра  $B$ . Таким образом получаем  $T_B = m_B (2\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 / 4$ . Кинетическая энергия всей системы

$$T = (3/4)m_A \dot{x}_1^2 + (1/4)m_B (2\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2.$$

Для того, чтобы вычислить обобщенную силу  $Q_1$ , даем возможное перемещение (удлинение)  $\delta x_1$  пружине 1, фиксируя удлинение пружины 2, или заменяя пружину 2 нерастяжимой нитью (рис. 176).

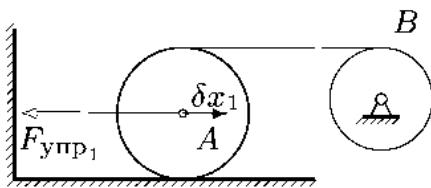


Рис. 176

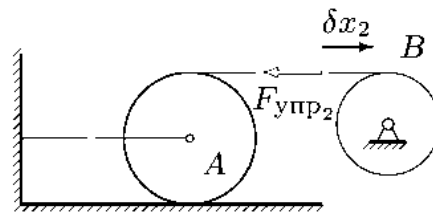


Рис. 177

Воспользуемся формулой  $Q_1 = \delta A_1 / \delta x_1$ , где  $\delta A_1 = -F_{\text{упр}_1} \delta x_1$ . Так как  $F_{\text{упр}_2} = cx_1$ , то  $Q_1 = -cx_1$ . Аналогично, фиксируя удлинение пружины 1, растягиваем пружину 2 на  $\delta x_2$  (рис. 177) и вычисляем  $\delta A_2 = -F_{\text{упр}_2} \delta x_2$ . Отсюда  $Q_2 = -cx_2$ .

Записываем систему уравнений Лагранжа 2-го рода:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} &= Q_1, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} &= Q_2.\end{aligned}$$

Вычисляем производные, входящие в уравнения Лагранжа:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} &= 1.5m_A \dot{x}_1 + m_B(2\dot{x}_1 + \dot{x}_2), & \frac{\partial T}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} &= 0.5m_B(2\dot{x}_1 + \dot{x}_2), & \frac{\partial T}{\partial x_2} &= 0.\end{aligned}$$

Уравнения Лагранжа принимают вид

$$\begin{aligned}(2m_B + 1.5m_A)\ddot{x}_1 + m_B\ddot{x}_2 &= -cx_1, \\ m_B\ddot{x}_1 + 0.5m_B\ddot{x}_2 &= -cx_2.\end{aligned}\tag{5}$$

3. Записываем (5) в стандартной форме уравнений колебаний системы с двумя степенями свободы (1). Инерционные коэффициенты для данного примера имеют вид

$$a_{11} = 2m_B + 1.5m_A, \quad a_{12} = a_{21} = m_B, \quad a_{22} = 0.5m_B.$$

Коэффициенты жесткости системы  $c_{11} = c_{22} = c, c_{12} = c_{21} = 0$ . Коэффициенты жесткости и инерционные коэффициенты образуют симметричные матрицы. Предполагая, что каждая обобщенная координата меняется по закону гармонических колебаний, решение системы (1) ищем в форме

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \beta_0), \quad x_2 = A_2 \sin(\omega t + \beta_0),$$

где  $A_1, A_2, \omega, \beta_0$  — неизвестные постоянные. Система (5) после сокращения на  $\sin(\omega t + \beta_0)$  принимает вид

$$\begin{aligned}(c - (2m_B + 1.5m_A)\omega^2)A_1 - m_B\omega^2 A_2 &= 0, \\ -m_B\omega^2 A_1 + (c - 0.5m_B\omega^2)A_2 &= 0.\end{aligned}\tag{6}$$

Из условия существования нетривиального решения этой системы для  $A_1$  и  $A_2$  получаем уравнение частот:

$$\frac{3}{4}m_A m_B \omega^4 - \frac{3m_A + 5m_B}{2} c \omega^2 + c^2 = 0.\tag{7}$$

Подставляем числовые данные задачи, решаем биквадратное уравнение (7) и находим две частоты собственных колебаний системы:

$$\omega_1 = 0.871 \text{ рад/с}, \quad \omega_2 = 3.774 \text{ рад/с}.$$

### 2-й способ

1. В качестве первой обобщенной координаты выберем смещение  $x$  цилиндра  $A$ , а в качестве другой — угол поворота  $\varphi$  цилиндра  $B$  (рис. 178). Таким образом,  $q_1 = x$ ,  $q_2 = \varphi$ .

2. Кинетическую энергию системы, состоящую из суммы кинетических энергий двух тел,  $T = T_A + T_B$ , выражаем через обобщенные скорости  $\dot{x}$  и  $\dot{\varphi}$ . Кинетическая энергия цилиндра  $A$  вычисляется так же, как и в 1-м способе по формуле (4):  $T_A = 3m_A \dot{x}^2/4$ . Кинетическая энергия вращения цилиндра  $B$

$$T_B = J_B \dot{\varphi}^2/2 = m_B \dot{\varphi}^2 R_B^2/4.$$

Кинетическая энергия всей системы  $T = (3/4)m_A \dot{x}^2 + m_B \dot{\varphi}^2 R_B^2/4$ . Для того, чтобы вычислить обобщенные силы находим потенциальную энергию системы. Силы тяжести работу не совершают, поэтому вся потенциальная энергия содержится в пружинах. Удлинение первой пружины равно  $x$ . Левый конец пружины 2 смещается на  $2x$ , правый — на  $R_B \varphi$  в ту же сторону (рис. 179).

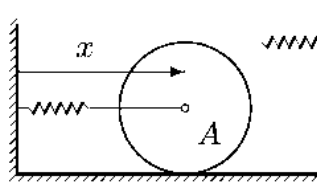


Рис. 178

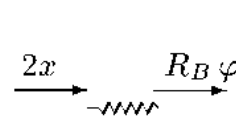


Рис. 179

Удлинение второй пружины равно по модулю  $|2x - R_B \varphi|$ . Потенциальная энергия пружин, не имеющих предварительного напряжения, имеет вид

$$\Pi = \frac{c}{2} x^2 + \frac{c}{2} (2x - R_B \varphi)^2.$$

Обобщенные силы вычисляем по формулам

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -c(5x - 2R_B \varphi), \quad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -c R_B (R_B \varphi - 2x).$$



Вычисляем производные, входящие в уравнения Лагранжа:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= 1.5 m_A \dot{x}, & \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= 0.5 m_B R_B^2 \dot{\varphi}, & \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 0.\end{aligned}$$

Уравнения Лагранжа принимают вид

$$\begin{aligned}1.5 m_A \ddot{x} &= -c(5x - 2R_B \varphi), \\ 0.5 m_B R_B^2 \ddot{\varphi} &= -cR_B(R_B \varphi - 2x).\end{aligned}\tag{8}$$

3. Записываем (8) в стандартной форме уравнений колебаний системы с двумя степенями свободы (1). Инерционные коэффициенты для данного примера имеют вид

$$a_{11} = 1.5 m_A, \quad a_{12} = a_{21} = 0, \quad a_{22} = 0.5 m_B R_B^2.$$

Коэффициенты жесткости имеют вид  $c_{11} = 5c$ ,  $c_{12} = c_{21} = -2cR_B$ ,  $c_{22} = cR_B^2$ . Решение системы (1) ищем в форме гармонических колебаний:  $x = A_1 \sin(\omega t + \beta_0)$ ,  $\varphi = A_2 \sin(\omega t + \beta_0)$ , где  $A_1, A_2, \omega, \beta_0$  — неизвестные постоянные. Система (8) после сокращения на общий множитель  $\sin(\omega t + \beta_0)$  принимает вид

$$\begin{aligned}(5c - 1.5m_A \omega^2)A_1 - 2cR_B A_2 &= 0, \\ -2cA_1 + R_B(c - 0.5m_B \omega^2)A_2 &= 0.\end{aligned}\tag{9}$$

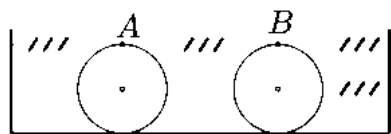
Для неизвестных амплитуд колебаний  $A_1$  и  $A_2$  система (9) является однородной. Из условия существования нетривиального решения приравняем нулю определитель системы и получаем уравнение частот, в точности совпадающее с (7). Таким образом, с другим набором обобщенных координат мы находим те же частоты:  $\omega_{1,2}^2 = (75 \pm 3\sqrt{505})/10$ , или  $\omega_1 = 0.871$  рад/с,  $\omega_2 = 3.774$  рад/с.

ЗАМЕЧАНИЕ. Решение задачи равносильно отысканию собственных значений матрицы  $A^{-1}C$ , где  $A$  и  $C$  матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов. Действительно, представим (1) в виде  $A\ddot{\vec{x}} + C\vec{x} = 0$ , где  $\vec{x} = \{x_1, x_2\}$ . Умножим это уравнение на обратную матрицу  $A^{-1}$ . Получаем, что  $\ddot{\vec{x}} + A^{-1}C\vec{x} = 0$ . Решение ищем в форме гармонических колебаний, записываем систему однородных линейных уравнений для амплитуд колебаний, определитель которой

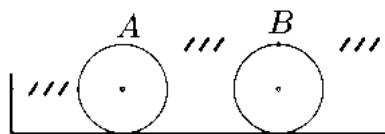
имеет вид  $\det(-\omega^2 E + A^{-1}C)$ , где  $E$  — единичная матрица. Таким образом, квадраты частот равны собственным значениям матрицы  $A^{-1}C$  (Решбник ВМ, §2.10.).

**УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.** Механическая система с двумя степенями свободы состоит из двух однородных цилиндров и нескольких линейно упругих пружин с одинаковой жесткостью  $c$ . Цилиндры катаются без проскальзывания и сопротивления по горизонтальной поверхности, пружины в положении равновесия не имеют предварительного напряжения. Массой пружин пренебречь. Определить частоты собственных колебаний системы.

1.  $m_A = 9$  кг,  $m_B = 6$  кг,  
 $c = 1$  Н/м.



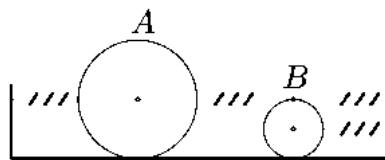
2.  $m_A = 7$  кг,  $m_B = 4$  кг,  
 $c = 3$  Н/м.



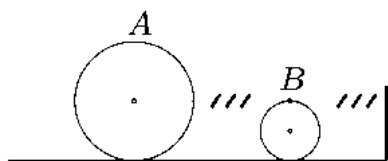
3.  $m_A = 5$  кг,  $m_B = 6$  кг,  
 $c = 5$  Н/м.



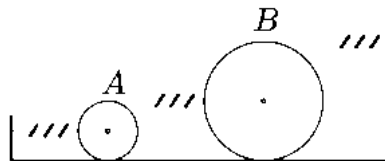
4.  $m_A = 3$  кг,  $m_B = 6$  кг,  
 $c = 7$  Н/м.



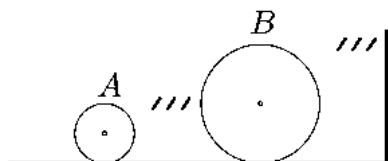
5.  $m_A = 1$  кг,  $m_B = 4$  кг,  
 $c = 9$  Н/м.



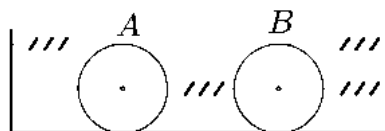
6.  $m_A = 10$  кг,  $m_B = 3$  кг,  
 $c = 6$  Н/м.



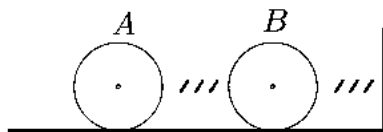
7.  $m_A = 8$  кг,  $m_B = 3$  кг,  
 $c = 8$  Н/м.



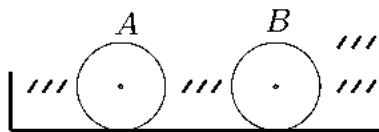
8.  $m_A = 6$  кг,  $m_B = 5$  кг,  
 $c = 10$  Н/м.



9.  $m_A = 4$  кг,  $m_B = 1$  кг,  
 $c = 12$  Н/м.



10.  $m_A = 2$  кг,  $m_B = 5$  кг,  
 $c = 14$  Н/м.



Инерционные коэффициенты системы  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  приведены в кг, коэффициенты жесткости  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{22}$  — в Н/м и собственные частоты в рад/с. В качестве обобщенных координат  $x_1$ ,  $x_2$  взяты линейные перемещения осей цилиндров  $A$  и  $B$  соответственно. При таком выборе обобщенных координат  $a_{12} = a_{21} = 0$ .

Ответы

	$a_{11}$	$a_{22}$	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{22}$	$\omega_1$	$\omega_2$
1	13.5	9.0	8	-4	9	0.617	1.101
2	10.5	6.0	15	-12	24	0.854	2.168
3	7.5	9.0	20	-20	45	1.065	2.556
4	4.5	9.0	14	-14	63	1.456	2.827
5	1.5	6.0	9	-18	72	1.514	3.963
6	15.0	4.5	30	-12	30	1.257	2.662
7	12.0	4.5	32	-16	40	1.407	3.094
8	9.0	7.5	50	-10	60	2.248	2.916
9	6.0	1.5	12	-12	24	0.968	4.131
10	3.0	7.5	28	-14	84	2.678	3.655

## 14.2. Колебания узла фермы

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** В одном из шарниров плоской фермы находится точка с массой  $m$ . Стержни фермы упругие. Ферма расположена в горизонтальной плоскости. Пренебрегая массой стержней, определить частоты собственных малых колебаний шарнира фермы.

**ПЛАН РЕШЕНИЯ.** Система имеет две степени свободы. Основные уравнения задачи следуют из уравнения Лагранжа 2-го рода. В качестве обобщенных координат принимаем горизонтальные и вертикальные перемещения узла  $x_1$  и  $x_2$ . Предполагая, что упругие силы линейно зависят от перемещений, записываем уравнение Лагранжа 2-го рода в матричном виде:

$$A\ddot{\vec{x}} + C\dot{\vec{x}} = 0, \quad (1)$$

где  $A$  — матрица инерции,  $C$  — матрица жесткости. Матрица обратная  $C$  — матрица податливости  $B = C^{-1}$ , коэффициенты которой (перемещения от единичных сил) вычисляем по формуле Максвелла-Мора [20]:

$$b_{i,j} = b_{j,i} = \sum_{\mu=1}^n S_{i,\mu} S_{j,\mu} \frac{l_{\mu}}{EF}, \quad i, j = 1, 2, \quad (2)$$

где  $l_{\mu}$  — длины стержней,  $E$  и  $F$  — модуль упругости и площадь поперечного сечения стержней,  $S_{i,\mu}$  — безразмерное усилие в стержне с номером  $\mu$  от действия единичной горизонтальной ( $i = 1$ ) или вертикальной ( $i = 2$ ) нагрузки на шарнир с массой. Произведение  $EF$  называют жесткостью, в данной задаче она считается одинаковой для всех стержней фермы. Коэффициенты  $b_{i,j}$  имеют простой физический смысл:  $b_{i,j}$  — это перемещение узла в направлении  $i$  под действием единичной силы, действующей в направлении  $j$ . Измеряются  $b_{i,j}$  в м/Н. По теореме взаимности Бетти\*)  $b_{i,j} = b_{j,i}$ .

Кинетическая энергия точки имеет вид  $T = m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)/2$ , следовательно, матрица инерции является диагональной:

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}.$$

Умножаем (1) на  $B$  и делаем подстановку  $\ddot{\vec{x}} = -\omega^2 \vec{x}$ , что равносильно замене  $x_1 = A_1 \sin(\omega t + \beta_0)$ ,  $x_2 = A_2 \sin(\omega t + \beta_0)$ , где  $A_1, A_2$  — амплитуды,  $\omega$  — частота,  $\beta_0$  — начальная фаза колебаний. Получаем однородную систему

$$m\omega^2 B \vec{x} - \vec{x} = 0,$$

имеющую ненулевое решение в том случае, если ее определитель равен нулю. Следовательно, задача свелась к поиску собственных значений  $\lambda = 1/(m\omega^2)$  матрицы  $B$ .

1. К шарниру, наделенному массой, прикладываем единичную (безразмерную) горизонтальную силу. Определяем усилия в стержнях  $S_{1,\mu}, \mu = 1, \dots, n$ , где  $n$  — число стержней фермы.

2. Прикладываем к этому же шарниру единичную вертикальную силу. Определяем усилия в стержнях  $S_{2,\mu}$ .

---

\*) Энрико Бетти (1823–1892) — итальянский математик.

3. Используя формулу Максвелла–Мора (2), вычисляем коэффициенты податливости  $b_{i,j}$ . Записываем их в симметричную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

4. Вычисляем собственные значения (*Решбник ВМ*, §2.10, с. 68)  $\lambda_{1,2}$  матрицы  $B$ .

5. Находим частоты собственных колебаний  $\omega_1 = 1/\sqrt{m\lambda_1}$ ,  $\omega_2 = 1/\sqrt{m\lambda_2}$ .

**ПРИМЕР.** В шарнире  $C$  плоской фермы находится точка с массой  $m = 9$  кг (рис. 180). Жесткость всех стержней фермы одинакова  $EF = 0.1$  кН,  $l = 1$  м. Ферма расположена в горизонтальной плоскости. Пренебрегая массой стержней, определить частоты собственных малых колебаний шарнира.

#### РЕШЕНИЕ

1. К шарниру  $C$ , наделенному массой, прикладываем единичную (безразмерную) горизонтальную силу (рис. 181). Методом Риттера или методом вырезания узлов (§ 2.2, с. 37) определяем усилия в стержнях:  $S_{1,1} = S_{1,2} = S_{1,4} = S_{1,5} = 0$ ,  $S_{1,3} = -1$ . В усилиях  $S_{1,\mu}$  первый индекс указывает направление приложенной единичной силы.

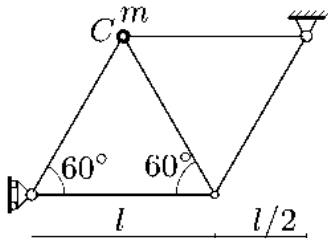


Рис. 180

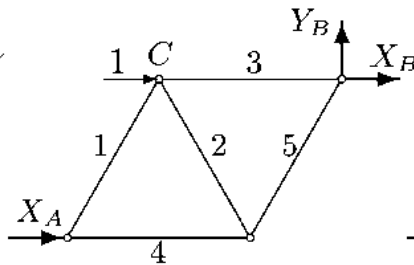


Рис. 181

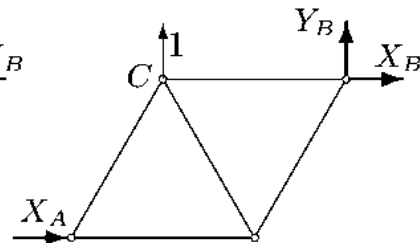


Рис. 182

Индекс 1 соответствует горизонтальной единичной силе, 2 — вертикальной силе. Второй индекс — номер стержня. Номера стержней указаны на рис. 181.

2. К шарниру  $C$  прикладываем единичную вертикальную силу (рис. 182). Определяем усилия в стержнях:  $S_{2,1} = 0$ ,  $S_{2,2} = 1.155$ ,  $S_{2,3} = -0.577$ ,  $S_{2,4} = S_{2,5} = 1.155$  \*).

\*) Определение усилий в стержнях с помощью Maple V см. § 15.1, с. 350.

3. По формуле Максвелла–Мора (2) находим коэффициенты податливости  $b_{i,j}$ . Промежуточные результаты заносим в таблицу:

$\mu$	$S_{1,\mu}$	$S_{2,\mu}$	$l_\mu$	$l_\mu S_{1,\mu}^2$	$l_\mu S_{1,\mu} S_{2,\mu}$	$l_\mu S_{2,\mu}^2$
1	0	0	1	0	0	0
2	0	1.155	1	0	0	1.333
3	-1	-0.577	1	1	0.577	0.333
4	0	-1.155	1	0	0	1.333
5	0	-1.155	1	0	0	1.333
$\sum_{\mu=1}^5$				1.000	0.577	4.333

Суммируя три последних столбца, получаем коэффициенты податливости, отнесенные к жесткости  $EF$ :

$$b_{1,1} = 1.000/(EF), \quad b_{1,2} = 0.577/(EF), \quad b_{2,2} = 4.333/(EF),$$

и записываем их в виде симметричной матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.00577 \\ 0.00577 & 0.04333 \end{pmatrix}.$$

4. Вычисляем собственные значения  $\lambda_{1,2}$  матрицы  $B$ . Приравняем нулю определитель

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Решаем квадратное уравнение и находим собственные значения:

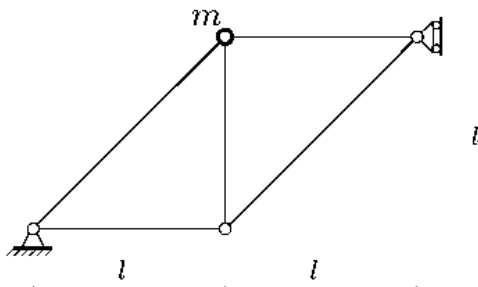
$$\lambda_1 = 0.044305, \quad \lambda_2 = 0.009028.$$

6. Находим частоты собственных колебаний (круговые частоты):

$$\omega_1 = 1/\sqrt{m\lambda_1} = 1.584 \text{ рад/с}, \quad \omega_2 = 1/\sqrt{m\lambda_2} = 3.508 \text{ рад/с}.$$

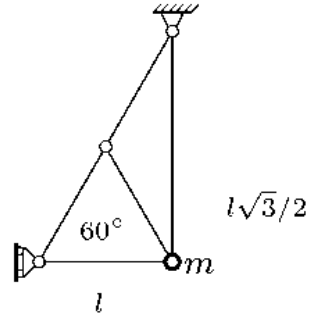
*УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.* В одном из шарниров плоской фермы (на рисунке выделен) находится точка с массой  $m$ . Стержни фермы упругие. Жесткость стержней  $EF$ ;  $l = 1$  м. Ферма расположена в горизонтальной плоскости. Пренебрегая массой стержней, определить частоты собственных малых колебаний шарнира фермы.

1.



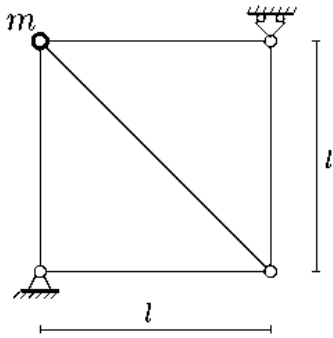
$EF = 0.9 \text{ кН}, m = 1 \text{ кг.}$

2.



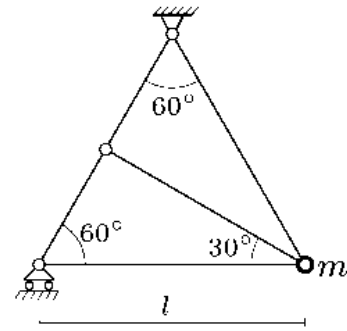
$EF = 1.6 \text{ кН}, m = 4 \text{ кг.}$

3.



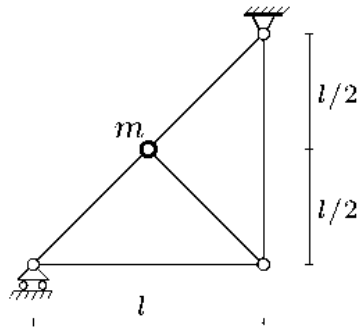
$EF = 1.6 \text{ кН}, m = 9 \text{ кг.}$

4.



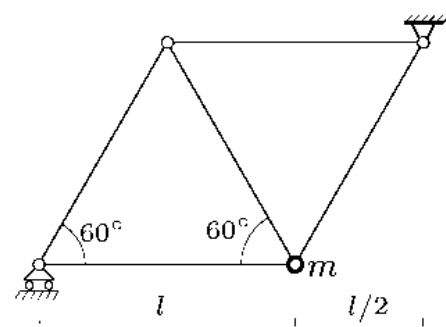
$EF = 2.5 \text{ кН}, m = 16 \text{ кг.}$

5.



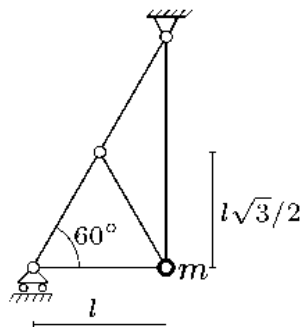
$EF = 3.6 \text{ кН}, m = 25 \text{ кг.}$

6.



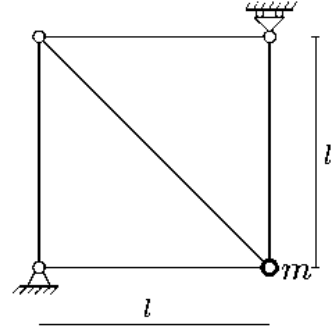
$EF = 4.9 \text{ кН}, m = 36 \text{ кг.}$

7.



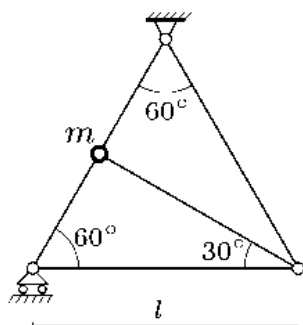
$EF = 0.9 \text{ кН}, m = 49 \text{ кг.}$

8.



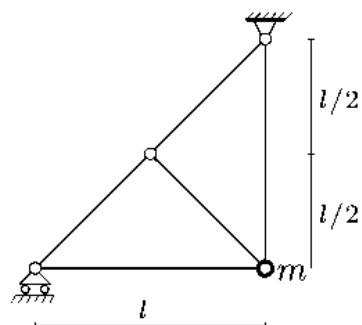
$EF = 1.6 \text{ кН}, m = 64 \text{ кг.}$

9.



$$EF = 2.5 \text{ кН}, m = 81 \text{ кг.}$$

10.



$$EF = 3.6 \text{ кН}, m = 1 \text{ кг.}$$

Коэффициенты податливости, умноженные на жесткость  $EF$ , даны в м, частоты — в рад/с. Индекс 1 соответствует горизонтальной единичной силе, 2 — вертикальной.

Ответы

	$b_{11}EF$	$b_{12}EF$	$b_{22}EF$	$\omega_1$	$\omega_2$
1	1.000	-1.000	3.828	14.733	36.323
2	1.000	0.000	1.732	15.197	20.000
3	5.828	1.000	1.000	5.431	14.897
4	5.000	2.887	3.000	4.706	12.859
5	2.621	-1.207	1.207	6.593	16.718
6	1.889	-0.321	1.074	8.250	11.889
7	9.000	0.000	1.732	1.429	3.256
8	1.000	0.000	1.000	5.000	5.000
9	2.775	-0.736	0.592	3.208	9.175
10	3.828	0.000	1.000	30.665	60.000



## Часть IV

# РЕШЕНИЯ В СИСТЕМЕ MAPLE V

Все задачи, приведенные в решебнике, могут быть решены в системе аналитических вычислений, например, Maple V, Mathematica 4, Derive. В некоторых случаях такие решения представляют собой вычисления по формулам, подготовленным вручную, например, решения систем линейных уравнений, что, конечно, упрощает работу учащегося, концентрируя его внимание на сути предмета. Однако преимущества системы аналитических вычислений проявляются наибольшим образом в совместном применении аналитических возможностей системы и эффективных алгоритмов расчетов. Здесь мы приведем несколько программ решения задач статики, кинематики и динамики, в которых использованы такие алгоритмы.

В качестве условий задач взяты примеры, приведенные в решебнике (за исключением задачи Программы 4). К текстам программ даны краткие пояснения свойств основных операторов Maple V и некоторые формулы. Более подробные описания системы Maple V можно найти в книгах [8], [9], [12], [13].

Первой командой каждой программы является команда `restart` — очистка памяти и отмена всех ранее назначенных команд и условий. Все команды в Maple V вводятся после знака `>` и заканчиваются точкой с запятой, если результат требуется вывести сразу же на экран, или двоеточием, если выводить результат не надо. Комментарии записаны на строках без знака `>` или после знака `#`.

Качество графики системы Maple V можно повысить, увеличив масштаб изображения (`CTRL 3...CTRL 6`), пропорционально уменьшив при этом шрифт в интерфейсе системы (`Format — Styles — C Maple Input — Modify`).

## Глава 15

# ПРОГРАММЫ ПО СТАТИКЕ

### 15.1. Расчет фермы

**УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ.** Определить усилия в стержнях плоской фермы (рис. 28, с. 46).

#### РЕШЕНИЕ

В основу расчета положим метод вырезания узлов<sup>\*)</sup>. В статически определимой неизменяемой ферме с  $N$  узлами, стержней всего  $2N - 3$ . Для  $N$  узлов составляем  $2N$  уравнений проекций на оси  $x, y$ . Включаем в число стержней три опорные стержня (два для неподвижной опоры  $A$  и один для опоры  $B$ , рис. 29). Таким образом, число уравнений совпадет с числом неизвестных.

#### ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ

Программа (с. 353, 354) состоит из трех блоков.

1. Ввод данных. Задает число узлов и число стержней фермы, величины нагрузок (в кН), углы. Оператор `evalf` переводит символ  $P_i$ , в формат вещественного числа  $\pi$ .

Для алгоритмизации процесса составления уравнений пронумеруем стержни и узлы (рис. 183). Шарниры 8, 9, 10 необходимы для ориентации опорных стержней 12, 13, 14. Для этих шарниров уравнения равновесия не составляются.

Координаты узлов  $x, y$  задаем в виде векторов (массивов) с  $N + 3$  компонентами. Начало координат помещаем в опоре  $A$  (узел 1). Вектор заключен в скобки  $\langle \rangle$ , элементы отделены вертикальными черточками  $|$ .

Указываем номера точек приложения ( $Nbeg$ ) векторов усилий в стержнях и номера их концов ( $Nend$ ). Точка приложения выбирается условно, так как стержень подходит к двум узлам, и в качестве начала вектора усилия можно взять любой из них.

---

<sup>\*)</sup> Алгоритм Горячева В.Н., Резунова А.В.

2. Рисунок фермы. Для контроля ввода геометрических величин изображаем ферму средствами графики Maple V. Для этого используем оператор вывода графических объектов на экран `display`.

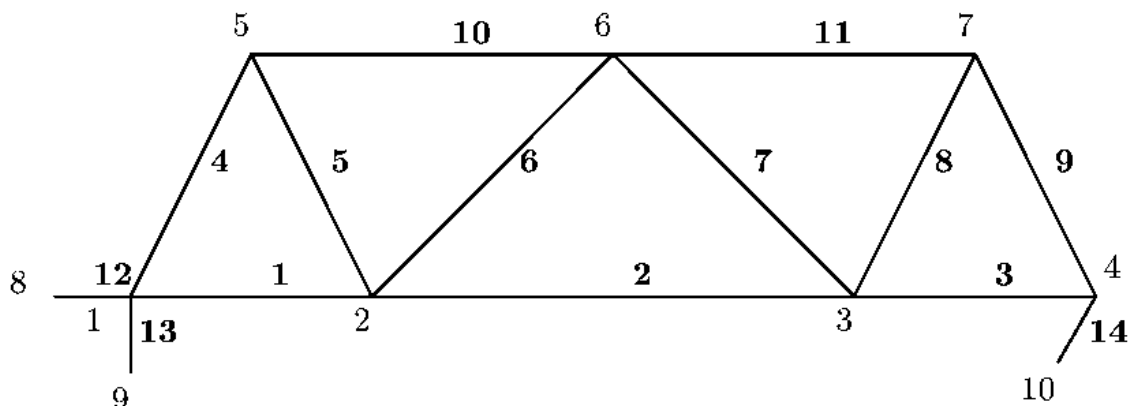


Рис. 183

Изображение стержня с номером  $i$  присваиваем переменной  $R[i]$  в цикле по числу стержней, включая опорные.

Одна из форм оператора цикла в Maple имеет вид

```
for i from i1 by i2 to i3 do ...od.
```

Шаг `by i2` и начальное значение `from i1` по умолчанию приняты равными 1 и могут опускаться. Оператор `PLOT(CURVES([[x1,y1],[x2,y2]]))` создает графический объект — отрезок с концами в точках с координатами  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ .

Для вывода номеров стержней и узлов выбираем шрифт и размер. Эти значения заносим в переменную `Шрифт`. В Maple для переменных можно использовать русские буквы, программы при этом читаются легче. В отдельных циклах создаются графические объекты `Шарнир[i]` — номера узлов, `Стержень[i]` — номера стержней. Цвет номеров задает оператор `COLOR(HUE,n)`. Выбор цвета определяет дробная часть числа  $n$ . Можно также использовать оператор `COLOR(RGB,n1,n1,n3)` и выбирать цвет оттенками красного, зеленого и голубого,  $0 < n_i < 1$ .

Оператор для изображения нагрузок — `arrow`. Параметры стрелок (толщина стрелки, толщина острия, отношение длины острия к длине стрелки и цвет) присвоены переменной `argw`<sup>\*)</sup>.

Чтобы не писать длинный список объектов, для вывода изображения используется запись `seq(R[i], i=1..M)` — краткая форма прос-

\*) В пакетах `plots` и `plottools` системы Maple 7 оператор `arrow` определяется различным образом, поэтому порядок подключения этих пакетов для решения является существенным.

того перечисления  $R[1], R[2], \dots, R[M]$ .

В операторе `display` можно использовать различные режимы (опции); `scaling=constrained` — опция, задающая одинаковый по осям координат масштаб рисунка. Если после оператора `display` поставить не двоеточие, а точку с запятой, то на экране появится изображение фермы (рис. 183).

3. Вычисления. Косинус угла усилия  $S[i]$ ,  $i = 1, \dots, M$  с осью  $x$ , приложенного к узлу  $j$ , поместим в переменную типа двумерного массива  $G[2j-1, i]$ . Косинус угла этого же усилия с осью  $y$  — в  $G[2j, i]$ . Элементы  $G$  предварительно обнуляются командой `restart`.

В теле цикла вычисляются  $G[i, j]$ . Каждое из неизвестных усилий  $S_i$  входит в систему уравнений дважды: в уравнения равновесия узлов  $Nbeg[i]$  и  $Nend[i]$  с разными знаками. Только усилия опорных стержней с номерами  $M-2, M-1, M$  появляются в уравнениях равновесия по одному разу, отсюда необходимость условного оператора `if < M-2... fi` \*).

Проекции нагрузки  $F_{jx}$  и  $F_{jy}$ , приложенной к узлу  $j$ , заносятся соответственно в элементы  $2j-1$  и  $2j$  вектора  $B$  правой части системы уравнений.

`LinearSolve(A, B)` — оператор решения системы уравнений с матрицей  $A$  и вектором правой части  $B$ . Для того, чтобы этот оператор работал, необходимо загрузить специальную библиотеку программ командой `with(LinearAlgebra)`. Величины  $G[i, j]$  не образуют матрицу, поэтому для обращения к оператору решения `LinearSolve` используем преобразование `Matrix(M, G)`. В результате решения значения усилий присваиваются элементам вектора  $S$ .

Для вывода на печать чисел и символов используем оператор форматного вывода `printf`. Сначала указываем формат вывода (список форматов), потом список чисел. Вместо знака `%` предполагается ставить число по формату, следующему за этим знаком. Формат `g` годится для вывода целых и вещественных чисел. Формат `N.Mf` отводит при печати  $N$  позиций под вещественное число, включая десятичную точку и  $M$  позиций для дробной части числа. Число на своей позиции сдвигается вправо. Перевод каретки на новую строку кодируется как `\n`.

---

\*) Для завершения цикла и условного оператора допустимо применять `end` вместо `od` и `fi`.

## Программа 1. Расчет фермы

```
> restart: with(LinearAlgebra):
1. Ввод данных
    N - число узлов, M - число стержней фермы.
    Нагрузки (кН), угол наклона опорного стержня
> N:=7: M:=2*N: P:=30: Q:=15: F:=20:
> alpha:=evalf(Pi/3): beta:=evalf(Pi/3):
    Длина опорных стержней на рисунке
> d:=1.:
    Координаты узлов
> x:=<0|2|6|8|1|4|7|-d|0|8-cos(beta)*d>:
> y:=<0|0|0|0|2|2|2|0|-d|-sin(beta)*d>:
    Номер узла начала и конца стержня-вектора
> Nbeg:=<1|2|3|1|2|2|3|3|4|5|6|1|1|4>:
> Nend:=<2|3|4|5|5|6|6|7|7|6|7|8|9|10>:
2. Рисунок фермы
> with(plots):with(plottools):
> for i to M do
>   R[i]:=PLOT(CURVES([[x[Nbeg[i]],y[Nbeg[i]]],
>                       [x[Nend[i]],y[Nend[i]]]])):
> od:
> Шрифт:=FONT(TIMES,BOLD,8):
> for i to N+3 do
> Шарнир[i]:=PLOT(TEXT([x[i],y[i]+0.3],convert(i,symbol)),
>                       Шрифт,COLOR(HUE,1)):
> od:
> for i to M do
>   Стержень[i]:=PLOT(TEXT([(x[Nbeg[i]]+x[Nend[i]])/2,
>                           (y[Nbeg[i]]+y[Nend[i]])/2+0.3],
>                           convert(i,symbol)),
>                       Шрифт,COLOR(HUE,0.3)):
> od:
    Параметры стрелки на рисунке
> arw:=0.05,0.2,0.2,color=red:
    Проекция наклонной силы
> Fx:=F*cos(alpha): Fy:=-F*sin(alpha):
```

### Изображение нагрузок

```
> F1:=arrow([x[2],y[2]],evalm([Fx,Fy]*0.05),arw):
> Q1:=arrow([x[5],y[5]],evalm([-Q,0]*0.05),arw):
> P1:=arrow([x[3],y[3]],evalm([0,-P]*0.05),arw):
>
>      Изображение фермы
>      display(F1,Q1,P1,seq(R[i],i=1..M),
>                               seq(Шарнир[i],i=1..N+3),
>                               seq(Стержень[i],i=1..M),
>                               scaling=constrained,axes=none);
```

### 3. Вычисления

#### Заполнение матрицы

```
> for i to M do
>   Lx:=x[Nend[i]]-x[Nbeg[i]]:
>   Ly:=y[Nend[i]]-y[Nbeg[i]]:
>   L:=evalf(sqrt(Lx^2+Ly^2)):
>   G[2*Nbeg[i]-1,i]:=Lx/L:  G[2*Nbeg[i],i]:=Ly/L:
>   if i<M-2 then G[2*Nend[i]-1,i]:=-Lx/L:
>                 G[2*Nend[i],i]:=-Ly/L: fi:
> od:
```

#### Правая часть системы - вектор нагрузок

```
> B:=<0|0|Fx|Fy|0|-P|0|0|-Q|0|0|0|0|0>:
```

#### Решение системы

```
> S := LinearSolve(Matrix(M,G),-B):
> printf('%s\n',' n      S      n      S      ');
> for i to M/2 do
>   printf('%3.0f%9.3f %3.0f%9.3f\n',
>         2*i-1,S[2*i-1],2*i,S[2*i]);
> od;
```

Ответы. Усилия даны в кН.

n	S	n	S
1	20.446	2	29.486
3	24.865	4	-27.102
5	27.102	6	-9.786
7	9.786	8	25.804
9	-25.804	10	-9.240
11	-23.080	12	8.325
13	-24.240	14	-26.651

## 15.2. Центр тяжести плоской фигуры

УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ. Определить координаты центра тяжести однородной плоской фигуры (рис. 74, с. 118).

РЕШЕНИЕ

Применим метод интегрирования по контуру. Для площади фигуры, ограниченной ломаной  $L$  с угловыми точками  $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ , существует точная формула \*) :

$$A = \int_A dA = \frac{1}{2} \int_{(L)} ydx - xdy = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_{i+1}y_i - x_iy_{i+1}).$$

Аналогично вычисляем координаты центра тяжести:

$$x_c = \frac{1}{6A} \sum_{i=1}^n (x_{i+1}y_i - x_iy_{i+1})(x_i + x_{i+1}),$$
$$y_c = \frac{1}{6A} \sum_{i=1}^n (x_{i+1}y_i - x_iy_{i+1})(y_i + y_{i+1}).$$

Принимается обход контура по часовой стрелке, последняя точка совпадет с первой и имеет номер  $(n + 1)$ . Пронумеруем угловые точки контура (рис. 184). Дугу окружности заменим ломаной. Координаты угловых точек на дуге вычисляем по формулам

$$x_i = 3 + R \cos(i\pi/N), \quad y_i = R \sin(i\pi/N), \quad i = 1, \dots, N, \quad R = 1,$$

где  $N$  — число точек на окружности. Если фигура двусвязная, то для использования этого метода необходимо сделать разрез, соединяющий внутренний и внешний контур (рис. 185). При обходе фигуры внутренний контур будет пройден против часовой стрелки, и его площадь станет отрицательной, а разрез, пройденный дважды в противоположных направлениях, не внесет добавки в интеграл.

---

\*) Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. III, М.:1970, с. 35.

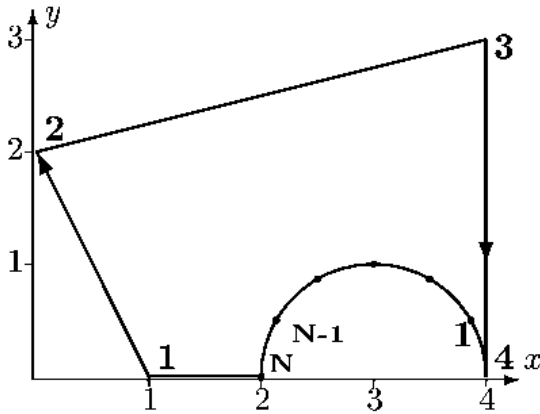


Рис. 184

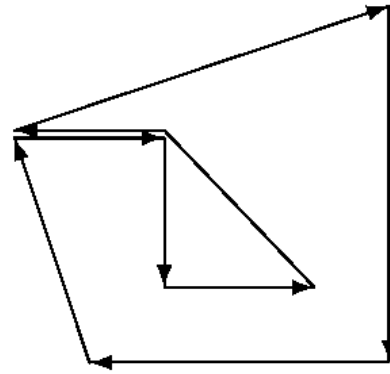


Рис. 185

### ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ

Вводим число точек контура без кругового выреза  $K$  и число точек на вырезе  $N$ . Координаты точек заносим в переменные  $X, Y$  и  $Xcircl, Ycircl$ , а затем в матрицу  $T$ .

### Программа 2. Центр тяжести

```
> restart:
      Число точек на дуге и число угловых точек
> N:=20: K:=4: pi:=evalf(Pi): n:=K+N:
      Матрица координат
> F:=i*pi/N: X:=1,0,4,4: Y:=0,2,3,0:
      Точки на дуге
> Xcircl:=seq(3+cos(F),i=1..N):
> Ycircl:=seq(sin(F),i=1..N):
      Матрица координат
> T:=matrix(2,n+1,[X,Xcircl,1,Y,Ycircl,0]):
> with(plots):polygonplot(T,scaling=constrained);
      Площадь
> Z:=T[2,i]*T[1,i+1]-T[1,i]*T[2,i+1]:
> A:=add(Z,i=1..n)/2;
      Координаты центра тяжести
> Xc:=add(Z*(T[1,i]+T[1,i+1]),i=1..n)/6/A;
> Yc:=add(Z*(T[2,i]+T[2,i+1]),i=1..n)/6/A;
      A := 7.435655350
      Xc := 2.193077180
      Yc := 1.524739473
```



Первая строка матрицы — координаты  $x$ , вторая — координаты  $y$ . Последняя точка имеет номер  $K+1+N$  и совпадает с первой.

Оператор `polygonplot` строит изображение контура, ограниченного точками, заданными в матрице  $T$ . Рисунок, который выдает система, совпадает с рис. 74, с. 118 и здесь не приводится. Функция `add(c[i], i=1..n)` означает сумму  $\sum_{i=1}^n c_i$ . Точность вычислений зависит от числа точек на окружности. Три правильных знака после запятой получаются при  $N > 100$ .

Отметим необычную для алгоритмических языков конструкцию. Значение  $Z$  задано вне цикла суммирования. Аналогично, угол  $F$  “вычислен” до того, как параметру  $i$  было присвоено число. Это характерная особенность оператора присваивания `:=` в пакетах символьных вычислений.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В курсе сопротивления материалов используются *геометрические* моменты инерции плоских фигур. Эти характеристики можно также вычислить методом контурного интегрирования.

Осевые моменты инерции рассчитываются по формулам

$$J_x = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^n (y_{k+1}^2 + y_{k+1}y_k + y_k^2)(x_{k+1}y_k - x_ky_{k+1}),$$

$$J_y = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^n (x_{k+1}^2 + x_{k+1}x_k + x_k^2)(x_{k+1}y_k - x_ky_{k+1}).$$

Центробежный момент инерции имеет вид

$$J_{xy} = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^n (x_{k+1}y_{k+1} + x_ky_k + (x_ky_{k+1} + y_kx_{k+1})/2)(x_{k+1}y_k - x_ky_{k+1}).$$

Центральные моменты инерции имеют вид  $J_{xc} = J_x - y_c^2 A$ ,  $J_{yc} = J_y - x_c^2 A$ ,  $J_{xyc} = J_{xy} - x_c y_c A$ . Главные центральные моменты инерции имеют вид

$$J_{\max, \min} = \frac{J_{xc} + J_{yc}}{2} \pm \sqrt{\frac{(J_{xc} - J_{yc})^2}{4} + J_{xyc}^2}.$$

Радиусы инерции имеют вид  $i_{\max} = \sqrt{J_{\max}/A}$ ,  $i_{\min} = \sqrt{J_{\min}/A}$ , где  $A$  — площадь фигуры. В динамике используются *физические* моменты инерции, зависящие от массы. Они связаны с *геометрическими* моментами инерции, и для однородных тел вычисляются по формуле  $J = i^2 m$ , где  $i$  — соответствующий радиус инерции, найденный, например, с помощью приведенного алгоритма.

## Глава 16

# ПРОГРАММЫ ПО КИНЕМАТИКЕ

### 16.1. Кинематика точки

УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ. Точка движется по закону

$$x = 3 \sin 2t, \quad y = 2 \cos 4t.$$

При  $t = t_1 = \pi/12$  найти скорость, ускорение и радиус кривизны траектории. Построить траекторию при  $0 < t < 0.4$ . Координаты  $x, y$  даны в см, время — в с (§ 6.1, с. 132).

#### РЕШЕНИЕ

Для нахождения скорости и ускорения точки применяем оператор дифференцирования `diff`. Траекторию строим по ее параметрическому представлению оператором `plot`. Для наглядности средствами Maple V на экране компьютера получаем изображение движущейся точки вместе с изменением векторов скорости и ускорения. Для этого формируем массив изображений — отдельных кадров движения <sup>\*)</sup>.

#### ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ

Программа (с. 359) состоит из двух основных частей.

В первой части программы строим траекторию движения точки и изображаем векторы скорости и ускорения. Количество кадров задаем числом  $N$ . В цикле от 1 до  $N$  в массиве `p[i]` создаем  $N$  кадров, показывающих положение вектора скорости  $\vec{v}$  и вектора ускорения  $\vec{W}$  на траектории;  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки. Производные  $\mathbf{r}$  по времени вычисляем с помощью оператора дифференцирования `diff`. Вторая производная обозначена значком `$2`. Оператор `map` применяет операцию дифференцирования к каждому элементу вектора и создает соответствующий вектор скорости или ускорения. Коэффициенты `mv` и `mw` введены для масштабирования изображений векторов и подбираются вручную.

---

<sup>\*)</sup> Аналогичная программа приведена в [13].

Перед построением траектории производим очистку переменной времени `t:='t'`.

Для того, чтобы при выводе изображения оператором `display` изображения не накладывались друг на друга, а замещались, создавая тем самым эффект движения, используем опцию `insequence=true`. График параметрически заданной функции (траектории) строим оператором `plot`. Время меняем от 0 до T. Совмещенный вывод изображения неподвижной траектории и движущихся стрелок осуществляем оператором `display`.

Во второй части программы вычисляем тангенциальное ускорение, нормальное ускорение и радиус кривизны траектории.

Используем пакет линейной алгебры `linalg`. Сначала находим модуль вектора скорости `norm(v,2)`. Цифра 2 означает, что норма вычисляется по формуле  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ .

Тангенциальное ускорение вычисляем с помощью скалярного произведения `dotprod`:  $|W_\tau| = \vec{W} \cdot \vec{v}/v$ . Выведем аналогичную формулу для вычисления нормального ускорения. Умножим векторно равенство  $\vec{W} = \vec{W}_\tau + \vec{W}_n$  на  $\vec{v}$ :

$$\vec{v} \times \vec{W} = \vec{v} \times \vec{W}_\tau + \vec{v} \times \vec{W}_n.$$

Учитывая, что  $\vec{v} \times \vec{W}_\tau = 0$  и  $|\vec{v} \times \vec{W}_n| = vW_n$ , получаем

$$|\vec{v} \times \vec{W}| = vW_n.$$

Оператор векторного произведения обозначается как `crossprod`.

### Программа 3. Кинематика точки

```
> restart:
           Количество кадров анимации
> N:=20:
           Масштабные множители скорости и ускорения
> mv:=1/10.: mw:=1/30.:
           Закон движения
> x:=3*sin(2*t): y:=2*cos(4*t):
           Время движения
> T:=evalf(Pi/12):
> r:=vector([x,y]):
```

### Векторы скорости и ускорения

```
> v:=map(diff,r,t):
> W:=map(diff,r,t$2):
> with(plots): with(plottools):
      Параметры стрелок на рисунке
> arw:=0.02,0.2,0.2:
> for i to N do
>   t:=i/N*T:
>   Ускорение:=arrow(r,evalm(W*mw),arw,color=red):
>   Скорость:=arrow(r,evalm(v*mv),arw,color=blue):
>   p[i]:=display(Скорость,Ускорение):
> end:
> Стрелки:=display(seq(p[i],i=1..N),insequence=true):
> t:='t':
> Траектория:=plot([x,y,t=0..T]):
> display(Стрелки,
>   Траектория,
>   scaling=constrained,
>   title="Скорость и ускорение точки");
> v:=[v[1],v[2],0]:
> W:=[W[1],W[2],0]:
      Модуль скорости
> with(linalg): V:=norm(v,2):
      Тангенциальное ускорение
> Wt:=dotprod(v,W)/V:
      Модуль ускорения
> W:=norm(W,2):
      Нормальное ускорение
> Wn:=norm(crossprod(v,W),2)/V:
      Вывод результатов счета
> t:=T;
> ' x'=x, ' y'=y, ' v'=V;
> ' Wn'=Wn, ' W'=W;
> ' WT'=Wt, ' ro'=V^2/Wn;
      t := .2617993878
      x = 1.500000000, y = 1.000000000, v = 8.660254038
      Wn = 14.40000001, W = 17.08800750
      Wt = 9.200000000, ro = 5.208333330
```

## 16.2. Механизм с двумя степенями свободы

### свободы

УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ. Механизм манипулятора (рис. 186) приводится в движение двумя независимыми приводами. Задан закон движения ползуна,  $s(t) = s_0 - v_B t$ , и закон движения руки  $AC$  относительно кривошипа  $OA$ :  $\psi = \psi_0 + \omega t$ . Построить график зависимости скорости и ускорения захвата  $C$  на интервале  $0 < t < 1$  с;  $\psi_0 = \pi/6$ ,  $\omega = 3\pi/4$  рад/с,  $AB = 90$  см,  $AC = 50$  см,  $OA = 80$  см,  $v_B = 70$  см/с,  $s_0 = 100$  см,  $H = 120$  см. Через какое время после начала движения захват поднимется на высоту  $H$ ?

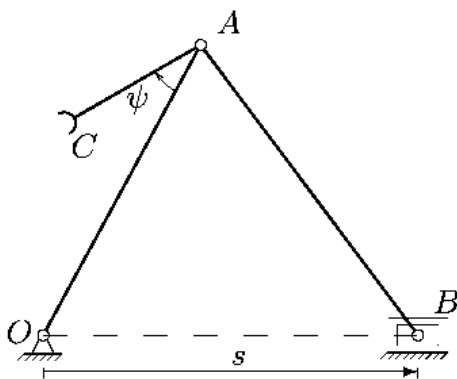


Рис. 186

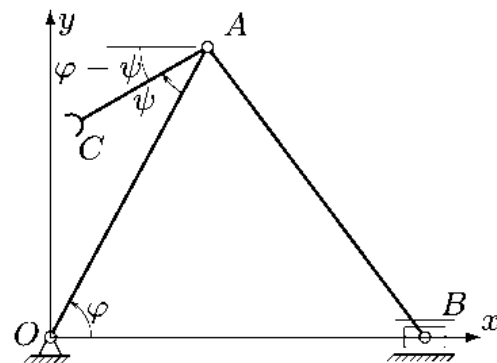


Рис. 187

#### РЕШЕНИЕ

Поставленную задачу решаем в системе Maple V координатным методом. Для этого вычисляем координаты захвата  $C$  как функции времени. Дифференцируя эти функции, находим скорость и ускорение  $C$ . Строим графики решений, получаем вид траектории и “оживляем” манипулятор специальными средствами анимации, делающими решение наглядным.

ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ. По теореме косинусов из  $\triangle OAB$  находим тригонометрические функции  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$ . Вводим систему координат  $x, y$  с началом в точке  $O$  (рис. 187), вычисляем координаты шарнира  $A$ ,

$$x_A = OA \cos \varphi, \quad y_A = OA \sin \varphi,$$

и искомые координаты захвата:

$$x_C = x_A - AC \cos(\varphi - \psi), \quad y_C = y_A - AC \sin(\varphi - \psi).$$

Так как  $OB = s(t)$  и  $\psi = \psi(t)$ , то полученные координаты зависят от времени. Дифференцируем координаты оператором `diff`. Графики скорости и ускорения строим в одних осях разным цветом `color=[black,blue]` и разной толщины `thickness=[2,3]`. Кривые подписаны с помощью опции `legend=["V","w"]`. Шрифт для меток на осях координат выбираем опцией `axesfont=[TIMES,ROMAN,8]`.

Искомое время подъема захвата на высоту  $H$  находим, решая уравнение  $y_c(t) = H$ . Используем оператор численного решения нелинейного уравнения `fsolve`.

Изображение механизма в движении создаем в цикле из  $K = 24$  кадров. На экран изображение выводим оператором `display`.

#### Программа 4. Манипулятор

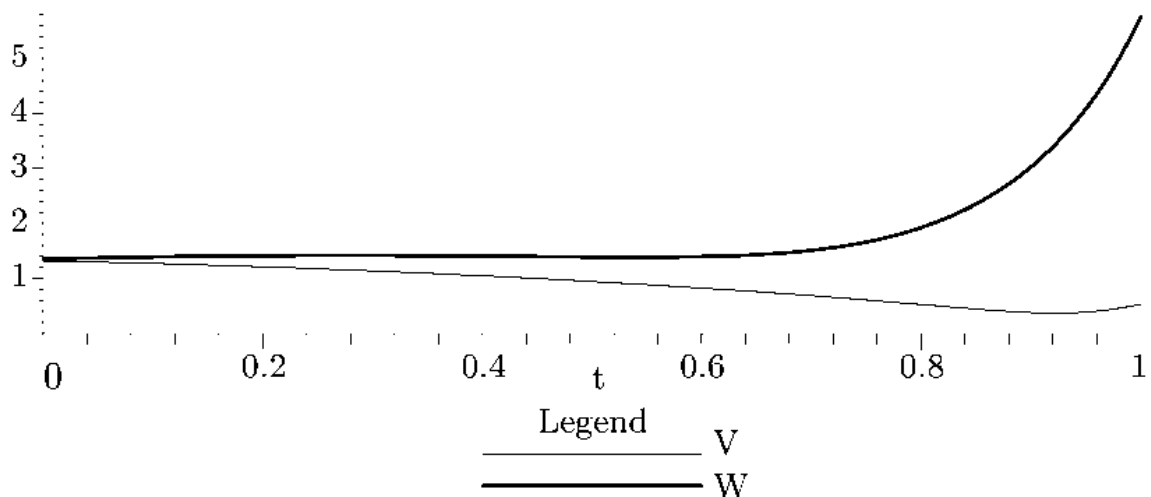
```

                Начальные значения и размеры
> restart:
> S0:=1.: AB:=0.9: pi:=evalf(Pi):
> OA:=0.8: AC:=0.5: phi0:=pi/6:
                Скорость ползуна B
> VB:=-0.7:
                Угловая скорость руки AC
> omega:=3*pi/4:
                Угол поворота руки AC
> phi:=phi0+t*omega:
                Закон движения ползуна B    s(t)
> OB:=S0+t*VB:
> cosp:=cos(phi):  sinp:=sin(phi):
                Определение тригонометрических функций
> cosf:=(-AB^2+OB^2+OA^2)/(2*OA*OB):sinf:=sqrt(1-cosf^2):
                Координаты шарнира A
> xa:=OA*cosf:
> ya:=OA*sinf:
                Координаты захвата C
> xc:=xa-AC*(cosf*cosp+sinp*sinp):
> yc:=ya+AC*(sinp*cosf-cosp*sinf):
                Скорость точки C
> vx:=diff(xc,t): vy:=diff(yc,t): v:=sqrt(vx^2+vy^2):
                Ускорение точки C
> Wx:=diff(vx,t): Wy:=diff(vy,t): W:=sqrt(Wx^2+Wy^2):

```

### Графики функций $W(t)$ , $v(t)$

```
> plot([v,W],t=0..1.,thickness=[2,3],
>
>         color=[black,blue],
>         legend=["V","W"],
>         axesfont=[TIMES,ROMAN,8]);
```



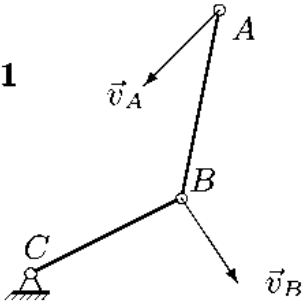
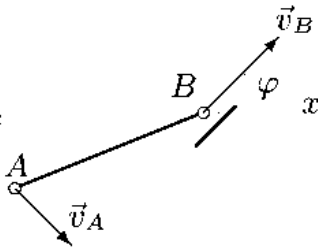
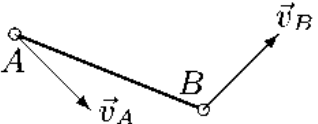
```
> Time=fsolve(yc=1.2,t);
      Time = .8370890321
> with(plots):
      Число кадров анимации
> K:=24:
> for i from 0 by 1 to K do
>   t:=i/K:
>   P[i]:=PLOT(CURVES([[0,0],[xa,ya],[OB,0]]),
>             CURVES([[xa,ya],[xc,yc]]),
>   TEXT([-0.03,0], 'O'),
>   TEXT([xc,yc+0.04], 'C'),
>   TEXT([xa,ya+0.04], 'A'),
>   TEXT([OB+0.03,0.04], 'B')):
> od:
      Изображение механизма в движении
> display(seq(P[i],i=0..K),insequence=true,thickness=2);
```

## 16.3. Скорости точек плоского механизма

УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ. Найти скорости шарниров плоского механизма (рис. 87, с. 160).

РЕШЕНИЕ

Представляем механизм в виде отдельных простейших кинематических схем. В каждой схеме по одним кинематическим характеристикам легко определяются другие. Соответствующие решения оформляем в виде процедур. Для решения поставленной задачи достаточно трех схем<sup>\*)</sup>, которые для наглядности поместим в таблицу и укажем входные и выходные данные, т.е. известные и искомые величины. Подразумевается, что координаты точек известны.

Схема	Известные величины	Искомые величины
<p><b>СХЕМА 1</b></p> 	$\vec{v}_A$	$\vec{v}_B$ , $\vec{\omega}_{BA}$ , $\vec{\omega}_{BC}$
<p><b>СХЕМА 2</b></p> 	$\varphi$ , $\vec{v}_A$	$\vec{v}_B$ , $\vec{\omega}_{BA}$
<p><b>СХЕМА 3</b></p> 	$\vec{v}_A$ , $\vec{\omega}_{BA}$	$\vec{v}_B$

Последовательность расчета такова. Сначала вычисляем координаты всех точек механизма. Затем последовательно, переходя от одной точки к другой, применяем процедуры СХЕМА1, СХЕМА2, СХЕМА3 и определяем скорости точек.

<sup>\*)</sup> Алгоритм Резунова А.В., Сафронова В.С.



## ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ

Программу разделяем на две, каждую из которых записываем в отдельный файл. Процедуры СХЕМА1, СХЕМА2, СХЕМА3 помещаем в Программу 5.

В процедуре СХЕМА1 решаем векторное уравнение

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_{CB} \times \vec{CB} + \vec{\omega}_{BA} \times \vec{BA}$$

относительно угловых скоростей  $\omega_{CB}$  и  $\omega_{BA}$ . Заметим, что оператор `solve` решает систему уравнений, а оператор `assign` присваивает полученное решение переменным `w1` и `w2`.

Скорость шарнира  $B$  вычисляем по формуле  $\vec{v}_B = \vec{\omega}_{CB} \times \vec{CB}$ .

Аналогичные формулы заложены в процедуры СХЕМА2 и СХЕМА3.

Оператор `save` записывает процедуры и массив угловых скоростей в файл `kine.m`. Программа 6 на с. 366 содержит вычисления координат точек механизма (начало координат в шарнире  $B$ ) и вычисления скоростей с помощью созданных процедур. Процедуры считываются с диска оператором `read`. Программа может быть легко дополнена графическим изображением механизма и вычислением ускорений.

### Программа 5. Три кинематические схемы

```
> restart: with(linalg):
           Угловые скорости звеньев
> w:=Matrix(1..10,1..10,shape=symmetric):
           Процедура 1 вычисления скорости шарнира
           ib двухзвенника с опорой ic и
           известной скоростью конца ia
> СХЕМА1:=proc(ia,ib,ic) local w1,w2,Wcb,Wba,eq,s:
>   global w,V:
>   Wcb:=[0,0,w1]:Wba:=[0,0,w2]:
>   eq:=evalm(-V[ia]+crossprod(Wcb,X[ib]-X[ic])
>               +crossprod(Wba,X[ia]-X[ib])):
>   s:=solve({eq[1],eq[2]},{w1,w2});
>   assign(s);
>   w[ib,ic]:=w1:
>   w[ib,ia]:=w2:
>   V[ib]:=crossprod([0,0,w1],X[ib]-X[ic]):
> end proc:
```

```

        Процедура 2 вычисления скорости
        ползуна ib (угол Fi)
        по известной скорости точки ia
> СХЕМА2:=proc(ia,ib,Fi) local Vb,vb,w1,Wba,eq,s:
>   global V,w:
>   Wba:=[0,0,w1]:
>   Vb:=[vb*cos(Fi),vb*sin(Fi),0]:
>   eq:=evalm(-V[ia]+Vb+crossprod(Wba,X[ia]-X[ib])):
>   s:=solve({eq[1],eq[2]},{vb,w1});
>   assign(s);
>   w[ib,ia]:=w1:
>   V[ib]:=Vb:
> end proc:
        Процедура 3 вычисления скорости точки ic
        по известным скоростям точек ia,ib
> СХЕМА3:=proc(ia,ib,ic) local Wac: global w,V:
>   Wac:=[0,0,w[ia,ib]]:
>   V[ic]:=evalm(V[ia]+crossprod(Wac,X[ic]-X[ia])):
> end proc:
        Запись процедур и массива w на диск
> save СХЕМА1,СХЕМА2,СХЕМА3,w, "C:\\Map17\\kine.m";

```

## Программа 6. Скорости точек механизма

```

> restart:
> with(linalg):
        Считываем процедуры из файла
> read "C:\\Map17\\kine.m":
        Размеры
> AB:=30.: BC:=60.: CD:=30.:
> DE:=20.: EF:=20.: FG:=10.:
> EH:=30.: FO:=20.: CK:=25.:
> al:=evalf(Pi/4):
> bt:=evalf(Pi/6):

```

```

      Координаты узлов
> X:=[[AB*cos(al),-AB*sin(al),0],#A-1
>      [0,0,0],#B-2
>      [BC,0,0],#C-3
>      [BC+CD,0,0],#D-4
>      [BC+CD,-DE,0],#E-5
>      [BC+CD,-DE-EF,0],#F-6
>      [BC+CD,-DE-EF-FG,0],#G-7
>      [BC+CD+EH*cos(bt),-DE-EH*sin(bt),0],#H-8
>      [BC+CK*cos(bt),CK*sin(bt),0],#K-9
>      [BC+CD+FO,-DE-EF,0]]:#O-10
      Задаем угловую скорость звена OA
> w[1,2]:=2:
      Скорости неподвижных шарниров равны нулю
> V[1]:=[0,0,0]: V[10]:=[0,0,0]:
> СХЕМА3(1,2,2): # Определяем Vb (N2)
> СХЕМА2(2,3,0): # Определяем Vc (N3) - ползун (угол 0)
> СХЕМА3(2,3,4): # Определяем Vd (N4)
> СХЕМА1(4,6,10):# Определяем Vf (N6)
> СХЕМА3(4,6,5): # Определяем Ve (N5)
> СХЕМА3(4,6,7): # Определяем Vg (N7)
> СХЕМА2(5,8,0): # Определяем Vh (N8) - ползун (угол 0)
> СХЕМА2(3,9,0): # Определяем Vk (N9) - ползун (угол 0)
      Вывод результатов
> printf(' \n      vx      vy      v \n'):
> for i from 2 to 9 do
> printf('%1.0f)  %7.3g %7.3g %7.3g \n',
>      i,V[i][1],V[i][2],norm(V[i],2)):od:
      vx      vy      v
2) -42.426 -42.426  60
3) -42.426  0      42.426
4) -42.426 21.213  47.434
5) -21.213 21.213  30
6)  0      21.213  21.213
7) 10.607 21.213  23.717
8) -33.461 0      33.461
9) -42.426 0      42.426

```

## ПРОГРАММЫ ПО ДИНАМИКЕ

## 17.1. Принцип возможных скоростей

**УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ.** Система, состоящая из четырех однородных стержней, расположена в вертикальной плоскости. К системе приложена сила  $F = 20$  Н и момент  $M = 30$  Нм (рис. 145, с. 281). Известны длины стержней  $OA = 0.3$  м,  $AB = 0.55$  м,  $BD = 0.4$  м,  $BC = 0.3$  м и углы  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ . Учитывая погонный вес стержней  $\rho = 10$  Н/м, определить горизонтальную реакцию опоры  $C$ .

**РЕШЕНИЕ**

Освобождаем конструкцию от горизонтальной связи в шарнире  $C$ , заменяем связь искомой реакцией  $X_C$ . Система приобретает одну степень свободы. Придаем стержню  $OA$  возможную (виртуальную) угловую скорость  $\omega_{OA} = 1$ . Скорости точек приложения активных сил (рис. 146)  $G_{OA}$ ,  $G_{AB}$ ,  $G_{CB}$ ,  $G_{DB}$  и  $F$  и реакции  $X_C$  определяем, используя три схемы Программы 5 (с. 365).

Реакцию  $X_C$  вычисляем из принципа возможных скоростей:

$$X_C v_{Cx} + F v_{Bx} + G_{ABy} v_{Ay} + G_{CBx} v_{By} + G_{DBx} v_{Dy} + M \omega_{OA} = 0.$$

**ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ**

Процедуры СХЕМА1, СХЕМА2, СХЕМА3 Программы 5 считываем из файла `kine.m` оператором `read`. Нагрузки и координаты точек заносим в векторы  $F$  и  $X$ . Начало координат находится в точке  $O$ . Введены обозначения  $OA = a$ ,  $AB = b$ ,  $BD = c$ ,  $BC = d$ . Мощности сил вычисляем с помощью оператора скалярного произведения `dotprod` пакета `linalg`. Мощность момента в общем случае тоже можно вычислять в виде скалярного произведения, но в данной задаче момент только один, поэтому, чтобы не вводить векторы угловых скоростей и моментов, его мощность вычислим просто в виде произведения  $M*w[1,2]$ , учитывая, что момент направлен против часовой стрелки (в противном случае эту мощность берем со знаком минус).

**Программа 7. Применение принципа возможных скоростей для определения реакций опор конструкции**

```

> restart: with(linalg):
> read "C:\\Map17\\kine.m":
      Размеры
> a:=0.3: b:=0.55: c:=0.4: d:=0.3:
> al:=evalf(Pi/4): bt:=evalf(Pi/3):
      Нагрузки
> F:=[[0,0,0], [0,0,0], #0, A
>      [20,0,0], [0,0,0], #B, C
>      [0,0,0], [0,-5.5,0], #D, I
>      [0,-3,0], [0,-4,0], #N, K
>      [0,-3,0]]: #L
> M:=30: #Момент
      Координаты точек
> X:=[[0,0,0], [0,a,0], [b,a,0], #0,A,B
>      [b+d*cos(bt),a+d*sin(bt),0], #C
>      [b-c*cos(al),a+c*sin(al),0], #D
>      [b/2,a,0], #I
>      [b+d/2*cos(bt),a+d/2*sin(bt),0], #N
>      [b-c/2*cos(al),a+c/2*sin(al),0], #K
>      [0,a/2,0]]: #L
      Задаем угловую скорость звена OA
> w[1,2]:=1:
      Скорости неподвижных шарниров равны нулю
> V[1]:=[0,0,0]:V[5]:=[0,0,0]:
      Вычисление скоростей
> СХЕМА3(1,2,2): #Определяем Va (N1)
> СХЕМА1(2,3,5): #Определяем Vb (N3)
> СХЕМА3(2,3,6): #Определяем Vi (N6) - середина AB
> СХЕМА3(5,3,8): #Определяем Vk (N8) - середина DB
> СХЕМА2(3,4,0): #Определяем Vc (N4) - ползун (угол 0)
> СХЕМА3(3,4,7): #Определяем Vn (N7) - середина BC
      Определение реакции Xc
> Xc:=- (add(dotprod(V[i],F[i]),i=1..8)+M*w[1,2])/V[4][1];
      Xc := 31.56969109

```

## 17.2. Динамика машины с кулисным приводом

**УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ.** Проинтегрировать нелинейное дифференциальное уравнение движения механизма с кулисным приводом (пример 2, с. 310, рис. 161) на интервале времени  $\tau = 0.262$  с. Построить графики  $\varphi(t)$  и  $\omega_{1z}(t)$ . Дана угловая скорость шкива 1 в начальный момент:  $\omega_{1z}(0) = 24$  рад/с, и начальный угол  $\varphi(0) = \pi/2$ .

### РЕШЕНИЕ

Уравнение движения (5), с. 311, полученное в результате решения примера, разрешаем относительно углового ускорения:

$$\ddot{\varphi} = (Q_T + Q_H + Q_D - 0.5\dot{\varphi}^2 B \sin 2\varphi)/(A + B \sin^2 \varphi). \quad (1)$$

### ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ

Вводим обозначения. Угол поворота  $\varphi$  шкива 1 (обобщенная координата) — **phi(t)**, угловая скорость  $\dot{\varphi}$  — **omega**, угловое ускорение  $\ddot{\varphi}$  обозначаем как **eps**. Интегрируем уравнение (1) используя оператор **dsolve**.

Графики **phi(t)**, **omega** и **eps** строим с помощью оператора **odeplot**. График **omega** выведен на экран. Для того, чтобы графики **phi(t)** и **eps** также были выведены на экран, необходимо двосточие после соответствующих операторов заменить на точку с запятой. В конце программы для вывода на печать таблиц результатов используем оператор **printf**.

### Программа 8. Динамика машины с кулисным приводом

```
> restart: g:=9.81:
      Параметры двигателя
> M0:= -30: # Пусковой момент
> k:=0.2:   # Крутизна статической характеристики
> mu:= 950: # Коэффициент сопротивления
      Инерционные параметры
> I1:= 2.5: m2:= 15: m3:= 10: m4:= 16: ma:=1:
      Геометрические параметры
> R1:=0.4:  r1:=0.1: R3:=0.3:  r4:=0.2:
> i4:= 0.32: R4:=0.41:
```

```

        Начальные значения
> phi0:=evalf(Pi/2): omega0:=24:
        Время моделирования
> tau:=0.262:
        Угловая скорость
> omega:=diff(phi(t),t):
>          Обобщенная сила (силы тяжести)
> Qt:=-mа*g*r1*cos(phi(t)):
        Обобщенная сила (нагрузка)
> Qn:=-mи*omega*(r1*(R4-r4)/R4*sin(phi(t)))^2:
        Обобщенная сила (двигатель)
> Qd:=- (M0+k*omega*R1/R3)*R1/R3:
        Обобщенная сила
> Q:=Qd+Qt+Qn:

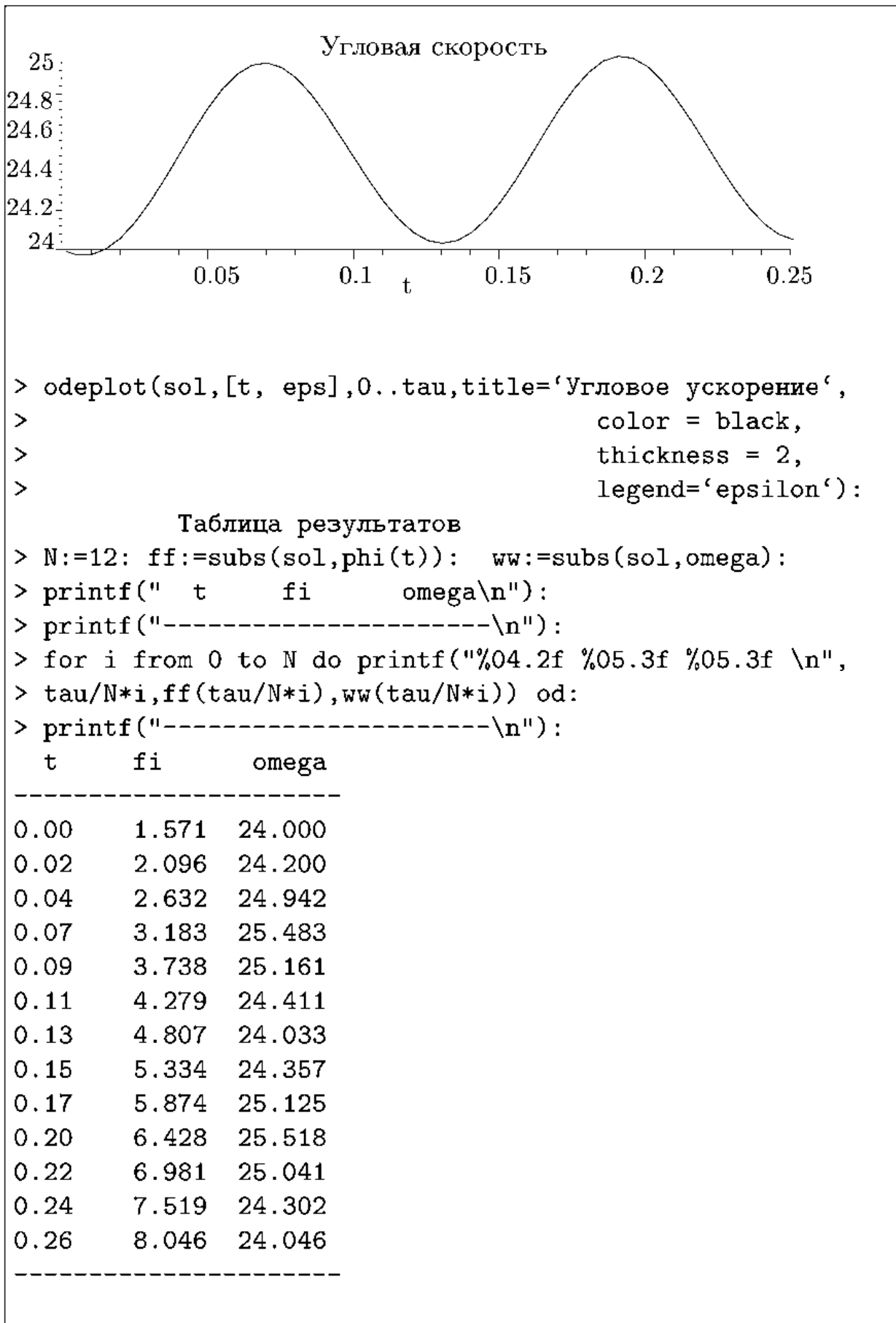
        Коэффициенты дифференциального уравнения
> A:=I1+m3*R1^2/2:
> B:=r1^2*(m2+m4*(i4/R4)^2+m4):

        Дифференциальное уравнение
> eps:=(Q-0.5*B*omega^2*sin(2*phi(t)))/(A+B*sin(phi(t))^2):
> Уравнение:=diff(omega,t)-eps:
> НачУсловия:=phi(0)=phi0,D(phi)(0)=omega0:

        Решение
> sol:=dsolve({Уравнение,НачУсловия},phi(t),
>
>          type=numeric,
>          output=listprocedure):

        Графики результатов
> with(plots):
> odeplot(sol,[t,phi(t)],0..tau,title='Угол',
>
>          color=black,
>          thickness=2):
> odeplot(sol,[t,omega],0..tau,title='Угловая скорость',
>
>          color=black,
>          thickness=2);

```





## 17.3. Колебания системы с двумя степенями свободы

**УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ.** Найти частоты колебаний системы, изображенной на рис. 173, с. 337. Построить график движения оси цилиндра А. В начальный момент система находилась в покое, а каждая пружина получила удлинение 0.1 м.

### РЕШЕНИЕ

Задачу решаем с помощью уравнения Лагранжа 2-го рода. Выбираем две обобщенные координаты. Вычисляем кинетическую энергию и обобщенные силы. Составляем два уравнения Лагранжа 2-го рода и уравнение частот, решая которое, находим частоты собственных колебаний системы. Подробное решение задачи дано на с. 337 – 342.

### ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ

Обозначаем обобщенные координаты  $q_1=x$ ,  $q_2=s$ , и обобщенные скорости  $\dot{q}_1=vx$ ,  $\dot{q}_2=vs$ . Коэффициенты при обобщенных скоростях  $\dot{q}_i$  в выражениях  $\partial T/\partial \dot{q}_i$  выделяем оператором `coeff`. Характеристическое уравнение численно решаем оператором `fsolve`. По найденным инерционным коэффициентам составляем систему дифференциальных уравнений движения. Решаем систему оператором `dsolve`. Производные в начальных условиях обозначаются буквой D. По умолчанию оператор `dsolve` дает решение в аналитическом виде, поэтому для получения численного результата указываем опцию `type=numeric`. График движения цилиндра строим специальным оператором `odeplot`. Для более четкой прорисовки кривой увеличиваем число точек на ней `numpoints=150`.

### Программа 9. Колебания системы с 2 степенями свободы

```
> restart:
> ma:=50: mb:=20: # Массы (кг)
> c:=90:          # Жесткость пружин (Н/м)
> g:=9.81:       # Ускорение свободного падения (м/с2)
                Кинетические энергии тел А, В
> Ta:=3*ma*vx^2/4:
> Tb:=mb*(vs+2*vx)^2/4:
```

### Кинетическая энергия системы

```
> T:=Ta+Tb:
```

### Инерционные коэффициенты

```
> a11:=coeff(diff(T,vx),vx):
```

```
> a12:=coeff(diff(T,vx),vs):
```

```
> a22:=coeff(diff(T,vs),vs):
```

```
> УравнениеЧастот:=
```

```
> (c-a11*omg^2)*(c-a22*omg^2)-(a12*omg^2)^2=0:
```

### Решение уравнения частот

```
> sol:=fsolve(УравнениеЧастот,omg=0..infinity);
```

```
sol := .8708263224, 3.773812597
```

### Дифференциальные уравнения колебаний

```
> eq1:=a11*diff(x(t),t$2)+a12*diff(s(t),t$2)=-c*x(t):
```

```
> eq2:=a12*diff(x(t),t$2)+a22*diff(s(t),t$2)=-c*s(t):
```

### Численное решение системы с начальными данными

```
> r:=dsolve({eq1,eq2,s(0)=0.1,x(0)=0.1,
```

```
> D(s)(0)=0,D(x)(0)=0},
```

```
> {s(t),x(t)},type=numeric,
```

```
> output=listprocedure):
```

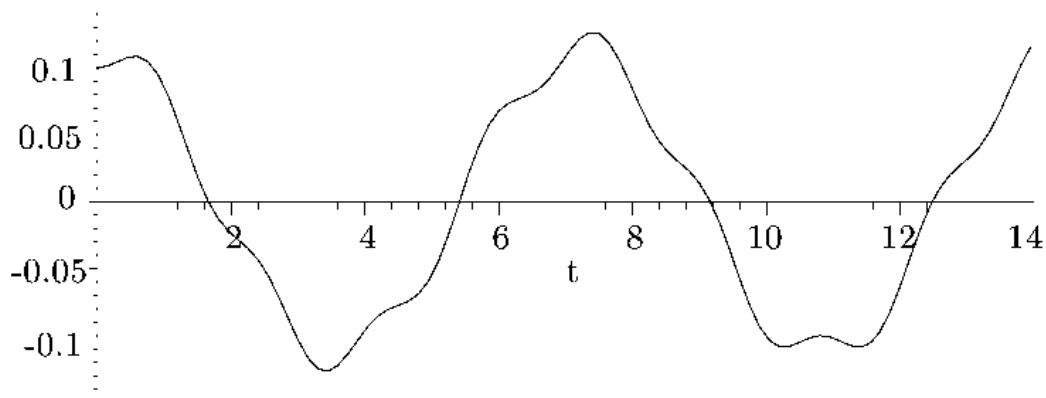
```
> with(plots):
```

```
> T0:=14.3:
```

```
> odeplot(r,[t,x(t)],0..T0,numpoints=150,
```

```
> labels=[t,x],
```

```
> color=black);
```



## Список литературы

1. *Аладьев В.З., Богдвичус М.А.* Maple 6: Решение математических, статистических и физико-технических задач. — М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.
2. *Афанасьев В.И., Зими́на О.В., Кириллов А.И., Петрушко И.М., Сальникова Т.А.* Решебник. Высшая математика. Специальные разделы. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
3. *Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С.* Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. — М.: Наука, 1984.
4. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. — М.: Наука, 1980.
5. *Бутенин Н.В., Луиц Я.Л., Меркин Д.Р.,* Курс теоретической механики. — СПб.: Лань, 1998.
6. *Веретенников В.Г., Карпов И.И., Маржеев А.П.* и др. Теоретическая механика. Вывод и анализ уравнений движения на ЭВМ: учебное пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 1990.
7. *Вильке В.Г.* Теоретическая механика. — М.: Изд-во МГУ, 1998.
8. *Говорухин В., Цибулин В.* Компьютер в математическом исследовании. Учебный курс. — СПб.: Питер, 2001.
9. *Дьяконов В.П.* MAPLE 7. Учебный курс. — СПб.: Питер, 2002.
10. *Зими́на О.В., Кириллов А.И., Сальникова Т.А.* Решебник. Высшая математика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
11. *Кепе О.Э., Вибга Я.А., Грапис О.П.* и др. Сборник коротких задач по теоретической механике. — М.: Высшая школа, 1989.
12. *Манзон Б.М.* Maple V Power Edition. — М.: ИИД "Филинь", 1998.
13. *Матросов А.В.* Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. — СПб.: БХВ-Петербург, 2001.
14. *Меццерский И.В.* Сборник задач по теоретической механике. — М.: Наука, 1981.

15. *Новожилов И.В., Зацепин М.Ф.* Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ. — М.: Высшая школа, 1986.
16. *Павловский М.А., Акинфиева Л.Ю., Бойчук О.Ф.* Теоретическая механика. Динамика. — Киев: Выща шк., 1990.
17. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособие для техн. вузов / Яблонский А.А., Норейко С.С., Вольфсон С.А. и др.; Под ред. А.А.Яблонского.— 3-е изд — М.:Высшая школа, 1972.
18. *Светлицкий В.А., Стасенко И.В.* Сборник задач по теории колебаний. — М.: Высшая школа, 1973.
19. *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики. — М.: Высшая школа, 1998.
20. *Яблонский А.А., Норейко С.С.* Курс теории колебаний. — М.: Высшая школа, 1975.

# Именной и предметный указатель

- AcademiaXXI 13
- add 117, 357
- arrow 351, 354, 360
- assign 365
- axes 354
- axesfont 363
  
- black 374
- blue 360
- BOLD 353
  
- coeff 374
- COLOR 351, 353
- constrained 352, 360
- convert 353
- crossprod 117, 360
- CrossProduct 117
- CURVES 351
  
- diff 374
- display 351, 360, 363
- dotprod 117, 360
- DotProduct 117
- dsolve 371, 374
  
- end 352
- evalf 359
- evalm 117, 360
  
- for..from..to..do..od 367
- fsolve 362, 363, 374
  
- global 365
  
- HUE 351, 353
  
- if ... then 354
- infinity 374
- insequence 360, 363
  
- labels 374
- legend 363, 372
- linalg 117, 360
- LinearAlgebra 117, 352
- LinearSolve 352
- listprocedure 374
- local 365
  
- map 360
- Matrix 352, 354, 365
- matrix 356
  
- none 354
- norm 117, 360, 367
- normalize 117
- numeric 374
- numpoints 374
  
- odeplot 371, 374
- output 374
  
- Pi 350
- PLOT 351
- plots 351, 353, 371
- plottools 351, 353
- polygonplot 357
- printf 352, 367, 372
- proc 365
  
- read 365, 366
- red 360
- restart 349, 352
- RGB 351
- ROBBY2 191
- ROMAN 363
  
- save 365, 366
- scaling 352, 360
- seq 351, 352, 360

shape 365  
 solve 13, 218, 365  
 sqrt 354  
 subs 372  
 symbol 353  
 symmetric 365  
  
 TEXT 363  
 thickness 363, 371  
 TIMES 363  
 title 360  
 true 360  
 type 374  
  
 vector 117, 359  
  
 with 352, 353  
 www.academiasxi.ru 13, 117, 349  
 www.termech.mpei.ac.ru 191  
  
 Амплитуда колебаний 341, 344  
 Анимация 191  
  
 Бетти Э. 344  
  
 Вал  
 — динамические реакции 272  
 — равновесие 94  
 Вектор  
 — свободный 13  
 — скользящий 13, 37, 63  
 Верхний пояс 47  
 Виллиса формула 332  
 Винт динамический 111  
 Виртуальные перемещения 279  
 Внешнее зацепление 153, 332  
 Внутреннее зацепление 332  
 Водило 329  
 Возможные перемещения 279  
  
 Гармонические колебания 341  
 Главный вектор 111  
 Главный момент 111  
 Граф 130, 194, 243  
 Графический расчет фермы 45  
  
 Гюйгенс Х. 273  
  
 Даламбер Ж. 291  
 Двигатель 309  
 Движение  
 — вращательное 129  
 — плоское 129  
 — поступательное 129  
 — сложное 195  
 Двусвязная фигура 355  
 Двухзвонник 242, 365  
 Декартовы координаты 279  
 Динама 111  
  
 Жесткая заделка 60  
 Жесткость 344  
 Жесткость пружины 265  
  
 Заделка 60, 287  
 Закон Кулона 76  
 Запись на диск 366  
 Зацепин М.Ф. 9, 191, 227, 376  
 Зацепление  
 — внешнее 153, 332  
 — внутреннее 332  
 — зубчатое 153  
 — фрикционное 153  
 Знак  
 — момента 12, 96  
 — пары 37  
 — усилия 51  
 Зубчатое зацепление 153  
  
 Интегрирование по контуру 355  
  
 Канонические уравнения 326  
 Каток 309  
 Кинематические графы 307, 327, 329  
 Кинематические уравнения  
 — Эйлера 222  
 — плоского движения 188  
 Кинетическая энергия 300  
 — вращения 248  
 — плоского движения 249

- системы 327, 329
- Колебания гармонические 341
- Консервативная система 318, 326
- Координаты
  - декартовы 145
  - естественные 144
  - подвижные 222
  - полярные 144
- Кориолис Г. 195
- Коэффициент
  - податливости 345
  - сопротивления 310
  - трения качения 80, 262
  - трения скольжения 74
- Коэффициенты
  - жесткости 339
  - инерционные 324, 339, 374
- Кремона А. 45
- Кривошип 166, 170
- Крутизна статической характеристики двигателя 310
- Кулиса 309
- Кулон Ш. 74
  
- Лагранж Ж. 300
  
- МЦС 158
- Максвелл Д. 45
- Максвелла–Мора формула 344
- Манипулятор 361
- Массив двумерный 352
- Мгновенно-поступательное движение 162
- Мгновенный центр скоростей 158, 172
- Метод
  - Риттера 38
  - вырезания узлов 14, 38, 350
  - графов 130, 188
  - контурного интегрирования 120
  - координатный 329, 361
  - моментных точек 38
  - сечений 38
- Механизм
  - кривошипно-кулисный 309
  - многозвенный 166
  - планетарный 329
  - шарнирно-стержневой 170
- Мещерский И.В. 9, 21, 26, 254, 266, 375
- Минимальный момент  $M_*$  112
- Многоугольник сил 45
- Модуль упругости 344
- Момент
  - сил инерции 294
  - количества движения 253
  - статический 120
  - трения 265
  - трения качения 81, 250
- Момент инерции
  - геометрический 357
  - главный центральный 357
  - стержня 241
  - физический 357
  - центральный 357
  - центробежный 272, 357
  - цилиндра 241
- Момент силы
  - относительно оси 12
  - относительно точки 11
- Моментные точки 38
- Мощность момента 289
  
- Накопление ошибок 20
- Нижний пояс 47
- Новожилов И.В. 9, 191, 227, 376
- Ньютон И. 55
  
- Обобщенная сила 300, 308, 331
- Обобщенная скорость 326
- Обобщенные импульсы 324
- Обобщенные координаты 300, 318
- Обобщенный импульс 326
- Обучающая программа 191
- Общее уравнение динамики 288
- Оператор
  - вывода графики 351
  - присваивания 357

- условный 352
- цикла 351
- Палец 309
- Пара сил 13, 73, 111
- Передающее число 332
- План скоростей 159
- Плечо 12, 108
- Плита 101
- Погонный вес 31, 58
- Подвижная опора 73
- Полезная нагрузка 309
- Ползун 176
- Полюс 130
- Поля
  - внешние 45
  - внутренние 46
- Потенциальная энергия 328, 331
- Потенциальная энергия пружины 340
- Потенциальные силы 318
- Правило
  - Жуковского 197, 204
  - плана скоростей 160
- Приведенная масса 250, 257
- Привод 361
- Принцип возможных скоростей 280
- Проекция силы 11
- Процедура 365
- Пусковой момент 310
- Работа внутренних сил 258
- Работа момента трения качения 250
- Работа сил 250
- Равнодействующая 111
- Радиус
  - инерции 248, 357
  - кривизны 132, 196
  - полярный 144
- Раскосы 47
- Распределенная нагрузка
  - линейная 61
  - по дуге 61
- Реакция
  - гладкого основания 30
  - заделки 60
  - неподвижного шарнира 32
  - опорного стержня 31
  - сферической опоры 106
- Ременная передача 153
- Решетчатый 112, 126, 136, 211, 226, 232, 345, 375
- Риттер А. 37
- Сателлиты 329
- Связь
  - двусторонняя 60, 73
  - идеальная 279, 318, 337
  - стационарная 279, 318
- Сечение Риттера 44
- Силовой треугольник 26
- Силы инерции 288, 291, 294
- Система трех тел 67
- Скалярный инвариант 111
- Скорость
  - абсолютная 195, 203
  - относительная 196, 203
  - при плоском движении 130
  - угловая 129, 223
- Собственные значения 342, 344
- Составная конструкция 54
- Степень свободы
  - две 294, 300, 318, 324, 336, 343
  - одна 245, 266, 288, 307, 326
- Тарг С.М. 61, 376
- Теорема
  - Гюйгенса 241, 273
  - взаимности Бетти 344
  - о движении центра масс 236
  - о проекциях векторов скоростей 161
  - о трех силах 26
  - об изменении кинетической энергии 247, 257
  - об изменении момента количества движения 253



- Точки Риттера 38
- Трение
  - качения 80
  - скольжения 74
- Угол
  - наклона касательной 140
  - нутации 223
  - полярный 144
  - прецессии 223
  - собственного вращения 223
- Узел 14
- Уравнение
  - винтовой оси 112
  - динамики общее 288, 294
  - сложения скоростей 219
  - частот 341, 373, 374
- Уравнения
  - Гамильтона 326
  - Лагранжа 2-го рода 300, 341
  - канонические 326
  - кинематические 289
  - трех угловых скоростей 180
  - трех угловых ускорений 184
- Усилие 14
- Ускорение
  - Кориолиса 197, 204
  - абсолютное 195
  - вращательное 222
  - касательное 131
  - нормальное 132, 145, 359
  - осестремительное 222
  - относительное 196, 203
  - переносное 196, 203
  - при плоском движении 130
  - свободного падения 373
  - тангенциальное 131, 145
  - угловое 129, 223
- Фаза колебаний начальная 344
- Ферма 15
  - Шухова 15
  - колебание узла 343
  - плоская 15, 38, 45, 350
  - пространственная 86
  - сетчатая 15
- Фихтенгольц Г.М. 355
- Формат вывода 352
- Формула
  - Виллиса 332
  - Максвелла–Мора 344
- Функция
  - Гамильтона 324, 326
  - Лагранжа 324, 326
- Центр масс 236, 241, 272
- Центр тяжести
  - параллелепипеда 126
  - пирамиды 126
  - плоской фигуры 118
  - половины цилиндра 126
  - полукруга 119
  - пространственного тела 125
  - прямоугольника 119
  - стержневой фигуры 122
  - треугольника 119
- Центральная винтовая ось 111
- Цепь 21
- Частот уравнение 341
- Частоты собственных колебаний 336
- Четырехзвенник 179, 290
- Число
  - зубцов 153
  - передаточное 153, 332
  - стержней фермы 350
- Шаг винта 112
- Шарнир 14
- Шкив 309
- Шток 309
- Шухов В.Г. 15
- Эйлера углы 222
- Энергия
  - полная механическая 325
  - потенциальная 318, 326