

**ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**  
**МЕХАНИКА**  
Учебное пособие

Изложены основные вопросы механики, которые соответствуют учебным программам подготовки бакалавров высших технических учебных заведений. Особое внимание обращено на разъяснение физической сущности законов механики и на сознательное применение их в науке и технике. Объём материала, включённый в пособие, обеспечивает подготовку, достаточную для успешного освоения студентами других разделов физики и технических дисциплин.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим направлениям и специальностям бакалавриата.

## ВВЕДЕНИЕ

---

---

Изменения в системе общественных отношений активно воздействуют на высшую школу и требуют от образования мобильности, адекватного соответствия задачам нового исторического этапа. На расширенном заседании Госсовета 8 февраля 2008 г. ([www.kremlin.ru](http://www.kremlin.ru)) определена стратегия инновационного развития России, определяющаяся «на реализацию человеческого потенциала, на наиболее эффективное применение знаний и умений людей...». Путин В.В. отметил, что «будущее России, наши успехи зависят от образования и здоровья людей, от их стремления к самосовершенствованию и использованию своих навыков и талантов». Поэтому система образования должна вобрать в себя самые современные знания, методы, подходы и технологии обучения и воспитания.

В период модернизации системы образования повышаются требования к качеству преподавания физики в высшей школе. Нет сомнения в том, что физика, как фундамент современного естествознания, обеспечивает прогресс в создании инновационных технологий. Но все достижения физики так или иначе, начинаются со школьного и вузовского образования, где формируются не только знания, умения, навыки, но и научное мировоззрение и физическое мышление будущих специалистов.

Важная роль в формировании научного мировоззрения будущих специалистов принадлежит курсу механики, который является базой как для изучения других разделов курса физики, так и большого числа общеинженерных и специальных дисциплин. Достоинством данного

пособия является включение в него наряду с классическими воззрениями на механику идей специальной теории относительности, принципа эквивалентности, а также границ применимости ньютоновской механики.

Авторы стремились прежде всего выяснить физическую сущность явлений, описываемых теми или иными математическими соотношениями. Иногда используется качественный подход к изучению сложных механических явлений. По мнению одного из выдающихся физиков Э. Ферми, «физическая сущность действительно понимаемого вопроса может быть объяснена без сложных формул».<sup>1</sup> В умении качественно объяснить сущность физических явлений и заключается истинное понимание математических уравнений, описывающих те или иные закономерности.

Данный курс механики предназначен для подготовки бакалавров технических вузов, изучающих физику по расширенной программе. Однако изложение материала построено так, что пособие можно использовать в вузах с обычной программой по физике. При сокращенной программе по решению кафедры часть вопросов, изложенных в пособии можно опустить. Например:

1. Раздел 1.5 – Сложное движение твердого тела.
2. Раздел 2.7 – Опыт Майкельсона.
3. Раздел 2.10 – Движение тела переменной массы.
4. Раздел 5.4 – Деформация кручения.
5. Раздел 6.4 – Доказательство формулы для силы Кориолиса.
6. Раздел 7.11 – Релаксационные колебания.
7. Раздел 7.13 – Связанные колебания.
8. Раздел 8.2 – Вывод формулы для скорости волн в твердом теле.
9. Раздел 8.3 – Рассмотрение мод движения в системе с большим числом степеней свободы.
10. Глава 9. Гидродинамика.

Приведенный перечень сокращений является сугубо ориентировочным. В зависимости от объема часов, выделяемых на изучение механики, он может быть сокращён или расширен по усмотрению преподавателя.

---

<sup>1</sup> Цит. По Поппекорво Б.М., Эприко Ферми. М. : Знание, 1971. С. 27.

# 1. КИНЕМАТИКА

---

---

## 1.1. МЕХАНИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ СИСТЕМА ОТСЧЁТА

В самом общем смысле под словом «движение» понимаются любые процессы и изменения, происходящие в окружающем нас мире: физические, химические, биологические и др. Но механика изучает простейшую форму движения – *механическое* движение, под которым понимается изменение взаимного расположения тел или их частей относительно друг друга в пространстве и во времени. Основные свойства пространства: трёхмерность, однородность, изотропность и непрерывность. Последнее свойство относится и ко времени.

В основе механики лежат законы, сформулированные Исааком Ньютоном в труде «Математические начала натуральной философии» (1687 г.). С развитием физики выяснилось, что механика Ньютона не применима к описанию движения тел, скорости которых сравнимы со скоростью света ( $c = 3 \cdot 10^8$  м/с). При таких скоростях приходится использовать законы *релятивистской механики*, основы которой были заложены А. Эйнштейном в специальной теории относительности (1905 г.). В отличие от релятивистской механики больших скоростей механику Ньютона часто называют *нерелятивистской механикой*. Однако теория относительности не отрицает механику Ньютона, а лишь указывает на границы её применимости.

Есть ещё одно ограничение механики Ньютона. Она не всегда применима к описанию движения микрочастиц, которые обладают кроме корпускулярных, и волновыми свойствами.

Механика включает в себя два основных раздела: *кинематику* и *динамику*. Описание движения тел, определение положения тел в пространстве в любой момент времени является основной задачей кинематики, в которой не вскрываются причины того или иного движения. Для определения положения тела в любой, наперёд заданный момент времени, в кинематике необходимо знать закон изменения координат тела со временем и скорость тела в начале движения.

Задача динамики более общая – в ней изучается связь между взаимодействием тел и характером их движения. Одна из основных задач динамики – определение положения тела и его скорости в любой момент времени по известным начальным условиям. Эту задачу часто называют *прямой задачей динамики*. Отличие её от задач, решаемых в кинематике, состоит в том, что для нахождения координат тела в любой момент времени необходимо по известным значениям сил, дейст-

вующих на тело, и известной массе тела, определить ускорение; затем определить значение скорости, найти перемещение тела и его координаты. В динамике приходится решать и обратную задачу, когда по известному положению тела в пространстве и его скорости в любой момент времени находят силы, действующие на тело.

Для упрощения решения задач механики вводят понятие *материальной точки*, под которой понимают любое тело, размерами и формой которого можно пренебречь.

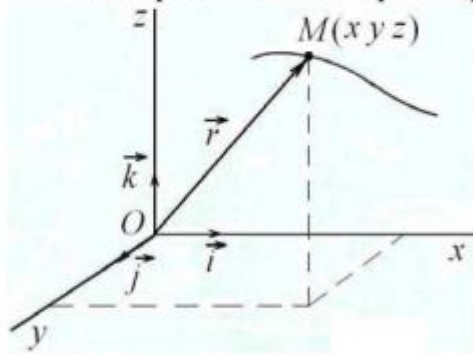


Рис. 1.1

Так как пространство однородно, т.е. все точки равноценны, и изотропно, т.е. все направления равноправны, то невозможно определить положение материальной точки относительно пространства. Однако вполне возможно определить положение рассматриваемой материальной точки относительно другой, которая принимается за *точку отсчёта*. В кинематике выбор тела или

точки отсчёта, относительно которого изучается движение рассматриваемой материальной точки, произволен. Для описания движения материальной точки с точкой отсчёта  $O$  необходимо связать, например, прямоугольную систему координат (рис. 1.1). Чтобы фиксировать координаты  $(x; y; z)$  движущейся точки  $M$  в любой момент времени, необходимо иметь приборы: линейку для измерения расстояния и часы для измерения времени. *Пространственно-временная система отсчёта* включает в себя тело отсчёта, систему координат и приборы для измерений расстояний и моментов времени.

При движении материальной точки  $M$  в пространстве, её координаты изменяются с течением времени

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t). \quad (1.1.1)$$

Эти функции, заданные в явном виде, для конкретного случая движения материальной точки называются *кинематическими уравнениями движения*. Положение материальной точки  $M$  в пространстве можно задать также с помощью радиуса-вектора

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (1.1.2)$$

Поэтому вместо трёх скалярных уравнений движения материальной точки (1.1.1) можно записать одно векторное уравнение движения

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.1.3)$$

Линия, которую описывает материальная точка в пространстве при своем движении, называется *траекторией*. Чтобы найти уравнение траектории, необходимо из кинематических уравнений движения

(1.1.1) исключить время  $t$ . Приведём пример. Пусть материальная точка по оси  $x$  совершает гармоническое колебание с амплитудой  $X_m$  и частотой  $\omega$

$$X = X_m \sin \omega t .$$

Пусть та же точка одновременно движется по оси  $y$  в соответствии с законом

$$Y = Y_m \cos \omega t .$$

Чтобы найти уравнения траектории точки, запишем уравнения движения в виде

$$\sin^2 \omega t = \frac{x^2}{X_m^2} ; \quad \cos^2 \omega t = \frac{y^2}{Y_m^2} .$$

Осуществив сложение этих выражений, получим уравнение траектории

$$\frac{x^2}{X_m^2} + \frac{y^2}{Y_m^2} = 1 ,$$

которое представляет собой эллипс.

## 1.2. СКОРОСТЬ

Под *скоростью* понимают величину, характеризующую быстроту движения точки. Пусть материальная точка движется неравномерно по криволинейной траектории (рис. 1.2). В момент времени  $t$  движущаяся точка проходит точку  $M$  траектории, а в момент  $t + \Delta t$  – точку  $N$ . *Длиной пути*  $\Delta S$  называется расстояние, отсчитываемое вдоль траектории. Длина пути равна длине дуги  $MN$ , т.е.  $\Delta S = \overset{\frown}{MN}$  и является скалярной величиной. Вектор  $\Delta \vec{r}$ , соединяющий точки  $M$  и  $N$  криволинейной траектории, называется *вектором перемещения*. Модуль вектора перемещения равен длине хорды  $MN$ , т.е.  $|\Delta \vec{r}| = MN$ . Положение движущейся точки в момент времени  $t$  и  $t + \Delta t$  характеризуется, соответственно, векторами  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ . Легко видеть, что  $\vec{r}_1 + \Delta \vec{r} = \vec{r}_2$ . Другими словами, вектор

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \tag{1.2.1}$$

можно назвать *вектором приращения* радиуса вектора  $\vec{r}$  за промежуток времени  $\Delta t$ .

*Вектором средней скорости* называется физическая величина, равная отношению вектора перемещения движущейся точки к промежутку времени, за которое происходит данное перемещение:

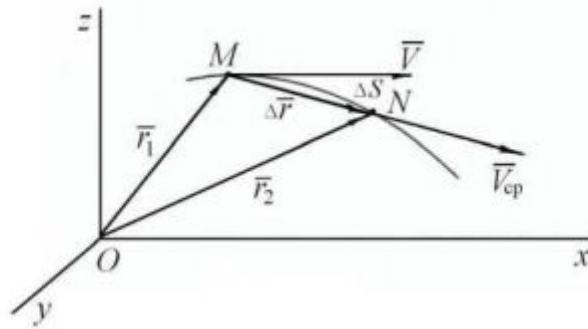


Рис. 1.2

$$\bar{v}_{\text{cp}} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{\Delta t}. \quad (1.2.2)$$

Вектор  $\bar{v}_{\text{cp}}$  направлен вдоль хорды  $MN$  (рис. 1.2). Модуль и направление вектора средней скорости зависят от величины промежутка времени  $\Delta t$ , за который она определяется. Следовательно, вектор  $\bar{v}_{\text{cp}}$  недостаточно характеризует движение материальной точки. Поэтому вводится понятие *мгновенной скорости*. Будем уменьшать промежуток времени  $\Delta t$  при определении вектора средней скорости. Вследствие чего будет уменьшаться по модулю вектор перемещения  $\Delta \bar{r}$ , при этом будет изменяться его направление. Однако отношение  $\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$  будет стремиться к конечной величине, не равной нулю.

*Вектором мгновенной скорости* называется предел, к которому стремится отношение вектора перемещения к промежутку времени, за которое происходит это перемещение, когда этот промежуток времени стремится к нулю

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}. \quad (1.2.3)$$

Другими словами, вектором мгновенной скорости называется предел, к которому стремится вектор средней скорости, если время, за которое она определяется, стремится к нулю

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}_{\text{cp}}. \quad (1.2.4)$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$ , вектор приращения  $\Delta \bar{r}$  радиуса-вектора поворачивается, и в пределе будет совпадать с касательной к траектории. Следовательно, вектор мгновенной скорости  $\bar{v}$  всегда направлен по касательной к траектории материальной точки (рис. 1.2).

Для определения модуля мгновенной скорости будем исходить из выражения (1.2.3)

$$|\bar{v}| = v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \bar{r}|}{\Delta t}, \quad (1.2.5)$$

где  $|\Delta\vec{r}|$  – модуль вектора перемещения. При  $\Delta t \rightarrow 0$  получим  $|\Delta\vec{r}| = \Delta S$ . Следовательно, имеем

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS(t)}{dt}, \quad (1.2.6)$$

т.е. модуль вектора мгновенной скорости численно равен производной от пути по времени.

Выясним геометрический смысл средней и мгновенной скорости. Пусть длина пути, пройденного материальной точкой, задана как явная функция времени  $S = S(t)$  и графически представлена на (рис. 1.3).

Модуль средней скорости за промежуток времени  $t_2 - t_1 = \Delta t$  равен

$$v_{\text{ср}} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \text{ Следовательно, на графике пути средняя скорость}$$

за промежуток времени  $\Delta t$  численно равна тангенсу угла наклона хорды  $AB$  к оси времени, т.е.

$$v_{\text{ср}} = \text{tg}\alpha. \quad (1.2.7)$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$  хорда  $AB$  будет уменьшаться по величине, а её направление будет стремиться к линии  $AC$ , которая является касательной к графику пути в точке  $A$ . Следовательно, мгновенная скорость материальной точки в момент времени  $t$  численно будет равна тангенсу угла наклона касательной к графику пути для данного момента времени

$$v = \text{tg}\beta. \quad (1.2.8)$$

Из выражения (1.2.3) следует, что вектор мгновенной скорости равен производной радиуса-вектора по времени

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.2.9)$$

Учитывая, что  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , где  $(x; y; z)$  – координаты движущейся точки, получим

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \quad (1.2.10)$$

При этом считается, что направления осей координат, а, следовательно, и векторов  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  с течением времени не изменяются. Пусть  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  являются проекциями вектора скорости на координатные оси

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}. \quad (1.2.11)$$

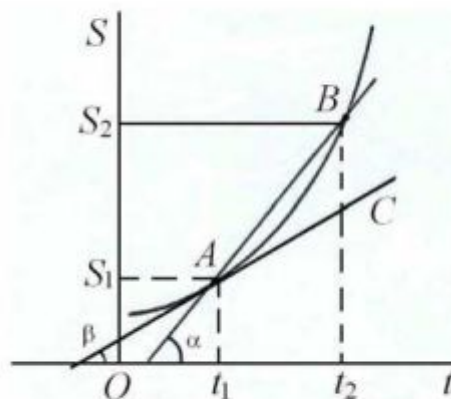


Рис. 1.3



Сравнивая последние два выражения, получим

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (1.2.12)$$

При этом необходимо знать кинематические уравнения движения материальной точки в явном виде:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ . Модуль вектора мгновенной скорости можно найти по формуле

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \quad (1.2.13)$$

Вычислим путь  $S$ , проходимый точкой при произвольном неравномерном движении от момента времени  $t_1$  до  $t_2$ . Так как мгновенная скорость точки изменяется, то разобьём траекторию на элементарные участки  $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3 \dots \Delta S_i \dots \Delta S_N$ . Средняя скорость на каждом участке, соответственно, равна:  $v_{cp1}, v_{cp2} \dots v_{cpi} \dots v_{cpN}$ . Тогда путь, пройденный материальной точкой, приблизительно будет равен

$$S \approx v_{cp1}\Delta t_1 + v_{cp2}\Delta t_2 + \dots + v_{cpi}\Delta t_i + \dots + v_{cpN}\Delta t_N$$

или

$$S \approx \sum_{i=1}^N v_{cpi}\Delta t_i. \quad (1.2.14)$$

Для более точного вычисления пути необходимо увеличить число отрезков и уменьшить время, за которое они определяются, т.е. необходимо найти предел

$$S = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N v_{cpi}\Delta t_i,$$

или вычислить интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt. \quad (1.2.15)$$

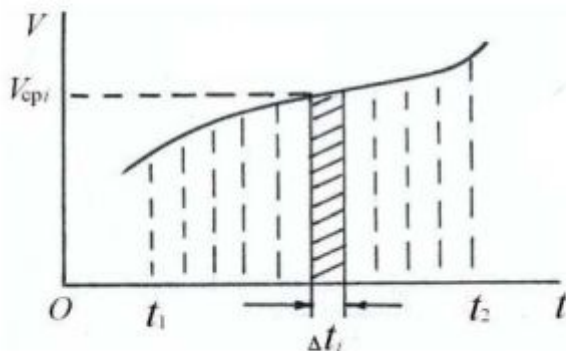


Рис. 1.4

Дадим графическую иллюстрацию вычисления пути в общем случае. На рис. 1.4 представлен произвольный график скорости неравномерного движения в промежутке времени от  $t_1$  до  $t_2$ . Площадь полоски шириной  $\Delta t_i$  на графике скорости численно равна

$$\sigma_i = v_{cpi}\Delta t_i.$$

С другой стороны, согласно выше изложенному,  $\Delta S_i = v_{срi} \Delta t_i$ . Следовательно, площадь полоски  $\sigma_i$  шириной  $\Delta t_i$  на графике скорости численно равна отрезку пути  $\Delta S_i$ , проходимому точкой за тот же промежуток времени  $\Delta t_i$ .

Очевидно, что весь путь, проходимый точкой за промежуток времени  $(t_2 - t_1)$  согласно формулам (1.2.14) и (1.2.15) на графике скорости, численно равен площади криволинейной фигуры, ограниченной графиком скорости, осью времени и ординатами при  $t_1$  и  $t_2$ .

Рассмотрим основные закономерности *равномерного прямолинейного движения* материальной точки, например, вдоль оси  $x$ . В этом случае  $v_x = \text{const}$ ,  $v_y = 0$ ,  $v_z = 0$ . Учитывая, что  $v_x = \frac{dx}{dt}$ , получим  $dx = v_x dt$ . Интегрируя данное выражение, найдём

$$\int dx = v_x \int dt + C \text{ или } x = v_x t + C. \quad (1.2.16)$$

Константу интегрирования найдём из начального условия. Например, допустим, что в начальный момент времени координата движущейся точки

$$x|_{t=0} = x_0. \quad (1.2.17)$$

Из формулы (1.2.16) найдём

$$x|_{t=0} = C. \quad (1.2.18)$$

Сравнивая последние два выражения, найдём  $C = x_0$ . Следовательно, находим закон равномерного прямолинейного движения

$$x = x_0 + v_x t. \quad (1.2.19)$$

### 1.3. УСКОРЕНИЕ

Наиболее общими являются движения, при которых материальная точка движется неравномерно и по криволинейной траектории. При этом вектор мгновенной скорости изменяется как по величине, так и по направлению. *Ускорение* характеризует быстроту изменения мгновенной скорости.

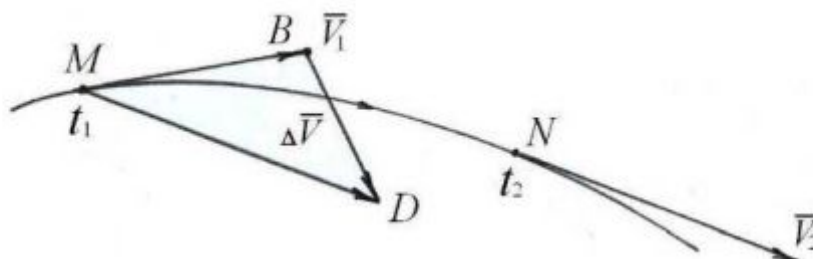


Рис. 1.5

Пусть материальная точка движется по криволинейной траектории. В момент времени  $t_1 = t$  вектор мгновенной скорости равен  $\bar{v}_1$ , а в момент времени  $t_2 = t + \Delta t$  —  $\bar{v}_2$  (рис. 1.5). Для определения изменения вектора скорости перенесём вектор  $\bar{v}_2$  из точки  $N$  в точку  $M$  параллельно самому себе и соединим точки  $B$  и  $D$ . Полученный вектор  $\Delta\bar{v}$  определяет изменение мгновенной скорости по величине и направлению за время  $\Delta t$ , так как  $\Delta\bar{v} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1$ .

*Вектором среднего ускорения* называется отношение приращения вектора мгновенной скорости к промежутку времени, за которое это изменение происходит

$$\bar{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}. \quad (1.3.1)$$

Вектор  $\bar{a}_{\text{ср}}$  направлен вдоль вектора  $\Delta\bar{v}$ . Величина и направление вектора среднего ускорения зависит от промежутка времени  $\Delta t$ , за которое он определяется. Поэтому вектор среднего ускорения недостаточно характеризует быстроту изменения скорости. При уменьшении  $\Delta t$  приращение вектора  $\Delta\bar{v}$  также уменьшается по модулю, но отношение  $\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}$  будет стремиться к конечной величине.

*Вектором мгновенного ускорения* называется предел, к которому стремится отношение приращения вектора скорости к промежутку времени, за которое происходит данное изменение, когда этот промежуток стремится к нулю

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}. \quad (1.3.2)$$

Учитывая выражение (1.3.1), можно написать

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a}_{\text{ср}}. \quad (1.3.3)$$

Как будет показано далее, вектор мгновенного ускорения при криволинейном движении не совпадает с вектором мгновенной скорости. Учитывая определение производной, из выражения (1.3.2) найдём

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}, \quad (1.3.4)$$

На основании формулы (1.2.9) получим

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}, \quad (1.3.5)$$

где  $\bar{r}$  — радиус-вектор движущейся точки.

Дифференцируя выражение (1.2.11) по времени, найдём

$$\bar{a} = \frac{dv_x}{dt} \bar{i} + \frac{dv_y}{dt} \bar{j} + \frac{dv_z}{dt} \bar{k}. \quad (1.3.6)$$

Пусть  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  являются проекциями вектора мгновенного ускорения на координатные оси, тогда

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}. \quad (1.3.7)$$

Сравнивая последние два выражения, получим

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \quad (1.3.8)$$

На основании (1.2.12) найдём

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (1.3.9)$$

Модуль вектора мгновенного ускорения равен

$$a = |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}. \quad (1.3.10)$$

Таким образом, если известны кинематические уравнения движения материальной точки, то дифференцированием этих функций имеется возможность определить величину и направление мгновенной скорости и ускорения. Если же известно ускорение точки и начальные условия движения, то интегрированием можно найти законы движения. Приведем пример. Пусть материальная точка движется вдоль оси  $x$  с постоянным ускорением  $\bar{a} = \text{const}$  при начальных условиях:  $x|_{t=0} = x_0$ ,  $v|_{t=0} = v_0$ . Очевидно, что  $a = a_x = \text{const}$ ,  $a_y = 0$ ,  $a_z = 0$ .

Учитывая, что  $\frac{dv_x}{dt} = a_x$ , найдём

$$dv_x = a_x dt = a dt.$$

Интегрируя это выражение, найдём

$$v_x = at + C_1,$$

откуда  $v_x|_{t=0} = C_1$ . Сравнивая это значение с начальными условиями, найдём:  $C_1 = v_0$ . Следовательно, получаем

$$v_x = v_0 + at. \quad (1.3.11)$$

Полученное выражение можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + at \quad \text{или} \quad dx = v_0 dt + at dt.$$

Интегрируя это выражение, найдём

$$x = v_0 t + \frac{at^2}{2} + C_2, \text{ а } x|_{t=0} = C_2.$$

Сравнивая это значение с начальными условиями, найдём  $C_2 = x_0$ . Таким образом, находим закон движения точки

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (1.3.12)$$

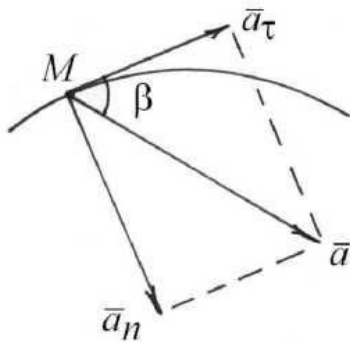


Рис. 1.6

При криволинейном неравномерном движении точки вектор мгновенного ускорения  $\bar{a}$  целесообразно разложить на две составляющие: вектор нормального ускорения  $\bar{a}_n$  и вектор тангенциального (касательного) ускорения  $\bar{a}_\tau$  (рис. 1.6). Следовательно, вектор полного ускорения равен

$$\bar{a} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau, \quad (1.3.13)$$

а его модуль может быть представлен в виде

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \quad (1.3.14)$$

Выясним физический смысл тангенциального и касательного ускорений. На рис. 1.7 изображены векторы  $\bar{v}_1$  и  $\bar{v}_2$  мгновенной скорости в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ , а также изменение вектора скорости  $\Delta\bar{v}$ .

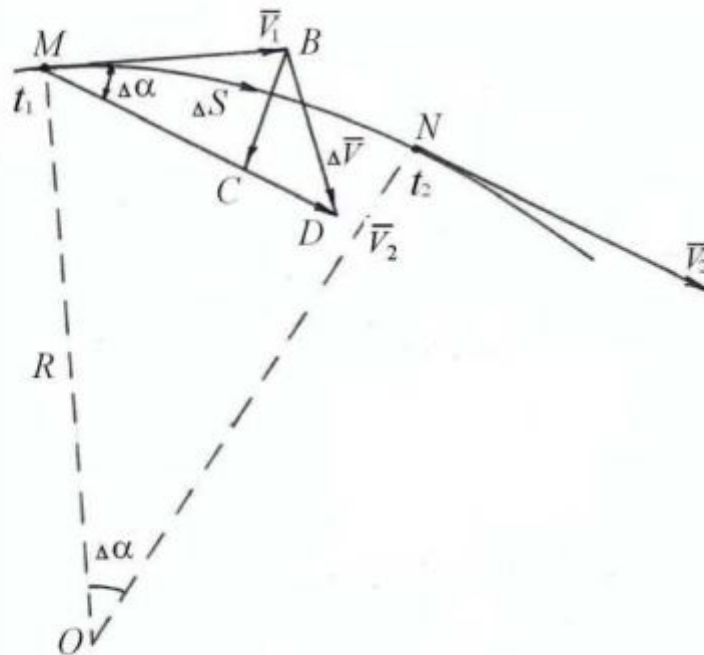


Рис. 1.7

Из точки  $M$  отложим отрезок  $MC$ , численно равный  $|\bar{v}_1|$ . Соединим точки  $B$  и  $C$ . Приращение вектора скорости можно представить как сумму двух векторов:  $\Delta\bar{v} = \overline{BC} + \overline{CD}$ . По определению ускорения имеем

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{CD} + \overline{BC}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{CD}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{BC}}{\Delta t}. \quad (1.3.15)$$

Рассмотрим каждое из слагаемых в отдельности. Величина вектора  $\overline{CD}$  численно равна изменению модуля величины скорости, т.е.  $|\overline{CD}| = \Delta|\bar{v}|$ . Если  $\Delta t \rightarrow 0$ , то вектор  $\overline{CD}$  будет поворачиваться и в пределе он будет направлен по касательной к траектории. Следовательно, первое слагаемое в формуле (1.3.15) определяет вектор тангенциального ускорения

$$\bar{a}_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{CD}}{\Delta t}.$$

Найдем модуль тангенциального ускорения

$$a_\tau = |\bar{a}_\tau| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\overline{CD}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta|\bar{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Окончательно получим

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}. \quad (1.3.16)$$

Таким образом, *тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения скорости по величине и равно производной по времени от скорости, рассматриваемой как скалярная функция времени.*

Рассмотрим второе слагаемое в выражении (1.3.15). Вектор  $\overline{BC}$  характеризует изменение вектора мгновенной скорости по направлению за время  $\Delta t$ . При  $\Delta t \rightarrow 0$  вектор  $\overline{BC}$  остаётся перпендикулярным к касательной траектории и направлен по главной нормали. Следовательно, второе слагаемое в формуле (1.3.15) определяет вектор нормального ускорения

$$\bar{a}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{BC}}{\Delta t}. \quad (1.3.17)$$

Найдём модуль нормального ускорения. Из рис. 1.7 имеем  $|\overline{BC}| = v\Delta\alpha$ . Учитывая, что длина дуги  $MN$  равна  $\Delta S$ , а радиус кривизны траектории равен  $R$ , то  $\Delta\alpha = \frac{\Delta S}{R}$ . Следовательно,  $|\overline{BC}| = \frac{v\Delta S}{R}$ .

Модуль нормального ускорения равен

$$a_n = |\bar{a}_n| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\overline{BC}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v \Delta S}{R \Delta t} = \frac{v}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Окончательно получим

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \quad (1.3.18)$$

Таким образом, нормальное ускорение характеризует быстроту изменения вектора мгновенной скорости по направлению. Модуль полного ускорения согласно формуле (1.3.14) может быть представлен в виде

$$a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \quad (1.3.19)$$

Угол между вектором полного ускорения  $\bar{a}$  и касательной к траектории на основании рис. 1.6 равен

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_n}{a_\tau}. \quad (1.3.20)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи движения материальной точки.

1. Движение точки равнопеременное прямолинейное. Так как радиус кривизны траектории  $R = \infty$ , то скорость изменяется только по величине. Следовательно,  $a_n = \frac{v^2}{R} = 0$ ;  $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ .

2. Точка движется по окружности радиуса  $R$  равномерно со скоростью  $v$ . Вектор скорости изменяется по направлению. Следовательно,  $a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$ ;  $a_n = \frac{v^2}{R}$ .

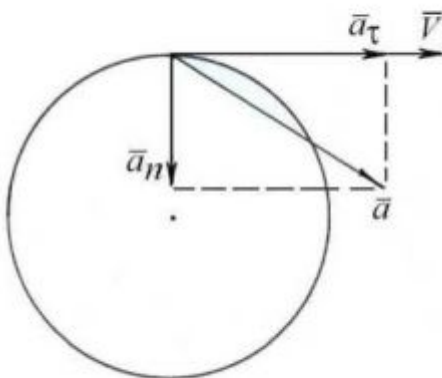


Рис. 1.8

3. Точка движется по окружности ускоренно. В этом случае вектор мгновенной скорости изменяется по величине и направлению  $a_\tau = \frac{dv}{dt} > 0$ ;

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad (\text{рис. 1.8}).$$

Если движение происходит замедленно, то вектор  $\bar{a}_\tau$  направлен противоположно вектору скорости  $\bar{v}$ .

## 1.4. КИНЕМАТИКА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПО ОКРУЖНОСТИ

Пусть точка движется неравномерно по окружности радиуса  $R$ . Положение движущейся точки  $M$  в момент времени  $t$  характеризуется радиус-вектором  $\vec{r}$ . В момент времени  $t + \Delta t$  движущаяся точка описывает дугу окружности  $M\tilde{N} = \Delta S$  (рис. 1.9). Центральный угол  $\Delta\varphi$  называется *угловым перемещением* точки за время  $\Delta t$ . Угловое перемещение – векторная величина. Вектор  $\Delta\vec{\varphi}$  направлен вдоль оси вращения так, что, если смотреть в конец вектора  $\Delta\vec{\varphi}$ , то вращение видно происходящим против часовой стрелки.

*Вектором средней угловой скорости* называется отношение углового перемещения точки к промежутку времени, за которое это перемещение происходит

$$\vec{\omega}_{\text{cp}} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}. \quad (1.4.1)$$

Направление вектора  $\vec{\omega}_{\text{cp}}$  совпадает с вектором  $\Delta\vec{\varphi}$ .

Величина средней угловой скорости зависит от промежутка времени, за который она определяется. Поэтому она недостаточно характеризует движение точки. Вводится понятие *вектора мгновенной скорости*

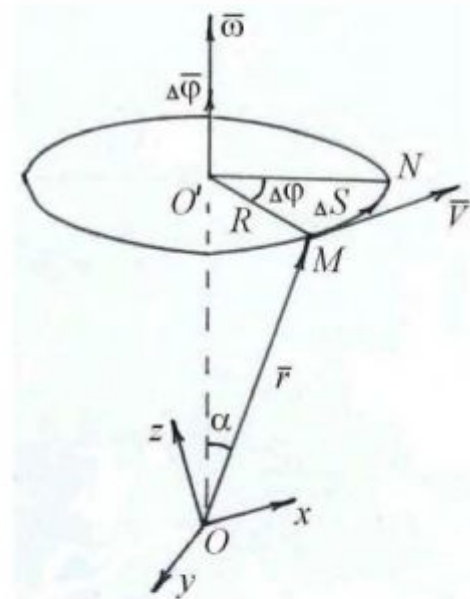
$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{\omega}_{\text{cp}} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \quad (1.4.2)$$

Если вектор углового перемещения  $d\vec{\varphi}$  изменяется только по величине, то точка движется вокруг неподвижной оси. В этом случае модуль угловой мгновенной скорости численно равен производной углового перемещения по времени

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.4.3)$$

Так как угол поворота принято измерять в радианах, то угловая скорость измеряется в рад/с.

Найдём связь угловой и линейной скоростей при движении точки вокруг неподвижной оси. Мгновенная линейная скорость, согласно определению,



**Рис. 1.9**



равна  $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ . Учитывая, что перемещение точки  $\Delta S = R\Delta\varphi$  (рис. 1.9), найдём

$$v = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega R. \quad (1.4.4)$$

Из рисунка 1.9 видно, что  $R = r \cdot \sin \alpha$ , где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{\omega}$ . Следовательно,

$$v = \omega r \sin(\vec{\omega}, \vec{r}). \quad (1.4.5)$$

Данное выражение можно записать в виде векторного произведения

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]. \quad (1.4.6)$$

Три вектора  $\vec{v}$ ,  $\vec{r}$ ,  $\vec{\omega}$  образуют правую тройку векторов. Вектор  $\vec{v}$  перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{\omega}$ , и направлен так, что если смотреть в его конец, то кратчайший поворот вектора  $\vec{\omega}$  к вектору  $\vec{r}$  виден происходящим против часовой стрелки (рис. 1.10).

Рассмотрим *закономерности равномерного движения точки по окружности*. В данном случае  $\omega = \text{const}$ . Учитывая, что  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ , получим  $d\varphi = \omega dt$ . Проинтегрируем это выражение

$$\int d\varphi = \omega \int dt, \text{ т.е. } \varphi = \omega t + C, \quad (1.4.7)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования, которая находится из начальных условий. Например, при  $t = 0$ , угол  $\varphi = \varphi_0$ . Из формулы (1.4.7) найдём  $\varphi_{t=0} = C$ . Сравнивая последние выражения, найдём  $C = \varphi_0$ . Следовательно, окончательно получим

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad (1.4.8)$$

т.е. при равномерном вращении угол поворота увеличивается прямо пропорционально времени.

Время, за которое точка совершает один полный оборот по окружности, называется *периодом обращения*  $T$ . Следовательно,

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.4.9)$$

Пусть за время  $t$  точка совершила  $N$  полных оборотов. Тогда период обращения равен

$$T = \frac{t}{N}. \quad (1.4.10)$$

Количество оборотов, совершаемых в единицу времени, называется *частотой обращения*

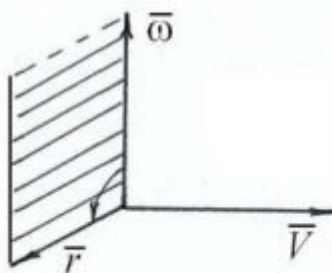


Рис. 1.10

$$n = \frac{N}{t} = \frac{1}{T}. \quad (1.4.11)$$

Учитывая последнее выражение, найдём

$$\omega = 2\pi n. \quad (1.4.12)$$

Частота обращения измеряется в об/с.

Часто, материальная точка движется по окружности неравномерно. В этом случае мгновенная угловая скорость точки изменяется. Пусть в момент времени  $t$  угловая скорость была  $\bar{\omega}$ , в момент  $t + \Delta t$  —  $\bar{\omega} + \Delta\bar{\omega}$ . Вектором среднего углового ускорения называется отношение изменения вектора угловой скорости к промежутку времени, за которое произошло данное изменение

$$\bar{\varepsilon}_{\text{cp}} = \frac{\Delta\bar{\omega}}{\Delta t}. \quad (1.4.13)$$

Среднее значение углового ускорения недостаточно характеризует движение точки, так как оно зависит от промежутка времени, за которое оно определяется. Вводится понятие вектора мгновенного углового ускорения

$$\bar{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{\omega}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\varepsilon}_{\text{cp}} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}. \quad (1.4.14)$$

Вектор углового ускорения характеризует быстроту изменения угловой скорости и измеряется в рад/с<sup>2</sup>. Если ось вращения закреплена и не изменяет своей ориентации, то вектор угловой скорости будет изменяться только по величине. В этом случае модуль вектора углового ускорения равен

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \quad (1.4.15)$$

Учитывая, что  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ , найдём

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (1.4.16)$$

При ускоренном вращении при  $dt > 0$  и  $d\omega > 0$  угловое ускорение положительное  $\varepsilon > 0$ . В этом случае вектор  $\bar{\varepsilon}$  совпадает с вектором  $d\bar{\omega}$ , т.е. вектор  $\bar{\varepsilon}$  направлен в ту же сторону, что и вектор  $\bar{\omega}$  (рис. 1.11, а).

При замедленном вращении при  $dt > 0$  и  $d\omega < 0$ , угловое ускорение отрицательное —  $\varepsilon < 0$ . В этом случае вектор  $\bar{\varepsilon}$  направлен противоположно вектору угловой скорости  $\bar{\omega}$  (рис. 1.11, б).

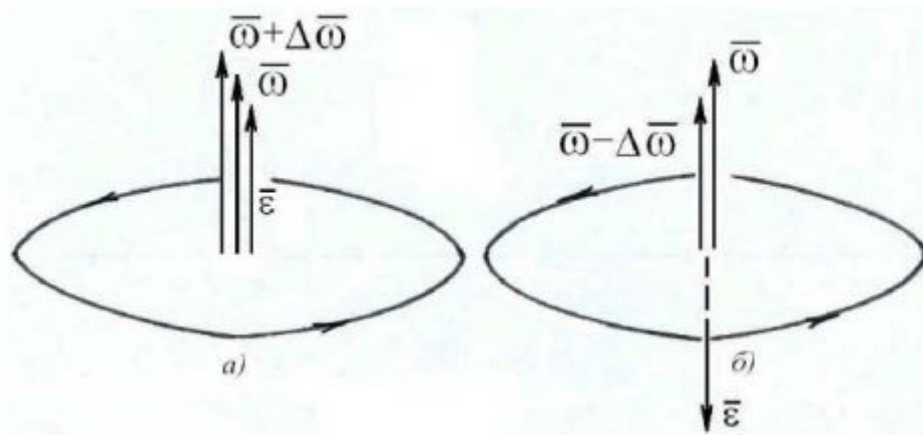


Рис. 1.11

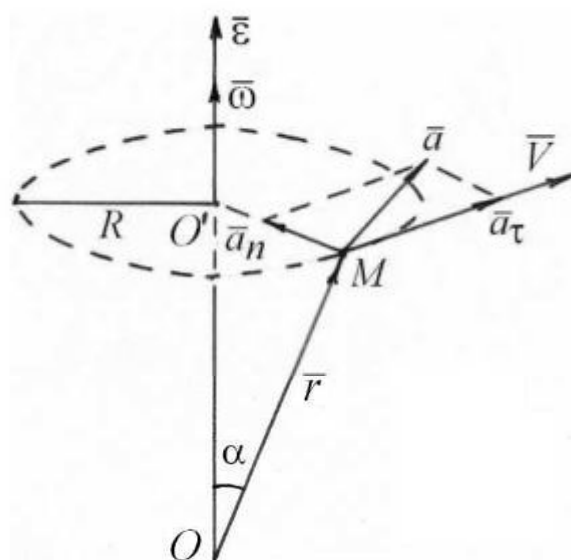


Рис. 1.12

Найдём связь нормального и тангенциального ускорений с угловыми величинами. Пусть материальная точка  $M$  движется ускоренно по окружности радиуса  $R$  со скоростью  $\bar{v}$ . Вектор мгновенной скорости изменяется по величине и направлению (рис. 1.12). Согласно определению, модуль тангенциального ускорения точки равен  $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ . Учитывая связь линейной и угловой скорости  $v = \omega R$ , получим

$$a_\tau = R \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon R. \quad (1.4.17)$$

Модуль тангенциального ускорения равен произведению углового ускорения на радиус вращения точки.

Будем характеризовать положение движущейся точки по окружности радиус-вектором  $\bar{r}$  (рис. 1.12). Тогда радиус окружности

$R = r \sin \alpha$ , где  $\alpha$  – угол между радиус-вектором  $\vec{r}$  и угловым ускорением  $\vec{\varepsilon}$ . Формула (1.4.17) принимает вид

$$a_\tau = \varepsilon r \sin(\vec{\varepsilon}, \vec{r}). \quad (1.4.18)$$

Данное выражение можно записать в векторной форме

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon} \times \vec{r}]. \quad (1.4.19)$$

Все три вектора этого выражения представляют собой правую тройку векторов (рис. 1.12).

Модуль нормального ускорения согласно формуле (1.4.4) по определению равен

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R. \quad (1.4.20)$$

*Величина нормального ускорения равна произведению квадрата угловой скорости на радиус вращения.*

Выражение (1.4.20) можно записать в виде

$$a_n = \omega^2 r \sin \alpha = \omega \cdot \omega r \sin \alpha \quad \text{или} \quad \vec{a}_n = [\vec{\omega} \times \vec{v}] = [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]]. \quad (1.4.21)$$

Учитывая формулы (1.4.17) и (1.4.20), модуль полного ускорения точки движущейся по окружности равен

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (1.4.22)$$

Рассмотрим закономерности равнопеременного вращения материальной точки по окружности. Вращение точки называется равнопеременным, если оно осуществляется с постоянным угловым ускорением:  $\varepsilon = \text{const}$ . Найдём, как изменяется угловая скорость при равнопеременном вращении. По определению углового ускорения имеем  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$  или  $d\omega = \varepsilon dt$ . Проинтегрируем данное выражение

$$\int d\omega = \varepsilon \int dt + C_1,$$

откуда получим

$$\omega = \varepsilon t + C_1. \quad (1.4.23)$$

Постоянную интегрирования найдём из начального условия, которое зададим в виде  $\omega_{t=0} = \omega_0$ . Из полученной формулы (1.4.23)  $\omega_{t=0} = C_1$ . Сравнивая два последние выражения, найдём  $C_1 = \omega_0$ . Таким образом, окончательно

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (1.4.24)$$

При равнопеременном вращении точки по окружности, мгновенная скорость возрастает при  $\varepsilon > 0$  или убывает при  $\varepsilon < 0$  прямо пропорционально времени. Найдём, как изменится угловое перемещение

точки при равнопеременном вращении. По определению  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ , из выражения (1.4.24) имеем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t \quad \text{или} \quad d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon t dt .$$

Проинтегрировав полученное выражение, найдём

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} + C_2 . \quad (1.4.25)$$

Начальное условие зададим в виде  $\varphi_{t=0} = \varphi_0$ . Из формулы (1.4.25) найдём  $\varphi_{t=0} = C_2$ , тогда  $C_2 = \varphi_0$ . Таким образом, окончательно

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} . \quad (1.4.26)$$

Уместно сравнить закономерности вращательного и поступательного движения материальной точки и провести аналогии.

## 1.5. КИНЕМАТИКА ТВЁРДОГО ТЕЛА

Любое тело обладает формой и размером, но под действием внешних сил объём и форма изменяются. Если деформации, возникающие в теле малы или ими можно пренебречь, то такое тело можно назвать *абсолютно твёрдым*. Для определения положения такого тела достаточно задать положение любых трёх точек этого тела, не лежащих на одной прямой, т.е. задать положение произвольного недеформирующегося треугольника, жёстко связанного с телом. Так как для определения положения одной точки в пространстве нужно знать три её координаты, то для определения положения трёх точек требуется задание девяти величин. Однако в жёстком треугольнике не изменяющиеся расстояния между каждой парой точек выражаются определённым образом через координаты точек. Девять координат вершин треугольника не независимы, а связаны между собой тремя уравнениями. Поэтому для определения положения абсолютно твёрдого тела в пространстве необходимо задать *шесть* независимых величин.

Количество независимых величин, необходимое для определения положения тела или системы тел, определяет *число степеней свободы*. Следовательно, абсолютно твёрдое тело обладает шестью степенями свободы.

Твёрдое тело, закреплённое неподвижно в одной точке, вокруг которой оно может вращаться, имеет три степени свободы, так как из шести независимых координат три координаты неподвижной точки фиксированы. Примером является движение конуса по столу. При этом точка вершины конуса неподвижна.

Если абсолютно твёрдое тело закреплено на неподвижной оси, вокруг которой оно может вращаться, то это означает, что фиксировано положение двух вершин треугольника. Из шести независимых координат заранее фиксированы пять (координаты двух вершин треугольника, расстояние между которыми также фиксировано), и для определения положения тела должна быть задана только одна координата, обычно – угловое перемещение. Тело, закреплённое на оси, обладает одной степенью свободы.

Рассмотрим основные случаи движения твёрдого тела. Движение твёрдого тела называется *плоским*, если все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях. В этом случае жёсткий треугольник, которым мы определяем положение тела, можно выбрать так, чтобы он всё время лежал в одной из таких параллельных плоскостей. При этом для определения положения треугольника на плоскости достаточно задать только положение одной из его сторон, например  $AB$ . Но так как расстояние между точками  $A$  и  $B$  неизменно, то положение отрезка на плоскости определяется заданием трёх независимых величин, например, две координаты точки  $A$  на плоскости и угловое положение отрезка  $AB$ . Таким образом, твёрдое тело, совершающее плоское движение имеет три степени свободы.

При движении твёрдого тела различные его точки совершают в общем случае различные перемещения. В частном случае, когда *все точки тела совершают одинаковое перемещение, движение называется поступательным*. В этом случае любая прямая, проведённая в теле, движется, оставаясь параллельной самой себе. Примером поступательного движения является движение тела  $AB$ , соединённого с двумя одинаковыми кривошипами (рис. 1.13). При вращении кривошипов  $AO_1$  и  $BO_2$  каждая точка твёрдого тела описывает окружность одного и того же радиуса, а любая прямая, например  $AB$ , остаётся параллельной самой себе.

При поступательном движении тела точки движутся одинаково, т.е. они имеют одинаковые перемещения, скорости и ускорения. Сле-

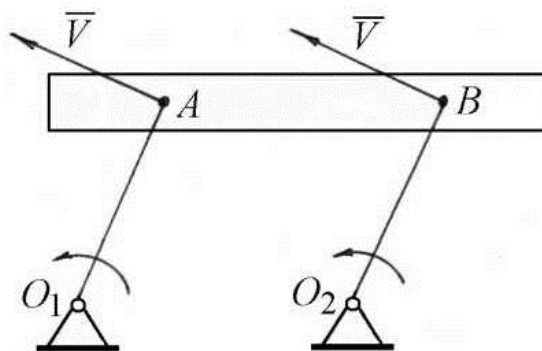


Рис. 1.13

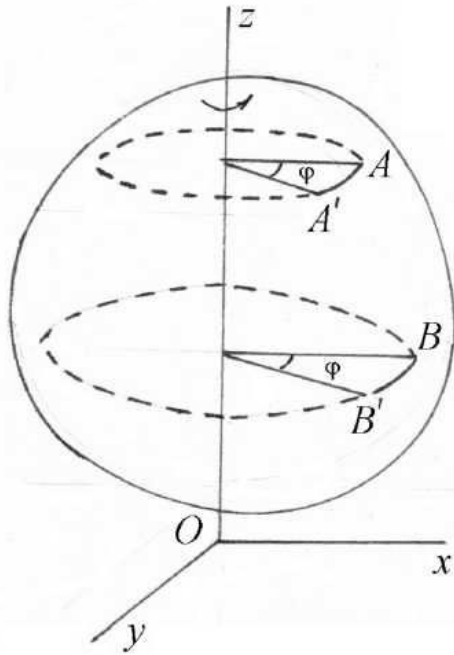


Рис. 1.14

тела все его точки описывают окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения  $z$  (рис. 1.14). Центры всех этих окружностей лежат на оси вращения  $z$ . Все точки тела совершают за любой промежуток времени одинаковые угловые перемещения  $\Phi$ , и поэтому угловая скорость  $\Omega$  всех точек тела одинакова. Линейные скорости любых точек тела определяются выражением

$$v_i = \omega r_i, \quad (1.5.1)$$

где  $r_i$  – радиус окружности, описываемой  $i$ -й точкой тела. Векторы скоростей всех точек тела перпендикулярны к радиусам, проведённым к этим точкам, а модули скоростей точек прямо пропорциональны расстояниям от оси вращения. Поэтому концы векторов скоростей точек, лежащих на одном радиусе, лежат на прямой, образующей с радиусом угол  $\beta$ , причём  $\text{tg}\beta = \omega$  (рис. 1.15).

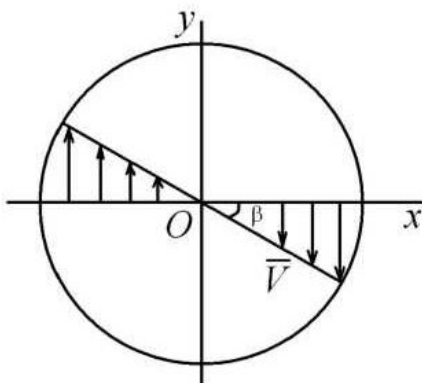


Рис. 1.15

Тангенциальное и нормальное ускорения каждой точки тела даются выражениями (1.4.17) и (1.4.20), где для каждой точки  $i$  твёрдого тела должен быть определён радиус описываемой ей окружности  $r_i$ . Следовательно, тангенциальное и нормальное ускорения точек тела при вращении равны

$$a_{ni} = \omega^2 r_i; \quad (1.5.2)$$

$$a_{\tau i} = \varepsilon r_i, \quad (1.5.3)$$

где  $\varepsilon$  – угловое ускорение, одинаковое для всех точек тела. Полное линейное ускорение  $i$ -й точки, согласно (1.4.22), равно

$$a_i = r_i \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Зная угловую скорость и угловое ускорение вращающегося тела, а также расстояние от точки до оси вращения, можно найти величину и направление линейного ускорения для любой точки тела. Так как отношение  $\frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$  одинаково для всех точек тела, вектор полного ускорения  $\bar{a}$  для всех точек тела образует с радиусом один и тот же угол ( $90^\circ - \gamma$ ), причём  $\text{tg}(90^\circ - \gamma) = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$  (рис. 1.16). Величина полного ускорения пропорциональна  $r_i$ . Поэтому для всех точек, лежащих на одном радиусе, концы векторов ускорения лежат на одной прямой.

Некоторые случаи движения твёрдого тела могут быть сведены к двум простым движениям – поступательному и вращательному. Такое движение твёрдого тела называется *сложным*. В качестве примера рассмотрим следующее устройство. Твёрдое тело в форме диска установлено на тележке (рис. 1.17), способной перемещаться по горизонтальным рельсам. Движение диска можно представить как результат двух движений, происходящих одновременно: вращение диска вокруг оси  $O$ , положение которой в теле остаётся неизменным, но которая перемещается поступательно вместе с тележкой относительно выбранной лабораторной системы отсчёта. В соответствии с терминологией, принятой в механике, вращение тела вокруг оси  $O$ , положение которой в теле остаётся неизменным, называют *относительным движением*; движение оси  $O$  вместе с тележкой относительно выбранной системы отсчёта – *переносным движением*; а результирующее движение тела

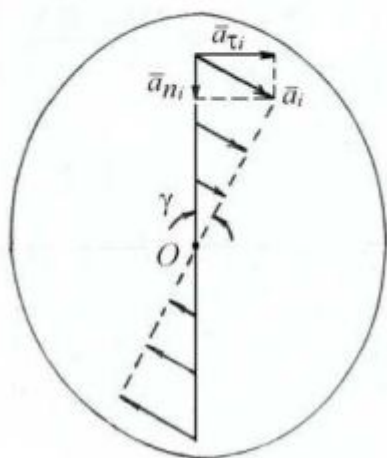


Рис. 1.16

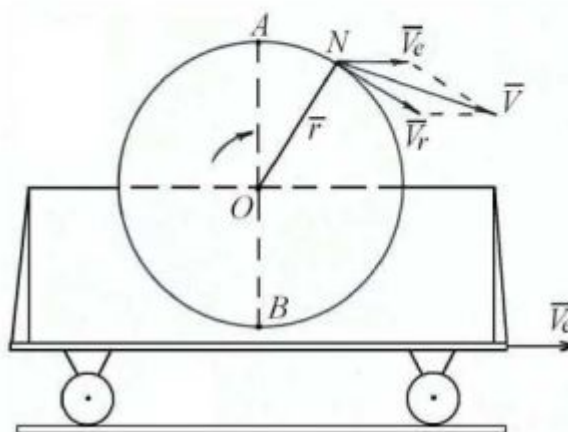


Рис. 1.17



относительно выбранной системы отсчёта – *абсолютным движением*. Данные термины совершенно условны, так как всякое движение может быть определено только по отношению к некоторой системе отсчёта и в этом смысле является относительным.

Элементарное перемещение любой точки диска можно представить как результат двух элементарных перемещений, происходящих за один и тот же промежуток времени  $\Delta t$ : поступательного  $\Delta S$ , при котором все точки тела перемещаются на одну и ту же величину  $\Delta S$ , и поворота  $\Delta\varphi$ , при котором все точки тела поворачиваются на один и тот же угол  $\Delta\varphi$  относительно одной и той же оси.

Угловая скорость относительного движения

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Относительная линейная скорость, разная для различных точек, будет равна

$$\bar{v}_r = [\bar{\omega} \times \bar{r}],$$

где  $r$  – расстояние от рассматриваемой точки до оси вращения.

Скорость переносного движения

$$\bar{v}_e = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{S}}{\Delta t}.$$

Полная или «абсолютная» скорость любой точки диска равна

$$\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r,$$

что показано на рис. 1.17.

На рисунке 1.18, *а* графически показано распределение относительных скоростей точек диска, расположенных по его диаметру  $AB$  в соответствии с формулой  $v_r = \omega r$ . На рис. 1.18, *б* дано распределение переносных скоростей тех же точек диска. Результирующее распределение скоростей диска при сложном движении показано на рис. 1.18, *в*.

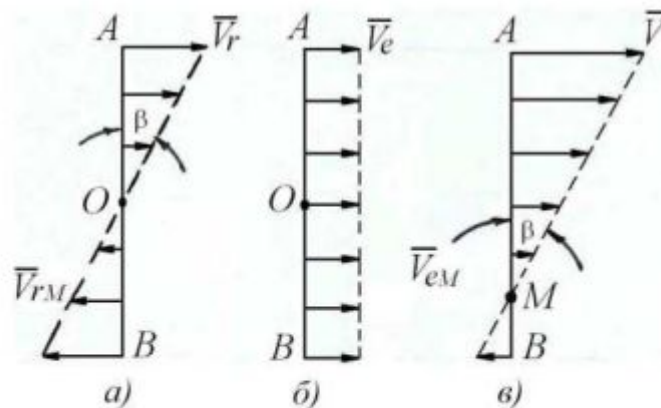


Рис. 1.18

Таким образом, одновременное поступательное и вращательное движения диска относительно оси  $O$  сводится к одному вращательному движению относительно новой оси  $M$  с прежней угловой скоростью  $\omega$ , так как угол  $\beta$  в распределении скоростей остаётся неизменным. Новая ось «абсолютного» вращения  $M$  тела характеризуется тем, что в этой точке относительная и переносная скорости равны по величине и противоположны по направлению  $\bar{v}_{rM} = -\bar{v}_{eM}$ . Положение новой оси  $M$  «абсолютного» вращения зависит от величины и направления относительной скорости. Указанное сложение относительной и переносной скоростей можно осуществлять в любой момент времени. При этом положение оси  $M$  меняется как в пространстве, так и по отношению к диску, который совершает сложное движение. Поэтому ось  $M$  называется *мгновенной осью* или *мгновенным центром скоростей*.

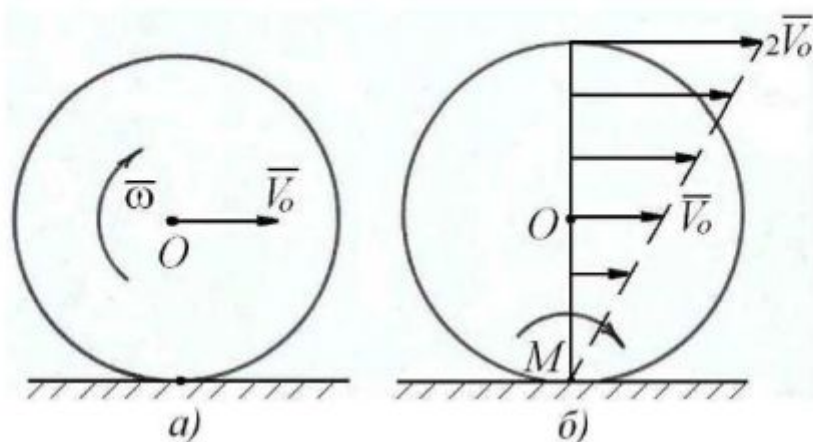


Рис. 1.19

Например, качение цилиндра по горизонтальной плоскости можно рассматривать с двух точек зрения: во-первых, цилиндр вращается вокруг оси  $O$  симметрии с угловой скоростью  $\omega$  и движется поступательно со скоростью  $v_0$  (рис. 1.19, а), во-вторых, сумма этих двух движений даёт вращательное движение цилиндра с угловой скоростью  $\omega$  вокруг мгновенной оси  $M$ , совпадающей с точкой касания цилиндра с плоскостью (рис. 1.19, б).

## 2. ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

---

### 2.1. ЗАКОН ИНЕРЦИИ

В отличие от кинематики, динамика вскрывает не только причину движения, но и объясняет характер того или иного движения материальной точки. В основе нерелятивистской механики лежат законы Ньютона. Динамика устанавливает связь между взаимодействием тел и их движением. Выясним на простых опытах причину возникновения и изменения движения. Пусть на горизонтальном столе находится неподвижный стальной шарик. Этот шарик придёт в движение, если на него подействовать рукой или магнитом. Следовательно, причиной возникновения движения является воздействие на тело других тел. Пусть стальной шарик движется по столу. Изменить движение шарика можно с помощью удара рукой или действием магнита. Очевидно, что причиной изменения движения, например, причиной изменения направления движения шарика также является взаимодействие тел. Возникновение движения тела и его изменение всегда связано с изменением скорости тела по величине и направлению, т.е. с возникновением ускорения. Взаимодействие тел в физике принято характеризовать *силой*. Таким образом, можно прийти к выводу: *силы, действующие на материальную точку, приводят к изменению величины и направления вектора скорости этой точки, т.е. к появлению ускорения.*

Причину движения пытались выяснить учёные глубокой древности. Аристотель (384 – 322 гг. до н.э.) считал, что действие посторонних тел на данное тело необходимо для поддержания скорости тела неизменной. Например, повозка движется, если на неё действует сила со стороны лошади. Аристотель не знал о существовании сил трения и сил сопротивления, которые компенсируют силу тяги лошади. Он не мог объяснить причину движения стрелы, пущенной из лука. Стрела продолжает движение в отсутствие воздействия тетевы.

Проблема движения стала актуальной в средние века, когда появилось огнестрельное оружие, и нужно было объяснить движение артиллерийских снарядов. С появлением гелиоцентрической системы Коперника требовалось объяснение причин движения планет Солнечной системы. Чтобы выяснить причину движения, необходимо отвлечься от внешних воздействий. В условиях лабораторной системы отсчёта всегда присутствуют две силы – сила тяжести и сила трения. Если рассматривать горизонтальное движение, например, шарика, то сила тяжести будет компенсироваться силой реакции. Будем уменьшать силу трения. Шарик, приведённый в движение по песчаной дорожке, проходит небольшое расстояние и останавливается. Тот же ша-

рик, приведённый в движение, на гладком льду движется долго и проходит большое расстояние. Если бы удалось полностью удалить трение, то шарик смог бы двигаться равномерно и прямолинейно бесконечно долго. Этот мысленный эксперимент привёл Галилея к идее *инерционного движения*, т.е. движению по инерции без взаимодействия с другими телами. То, что это положение Галилея противоречит учению Аристотеля, привело Ньютона к необходимости формулировки первого закона динамики или закона инерции: *существуют такие системы отсчёта, в которых всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие других тел не изменит это состояние.*

Состояние покоя означает, что скорость тела равна нулю ( $\vec{v} = 0$ ): состояние равномерного прямолинейного движения означает, что вектор скорости не изменяется по величине и направлению ( $\vec{v} = \text{const}$ ). Следовательно, если на материальную точку силы не действуют или

их действие компенсируется  $\left( \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = 0 \right)$ , то скорость точки  $\vec{v} = 0$  или

$\vec{v} = \text{const}$ , т.е. ускорение точки  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ , и тело движется по инерции

равномерно и прямолинейно. Действие сил на материальную точку приводит к изменению величины и направления вектора скорости. По инерции движутся планеты Солнечной системы и искусственные спутники Земли.

Первый закон Ньютона справедлив лишь в так называемых *инерциальных системах отсчёта*. Введём понятие *изолированной материальной точки*, под которой понимается точка, не взаимодействующая с другими телами, или когда силы, действующие на точку, взаимно уравновешиваются (компенсируются). Система отсчёта называется *инерциальной*, если *изолированная точка, находящаяся в ней, сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения*. В первом приближении лабораторную систему отсчёта будем считать инерциальной. Рассмотрим систему отсчёта, связанную с вагоном, на горизонтальном полу которого имеется неподвижный шарик. Если вагон будет двигаться с ускорением, то шарик без всякого взаимодействия с другими телами придёт в движение, которое противоположно направлению ускоренного движения вагона. Другими словами, шарик как *изолированная материальная точка не сохраняет состояние покоя в системе отсчёта, связанной с вагоном, который движется с ускорением*. Первый закон Ньютона не выполняется. Таким образом, *система отсчёта, которая движется относительно лабораторной системы отсчёта прямолинейно с ускорением, будет неинерциальной.*

Рассмотрим ещё один пример. Пусть вагон с шариком движется равномерно по горизонтальному участку, но по криволинейному пути. В системе отсчёта, связанной с данным вагоном, шарик снова придёт в движение поперёк вагона без всякого взаимодействия с другими телами. Другими словами, *система отсчёта, которая вращается относительно лабораторной системы отсчёта, также является неинерциальной*. Отсюда следует важный вывод: лабораторная система отсчёта, которая вращается вследствие суточного движения Земли, строго говоря, не является инерциальной. Найдём ускорение, которое приобретают тела, находящиеся на экваторе Земли вследствие её суточного вращения

$$a_m = \omega^2 R = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 R,$$

где  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  – угловая скорость вращения Земли.  $R$  – радиус Земли.

Учитывая, что  $T = 8,6 \cdot 10^4$  с;  $R = 6,4 \cdot 10^8$  м, найдём  $a_m = 3,4$  см/с<sup>2</sup>. Ускорение тел на широте  $\varphi$  будет равно  $a = a_m \cos \varphi$ . Если в эксперименте можно пренебречь ускорением тел вследствие суточного вращения Земли, то лабораторную систему отсчёта можно считать инерциальной.

Возьмём систему отсчёта, связанную с Солнцем. Эта система часто называется гелиоцентрической или коперниковой. Солнце входит в галактику, которая также вращается. Солнце находится на расстоянии  $R = 3 \cdot 10^{22}$  см от центра галактики и движется со скоростью  $v = 3 \cdot 10^7$  см/с. Следовательно тела, находящиеся в коперниковой системе, без всякого взаимодействия с другими телами, имеют ускорение

$$a = \frac{v^2}{R} \approx 3 \cdot 10^{-8} \text{ см/с}^2. \text{ Эта величина столь мала, что ею можно пренеб-}$$

речь. Отсюда вывод: *гелиоцентрическая или коперникова система отсчёта с высокой степенью точности является инерциальной системой отсчёта*. Далее будет показано, что любая система отсчёта, которая движется равномерно и прямолинейно относительно коперниковой системы отсчёта, является также инерциальной. В этом состоит *принцип относительности Галилея* (см. разд. 2.6).

## 2.2. СИЛЫ И МАССА ТЕЛ

*Сила, как физическая величина, является мерой воздействия одних тел на другие*. В механике силы принято подразделять на два класса: силы, которые возникают при непосредственном контакте тел или

частей одного и того же тела (силы трения, силы упругости), и силы, действие которых проявляется на расстоянии (гравитационные, электростатические, магнитные). Сила характеризуется числовым значением или модулем, точкой приложения и направлением. Точка приложения силы и её направление определяют линию действия силы.

На рисунке 2.1 показана сила  $\vec{F}$ , приложенная в точке  $A$ , длина отрезка  $AB$  в соответствующем масштабе равна модулю силы, точка  $B$  называется концом силы; у конца силы ставится стрелка, указывающая направление действия силы. Прямая  $MN$  называется линией действия силы. Силу можно переносить по линии действия силы, если она действует на абсолютно твёрдое тело. Для измерения модуля силы её сравнивают с некоторой силой, выбранной в качестве единицы. В международной системе единиц измерения физических величин (СИ) за единицу силы принят Ньютон (Н).

Так как сила – векторная величина, то её можно задать через её проекции на оси прямоугольной системы координат и точку приложения. Если единичные векторы (орты) осей  $x, y, z$  обозначить через  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  (рис. 2.21), то сила  $\vec{F}$  определится точкой приложения и равенством

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}, \quad (2.2.1)$$

где  $F_x, F_y, F_z$  – проекции силы  $\vec{F}$  на соответствующие координатные оси.

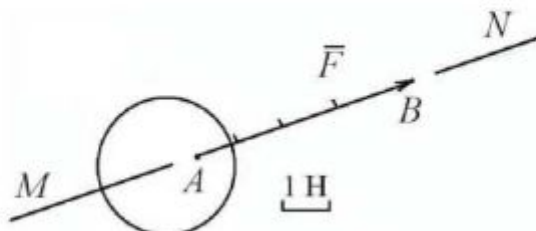


Рис. 2.1

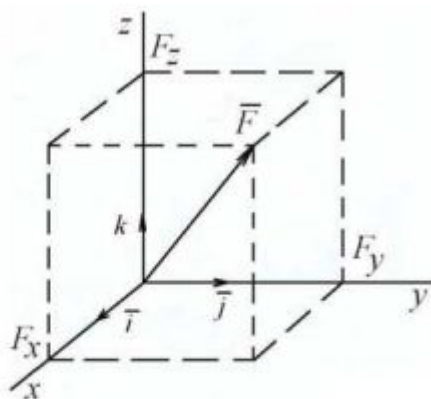


Рис. 2.2

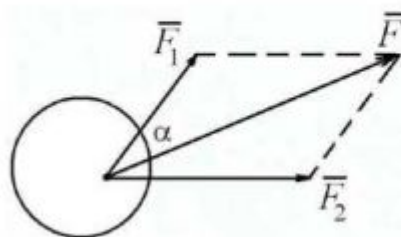


Рис. 2.3

Две силы, приложенные к одной точке твёрдого тела, можно заменить одной *равнодействующей силой* (рис. 2.3), приложенной в той же точке и равной их *геометрической сумме*. Отсюда вытекают два обстоятельства. Во-первых, две силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  имеют равнодействующую, которая эквивалентна одной силе

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad (2.2.2)$$

во-вторых, полностью определяются точка приложения, модуль и направление равнодействующей силы  $\vec{F}$ . Другими словами, равнодействующую  $\vec{F}$  можно построить как диагональ параллелограмма со сторонами, совпадающими с векторами  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ . Модуль, т.е. величина равнодействующей, определяется равенством

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}, \quad (2.2.3)$$

где  $\alpha$  – угол между данными векторами  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ . В частных случаях: при  $\alpha = 0$  получим  $F = F_1 + F_2$ ; при  $\alpha = 180^\circ$  –  $F = |F_1 - F_2|$ ; при  $\alpha = 90^\circ$  –  $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ . Геометрическое сложение сил позволяет переходить от нескольких сил к одной силе. Справедливо и обратное утверждение: любую силу  $\vec{F}$  можно разложить на две или несколько сил. Задавая, например, два направления, которые лежат с  $\vec{F}$  в одной плоскости, можно построить параллелограмм, у которого диагональ изображает силу  $\vec{F}$ . Тогда силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , направленные по сторонам параллелограмма, будут представлять новую систему сил, которая эквивалентна силе  $\vec{F}$ .

Для сравнения двух одинаково направленных сил можно воспользоваться вызываемыми ими деформациями одного и того же упругого тела. На этом принципе основаны известные из курса средней школы пружинные весы и динамометры. При пользовании таким динамометром предполагается, что численное значение измеряемой силы  $\vec{F}$ , действующей вдоль оси пружины, пропорционально величине  $x$ , вызываемой ею деформации пружины

$$F = kx, \quad (2.2.4)$$

где  $k$  – так называемый коэффициент упругости пружины или жёсткость. Если зависимость (2.2.4) неверна, то измерять силы с помощью пружинного динамометра нельзя, так как при  $k \neq \text{const}$  динамометр невозможно проградуировать. Опыт показывает, что при достаточно малых деформациях  $x$ , т.е. при действии на пружину не слишком больших сил  $\vec{F}$ , соотношение (2.2.4) выполняется с большой степенью точности.

Опыт показывает, что даже если нет сил трения и сопротивления, всякое тело оказывает противодействие при попытке привести его в движение. Любое тело оказывает противодействие и при попытке изменить величину и направление скорости. Привести в движение теннисный мяч и изменить его скорость легче, чем для футбольного мяча или для более тяжелого тела. Свойство тел сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется *инертностью*. *Масса является мерой инертности тел при поступательном движении*. Из двух взаимодействующих тел более инертно то, которое меньше изменяет свою скорость, приобретает меньшее отклонение от состояния покоя или равномерного прямолинейного движения. Пусть, например, два шара (деревянный и металлический) равного объёма соединены деформированной пружиной и удерживаются нитью. При пережигании нити деревянный шар приобретает большую скорость, чем металлический, испытывает большее ускорение, т.е. деревянный шар менее инертен, чем металлический. Измерить массу тела, значит сравнить его инертность с инертностью эталона, принятого за единицу массы. За единицу массы принят килограмм массы, равный массе эталона, сделанного из сплава иридия и платины.

Для макроскопических тел масса обладает свойством аддитивности. Если  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$  – массы частей некоторого объекта, то масса

единого тела  $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{k=1}^n m_k$ . В этом заключается закон

сохранения массы. Однако этот закон нарушается на микрокоспическом уровне, например, в ядерных реакциях, где масса выступает как мера энергии.

В механике Ньютона считается, что масса не зависит от системы отсчёта, в которой она измеряется. Однако согласно выводам специальной теории относительности, масса зависит от скорости  $\bar{v}$  системы отсчёта

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.2.5)$$

где  $m_0$  – масса покоя частицы, измеренная в системе отсчёта относительно которой частица покоится;  $m$  – релятивистская масса, т.е. масса частицы в системе отсчёта, по отношению к которой частица движется;  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с – скорость света

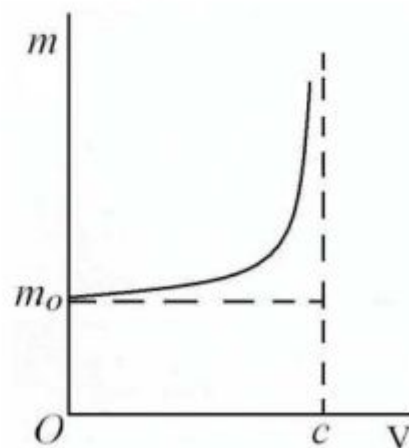


Рис. 2.4



в вакууме. Отличие масс  $m$  и  $m_0$  становится заметной лишь при скоростях  $\bar{v}$ , сравнимых со скоростью света  $c$  (рис. 2.4).

Масса также является мерой гравитационного взаимодействия тел массами  $m_1$  и  $m_2$ , находящимися на расстоянии  $r$  друг от друга

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.2.6)$$

где  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Нм}^2}{\text{кг}^2}$  – гравитационная постоянная.

Эксперименты показывают, что инертная и гравитационные массы для любого тела совпадают.

### 2.3. ВТОРОЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

Второй закон устанавливает связь между взаимодействием тел и изменением их поступательного движения. Поэтому он является основным законом динамики поступательного движения. Второй закон Ньютона может быть обоснован экспериментально для инерциальных систем отсчёта.

Опыт 1. На гладкой горизонтальной поверхности находится тележка, способная перемещаться по этой поверхности с малым трением. Лабораторную систему отсчёта считаем инерциальной. Приложим к тележке горизонтально направленную силу  $\bar{F}$ , измеряемую с помощью динамометра (рис. 2.5).

Опыт показывает, что под действием силы  $\bar{F}$  тележка приходит в равноускоренное движение. Ускорение  $\bar{a}$  можно найти, измеряя пути, проходимые тележкой за равные промежутки времени. Результаты опыта приводят к следующим выводам:

а) для данной тележки отношение величины силы к величине ускорения неизменно, т.е. ускорение прямо пропорционально модулю силы;

б) во всех случаях направление ускорения совпадает с направлением приложенной силы.

Опыт 2. Положим на тележку какой-либо груз и найдём ускорение, с которым будет двигаться тележка под действием постоянной силы  $\bar{F}_1$ . Опыт проведём несколько раз, изменяя массу груза. Результаты опыта приводят к следующим выводам:

а) при увеличении массы груза ускорение, приобретаемое тележкой под действием одной и той же силы  $\bar{F}_1$ , уменьшается;

б) отношение величины силы к величине ускорения всегда пропорционально сумме масс тележки и груза. Тележку следует рассматривать как материальную точку, движущуюся поступательно.

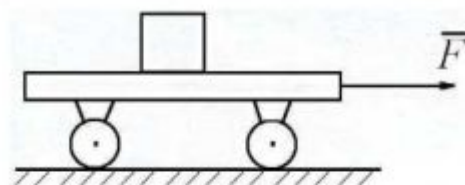


Рис. 2.5

Второй закон Ньютона можно сформулировать следующим образом: *ускорение, приобретаемое материальной точкой в инерциальной системе отсчёта, прямо пропорционально действующей на неё силе и обратно пропорционально массе этого тела; по направлению ускорение совпадает с вектором силы*

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad (2.3.1)$$

где  $\vec{F}$  – сила, действующая на точку;  $m$  – масса тела. Второй закон Ньютона, записанный в виде формулы (2.3.1), справедлив лишь при малых скоростях движения по сравнению со скоростью света ( $v \ll c$ ). В этом случае масса тела считается постоянной величиной.

Учитывая, что  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ , второй закон Ньютона можно записать в другой форме

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ или } \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}). \quad (2.3.2)$$

Вектор  $\vec{p} = m\vec{v}$  называется *импульсом* или *количеством движения* материальной точки, а  $d\vec{p} = d(m\vec{v})$  представляет собою элементарное изменение вектора импульса. В отличие от ускорения и скорости, импульс является характеристикой движущейся материальной точки, отражающей не только кинематическую меру его движения (скорость), но и его важнейшее динамическое свойство (массу).

Таким образом, второй закон Ньютона приобретает следующую математическую форму:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (2.3.3)$$

т.е. *производная по времени от вектора импульса материальной точки равна вектору силы, действующей на эту точку*. Этот вывод часто называют теоремой об изменении импульса материальной точки.

Перепишем уравнение (2.3.2) в следующем виде

$$d(m\vec{v}) = \vec{F} dt, \quad (2.3.4)$$

т.е. действие силы на материальную точку в течение некоторого времени всегда приводит к изменению её импульса. Вектор  $\overline{F} dt$  называется *элементарным импульсом силы* за малый промежуток времени  $dt$ . Уравнение (2.3.4) является ещё одним выражением основного закона динамики точки: *элементарное изменение импульса материальной точки равно элементарному импульсу действующей на неё силы.*

Пусть на материальную точку действует постоянная сила  $\overline{F} = \text{const}$ . Допустим, что в момент времени  $t_1$  материальная точка имела скорость  $\overline{v}_1$ , а в момент времени  $t_2$  – скорость  $\overline{v}_2$ . Проинтегрировав выражение (2.3.4)

$$m \int_{\overline{v}_1}^{\overline{v}_2} d\overline{v} = \overline{F} \int_{t_1}^{t_2} dt,$$

получим  $m(\overline{v}_2 - \overline{v}_1) = \overline{F}(t_2 - t_1)$  или

$$m\overline{v}_2 - m\overline{v}_1 = \overline{F}(t_2 - t_1), \quad (2.3.5)$$

т.е. *изменение импульса материальной точки под действием постоянной силы равно изменению импульса силы за конечный промежуток времени.*

Если сила, действующая на материальную точку,  $\overline{F} = 0$ , то  $\frac{d\overline{p}}{dt} = 0$  и, следовательно,  $\overline{p} = m\overline{v} = \text{const}$ , точка движется равномерно и прямолинейно по инерции или она покоится  $\overline{p} = m\overline{v} = 0$ ;  $\overline{v} = 0$ . Другими словами, первый закон Ньютона является частным случаем второго закона Ньютона.

Как показывает опыт, при действии на материальную точку нескольких сил справедлив *принцип независимости действия сил*: если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то каждая из этих сил сообщает материальной точке ускорение, определяемое вторым законом Ньютона так, как если бы других сил не было. Запишем для каждой силы закон Ньютона, т.е.

$$m\overline{a}_k = \overline{F}_k, \quad (2.3.6)$$

где  $k = 1; 2; 3, \dots, n$  – номер силы, действующей на точку массой  $m$ . Сложив полученные выражения (2.3.6), получим

$$m \sum_{k=1}^n \bar{a}_k = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \quad \text{или} \quad m\bar{a} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k = \bar{F}, \quad (2.3.7)$$

где  $\bar{a} = \sum_{k=1}^n \bar{a}_k$  – ускорение материальной точки, возникающее под дей-

ствием  $n$  сил одновременно. Сила  $\bar{F} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$  называется *главным вектором системы сил*  $\bar{F}_1; \bar{F}_2; \dots; \bar{F}_n$ , а также *равнодействующей* или *результатирующей*.

Второй закон Ньютона, записанный в обычной форме (2.3.1), справедлив лишь при малых скоростях по отношению к скорости света ( $c = 3 \cdot 10^8$  м/с). При этом опыт показывает, что отношение  $\frac{F}{a}$  есть по-

стоянная величина, которая характеризует массу материальной точки. Из опытов по ускорению, например, электронов следует, что при скоростях, близких к скорости света, отношение  $\frac{F}{a}$  не является постоян-

ной величиной. Это отношение зависит от скорости. Поэтому при скоростях, близких к скорости света, следует различать массу  $m_0$  частицы по отношению к системе отсчёта, относительно которой она покоится ( $m_0$  – масса покоя) и массу  $m$  частицы по отношению к системе отсчёта, относительно которой частица движется ( $m$  – релятивистская масса). Эти величины связаны соотношением

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.3.8)$$

где  $v$  – скорость движения частицы. Произведение релятивистской массы материальной точки на её скорость называется *релятивистским импульсом*

$$\bar{P} = m\bar{v} = \frac{m_0\bar{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.3.9)$$

Второй закон Ньютона, записанный в форме (2.3.3), будет справедлив и при скоростях, близких к скорости света, если под величиной  $\bar{P}$  понимать релятивистский импульс материальной точки, т.е.

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{m_0 \bar{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] = \bar{F}. \quad (2.3.10)$$

## 2.4. ТРЕТИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

Этот закон, как и предыдущие два, является обобщением большого числа опытных фактов. Всякое действие тел друг на друга носит характер взаимодействия: если тело  $M_1$  действует на тело  $M_2$  с некоторой силой  $\bar{F}_{21}$ , то и тело  $M_2$ , в свою очередь, действует на тело  $M_1$  с силой  $\bar{F}_{12}$ . Например, полосовой магнит  $M_1$  и стальной шарик  $M_2$  притягиваются друг к другу с силами, равными по величине и противоположными по направлению, т.е.  $\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$ . Об этом можно судить по показаниям пружинных динамометров  $D_1$  и  $D_2$  (рис. 2.6).

Приведём ещё один пример. Пусть между шариками массами  $m_1$  и  $m_2$  находится сжатая пружина, и они удерживаются в положении равновесия нитью на гладкой поверхности (рис. 2.7). После пережигания нити, под действием сил упругости, тела приобретут ускорения, которые оказываются обратно пропорциональными массам тел

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Отсюда следует равенство  $m_1 a_1 = m_2 a_2$ , а следовательно, равенство модулей сил  $F_{12} = F_{21}$  или в векторной форме

$$\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}. \quad (2.4.1)$$

Сам Ньютон писал: «Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе – действия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны». Между силой действия и противодействия нет никакой разницы и любую из них можно причислять как к действию, так и противодействию. Так как эти силы приложены к разным телам, то они не могут уравновеси-

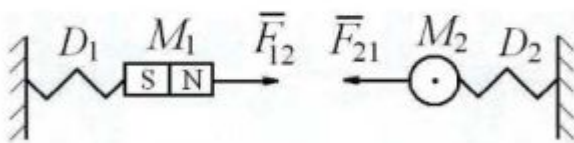


Рис. 2.6



Рис. 2.7

вать друг друга. Третий закон Ньютона можно сформулировать следующим образом: *всякое действие тел друг на друга носит характер взаимодействия; силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, всегда равны по величине, действуют вдоль одной прямой и направлены в противоположные стороны*. Содержание третьего закона математически записывается выражением (2.4.1). В механике Ньютона считается, что передача взаимодействия тел от одного к другому передаётся с бесконечно большой скоростью, т.е. мгновенно. Согласно следствиям специальной теории относительности скорость передачи взаимодействий тел не может быть больше скорости света (см. разд. 2.8). Если это принять во внимание, то данная выше формулировка третьего закона будет не совсем справедливой. Пусть, например, имеются две галактики 1 и 2, которые взаимодействуют с силами  $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_{21}$  (рис. 2.8).

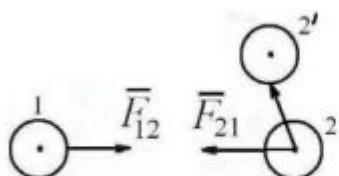


Рис. 2.8

Пусть вторая галактика переместилась за время  $\Delta t$  в положение  $2'$ . Но за это время  $\Delta t$  гравитационное воздействие не успело распространиться до первой галактики, и сила  $\vec{F}_{12}$  осталась прежней, т.е. имеет прежнее направление, которое не совпадает с линией, соединяющей точки 1 и  $2'$ .

## 2.5. СИЛА ТЯЖЕСТИ И ВЕС ТЕЛ

Под *силой тяжести* понимается сила, с которой притягивается любое тело к Земле. Так как под действием силы притяжения к Земле все тела падают с одинаковым ускорением  $g_0$ , то в системе отсчёта, связанной с Землей, на всякое тело массы  $m$  действует сила

$$F = mg_0. \quad (2.5.1)$$

В данном случае мы считаем лабораторную систему отсчёта инерциальной. Вращение Земли учтём позже. С другой стороны, силу тяжести, действующую на тело массы  $m$ , можно рассчитать по закону всемирного тяготения

$$F = G \frac{Mm}{R_0^2}, \quad (2.5.2)$$

где  $M$  – масса Земли;  $R_0$  – радиус Земли.

Сравнивая формулы (2.5.1) и (2.5.2), легко видеть, что ускорение свободного падения может быть рассчитано по формуле

$$g_0 = G \frac{M}{R_0^2}. \quad (2.5.3)$$

Из формулы (2.5.1) видно, что  $g_0 = \frac{F}{m}$ , т.е. ускорение свободного падения показывает, какая сила гравитации действует на тело единичной массы в данной точке гравитационного поля на поверхности Земли. Так как планета Земля представляет собой эллипсоид вращения, то ускорение свободного падения на полюсах  $g_{\text{п}}$  всегда больше, чем на экваторе  $g_{\text{э}}$ :  $g_{\text{п}} = 983 \text{ см/с}^2$ ,  $g_{\text{э}} = 981 \text{ см/с}^2$ . Другими словами, ускорение свободного падения и сила тяжести зависят от широты местности.

Если рассматриваемое тело находится на высоте  $h$  над поверхностью Земли, то сила тяжести, действующая на это тело массы  $m$ , равна

$$F = G \frac{Mm}{(R_0 + h)^2} \text{ или } F = G \frac{Mm}{r^2}, \quad (2.5.4)$$

где  $r = R_0 + h$  – расстояние от центра Земли до данного тела. Ускорение свободного падения на любой высоте  $h$  будет равно

$$g_n = \frac{F}{m} = G \frac{M}{(R_0 + h)^2} = G \frac{M}{r^2}. \quad (2.5.5)$$

Отсюда видно, что при увеличении  $h$  ускорение свободного падения уменьшается.

Представляет интерес исследовать, как изменяется ускорение свободного падения при движении по воображаемому каналу к центру Земли. Если тело массой  $m$  будет находиться от центра земного шара на расстоянии  $r$  ( $r < R_0$ ), то на него будет действовать сила притяжения только со стороны шара радиуса  $r$ . Масса  $M_r$  этого шара равна:

$$M_r = \rho \frac{4}{3} \pi r^3, \text{ где } \rho \text{ – плотность земного шара, которую мы для простоты считаем постоянной величиной. Сила взаимодействия в этом случае будет равна}$$

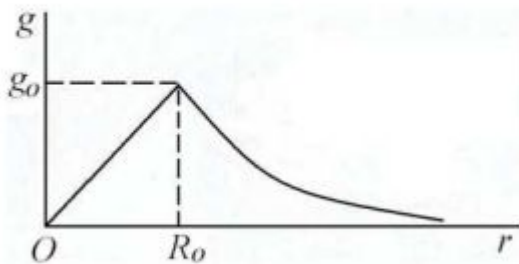


Рис. 2.9

$$F = G \frac{M_r m}{r^2} = \frac{4}{3} G \rho \pi m r.$$

Ускорение свободного падения на расстоянии  $r$  от центра Земли при  $r < R_0$  будет равно

$$g_r = \frac{F}{m} = \frac{4}{3} G \rho \pi r. \quad (2.5.6)$$

Отсюда видно, что ускорение внутри земного шара прямо пропорционально расстоянию от центра Земли при  $r=0$   $g_r=0$ . На рис. 2.9 показана зависимость ускорения свободного падения от расстояния  $r$  от центра Земли.

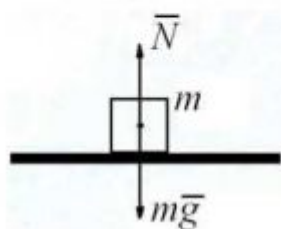


Рис. 2.10

Необходимо различать силу тяжести и вес тела. Будем считать лабораторную систему отсчёта инерциальной. На тело массы  $m$ , лежащее на поверхности (рис. 2.10), действует сила тяжести  $m\bar{g}$  и сила реакции  $\bar{N}$ . Реакциями называются силы, с которыми на данное тело действуют тела, ограничивающие движение рассматриваемого тела. Условие равновесия запишется в виде

$$\bar{N} + m\bar{g} = 0 \text{ или } \bar{N} = -m\bar{g}. \quad (2.5.7)$$

Аналогично, на рисунке 2.11 показаны силы, действующие на тело массы  $m$ , которое подвешено на нити. Условие равновесия:

$$\bar{T} + m\bar{g} = 0 \text{ или } \bar{T} = -m\bar{g}, \quad (2.5.8)$$

где  $\bar{T}$  – сила натяжения нити.

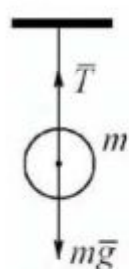


Рис. 2.11

*Весом тела называется сила  $\bar{P}$ , с которой данное тело  $m$  действует на подвес или опору.* По третьему закону Ньютона сила, с которой тело  $m$  действует на подвес или опору равна

$$\bar{P} = -\bar{N} \text{ или } \bar{P} = -\bar{T}. \quad (2.5.9)$$

По модулю вес равен

$$P = N = mg \text{ или } P = T = mg, \quad (2.5.10)$$

т.е. в рассмотренных случаях вес численно равен силе тяжести. Однако если опора или подвес будут двигаться с ускорением относительно Земли, то вес по модулю не будет равен силе тяжести. Рассмотрим несколько частных случаев.

1. На полу лифта находится человек массой  $m$ . Определим его вес, если лифт движется вверх с ускорением  $\bar{a}$ . Другими словами, найдём силу, с которой человек давит на пол лифта (рис. 2.12). Считая лабораторную систему отсчёта инерциальной, запишем основное уравнение динамики

$$m\bar{a} = \bar{N} + m\bar{g}, \quad (2.5.11)$$

где  $\bar{N}$  и  $m\bar{g}$  – силы, действующие на человека. При переходе к скалярной записи, следует учесть знаки всех векторов. В проекции на вертикальную ось  $x$  имеем

$$ma = N - mg.$$



Откуда найдём силу, с которой пол давит на человека

$$N = mg + ma = m(g + a). \quad (2.5.12)$$

Сила, с которой человек давит на пол согласно формулам (2.5.9) и (2.5.10), по модулю равна

$$P = m(g + a), \quad (2.5.13)$$

т.е. вес человека больше силы тяжести ( $P > mg$ ). Принято говорить, что человек испытывает *перегрузку*.

2. Найдём вес человека, если лифт движется вниз с замедлением (рис. 2.13). Основной закон динамики (2.5.11) в проекции на ось  $x$  имеет вид

$$ma = N - mg \text{ или } N = m(g + a).$$

В данном случае человек снова испытывает перегрузку, а его вес определится той же формулой (2.5.13). Таким образом, перегрузка возникает в двух случаях, когда лифт движется вверх с ускорением ( $a > 0$ ) и вниз с замедлением ( $a < 0$ ).

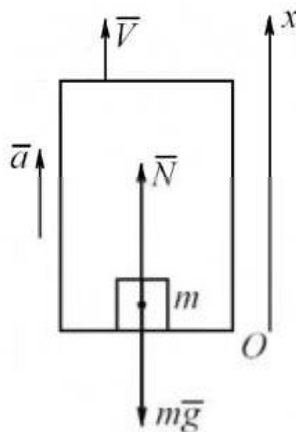


Рис. 2.12

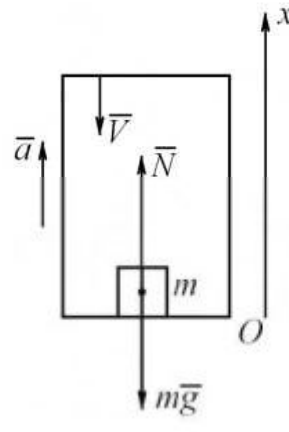


Рис. 2.13

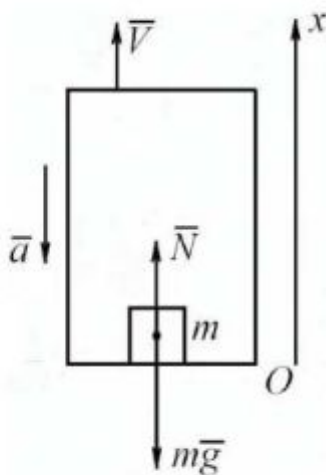


Рис. 2.14

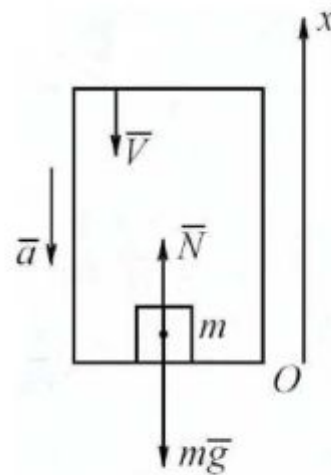


Рис. 2.15

3. Рассмотрим движение лифта вверх с замедлением (рис. 2.14). Второй закон Ньютона в проекции на ось  $x$  имеет вид

$$ma = mg - N.$$

Откуда имеем

$$N = mg - ma = m(g - a).$$

Другими словами, вес человека равен

$$P = m(g - a),$$

т.е. вес по модулю меньше силы тяжести ( $P < mg$ ). Если лифт будет двигаться вверх с замедлением  $|\bar{a}| = |\bar{g}|$ , то вес тела будет равен нулю, т.е.  $P = 0$ . В этом случае человек не оказывает никакого давления на пол лифта.

4. Пусть лифт движется вниз с ускорением  $\bar{a}$  (рис. 2.15). Основной закон динамики в проекции на ось  $x$  имеет вид

$$ma = mg - N.$$

Откуда получим вес

$$P = N = m(g - a), \text{ т.е. } P < mg.$$

Если лифт будет свободно падать с ускорением  $a = g$ , то вес тела  $P = 0$ . Таким образом, невесомость может возникать в двух случаях: при движении вверх замедленно ( $a = g$ ) и при движении вниз ускоренно ( $a = g$ ).

Понятие веса и невесомости удобно проиллюстрировать с помощью тайваньской игрушки, представляющей собой винтовую пружину или спираль из пластика. Важное свойство спирали – она имеет очень малый коэффициент жёсткости. Поэтому спираль под действием собственного веса легко деформируется. Для демонстрации наличия веса спирали подвесим её за один конец с помощью нити (рис. 2.16). В поле тяжести Земли спираль оказывается растянутой неравномерно: максимально в верхней части и минимально в её нижней части. Сила, с которой спираль действует на нить или подвес, определяет её вес  $P$ . Величина деформации спирали в её верхней части, с точностью до веса одного витка, служит мерой веса всей спирали. Легко видеть, что величина деформации спирали в её средней части в два раза меньше, чем в верхней части. Величина деформации спирали между витками под номерами  $N$  и  $N + 1$  (нумерация витков осуществляется снизу вверх) является мерой веса нижних  $N$  её витков. Таким



Рис. 2.16

образом. по величине деформации спирали в различных её частях можно качественно судить как о весе всей спирали, так и о весе любой её части.

Для демонстрации перегрузки (увеличение веса) достаточно нить, удерживающую спираль, привести в движение вверх с некоторым ускорением. При этом отмечается увеличение расстояний между всеми витками спирали, что говорит об увеличении веса как всей спирали, так и её любой части. Если нить, удерживающую спираль, привести в ускоренное движение вниз, то расстояние между витками спирали уменьшается, что говорит об уменьшении веса.

Для демонстрации невесомости пережигают нить, на которой висела деформированная пружина, и наблюдают за её падением. Через малый промежуток времени  $\tau$  от начала падения деформации в спирали исчезают полностью и в дальнейшем она падает с ускорением  $a = g$ , находясь в недеформированном состоянии. Отсутствие деформации в пружине при её свободном падении говорит о том, что пружина, как и её любая часть, не имеет веса.

Невесомость можно наблюдать не только при падении пружины. Для этого подбрасывают пружину вверх. Независимо от того, была деформирована пружина или нет, в начальный момент при бросании она движется вверх с отрицательным ускорением  $a = -g$  и вниз с положительным ускорением  $a = g$ , находясь в недеформированном состоянии. Другими словами, при свободном движении вверх или вниз вес тела равен нулю.

## 2.6. МЕХАНИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Из данного в разделе 2.1 определения инерциальной системы отсчёта следует, что во всех инерциальных системах отсчёта ускорение изолированной материальной точки должно быть равно нулю. Это позволяет установить, как должна двигаться относительно инерциальной системы какая-либо другая система отсчёта, чтобы она также была инерциальной. Опыт показывает, что две инерциальные системы отсчёта могут двигаться друг относительно друга только поступательно и притом равномерно и прямолинейно.

Рассмотрим две системы отсчёта: инерциальную  $XYZ$ , которую условно будем считать неподвижной, и подвижную систему  $X'Y'Z'$ , скорость поступательного движения которой  $\bar{v}_0$  постоянна по величине и направлению. Для упрощения задачи, будем считать, что в начальный момент времени  $t = 0$  начала  $O$  и  $O'$  обеих систем координат и соответствующие оси совпадают. Взаимное расположение этих систем в произвольный момент времени  $t$  показано на рис. 2.17. Ско-

рость  $\bar{v}_0$  направлена вдоль прямой  $OO'$ , а радиус-вектор, проведенный из  $O$  в  $O'$ ,  $\bar{r}_0 = \bar{v}_0 t$ . Положение произвольной материальной точки  $M$  в неподвижной и подвижной системах отсчёта определяется радиус-векторами  $\bar{r}$  и  $\bar{r}'$ , причём

$$\bar{r} = \bar{r}' + \bar{r}_0 = \bar{r}' + \bar{v}_0 t. \quad (2.6.1)$$

В проекциях на оси координат это векторное равенство записывается в следующем виде, называемом *преобразованием координат Галилея*

$$\left. \begin{aligned} X &= X' + v_{0x} t \\ Y &= Y' + v_{0y} t \\ Z &= Z' + v_{0z} t \end{aligned} \right\}. \quad (2.6.2)$$

В классической механике принимается, что ход времени не зависит от относительного движения систем отсчёта. Поэтому систему (2.6.2) можно дополнить ещё одним уравнением

$$t = t'. \quad (2.6.3)$$

В классической механике Ньютона время носит абсолютный характер. Темп хода времени одинаков во всех инерциальных системах отсчёта. Если, например, какие-то события происходят в данной инерциальной системе отсчёта одновременно, то они одновременны во всех инерциальных системах отсчёта. В классической механике считается, что пространство абсолютно. Пусть, например, в системе отсчёта  $XYZ$  расстояние между двумя точками равно

$$R = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}. \quad (2.6.4)$$

Воспользовавшись преобразованиями Галилея (2.6.2), найдём расстояние  $R'$  между теми же точками в системе  $X'Y'Z'$ , которое совпадает с прежним значением  $R' = R$ .

Дифференцируя уравнение (2.6.1) по времени, и учитывая, что  $\bar{v}_0 = \text{const}$ , найдём соотношение между скоростями материальной точки по отношению к различным инерциальным системам отсчёта

$$\bar{v} = \bar{v}' + \bar{v}_0. \quad (2.6.5)$$

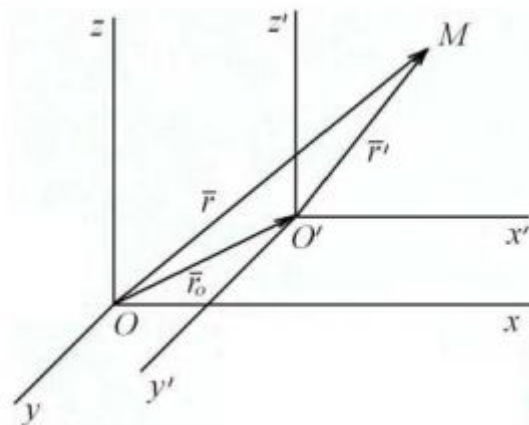


Рис. 2.17

Данное соотношение принято называть *классическим законом сложения скоростей*. Скорость материальной точки по отношению к различным системам отсчёта различна. Так как инерциальные системы отсчёта равноценны, то никакая из них не имеет преимуществ и, следовательно, скорости нельзя придать абсолютный характер.

Продифференцируем выражение (2.6.5) по времени, считая, что  $\bar{v}_0 = \text{const}$

$$\bar{a} = \bar{a}' . \quad (2.6.6)$$

Ускорение материальной точки одинаково во всех инерциальных системах отсчёта. Если материальная точка не подвержена действию других тел, то  $\bar{a} = 0$ . Поскольку  $\bar{a}'$  также равно нулю, рассматриваемая нами подвижная система действительно является инерциальной – изолированная точка либо движется относительно неё равномерно и прямолинейно, либо покоится.

Как показывает опыт, силы, действующие на материальную точку со стороны других тел, одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта, т.е.

$$\bar{F} = \bar{F}' . \quad (2.6.7)$$

Из соотношений (2.6.6) и (2.6.7) для инерциальных систем отсчёта следует, что  $\frac{F}{a} = \frac{F'}{a'}$ , т.е.

$$m = m' . \quad (2.6.8)$$

Таким образом, *уравнения Ньютона для материальной точки, а также для произвольных систем материальных точек одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта*, т.е. инвариантны по отношению к преобразованиям Галилея. Из данного принципа следует, что равномерное и прямолинейное движение системы отсчёта как целого, не влияет на ход протекающих в ней механических процессов. Следовательно, никакими механическими опытами, проведёнными внутри инерциальной системы отсчёта, нельзя обнаружить, движется она равномерно и прямолинейно или покоится.

## 2.7. ОПЫТ МАЙКЕЛЬСОНА И ПОСТУЛАТЫ ЭЙНШТЕЙНА

На рубеже XVIII и XIX вв. встал вопрос о справедливости принципа относительности Галилея для немеханических процессов, например, электромагнитных или оптических. Возможно, что оптические явления протекают неодинаково в различных инерциальных системах отсчёта и тогда с помощью этих опытов, проведённых внутри системы отсчёта, можно определить, движется она равномерно и прямолинейно или покоится. Тогда скорости движения тел можно придать абсолютный смысл по отношению к этой преимущественной системе отсчёта.

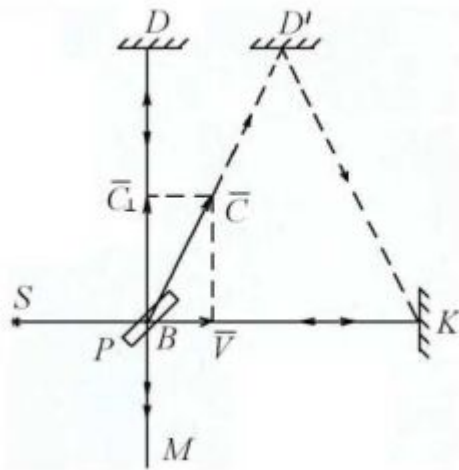


Рис. 2.18

Впервые Майкельсоном в 1881 г. была сделана попытка определить абсолютную скорость Земли в мировом пространстве. Идея опыта Майкельсона состояла в сравнении времени прохождения светом двух путей, один из которых совпадает с направлением движения Земли по орбите вокруг Солнца, а другой – ему перпендикулярен. При этом считалось, что мировое пространство заполнено неподвижным «эфиром», а распространение света рассматривается как процесс распространения упругих колебаний в «эфире».

Для сравнения указанных промежутков времени Майкельсоном был использован специально сконструированный оптический интерферометр (рис. 2.18), он включал в себя: источник света  $S$ , два зеркала  $D$  и  $K$  и полупрозрачную пластину  $P$ , с помощью которой получают две когерентные волны, распространяющиеся по взаимно перпендикулярным направлениям. Волны, отражённые от зеркал  $D$  и  $K$ , снова проходят через полупрозрачную пластину и поступают в точку  $M$  экрана, где наблюдается интерференционная картина.

Пусть интерферометр вместе с Землей движется со скоростью  $\bar{v}$  в направлении плеча  $BK = l_1$ ,  $v \approx 30$  км/с – скорость орбитального движения Земли. Определим время, за которое свет пройдёт отрезок  $BK$ . Скорость света по отношению к интерферометру будет равна  $(c - v)$  и следовательно,  $t_{BK} = \frac{l_1}{c - v}$ , где  $c$  – скорость света в вакууме.

Аналогично, время, за которое свет пройдёт отрезок  $KB$ , будет равно  $t_{KB} = \frac{l_1}{c + v}$ . Полное время, затраченное светом на прохождение пути до зеркала  $K$  и обратно, равно

$$t_{\parallel} = t_{BK} + t_{KB} = l_1 \left( \frac{1}{c - v} + \frac{1}{c + v} \right) = \frac{2cl_1}{c^2 - v^2} = \frac{2l_1}{c \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}. \quad (2.7.1)$$

Учитывая, что  $\frac{v^2}{c^2}$  мало, то  $\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 + \frac{v^2}{c^2}$ . Следовательно, по-

лучим

$$t_{\perp} = \frac{2l_1}{c} \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (2.7.2)$$

Теперь рассчитаем время, необходимое для распространения света от точки  $B$  до зеркала  $D$ . Здесь следует учесть, что пока свет будет распространяться от  $B$  к  $D$ , зеркало  $D$  переместится по отношению к мировому «эфиру» в положение  $D'$ . Поэтому для определения времени прохождения пути  $BD$  необходимо разложить вектор скорости  $\vec{c}$  на составляющие  $\vec{c}_{\perp}$  и  $\vec{v}$ , причем  $c^2 = c_{\perp}^2 + v^2$ . Очевидно, что

$$t_{BD} = \frac{BD'}{c} = \frac{BD}{c_{\perp}}, \text{ т.е.}$$

$$t_{BD} = \frac{l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{l_2}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Так как время, затраченное светом на прохождение обратного пути точно такое же, получим

$$t_{\perp} = 2t_{BD} = \frac{2l_2}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.7.3)$$

Учитывая, что  $\frac{v^2}{c^2}$  мало, то можно считать, что

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}. \text{ Тогда получим}$$

$$t_{\perp} = \frac{2l_2}{c} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (2.7.4)$$

Следовательно, разность времени в прохождении светом двух взаимно перпендикулярных направлений равна

$$\Delta t_1 = t_{\parallel} - t_{\perp} = \frac{2l_1}{c} \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{2l_2}{c} \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} \right),$$

или

$$\Delta t_1 = \frac{2}{c} (l_1 - l_2) + \frac{2v^2}{c^3} \left( l_1 - \frac{l_2}{2} \right). \quad (2.7.5)$$

Так как для различных точек  $M$  наблюдения найденная разность времени будет различной, то в пространстве наблюдается определённый

ная неподвижная интерференционная картина когерентных волн. Чтобы определить скорость  $v$  Земли. Майкельсон повернул интерферометр на  $90^\circ$  так, что плечи меняются местами. Новая разность времени для света, очевидно, равна

$$\Delta t_2 = \frac{2}{c}(l_2 - l_1) + \frac{2v^2}{c^3} \left( l_2 - \frac{l_1}{2} \right). \quad (2.7.6)$$

Следовательно, полное изменение времени хода волн при повороте прибора на  $90^\circ$  равно

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{v^2}{c^3} (l_1 + l_2). \quad (2.7.7)$$

Так как  $\Delta t \neq 0$ , то поворот интерферометра на  $90^\circ$  должен был приводить к изменению интерференционной картины, т.е. и с движению. Зарегистрировать данное изменение времени хода световых волн не представляло труда, так как точность измерений была очень высокой. Она позволяла отметить разность хода света при скорости Земли в 1 км/с. хотя она примерно равна 30 км/с.

Однако эксперимент Майкельсона показал, что никакой разности во времени движения света по направлению движения Земли и по перпендикулярному направлению нет, т.е. *опыт Майкельсона дал отрицательный результат*. Другими словами, Майкельсоном была сделана попытка с помощью немеханического, т.е. оптического опыта, проведённого внутри инерциальной системы отсчёта, связанной с Землей, определить, движется ли она равномерно и прямолинейно или покоится. Однако обнаружить абсолютное движение Земли не удалось. Видимо, и с помощью немеханического опыта нельзя определить, движется инерциальная система отсчёта равномерно и прямолинейно или покоится.

Возникает вопрос – почему формула (2.7.7) указывает на возможность определения абсолютной скорости Земли? При выводе данной формулы мы предполагали существование неподвижного мирового «эфира» как некой среды и использовали классический закон сложения скоростей, который имеет, как оказалось, ограниченное применение.

Современной физикой установлено, что мирового «эфира» нет. Что же касается классического закона сложения скоростей, то он является следствием преобразований Галилея, которые также имеют ограниченную область применения. При выводе преобразований Галилея в неявном виде использовались два положения, которые казались настолько очевидными, что их даже мы не считали нужными обосновать: полагали, что время во всех инерциальных системах отсчёта протекает одинаково и что размеры тел во всех инерциальных системах отсчёта также одинаковы, т.е. пространство и время считались абсолютными.



В 1905 году А. Эйнштейн кардинальным образом пересмотрел существовавшие до сих пор представления о пространстве и времени в специальной теории относительности, которая называется релятивистской теорией. В её основу он положил два постулата, которые надёжно подкреплены экспериментально.

Первый постулат: *во всех инерциальных системах отсчёта не только механические, но и все другие явления природы протекают одинаково.* Это означает, что все инерциальные системы отсчёта равноправны и с помощью любого физического опыта, проведённого внутри системы, нельзя обнаружить, движется она равномерно и прямолинейно или покоится. Другими словами, Эйнштейн распространил механический принцип относительности Галилея на все явления природы. Поэтому первый постулат часто называют *принципом относительности Эйнштейна.*

Второй постулат: *во всех инерциальных системах отсчёта скорость света для вакуума одинакова и равна  $c = 2,997928 \cdot 10^8$  м/с и не зависит от скоростей источника и приёмника света.* Этот постулат часто называют *принципом постоянства скорости света.*

## 2.8. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА И ОСНОВНЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ НИХ

Принцип постоянства скорости света противоречит классическому закону сложения скоростей (2.6.5), который является следствием преобразований Галилея. Следовательно, в специальной теории относительности должны быть другие преобразования координат и времени.

Предположим, что новые преобразования отличаются от преобразований Галилея наличием множителя  $\gamma$ , т.е.

$$x' = \gamma(x - vt); \quad x = \gamma(x' + vt'). \quad (2.8.1)$$

Для определения значения множителя  $\gamma$  воспользуемся вторым постулатом Эйнштейна. Допустим, что в момент времени  $t = 0$ , когда начала координат совпадают, происходит излучение светового сигнала из начала координат. В произвольные моменты времени  $t$  и  $t'$  сигналы в обеих системах в силу постоянства скорости света будут доходить до точек сфер, координаты которых определяются, соответственно, равенствами

$$x = ct; \quad x' = ct'. \quad (2.8.2)$$

Из уравнений (2.8.1) имеем

$$xx' = \gamma^2(x - vt)(x' + vt').$$

Подставляя сюда формулы (2.8.2), найдём

$$c^2 t t' = \gamma^2 (ct - vt)(ct' + vt').$$

После преобразований

$$c^2 = \gamma^2 (c^2 - v^2).$$

Откуда найдём

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.8.3)$$

Подставляя это выражение в формулы (2.8.1), получаем новые преобразования координат

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.8.4)$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.8.5)$$

Для определения новых преобразований времени, выразим  $x'$  из формулы (2.8.5) и подставим в выражение (2.8.4). После математических преобразований найдём

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.8.6)$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.8.7)$$

Следует учесть, что при движении подвижной системы отсчёта относительно неподвижной вдоль оси  $x$  имеем

$$y' = y; \quad z' = z. \quad (2.8.8)$$

$$y = y'; \quad z = z'. \quad (2.8.9)$$

Эти новые преобразования (2.8.4) – (2.8.9) координат и времени впервые были получены Лоренцем и носят его имя. Лоренц показал, что уравнения электродинамики не инвариантны относительно преобразований Галилея, что и побудило его к нахождению новых преобразований. Следует заметить, что если скорость подвижной системы от-

счёта  $v$  значительно меньше скорости света  $c$ , преобразования Лоренца превращаются в преобразования Галилея. Это говорит о том, что при  $v \ll c$  могут быть использованы законы механики Ньютона. Приняв преобразования Лоренца, следует указать на те следствия, которые вытекают из них.

1. *Предельность скорости передачи взаимодействий.* В классической механике считалось, что тела или микрообъекты могут двигаться с любыми сколь угодно большими скоростями, вплоть до  $v = \infty$ . Одна-

ко из преобразований Лоренца видно, что при  $v > c$  значение  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  будет мнимым числом и величины  $x, t$  теряют физический смысл. Следовательно, передача любых взаимодействий между телами не может быть осуществлена быстрее скорости света в вакууме.

2. *Изменение размеров движущихся тел.* Пусть некоторое тело, например, стержень, движется вместе с инерциальной системой отсчёта  $x'y'z'$  и имеет в этой системе длину  $l_0 = x'_2 - x'_1$ , которая называется *собственной длиной* (рис. 2.19). Для определения длины стержня  $l$  в системе отсчёта  $xuz$  необходимо найти координаты  $x_1$  и  $x_2$ , воспользовавшись преобразованиями Лоренца (2.8.4), т.е.

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Откуда находим

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{или} \quad l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (2.8.10)$$

где  $l = x_2 - x_1$  – искомая длина стержня. Так как  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1$ , то  $l < l_0$ .

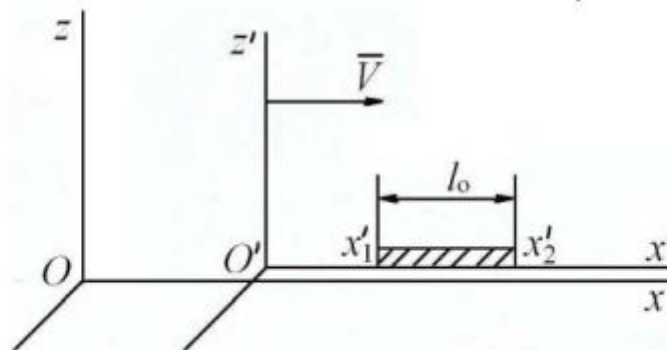


Рис. 2.19

Следовательно, линейный размер тела, движущегося относительно неподвижной системы отсчёта со скоростью, близкой к  $c$ , уменьшается в направлении движения в  $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$  раз. При этом поперечные

размеры не изменяются. Кстати отметим, если учесть сокращение одного из плеч интерферометра Майкельсона, то не должно наблюдаться различие во времени движения светового сигнала в двух взаимно перпендикулярных направлениях, что и объясняет отрицательный результат этого опыта.

3. *Изменение темпа хода времени.* Пусть в некоторой точке  $x'$ , движущейся инерциальной системы отсчёта  $x'y'z'$ , произошли два события в моменты времени  $t'_1$  и  $t'_2$ . Промежуток времени между этими событиями в движущейся системе отсчёта равен  $\Delta t'_0 = t'_2 - t'_1$ , который называется *собственным временем*. Для нахождения промежутка времени  $\Delta t = t_2 - t_1$  между теми же событиями в системе  $xyz$  следует учесть следующее. Если в системе отсчёта  $x'y'z'$  события происходят в одной точке, то в системе  $xyz$  эти события происходят в различных точках  $x_1$  и  $x_2$ . Расстояние между этими координатами, в которых произошли два события, в системе  $xyz$  равно

$$x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1) = v\Delta t. \quad (2.8.11)$$

Воспользовавшись преобразованиями Лоренца (2.8.6) получим

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{или} \quad \Delta t' = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Учитывая формулу (2.8.11), окончательно найдём

$$\Delta t'_0 = \Delta t \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \text{или} \quad \Delta t = \frac{\Delta t'_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.8.12)$$

Так как  $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < 1$ , то  $\Delta t' < \Delta t$ . Таким образом, длительность некоторого события минимальна в той инерциальной системе отсчёта, относительно которой материальная система покоится. Другими словами, темп хода времени часов, движущихся относительно инерциаль-

ной системы отсчёта, меньше, чем покоящихся. Легко заметить, что замедление времени становится существенным лишь при скоростях  $v \approx c$ . При  $v \ll c$  получится классический результат  $\Delta t'_0 = \Delta t$ .

4. *Релятивистский закон сложения скоростей.* Выше было сказано, что классический закон сложения скоростей противоречит постулату постоянства скорости света. Найдём релятивистский закон сложения скоростей. Пусть в системе  $x'y'z'$  движется материальная точка со скоростью  $\bar{u}'$ , проекции которой на оси координат равны

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}; \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}; \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}. \quad (2.8.13)$$

Найдём проекции вектора скорости  $\bar{u}$ , т.е.  $u_x; u_y; u_z$ . На основе преобразований Лоренца (2.8.4) – (2.8.9) имеем

$$dx = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\left[ \frac{dx'}{dt'} + v \right] dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{(u'_x + v) dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad (2.8.14)$$

$$dy = dy'; \quad dz = dz'; \quad (2.8.15)$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\left[ 1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'} \right] dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\left( 1 + \frac{v}{c^2} u'_x \right) dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.8.16)$$

Откуда найдем релятивистский закон сложения скоростей

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}; \quad u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}; \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}. \quad (2.8.17)$$

Покажем на частном примере, что новый закон сложения скоростей удовлетворяет постулату постоянства скорости света. Пусть в системе  $x'y'z'$  движется фотон со скоростью  $u'_x = c$ . Тогда его скорость относительно системы  $x, y, z$  в соответствии с формулой (2.8.17) равна

$$u_x = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c^2} c} = \frac{c \left( 1 + \frac{v}{c} \right)}{1 + \frac{v}{c}} = c.$$

Таким образом, скорость фотона по отношению к двум системам отсчёта одинакова и равна  $c$ . Если тело движется так, что  $u'_x \ll c$ , то согласно (2.8.17) мы снова приходим к классическому закону сложения скоростей.

Из преобразований Лоренца следует, что как расстояние  $\Delta x$ , так и промежуток времени между событиями изменяются при переходе от одной системы отсчёта к другой, т.е. пространство и время не являются абсолютными. При этом оказывается, что пространственные и временные отношения событий не являются независимыми. В закон преобразования координат входит время и в закон преобразования времени входят пространственные координаты. Следовательно, релятивистская теория указывает на относительность свойств пространства и времени и устанавливает между ними определенную взаимосвязь.

## 2.9. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

В механике под *материальной системой* понимают совокупность материальных точек, движения которых взаимосвязаны. Примером материальной системы может служить Солнечная система. Твёрдое тело рассматривается как недеформированная материальная система с распределённой по всему объёму массой. При рассмотрении системы материальных точек целесообразно силы разделить на внешние и внутренние. Силы, действующие на точки системы, называются *внешними*, если они вызваны действием тел, не входящих в рассматриваемую систему. Силы, вызванные взаимодействием точек самой системы, называются *внутренними*. Из третьего закона Ньютона следует, что внутренние силы носят характер взаимодействия, причём если точка  $B$  действует на точку  $A$  с силой  $F_1^i$ , а точка  $A$  действует на точку  $B$  с силой  $F_2^i$ , то эти силы равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны  $\bar{F}_1^i = -\bar{F}_2^i$  (рис. 2.20). Из этого следуют два свойства внутренних сил материальной системы.

*Первое свойство.* Геометрическая сумма всех внутренних сил системы равна нулю

$$\sum \bar{F}_k^i = 0, \quad (2.9.1)$$

где  $\bar{F}_k^i$  – равнодействующая всех внутренних сил, приложенных к точке с номером  $k$ .

*Второе свойство.* Геометрическая сумма моментов всех внутренних сил относительно произвольной точки пространства равна нулю

$$\sum [\bar{r}_k \times \bar{F}_k^i] = 0. \quad (2.9.2)$$

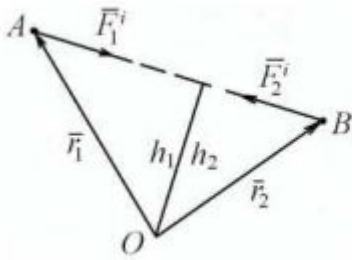


Рис. 2.20

Для системы, состоящей из двух точек  $A$  и  $B$  (рис.2.20) с силами взаимодействия  $\vec{F}_1^i$  и  $\vec{F}_2^i$  это свойство очевидно. Действительно, так как  $\vec{F}_2^i = -\vec{F}_1^i$ , а плечи  $h_1$  и  $h_2$  относительно точки  $O$  у обеих сил равны, то моменты этих сил численно равны и направлены в противоположные стороны

$$F_2^i h_2 = F_1^i h_1. \quad (2.9.3)$$

Система материальных точек называется *замкнутой*, если действие внешних сил отсутствует или действие их скомпенсировано. Так, например, в Солнечной системе планеты и их спутники совершают весьма сложные движения только под действием одних внутренних сил.

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из  $n$  тел с массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Обозначим скорости этих тел соответственно  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ , а внутреннюю силу, действующую на  $i$  тело со стороны  $k$  через  $\vec{F}_{ik}$ . На основании второго закона Ньютона запишем следующую систему уравнений движения всех тел системы:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1) &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1n}; \\ \frac{d}{dt}(m_2 \vec{v}_2) &= \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \dots + \vec{F}_{2n}; \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d}{dt}(m_n \vec{v}_n) &= \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \dots + \vec{F}_{n(n-1)}. \end{aligned} \quad (2.9.4)$$

Складывая почленно эти уравнения и учитывая первое свойство внутренних сил (2.9.1), находим

$$\sum_{k=1}^n \frac{d}{dt}(m_k \vec{v}_k) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k = 0. \quad (2.9.5)$$

*Геометрическая сумма импульсов всех материальных точек системы называется вектором полного импульса всей системы, т.е.*

$$\sum_{k=1}^n (m_k \vec{v}_k) = \vec{P}. \quad (2.9.6)$$

Таким образом

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k = 0 \quad \text{или} \quad \vec{P} = \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k = \text{const}, \quad (2.9.7)$$

т.е. векторная сумма импульсов тел, составляющих замкнутую систему, постоянна. Иначе говоря, *полный вектор импульса замкнутой*

системы тел с течением времени не изменяется. Это положение носит название закона сохранения импульса.

Закон сохранения импульса объясняет такие явления как, например, отдача при выстреле, реактивное движение и др. (см. разд. 2.10).

Полный вектор импульса замкнутой системы (2.9.7) можно записать в виде

$$\bar{P} = M \frac{\sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k}{M} = M \left[ \frac{\sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k}{\sum_{k=1}^n m_k} \right], \quad (2.9.8)$$

где  $M = \sum_{k=1}^n m_k$  – масса всей замкнутой системы. Выражение в скобках

называется *вектором скорости центра масс системы или центром инерции*

$$\bar{v}_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k}{\sum_{k=1}^n m_k}. \quad (2.9.9)$$

Следовательно, закон сохранения импульса (2.9.7) можно записать в виде

$$\bar{P} = M \bar{v}_c = \text{const}, \quad (2.9.10)$$

т.е. *произведение массы всей замкнутой системы на скорость её центра масс есть величина постоянная*. Справедливость этого закона можно проиллюстрировать следующим примером. На подвижной тележке устанавливается массивный физический маятник (его масса сравнима с массой тележки). В начальный момент система тележка–маятник находится в покое:  $\bar{v}_c = 0$ ,  $\bar{P} = 0$ . Отклонив маятник, отпускают его. Отмечают, что маятник и тележка совершают противофазные колебания так, что центр масс системы остаётся постоянным, т.е. его скорость  $\bar{v}_c = 0$  и, следовательно,  $\bar{P} = 0$ . Центр масс механической системы в ряде случаев совпадает с центром тяжести. Центр масс системы можно рассчитать теоретически, если положение всех точек системы известно. Пусть радиус-вектор  $\bar{R} = X_c \bar{i} + Y_c \bar{j} + Z_c \bar{k}$  определяет положение центра масс системы. Скорость центра масс равна

$$\bar{v}_c = \frac{d\bar{R}}{dt}. \quad (2.9.11)$$



Учитывая, что скорость  $k$  материальной точки равна

$$v_k = \frac{d\bar{r}_k}{dt},$$

где  $\bar{r}_k = x_k\bar{i} + y_k\bar{j} + z_k\bar{k}$  – радиус-вектор  $k$  точки.

На основании выражения (2.9.9) получим

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \frac{\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k}{\sum_{k=1}^n m_k} \quad \text{или} \quad \bar{R} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k}{\sum_{k=1}^n m_k}. \quad (2.9.12)$$

Следовательно, координаты центра масс механической системы определяются выражениями:

$$X_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{M}; \quad Y_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{M}; \quad Z_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{M}. \quad (2.9.13)$$

Если материальные точки механической системы распределены непрерывно, т.е. представляют собой тело некоторого объема  $V$ , то при нахождении центра масс необходимо систему разбить на элементарные участки  $dm = \rho dx dy dz$ , и от суммирования перейти к интегрированию:

$$\begin{aligned} X_c &= \frac{\iiint_V \rho x dx dy dz}{M} = \frac{1}{V} \iiint_V x dx dy dz; \\ Y_c &= \frac{\iiint_V \rho y dx dy dz}{M} = \frac{1}{V} \iiint_V y dx dy dz; \\ Z_c &= \frac{\iiint_V \rho z dx dy dz}{M} = \frac{1}{V} \iiint_V z dx dy dz, \end{aligned} \quad (2.9.14)$$

где  $V$  – объем однородного тела.

Сделаем одно замечание. Принято говорить, что Луна вращается вокруг Земли. Это не совсем так. Земля и Луна вращаются вокруг центра масс этой системы.

Рассмотрим теперь *незамкнутую* механическую систему, испытывающую действие внешних сил. Пусть на  $k$  материальную точку действует внешняя сила  $\bar{F}_k$ . Очевидно, что в этом случае в правые

части уравнений (2.9.4) войдут кроме внутренних сил  $\overline{F}_{ik}$  также и внешние силы  $\overline{F}_k$ . Тогда в результате сложения уравнений (2.9.4) получим следующее дифференциальное уравнение поступательного движения системы:

$$\frac{d\overline{P}}{dt} = \sum_{k=1}^n \overline{F}_k = \overline{F}_0, \quad (2.9.15)$$

где  $\overline{F}_0 = \sum_{k=1}^n \overline{F}_k$  – главный вектор всех внешних сил, действующих на

систему материальных точек. Из последнего выражения следует, что производная полного импульса системы материальных точек равна геометрической сумме всех внешних сил, приложенных к этим телам. Другими словами, действие внешних сил на материальную систему в течение некоторого промежутка времени приводит к изменению полного импульса этой системы

$$\Delta\overline{P} = \overline{F}_0 \Delta t. \quad (2.9.16)$$

В проекциях на оси неподвижной декартовой системы координат векторное уравнение (2.9.15) эквивалентно системе трёх скалярных уравнений:

$$\frac{dP_x}{dt} = F_x; \quad \frac{dP_y}{dt} = F_y; \quad \frac{dP_z}{dt} = F_z. \quad (2.9.17)$$

Из этих уравнений следует *Закон сохранения проекции импульса: если проекция главного вектора внешних сил на какую-либо ось равна нулю, то проекция на эту ось вектора импульса системы не зависит от времени*. Например, если  $F_x = 0$ , то  $\frac{dP_x}{dt} = 0$  и  $P_x = \text{const}$ . Так как

$F_x = 0$ ,  $F_y \neq 0$ ,  $F_z \neq 0$ , то незамкнутая система по своей сущности ведёт себя как замкнутая система вдоль оси  $x$ . Это позволяет использовать закон сохранения импульса для систем материальных точек, находящихся на поверхности Земли, где всегда действуют внешние силы. Однако проекция сил тяжести на горизонтальную плоскость всегда равна нулю. Например, если человек начинает движение вдоль лодки, то она также приходит в движение в противоположную сторону. Однако центр масс данной системы остаётся неизменным в пространстве.

Учитывая формулу (2.9.10), выражение (2.9.15) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}(M\overline{V}_c) = \overline{F}_0 \quad \text{или} \quad M \frac{d\overline{V}_c}{dt} = \overline{F}_0. \quad (2.9.18)$$

Так как  $\frac{d\bar{v}_c}{dt} = \bar{a}_c$  – ускорение центра масс системы, окончательно получим

$$M\bar{a}_c = \bar{F}_0. \quad (2.9.19)$$

Произведение массы всей системы материальных точек на ускорение её центра масс равно главному вектору всех внешних сил, действующих на точки этой системы. Другими словами, центр масс движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложен главный вектор внешних сил.

## 2.10. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Часто, тела при своём движении изменяют свою массу. Например, погрузка и разгрузка транспорта на ходу, изменение массы самолёта вследствие сгорания топлива и т.п. Рассмотрим истечение воды из автомобиля, поливающего улицы. Это тоже пример движения тела с переменной массой (рис. 2.21). Пусть  $u$  – скорость истечения воды относительно автомобиля. Если  $v$  – скорость автомобиля, то  $(u + v)$  – скорость воды относительно системы отсчёта, связанной с Землей. Пусть в момент времени  $t$  масса автомобиля вместе с водой равна  $M$ . Допустим, что за время  $dt$  автомобиль теряет массу  $dM$  вследствие истечения воды. Количество воды, вытекающей в единицу времени, назовём *секундным расходом жидкости*

$$\mu = \frac{dM}{dt}. \quad (2.10.1)$$

Тогда получим

$$dM = \mu dt. \quad (2.10.2)$$

Будем учитывать только силу тяги  $\bar{F}_m$ , действующую на автомобиль, силы сопротивления считали достаточно малыми. Применим

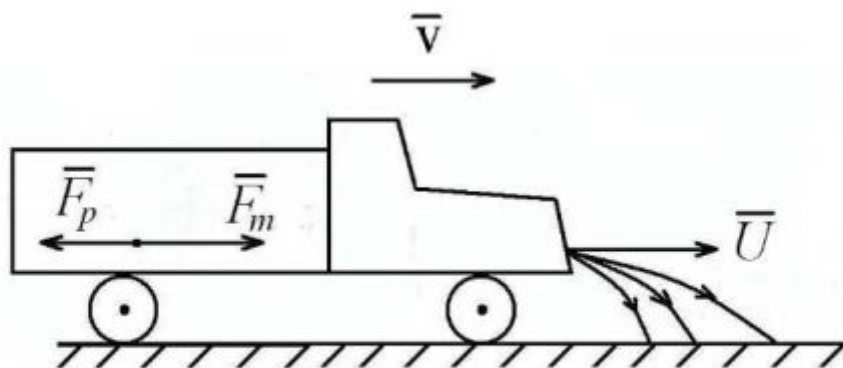


Рис. 2.21

второй закон Ньютона к системе автомобиль–вытекающая жидкость. В момент времени  $t$  импульс системы равен  $P_1 = Mv$ . В момент времени  $t + dt$  импульс равен

$$P_2 = (M - \mu dt)(v + dv) + \mu dt(v + u).$$

Учитывая, что  $P_2 - P_1 = F_m dt$ , получим

$$Mdv + Mdv - \mu v dt - \mu dt dv + \mu v dt + \mu u dt - Mv = F_m dt.$$

Пренебрегая величиной  $\mu dt dv$ , имеющей второй порядок малости, получим

$$Mdv + \mu u dt = F_m dt \quad \text{или} \quad M \frac{dv}{dt} = F_m - \mu u, \quad (2.10.3)$$

где величина  $(-\mu u)$  имеет размерность силы, т.е. при движении тела переменной массы на него действует дополнительная сила

$$F_p = -\mu u, \quad (2.10.4)$$

которая называется *реактивной силой*. Величина этой силы равна произведению секундного расхода жидкости на её относительную скорость. Из формулы (2.10.4) следует, что реактивная сила направлена противоположно относительной скорости жидкости. Газовые реактивные силы нашли применение в авиации и ракетной технике. Выражение (2.10.3) называют формулой Мещерского.

Рассчитаем начальное ускорение ракеты, если секундный расход топлива равен  $\mu = 200$  кг/с, а начальная масса 20 000 кг. При отрыве от пускового стола на ракету действуют две силы: сила тяжести и реактивная сила. Уравнение Мещерского имеет вид

$$ma = F_p - mg \quad \text{или} \quad a = \frac{\mu u - mg}{m}.$$

При скорости газов  $u = 3000$  м/с, получим  $a = 20$  м/с<sup>2</sup>.

Рассчитаем, какую максимальную скорость приобретёт жидкостная ракета при полном сгорании топлива. Будем учитывать только реактивную силу. В этом случае уравнение движения имеет вид

$$M \frac{dv}{dt} = -\mu u \quad \text{или} \quad M \frac{dv}{dt} = -\frac{dM}{dt} u.$$

Сокращая на  $dt$ , получим

$$Mdv + u dM = 0. \quad (2.10.5)$$

Откуда видно, что при увеличении массы ( $dM > 0$ ), скорость должна уменьшаться ( $dv < 0$ ), и наоборот, при уменьшении массы ( $dM < 0$ ), скорость увеличивается ( $dv > 0$ ). Последнее выражение запишем в виде

$$\frac{dv}{u} = -\frac{dM}{M}. \quad (2.10.6)$$

Пусть на старте скорость ракеты равна  $v=0$ , а её масса  $M_0 = M_{m0} + M_k$ , где  $M_{m0}$  – масса топлива и окислителя,  $M_k$  – масса конструкции и полезного груза. При достижении максимальной скорости  $v_m$  масса ракеты равна  $M_k$ . Проинтегрируем выражение (2.10.6)

$$\int_0^{v_m} \frac{dv}{u} = -\int_{M_0}^{M_k} \frac{dM}{M}.$$

Интегрирование даст

$$v_m = u(\ln M_0 - \ln M_k) \text{ или}$$

$$v_m = u \ln \frac{M_0}{M_k} = u \ln \frac{M_k + M_{m0}}{M_k} = u \ln \left( 1 + \frac{M_{m0}}{M_k} \right).$$

Эта формула Циолковского для максимальной скорости ракеты. Отношение  $\frac{M_{m0}}{M_k} = z$  называют числом Циолковского. Оценим мак-

симальную скорость ракеты на жидком топливе. Пусть скорость газов из сопла ракеты  $u = 3000$  м/с, число Циолковского  $z = 9$ . Эти значения максимально возможные. Расчёт даёт

$$u = 3000 \cdot \ln 10 = 3000 \cdot 2,3 \lg 10 = 6900 \text{ м/с.}$$

Эта скорость значительно меньше первой космической скорости  $v_1 = 7900$  м/с. Отсюда следует, что одна ракета на жидком топливе не может вывести спутник на околоземную орбиту. Достижение первой космической скорости возможно при использовании многоступенчатых ракет.

### 3. РАБОТА И МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

#### 3.1. ПОНЯТИЕ ОБ ЭНЕРГИИ, РАБОТЕ И МОЩНОСТИ

В разделе 2.3 мы ввели понятие импульса тела  $\vec{P} = m\vec{v}$ , который является мерой его поступательного движения. Однако эта динамическая характеристика не может служить универсальной мерой для всех форм движения. Приведём следующий пример. Пусть массивный диск равномерно вращается вокруг неподвижной оси симметрии. Любая произвольная материальная точка  $i$ , не лежащая на оси диска, имеет импульс  $\vec{P}_i = m_i\vec{v}_i$ , не равный нулю. Однако векторная сумма импульсов всех точек диска равна нулю при любой скорости вращения. Объясняется это тем, что для любой точки  $i$  имеется диаметрально противоположная точка  $k$  той же массы, вектор скорости которой  $\vec{v}_k = -\vec{v}_i$  направлен противоположно.

Единой мерой различных форм движения является *энергия*. Энергия системы тел количественно характеризует эту систему с точки зрения возможных в ней количественных и качественных превращений и изменений движения. Энергия тела или системы тел не зависит от предыстории и определяется динамическими характеристиками этих тел в данный момент времени. Поэтому принято говорить, что тела обладают запасом энергии, являющейся мерой его движения. Энергия является функцией состояния системы. В разделе 2.1 отмечалось, что возникновение и превращение механического движения может происходить только под действием сил. Следовательно, под действием сил происходит изменение энергии тела. Процесс изменения энергии тела под действием силы называется *процессом совершения работы*, а величина приращения энергии в этом процессе называется *механической работой*, совершаемой силой. Опыт показывает, что сила, приложенная к телу, совершает работу только в том случае, если это тело перемещается. При прямолинейном поступательном движении тела (рис. 3.1) работа, совершаемая постоянной силой  $\vec{F}$ , тем больше, чем больше составляющая силы  $\vec{F}_\tau$  – касательная к траектории, и чем больше путь  $S$ , пройденный телом за время действия силы

$$A = F_\tau S = FS \cos \alpha, \quad (3.1.1)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{F}$  и  $\vec{S}$ . Механическая работа силы  $\vec{F}$  не совершается в двух случаях: во-первых, при  $S = 0$ ; во-вторых, при  $\alpha = 90^\circ$ . В последнем случае вектор силы оказы-

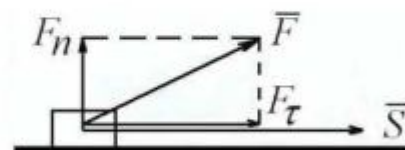


Рис. 3.1

вается перпендикулярным вектору перемещения  $\vec{S}$ . Очевидно, что при  $0 \leq \alpha < 90^\circ$  работа положительная ( $A > 0$ ); при  $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$  – работа отрицательная ( $A < 0$ ). Например, работа, совершаемая силой трения или силой сопротивления, отрицательна.

Любое достаточно малое элементарное перемещение материальной точки или поступательно движущегося тела можно считать прямолинейным. Поэтому элементарная работа  $\delta A$ , совершаемая силой  $\vec{F}$  при малом перемещении  $dS$  точки её приложения, равна

$$\delta A = F_\tau dS = F \cos \alpha dS. \quad (3.1.2)$$

Если  $\vec{r}$  – радиус-вектор, который определяет положение точки приложения силы, то можно считать, что  $dS = |d\vec{r}|$ , и, следовательно, элементарная механическая работа равна

$$\delta A = (\vec{F} d\vec{r}), \quad (3.1.3)$$

т.е. элементарная механическая работа равна скалярному произведению векторов  $\vec{F}$  и  $d\vec{r}$ . Механическая работа зависит от вида процесса и не является функцией состояния. Поэтому  $\delta A$  не является полным дифференциалом какой-либо функции координат. Следовательно, нельзя элементарную работу обозначать  $dA$ . На основании сказанного, элементарную работу принято обозначать  $\delta A$ . Учитывая, что для прямоугольной системы координат  $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$  и  $d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$ , на основании (3.1.3) имеем

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (3.1.4)$$

Для вычисления работы, совершаемой переменной силой, на конечном криволинейном отрезке необходимо найти сумму элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках пути. Эта сумма приводится к интегралу

$$A = \int_0^S F_\tau dS. \quad (3.1.5)$$

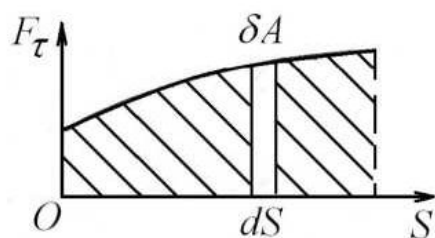


Рис. 3.2

Если величина касательной составляющей силы  $\vec{F}$  задана как функция от длины пути  $S$  (рис. 3.2), то согласно определению интеграла (3.1.5), работа  $A$ , совершаемая силой на пути  $O-S$ , численно равна площади, заштрихованной на рис. 3.2.

Для характеристики скорости совершения работы силой вводится понятие мощности. При равномерном совершении работы *мощностью* называется физическая величина, численно равная работе, совершаемой этой силой за единицу времени

$$N = \frac{A}{t}. \quad (3.1.6)$$

При неравномерном совершении работы вводится понятие *средней мощности*  $N_{\text{ср}}$  за промежуток времени  $\Delta t$

$$N_{\text{ср}} = \frac{\Delta A}{\Delta t}. \quad (3.1.7)$$

где  $\Delta A$  – работа, совершаемая силой за время  $\Delta t$ .

*Мгновенной мощностью* называется предел, к которому стремится средняя мощность, когда время, за которое оно определяется, стремится к нулю

$$N = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} N_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\delta A}{dt}. \quad (3.1.8)$$

На основании формулы (3.1.4) получим

$$N = F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z = (\bar{F} \bar{v}), \quad (3.1.9)$$

где  $\bar{v}$  – скорость движения тела.

Учитывая, что за единицу измерения механической работы принимается Джоуль, единицей измерения мощности является Ватт: Вт = Дж/с.

### 3.2. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ И ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

*Кинетической энергией* называют механическую энергию всякого свободно движущегося тела. Кинетическая энергия равна той работе, которую совершают силы для увеличения скорости тела и приобретения запаса энергии.

Пусть в начальный момент времени тело массой  $m$  имело скорость  $\bar{v}_1$ . Действие силы  $\bar{F}$  на данное тело приводит к тому, что скорость увеличивается до  $\bar{v}_2$ . Элементарная работа  $\delta A = \bar{F} d\bar{r}$ . На основе

второго закона Ньютона  $\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}$  получим

$$\delta A = \frac{d\bar{p}}{dt} d\bar{r} = \bar{v} d\bar{p}. \quad (3.2.1)$$



так как  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v}$  – скорость. Механическая работа сил за конечный промежуток времени равна

$$A_{12} = \int_{p_1}^{p_2} \vec{v} d\vec{p}. \quad (3.2.2)$$

1. Рассмотрим нерелятивистский случай малых скоростей движения ( $v \ll c$ ). Импульс тела равен  $\vec{P} = m\vec{v}$ , где  $m$  – масса тела, которая не зависит от скорости движения  $m = \text{const}$ . Следовательно,  $d\vec{P} = m d\vec{v}$ . Подставляя это выражение в формулу (3.2.2), получим

$$A_{12} = m \int_{v_1}^{v_2} \vec{v} d\vec{v}. \quad (3.2.3)$$

Считая, что направления векторов  $\vec{v}$  и  $d\vec{v}$  совпадают, интегрирование даёт

$$A_{12} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (3.2.4)$$

При  $v_1 = 0$  и  $v_2 = v$ , получим

$$E_k = A = \frac{mv^2}{2}, \quad (3.2.5)$$

т.е. *кинетическая энергия поступательно движущегося тела равна половине произведения массы этого тела на квадрат его скорости*. Кинетическая энергия – скалярная величина, и она не может быть отрицательной. Выражение (3.2.4) называется теоремой об изменении кинетической энергии для материальной точки. *Работа силы по перемещению материальной точки равна изменению её кинетической энергии*

$$A_{12} = E_{k2} - E_{k1}. \quad (3.2.6)$$

Если система состоит из  $N$  поступательно движущихся тел, то полная кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий  $E_{ki} = \frac{m_i v_i^2}{2}$  всех тел, входящих в неё

$$E_k = \sum_{i=1}^N E_{ki} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (3.2.7)$$

Теорему об изменении кинетической энергии (3.2.6) можно обобщить на систему материальных точек.

Кинетическая энергия системы зависит только от величины масс и скоростей движения, входящих в неё тел. При этом не существенно,

каким образом тело массы  $m_i$  приобрело скорость  $v_i$ . Следовательно, кинетическая энергия системы есть функция состояния её движения.

2. Рассмотрим релятивистский случай движения. Пусть материальная точка при скорости  $v_0 = 0$  имеет массу покоя  $m_0$ . Под действием силы материальная точка приобретает скорость  $\bar{v}$ , близкую к скорости света, и её релятивистская масса становится равной

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.2.8)$$

Если в начальный момент материальная точка имела импульс  $P_0 = m_0 v_0 = 0$ , то после действия силы её импульс равен

$$p = mv. \quad (3.2.9)$$

Из этих двух выражений исключим скорость  $\bar{v}$ . Для этого, считая, что  $v = \frac{p}{m}$ , выражение (3.2.8) запишем в виде

$$m \sqrt{1 - \frac{p^2}{m^2 c^2}} = m_0 \quad \text{или} \quad m^2 \left( 1 - \frac{p^2}{m^2 c^2} \right) = m_0^2.$$

Раскрывая скобки, получим

$$m^2 - \frac{p^2}{c^2} = m_0^2,$$

откуда найдём

$$p^2 = m^2 c^2 - m_0^2 c^2. \quad (3.2.10)$$

Увеличение релятивистского импульса связано не только с возрастанием скорости, но и с увеличением массы. Продифференцируем полученное выражение, считая, что  $c = \text{const}$  и  $m_0 = \text{const}$

$$2p dp = 2m c^2 dm,$$

откуда найдём

$$dp = \frac{m c^2 dm}{p}.$$

Учитывая выражение (3.2.9), найдём

$$dp = \frac{c^2 dm}{v}.$$

Подставляя это выражение в формулу (3.2.2), найдём работу

$$A = \int_0^p v dp = \int_{m_0}^m c^2 dm \text{ или } A = mc^2 - m_0c. \quad (3.2.11)$$

Так как в начальный момент скорость материальной точки  $v_0 = 0$ , а работа силы идёт на увеличение кинетической энергии, то кинетическая энергия в релятивистском случае дается выражением

$$E_k = A \text{ или } E_k = mc^2 - m_0c^2. \quad (3.2.12)$$

Учитывая выражение (3.2.8), получим

$$E_k = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2. \quad (3.2.13)$$

Согласно выражению (3.2.11), работа, совершаемая силой, приводящая к увеличению скорости материальной точки, приводит также к увеличению массы на величину

$$\Delta m = m - m_0. \quad (3.2.14)$$

Возникновение кинетической энергии связано с увеличением массы материальной точки

$$E_k = (m - m_0)c^2 = \Delta mc^2. \quad (3.2.15)$$

В релятивистской механике вводится понятие *полной энергии*

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.2.16)$$

Полная энергия  $E$  зависит от скорости движения. Минимальное значение полной энергии будет при  $v = 0$ . Это минимальное значение полной энергии принято называть *энергией покоя*

$$E_0 = m_0c^2. \quad (3.2.17)$$

Следовательно, согласно формуле (3.2.13), кинетическая энергия материальной точки численно равна разности между полной энергией и энергией покоя

$$E_k = E - E_0. \quad (3.2.18)$$

Таким образом, релятивистская механика устанавливает фундаментальную связь энергии и массы.

Взаимосвязь полной энергии и релятивистского импульса в релятивистской механике можно найти из выражения (3.2.10). Умножив эту формулу на  $c^2$ , получим

$$p^2c^2 = m^2c^4 - m_0^2c^4.$$

Учитывая, что  $m^2 c^4 = E^2$ , найдём

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad \text{или} \quad E = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}. \quad (3.2.19)$$

В нерелятивистской теории взаимосвязь между кинетической энергией  $E_k = \frac{mv^2}{2}$  и импульсом  $p = mv$  можно найти, если из этих выражений исключить скорость  $v$ , считая массу тела  $m = \text{const}$

$$E_k = \frac{p^2}{2m}. \quad (3.2.20)$$

### 3.3. КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИЛЫ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

Вычислим работу силы тяжести при перемещении тела массой  $m$  из положения 1 в положение 2. Будем считать, что разность высот  $(h_1 - h_2)$  значительно меньше радиуса Земли так, что ускорение свободного падения можно считать постоянной величиной (рис. 3.3, а).

Согласно определению механической работы, получим

$$A_{12} = m\bar{g}\bar{S}_{12} = mgS_{12} \cos \alpha_1. \quad (3.3.1)$$

Так как  $\alpha_1 < 90^\circ$ , то работа положительная ( $A_{12} > 0$ ). Учитывая, что  $S_{12} \cos \alpha_1$  есть проекция вектора перемещения  $\bar{S}_{12}$  на вертикальное направление

$$S_{12} \cos \alpha_1 = (h_1 - h_2), \quad (3.3.2)$$

получим

$$A_{12} = mg(h_1 - h_2); \quad (3.3.3)$$

$$A_{12} = mgh_1 - mgh_2. \quad (3.3.4)$$

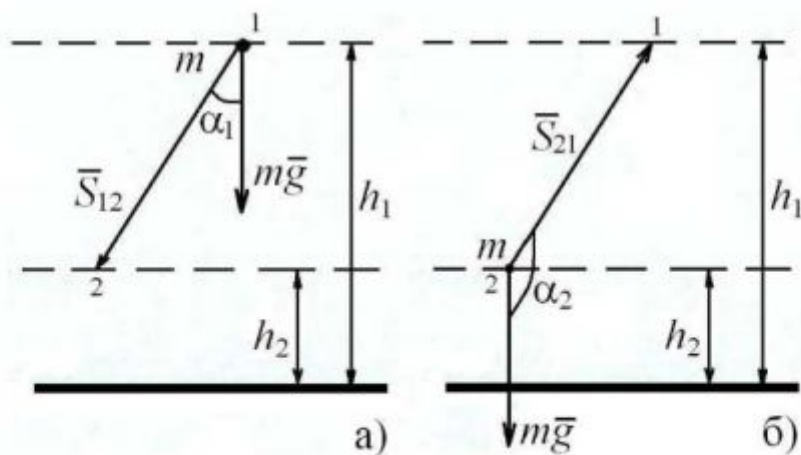


Рис. 3.3

Отсюда следует, что работа силы тяжести определяется начальным и конечным положением тела. Легко видеть, что работа силы тяжести при перемещении тела из положения 2 в положение 1 (рис. 3.3, б) будет отрицательной ( $A_{21} < 0$ ), так как  $\alpha_2 > 90^\circ$ , то

$$A_{21} = -A_{12} = -mg(h_1 - h_2). \quad (3.3.5)$$

Вычислим работу силы тяжести при перемещении тела массой  $m$  из положения 1 в положение 2 по криволинейной траектории 1–а–2. Разобьём линию перемещения на элементарные участки  $\Delta S_k$  (рис. 3.4). Элементарная работа будет равна

$$\Delta A_k = mg\Delta S_k \cos\alpha_k \text{ или } \Delta A_k = mg\Delta h_k.$$

Для работы силы тяжести на криволинейном участке 1–а–2 получим выражение

$$A_{1-a-2} = \sum_{k=1}^N \Delta A_k = \sum_{k=1}^N mg\Delta h_k = mg \sum_{k=1}^N \Delta h_k.$$

Учитывая, что  $\sum_{k=1}^N \Delta h_k = (h_1 - h_2)$ , получим

$$A_{1-a-2} = mg(h_1 - h_2) > 0. \quad (3.3.6)$$

Легко видеть, что работа силы тяжести не зависит от формы траектории, по которой перемещается тело. Нетрудно доказать, что работа силы тяжести при перемещении по траектории 2–б–1 будет иметь ту же величину, но противоположного знака

$$A_{2-b-1} = -mg(h_1 - h_2) < 0. \quad (3.3.7)$$

Таким образом, *работа силы тяжести не зависит от формы траектории, а определяется начальным и конечным положением тела.*

Допустим, что под действием силы тяжести тело перемещается по линии 1–а–2, а затем по линии 2–б–1, т.е. тело перемещается по замкнутой траектории. Механическая работа в этом случае будет равна

сумме работ  $A_{1-a-2}$  и  $A_{2-b-1}$ , т.е.

$$A = A_{1-a-2} + A_{2-b-1} = 0. \quad (3.3.8)$$

Таким образом, *работа силы тяжести на любой замкнутой траектории равна нулю.* Силы называются *консервативными*, если работа, совершаемая ими, не зависит от формы траектории, а определяется положением тел в начале и конце перемещения, т.е. определяется конфигу-

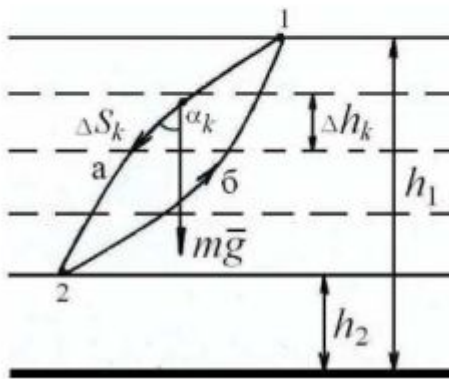


Рис. 3.4

рацией системы тел взаимодействия. Необходимым и достаточным условием консервативности сил является равенство нулю работы на любой замкнутой траектории. Кроме силы тяжести к консервативным силам относятся: силы электростатического взаимодействия Кулона, силы упругости. Неконсервативной силой является сила трения, сила вязкого сопротивления и др.

Система взаимодействующих тел, между которыми действуют консервативные силы, может совершать механическую работу по перемещению тел. Однако при этом изменяется положение тел, т.е. их конфигурация. Наступает такое состояние, что дальше механическая работа совершаться не может. Следовательно, система тел, в которой действуют консервативные силы, обладает способностью совершать работу, т.е. данная система обладает запасом некоторой энергии, которая называется *потенциальной энергией*. Потенциальная энергия системы обусловлена только консервативными силами. Она зависит только от взаимного расположения частей системы, а также от их положения по отношению к внешним телам. Принято говорить, что работа  $A_{1-2}$  консервативных сил равна уменьшению потенциальной энергии  $W$  системы в этом процессе

$$A_{1-2} = W_1 - W_2 = -(W_2 - W_1) = -\Delta W, \quad (3.3.9)$$

где  $\Delta W = W_2 - W_1$  – изменение потенциальной энергии. Сравнивая полученное выражение с формулой (3.3.4), найдём известное значение потенциальной энергии тела в поле тяжести Земли

$$W = mgh. \quad (3.3.10)$$

При этом считается, что потенциальная энергия тела на поверхности Земли ( $h = 0$ ) принимается за  $W_0 = 0$ .

Найдём потенциальную энергию упругодеформированного тела. Сила упругости пропорциональна величине деформации  $x$ , т.е.  $F_{\text{упр}} = -kx$ , где  $k$  – коэффициент упругости и жёсткости, а знак «минус» показывает, что сила упругости направлена в сторону, противоположную деформации: упругодеформированное тело стремится восстановить свою первоначальную форму, т.е.  $x = 0$ . Элементарная работа силы упругости равна

$$\delta A = F_{\text{упр}} dx = -kx dx.$$

Работа, совершаемая силой упругости по переводу тела из деформированного состояния в недеформированное, равна

$$A = -\int_x^0 kx dx = \frac{kx^2}{2}. \quad (3.3.11)$$

Принимая потенциальную энергию тела в недеформированном состоянии при  $x = 0$ , равной нулю, найдём *потенциальную энергию деформированного тела*

$$W = \frac{kx^2}{2}. \quad (3.3.12)$$

Подсчитаем потенциальную энергию гравитационного взаимодействия двух тел. Для этого найдём работу, которую совершают силы гравитации по перемещению тела массой  $m$  из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии  $r$  от центра Земли. Сила гравитационного притяжения равна

$$F = G \frac{Mm}{r^2},$$

где  $M$  – масса Земли. Считая, что направление действия силы  $\vec{F}$  совпадает с элементарным перемещением  $d\vec{r}$ , имеем

$$\delta A = F dr = G \frac{Mm}{r^2} dr.$$

Интегрируя это выражение, найдём значение *потенциальной энергии гравитационного взаимодействия*

$$A = W = \int_{\infty}^r G M m \frac{dr}{r^2} = -G \frac{Mm}{r}. \quad (3.3.13)$$

При этом считается, что потенциальная энергия тел, находящихся на бесконечно большом расстоянии, равна нулю.

### 3.4. КОСМИЧЕСКИЕ СКОРОСТИ

Под *первой космической скоростью* понимается скорость, которую необходимо сообщить любому телу, чтобы оно вращалось в виде спутника вблизи поверхности Земли. Если  $R$  – радиус Земли,  $h$  – высота спутника над поверхностью, то радиус орбиты спутника равен

$$r = R + h. \quad (3.4.1)$$

По закону всемирного тяготения на спутник действует сила притяжения

$$F = G \frac{Mm}{r^2}, \quad (3.4.2)$$

где  $M$  – масса Земли;  $m$  – масса космического корабля. Сила гравитационного притяжения выполняет роль центростремительной силы и по второму закону Ньютона сообщает кораблю ускорение  $a = \frac{v^2}{r}$ , т.е.

$$F = m \frac{v^2}{r}. \quad (3.4.3)$$

Приравнивая правые части последних двух выражений, найдем скорость спутника на круговой орбите любого радиуса

$$v = \sqrt{G \frac{M}{r}}. \quad (3.4.4)$$

или

$$v = \sqrt{G \frac{M}{(R+h)}}. \quad (3.4.5)$$

Во-первых, скорость спутника не зависит от его массы, во-вторых, с увеличением радиуса  $r$  орбиты или высоты  $h$  скорость уменьшается, а период  $T$  обращения увеличивается. Для периода обращения спутника можно получить значение  $T = \frac{2\pi r}{v}$ . При учёте формулы (3.4.4) найдём

$$T = \frac{2\pi r \sqrt{r}}{\sqrt{GM}}. \quad (3.4.6)$$

При достаточно большом радиусе орбиты  $r \approx 40000$  км период обращения спутника равен периоду обращения Земли. В этом случае спутник как бы «висит» над определённой точкой поверхности Земли. Такие спутники используют в качестве ретрансляторов сигналов при радиосвязи и т.д. Величину первой космической скорости можно получить, если в формуле (3.4.5) положить  $h \rightarrow 0$ , т.е. считать, что радиус орбиты близок к радиусу Земли

$$v_1 = \sqrt{G \frac{M}{R}}, \quad (3.4.7)$$

или

$$v_1 = \sqrt{G \frac{M}{R^2} R} = \sqrt{gR}, \quad (3.4.8)$$

где  $G \frac{M}{R^2} = g$  – ускорение свободного падения на поверхности Земли.

Считая  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>,  $R = 6,4 \cdot 10^6$  м, по формуле (3.4.8) найдём  $v_1 = 7,9$  км/с.



Под *второй космической скоростью* понимается скорость, которую необходимо сообщить любому телу, чтобы оно не вернулось обратно на Землю. С одной стороны, внешние силы должны совершить работу, которая равна потенциальной энергии взаимодействия данного тела массой  $m$  с массой Земли  $M$ , т.е.  $A = -W$ . Согласно формуле (3.3.13), имеем

$$A = G \frac{Mm}{R}, \quad (3.4.9)$$

где  $R$  – радиус Земли. С другой стороны, эта работа должна пойти на увеличение кинетической энергии тела

$$A = \frac{mv_2^2}{2}. \quad (3.4.10)$$

Приравнивая правые части последних выражений, найдём *вторую космическую скорость*

$$v_2 = \sqrt{2G \frac{M}{R}} = \sqrt{2G \frac{M}{R^2} R} = \sqrt{2gR}. \quad (3.4.11)$$

Сравнивая это выражение с формулой (3.4.8), найдём

$$v_2 = \sqrt{2}v_1, \quad (3.4.12)$$

т.е. вторая космическая скорость больше первой в  $\sqrt{2}$  раз и равна  $v_2 = 11,2$  км/с. Вторая космическая скорость позволяет путешествовать внутри Солнечной системы.

Под *третьей космической скоростью* понимают скорость, которую необходимо сообщить любому телу, чтобы оно покинуло Солнечную систему. Величина этой скорости зависит, в какой момент и с какой точки поверхности земли осуществляется старт ракеты. Минимальное значение третьей космической скорости равно  $v_3 \approx 16$  км/с. Эта скорость позволяет осуществить межзвездное путешествие.

### 3.5. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Пусть имеется система материальных точек массами  $m_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ), которые движутся со скоростями  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \dots, \bar{v}_n$ . Допустим, что между точками действуют внутренние консервативные силы  $\bar{F}_{ik}$  взаимодействия (см. разд. 2.9). На основании второго закона Ньютона для  $i$  материальной точки имеем

$$m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} = \bar{F}_{i1} + \bar{F}_{i2} + \bar{F}_{i3} + \dots + \bar{F}_{in}. \quad (3.5.1)$$

Умножим скалярно данное выражение на элементарное перемещение  $d\vec{r}_i$  и учтём, что  $\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$

$$m_i \vec{v}_i d\vec{v}_i = \vec{F}_{i1} d\vec{r}_i + \vec{F}_{i2} d\vec{r}_i + \vec{F}_{i3} d\vec{r}_i + \dots + \vec{F}_{im} d\vec{r}_i.$$

Такие выражения можно записать для всех точек системы, а затем их сложить

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i d\vec{v}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_{i1} d\vec{r}_i + \vec{F}_{i2} d\vec{r}_i + \vec{F}_{i3} d\vec{r}_i + \dots + \vec{F}_{im} d\vec{r}_i). \quad (3.5.2)$$

Учитывая, что  $m_i \vec{v}_i d\vec{v}_i = d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = dE_i$  – дифференциал кинетической энергии  $i$  точки,  $\vec{F}_{i1} d\vec{r}_i + \vec{F}_{i2} d\vec{r}_i + \vec{F}_{i3} d\vec{r}_i + \dots + \vec{F}_{im} d\vec{r}_i = \delta A_i$  – элементарная работа консервативных сил над  $i$  материальной точкой, получим

$$\sum_{i=1}^n dE_i = \sum_{i=1}^n \delta A_i \quad \text{или} \quad dE - \delta A = 0. \quad (3.5.3)$$

где  $E = \sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2$  – кинетическая энергия всей системы материальных точек,  $A = \sum_{i=1}^n A_i$  – работа, совершаемая консервативными

силами по перемещению материальных точек системы. Так как работа консервативных сил может совершаться только за счёт убыли потенциальной энергии системы, т.е.  $\delta A = -dW$ , то выражение (3.5.3) принимает вид

$$dE + dW = 0 \quad \text{или} \quad d(E + W) = 0. \quad (3.5.4)$$

Откуда следует закон сохранения энергии

$$E + W = \text{const}. \quad (3.5.5)$$

Сумму кинетической и потенциальной энергии часто называют *полной энергией* в нерелятивистской механике. Следовательно, *полная энергия механической системы, в которой действуют консервативные силы, с течением времени не изменяется, т.е. она остаётся постоянной величиной*. При этом механическая система должна быть *изолированной*, т.е. она не должна обмениваться энергией с окружающими внешними телами.

Таким образом, в изолированной системе энергия может переходить из одних видов в другие, и передаваться от одного тела к другому, но её общее количество остаётся неизменным.

Если в изолированной системе кроме консервативных внутренних сил действуют внешние неконсервативные силы, то изменение кинетической энергии системы происходит за счёт работы тех и других. Выражение (3.5.3) в этом случае принимает вид

$$dE = \delta A + \delta A_{\text{тр}},$$

где  $\delta A_{\text{тр}}$  – работа неконсервативных сил, например, сил трения. Так как работа консервативных сил совершается за счёт убыли потенциальной энергии системы, т.е.  $\delta A = -dW$ , то найдём

$$dE + dW = \delta A_{\text{тр}} \text{ или } d(E + W) = \delta A_{\text{тр}}.$$

Учитывая, что  $\delta A_{\text{тр}} = \overline{F}_{\text{тр}} d\overline{r}$  – элементарная работа сил трения, получим

$$d(E + W) = \overline{F}_{\text{тр}} d\overline{r},$$

разделим на  $dt$ , получим

$$\frac{d}{dt}(E + W) = \overline{F}_{\text{тр}} \overline{v}.$$

Так как угол между вектором  $\overline{F}_{\text{тр}}$  и вектором скорости  $\overline{v}$  больше  $90^\circ$ , то

$$\frac{d}{dt}(E + W) < 0. \quad (3.5.6)$$

Следовательно, действие неконсервативных сил приводит к тому, что полная энергия изолированной системы с течением времени уменьшается, т.е. происходит её рассеяние или диссипация.

### 3.6. АБСОЛЮТНО НЕУПРУГИЙ УДАР

При *абсолютно неупругом ударе* происходит такое взаимодействие двух тел, когда они объединяются в одно тело и движутся после удара с одинаковой скоростью. Примером такого взаимодействия являются столкновения шаров, выполненных из мягкой глины или пластилина. Пусть два абсолютно неупругих шара массами  $m_1$  и  $m_2$  до удара движутся поступательно со скоростями  $\overline{v}_1$  и  $\overline{v}_2$ , направленными в одну и ту же сторону вдоль линии их центров, причём  $v_1 > v_2$  (рис. 3.5). Необходимо найти скорость  $\overline{v}$  шаров после соударения. Для абсолютно неупругого удара при малых скоростях выполняется закон сохранения импульса

$$m_1 \overline{v}_1 + m_2 \overline{v}_2 = (m_1 + m_2) \overline{v}. \quad (3.6.1)$$

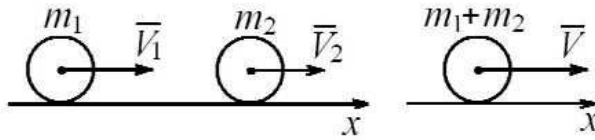


Рис. 3.5

При центральном ударе векторы  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$ ,  $\vec{v}$  направлены вдоль одной прямой. Поэтому в уравнении (3.6.1) можно перейти от векторов к их численным значениям. При этом

считается, если вектор скорости совпадает с выбранной осью  $x$ , то скорость положительная, в противном случае – отрицательная

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v. \quad (3.6.2)$$

Откуда найдём скорость после взаимодействия

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.6.3)$$

Если  $m_1 = m_2$ , то

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2}. \quad (3.6.4)$$

В случае движения шаров навстречу друг другу, закон сохранения импульса имеет вид

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v, \quad (3.6.5)$$

откуда найдём

$$v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.6.6)$$

Если  $m_1 = m_2$  и  $v_1 = v_2$ , то получим  $v = 0$ , т.е. после удара шары останавливаются.

Очевидно, что при абсолютно неупругом ударе происходят потери механической энергии. Кинетическая энергия шаров до удара равна

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2. \quad (3.6.7)$$

Кинетическая энергия тел после удара равна

$$E_{k2} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2.$$

Или при учёте формулы (3.6.3) найдём

$$E_{k2} = \frac{1}{2} \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2}. \quad (3.6.8)$$

Найдём потери энергии при абсолютно неупругом ударе

$$\Delta E_k = E_{k1} - E_{k2} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2}.$$

Раскрыв скобки и приводя подобные члены, получим

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) (v_1^2 - 2v_1 v_2 + v_2^2)$$

или 
$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) (v_1 - v_2)^2. \quad (3.6.9)$$

Считая, что  $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \mu$  – приведённая масса, а  $(v_1 - v_2)^2$  – квадрат относительной скорости тел до удара, окончательно получим

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \mu (v_1 - v_2)^2, \quad (3.6.10)$$

т.е. *потери механической энергии при абсолютно неупругом ударе равны половине произведения приведённой массы на квадрат относительной скорости тел до удара.*

Таким образом, при неупругом ударе полная механическая энергия системы уменьшается, т.е. часть её рассеивается. Объясняется это тем, что при абсолютно неупругом ударе происходит деформация соударяющихся тел. Эта деформация сохраняется и после удара тел, поэтому она называется остаточной деформацией. На деформацию тел затрачивается работа, которая в точности равна убыли механической энергии системы.

Неупругий удар применяется для целей двоякого рода. Во-первых, для изменения формы тел (ковка, штамповка металла и т.п.). В этом случае важно, чтобы большая часть кинетической энергии первого тела затрачивалась на деформацию тел. Для этого необходимо, чтобы масса неподвижного тела (например, наковальни вместе с куском металла) была во много раз больше массы ударяющегося тела (например, молота).

Вторая цель состоит в возможно большем перемещении тел после удара и преодолении при этом сопротивлений (забивка свай в землю, вбивание клиньев, гвоздей и т.п.). В этом случае выгодно, чтобы работа, затрачиваемая на деформацию, была как можно меньше, и чтобы общая кинетическая энергия обоих тел после удара была наибольшей. Для этого необходимо, чтобы масса ударяющегося тела (молота, копровой бабы) была во много раз больше массы второго тела (гвоздя, свай и т.д.).

Рассмотрим два частных случая.

1. Пусть два тела одинаковой массы  $m_1 = m_2 = m$  движутся с одинаковой скоростью навстречу друг другу  $v_1 = v_0$ ,  $v_2 = -v_0$ . Кинетическая энергия тел до неупругого удара равна

$$E_{k1} = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = mv_0^2. \quad (3.6.11)$$

Так как относительная скорость тел до удара равна  $(v_1 - v_2) = 2v_0$ , то потери кинетической энергии, согласно формуле (3.6.9), равны

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \left( \frac{mm}{m+m} \right) 2v_0^2 = mv_0^2. \quad (3.6.12)$$

Сравнивая полученные формулы, можно сделать вывод: вся первоначальная кинетическая энергия идёт на деформацию тел, т.е. на их разрушение.

2. Пусть тела имеют одинаковую массу  $m_1 = m_2 = m$ , первое тело имело скорость  $v_1 = v_0$ , а второе перед ударом покоилось  $v_2 = 0$ . Кинетическая энергия тел до удара

$$E_{k1} = \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (3.6.13)$$

Потери энергии при ударе

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \left( \frac{mm}{m+m} \right) v_0^2 = \frac{1}{4}mv_0^2 \text{ или } \Delta E_k = \frac{1}{2}E_{k1}. \quad (3.6.14)$$

На разрушение идёт половина первоначальной кинетической энергии.

### 3.7. АБСОЛЮТНО УПРУГИЙ УДАР

При абсолютно упругом ударе считается, что в телах после взаимодействия не возникает остаточных деформаций и разрушений. Кинетическая энергия частиц до удара полностью превращается в кинетическую энергию после удара. С известной степенью приближения можно считать, что так взаимодействуют бильярдные или стальные шары.

Пусть два абсолютно упругих шара с массами  $m_1$  и  $m_2$  до удара (рис. 3.6, а) движутся поступательно со скоростями  $\bar{v}_1$  и  $\bar{v}_2$ , направленными вдоль  $x$  линии, совпадающей с их центрами, причём  $v_1 > v_2$ . Требуется найти скорости шаров  $v'_1$  и  $v'_2$  после соударения (рис. 3.6, б).

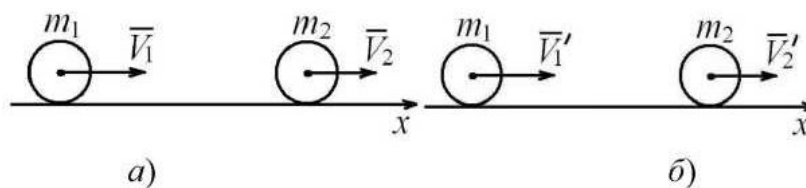


Рис. 3.6

При абсолютно упругом ударе будет выполняться закон сохранения импульса

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (3.7.1)$$

и закон сохранения энергии

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v'^2_1}{2} + \frac{m_2 v'^2_2}{2}. \quad (3.7.2)$$

Решая совместно эти уравнения, можно найти неизвестные скорости  $v'_1$  и  $v'_2$ . Для этого перепишем полученные уравнения в виде

$$m_2(v_2 - v'_2) = m_1(v'_1 - v_1); \quad (3.7.3)$$

$$m_2(v_2^2 - v'^2_2) = m_1(v'^2_1 - v_1^2). \quad (3.7.4)$$

Осуществим почленное деление выражения (3.7.4) на (3.7.3)

$$\frac{v_2^2 - v'^2_2}{v_2 - v'_2} = \frac{v'^2_1 - v_1^2}{v'_1 - v_1} \quad \text{или} \quad v_2 + v'_2 = v'_1 + v_1.$$

Умножим полученное соотношение на  $m_2$

$$m_2(v_2 + v'_2) = m_2(v'_1 + v_1). \quad (3.7.5)$$

Осуществив почленное сложение уравнений (3.7.3) и (3.7.5), после приведения подобных членов найдём

$$v'_1 = \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}. \quad (3.7.6)$$

Аналогично находим скорость второго тела после абсолютно упругого удара

$$v'_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.7.7)$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Пусть шары равной массы  $m_1 = m_2 = m$  движутся навстречу друг другу (рис. 3.7, а) с разными скоростями. На основе формул (3.7.6) и (3.7.7) найдём

$$v'_1 = v_2; \quad (3.7.8)$$

$$v'_2 = v_1, \quad (3.7.9)$$

т.е. происходит обмен импульсами и шары разлетаются с разными скоростями. Если до удара  $v_1 > v_2$ , то после удара  $v'_2 > v'_1$ . Если  $v_1 = v_2$  получим  $v'_2 = v'_1$ .

2. Пусть первый шар при абсолютно упругом ударе движется со скоростью  $v_1$ , а второй шар покоится при  $v_2 = 0$ . Формулы скоростей шаров после удара имеют вид

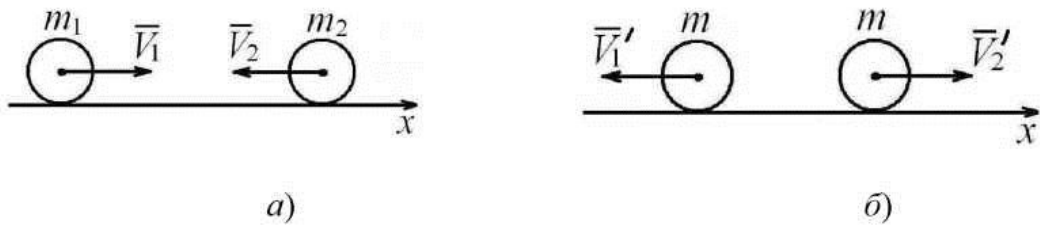


Рис. 3.7

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}; \quad (3.7.10)$$

$$v_2' = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2}. \quad (3.7.11)$$

Рассмотрим специальные случаи.

а) Пусть масса  $m_1$  первого шара больше, чем масса второго  $m_1 > m_2$ . Скорость первого шара до удара  $v_1$ , а скорость второго  $v_2 = 0$  (рис. 3.8, а).



Рис. 3.8

Согласно полученным формулам (3.7.10) и (3.7.11), скорость  $v_1'$  первого шара будет больше нуля, и первый шар будет двигаться после удара в том же направлении, но с меньшей скоростью  $v_1' < v_1$  (рис. 3.8, б). Второй шар приобретёт положительную скорость  $v_2'$  и будет двигаться в том же направлении.

б) Пусть  $m_1 < m_2$ . До удара первый шар движется со скоростью  $v_1$ , а второй покоится  $v_2 = 0$  (рис. 3.9, а). Согласно формуле (3.7.10) первый шар после удара будет иметь скорость  $v_1' < 0$ , т.е. его направление движения изменится на противоположное;  $v_2'$  также не равна нулю, но она положительна (рис. 3.9, б).



Рис. 3.9



в) Пусть массы абсолютно ударяющихся шаров одинаковы  $m_1 = m_2 = m$ . До удара первый шар имеет скорость  $v_1$ , а скорость второго шара  $v_2 = 0$  (рис. 3.10, а).



Рис. 3.10

На основании формул (3.7.10) и (3.7.11) найдём скорости тел после удара  $V_1' = 0$ ,  $V_2' = V_1$ , т.е. при абсолютном ударе импульс полностью передаётся от первого шара ко второму. При этом первый шар останавливается.

г) Пусть имеются три шара одинаковой массы  $m_1 = m_2 = m_3$ . До абсолютно упругого удара первый шар имеет скорость  $v_1$ , а два других покоятся (рис. 3.11, а). Первый шар при ударе передаёт свой импульс второму шару, а сам останавливается. Второй шар передаёт свой импульс третьему шару, а сам останавливается. В результате, после удара третий шар имеет скорость  $v_1$ , а два первых шара находятся в покое (рис. 3.11, б). Аналогичная ситуация складывается, когда число шаров более трёх.



Рис. 3.11

Абсолютно упругих тел не бывает. При ударе тел, выполненных из любого твёрдого материала, происходят частичные потери энергии. Коэффициентом восстановления по энергии называется отношение кинетической энергии тел после удара к кинетической энергии до удара

$$\epsilon = \frac{E_1' + E_2'}{E_1 + E_2}. \quad (3.7.12)$$

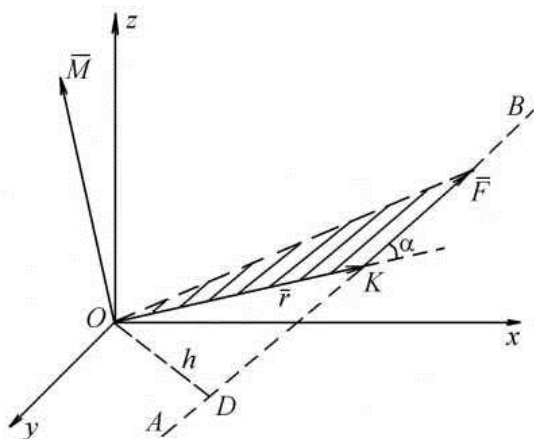
Коэффициентом восстановления по скорости называется отношение относительной скорости сближения тел после удара к относительной скорости до удара

$$k = \frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}. \quad (3.7.13)$$

Так, например, при соударении тел из дерева  $k = 0,5$ , из слоновой кости  $k = 0,89$ , из стекла  $k = 0,94$ . В предельных случаях для абсолютно неупругого удара  $k = 0$ , а для абсолютно упругого –  $k = 1$ .

## 4. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

### 4.1. МОМЕНТ СИЛЫ



**Рис. 4.1**

Сила может не только сообщать поступательное движение различным телам, но и оказывать на них вращательное действие. Мерой вращательного действия силы является *момент силы*. Под моментом силы относительно точки или центра  $O$  понимается *векторное произведение радиуса – вектора  $\vec{r}$  точки  $K$  приложения силы на вектор  $\vec{F}$*  (рис. 4.1)

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]. \quad (4.1.1)$$

Момент силы – векторная величина. Вектор  $\vec{M}$  направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ , причём если смотреть в конец вектора  $\vec{M}$ , то кратчайший поворот вектора  $\vec{r}$  к вектору  $\vec{F}$  виден происходящим против часовой стрелки. Другими словами, векторы  $\vec{r}$ ,  $\vec{F}$  и  $\vec{M}$  образуют правую тройку векторов. Численное значение вектора момента силы относительно точки  $O$ , согласно правилу векторного произведения, равно

$$M = Fr \sin \alpha, \quad (4.1.2)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ . Восстановим перпендикуляр из точки  $O$  к линии  $AB$  действия силы. (рис. 4.1). Кратчайшее расстояние  $h = OD$  от точки  $O$  до линии действия силы называется *плечом силы*. Из  $\triangle OKD$  найдём

$$r \sin \alpha = h. \quad (4.1.3)$$

Учитывая это выражение, из формулы (4.1.2) следует, что *модуль момента силы относительно точки  $O$  равен произведению модуля силы на плечо*

$$M = Fh. \quad (4.1.4)$$

Обозначив через  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$  проекции вектора момента силы  $\vec{M}$  относительно точки  $O$  на координатные оси, можно записать

$$\vec{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k},$$

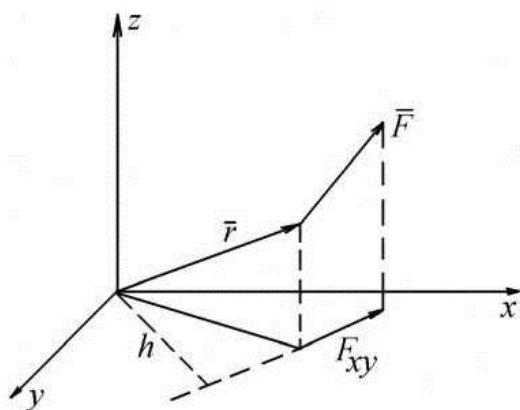


Рис. 4.2

где  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  – единичные векторы по соответствующим осям координат. Величины проекций  $M_x, M_y, M_z$  характеризуют также моменты силы относительно соответствующих осей координат. Так, например,  $M_z$  определяет момент силы относительно оси  $z$ . Для его определения находят проекцию силы  $\bar{F}$  на плоскость  $xOy$ , которая перпендикулярна оси  $z$  и обозначают её  $F_{xy}$  (рис. 4.2).

Находят кратчайшее расстояние  $h$  от оси  $z$  до линии действия силы  $F_{xy}$ , т.е. плечо силы. Момент силы  $\bar{F}$  относительно оси  $z$  равен

$$M_z = \pm F_{xy} h. \quad (4.1.5)$$

Если наблюдатель видит со стороны положительного направления оси  $z$ , что сила  $F_{xy}$  стремится повернуть тело вокруг оси  $z$  против хода часовой стрелки, то берётся знак «плюс», а в противном случае – знак «минус».

## 4.2. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Импульс  $\bar{p} = m\bar{v}$  – динамическая характеристика материальной точки при её поступательном движении. Пусть материальная точка массой  $m$  движется по криволинейной траектории. Положение движущейся точки определяется радиус-вектором  $\bar{r}$ . Вектором момента импульса  $\bar{L}$  материальной точки  $m$  относительно центра  $O$  называется векторное произведение радиус-вектора  $\bar{r}$  точки на импульс  $\bar{p}$

$$\bar{L} = [\bar{r} \times \bar{p}]; \quad (4.2.1)$$

или 
$$\bar{L} = [\bar{r} \times m\bar{v}]. \quad (4.2.2)$$

Три вектора  $\bar{r}$ ,  $\bar{p}$  и  $\bar{L}$  образуют правую тройку векторов (рис. 4.3). Численное значение момента импульса относительно точки  $O$  равно

$$L = pr \sin \alpha = mvr \sin \alpha, \quad (4.2.3)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\bar{p}$  и  $\bar{r}$  или между векторами  $\bar{v}$  и  $\bar{r}$ .

Проекции  $L_x, L_y$  и  $L_z$  вектора  $\bar{L}$  на координатные оси принято называть моментом импульса относительно координатных осей. Например,  $L_z$  определяет момент импульса относительно оси  $z$ .

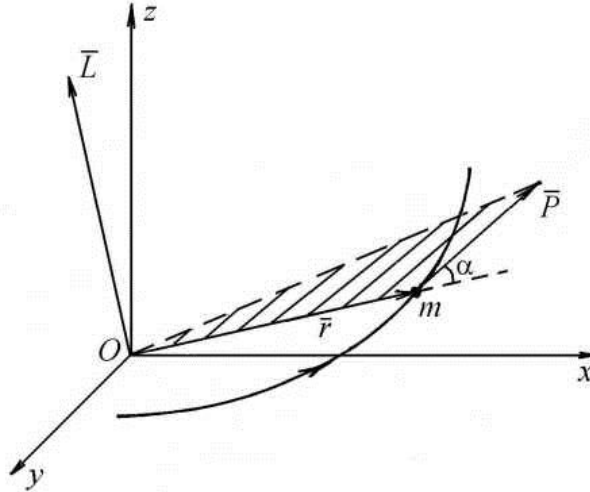


Рис. 4.3

При движении материальной точки  $m$  по окружности радиуса  $r$  момент импульса относительно начала координат равен

$$L = mvr, \quad (4.2.4)$$

так как угол  $\alpha$  между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{r}$  в этом частном случае равен  $90^\circ$ .

#### 4.3. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Пусть материальная точка массой  $m$  движется произвольно под действием силы  $\vec{F}$ . По второму закону Ньютона имеем

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}, \quad (4.3.1)$$

где  $\vec{v}$  – мгновенная скорость точки. Умножим обе части данного выражения векторно на радиус-вектор  $\vec{r}$  точки

$$\left[ \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \right] = \left[ \vec{r} \times \vec{F} \right]. \quad (4.3.2)$$

Найдём производную по времени от момента импульса относительно точки

$$\frac{d}{dt}[\vec{r} \times m\vec{v}] = \left[ \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} \right] + \left[ \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \right]. \quad (4.3.3)$$

Так как  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$  – скорость точки, то первое слагаемое в выражении (4.3.3) равно нулю, так как  $[\vec{v} \times m\vec{v}] = m[\vec{v} \times \vec{v}] = 0$ .

Следовательно, выражение (4.3.3) можно записать в виде

$$\left[ \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \right] = \frac{d}{dt} [\vec{r} \times m\vec{v}] = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (4.3.4)$$

Очевидно, что

$$[\vec{r} \times \vec{F}] = \vec{M}, \quad (4.3.5)$$

момент силы относительно неподвижной точки вращения. Таким образом, уравнение (4.3.2) принимает вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (4.3.6)$$

Этот результат называется *теоремой об изменении момента импульса материальной точки или основным законом динамики вращательного движения точки*: скорость изменения момента импульса материальной точки, вращающейся относительно неподвижного центра, равна моменту силы, действующей на ту же точку, относительно того же неподвижного центра. Другими словами, действие вращательного момента силы приводит к изменению момента импульса. Для конечного элементарного промежутка времени можно записать

$$\Delta\vec{L} = \vec{M}\Delta t. \quad (4.3.7)$$

Если момент сил, действующих на материальную точку, равен нулю,  $\vec{M} = 0$ , то согласно формуле (4.3.6), получим *закон сохранения импульса для материальной точки*

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \text{ или } \vec{L} = [\vec{r} \times m\vec{v}] = \text{const}. \quad (4.3.8)$$

Если момент сил, действующих на материальную точку относительно некоторого центра, равен нулю, то момент импульса материальной точки относительно того же центра сохраняется по величине и направлению.

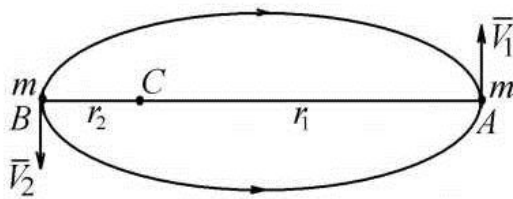


Рис. 4.4

Приведём следующий пример. Любая планета вращается вокруг Солнца по эллиптической орбите. При этом Солнце находится в одном из фокусов эллипса (рис. 4.4).

В точках максимального A и минимального B удаления планеты от Солнца моменты сил, действующих на планеты, относительно Солнца равны нулю. Следовательно, для точек A и B выполняется закон сохранения импульса

$$mv_1r_1 = mv_2r_2 \text{ или } v_1r_1 = v_2r_2,$$

т.е. мгновенная скорость движения планет обратно пропорциональна расстоянию до Солнца, что подтверждается астрономическими наблюдениями.

#### 4.4. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА ТВЁРДОГО ТЕЛА

Рассмотрим закономерность движения твёрдого тела, закреплённого в одной неподвижной точке  $O$ , вокруг которой тело может свободно вращаться. Совместим с этой точкой начало неподвижной системы координат. Точка  $O$  называется *центром вращения*. Положение в пространстве любой  $i$ -й точки тела с элементарной массой  $m_i$  определяется радиус-вектором  $\vec{r}_i$  проведённым из центра  $O$  в эту точку. Каждая  $i$ -я материальная точка имеет момент импульса относительно центра

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i] . \quad (4.4.1)$$

Векторная сумма моментов импульсов  $\vec{L}_i$  всех материальных точек тела относительно некоторого центра называется *главным моментом импульса тела относительно того же центра*

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i] . \quad (4.4.2)$$

Обозначим через  $\vec{F}_i$  равнодействующую всех внешних сил, действующих на  $i$ -ю точку, и через  $\vec{F}_{ik}$  силу, действующую на  $i$ -ю точку со стороны  $k$ -й точки тела. Момент  $\vec{M}_i$  внешней силы, действующей на  $i$ -ю материальную точку относительно центра  $O$ , равен

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i \times \vec{F}_i] . \quad (4.4.3)$$

Векторная сумма моментов  $\vec{M}_i$  всех внешних сил, приложенных к телу, относительно некоторого центра называется *результатирующим или главным моментом внешних сил относительно того же центра*

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \times \vec{F}_i] . \quad (4.4.4)$$

Векторная сумма моментов относительно точки  $O$  всех внутренних сил  $\vec{F}_{ik}$  взаимодействия между точками тела равна нулю (см. разд. 2.9)

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{ik} = \sum_{i=1}^n \left[ \vec{r}_i \times \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ik} \right] = 0 . \quad (4.4.5)$$

Согласно теореме об изменении момента импульса (4.3.6), для каждой материальной точки твёрдого тела можно записать

$$\frac{d\bar{L}_i}{dt} = \bar{M}_i + \bar{M}_{ik}.$$

Осуществляя суммирование по всем точкам твёрдого тела, получим

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \bar{L}_i = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i + \sum_{i=1}^n \bar{M}_{ik}. \quad (4.4.6)$$

Учитывая выражение (4.4.2), (4.4.4) и (4.4.5), получим теорему об изменении момента импульса твёрдого тела, закреплённого в одной неподвижной точке

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \bar{M}_O. \quad (4.4.7)$$

Таким образом, *скорость изменения главного момента импульса тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, равна результирующему моменту относительно этой точки всех внешних сил, приложенных к телу. Этот вывод составляет основной закон динамики вращательного движения твёрдого тела, закреплённого в одной неподвижной точке.* Для конечного промежутка времени  $\Delta t$  можно записать

$$\Delta \bar{L}_O = \bar{M}_O \Delta t, \quad (4.4.8)$$

т.е. действие момента внешних сил относительно некоторого центра приводит к изменению момента импульса твёрдого тела, вычисленного относительно того же центра. Если момент внешних сил  $M_O = 0$ , то из формулы (4.4.7) получим

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad \bar{L}_O = \sum_{i=1}^n [\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i] = \text{const}. \quad (4.4.9)$$

Это соотношение принято называть *Законом сохранения момента импульса твёрдого тела относительно неподвижной точки: момент импульса твёрдого тела, вычисленный относительно некоторого неподвижного центра, остаётся постоянным по величине и направлению в мировом пространстве, если результирующий момент всех внешних сил, приложенных к телу относительно того же центра, равен нулю.* Простейшим примером этого закона является сохранение в пространстве направление оси вращения юлы. Вектор момента импульса  $\bar{L}_O$  при этом совпадает с осью её вращения. Однако трение в единственной точке опоры юлы приводит к изменению вектора  $\bar{L}_O$  момента импульса, и при малых скоростях вращения юла падает. Проявлением данного закона (4.4.9) является сохранение в пространстве направления оси вращения Земли при её суточном движении.

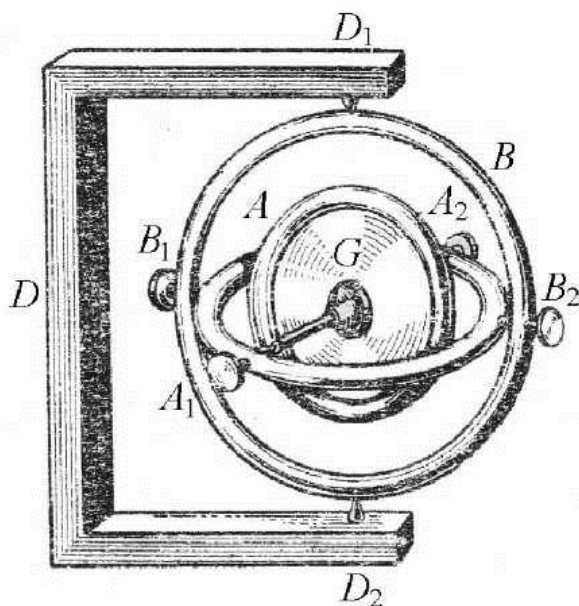


Рис. 4.5

В справедливости закона сохранения момента импульса можно убедиться на опыте с гироскопом, имеющим три степени свободы. *Гироскопом* называется однородное симметричное тело, быстро вращающееся вокруг его оси симметрии. Гироскоп обладает тремя степенями свободы, если он укреплен в подставке так, что его центр инерции  $G$  неподвижен, а сам гироскоп может свободно вращаться вокруг любой оси, проходящей через точку  $G$ . Обычно это осуществляется путём

подвеса гироскопа с помощью двух кольцевых обоев, входящих одна в другую (рис. 4.5). Гироскоп свободно вращается во внутренней обойме  $A$  вокруг оси  $A_1A_2$ . Внутренняя обойма сама свободно вращается во внешней обойме  $B$  вокруг оси  $B_1B_2$ , перпендикулярной к  $A_1A_2$ . Наконец, внешняя обойма свободно вращается в обойме  $D$  вокруг оси  $D_1D_2$ , перпендикулярной и к  $A_1A_2$  и к  $B_1B_2$ . Все три оси пересекаются в центре инерции  $G$  гироскопа.

Если отвлечься от влияния трения, то момент относительно неподвижной точки  $G$  всех внешних сил, прикладываемых к гироскопу через стойку  $D$ , равен нулю. Момент силы тяжести самого гироскопа также равен нулю, так как точка  $G$  – его центр инерции. Поэтому при любых воздействиях на стойку  $D$  вращающийся гироскоп сохраняет неизменным направление вектора  $\vec{L}$  момента импульса относительно точки  $G$ . Вектор  $\vec{L}$  направлен вдоль оси  $A_1A_2$  вращения гироскопа. Поэтому при любых поворотах стойки  $D$  направление оси  $A_1A_2$  гироскопа по отношению к неподвижным окружающим телам не изменяется.

Гироскопы нашли большое техническое применение: автономные системы наведения ракет и морских торпед; автопилот в авиации; гироскопас и т.д.

Учитывая, что векторы  $\vec{L}_O$  и  $\vec{M}_O$  можно выразить через их проекции на оси координат:

$$\vec{L}_O = L_x \vec{i} + L_y \vec{j} + L_z \vec{k}, \quad (4.4.10)$$



$$\bar{M}_O = M_x \bar{i} + M_y \bar{j} + M_z \bar{k}, \quad (4.4.11)$$

векторное соотношение (4.4.7) эквивалентно трем скалярным уравнениям

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x; \quad (4.4.12)$$

$$\frac{dL_y}{dt} = M_y; \quad (4.4.13)$$

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (4.4.14)$$

Полученные уравнения (4.4.12) – (4.4.14) выражают *основной закон динамики для твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси: скорость изменения момента импульса тела относительно неподвижной оси вращения равна результирующему моменту относительно этой же оси всех внешних сил, действующих на тело* (см. разд. 4.8).

Для конечного промежутка времени имеем

$$\Delta L_z = M_z \Delta t, \quad (4.4.15)$$

т.е. момент силы  $M_z$ , приложенный к твёрдому телу относительно оси вращения  $z$ , приводит к изменению момента импульса  $\Delta L_z$  этого тела, вычисляемого относительно той же оси. Следовательно, момент импульса  $L_z$  является основной динамической характеристикой при вращении тела вокруг неподвижной оси.

#### 4.5. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

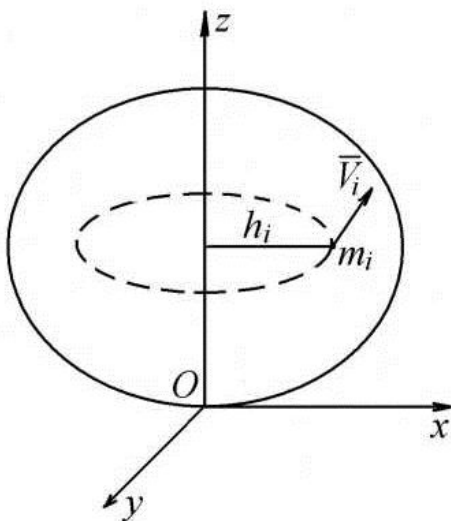


Рис. 4.6

Учитывая, что вращение твёрдого тела широко используется в различных технических механизмах, рассмотрим вопрос о вычислении момента импульса  $L_z$  твёрдого тела, имеющего неподвижную ось  $z$  вращения (рис. 4.6). Разобьём твёрдое тело на элементарные участки массой  $m_i$ . При вращении твёрдого тела относительно оси  $z$ , каждая элементарная точка  $i$  описывает окружность, плоскость которой расположена перпендикулярно оси  $z$  вращения. Обозначим радиус  $i$ -й окружности через  $h_i$ , а

её скорость через  $\bar{v}_i$ . Согласно определению (4.2.4) момент импульса  $i$ -й материальной точки относительно оси вращения  $z$  равен

$$L_i = m_i v_i h_i. \quad (4.5.1)$$

Так как угловая скорость  $\omega$  вращения твёрдого тела одинакова для всех точек тела, то  $v_i = \omega h_i$ . Выражение (4.5.1) принимает вид

$$L_i = \omega m_i h_i^2. \quad (4.5.2)$$

Осуществляя суммирование моментов  $L_i$  импульсов всех элементарных точек, найдём главный момент импульса твёрдого тела относительно оси  $z$

$$L_z = \sum_{i=1}^n L_i = \omega \sum_{i=1}^n m_i h_i^2. \quad (4.5.3)$$

*Произведение массы материальной точки на квадрат её расстояния до оси вращения называется моментом инерции точки относительно данной оси, т.е.*

$$I_{iz} = m_i h_i^2. \quad (4.5.4)$$

*Сумма моментов инерции материальных точек относительно некоторой оси вращения называется моментом инерции данного тела относительно рассматриваемой оси*

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i h_i^2. \quad (4.5.5)$$

По-другому можно сказать, что *сумма произведений всех масс материальных точек на квадрат их расстояний до оси вращения называется моментом инерции твёрдого тела относительно данной оси*. Момент инерции тела зависит не только от массы, но и от того, как эта масса распределяется по отношению к оси вращения, а также от положения оси по отношению к данному телу. Следовательно, момент инерции зависит от формы тела и от положения оси вращения. Момент инерции является мерой инертности тела при его вращении (см. разд. 4.6) и является важной динамической характеристикой. Учитывая выражение (4.5.5), уравнение (4.5.3) принимает вид

$$L_z = \omega I_z. \quad (4.5.6)$$

*т.е. момент импульса твёрдого тела относительно некоторой оси  $z$  равен произведению угловой скорости вращения тела на момент инерции тела, вычисленного относительно той же оси*. Следовательно, расчёт моментов импульсов тел сводится к вычислению моментов инерции этих тел по отношению к рассматриваемым осям вращения. Рассмотрим несколько примеров вычисления моментов инерции различных тел.

1. *Тонкостенный цилиндр или кольцо.* Пусть ось  $z$  вращения совпадает с осью симметрии цилиндра (рис. 4.7). Другими словами, ось вращения проходит через центр масс  $C$  цилиндра или кольца. Будем считать, что толщина стенок цилиндра значительно меньше его радиуса  $R$ . Разобьём тонкостенный цилиндр на элементарные массы  $\Delta m_i$ . Согласно определению, момент инерции тонкостенного цилиндра по отношению к оси  $z$  будет равен

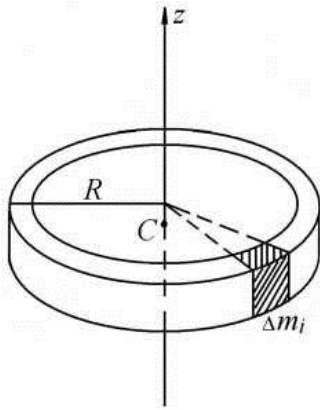


Рис. 4.7

$$I_{zC} = \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n \Delta m_i R^2 = R^2 \sum_{i=1}^n \Delta m_i .$$

Учитывая, что  $\sum_{i=1}^n \Delta m_i = m$  – масса рассматриваемого кольца, получим

считываемого кольца, получим

$$I_{zC} = mR^2 . \quad (4.5.7)$$

Данный результат очевиден, так как радиус  $R$  вращения одинаков для всех элементарных масс.

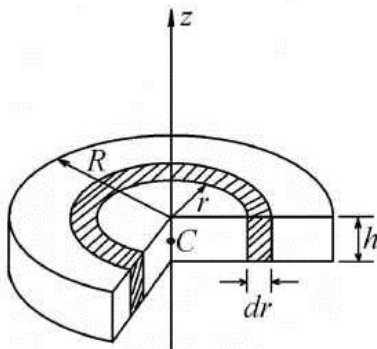


Рис. 4.8

2. *Диск или цилиндр.* Пусть ось вращения  $z$  проходит через центр масс  $C$  перпендикулярно к плоскости диска (рис. 4.8). Обозначим через  $m$  массу диска, а через  $R$  – его радиус. Разобьём диск на элементарные тонкостенные цилиндры массой  $dm$ . Момент инерции тонкостенного цилиндра относительно оси  $z$  равен

$$dI_i = r^2 dm . \quad (4.5.8)$$

Массу  $dm$  выразим через плотность  $\rho$  материала цилиндра

$$dm = \rho dV = 2\pi r dr h \rho , \quad (4.5.9)$$

где  $dV$  – элементарный объём;  $dr$  – толщина элементарного цилиндра, а  $h$  – его высота. Учитывая полученные выражения, на основании (4.5.8) получаем

$$dI_i = 2\pi \rho h r^3 dr . \quad (4.5.10)$$

Момент инерции цилиндра или диска найдём интегрированием полученного выражения

$$I_{zC} = 2\pi \rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho h \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} \rho \pi R^2 h R^2 \text{ или } I_{zC} = \frac{1}{2} m R^2 . \quad (4.5.11)$$

3. *Однородный стержень.* Пусть  $m$  – масса стержня;  $l$  – его длина (рис. 4.9). Ось вращения проходит через центр масс  $C$  перпендикулярно

но к продольной оси стержня. Разобьём стержень на элементарные участки длиной  $dx$  и массой  $dm$ . Момент инерции элементарного участка относительно оси  $z$  равен

$$dI_i = x^2 dm = x^2 \rho dV ,$$

где  $\rho$  – плотность;  $dV = Sdx$  – элементарный объём;  $S$  – площадь поперечного сечения стержня. Следовательно, имеем

$$dI_i = \rho S x^2 dx .$$

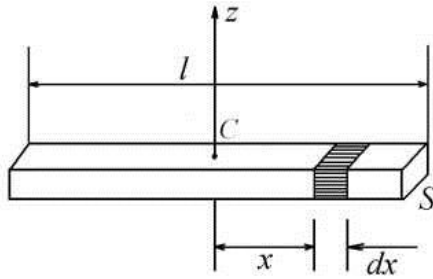


Рис. 4.9

Интегрирование по всей длине стержня даёт

$$I_{zC} = \rho S \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{1}{12} \rho S l^3 .$$

Учитывая, что  $\rho S l = m$  – масса всего стержня, окончательно найдём

$$I_{zC} = \frac{1}{12} m l^2 . \quad (4.5.12)$$

4. *Шар*. Момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр масс  $C$ , равен

$$I_{zC} = \frac{2}{5} m R^2 , \quad (4.5.13)$$

где  $m$  – масса,  $R$  – радиус шара.

Если найден момент инерции тела относительно оси  $z$ , проходящей через центр масс, то с помощью теоремы Штейнера можно определить момент инерции тела относительно любой оси  $z'$ , которая параллельна первой. Докажем эту теорему для частного случая двух малых тел массами  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 4.10). Пусть точка  $C$  является центром масс системы двух тел, для которой выполняется соотношение

$$m_1 h_1 = m_2 h_2 . \quad (4.5.14)$$

Момент инерции двух тел относительно оси  $z$ , проходящий через центр масс  $C$ , равен

$$I_{zC} = m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 . \quad (4.5.15)$$

Вычислим момент инерции рассматриваемых тел относительно оси  $z'$ , которая отстоит от оси  $z$  на расстоянии  $d$

$$I_{z'} = m_1 (h_1 + d)^2 + m_2 (h_2 - d)^2 .$$

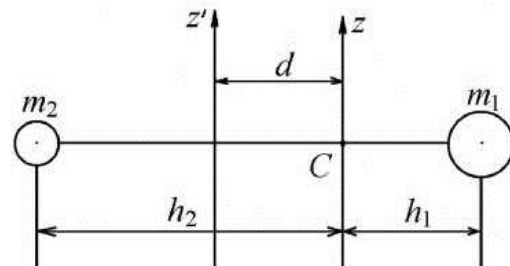


Рис. 4.10

Откуда найдём

$$I_{z'} = m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 + (m_1 + m_2) d^2 + 2m_1 h_1 d - 2m_2 h_2 d .$$

Учитывая выражения (4.5.14) и (4.5.15), найдём

$$I_{z'} = I_{zC} + md^2 , \quad (4.5.16)$$

где  $m = m_1 + m_2$  – общая масса тел. Таким образом, момент инерции  $I_{z'}$  тела относительно любой оси  $z'$  равен сумме момента инерции  $I_{zC}$  тела относительно оси  $z$ , проходящей через центр масс  $C$  тела и произведения массы  $m$  тела на квадрат расстояния  $d$  между параллельными осями. Из формулы (4.5.16) следует, что при удалении оси вращения от центра масс момент инерции возрастает. Приведём несколько примеров.

а) Если ось  $z$  вращения тонкостенного цилиндра (рис. 4.7) перенести на расстояние  $d = R$  параллельно самой себе, то по теореме Штейнера новый момент инерции будет равен

$$I_{z'} = I_{zC} + md^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2 , \quad (4.5.17)$$

т.е. он возрастает в два раза.

б) Такой перенос оси вращения для диска (рис. 4.8) увеличивает момент инерции в три раза

$$I_{z'} = \frac{1}{2} mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2 . \quad (4.5.18)$$

в) По теореме Штейнера найдём момент инерции стержня (рис. 4.9) относительно оси, проходящей через один из его концов

$$I_{z'} = \frac{1}{12} ml^2 + m \frac{l^2}{4} = \frac{1}{3} ml^2 , \quad (4.5.19)$$

т.е. момент инерции возрастает в четыре раза.

## 4.6. ОСНОВНОЙ ЗАКОН ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Из формулы (4.5.6) следует, что основное уравнение (4.4.14) динамики тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, можно представить в форме

$$\frac{d}{dt}(I_z \omega) = M_z . \quad (4.6.1)$$

Если тело абсолютно твёрдое, то его момент инерции  $I_z$  не зависит от времени. Поэтому

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z \text{ или } I_z \varepsilon = M_z, \quad (4.6.2)$$

где  $\varepsilon$  – угловое ускорение тела. Из полученного уравнения (4.6.2) видно, что *угловое ускорение твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси  $z$ , прямо пропорционально результирующему моменту относительно этой оси всех внешних сил, действующих на тело, и обратно пропорционально моменту инерции тела относительно той же оси*

$$\varepsilon = \frac{M_z}{I_z}. \quad (4.6.3)$$

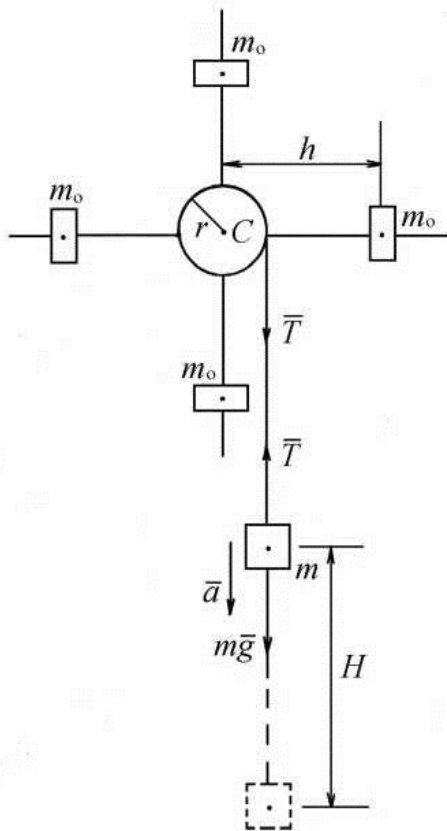
Таким образом, момент инерции тела является мерой его инертности во вращательном движении.

Момент  $M_z$  внешних сил считается положительным, если силы вызывают увеличение угловой скорости вращения тела ( $\frac{d\omega}{dt} > 0$ ). Если

$$M_z = 0, \text{ то } \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0 \text{ и угловая}$$

скорость вращения твёрдого тела постоянна. Следовательно, изолированное твёрдое тело может находиться не только в состоянии покоя или равномерного прямолинейного поступательного движения, но и в состоянии *равномерного вращения вокруг неподвижной оси*.

Зависимость углового ускорения твёрдого тела от его момента инерции и момента внешних сил можно проиллюстрировать на опыте



**Рис. 4.11**

с прибором Обербека (рис. 4.11). Крестовина, состоящая из четырёх взаимно перпендикулярных одинаковых стержней с надетыми и закреплёнными на них четырьмя одинаковыми грузами массой  $m_0$  каждый, может свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси  $C$ . Грузы массой  $m_0$  расположены на равных расстояниях  $h$  от оси  $C$ , которая является центром масс крестовины. Крестовина жёстко скреплена со шкивом радиуса  $r$ , на котором намотана нить. Один конец нити закреплён на шкиве, а к другому привязан груз массой  $m$ .

Если груз  $m$  отпустить, то он будет падать вниз, натягивая нить и приводя крестовину во вращательное движение вокруг оси  $C$ .

Движение груза массой  $m$  происходит с ускорением  $a$  по закону

$$H = \frac{at^2}{2}.$$

Зная расстояние  $H$  и время  $t$ , за которое груз проходит это расстояние, можно определить опытным путём ускорение

$$a = \frac{2H}{t^2}. \quad (4.6.4)$$

Угловое ускорение крестовины будет равно

$$\varepsilon = \frac{a}{r},$$

где  $r$  – радиус шкива, на который намотана нить

$$\varepsilon = \frac{2H}{rt^2}. \quad (4.6.5)$$

Записав второй закон Ньютона для поступательного движения груза массой  $m$

$$ma = mg - T,$$

находят силу натяжения нити

$$T = mg - ma = m(g - a).$$

Учитывая выражение (4.6.4), найдём

$$T = m\left(g - \frac{2H}{t^2}\right). \quad (4.6.6)$$

Момент внешних сил, действующих на крестовину, равен

$$M = Tr = mr\left(g - \frac{2H}{t^2}\right). \quad (4.6.7)$$

Момент инерции крестовины с грузами складывается из момента инерции четырёх стержней  $I_K$  и момента инерции четырёх грузов массами  $m_0$ , т.е.

$$I_C = I_K + 4m_0h^2. \quad (4.6.8)$$

Опыт показывает, если момент инерции  $I_C$  постоянен, то при увеличении массы  $m$  груза, а следовательно, и при увеличении момента силы  $M$  угловое ускорение всей системы увеличивается в соответствии с формулой (4.6.3); если момент внешних сил  $M$  постоянен, то при увеличении расстояния  $h$  грузов  $m_0$  от оси вращения, т.е. при увеличении момента инерции крестовины, угловое ускорение уменьшается в соответствии с формулой (4.6.3).

#### 4.7. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

При произвольном движении твёрдого тела его разные материальные точки движутся с различными скоростями  $\vec{v}_i$ . Кинетическая энергия тела, движущегося произвольным образом, равна сумме кинетических энергий всех материальных точек, на которые это тело можно мысленно разбить

$$E_K = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (4.7.1)$$

Если тело вращается вокруг неподвижной оси  $Oz$  (рис. 4.6) с угловой скоростью  $\omega$ , то линейная скорость  $i$ -й точки равна

$$v_i = \omega h_i,$$

где  $h_i$  – расстояние от этой точки до оси вращения. Следовательно, кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

$$E_{\text{к.вр}} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i h_i^2 = \frac{I_z \omega^2}{2}, \quad (4.7.2)$$

где  $I_z$  – момент инерции тела относительно оси вращения.

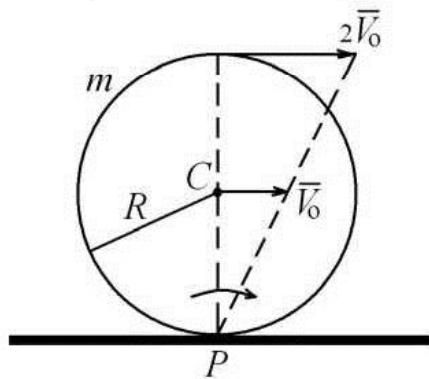


Рис. 4.12

Найдём кинетическую энергию при плоском движении тела. Пусть, например, цилиндр массой  $m$  катится по горизонтальной плоскости (рис. 4.12) со скоростью  $v_C$ ,  $C$  – центр масс. Учитывая, что при качении цилиндра точка  $P$  неподвижна, и она является мгновенным центром скоростей, для кинетической энергии имеем

$$E_K = \frac{I_P \omega^2}{2}, \quad (4.7.3)$$

где  $I_P$  – момент инерции тела, относительно оси, проходящей через точку  $P$ . По теореме Штейнера имеем

$$I_P = I_C + mR^2,$$

где  $R$  – радиус цилиндра. Следовательно, получим

$$E_K = \frac{I_C \omega^2}{2} + \frac{m \omega^2 R^2}{2}.$$

Учитывая, что  $\omega R = v_C$  – скорость центра масс тела, окончательно получим

$$E_K = \frac{m v_C^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2}. \quad (4.7.4)$$



*Кинетическая энергия тела, совершающего плоское движение, складывается из кинетической энергии поступательного движения центра масс, считая, что в центре масс сосредоточена вся масса тела, и кинетической энергии вращения данного тела вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.*

#### 4.8. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

В разделе 4.4 показано (4.4.14), что скорость изменения момента импульса тела относительно неподвижной оси  $z$  вращения равна результирующему моменту относительно этой же оси всех внешних сил, действующих на тело

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (4.8.1)$$

Отсюда следует, если  $M_z = 0$ , то

$$\frac{dL_z}{dt} = 0 \text{ и } L_z = \text{const}, \quad (4.8.2)$$

*т.е. справедлив закон сохранения момента импульса относительно оси  $z$ : если момент внешних сил относительно неподвижной оси вращения тела равен нулю, то момент импульса тела относительно этой оси не изменяется в процессе движения.*

Учитывая формулу (4.5.6), данный закон можно записать в виде

$$I_z \omega_z = \text{const}, \quad (4.8.3)$$

где  $I_z$  – момент инерции тела относительно оси  $z$  вращения;  $\omega_z$  – угловая скорость тела. Указанный закон сохранения можно сформулировать так: *если результирующий момент всех внешних сил, приложенных к телу, относительно какой-либо неподвижной оси, тождественно равен нулю, то произведение угловой скорости вращения тела на момент его инерции относительно той же оси не изменяется с течением времени.*

Отсюда следуют важные выводы. Во-первых, если момент инерции тела  $I_z = \text{const}$ , то при  $M_z = 0$  из формулы (4.8.3) следует, что угловая скорость не изменяется, т.е. угловая скорость  $\omega_z = \text{const}$ . Примером может служить постоянство угловых скоростей вращения планет Солнечной системы вокруг собственных осей. Во-вторых, из формулы (4.8.3) следует, если момент инерции тела относительно оси  $z$  вращения изменится, то должна измениться и угловая скорость вращения тела относительно той же оси, при условии, что  $M_z = 0$ .

Этот вывод легко проиллюстрировать с помощью прибора, изображённого на рис. 4.13.

Прибор состоит из двух грузов одинаковых масс  $m$ , которые с помощью лёгкого пантографа укреплены на вертикальном стержне с помощью двух подшипников. Верхний подшипник  $1$  прибора неподвижен, а нижний  $2$  с помощью трубочки может перемещаться по вертикальному стержню. Грузы массой  $m$  можно приводить во вращение вокруг вертикальной

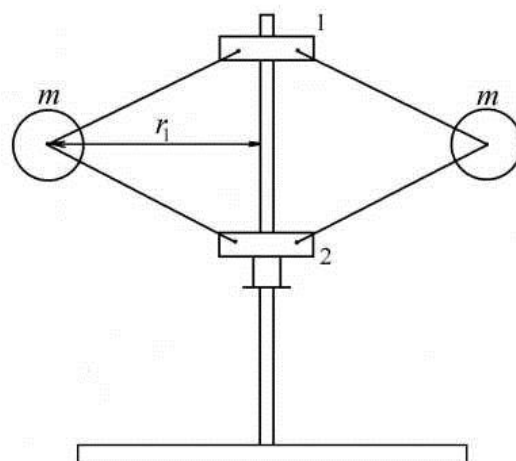


Рис. 4.13

оси с произвольной угловой скоростью. Располагают грузы на достаточно большом расстоянии  $r_1$  от оси вращения и сообщают грузам небольшую угловую скорость вращения  $\omega_1$ . При этом момент инерции грузов равен  $I_1 = 2mr_1^2$ . Перемещают нижний подшипник  $2$  пантографа вниз так, чтобы уменьшить радиус вращения грузов ( $r_2 < r_1$ ). При этом уменьшается момент инерции  $I_2 = 2mr_2^2$ , т.е.  $I_2 < I_1$ . Наблюдают значительное увеличение угловой скорости вращения грузов, т.е.  $\omega_2 > \omega_1$ . Таким образом, выполняется соотношение

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2. \quad (4.8.4)$$

Закон сохранения момента импульса используется балеринами, фигуристами, мастерами прыжков в воду с трамплина и др.

Чтобы привести твёрдое тело во вращении вокруг неподвижной оси  $z$ , необходимо совершить работу  $A = M_z(\varphi_2 - \varphi_1)$ , где  $M_z$  – момент внешних сил,  $(\varphi_2 - \varphi_1)$  – угол поворота тела. Согласно закону сохранения энергии, эта работа идёт на увеличение кинетической энергии вращения

$$A = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2}. \quad (4.8.5)$$

## 5. УПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ ТЕЛ

### 5.1. ИДЕАЛЬНЫЕ УПРУГИЕ ТЕЛА

Все твёрдые тела под действием внешних сил изменяют свою форму и объём. Эти изменения тел называются *деформациями*. Для твёрдых тел различают *упругую и пластическую деформации*. Деформация называется упругой, если после снятия воздействия внешней силы на тело, деформации исчезают полностью. Если после снятия воздействия сил возникает остаточная деформация, то такая деформация называется пластической. Вопрос о том, будет деформация упругой или пластичной, зависит не только от физических свойств тел, но и от величины приложенных сил. Если внешние механические силы превышают так называемый *предел упругости*, то деформация будет пластической, если меньше, то деформация будет упругой. Все реальные тела обладают пластической деформацией, так как даже при малом воздействии тело не восстанавливается полностью. *Идеально упругими телами* называют такие, в которых пластическая деформация невозможна.

### 5.2. ДЕФОРМАЦИЯ СТЕРЖНЕЙ

Пусть имеется стержень некоторой длины  $l$  и поперечным сечением площадью  $S$ . Под действием внешних сил  $\bar{F}^e$ , приложенных к его торцам, стержень деформируется. Мысленно рассечём упругодеформированный стержень на две части. Каждая часть стержня находится в равновесии, так как внешняя сила  $\bar{F}^e$ , действующая на данную часть, уравновешивается *внутренней силой упругости*  $\bar{F}$ , действующей на рассматриваемую часть со стороны другой. Отношение внутренней силы упругости  $\bar{F}$  к площади поперечного сечения стержня называется *механическим напряжением*. Если внешние силы растягивают стержень, то механическое напряжение называется *натяжением*

$$T = \frac{F}{S}. \quad (5.2.1)$$

Если при деформации стержень уменьшает размеры, то механическое напряжение называется *давлением*

$$P = -\frac{F}{S}. \quad (5.2.2)$$

Очевидно, что  $T = -P$ ,  $P = -T$ .

Пусть к стержню приложено механическое натяжение, при котором длина стержня увеличивается от  $l_0$  до  $l$  (рис. 5.1). Абсолютной деформацией стержня называется удлинение стержня

$$l - l_0 = l_0 + \Delta l - l_0 = \Delta l. \quad (5.2.3)$$

Относительной деформацией называется отношение удлинения  $\Delta l$  стержня к его первоначальной длине

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (5.2.4)$$

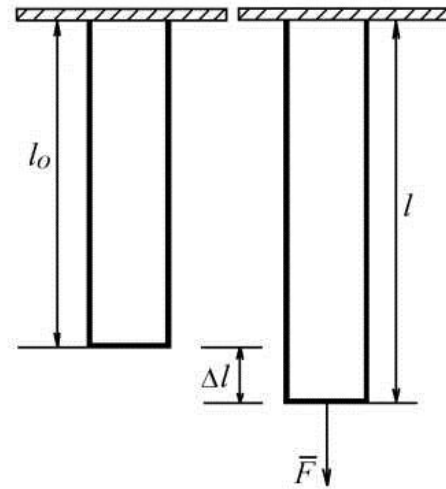


Рис. 5.1

При растяжении стержня  $\varepsilon > 0$ , так как  $\Delta l > 0$ ; при сжатии  $\varepsilon < 0$ , так как  $\Delta l < 0$ .

Английский физик Р. Гук экспериментально установил, что механическое напряжение упругодеформированного тела прямо пропорционально его относительной деформации (закон Гука)

$$T = E \frac{\Delta l}{l_0} = E\varepsilon, \quad (5.2.5)$$

где  $E$  – модуль упругости или модуль Юнга. Допустим, что удлинение стержня  $\Delta l$  равно его первоначальной длине  $l_0$ , т.е.  $\Delta l = l_0$ , или

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = 1$ . В этом случае, согласно формуле (5.2.5), модуль Юнга равен  $E = T$ . Следовательно, модуль Юнга показывает, какое механическое натяжение нужно приложить к стержню, чтобы увеличить его длину вдвое, если при этом выполняется закон Гука.

Аналогично, закон Гука для сжатия стержня имеет вид

$$P = E \frac{\Delta l}{l_0} = E\varepsilon. \quad (5.2.6)$$

Опыт показывает, что при растяжении стержней их поперечные размеры уменьшаются, а при сжатии – увеличиваются.

Пусть первоначальный поперечный размер стержня был равен  $a_0$ . При растяжении стержня его поперечный размер стал равен  $a = a_0 - \Delta a$ , где  $\Delta a$  – абсолютное изменение поперечного размера стержня. Относительное изменение поперечного размера будет равно

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{a - a_0}{a_0} = \frac{a_0 - \Delta a - a_0}{a_0} = -\frac{\Delta a}{a_0}. \quad (5.2.7)$$

Следовательно, при растяжении стержня  $\varepsilon_{\perp} < 0$ , при сжатии  $\varepsilon_{\perp} > 0$ .

Отношение относительного поперечного сжатия стержня к относительному удлинению стержня, взятому с обратным знаком, называется *коэффициентом Пуассона*

$$\mu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon} \quad \text{или} \quad \mu = -\frac{\frac{\Delta a}{a_0}}{\frac{\Delta l}{l_0}}. \quad (5.2.8)$$

Зная коэффициент Пуассона и относительное удлинение стержня, можно определить относительное поперечное сжатие

$$\varepsilon_{\perp} = -\mu\varepsilon. \quad (5.2.9)$$

Если вещество однородно и изотропно, то его упругие свойства полностью определяются двумя физическими величинами  $E$  и  $\mu$ .

### 5.3. ДЕФОРМАЦИЯ СДВИГА

*Сдвигом* называют такую деформацию твёрдого тела, при которой все его плоские слои, параллельные некоторой плоскости, называемой плоскостью сдвига, не искривляясь и не изменяясь в размерах, смещаются параллельно друг другу (рис. 5.2). Сдвиг происходит под действием касательной силы  $\bar{F}$ , приложенной к грани  $BC$  параллельной плоскости сдвига. Грань  $AD$ , параллельная  $BC$ , закреплена неподвижно. Отношение касательной силы  $\bar{F}$  к площади  $BC$  грани тела принято называть касательным механическим напряжением

$$\tau = \frac{F}{S}, \quad (5.3.1)$$

где  $S$  – площадь поверхности грани  $BC$  тела.

За величину деформации сдвига принимают угол  $\gamma$ , т.е. при малых деформациях

$$\gamma \approx \text{tg}\gamma = \frac{CC'}{DC}. \quad (5.3.2)$$

*Абсолютный сдвиг* равен расстоянию  $CC'$ , а  $\gamma$  – называют *углом сдвига* или *относительным сдвигом*.

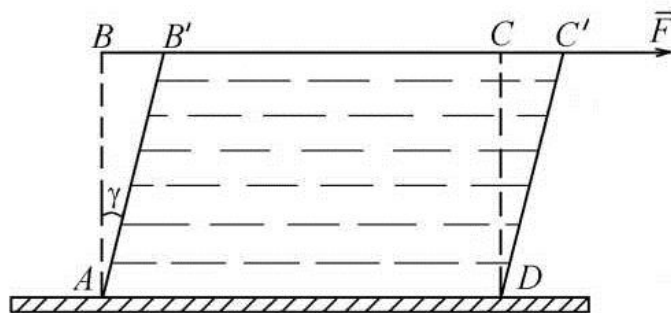


Рис. 5.2

По закону Гука следует, что *касательное механическое напряжение прямо пропорционально углу сдвига*

$$\tau = G\gamma, \quad (5.3.3)$$

где  $G$  – модуль сдвига. Как и модуль Юнга, модуль сдвига зависит от физических свойств вещества и его состояния. Можно показать, что для однородных и изотропных твёрдых тел справедливо соотношение

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \quad (5.3.4)$$

где  $E$  – модуль Юнга;  $\mu$  – коэффициент Пуассона. Так как для твёрдых тел  $\mu < \frac{1}{2}$ , то  $G < E$ , т.е. модуль сдвига всегда меньше модуля Юнга для данного твёрдого тела.

#### 5.4. ДЕФОРМАЦИЯ КРУЧЕНИЯ

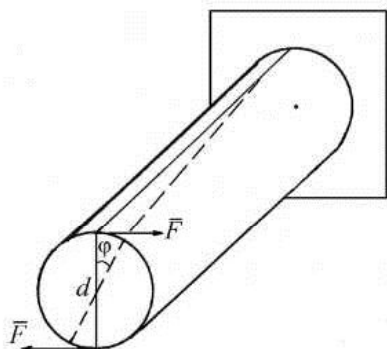


Рис. 5.3

Деформация кручения возникает в образце (стержне, проволоке и т.п.), если одно сечение образца закреплено неподвижно, а ко второму приложена пара сил  $\bar{F}$  (рис. 5.3). Пара сил создаёт вращательный момент сил

$$M = Fd. \quad (5.4.1)$$

Под действием вращательного момента все поперечные сечения стержня поворачиваются на некоторые углы тем большие, чем дальше эти сечения расположены от сечения, которое закреплено неподвижно. Деформация кручения сводится к сдвигу поперечных слоёв стержня. За величину деформации кручения принимается угол  $\phi$  поворота одного основания стержня по отношению к другому. Закон Гука: *момент внешних сил при упругой деформации кручения прямо пропорционален величине деформации*

$$M = D\phi, \quad (5.4.2)$$

где  $D$  – называется постоянной кручения. Величина  $D$  зависит не только от физических свойств твёрдого тела и его состояния, но и от геометрических размеров образца. Так, например, для сплошного стержня длиной  $l$  и радиусом  $R$

$$D = \frac{G\pi R^4}{2l}, \quad (5.4.3)$$

где  $G$  – модуль сдвига.

## 6. ДВИЖЕНИЕ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЁТА

### 6.1. ПОНЯТИЕ О СИЛАХ ИНЕРЦИИ

Часто, движение материальной точки целесообразно рассматривать по отношению к двум системам отсчёта: инерциальной  $S$  (неподвижной) и неинерциальной  $S'$ , которая может двигаться произвольно. Неинерциальность подвижной системы  $S'$  может быть обусловлена её поступательным движением с ускорением  $\bar{a}_0$  или её вращением с угловой скоростью  $\omega$  (см. разд. 2.1). Движение подвижной системы отсчёта  $S'$  по отношению к инерциальной системе отсчёта  $S$  принято называть *переносным движением*. Движение материальной точки массы  $m$  по отношению к инерциальной системе отсчёта  $S$  подчиняется второму закону Ньютона

$$\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m}, \quad (6.1.1)$$

где  $\bar{F}$  – равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке со стороны взаимодействующих с ней тел. Это движение принято называть *абсолютным*, следовательно,  $\bar{a}$  – абсолютное ускорение материальной точки. Движение материальной точки по отношению к неинерциальной системе отсчёта  $S'$  принято называть *относительным движением*. В неинерциальной системе отсчёта  $S'$  законы Ньютона не выполняются. Оказывается, что относительное ускорение  $\bar{a}_r$  точки по отношению к неинерциальной системе отсчёта  $S'$  не равно отношению  $\frac{F}{m}$ , т.е.

$$\bar{a}_r \neq \frac{F}{m}. \quad (6.1.2)$$

В частности, при  $\bar{F} = 0$ , получим  $\bar{a}_r \neq 0$ . Другими словами, материальная точка или твёрдое тело в системе  $S'$  в отсутствии действия сил со стороны других тел может иметь относительное ускорение  $\bar{a}_r \neq 0$ , т.е. в подвижной системе  $S'$  без воздействия сил тело может изменять свою скорость. В справедливости сказанного каждый не раз убеждался, пользуясь любым видом транспорта. Так, например, пассажиры, неподвижно стоящие в прямолинейно движущемся автобусе, отклоняются назад при ускоренном поступательном переносном движении автобуса, или вперёд – при его замедлении. Аналогично, при переходе автобуса с прямолинейного пути на закругление радиуса  $R$  пассажиры

отклоняются в сторону, противоположную центру кривизны траектории. При движении автобуса по закруглению появляется центростремительное переносное ускорение  $a_c = \omega^2 R$ . Если бы пол автобуса был идеально гладким, то при резком изменении скорости автобуса и появлении неинерциальности системы отсчёта  $S'$ , пассажиры должны были бы скользить по полу, несмотря на то, что на них не действуют никакие горизонтальные «обычные» силы взаимодействия.

Из описанных мысленных экспериментов следует, что в неинерциальных системах отсчёта  $S'$  помимо «обычных» сил на все тела действуют *силы инерции*, которые сообщают всякому телу в этих системах ускорения, пропорциональные массе тела. Для того, чтобы можно было использовать форму второго закона Ньютона для материальной точки в неинерциальной системе отсчёта при относительном движении, необходимо к «обычным» силам взаимодействия  $\bar{F}$  добавить силы инерции:  $\bar{I}_e$  – переносная сила инерции;  $\bar{I}_k$  – сила инерции Кориолиса (см. разд. 6.4). Второй закон Ньютона в неинерциальной системе отсчёта  $S'$  имеет вид

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{I}_e + \bar{I}_k, \quad (6.1.3)$$

где  $\bar{a}_r$  – ускорение материальной точки при её относительном движении. Силы  $\bar{I}_e$  и  $\bar{I}_k$  учитывают влияние на относительное движение материальной точки характера движения подвижной системы отсчёта. Переносная сила инерции численно равна произведению массы материальной точки на переносное ускорение, взятое с обратным знаком  $\bar{I}_e = -m\bar{a}_e$ ; сила Кориолиса численно равна произведению массы движущейся точки на кориолисово ускорение, взятое с обратным знаком  $\bar{I}_k = -m\bar{a}_k$ , где  $\bar{a}_k$  – ускорение Кориолиса (см. разд. 6.4). Силы инерции реально действуют на материальную точку в неинерциальной системе отсчёта и могут быть измерены, например, с помощью пружинного динамометра. Однако в отличие от «обычных» сил для сил инерции нельзя указать, действие каких именно тел на рассматриваемую материальную точку они выражают. Следовательно, к силам инерции не применим третий закон Ньютона. Эта особенность сил инерции не является неожиданной, так как величины  $\bar{I}_e$  и  $\bar{I}_k$  в уравнении (6.1.3) обусловлены только неинерциальностью системы отсчёта и никак не связаны с действием на материальную точку со стороны других тел, учитываемым вектором  $\bar{F}$ . Другими словами, силы инерции по существу нельзя называть силами (см. разд. 2.1). Введение этих сил оправдывается лишь тем, что с их помощью уравнение относительного дви-



жения точки приводится к виду (6.1.3), соответствующему второму закону Ньютона. Если «обычные» силы взаимодействия не зависят от выбора неинерциальной системы отсчёта, то переносная и кориолисова силы инерции определяются выбором неинерциальной системы отсчёта.

Задача определения сил инерции, действующих на данное тело в данной неинерциальной системе отсчёта, сводится к нахождению переносного  $\bar{a}_e$  и кориолисова ускорения  $\bar{a}_k$ , так как

$$\bar{I}_e = -m\bar{a}_e; \quad (6.1.4)$$

$$\bar{I}_k = -m\bar{a}_k. \quad (6.1.5)$$

Рассмотрим некоторые простейшие примеры неинерциальных систем.

## 6.2. СИЛЫ ИНЕРЦИИ В СИСТЕМАХ ОТСЧЁТА, ДВИЖУЩИХСЯ ПОСТУПАТЕЛЬНО

Пусть в неподвижной коперниковой инерциальной системе отсчёта  $xuz$  имеется вагон, который движется горизонтально по прямолинейному участку с ускорением  $\bar{a}_0$  (рис. 6.1, а). Наблюдатель находится в системе  $x'uz'$ .

Опыт показывает, что отвес массой  $m$ , установленный в вагоне, при его ускоренном движении отклоняется на некоторый угол  $\alpha$  от вертикали. Причём чем больше ускорение  $\bar{a}_0$  поступательного движения вагона, тем больше угол  $\alpha$  отклонения отвеса. В инерциальной системе отсчёта  $xuz$  на отвес массой  $m$  действуют две «обычные» силы:

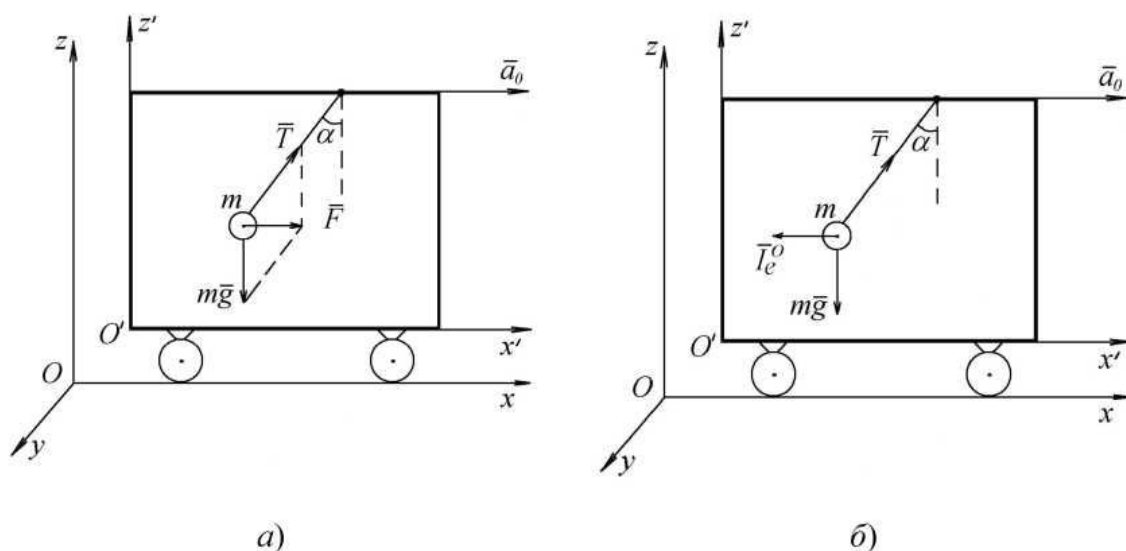


Рис. 6.1

сила тяжести  $m\bar{g}$  и сила натяжения нити  $\bar{T}$ . Отвес массой  $m$  в инерциальной системе отсчёта  $xuz$  имеет то же ускорение  $\bar{a}_0$ , что и сам вагон, так как они движутся одновременно. Две силы  $m\bar{g}$  и  $\bar{T}$  создают равнодействующую, которая сообщает отвесу по второму закону Ньютона ускорение  $\bar{a}_0$ , т.е.

$$m\bar{a}_0 = m\bar{g} + \bar{T}, \quad (6.2.1)$$

или

$$m\bar{g} + \bar{T} - m\bar{a}_0 = 0. \quad (6.2.2)$$

Найдём угол  $\alpha$  отклонения отвеса

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{mg} = \frac{ma_0}{mg} = \frac{a_0}{g},$$

откуда найдём ускорение вагона

$$a_0 = g \operatorname{tg}\alpha. \quad (6.2.3)$$

Таким образом, отвес может служить прибором (акселерометром) для измерения ускорения в неинерциальной системе отсчёта, связанной с вагоном.

Рассмотрим поведение отвеса массы  $m$  в неинерциальной системе отсчёта  $x'y'z'$ , которая жёстко связана с вагоном (рис. 6.1, б). При этом наблюдатель находится в вагоне. На отвес массой  $m$  также действуют две «обычные» силы  $m\bar{g}$  и  $\bar{T}$ , расположенные под некоторым углом. Но по отношению к вагону и к неинерциальной системе отсчёта  $x'y'z'$  отвес массой  $m$  находится в покое. Однако равнодействующая сил  $m\bar{g}$  и  $\bar{T}$  не равна нулю, и эти силы не могут обеспечить покой отвеса. Следовательно, чтобы обеспечить выполнение законов Ньютона о равновесии материальной точки  $m$  мы должны предположить, что на точку действует *поступательная сила инерции*

$$\bar{I}_e^o = -m\bar{a}_0, \quad (6.2.4)$$

направленная противоположно вектору переносного ускорения (рис. 6.1, б). Условие равновесия для отвеса в неинерциальной системе отсчёта имеет вид

$$m\bar{g} + \bar{T} + \bar{I}_e^o = 0, \quad (6.2.5)$$

или

$$m\bar{g} + \bar{T} - m\bar{a}_0 = 0. \quad (6.2.6)$$

Полученное соотношение полностью совпадает с (6.2.2).

Таким образом, чтобы сохранилась форма законов Ньютона в неинерциальной системе отсчёта, движущейся поступательно с ускоре-

нием  $\bar{a}_0$ , прямолинейно, необходимо ввести поступательную силу инерции, численно равную произведению массы тела на ускорение движущейся системы отсчёта (6.2.4).

### 6.3. СИЛЫ ИНЕРЦИИ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ СИСТЕМАХ ОТСЧЁТА

Пусть в неподвижной коперниковой системе отсчёта *хуз* расположен горизонтальный диск, способный вращаться с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  вокруг вертикальной оси (рис. 6.2, *а*). Система отсчёта  $x'y'z'$  жёстко связана с диском и будет неинерциальной вследствие его вращения. Опыт показывает, что отвес массой  $m$ , установленный на опоре диска, при его вращении отклоняется на некоторый угол  $\alpha$ . Угол  $\alpha$  тем больше, чем больше угловая скорость вращения  $\omega$  и больше радиус  $R$ . В инерциальной системе отсчёта отвес движется по окружности радиуса  $R$  и на него действуют две «обычные» силы:  $m\bar{g}$  и  $\bar{T}$ . При постоянной скорости вращения  $\Omega$  отвес имеет постоянное центростремительное ускорение  $a_{ц} = \omega^2 R$ , которое обеспечивается равнодействующей сил  $m\bar{g}$  и  $\bar{T}$ , т.е.  $\bar{F} = m\bar{g} + \bar{T}$ . По второму закону Ньютона имеем

$$m\bar{a}_{ц} = m\bar{g} + \bar{T}; \quad (6.3.1)$$

или

$$m\bar{g} + \bar{T} - m\bar{a}_{ц} = 0. \quad (6.3.2)$$

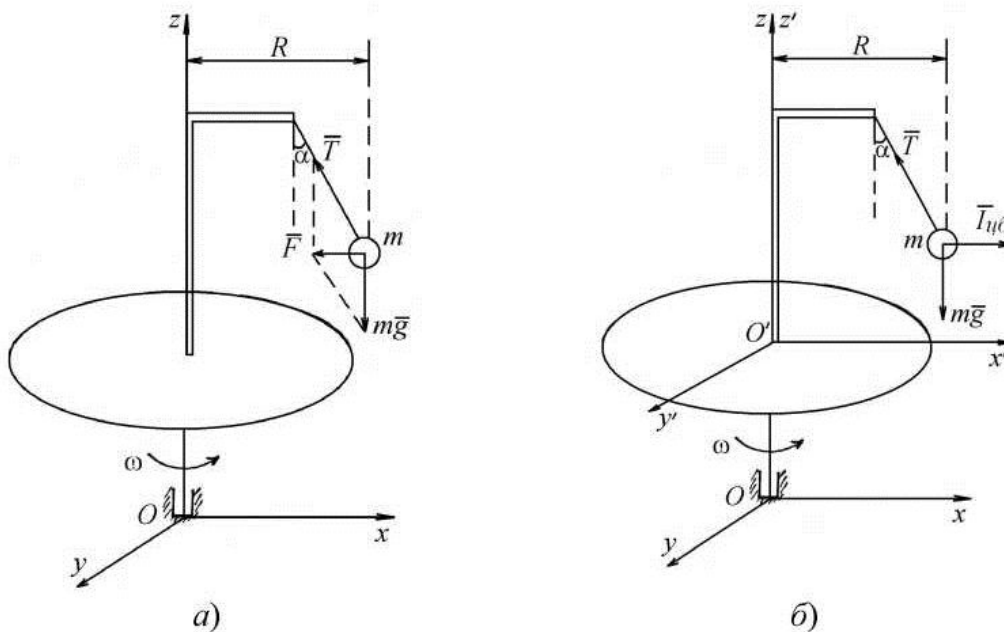


Рис. 6.2

В неинерциальной системе отсчёта  $x'y'z'$ , связанной с вращающимся диском, т.е. для наблюдателя, находящегося на диске, на отвес  $m$  также действуют две «обычные» силы:  $m\bar{g}$  и  $\bar{T}$ , находящиеся под углом друг к другу, но тело массой  $m$  находится в покое (рис. 6.2, б). При этом равнодействующая двух сил  $m\bar{g}$  и  $\bar{T}$  не равна нулю. Следовательно, чтобы обеспечить условие равновесия отвеса  $m$  в неинерциальной системе отсчёта, мы должны предположить, что на тело  $m$  действует *центробежная сила инерции*

$$\bar{I}_{цб} = -m\bar{a}_{ц}, \quad (6.3.3)$$

которая направлена противоположно вектору  $\bar{a}_{ц}$ . Условие равновесия отвеса в системе  $x'y'z'$  запишется в виде

$$m\bar{g} + \bar{T} + \bar{I}_{цб} = 0, \quad (6.3.4)$$

или

$$m\bar{g} + \bar{T} - m\bar{a}_{ц} = 0. \quad (6.3.5)$$

Полученное соотношение полностью совпадает с законом Ньютона (6.3.2) для инерциальной системы отсчёта  $xyz$ .

Действие центробежных сил инерции широко используется в технике: центробежные насосы, сепараторы, центрифуги для разделения тяжёлых изотопов и т.п. При проектировании быстро вращающихся деталей машин-роторов паровых и газовых турбин, компрессоров, электрических двигателей и генераторов, коленчатых валов, двигателей внутреннего сгорания и других, принимаются меры для уравновешивания центробежных сил инерции.

Следует отметить, что, если диск (рис. 6.2, б) вращается неравномерно с угловым ускорением  $\varepsilon$ , переносное ускорение движущейся точки  $m$  будет иметь, кроме центростремительного ускорения  $a_{ц} = \omega^2 R$ , ускорение касательное или вращательное  $a_{вр} = \varepsilon R$ . В этом случае в неинерциальной системе отсчёта  $x'y'z'$  на тело  $m$  будет действовать переносная вращательная сила инерции

$$\bar{I}_{вр} = -m\bar{a}_{вр}, \quad (6.3.6)$$

которая направлена по касательной к окружности радиуса  $R$  и направлена противоположно вектору  $\bar{a}_{вр}$ .

Можно сделать следующий вывод: в зависимости от характера движения неинерциальной системы отсчёта, в ней могут действовать три переносные силы инерции: поступательная, центробежная и вращательная.

## 6.4. КОРИОЛИСОВА СИЛА ИНЕРЦИИ

Расположим в неподвижной инерциальной системе отсчёта  $xuz$  диск, способный вращаться вокруг вертикальной оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega$ . (рис. 6.3). Система отсчёта  $x'y'z'$ , связанная жёстко с диском, является неинерциальной системой отсчёта. Пусть вдоль радиуса диска равномерно ползёт жук массой  $m$  с относительной скоростью  $\bar{v}_r$ . Найдём ускорение, которым обладает жук. Во-первых, вектор относительной скорости  $\bar{v}_r$  вследствие вращения диска изменится по направлению. Допустим, что за время  $dt$  вектор  $\bar{v}_r$  повернётся вместе с диском на угол  $d\alpha = \omega dt$ . Тогда изменение вектора  $\bar{v}_r$  по направлению будет равно

$$dv_r = v_r d\alpha = v_r \omega dt. \quad (6.4.1)$$

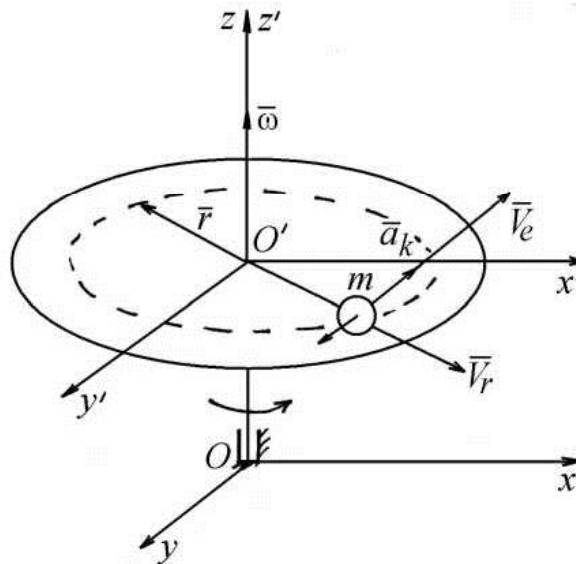


Рис. 6.3

Переносной скоростью  $\bar{v}_e$  жука является скорость той точки диска, через которую проползает жук в данный момент времени. Если жук находится на расстоянии  $r$  от оси  $z$  вращения, то переносная скорость жука численно равна в момент времени  $t$   $v_{e1} = \omega r$ . За время  $dt$  жук переместится вдоль радиуса на расстояние  $dr$  и его переносная скорость будет численно равна  $v_{e2} = \omega(r + dr)$ . Следовательно, изменение переносной скорости по величине на время  $dt$  равно

$$dv_e = v_{e2} - v_{e1} = \omega(r + dr) - \omega r = \omega dr.$$

Учитывая, что  $dr = v_r dt$ , найдём

$$dv_e = \omega v_r dt. \quad (6.4.2)$$

Найдём ускорение жука, которое обусловлено изменением относительной скорости по направлению и переносной скорости по величине

$$a_k = \frac{dv_r + dv_e}{dt} = 2\omega v_r. \quad (6.4.3)$$

Это ускорение принято называть *ускорением Кориолиса* или *поворотным ускорением*. Его значение найдено для частного случая, когда вектор относительной скорости  $\bar{v}_r$  перпендикулярен вектору  $\bar{\omega}$  угловой скорости подвижной системы координат. В случае произвольного угла между векторами  $\bar{v}_r$  и  $\bar{\omega}$ , формула принимает вид

$$a_k = 2\omega v_r \sin(\bar{\omega}, \bar{v}_r), \quad (6.4.4)$$

или в векторной форме

$$\bar{a}_k = 2[\bar{\omega} \times \bar{v}_r]. \quad (6.4.5)$$

Направление ускорения Кориолиса, согласно правилу векторного произведения, совпадает в данном частном случае с вектором  $\bar{v}_e$  переносной скорости. Наличие ускорения Кориолиса приводит к тому, что на жука, движущегося равномерно по диску, действует *кориолисова сила инерции* или *поворотная сила инерции*

$$\bar{I}_k = -m\bar{a}_k = -2m[\bar{\omega} \times \bar{v}_r], \quad (6.4.6)$$

которая направлена противоположно вектору  $\bar{a}_k$  (рис. 6.3). Действие этой силы  $\bar{I}_k$  приводит к тому, что траектория движения жука становится криволинейной. Это является следствием того, что вектор силы Кориолиса  $\bar{I}_k$  направлен перпендикулярно вектору относительной скорости жука  $\bar{v}_r$ . Три вектора  $\bar{\omega}$ ,  $\bar{v}_r$  и  $\bar{I}_k$  образуют левую тройку векторов.

Так как система отсчёта, связанная с поверхностью Земли, вращается вследствие суточного движения, то на все тела, движущиеся в земной системе отсчёта, действует поворотная сила инерции согласно формуле (6.4.6). Действие силы Кориолиса приводит к тому, что артиллерийские снаряды в северном полушарии отклоняются вправо от цели. Следовательно, поворотную силу инерции следует учитывать не только в артиллерии, но и при запуске тактических, стратегических и космических объектов. Действием поворотных сил инерции можно объяснить, почему реки, текущие в меридианальном направлении, всегда подмывают вполне определённый берег: правый по течению – для рек северного полушария Земли, и левый – для рек южного полушария. Аналогично объясняется более значительный износ правых рельсов железных дорог по ходу движения поездов в северном полушарии.

Неинерциальность земной системы отсчёта легко обнаружить на опыте с помощью маятника Фуко, который представляет массивное тело, подвешенное на достаточно длинной нити. Крепление нити к опоре осуществляется так, что вращение опоры не сказывается на свободных колебаниях маятника под действием силы тяжести. Фуко Л. в 1851 г. обнаружил, что плоскость качания маятника постоянно изменяет свою ориентацию по отношению к земной системе отсчёта. Наблюдатель, находящийся на Земле, объясняет вращение плоскости качаний маятника Фуко действием перпендикулярной к этой плоскости кориолисовой силы.

В заключение следует обратить внимание на важное сходство, существующее между силами инерции и силами тяготения. Как было показано, силы инерции пропорциональны массам материальных точек, и при прочих равных условиях сообщают материальным точкам одинаковые относительные ускорения. Точно таким же свойством обладают силы тяготения: сила, действующая на материальную точку, равна произведению массы этой точки на « $g$ » – напряжённость поля тяготения. Следовательно, действие на материальную точку сил инерции можно заменить действием эквивалентного им поля тяготения. Можно сделать вывод, называемый *принципом эквивалентности*: коперникова система отсчёта, в которой действует однородное гравитационное поле, создающее ускорение  $\bar{a}$ , эквивалентно системе отсчёта, в которой нет поля тяготения, но которое движется с ускорением  $\bar{a}$ .

Известно, что на кораблях-спутниках космонавты находятся в невесомости, так как их сила тяжести уравновешивается центробежной силой инерции. Основываясь на принципе эквивалентности, невесомость для космонавтов можно устранить, если космическому кораблю сообщить вращение вокруг его оси. На космонавтов будут действовать центробежные силы инерции, прижимающие их (подобно силе тяжести) к стенке корабля.

Несколько слов о природе сил инерции. Классическая механика считает эти силы фиктивными, так как нельзя указать тело, взаимодействуя с которыми, оно возникает. Так как силы тяготения определяются массой вещества, то на основе принципа эквивалентности, Беркли высказал мысль, что причиной сил инерции является вся масса «сферы небесных тел», окружающих нашу Землю, т.е. всё вещество Вселенной. Эйнштейн А. создал общую теорию относительности, которая утверждает, что ускоренное движение системы отсчёта  $S'$  относительно «сферы небесных тел» (или то же самое ускоренное движение «сферы небесных тел» относительно  $S'$ ) является причиной возникновения сил, которые качественно совпадают с наблюдаемыми на опыте силами инерции. Рассматриваемая гипотеза о происхождении сил инерции говорит против представления о фиктивности сил инерции.

## 7. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

### 7.1. ПОНЯТИЕ О КОЛЕБАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

Под колебательным движением, или просто под механическим колебанием понимают всякое движение, характеризуемое той или иной степенью повторяемости физических величин, которые определяют движение системы. Примерами колебательного движения могут служить колебания различных маятников, струн, мембран, мостов, поршней двигателей внутреннего сгорания и т.д.

Колебание называется *периодическим*, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебательного движения, повторяются через равные промежутки времени. Простейшим примером периодических колебаний являются гармонические колебания, возникающие под действием восстанавливающих сил, которые могут иметь различную природу, но обладающие двумя свойствами: восстанавливающая сила пропорциональна мгновенному смещению или отклонению тела от положения устойчивого равновесия, и направлена всегда противоположно смещению. Природа восстанавливающих сил может быть различной. Например, восстанавливающая сила может быть обусловлена упругими свойствами пружины и возникает вследствие деформации пружины.

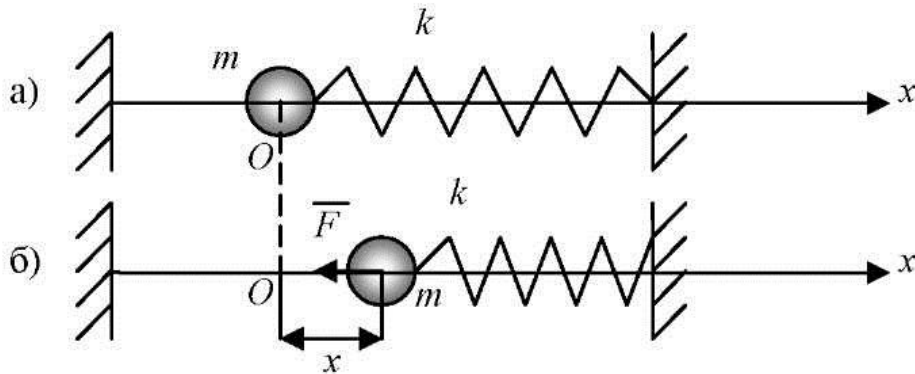


Рис. 7.1

На рисунке 7.1 показан пружинный маятник, который состоит из массивного шара, насаженного на горизонтальный стержень, вдоль которого он может скользить. На стержень надета стальная пружина, закреплённая на его конце и шаре. В состоянии равновесия шар находится в положении  $O$  (рис. 7.1, а). При смещении шара от положения равновесия на величину  $x$  на него действует сила упругости  $F = -kx$ , где  $k$  – коэффициент жёсткости пружины.



Другим примером восстанавливающей силы является сила, возникающая при вертикальных отклонениях плавающих тел в жидкости. В положении равновесия сила Архимеда уравновешивается силой тяжести, т.е.  $F_A = mg$  (рис. 7.2, а). При вертикальном смещении тела на величину  $x$  возникает дополнительная сила Архимеда  $F'_A = -\rho g S x$ , где  $\rho$  – плотность жидкости;  $S$  – площадь поперечного сечения тела;  $g$  – ускорение свободного падения (рис. 7.2, б).

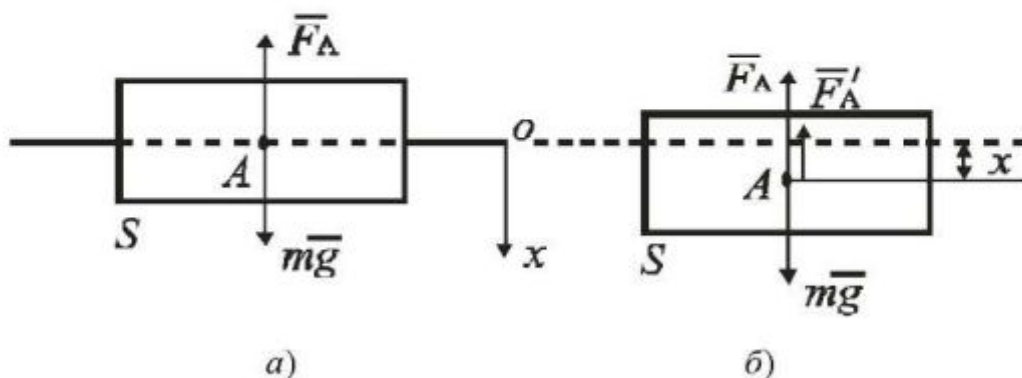


Рис. 7.2

Кроме восстанавливающих сил при колебательном движении действуют также силы сопротивления, зависящие от скорости. Это силы трения, или силы сопротивления при движении тел в вязкой среде. На колеблющееся тело могут действовать возмущающие силы со стороны других тел, т.е. силы, которые являются заданными функциями времени.

Колебания, которые возникают в системе, не подверженной действию переменных внешних сил, называются *свободными*. Если в колебательной системе отсутствуют потери энергии, связанные с действием сил трения или вязкого трения, то колебания будут продолжаться бесконечно долго. Такие колебательные системы называются *идеальными*, а сами колебания *собственными*. В реальных колебательных системах всегда существуют потери энергии, обусловленные силами сопротивления, в результате чего колебания не могут продолжаться бесконечно долго, т.е. они являются *затухающими* (см. разд. 7.5).

## 7.2. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

Исследуем более подробно колебания пружинного маятника, который состоит из материальной точки массой  $m$  и пружины жёсткостью  $k$ . При отсутствии сил сопротивления (рис. 7.1, б) основное уравнение динамики для него в произвольный момент времени имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \text{или} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0, \quad (7.2.1)$$

т.е. движение пружинного маятника описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Ниже покажем, что его решение имеет вид

$$x = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (7.2.2)$$

Данное уравнение называется *уравнением гармонических колебаний*. Исследуем его. Так как  $\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$  изменяется с течением времени от  $+1$  до  $-1$ , то величина мгновенного смещения  $x$  маятника от положения равновесия изменяется в пределах от  $+x_m$  до  $-x_m$ . Максимальное смещение  $x_m$  маятника от положения равновесия называется *амплитудой колебаний*, которая зависит от начальных условий приведения маятника в колебание. Величина  $\varphi_0$  называется *начальной фазой*, которая определяет смещение маятника от положения равновесия в начальный момент времени  $t = 0$ , т.е.  $x_0 = x_m \sin \varphi_0$ . Величина  $(\omega t + \varphi_0)$  называется *фазой колебания*, которая определяет мгновенное смещение  $x$  маятника в любой момент времени. Поскольку синус является периодической функцией с периодом  $2\pi$ , то состояние системы повторяется через равные промежутки времени  $T$ . Следовательно, справедливо равенство

$$\sin[\omega_0(t+T) + \varphi_0] = \sin(\omega t + \varphi_0 + 2\pi),$$

откуда найдём

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (7.2.3)$$

где  $T$  – *период гармонических колебаний* – время, за которое совершается одно полное колебание. Учитывая, что период колебаний обратно пропорционален *частоте*  $\nu$ , под которой понимается число полных колебаний, совершаемых системой за единицу времени  $T = \frac{1}{\nu}$ , получим

$$\omega_0 = 2\pi\nu. \quad (7.2.4)$$

Величина  $\omega_0$ , показывающая число полных колебаний, совершаемых системой за  $2\pi$  секунд, называется *круговой* или *циклической частотой*.

На основании изложенного, уравнение гармонических колебаний может быть представлено в виде

$$x = x_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) = x_m \sin(2\pi\nu t + \varphi_0).$$

Временная диаграмма гармонических колебаний представлена на рис. 7.3, где  $x_0 = x|_{t=0} = x_m \sin \varphi_0$  – смещение тела от положения равновесия в начальный момент времени.

Докажем, что выражение (7.2.2) является решением дифференциального уравнения (7.2.1). Для этого продифференцируем (7.2.2) по времени

$$\frac{dx}{dt} = \omega_0 x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0); \quad (7.2.5)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (7.2.6)$$

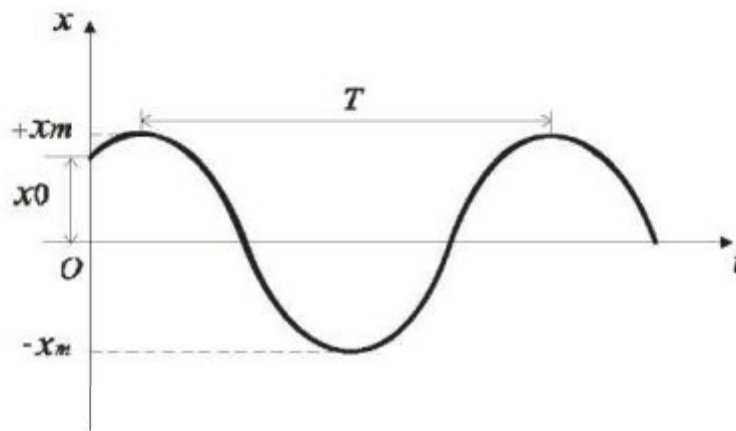


Рис. 7.3

Подставляя (7.2.2) и (7.2.6) в уравнение (7.2.1), после сокращения получим

$$-\omega_0^2 + \frac{k}{m} = 0.$$

Отсюда найдём значение круговой частоты для пружинного маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (7.2.7)$$

На основании (7.2.3) и (7.2.4) получим

$$v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{и} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (7.2.8)$$

Из полученных выражений следует, что период и частота колебаний пружинного маятника не зависят от начальных условий, а определяются параметрами колебательной системы: массой маятника и жёсткостью пружины.

Выражения (7.2.5) и (7.2.6) можно использовать для анализа изменения скорости и ускорения при гармонических колебаниях. Мгновенная скорость равна

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega_0 x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = v_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (7.2.9)$$

где  $v_m = \omega_0 x_m$  – максимальное значение мгновенной скорости.

Мгновенное ускорение

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -a_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (7.2.10)$$

где  $a_m = \omega_0^2 x_m$  – амплитуда ускорения при гармонических колебаниях.

На рисунке 7.4 графически представлено изменение смещения  $x$ , скорости  $v$  и ускорения  $a$  с течением времени при  $\varphi_0 = 0$ . Из сравнения графиков следует, что скорость опережает смещение на  $\frac{\pi}{2}$ ; уско-

рение опережает скорость на  $\frac{\pi}{2}$ . Между мгновенным смещением и ускорением имеется разность фаз  $\pi$ . Другими словами, скорость колеблющейся точки максимальна в моменты прохождения ею положения равновесия ( $x = 0$ ). При максимальных смещениях ( $x = x_m$ ) скорость равна нулю. Ускорение колеблющейся точки равно нулю при

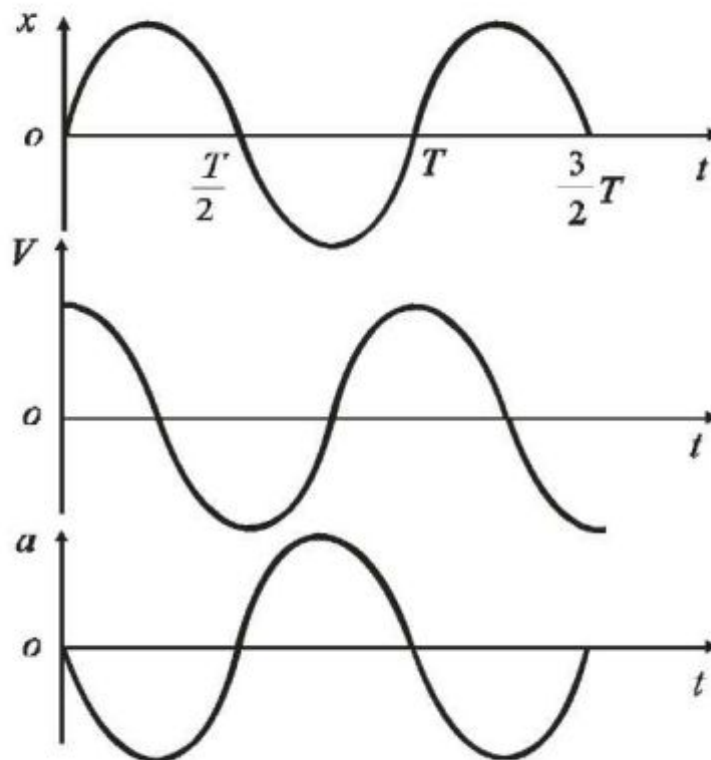


Рис. 7.4

прохождении точкой положения равновесия и достигает максимального значения при наибольших смещениях.

Колебательную систему принято характеризовать *волновым сопротивлением*  $\rho$ , которое определяется отношением амплитуды восстанавливающей силы к амплитуде скорости

$$\rho = \frac{F_m}{v_m} . \quad (7.2.11)$$

Для пружинного маятника имеем

$$\rho = \frac{kx_m}{\omega_0 x_m} = \sqrt{km} . \quad (7.2.12)$$

В рассмотренном случае горизонтального пружинного маятника (рис. 7.1) сила тяжести не играет никакой роли в его колебательном движении. Если же пружинный маятник вертикален (рис. 7.5), то влияние силы тяжести скажется лишь на том, что положение равновесия, относительно которого происходят колебания, сместится на величину  $x_{ст}$ , которая определяет статическую величину деформации пружины под действием силы тяжести груза, т.е.  $mg = kx_{ст}$ . Если груз  $m$  сместить от положения равновесия на величину  $x$ , то на маятник будет действовать восстанавливающая сила, равная  $kx$ . При этом начало координат  $O$  на оси  $x$  совпадает с положением равновесия груза. Следовательно, уравнение движения маятника имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \text{ или } m \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 , \quad (7.2.13)$$

что совпадает с формулой (7.2.1). Частота колебаний будет определяться формулой (7.2.7).

Рассмотрим вертикальные колебания груза массой  $m$ , который закреплён между двумя пружинами с жёсткостью  $k_1$  и  $k_2$  (рис. 7.6, а).

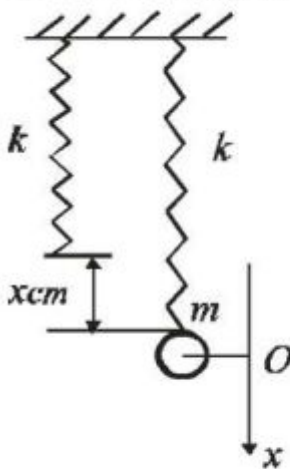


Рис. 7.5

Начало оси координат  $x$ , т.е. точка  $O$  совпадает с положением равновесия груза. При отклонении тела по вертикали на расстояние  $x$  получим

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k_1 x - k_2 x = -(k_1 + k_2)x = -k_{11} x ,$$

так как обе силы упругости направлены к положению равновесия. Следовательно, эквивалентная жёсткость таких «параллельно соединённых» пружин равна

$$k_{11} = k_1 + k_2 \quad (7.2.14)$$

и частота колебаний будет равна

$$\omega_{11} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}, \quad (7.2.15)$$

а при равенстве жёсткостей пружин  $k_1 = k_2 = k$ , получим

$$\omega_{11} = \sqrt{\frac{2k}{m}}. \quad (7.2.16)$$

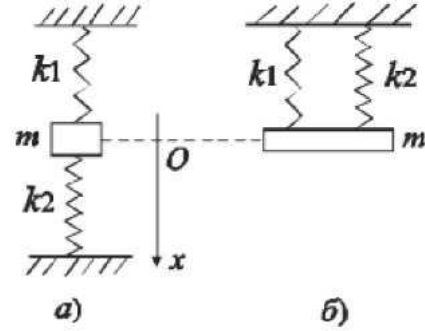


Рис. 7.6

Система, изображённая на рис. 7.6, б, также представляет собой «параллельно соединённые» пружины, так как при отклонении груза  $m$  от положения равновесия, восстанавливающая сила при  $k_1 = k_2 = k$  будет равна

$$F = -k_1x - k_2x = -2kx.$$

При «последовательном соединении» пружин (рис. 7.7), деформации пружин  $x_1$  и  $x_2$  являются произвольными: их сумма равна смещению  $x$  тела от положения равновесия

$$x = x_1 + x_2.$$

Учитывая, что упругие силы пружин  $f_1 = -k_1x_1$ ;  $f_2 = -k_2x_2$  должны быть одинаковы ( $f_1 = f_2 = f$ ), получим

$$x = -f \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) = -\frac{f}{k_0}.$$

Следовательно, жёсткость  $k_0$  эквивалентной пружины, способной заменить две пружины, соединённые последовательно, равна

$$\frac{1}{k_0} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad \text{или} \quad k_0 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}. \quad (7.2.17)$$

Поэтому частота колебаний маятника (рис. 7.7) равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}. \quad (7.2.18)$$

При  $k_1 = k_2 = k$  получим

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}}. \quad (7.2.19)$$

Таким образом,  $\omega_0 < \omega < \omega_{11}$ , где под  $\omega$  понимается частота колебаний при наличии одной пружины  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .



Рис. 7.7

### 7.3. ЭНЕРГИЯ СОБСТВЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Колебательная система, состоящая из массивного шара и пружины, в произвольный момент времени характеризуется кинетической и потенциальной энергиями. Кинетическая энергия шара зависит от его мгновенной скорости, и в соответствии с формулой (7.2.9), равна

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (7.3.1)$$

или

$$W_k = \frac{m\omega_0^2 x_m^2}{4} [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)]. \quad (7.3.2)$$

Кинетическая энергия материальной точки при гармонических колебаниях периодически изменяется от 0 до  $\frac{1}{2} m\omega_0^2 x_m^2$ , совершая колебания с циклической частотой  $2\omega_0$  и амплитудой  $\frac{m\omega_0^2 x_m^2}{4}$  около среднего значения, равного  $\frac{m\omega_0^2 x_m^2}{4}$ .

Потенциальная энергия деформированной пружины, в соответствии с формулой (7.2.2), равна

$$W_n = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2} kx_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (7.3.3)$$

или

$$W_n = \frac{m\omega_0^2 x_m^2}{4} [1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)] = \frac{m\omega_0^2 x_m^2}{4} [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0 + \pi)]. \quad (7.3.4)$$

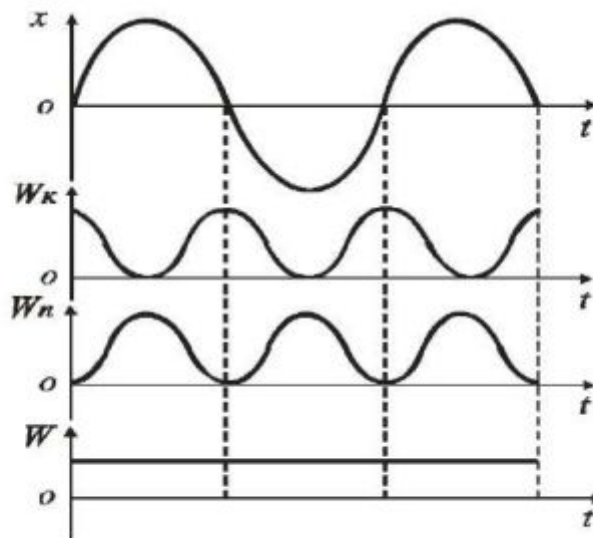


Рис. 7.8

Потенциальная энергия материальной точки периодически изменяется от 0 до  $\frac{1}{2}m\omega_0^2 x_m^2$ , совершая гармонические колебания с циклической частотой  $2\omega_0$  и амплитудой  $\frac{m\omega_0^2 x_m^2}{4}$  около среднего значения  $\frac{m\omega_0^2 x_m^2}{4}$ . Колебания потенциальной и кинетической энергии совершаются со сдвигом по фазе на  $\pi$ .

Так как в идеальной колебательной системе отсутствуют потери энергии, то её полная энергия остаётся неизменной в соответствии с законом сохранения механической энергии

$$W = W_k + W_n = \frac{m\omega_0^2 x_m^2}{2}. \quad (7.3.5)$$

На рисунке 7.8 приведены графики для  $x, W_k, W_n, W$ .

#### 7.4. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

*Физическим маятником* называется любое тело, способное совершать колебания под действием силы тяжести вокруг горизонтальной оси  $O$ , не проходящей через центр тяжести  $C$  тела (рис. 7.9).

Расстояние от центра масс маятника  $C$  до оси  $O$  обозначим через  $l$ . Отклонение маятника от положения равновесия будем характеризовать углом  $\varphi$ . В произвольный момент времени на маятник массой  $m$  действует момент силы тяжести

$$M = -mgh = -mgl \sin \varphi,$$

который стремится вернуть маятник в положение равновесия. Закон динамики для вращательного движения маятника имеет вид

$$M = J_0 \varepsilon,$$

где  $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$  – угловое ускорение;  $J_0$  – момент инерции маятника относительно оси подвеса  $O$ . Следовательно, дифференциальное уравнение для колебаний физического маятника имеет вид

$$J_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi. \quad (7.4.1)$$

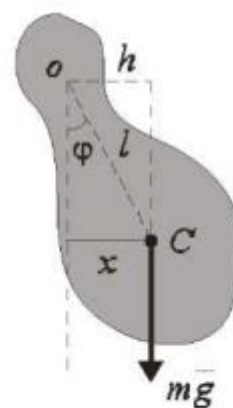


Рис. 7.9



Для малых углов можно считать, что  $\sin \varphi = \varphi$ . После простых преобразований легко получить

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{J_0} \varphi = 0.$$

При малых углах отклонения маятника от положения равновесия можно считать, что угол  $\varphi$  пропорционален смещению  $x$  центра тяжести от положения равновесия. Вследствие этого можно записать

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{mgl}{J_0} x = 0.$$

Решением данного уравнения является гармоническая функция

$$x = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где круговая частота колебаний физического маятника определяется выражением

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J_0}}. \quad (7.4.2)$$

Период колебаний физического маятника равен

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{mgl}}. \quad (7.4.3)$$

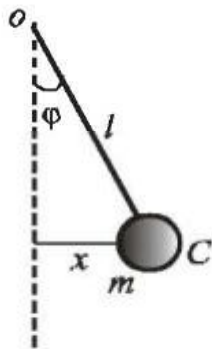


Рис.7.10

*Математический маятник* (рис. 7.10) можно рассматривать как предельный случай физического маятника. Рассматривая массивный шарик как материальную точку, которая находится на расстоянии  $l$  от оси

подвеса  $O$ , его момент инерции относительно  $O$  равен

$$J_0 = ml^2.$$

Подставив данное выражение в (7.4.2), получим  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , а для периода колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (7.4.4)$$

В качестве примера рассмотрим физический маятник, представляющий собой стержень длиной  $l_0$ , способный совершать колебания вокруг оси  $O$ , проходящей через один из его концов (рис. 7.11).

Учитывая, что расстояние от оси подвеса до центра масс данного маятника  $l = \frac{l_0}{2}$ , а его момент инерции, согласно формуле (4.5.19),  $J_0 = \frac{1}{3}ml_0^2$ , на основании (7.4.2) получим

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2l_0}} \text{ и } T = 2\pi\sqrt{\frac{2l_0}{3g}}. \quad (7.4.5)$$

Из изложенного следует, что период и частота гармонических колебаний не зависят от начальных условий, а определяются параметрами колебательной системы.

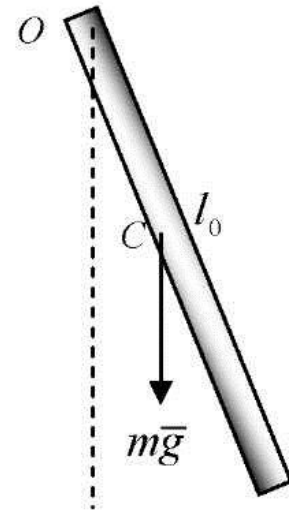


Рис. 7.11

## 7.5. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

Все реальные колебательные механические системы являются диссипативными, т.е. полная энергия такой системы постепенно расходуется, например, против сил трения. Поэтому реальные колебания не могут продолжаться бесконечно долго. Допустим, что на пружинный маятник кроме восстанавливающей силы  $F_1 = -kx$  действует также линейная сила вязкого трения  $F_2 = -r\dot{x} = -r\frac{dx}{dt}$ , которая зависит от мгновенной скорости  $v$  материальной точки, совершающей колебания, где  $r$  – коэффициент сопротивления. Знак «минус» в последнем выражении обусловлен тем, что векторы  $\vec{F}_2$  и  $\vec{v}$  имеют противоположные направления.

Уравнение динамики имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_1 + F_2,$$

или

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -r\frac{dx}{dt} - kx.$$

После элементарных преобразований получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0.$$

$$\text{Введём обозначения } \frac{r}{m} = 2\delta \text{ или } \delta = \frac{r}{2m}, \quad (7.5.1)$$

где  $\delta$  – принято называть *коэффициентом затухания*;  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ . Заме-

тим, что  $\omega_0$  представляет собой ту частоту, с которой совершались бы свободные колебания маятника при отсутствии сопротивления среды, т.е. при  $r=0$ . Физический смысл величины  $\delta$  выясним позже. С учётом введённых обозначений дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (7.5.2)$$

Данное уравнение имеет различные решения в зависимости от величины сил сопротивления. Рассмотрим два основных случая.

1. Пусть коэффициент сопротивления  $r$  меньше удвоенного волнового сопротивления  $\rho$ , т.е.  $r < 2\rho$ . Учитывая выражения (7.2.12) и (7.5.1), получим  $\delta < \omega_0$ . Другими словами, мы рассматриваем случай малых сил сопротивления. При этих условиях решение дифференциального уравнения (7.5.2) может быть представлено в виде

$$x = x_{m_0} e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (7.5.3)$$

Данное выражение называется *уравнением затухающих колебаний*, так как при  $t \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow 0$ . Частота затухающих колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \text{ или } \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}, \quad (7.5.4)$$

т.е. частота затухающих колебаний всегда меньше частоты собственных колебаний ( $\omega < \omega_0$ ). Множитель  $\sin(\omega t + \varphi_0)$  в выражении (7.5.3) имеет тот же физический смысл, что и в случае идеальных колебаний. Сомножитель  $x_{m_0} e^{-\delta t}$  в (7.5.3) указывает на то, что мгновенная амплитуда реальных колебаний уменьшается с течением времени по экспоненциальному закону

$$x_m = x_{m_0} e^{-\delta t}, \quad (7.5.5)$$

где  $x_{m_0}$  – амплитуда колебаний в начальный момент времени при  $t=0$  и  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ ;  $x_m$  – амплитуда колебаний в момент  $t$ .

Движение, описываемое (7.5.3), не является гармоническим, так как с течением времени последовательные максимальные отклонения точки от положения равновесия уменьшаются. Изобразим временную

диаграмму затухающих колебаний. Построим вначале графики  $x = x_{m_0} e^{-\delta t}$  и  $x = -x_{m_0} e^{-\delta t}$  (рис. 7.12), а затем и график самой функции (7.5.3).

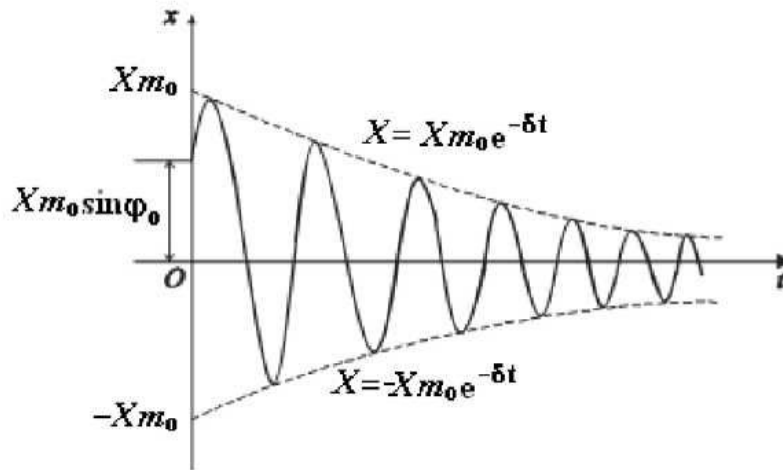


Рис. 7.12

Таким образом, уравнение (7.5.3) можно рассматривать как периодическое движение с частотой  $\omega$  и амплитудой, уменьшающейся по закону (7.5.5). Быстрота затухания определяется коэффициентом затухания  $\delta$ . Выясним его физический смысл. Возьмём промежуток времени  $\tau$  такой, что  $\tau = \frac{1}{\delta}$ . Тогда на основании (7.5.5) имеем

$$x_m = x_{m_0} e^{-1} = \frac{x_{m_0}}{e}. \quad (7.5.6)$$

Следовательно, обратная величина коэффициента затухания есть время, в течение которого амплитуда уменьшается в  $e$  раз (рис. 7.13).

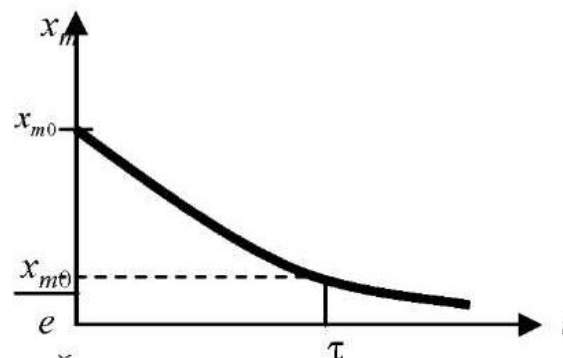


Рис. 7.13

Быстроту затухания колебаний принято характеризовать *логарифмическим декрементом затухания*, который численно равен натуральному логарифму отношения двух мгновенных амплитуд, отличающихся во времени на период  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\lambda = \ln \frac{x_{mt}}{x_{m(t+T)}}. \quad (7.5.7)$$

Другими словами, декремент затухания характеризует относительную убыль амплитуды затухающих колебаний за период. С учётом выражения (7.5.5) найдём

$$\lambda = \ln \frac{x_{m0} e^{-\delta t}}{x_{m0} e^{-\delta(t+T)}} = \ln e^{\delta T} = \delta T. \quad (7.5.8)$$

Учитывая то, что коэффициент затухания  $\delta = \frac{1}{\tau}$ , обратно пропорционален времени  $\tau$ , за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз, найдём

$$\lambda = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}, \quad (7.5.9)$$

где  $N_e$  – число полных колебаний, совершив которые, амплитуда уменьшается в  $e$  раз.

Для характеристики затухания колебательной системы часто применяется величина  $Q$ , называемая *добротностью*, которая определяет относительную убыль энергии за период, подобно тому, как декремент затухания определяет относительную убыль амплитуды.

Можно показать, что добротность обратно пропорциональна логарифмическому декременту затухания

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}. \quad (7.5.10)$$

Так как  $\lambda = \frac{1}{N_e}$ , то

$$Q = \pi N_e. \quad (7.5.11)$$

Из определения добротности следует: чем больше затухание в системе ( $\delta$  и  $\lambda$ ), тем меньше время затухания  $\tau$  и число колебаний  $N_e$ , совершив которые, амплитуда уменьшается в  $e$  раз, и тем меньше величина добротности  $Q$ .

2. Пусть коэффициент сопротивления больше удвоенного волнового сопротивления:  $r > 2\rho$  или  $\delta > \omega_0$ . Учитывая, что период затухающих колебаний  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$ , то даже при  $\delta \rightarrow \omega_0$ ,  $T \rightarrow \infty$ ,

движение маятника перестаёт быть периодическим. Можно показать, что решение дифференциального уравнения (7.5.2) имеет вид

$$x = x_{m_0} te^{-\delta t}.$$

Движение маятника носит *апериодический* характер, т.е. выведенный из положения равновесия маятник (при  $t = 0 : x = x_{m_0}$ ,  $v = 0$ ) медленно возвращается в положение равновесия (рис. 7.14). Если такому маятнику, находящемуся в положении равновесия при  $t = 0$ , сообщить скорость, то его движение будет иметь вид, показанный на рис. 7.15. Апериодическое движение используется в различных успокоительных устройствах механических систем, где осуществляется так называемое *демпфирование*.

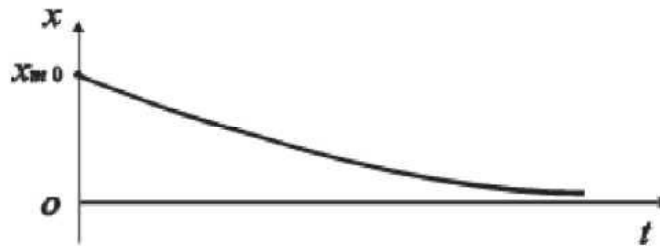


Рис. 7.14

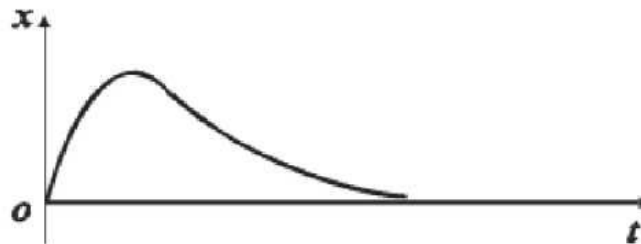


Рис. 7.15

## 7.6. ПОНЯТИЕ О МЕТОДЕ ВЕКТОРНЫХ ДИАГРАММ

Решение многих задач в теории колебаний значительно облегчается и становится более наглядным, если колебания изображать графически на плоскости в виде вращающихся векторов. Такой способ представления колебаний называется *методом векторных диаграмм*.

Пусть гармоническое колебание задано уравнением

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (7.6.1)$$

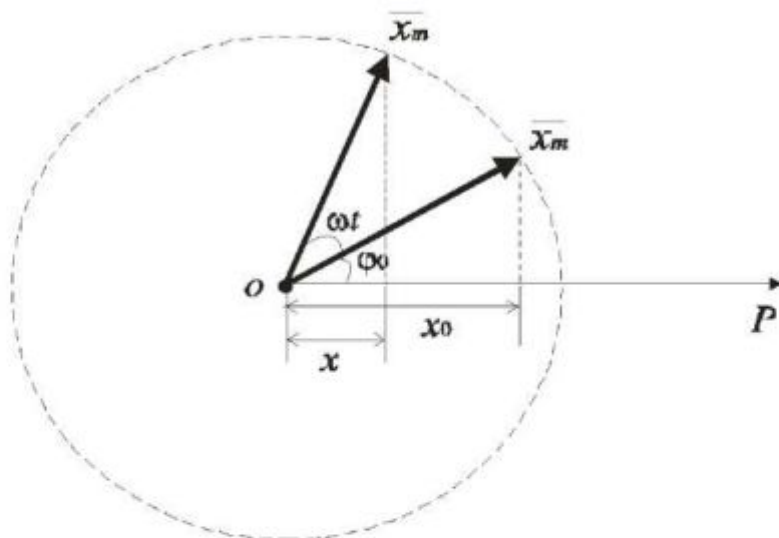


Рис.7.16

Проведём на плоскости прямую линию  $OP$  и построим вектор  $\bar{x}_m$ , численно равный амплитуде  $x_m$  и направленный из точки  $O$  под углом  $\varphi_0$  к опорной линии  $OP$  (рис. 7.16).

Проекция вектора  $\bar{x}_m$  на опорную линию  $OP$  равна

$$x_0 = x_m \cos \varphi_0 = x|_{t=0},$$

т.е. равна мгновенному смещению точки от положения равновесия в начальный момент времени. Пусть вектор  $\bar{x}_m$  вращается против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$  вокруг точки  $O$ . В произвольный момент времени  $t$  вектор  $\bar{x}_m$  повернётся на угол  $\omega t$  и займёт положение, при котором его проекция на опорную линию  $OP$  равна

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0),$$

т.е. мы получили уравнение колебаний (7.6.1). Следовательно, при вращении вектора  $\bar{x}_m$ , равного амплитуде колебаний с частотой  $\omega$ , его проекция на опорную линию изменяется по гармоническому закону. Представление колебания в виде вращающегося вектора, проекция которого на опорную линию изменяется по гармоническому закону, и составляет суть метода векторных диаграмм.

### 7.7 СЛОЖЕНИЕ ДВУХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ, НАПРАВЛЕННЫХ ПО ОДНОЙ ПРЯМОЙ

Часто, материальная точка участвует не в одном, а в нескольких гармонических колебаниях. Пусть имеется маятник  $m$  на пружине жёсткостью  $k$ , установленный на опоре  $AB$ , которая сама может совер-

шать колебания в том же направлении благодаря наличию двух пружин (рис. 7.17). Относительно неподвижной лабораторной системы отсчёта маятник участвует в двух колебательных вертикальных движениях: относительно подставки  $AB$  и вместе с подставкой. Результирующее движение шарика относительно неподвижной системы отсчёта будет складываться из колебаний подставки  $AB$  и колебаний шарика относительно последней.

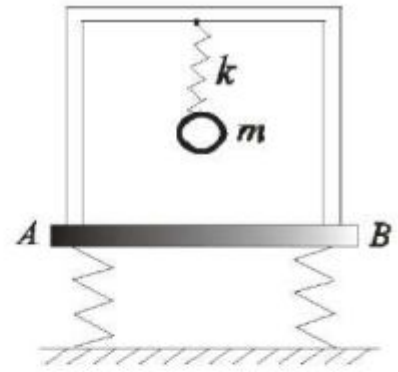


Рис. 7.17

1. Рассмотрим частный случай сложения однонаправленных колебаний одинаковых частот, т.е. колебания маятника и подставки имеют равные частоты, но произвольные амплитуды и начальные фазы

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{m1} \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \\ x_2 &= x_{m2} \cos(\omega_0 t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (7.7.1)$$

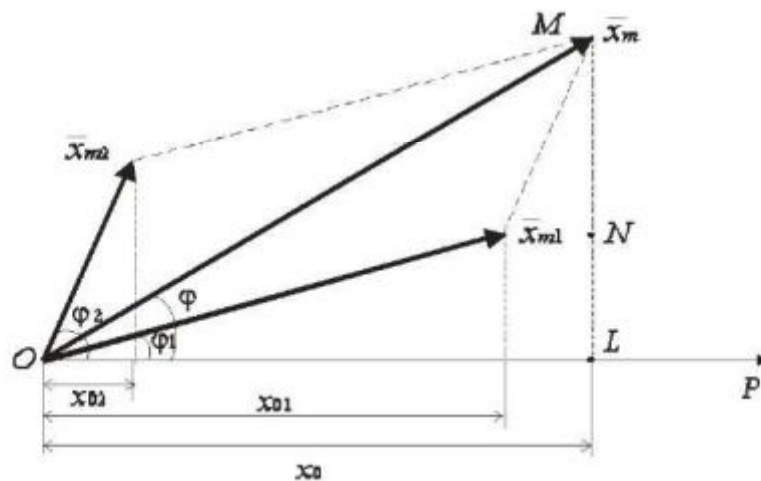


Рис. 7.18

Так как колебания совершаются вдоль одной прямой, то мгновенное смещение маятника от положения равновесия относительно неподвижной системы отсчёта равно  $x = x_1 + x_2$ . Предположим, что результирующее колебание маятника имеет вид

$$x = x_1 + x_2 = x_m \cos(\omega t + \varphi),$$

где  $x_m$  – амплитуда результирующего колебания;  $\omega$  – его круговая частота;  $\varphi$  – начальная фаза. Для нахождения этих величин воспользуемся методом векторных диаграмм (рис. 7.18). Построим векторную диаграмму двух колебаний (7.7.1) для момента времени  $t = 0$ . Проек-



ции векторов  $\bar{x}_{m_1}$  и  $\bar{x}_{m_2}$  на опорную линию определяют смещение маятника  $x_{01}$  и  $x_{02}$  при  $t = 0$ . Так как векторы  $\bar{x}_{m_1}$  и  $\bar{x}_{m_2}$  вращаются с одинаковой угловой скоростью  $\omega_0$ , то угол  $(\varphi_2 - \varphi_1)$  между ними остаётся неизменным. Поэтому в любой момент времени результирующее колебание может быть изображено вектором

$$\bar{x}_m = \bar{x}_{m_1} + \bar{x}_{m_2},$$

вращающимся с той же частотой  $\omega = \omega_0$ . Проекция этого вектора на опорную линию равна результирующему смещению маятника в начальный момент времени

$$x_0 = x_{01} + x_{02}.$$

Учитывая, что все три вектора вращаются с одинаковой скоростью, легко понять, что проекции этих векторов на опорную линию связаны соотношением  $x = x_1 + x_2$ . Следовательно, результирующее движение маятника описывается уравнением

$$x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

С помощью векторной диаграммы без использования громоздких тригонометрических преобразований легко найти амплитуду результирующего колебания

$$x_m^2 = x_{m_1}^2 + x_{m_2}^2 + 2x_{m_1}x_{m_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (7.7.2)$$

Векторная диаграмма позволит определить и начальную фазу результирующего колебания

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{LN + NM}{x_{01} + x_{02}} = \frac{x_{m_1} \sin \varphi_1 + x_{m_2} \sin \varphi_2}{x_{m_1} \cos \varphi_1 + x_{m_2} \cos \varphi_2}. \quad (7.7.3)$$

Из выражения (7.7.2) следует, что результирующая амплитуда зависит не только от амплитуд складываемых колебаний, но и от их разности начальных фаз  $(\varphi_2 - \varphi_1)$ . Колебания одинаковых частот, разность начальных фаз которых постоянна или равна нулю, называются *когерентными*. Исследуем, как зависит амплитуда результирующего колебания от разности начальных фаз складываемых когерентных колебаний.

а) Пусть разность начальных фаз складываемых колебаний равна четному числу  $\pi$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi, \quad (7.7.4)$$

где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , т.е. складываемые колебания синфазные. Для этого необходимо пружинный маятник (рис. 7.17) в начальный момент сместить от положения равновесия по отношению к подставке вниз на величину  $x_{m_1}$  и сместить саму подставку относительно неподвижной

системы координат в том же направлении на величину  $x_{m_2}$ , а затем отпустить. Учитывая выражение (7.7.4), получим  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$ . Следовательно, согласно формуле (7.7.2), найдём амплитуду результирующего колебания маятника

$$x_m^2 = x_{m_1}^2 + x_{m_2}^2 + 2x_{m_1}x_{m_2} = (x_{m_1} + x_{m_2})^2 \text{ или } x_m = x_{m_1} + x_{m_2}. \quad (7.7.5)$$

Таким образом, если разность фаз двух складываемых когерентных однонаправленных колебаний равна чётному числу  $\pi$ , то амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд складываемых колебаний. На рис. 7.19 приведены графики колебаний  $x_1$  и  $x_2$ , а также временная диаграмма результирующего колебания  $x$ . На рис. 7.20 приведена векторная диаграмма сложения двух когерентных колебаний при  $\varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi$ .

б) Пусть разность начальных фаз двух когерентных колебаний равна нечётному числу  $\pi$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (2n - 1)\pi, \quad (7.7.6)$$

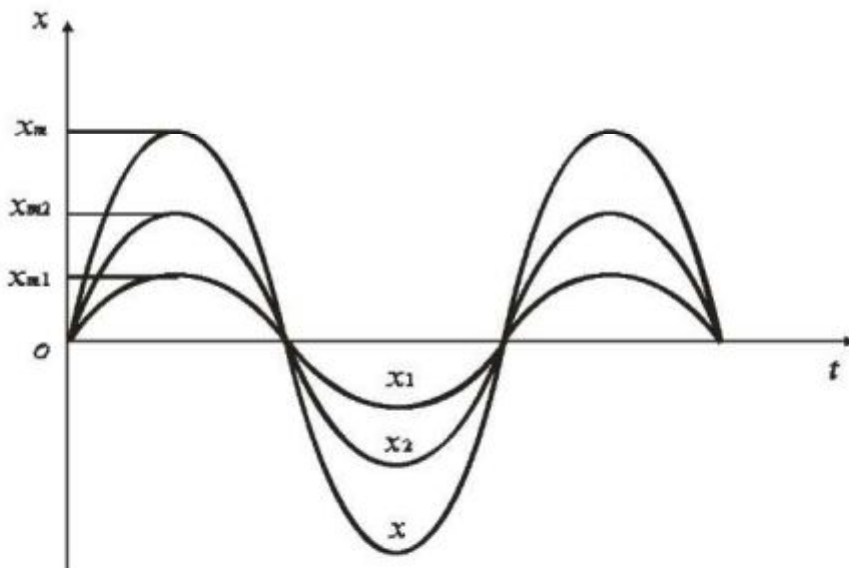


Рис. 7.19

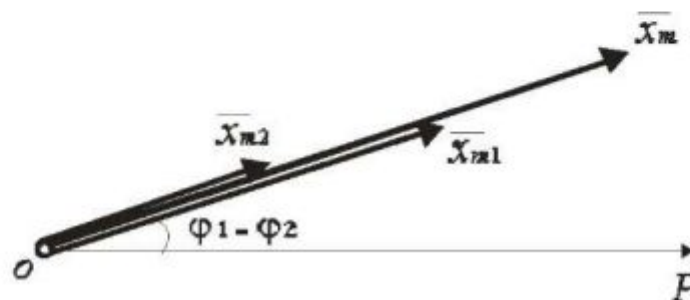


Рис. 7.20

где  $n = 1, 2, 3, \dots$ , т.е. складываемые колебания находятся в противофазе. Для этого необходимо пружинный маятник (рис. 7.17) в начальный момент сместить вниз по отношению к подставке на величину  $x_{m1}$ , а саму подставку сместить вверх относительно неподвижной системы координат на величину  $x_{m2}$  и отпустить. Учитывая выражение (7.7.6), получим  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$ . Следовательно, согласно формуле (7.7.2) найдём амплитуду результирующего колебания маятника относительно неподвижной системы отсчёта

$$x_m^2 = x_{m1}^2 + x_{m2}^2 - 2x_{m1}x_{m2} = |x_{m1} - x_{m2}|^2 \quad \text{или} \quad x_m = |x_{m1} - x_{m2}|. \quad (7.7.7)$$

В частном случае при  $x_{m1} = x_{m2}$  имеем  $x_m = 0$ . Таким образом, если разность начальных фаз двух когерентных однонаправленных колебаний равна нечётному числу  $\pi$ , то амплитуда результирующего колебания равна разности амплитуд складываемых колебаний. На рис. 7.21 показаны временные диаграммы колебаний  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x$ . На рис. 7.22 показана векторная диаграмма всех трёх колебаний.

Таким образом, в зависимости от разности фаз двух когерентных колебаний, амплитуда результирующего колебания может быть заключена в пределах

$$|x_{m1} - x_{m2}| \leq x_m \leq |x_{m1} + x_{m2}|. \quad (7.7.8)$$

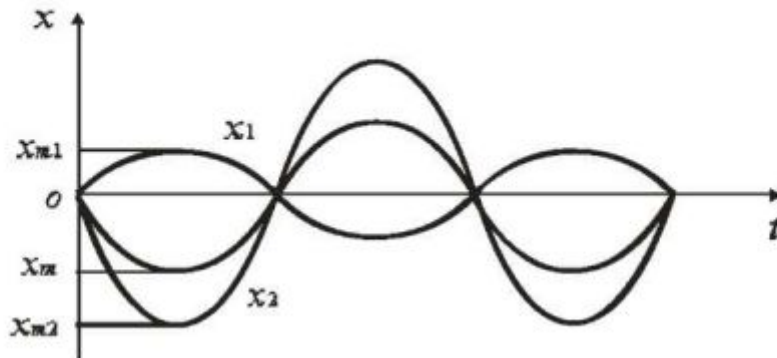


Рис. 7.21

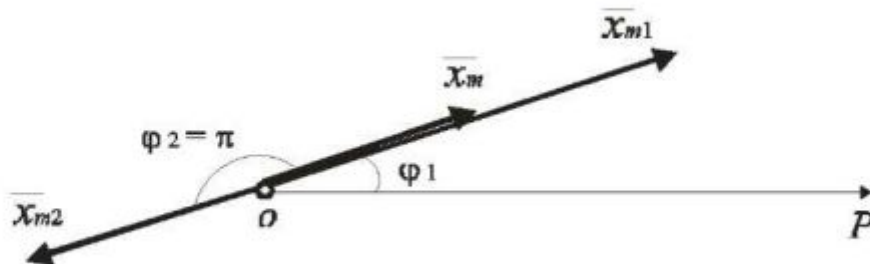


Рис. 7.22

В частном случае при  $x_{m_1} = x_{m_2}$  имеем  $0 \leq x_m \leq 2x_{m_1}$ .

2. Рассмотрим другой важный случай сложения двух колебаний, направленных по одной прямой, но незначительно отличающихся по частоте. Такие колебания будут *некогерентными*. Колебания шарика (рис. 7.17) относительно подставки совершаются с частотой  $\omega$ , а колебания подставки с частотой  $(\omega + \Delta\omega)$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{m_1} \cos \omega t, \\ x_2 &= x_{m_2} \cos(\omega + \Delta\omega)t. \end{aligned} \quad (7.7.9)$$

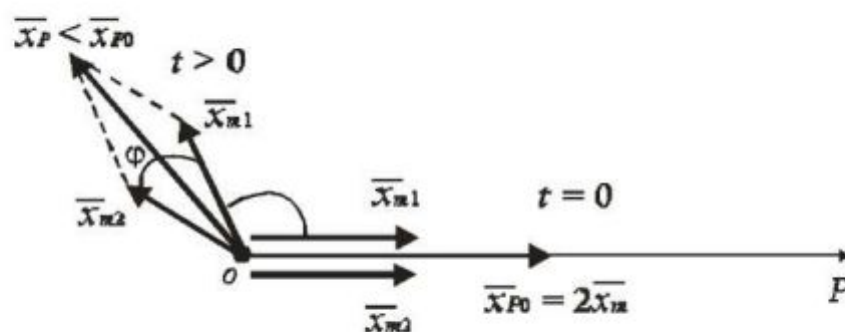


Рис. 7.23

Для простоты будем считать, что амплитуды колебаний одинаковы:  $x_{m_1} = x_{m_2} = x_m$ . Дадим анализ сложения указанных колебаний на основе векторной диаграммы (рис. 7.23). Пусть в начальный момент времени векторы  $\bar{x}_{m_1}$  и  $\bar{x}_{m_2}$  совпадают по фазе, и амплитуда результирующего колебания максимальна и равна:  $x_{p_0} = x_{m_1} + x_{m_2} = 2x_m$ . Вектор  $\bar{x}_{p_0}$  при  $t = 0$  совпадает с опорной линией  $OP$ . В силу того, что частоты складываемых колебаний различны, то векторы  $\bar{x}_{m_1}$  и  $\bar{x}_{m_2}$  рассматриваемых колебаний на векторной диаграмме вращаются с различной скоростью, поэтому результирующая амплитуда  $x_p$  с течением времени будет уменьшаться ( $x_p < x_{p_0}$ ). Наступит такой момент, когда разность фаз между колебаниями будет равна  $\phi = \pi$ , и результирующая амплитуда будет равна  $x_p = x_{m_1} - x_{m_2} = 0$ . Далее разность фаз между рассматриваемыми колебаниями будет возрастать до  $\phi = 2\pi$ , и амплитуда результирующего колебания снова будет равна  $x_{p_0} = 2x_{m_0}$ . Далее изменение результирующей амплитуды будет повторяться. Такое периодическое изменение амплитуды результирующего колебания при сложении колебаний с близкими частотами называется *биениями*.

Временную диаграмму биений можно получить, теоретически сложив уравнения (7.7.9)

$$x = x_1 + x_2 = 2x_m \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \cos \omega t .$$

Это уравнение можно рассматривать как колебание с частотой  $\omega$ , у которого амплитуда  $(2x_m \cos \frac{\Delta\omega}{2} t)$  периодически изменяется с течением времени (рис. 7.24). Период биений равен  $T_6 = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ .

3. Рассмотрим ещё один случай сложения однонаправленных колебаний с кратными частотами, например  $\omega_1 = \omega$ ,  $\omega_2 = 3\omega$ . На рисунке 7.25 показаны временные диаграммы этих колебаний и построение результирующего колебания

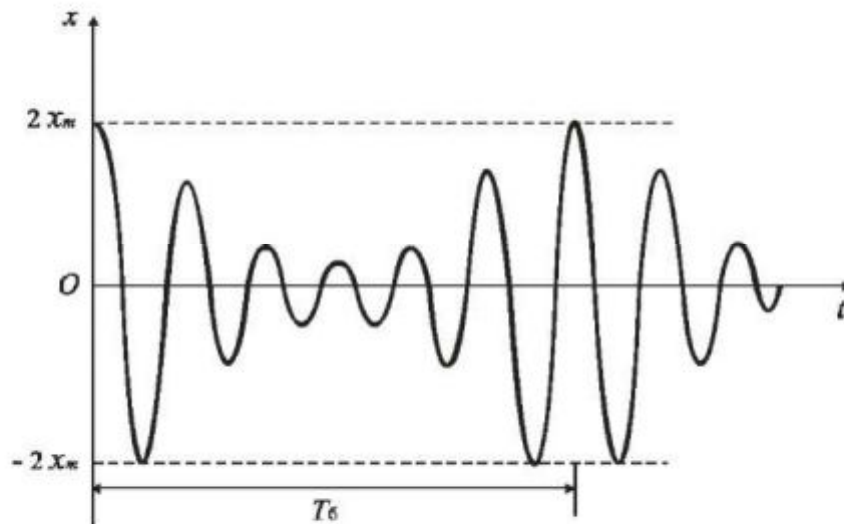


Рис. 7.24

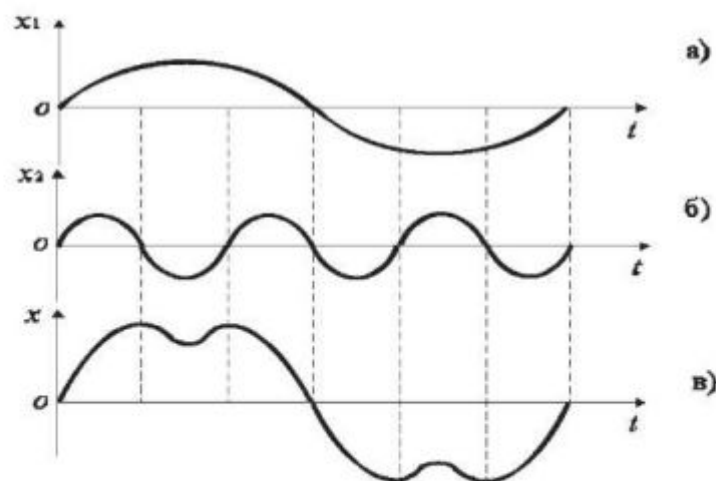


Рис. 7.25

$$x = x_1 + x_2 = x_{m_1} \sin \omega t + x_{m_2} \sin 3\omega t .$$

Легко видеть, что при сложении гармонических колебаний с кратными частотами образуется негармоническое, но периодическое колебание. Справедлива обратная теорема: *любое негармоническое периодическое колебание может быть представлено как сумма гармонических колебаний с кратными частотами* (теорема Фурье).

## 7.8. СЛОЖЕНИЕ ДВУХ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Существует ряд явлений, при которых тело может участвовать одновременно в двух колебаниях, совершающихся по взаимно перпендикулярным направлениям. Например, пусть математический маятник (массивный шар, подвешенный на нити) совершает колебания вдоль оси  $x$ . Если во время движения шара ударить его киянкой в направлении, перпендикулярном к оси  $x$ , то в зависимости от момента удара и его величины, маятник в плоскости  $xoy$  может описывать прямую линию, эллипс или окружность.

Рассмотрим сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ , но различных амплитуд  $x_m$  и  $y_m$ . Допустим, что рассматриваемые колебания имеют разность начальных фаз  $\delta$ , т.е.

$$x = x_m \sin \omega t , \quad (7.8.1)$$

$$y = y_m \sin(\omega t + \delta) . \quad (7.8.2)$$

Для нахождения траектории движения маятника в плоскости  $xoy$  исключим из данных уравнений время  $t$ . Из выражения (7.8.2) найдём

$$\frac{\dot{y}}{y_m} = \sin \omega t \cos \delta + \cos \omega t \sin \delta . \quad (7.8.3)$$

Из формулы (7.8.1) найдём

$$\sin \omega t = \frac{x}{x_m} ; \quad \cos \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{x_m^2}} .$$

Подставив эти величины в выражение (7.8.3), получим

$$\frac{\dot{y}}{y_m} = \frac{x}{x_m} \cos \delta + \sqrt{1 - \frac{x^2}{x_m^2}} \sin \delta \quad \text{или} \quad \frac{\dot{y}}{y_m} - \frac{x}{x_m} \cos \delta = \sqrt{1 - \frac{x^2}{x_m^2}} \sin \delta .$$

Возведя данное выражение в квадрат, найдём уравнение траектории

$$\frac{x^2}{x_m^2} - 2 \frac{x\dot{y}}{x_m y_m} \cos \delta + \frac{\dot{y}^2}{y_m^2} = \sin^2 \delta . \quad (7.8.4)$$

Данное выражение является неканоническим уравнением эллипса. При этом главные полуоси эллипса не совпадают с осями координат. Рассмотрим некоторые частные случаи сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний одинаковых частот.

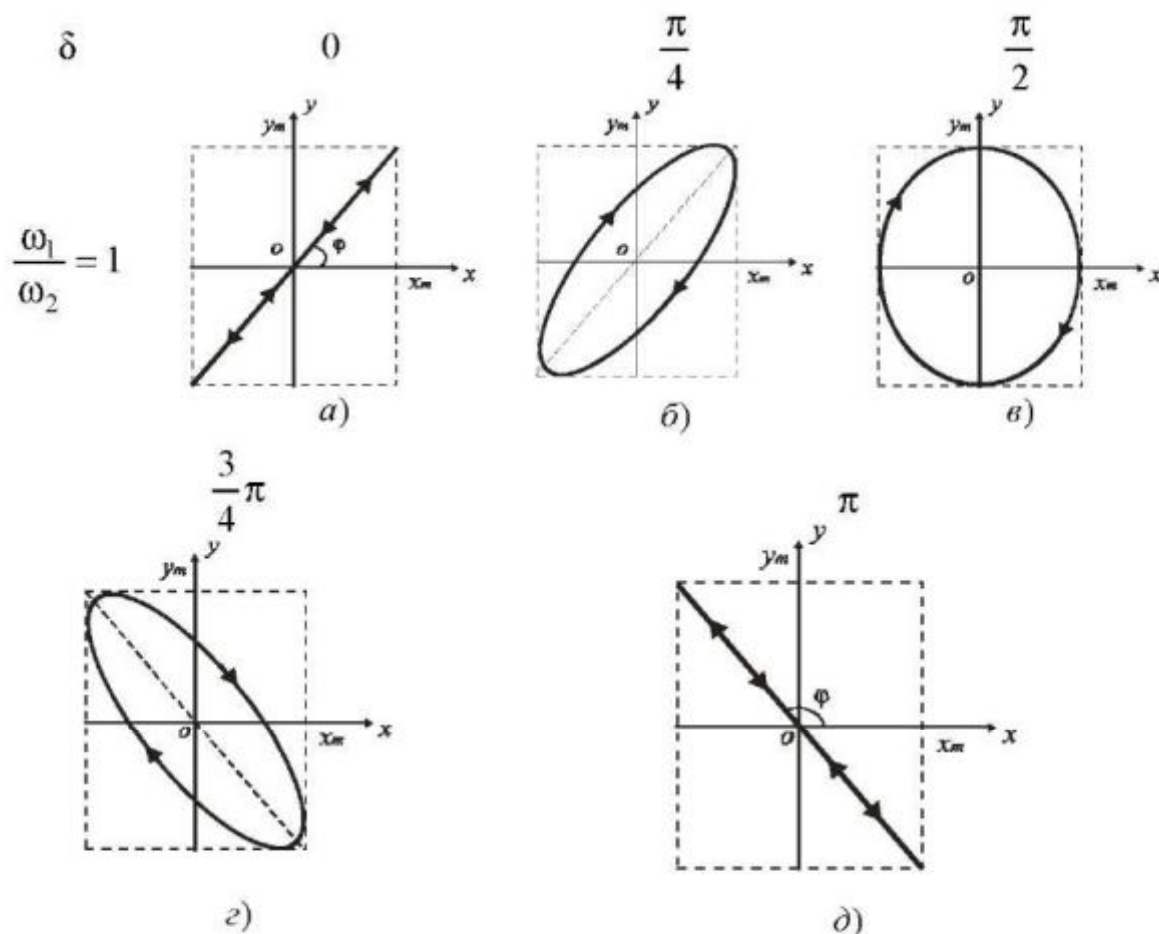


Рис. 7.26

1. Пусть разность фаз складываемых колебаний равна  $\delta = 0$ . Тогда из уравнения (7.8.4) получим

$$\left( \frac{x}{x_m} - \frac{y}{y_m} \right)^2 = 0 \quad \text{или} \quad y = \frac{y_m}{x_m} x, \quad (7.8.5)$$

т.е. траектория результирующего движения является прямой линией (рис. 7.26, а). При этом угол наклона траектории к оси  $x$  равен

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_m}{x_m}.$$

Если  $y_m = x_m$ , то  $\varphi = 45^\circ$ . Чтобы наблюдать данный случай экспериментально, необходимо шар математического маятника, движущегося по оси  $x$  ударить киянкой в направлении, перпендикулярном скорости, когда он проходит положение равновесия.

2. Пусть разность фаз взаимно перпендикулярных колебаний  $\delta = \frac{\pi}{4}$ . Из уравнения (7.8.4) получим

$$\frac{x^2}{x_m^2} - \sqrt{2} \frac{xy}{x_m y_m} + \frac{y^2}{y_m^2} = \frac{1}{2}. \quad (7.8.6)$$

Следовательно, уравнение движения маятника представляет собой эллипс (рис. 7.26, б), полуоси которого не совпадают с осями координат. Для экспериментального наблюдения данного явления необходимо осуществить удар перпендикулярно к его движению в момент, когда смещение  $x$  маятника удовлетворяет условию  $0 < x < x_m$ .

3. Допустим, что  $\delta = \frac{\pi}{2}$ . Из выражения (7.8.4) получим

$$\frac{x^2}{x_m^2} + \frac{y^2}{y_m^2} = 1, \quad (7.8.7)$$

т.е. уравнение траектории представляет собой эллипс, главные полуоси которого совпадают с осями координат и равны соответственно  $x_m$  и  $y_m$  (рис. 7.26, в). Если будет справедливо дополнительное условие равенства амплитуд складываемых колебаний  $x_m = y_m$ , то траектория будет представлять собой окружность. Для наблюдения этого явления опытным путём удар необходимо осуществить в момент, когда маятник имеет максимальное смещение от положения равновесия.

4. При  $\delta = \frac{3}{4}\pi$  уравнение траектории имеет вид

$$\frac{x^2}{x_m^2} + \sqrt{2} \frac{xy}{x_m y_m} + \frac{y^2}{y_m^2} = \frac{1}{2}. \quad (7.8.8)$$

Траектория движения изображена на рис. 7.26, г.

5. При  $\delta = \pi$  из (7.8.4) получим

$$\left( \frac{x}{x_m} + \frac{y}{y_m} \right)^2 = 0 \quad \text{или} \quad y = -\frac{y_m}{x_m} x. \quad (7.8.9)$$

Траектория движения вырождается в прямую линию (рис. 7.26, д), причём  $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{y_m}{x_m}$ . В частном случае, при  $x_m = y_m$   $\varphi = 135^\circ$ . Можно

показать, что при  $\delta = \frac{5}{4}\pi$  траектория будет такой же, что и при

$\delta = \frac{3}{4}\pi$ , но направление обхода будет противоположным. При  $\delta = \frac{3}{2}\pi$



траектория аналогична той, что и при  $\delta = \frac{\pi}{2}$ . При  $\delta = 2\pi$  траектория аналогична той, что и при  $\delta = 0$ . Далее всё будет повторяться. Таким образом, при сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний одинаковых частот образуется результирующее движение по эллипсу, который может вырождаться в окружность или прямую линию.

При сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний кратных частот получаются более сложные траектории результирующего движения, которые называют фигурами Лиссажу. Пусть имеются два колебания с частотами  $\omega$  и  $2\omega$

$$x = x_m \cos 2\omega t, \quad (7.8.10)$$

$$y = y_m \cos \omega t. \quad (7.8.11)$$

Последнее выражение можно представить в виде  $y = y_m \sqrt{\frac{1 + \cos 2\omega t}{2}}$ , откуда найдём

$$2y^2 - y_m^2 = y_m^2 \cos 2\omega t. \quad (7.8.12)$$

Разделив (7.8.12) на (7.8.10), получим

$$\frac{2y^2 - y_m^2}{x} = \frac{y_m^2}{x_m} \quad \text{или} \quad 2x_m y^2 - y_m^2 x = y_m^2 x_m. \quad (7.8.13)$$

Это уравнение параболы.

## 7.9. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Под *вынужденными колебаниями* понимают колебания, возникающие в какой-либо системе под действием переменной внешней силы. Это, например, могут быть колебания механической конструкции под действием переменной нагрузки, колебания мембраны телефона под действием переменного магнитного поля и т.д.

Для экспериментального исследования вынужденных колебаний можно использовать установку (рис. 7.27), состоящую из двух маятников: ведущего с массивным грузом  $M$  и ведомого, выполненного в виде лёгкого стержня длиной  $l_0$ . Маятники вблизи точек подвеса соединены лёгкой пружиной с малой жёсткостью. Маятник с массивным грузом имеет достаточно большую добротность, и время его затухания составляет несколько минут. Ведомый маятник обладает малой добротностью, и время его затухания составляет несколько секунд. Ведомый маятник имеет постоянную собственную частоту колебаний, которая определяется формулой (7.4.5)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2l_0}}. \quad (7.9.1)$$

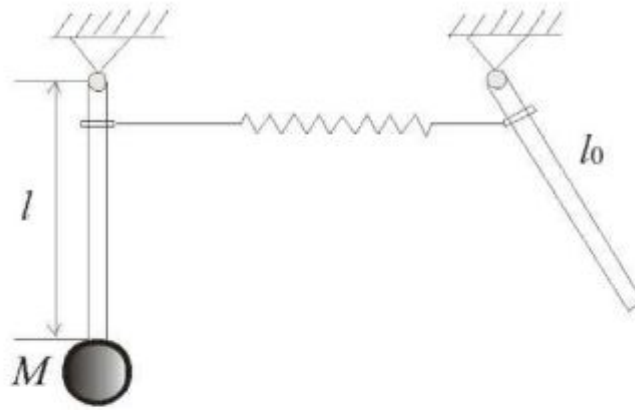


Рис. 7.27

Частота же колебаний ведущего маятника может изменяться благодаря перемещению груза  $M$ , т.е. благодаря изменению его длины  $l$ . Если ведущему маятнику предоставить возможность совершать свободные колебания, то благодаря слабой связи, ведомый маятник совершает вынужденные колебания под действием внешней периодической силы. Следует отметить, что в начальный момент времени вынужденные колебания происходят с периодически изменяющейся амплитудой, а затем становятся устойчивыми, и амплитуда остаётся неизменной. Объясняется это тем, что в начальный момент времени колебания ведомого маятника складываются из собственных колебаний частоты  $\omega_0$  и вынужденных колебаний с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (7.9.2)$$

Если разность этих частот невелика, то результирующее движение ведомого маятника в начальный момент представляет собой биения. Но так как собственные колебания ведомого маятника достаточно быстро затухают, то в последующем, вынужденные колебания становятся устойчивыми и имеют постоянную амплитуду.

Исследуем, как зависит амплитуда вынужденных установившихся колебаний от частоты вынуждающей силы.

а) Устанавливают груз  $M$  ведущего маятника на максимальном расстоянии  $l$  от оси подвеса, т.е.  $l \geq l_0$ . Согласно формулам (7.9.1) и (7.9.2), частота вынуждающей силы будет меньше собственной частоты колебаний ведомого маятника ( $\omega < \omega_0$ ). Из опыта следует, что амплитуда вынужденных колебаний ведомого маятника невелика. При этом фазы колебаний маятников совпадают, т.е. фаза вынужденных колебаний совпадает по фазе с вынуждающей силой.

б) Устанавливают груз  $M$  ведущего маятника на минимальном расстоянии от оси подвеса. Так как  $l \ll l_0$ , то частота внешней перио-

дической силы будет больше собственной частоты колебаний ведомого маятника ( $\omega > \omega_0$ ). Наблюдая за установившимися колебаниями маятника, отмечают, что их амплитуда невелика, но маятники совершают колебания в противофазе. Следовательно, вынужденные колебания отстают по фазе от изменения внешней силы на  $\pi$ .

в) Устанавливают груз  $M$  ведущего маятника на расстоянии  $l = \frac{2}{3}l_0$  от оси подвеса. В этом случае частота внешней периодической силы будет совпадать с собственной частотой ведомого маятника. Из опыта следует, что амплитуда вынужденных колебаний достигает максимального значения, т.е. наступает резонанс. При этом вынужденные колебания отстают по фазе от изменения внешней силы на  $\frac{\pi}{2}$ .

Теоретический анализ вынужденных колебаний дадим на примере рассмотрения пружинного маятника, на который, кроме силы упругости  $F_1 = -kx$  и силы вязкого трения  $F_2 = -rv$ , действует ещё внешняя сила, изменяющаяся по гармоническому закону

$$F = F_0 \sin \omega t. \quad (7.9.3)$$

Дифференциальное уравнение движения маятника имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin \omega t \quad \text{или} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t. \quad (7.9.4)$$

Учитывая, что  $\frac{r}{2m} = \delta$  и  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ , получим

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t. \quad (7.9.5)$$

Решение этого уравнения в установившемся режиме будет иметь вид

$$x = x_m \sin(\omega t - \varphi), \quad (7.9.6)$$

где  $x_m$  – амплитуда вынужденных колебаний;  $\omega$  – частота вынужденных колебаний;  $\varphi$  – разность фаз между мгновенным смещением вынужденных колебаний и периодической силы (7.9.3).

Убедимся в правильности выбранного решения. Для этого продифференцируем выражение (7.9.6) по времени

$$\frac{dx}{dt} = \omega x_m \cos(\omega t - \varphi) = \omega x_m \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x_m \sin(\omega t - \varphi).$$

Подставляя эти выражения в уравнение (7.9.5), получим

$$(\omega_0^2 - \omega^2)x_m \sin(\omega t - \varphi) + 2\delta\omega x_m \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{F_0}{m} \sin \omega t.$$

Для анализа этого тождества воспользуемся векторной диаграммой (рис. 7.28). На основании теоремы Пифагора получим

$$\frac{F_0^2}{m^2} = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 x_m^2 + 4\delta^2 \omega^2 x_m^2, \text{ или } \frac{F_0^2}{m^2} = \left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2 \right] x_m^2.$$

Откуда найдём амплитуду вынужденных колебаний

$$x_m = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}. \quad (7.9.7)$$

Из векторной диаграммы легко найти фазу вынужденных колебаний

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (7.9.8)$$

Исследуем зависимость амплитуды  $x_m$  вынужденных колебаний от частоты  $\omega$  вынуждающей силы. Из формулы (7.9.7) следует, что

при  $\omega \rightarrow 0$ ,  $x_{m0} = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$  — это статическое отклонение точки от положения равновесия под действием амплитуды силы  $F_0$ . При  $\omega \rightarrow \infty$

имеем  $x_m \rightarrow 0$ . При  $\omega = \omega_0$  имеет место резонанс

$$x_{mp} = \frac{F_0}{2\delta\omega m},$$

т.е. амплитуда вынужденных колебаний достигает максимального значения. На рис. 7.29 показана зависимость амплитуды вынужденных колебаний  $x_m$  от частоты  $\omega$  вынуждающей силы. При увеличении добротности колебательной системы  $Q_2 > Q_1$ , резонанс проявляется более отчётливо и с большей амплитудой  $x_{mp}$ .

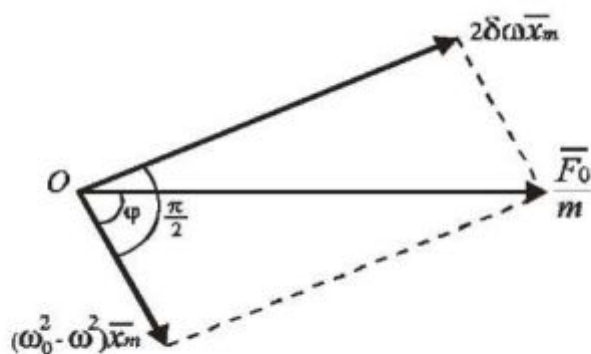


Рис. 7.28

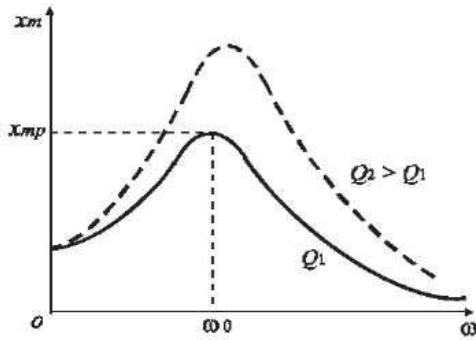


Рис. 7.29

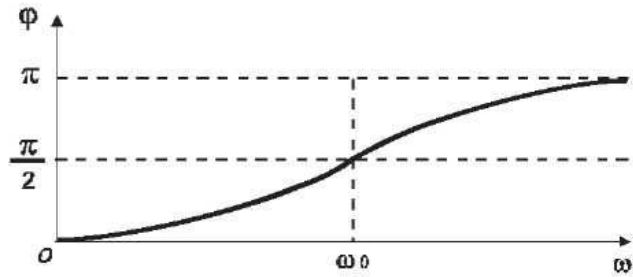


Рис. 7.30

На рисунке 7.30 показана теоретическая зависимость фазы  $\varphi$  вынужденных колебаний от частоты  $\omega$  вынуждающей силы, которая следует из формулы (7.9.8). Из рисунка следует, что при  $\omega \rightarrow 0$ , фаза вынужденных колебаний  $\varphi = 0$ , при  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $\varphi = \pi$ , а при резонансе  $\omega = \omega_0$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , что подтверждается выше описанным экспериментом.

## 7.10. МЕХАНИЧЕСКИЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ

К автоколебательным системам относится широкий класс устройств различной физической природы: от простейших часовых механизмов до оптических квантовых генераторов (лазеров). Проблема состоит в том, чтобы получить незатухающие колебания. Свободные незатухающие колебания могут существовать лишь в системах, где отсутствуют потери энергии. Но в природе таких идеальных систем нет. Очевидно, для того, чтобы колебания, например, математического маятника были незатухающими, его необходимо периодически подталкивать, т.е. сообщать ему некоторые порции энергии для компенсации потерь на трение. При этом направление толчков должно совпадать с направлением движения маятника в момент создания толчка. Для того, чтобы колебания маятника меньше отличались от гармонических, подталкивания необходимо производить один или два раза за период. Очевидно, чтобы колебания маятника были незатухающими, т.е. имели постоянную амплитуду, необходимо, чтобы порции энергии, поступающие к маятнику за время, равное периоду колебаний, были равны потерям энергии за тот же промежуток времени.

Таким образом, для получения незатухающих колебаний необходимо выполнение двух условий: 1) порции энергии, поступающие от источника энергии к колебательной системе, должны полностью компенсировать потери энергии в ней за тот же промежуток времени (условие баланса амплитуд); 2) необходимо, чтобы моменты поступления порций энергии в колебательную систему были согласованы с колеба-

ниями самой системы (условие баланса фаз). Устройство, с помощью которого получают незатухающие колебания, характеризуется тем, что колебательная система с потерями, входящая в это устройство, «самостоятельно», т.е. *автоматически*, управляет процессом поступления энергии от источника к самой системе в узком смысле этого слова. Поэтому подобные устройства называют *автоколебательными*. Автоматическое поступление порций энергии, которые регламентированы по величине и согласованы с колебаниями самой системы, достигается использованием специальных регуляторов или клапанов.

Рассмотрим работу часового механизма. Его основными элементами являются: 1) колебательная система, обладающая потерями энергии – маятник; 2) источник энергии – груз, поднятый над землей, приводящий во вращение храповое колесо; 3) устройство, регулирующее поступление энергии от вращающегося храпового колеса к маятнику – анкер (рис.7.31). Рычаги анкера жёстко скреплены с маятником. Благодаря этому, при колебаниях маятника поверхности *a* и *b* скосов анкера периодически входят в зацепление с зубьями храпового колеса, т.е. маятник самостоятельно управляет положением поверхностей *a* и *b* скосов анкера по отношению к зубьям колеса.

В первый полупериод, когда маятник движется влево (рис. 7.31, *a*), зуб храпового колеса давит с силой  $\bar{F}_1$  перпендикулярно к поверхности *a* скоса анкера. Так как момент силы  $\bar{F}_1$  относительно оси подвеса маятника отличается от нуля, то в течение первого полупериода колебаний, зуб колеса, проскальзывая по поверхности *a* скоса анкера, под-

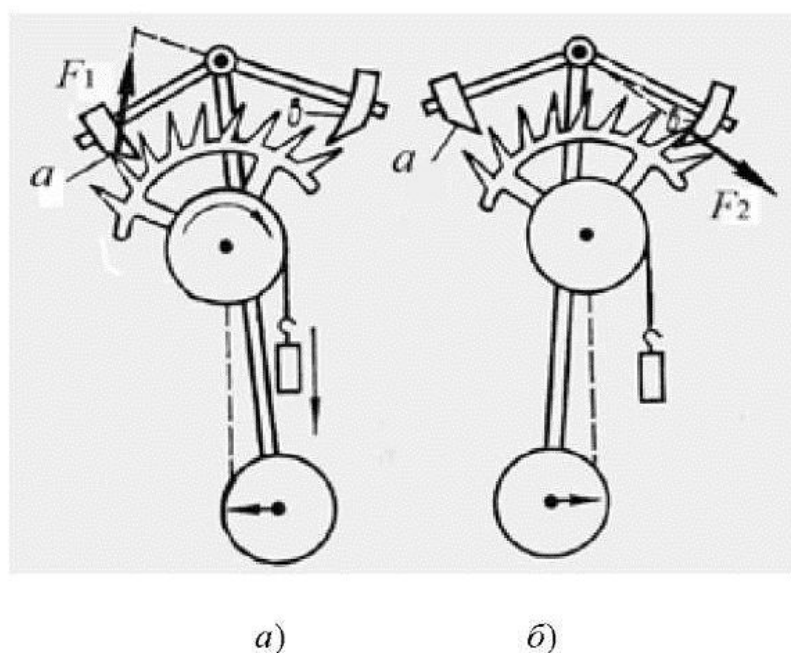


Рис. 7.31

нимает его вверх и тем самым подталкивает маятник по ходу движения. Во второй полупериод, когда маятник движется вправо (рис. 7.31, б), в зацепление с зубом храпового колеса входит поверхность  $b$  анкера. Но эта поверхность является цилиндрической, ось которой совпадает с осью подвеса маятника. Так как линия действия силы  $\overline{F}_2$ , действующая со стороны зуба колеса на поверхность анкера, проходит через ось подвеса маятника, то её вращающий момент относительно оси равен нулю. Следовательно, если отвлечься от трения между зубом храпового колеса и поверхностью  $b$  анкера, то маятник в течение второго полупериода колебаний движется свободно, и энергия ему не сообщается, груз и храповое колесо при этом находятся в покое.

Таким образом, маятник, управляя анкером, один раз за период получает энергию, открывая и закрывая в нужный момент доступ энергии от храпового колеса, которое приводится в движение грузом.

Проведённый анализ работы часового механизма является приближённым. Во-первых, момент силы  $\overline{F}_1$ , действующей на маятник со стороны храпового колеса, в первый полупериод не является постоянным. Этот момент силы нелинейно зависит от угла поворота маятника, вследствие чего за каждый период колебаний маятника на него действует один кратковременный толчок в направлении движения. Во-вторых, при движении маятника во второй полупериод зуб храпового колеса, проскальзывая по поверхности  $b$  анкера, создаёт дополнительное трение, а следовательно, и дополнительные потери по сравнению со свободными колебаниями.

## 7.11. РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Особый важный случай незатухающих колебаний представляют *разрывные колебания*, которые часто называют *релаксационными*. Механическим примером является полый, открытый сверху цилиндр  $B$  (рис. 7.32), способный вращаться вокруг горизонтальной оси  $OO'$ . У пустого цилиндра центр тяжести лежит ниже оси  $OO'$ , для чего ко дну цилиндра прикрепляют небольшой груз, создавая тем самым устойчивое положение равновесия. Когда же уровень жидкости в цилиндре повышается вследствие наполнения его водой через трубку  $T$ , центр тяжести повышается, равновесие становится неустойчивым и цилиндр опрокидывается. Быстро опрокидываясь, цилиндр возвращается в исходное положение. После этого процесс повторяется. Перио-

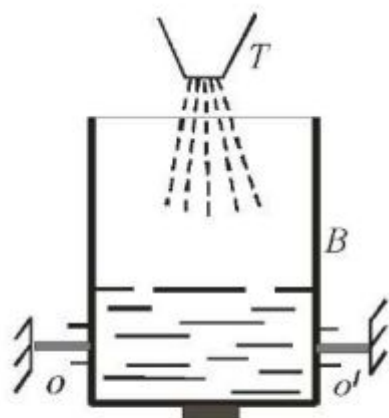


Рис. 7.32

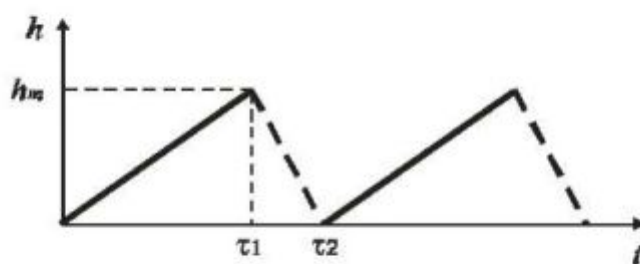


Рис. 7.33

дичность релаксационных колебаний зависит от ёмкости цилиндра и скорости подачи воды. Уровень жидкости в сосуде изменяется так, что его график имеет характерную пилообразную форму (рис. 7.33):  $\tau_1$  – время заполнения цилиндра водой,  $(\tau_2 - \tau_1)$  – время опорожнения цилиндра.

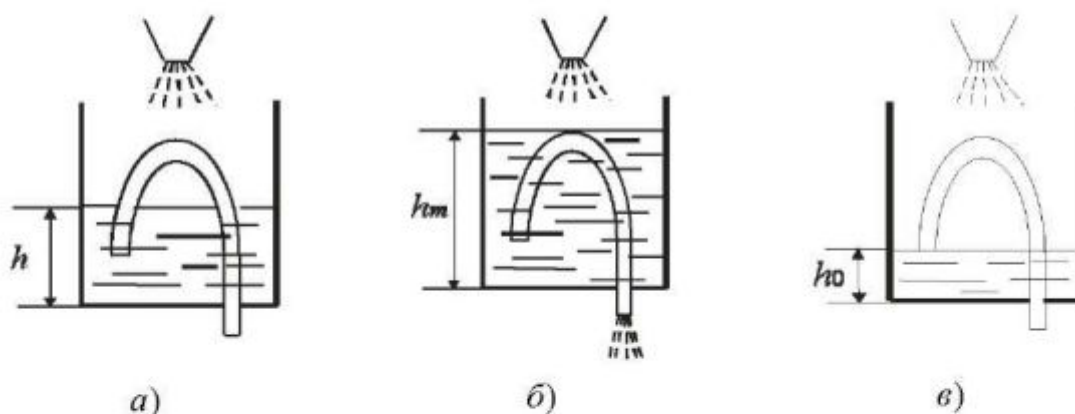


Рис. 7.34

Другим примером механических релаксационных колебаний является так называемый сосуд Тантала (рис. 7.34). Пока уровень жидкости в сосуде мал (рис. 7.34, а), сифон не заполнен жидкостью, и уровень жидкости  $h$  повышается по линейному закону. Когда же уровень жидкости достигает максимальной высоты  $h_m$  (рис. 7.34, б), сифон начинает действовать, и уровень жидкости быстро падает до значения  $h_0$  (рис. 7.34, в). После этого процесс повторяется.

## 7.12. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Под параметрическим возбуждением понимают такой вид возбуждения колебаний, когда внешняя периодическая сила действует не на



колебательную систему, а только изменяет периодически один из её параметров. Так, параметрами математического маятника являются его длина  $l$  и ускорение свободного падения  $g$ , так как эти величины определяют период его колебаний. Следовательно, возможны два основных способа возбуждения параметрических колебаний математического маятника: путём изменения его длины или путём изменения веса маятника. Возможно и смешанное возбуждение, при котором оба параметра изменяются одновременно. Примером параметрических колебаний является раскачивание качелей.

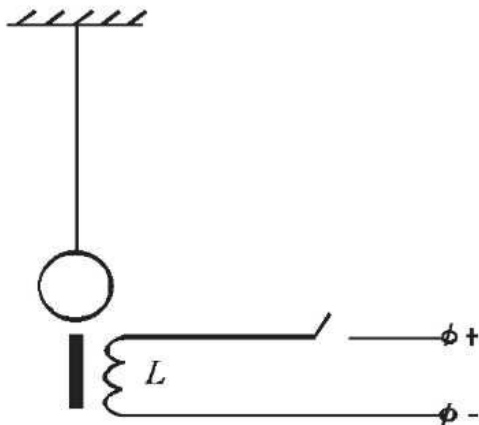


Рис. 7.35

1. Простейшая установка для возбуждения параметрических колебаний показана на рис. 7.35. Маятник, который по своим параметрам близок к математическому, представляет собой стальной шар, подвешенный на лёгкой нити. Под маятником установлен электромагнит, создающий сильное магнитное поле. Вследствие того, что параметрический резонанс наступает при наличии начальных колебаний, перед проведением опыта необходимо привести маятник в колебание с малой амплитудой.

После этого, при полностью отклонённом маятнике от положения равновесия с помощью ключа  $S$ , включают ток в обмотке электромагнита на время, равное четверти периода колебаний, а при прохождении им положения равновесия, ток в обмотке отключают на то же самое время. Другими словами, при приближении маятника к положению равновесия вследствие действия магнитного поля, вес маятника увеличивается, а при удалении маятника от положения равновесия, этого не происходит – вес остаётся прежним.

Таким образом, частота изменения тока в обмотке должна быть в два раза больше собственной частоты колебаний системы. Возникающее магнитное поле периодически увеличивает притяжение стального шарика к электромагниту, что эквивалентно периодическому изменению силы тяжести, действующей на него, т.е. изменению одного из параметров колебательной системы. Если работа внешних сил по увеличению силы тяжести за период окажется больше, чем потери энергии маятника за тот же промежуток времени, то энергия маятника с течением времени будет возрастать, а, следовательно, и амплитуда колебаний будет увеличиваться. Если энергия, сообщаемая маятнику за период, окажется равной потерям энергии за то же время, то колебания маятника становятся незатухающими.



Рис. 7.36

2. Показать возбуждение параметрических колебаний маятника, когда изменяемым параметром является его длина, можно с помощью установки, изображённой на рис. 7.36. Небольшой шар  $B$  подвешен на тонкой нити длиной 1,5 м. Свободный конец нити  $D$  переброшен через неподвижный блок  $C$ . Если свободный конец  $D$  нити закрепить, а шар отклонить в сторону и затем отпустить, то маятник будет совершать колебания с частотой  $\omega_0$ , соответствующей длине подвеса  $l_0 = BC$ . Колебания в этом

случае будут затухающими. Однако если после запуска маятника с небольшой амплитудой периодически с частотой  $\omega$  в два раза большей, чем собственная частота колебаний маятника ( $\omega = 2\omega_0$ ), укорачивать и увеличивать на величину  $\Delta l$  длину подвеса маятника, то амплитуда колебаний маятника увеличивается; причём для наступления параметрического резонанса необходимо укорачивать длину подвеса, когда он проходит положение равновесия и увеличивать длину, когда он находится в крайних точках.

Рассмотрим возбуждение параметрических колебаний с энергетической точки зрения. Пусть в начальный момент времени маятник находится в положении 1 (рис. 7.37) и имеет потенциальную энергию  $W_1 = mgH_0$ . Через четверть периода колебаний маятник будет нахо-

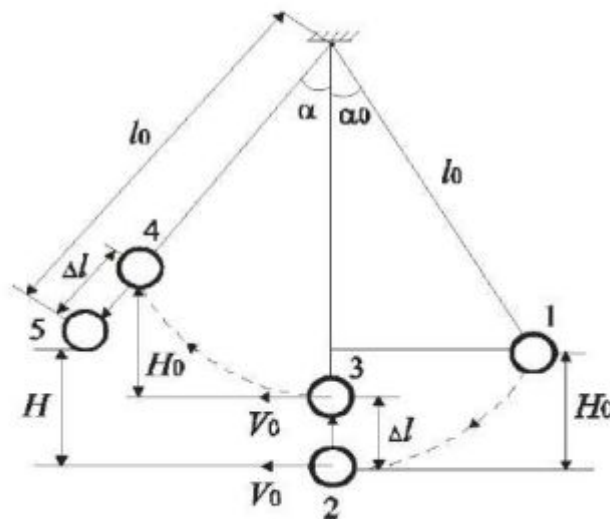


Рис. 7.37

даться в положении 2 и обладать кинетической энергией  $W_2 = \frac{mv_0^2}{2}$ .

На основании закона сохранения энергии  $W_1 = W_2$  найдём скорость маятника при прохождении положения равновесия  $v_0 = \sqrt{2gH_0}$ . Когда маятник проходит положение 2 равновесия, укоротим длину маятника на величину  $\Delta l$  и переведём маятник в положение 3. Так как перемещение происходит перпендикулярно к скорости, то кинетическая энергия маятника не изменяется и равна  $W_3 = \frac{mv_0^2}{2}$ . За счёт этой энергии при переходе в точку 4 маятник поднимается относительно точки 3 на высоту  $H_0$  в соответствии с законом сохранения энергии  $W_4 = W_3$ ,

т.е.  $mgH_0 = \frac{mv_0^2}{2}$ . Но так как длина маятника стала  $(l_0 - \Delta l)$ , и она меньше  $l_0$ , то для поднятия на высоту  $H_0$  маятник должен отклониться от положения равновесия на угол  $\alpha > \alpha_0$ . В момент, когда маятник находится в положении 4, увеличим длину маятника на величину  $\Delta l$ , т.е. восстановим первоначальную длину маятника  $l_0$ . Так как в положении 5 угол  $\alpha > \alpha_0$ , то он имеет потенциальную энергию  $W_5 = mglH$ , которая больше, чем  $W_1$ . Таким образом, при соответствующем изменении длины маятника амплитуда будет возрастать.

Подсчитаем работу, совершаемую внешними силами, при укорачивании его длины на величину  $\Delta l$ , т.е. при переводе маятника из положения 2 в положение 3. При прохождении маятником положения равновесия сила натяжения нити  $T$  должна уравновешиваться силой тяжести и центробежной силой  $T = mg + \frac{mv_0^2}{l}$ . Следовательно, работа внешних сил на участке 2–3 равна

$$A_{23} = T\Delta l = mg\Delta l + \frac{mv_0^2}{l}\Delta l.$$

При увеличении длины маятника на величину  $\Delta l$  при переводе его из положения 4 в положение 5, сила тяжести совершает работу

$$A_{45} = -mg \cos \alpha \cdot \Delta l.$$

Легко видеть, что  $|A_{23}| > |A_{45}|$ , т.е. за счёт периодического изменения длины маятника, он получает энергию  $\Delta W = A_{23} + A_{45}$ . Если эта энергия будет компенсировать потери энергии на трении, то колебания станут незатухающими.

### 7.13. СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Пусть имеется два математических маятника одинаковой длины  $l$  связанные лёгкой пружиной с малой жёсткостью  $k$  (рис. 7.38). При отсутствии указанной связи, каждый маятник имеет собственную частоту колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (7.13.1)$$

Если один из связанных маятников привести в движение, то оба маятника совершают достаточно сложные колебания.

Рассмотрим более простой случай, когда один из связанных маятников закреплён неподвижно, а другой может совершать колебания (рис. 7.39). В положении равновесия связанных маятников пружина не деформирована. При смещении подвижного маятника от положения равновесия на величину  $x$ , на него действуют две восстанавливающие силы

$$F_1 = -mgt\alpha \text{ и } F_2 = -kx.$$

При малых углах отклонения  $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin \alpha = \frac{x}{l}$ , получим

$$F_1 = -\frac{mg}{l}x. \text{ Следовательно, дифференциальное уравнение движения}$$

подвижного маятника имеет вид

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_1 + F_2 \text{ или } m \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{mg}{l}x + kx = 0.$$

Разделив на массу, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left( \frac{g}{l} + \frac{k}{m} \right) x = 0. \quad (7.13.2)$$

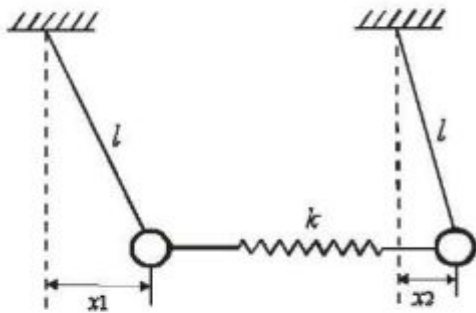


Рис. 7.38

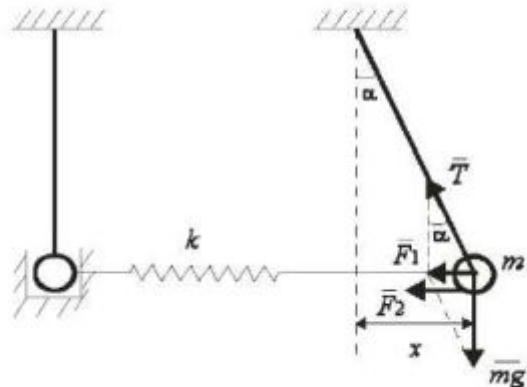


Рис. 7.39

Следовательно, один из связанных маятников, когда второй закреплён, совершает гармоническое колебание с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{m}}. \quad (7.13.3)$$

Движение одного из связанных маятников, когда второй маятник закреплён неподвижно, называется *парциальным движением*, а частота  $\omega$  называется *парциальной частотой*, причём  $\omega > \omega_0$ .

Существует два способа приведения связанных маятников в колебания, при которых они имеют одинаковые частоты и равные амплитуды.

Первый способ: в начальный момент отклоняют в одном направлении оба маятника от положения равновесия на величину  $x_m$  и отпускают (рис. 7.40). Так как во время движения пружина остаётся недеформированной, то частота колебаний маятников равна

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (7.13.4)$$

т.е.  $\omega_1 = \omega_0$ . Колебания маятников имеют одинаковые фазы, т.е. они являются синфазными, и имеют одинаковые амплитуды  $x_m$ . Уравнения движения маятников имеют вид

$$x_1' = x_m \cos \omega_1 t, \quad x_2' = x_m \cos \omega_1 t.$$

Второй способ: отклоняют маятники от положения равновесия на одинаковую величину  $x_m$ , но в противоположные стороны и отпускают. Другими словами, предоставляют маятникам возможность совершать колебания с разностью фаз  $\pi$ , т.е. противофазно (рис. 7.41). При таких колебаниях связанных маятников пружина периодически деформируется на величину вдвое большую, чем при парциальных колебаниях. Вследствие этого частоты связанных противофазных колебаний будут равны

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}. \quad (7.13.5)$$

т.е.  $\omega_2 > \omega_1$ , а уравнения имеют вид

$$x_1'' = x_m \cos \omega_2 t, \quad x_2'' = -x_m \cos \omega_2 t.$$

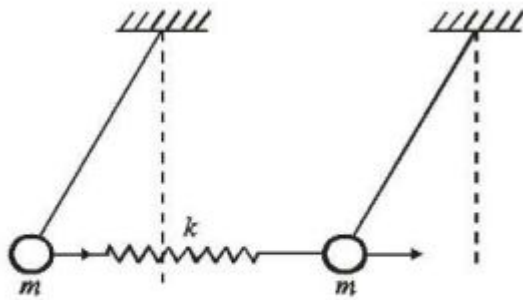


Рис. 7.40

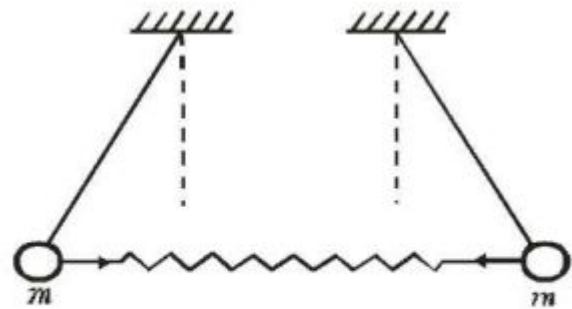


Рис. 7.41

Рассмотренные два вида движения связанных маятников, при которых их частота и амплитуда одинаковы, называются *нормальными колебаниями* или *модами движения*. Частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , соответствующие двум модам движения, называются *нормальными частотами*.

Число различных типов нормальных колебаний и соответствующих им частот равно числу степеней свободы колебательной системы. В связи с этим, в изучаемой системе двух связанных маятников других типов нормальных колебаний, кроме двух рассмотренных выше, нет.

Покажем, что любое сложное колебание двух связанных маятников можно представить как суперпозицию их нормальных мод. Приведём в колебание один из связанных маятников ударом киянки. Отмечают, что с течением времени и второй маятник начинает постепенно раскачиваться. Амплитуда колебаний первого маятника при этом

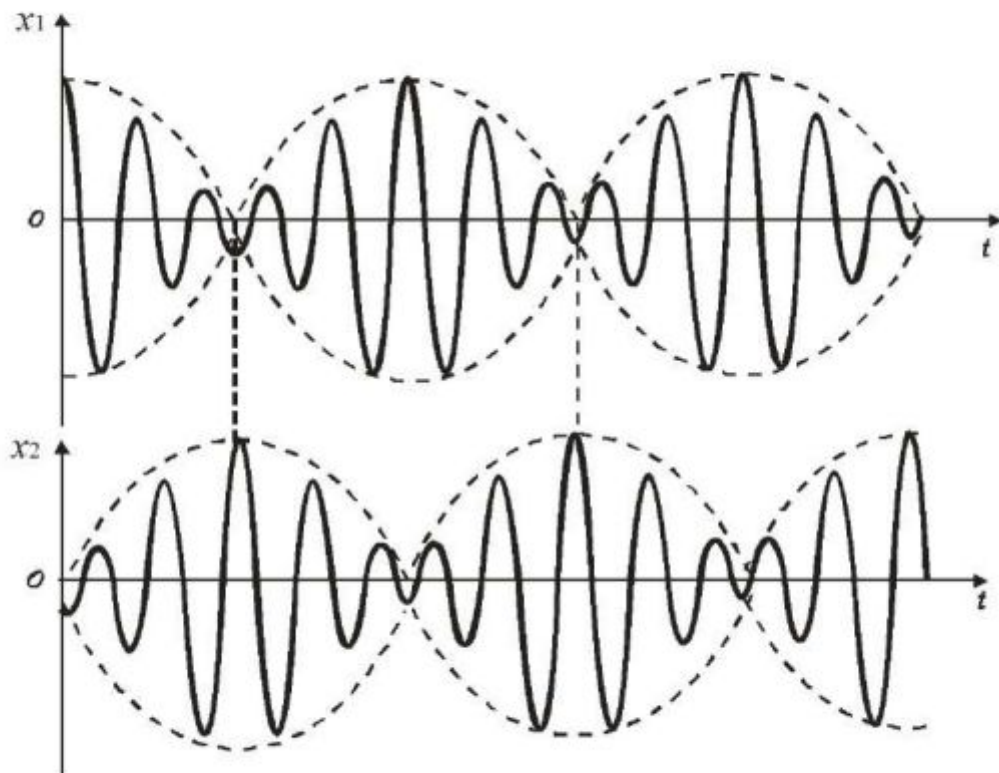


Рис. 7.42

уменьшается, и он совсем останавливается, в то время как амплитуда колебаний второго достигает максимального значения (рис. 7.42). Потом колебания второго маятника угасают, а амплитуда колебаний первого достигает максимального значения. Далее процесс повторяется. Другими словами, амплитуда каждого маятника изменяется точно так же, как при биениях, возникающих при сложении двух колебаний близких частот (см. разд. 7.7). Такое поведение колебательной системы связанных маятников можно понять, обращаясь к нормальным модам. При возбуждении одного из связанных маятников ударом киянки, каждый маятник участвует в двух движениях с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , находящимися в определённой относительной фазе. Но поскольку нормальные частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  отличаются друг от друга, то изменяется и относительная фаза нормальных колебаний. Когда для первого (второго) маятника нормальные колебания оказываются совпадающими по фазе, его амплитуда колебаний будет максимальной; для второго (первого) маятника в этот момент нормальные колебания имеют разность фаз, равную  $\pi$ , и его амплитуда равна нулю.

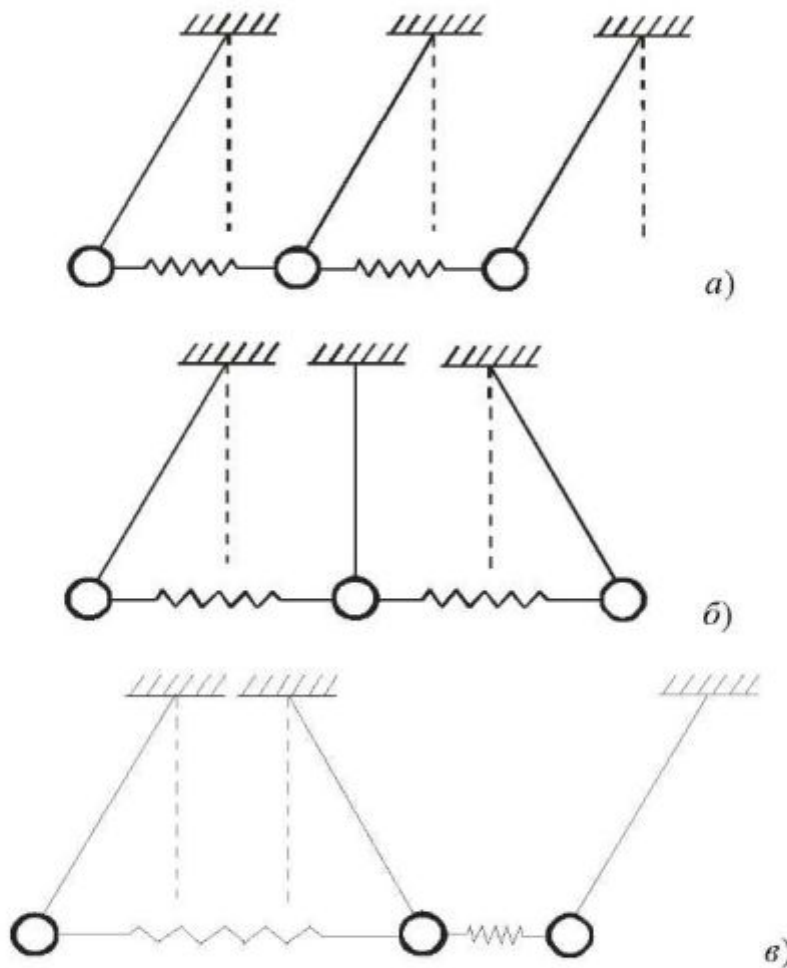


Рис. 7.43

Уравнения движения маятников при суперпозиции нормальных колебаний будут иметь вид

$$x_1 = x_m \cos \omega_1 t + x_m \cos \omega_2 t = 2x_m \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \cos \omega t ,$$

$$x_2 = x_m \cos \omega_1 t - x_m \cos \omega_2 t = 2x_m \sin \frac{\Delta\omega}{2} t \sin \omega t ,$$

где  $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$  – средняя частота;  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  – разность частот нормальных колебаний. Так как  $\Delta\omega \ll \omega$ , то правые части уравнений движения можно рассматривать как уравнения синусоидальных колебаний с частотой  $\omega$  и медленно изменяющейся амплитудой. Графики колебаний каждого маятника при сложных связанных колебаниях показаны на рис. 7.42.

Представляет интерес рассмотреть связанные колебания с энергетической точки зрения. При запуске первого связанного маятника толчком, вся энергия сосредоточена в нём. В результате связи через пружину, энергия постепенно передаётся от первого маятника ко второму до тех пор, пока вся энергия не скопится во втором маятнике. Время  $T_0$ , необходимое для перехода энергии от первого маятника ко

второму и обратно, равно периоду биений  $T_0 \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$ . Время, необходимо

для передачи энергии от одного маятника к другому, равно

$$\tau_0 = \frac{T_0}{2} = \frac{\pi}{\omega_2 - \omega_1} .$$

При этом  $\tau_0$  значительно больше периода собственных колебаний ( $\tau_0 > T$ ).

Рассмотрим связанные колебания трёх маятников (рис. 7.43).

В положении равновесия пружины, соединяющие маятники, не должны быть деформированы. Для наблюдения первой моды движения связанных маятников (рис. 7.43, а) их одновременно отклоняют от положения равновесия и отпускают. Пружины при этом остаются неде-

формированными и частота первой моды движения равна  $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ .

Для наблюдения второй моды движения (рис. 7.43, б) крайние маятники отклоняют в разные стороны и отпускают. Средний маятник колебаний при этом не совершает. Частота второй моды движения равна

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{m}} ,$$

при этом  $\omega_2 > \omega_1$ . Для наблюдения третьей моды дви-

жения маятники приводят в колебания так, чтобы они совершали про-



тивофазные колебания (рис. 7.43, *в*). Нормальная частота противофазных колебаний  $\omega_3 > \omega_2$ . Другими словами, нормальные частоты связанных колебаний трёх маятников удовлетворяют неравенству  $\omega_3 > \omega_2 > \omega_1$ .

При сложных колебаниях трёх связанных маятников, когда один из них возбуждается, например, ударом киянки, колебания передаются от первого маятника ко второму, а от второго к третьему и обратно. Однако время передачи энергии  $\tau$  от одного к другому маятнику значительно меньше, чем в случае двух связанных маятников, т.е. ( $\tau < \tau_0$ ). Время передачи энергии от одного маятника к другому становится сравнимым с полупериодом колебаний маятников и даже меньше. Передача колебаний в системе с большим числом степеней свободы носит волновой характер.

Нормальные колебания системы с большим числом степеней свободы будут рассмотрены в разд. 8.3.

## 8. МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

### 8.1. ПОНЯТИЕ О МЕХАНИЧЕСКИХ ВОЛНАХ. УРАВНЕНИЕ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Частицы любой упругой среды (твёрдой, жидкой или газообразной) взаимодействуют между собой. Если в каком-либо месте упругой среды возбудить колебания её частиц, то колебание начнёт передаваться в среде от частицы к частице с некоторой скоростью  $v$ . Другими словами, мы здесь сталкиваемся со связанными колебаниями большого числа частиц (см. разд. 7.13). Процесс распространения колебаний в упругой среде называется *механической волной*.

Частицы среды, в которой распространяется волна, связаны друг с другом упругими силами, и они обладают массой. Поэтому при распространении волны частицы не переносятся волной, а совершают колебания около своих положений равновесия. В зависимости от направления колебаний частиц по отношению к направлению, в котором распространяется волна, различают *продольные и поперечные волны*. В продольной волне частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны. В поперечной волне частицы среды колеблются в направлениях, перпендикулярных к направлению распространению волны.

Предварительное исследование процесса распространения волн можно наглядно исследовать с помощью механической дискретной периодической структуры (рис. 8.1). Она состоит из тринадцати ( $N = 13$ ) одинаковых металлических стержней длиной 0,7 м, расположенных в горизонтальной плоскости параллельно друг другу на расстоянии 8 см. Каждый стержень имеет поперечную ось вращения, укрепленную с помощью опорных винтов в цилиндрическом кольце.

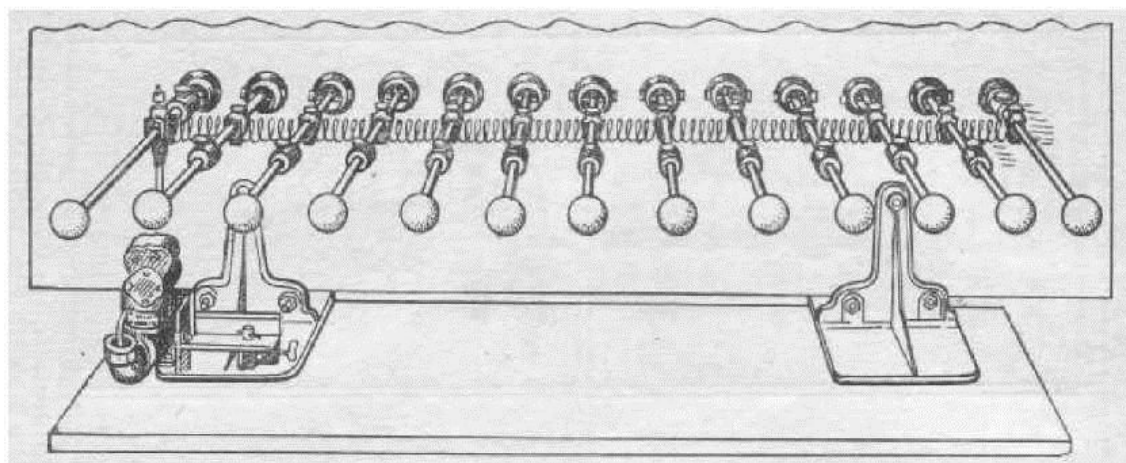


Рис. 8.1

Все тринадцать колец, удерживающих стержни, с помощью боковых фланцев укреплены в отверстиях вертикально расположенного листа фанеры толщиной 10 мм и размером 1,6×0,6 м. Стержни, выполняющие роль маятников, связаны лёгкой пружиной с малой жёсткостью. Чтобы было лучше наблюдать за колебаниями стержней, с лицевой стороны прибора они снабжены шарами диаметром 35 мм. С противоположной стороны прибора стержни уравниваются массивными грузами. С помощью рычагов, связанных с длинной рейкой, все кольца вместе с маятником могут одновременно поворачиваться в вертикальной плоскости на угол 90°. Благодаря этому оси вращения маятников могут устанавливаться или горизонтально, или вертикально. Тем самым, с помощью дискретной периодической структуры имеется возможность наблюдать как поперечные, так и продольные колебания системы с большим числом степеней свободы.

Приведём в поперечные колебания первый элемент дискретной периодической структуры силой, изменяющейся по гармоническому закону, когда все остальные элементы находятся в положении устойчивого равновесия (рис. 8.2, а). Возбуждение первого элемента структуры производится при помощи кривошипного механизма, приводимого в движение электрическим двигателем с понижающим редуктором. При указанном способе возбуждения мгновенное угловое смещение первого элемента изменяется по закону

$$\varepsilon = \varepsilon_m \cos \omega t, \quad (8.1.1)$$

где  $\varepsilon_m$  – амплитуда;  $\omega$  – частота вынужденных колебаний. На опыте убеждаются, что в колебания последовательно приходят и другие элементы структуры, причём они совершают колебания с той же частотой и амплитудой, если не учитывать имеющееся незначительное затухание. Однако вследствие инертных и упругих свойств дискретной структуры, колебания элементов, следующих за первым, запаздывают по фазе  $\varphi$ . Причём, чем дальше элемент находится от источника колебаний, тем он позже начинает совершать колебания, и его колебания запаздывают по фазе на большую величину  $\varphi$  по сравнению с колебаниями первого элемента. На рис. 8.2 показано положение элементов периодической структуры в последовательные моменты времени, отличающиеся на  $\Delta t = \frac{T}{4}$ , т.е. на четверть периода колебаний. Таким

образом, под действием вынужденных колебаний, элементы структуры последовательно приходят в движение, которое воспринимается как распространение *бегущей монохроматической когерентной волны*. На рис. 8.2, б, в, г, д показано положение колеблющихся элементов

периодической структуры в моменты времени:  $t_1 = \frac{1}{4}T$ ;  $t_2 = \frac{1}{2}T$ ;

$t_3 = \frac{3}{4}T$  и  $t_4 = T$ . Расстояние, на которое распространяется волна за

время, равное периоду колебаний частиц, называется *длиной волны*

$$\lambda = vT, \quad (8.1.2)$$

где  $T$  – период колебаний;  $v$  – фазовая скорость монохроматической волны. Нетрудно заметить, что элементы структуры, находящиеся на

расстоянии  $\frac{\lambda}{2}$  (элементы *1* и *6* на рис. 8.2, *д*) совершают колебания с

разностью фаз, равной  $\pi$ , т.е. они совершают противофазные колебания. Элементы структуры *1* и *13* совершают колебания синфазно, т.е. с разностью фаз  $2\pi$ , а не  $0$  (рис. 8.2, *д*). Следовательно, длиной волны называется расстояние между колеблющимися частицами, совершающими колебания с разностью фаз  $2\pi$ , а не  $0$ .

Следует отметить, что при вынужденных колебаниях периодической структуры происходит перемещение её «состояния», т.е. движение «формы» или «конфигурации», а не перенос самих элементов структуры. Под фазовой скоростью бегущей монохроматической волны понимается быстрота перемещения формы или конфигурации волны, т.е. воображаемой точки, имеющей постоянную фазу колебаний. О величине фазовой скорости можно судить по быстроте перемещения, например, любого выбранного «гребня» бегущей волны.

Фазовая скорость не характеризует перенос энергии или массы. Её следует отличать от скорости колебаний частиц упругой среды. Так, для первого элемента периодической структуры, согласно формуле (8.1.1), мгновенная скорость колебаний равна

$$u = \frac{d\epsilon}{dt} = -\omega\epsilon_m \sin \omega t, \quad (8.1.3)$$

где

$$|\omega\epsilon_m| = u_m \quad (8.1.4)$$

максимальная скорость частиц при их колебаниях.

Найдём уравнение колебаний элемента дискретной периодической структуры, который находится на рас-

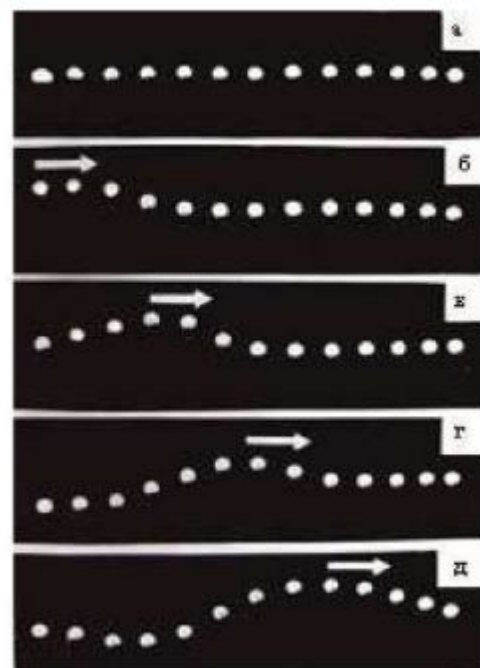


Рис. 8.2

стоянии  $x$  от первого элемента. Допустим, что колебания рассматриваемого элемента запаздывают по фазе на величину  $\varphi$  по сравнению с колебаниями первого элемента. Тогда колебания рассматриваемого элемента, согласно формуле (8.1.1), имеют вид

$$\varepsilon = \varepsilon_m \cos(\omega t - \varphi). \quad (8.1.5)$$

*Волновым числом* назовём отношение разности фаз  $\varphi$  колебаний двух элементов или частиц к расстоянию  $x$  между ними

$$k = \frac{\varphi}{x}. \quad (8.1.6)$$

Волновое число показывает, какой разностью фаз при колебаниях обладают две частицы, находящиеся на единичном расстоянии друг от друга. Учитывая, что две частицы, находящиеся на отрезке, равном длине волны  $\lambda$ , имеют при колебаниях разность фаз  $2\pi$ , а не 0, получим

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (8.1.7)$$

Так как  $\lambda = vT$  или  $\lambda = \frac{v}{\nu}$ , где  $\nu$  – частота колебаний, получим

$$k = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi\nu}{v}. \quad (8.1.8)$$

Учитывая, что  $2\pi\nu = \omega$  – круговая частота, имеем

$$k = \frac{\omega}{v}. \quad (8.1.9)$$

Из формулы (8.1.6) найдём

$$\varphi = kx. \quad (8.1.10)$$

т.е., чтобы найти разность фаз колебаний двух частиц в бегущей волне, необходимо волновое число умножить на расстояние между частицами. Подставляя последнюю формулу в выражение (8.1.5), найдём *одномерное уравнение бегущей монохроматической волны*

$$\varepsilon = \varepsilon_m \cos(\omega t - kx). \quad (8.1.11)$$

Полученное уравнение позволяет найти мгновенное смещение  $\varepsilon$  колеблющейся точки как функцию её координаты  $x$  и времени  $t$ , т.е.

$$\varepsilon = \varepsilon(x; t). \quad (8.1.12)$$

учитывая, что  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  уравнение одномерной бегущей волны

имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_m \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right). \quad (8.1.13)$$

Выясним физический смысл полученных уравнений (8.1.11) и (8.1.13). Во-первых, уравнения показывают, что любая частица, имеющая фиксированную координату  $x = x_0$ , совершает колебание с частотой  $\omega$  и амплитудой  $\varepsilon_m$ ; эти колебания отстают по фазе от колебаний источника на величину  $\varphi_0 = kx_0$

$$\varepsilon = \varepsilon_m \cos(\omega t - kx_0) = \varepsilon_m \cos(\omega t - \varphi_0).$$

Во-вторых, в любой фиксированный момент времени  $t = t_0$  вдоль оси  $x$  существует периодическое изменение мгновенных смещений по закону

$$\varepsilon = \varepsilon_m \cos(\omega t_0 - kx) = \varepsilon_m \cos(\alpha_0 - kx),$$

т.е. моментальная фотография поперечной волны является косинусоидой, или синусоидой (рис. 8.2,  $\delta$ ).

В дискретной периодической структуре волны распространяются вдоль одной прямой. В действительности, при распространении упругих волн в средах, в колебательный процесс вовлекаются частицы некоторого объёма (например, звуковые волны). *Фронтом волны* принято называть геометрическое место точек, до которых доходит колебание к некоторому моменту времени; фронт волн отделяет область пространства, уже вовлечённую в волновой процесс от области, в которой возмущения ещё не возникли. *Волновой поверхностью* принято называть геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковых фазах. Это могут быть точки одного и того же «гребня» или «впадины» волны. Например, волна, образующаяся в результате падения маленького камушка в спокойную воду, имеет волновую поверхность в форме окружности. Волновых поверхностей может быть бесконечное множество, в то время как волновой фронт в фиксированный момент времени один. В зависимости от формы волновой поверхности, механические волны бывают *плоские*, *сферические*, *цилиндрические*. В анизотропных средах волновая поверхность может иметь форму эллипсоида вращения.

Полученные одномерные уравнения (8.1.11) и (8.1.13) могут выполнять роль *уравнений монохроматических бегущих плоских волн*, если ось  $x$  направлена перпендикулярно к волновой поверхности. Так как в сферической волне её амплитуда зависит от расстояния  $r$  до точечного источника, то уравнение бегущей волны имеет вид

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_m}{r} \cos(\omega t - kr). \quad (8.1.14)$$

Для цилиндрической волны уравнение имеет вид

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R}} \cos(\omega t - kR), \quad (8.1.15)$$

где  $R$  – расстояние от источника, который имеет вид прямой линии.

Исследуя распространение волн в дискретной периодической структуре (рис. 8.1), следует показать, что при увеличении частоты  $\omega$  колебаний первого элемента, длина волны  $\lambda$  уменьшается, уменьшается и фазовая скорость  $v$ , т.е. для дискретной структуры характерна *нормальная дисперсия*. При достаточно большой частоте  $\omega_{кр}$  – называемой *критической*, длина волны становится минимальной  $\lambda_{min} = 2a$ , где  $a$  – расстояние между элементами структуры, находящимися в состоянии равновесия. При критической частоте соседние элементы структуры совершают противофазные колебания. При частоте выше критической, распространение волн в структуре становится невозможным. Этим дискретная периодическая структура отличается от реальных упругих сред, для которых не существует критической частоты.

Наличие дисперсии в периодической дискретной структуре приводит к тому, что кратковременный импульс или волновой цуг ограниченной протяжённости, представляющий собой суперпозицию гармонических волн с различными волновыми числами, будет менять свою форму по мере движения в структуре, так как составляющие его компоненты с различными длинами волн распространяются с разной фазовой скоростью. Это явление можно наблюдать на опыте. Действительно, отклонив первый элемент вверх от положения равновесия и возвратив его быстро в исходное положение, наблюдают движение импульса с *групповой скоростью* (рис. 8.3, а, б). По мере движения импульса вдоль структуры замечают его уширение. Очевидно, что уширение импульса будет тем больше, чем большее расстояние он пройдёт вдоль линии. Поэтому уширение отражённого импульса от

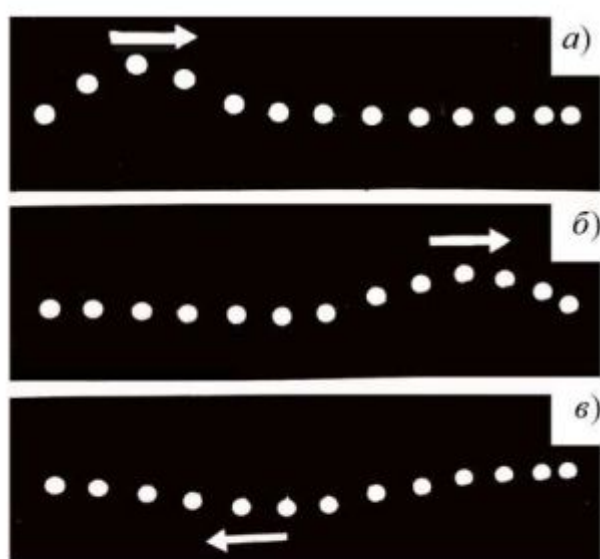


Рис. 8.3

неподвижного конца линии проявляется особенно заметно (рис. 8.3, в).

Из рисунка 8.3 видно, что при отражении кратковременного импульса или волнового цуга ограниченной протяжённости от закреплённого конца дискретной периодической структуры его полярность изменяется на противоположную. Следовательно, при отражении волны её фаза изменяется на  $\pi$ .

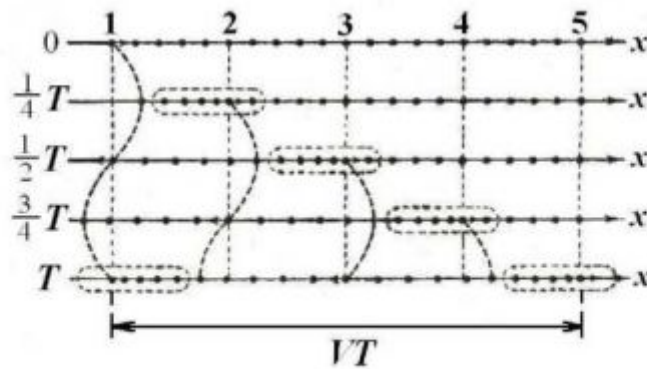


Рис. 8.4

На рисунке 8.4 показано движение частиц при распространении в среде продольной волны. Все рассуждения, касающиеся поведения частиц в поперечной волне, могут быть отнесены и к данному случаю с заменой смещений  $\epsilon$  вверх и вниз смещениями вправо и влево. Как видно из рис. 8.4, при прохождении продольной волны в среде, создаются чередующиеся сгущения и разрежения частиц, которые перемещаются в направлении распространения волны со скоростью  $v$ .

## 8.2. СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ВОЛН

Рассмотрим распространение продольной механической волны в длинном твёрдом стержне (рис. 8.5, а), имеющем площадь поперечного сечения, равную  $S$ . Под действием кратковременного действия силы  $F$ , например, за счёт удара молотком, стержень деформируется на величину  $\Delta l$ . С другой стороны, за время  $\Delta t$  действия силы частицы стержня приходят в движение, и их возмущение (зона сжатия) распространяется за время  $\Delta t$  на расстояние  $l$  (рис. 8.5, б). Все частицы левее границы  $B$  под действием силы  $\bar{F}$  движутся со скоростью  $u$ , а граница возмущения перемещается со скоростью  $v$ . Применим теорему об

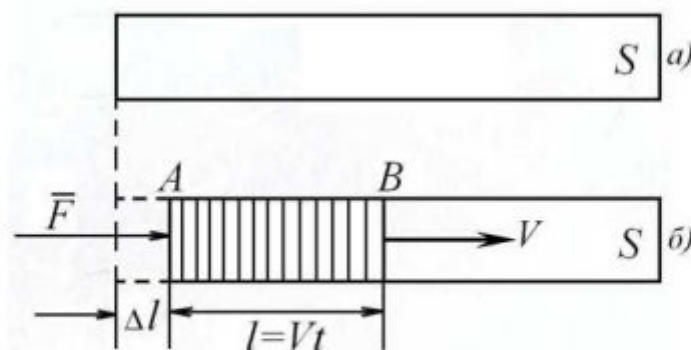


Рис. 8.5



изменении импульса к возмущённой области  $AB$

$$mi = F\Delta t, \quad (8.2.1)$$

где  $m$  – масса участка  $AB$  стержня. Если через  $\rho$  обозначить плотность материала стержня, то  $m = \rho lS$ . Учитывая, что  $l = v\Delta t$ , получим

$$m = \rho Sv\Delta t. \quad (8.2.2)$$

Обозначим через  $P$  давление силы  $F$  на торцевую поверхность  $S$  стержня. Тогда имеем

$$F = PS. \quad (8.2.3)$$

Подставив выражения (8.2.2) и (8.2.3) в уравнение (8.2.1), найдём

$$P = \rho v^2 i. \quad (8.2.4)$$

Применим закон Гука к продольной деформации стержня

$$P = E \frac{\Delta l}{l}. \quad (8.2.5)$$

Учитывая, что  $\Delta l = u\Delta t$ , где  $u$  – скорость частиц среды;  $l = vt$ , где  $v$  – скорость распространения волнового возмущения, получим

$$P = E \frac{u}{v}. \quad (8.2.6)$$

Приравняв правые части формул (8.2.4) и (8.2.6), окончательно найдём скорость продольной волны в твёрдом стержне

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (8.2.7)$$

где  $E$  – модуль Юнга. Так, например, для стального стержня ( $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>;  $\rho = 7,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>) имеем  $v \approx 5050$  м/с, что хорошо согласуется с опытом.

В твёрдых телах могут распространяться и поперечные волны. В этом случае формула для вычисления скорости волн принимает вид

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (8.2.8)$$

где  $G$  – модуль сдвига. Так как  $G < E$ , то скорость поперечных волн меньше продольных. Этот результат используется для определения эпицентров землетрясений.

Так как жидкости и газы не обладают упругой деформацией к сдвигу ( $G = 0$ ), то в этих средах могут распространяться только продольные волны.

В газах скорость упругих волн может быть вычислена по формуле

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}, \quad (8.2.9)$$

где  $P$  – давление;  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  – показатель адиабаты. В случае идеального газа, подчиняющегося уравнению Менделеева – Клапейрона

$$P = \frac{m}{v} \frac{RT}{\mu} = \rho \frac{RT}{\mu}, \text{ найдём } v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}. \quad (8.2.10)$$

Например, для воздуха  $\gamma = 1,4$ ;  $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль;  $R = 8,31$  Дж/моль·К при температуре  $T = 290$  К найдём  $v = 342$  м/с. Этот результат с точностью до 1% совпадает с опытными данными по определению скорости звука в воздухе. В то же время полученная формула (8.2.10) не даёт правильной зависимости скорости звука в газах от температуры. Эта зависимость, согласно опытным данным, является линейной.

### 8.3. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ И ОБРАЗОВАНИЕ СТОЯЧИХ ВОЛН

Если в некоторую точку пространства, заполненного упругой средой, приходят две волны, то результирующее мгновенное смещение  $\varepsilon$  частицы в этой точке равно алгебраической сумме смещений  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , создаваемых каждой волной в отдельности

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (8.3.1)$$

В этом состоит сущность *принципа суперпозиции волновых процессов*. Справедливость его можно показать опытным путём с помощью механической периодической дискретной структуры (рис. 8.1).

Возбуждают одновременно крайние элементы периодической структуры так, чтобы вдоль неё побежали навстречу друг другу два импульса одинаковой полярности  $\varepsilon_1 = \varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon > 0$  (рис. 8.6, а, б, в, г). Так как начальные фазы импульсов одинаковы, то, пройдя равные расстояния и достигнув середины структуры, их разность фаз останется равной нулю. В результате сложения колебаний, совпадающих по фазе, результирующее мгновенное смещение  $\varepsilon$  в центре структуры равно сумме мгновенных смещений  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , создаваемых каждым импульсом в отдельности:  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\varepsilon$ , вследствие чего центральный элемент максимально отклоняется от положения равновесия (рис. 8.6, д). В дальнейшем, волновые импульсы распространяются, не мешая друг другу (рис. 8.6, е).

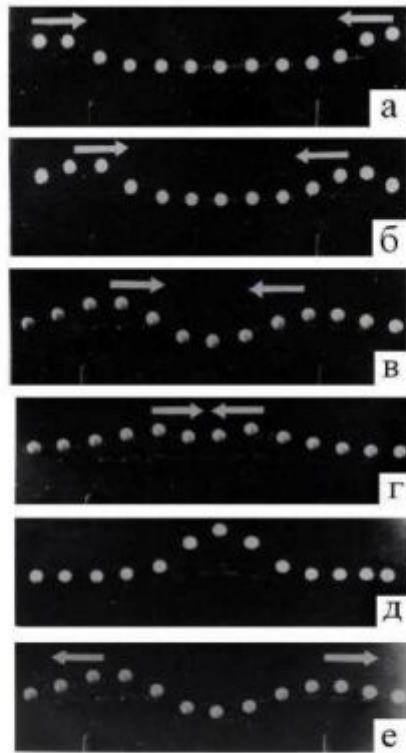


Рис. 8.6

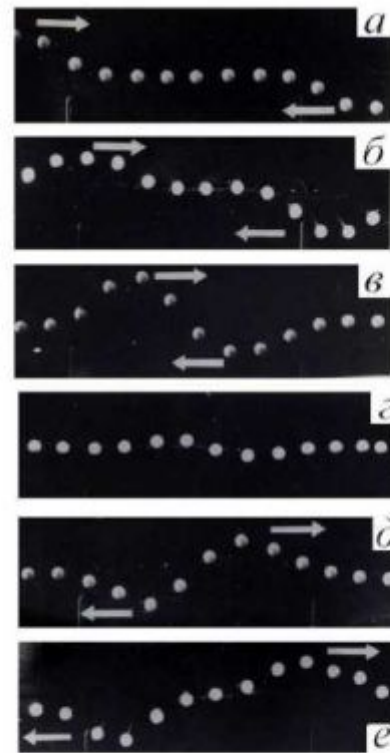


Рис. 8.7

Возбуждают крайние элементы структуры так, чтобы в ней бежали два импульса противоположной полярности:  $\varepsilon_1 = \varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon_2 = -\varepsilon < 0$  (рис. 8.7, а, б, в). Другими словами, бегущие навстречу друг другу импульсы имеют разность фаз, равную  $\pi$ . Пройдя одинаковые расстояния и достигнув середины периодической структуры, импульсы в точке встречи имеют ту же полярность и ту же разность фаз. В результате сложения двух импульсов в точке встречи, результирующее смещение равно  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon = 0$ , т.е. центральный элемент периодической структуры не испытывает существенного отклонения от положения равновесия (рис. 8.7, г). В дальнейшем, импульсы распространяются независимо друг от друга (рис. 8.7, д, е). Чтобы центральный элемент не испытывал отклонения, необходимо, чтобы импульсы противоположной полярности имели одинаковую форму.

*Стоячие волны* образуются при наложении бегущих волн одинаковой частоты навстречу друг другу. Обычно стоячую волну получают при сложении волны, идущей от источника, и волны, отражённой от закреплённого конца, например, резинового шнура или периодической дискретной структуры.

Пусть источник волн находится в точке  $O$ , а закреплённый конец — в точке  $A$ , которая расположена от источника колебаний на расстоянии  $l$  (рис. 8.8). Начало оси  $x$  координат совместим с источником, который совершает колебания по закону

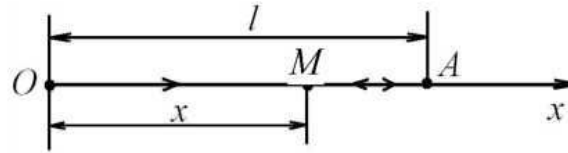


Рис. 8.8

$$\varepsilon = \varepsilon_m \cos \omega t . \quad (8.3.2)$$

В произвольную точку  $M$  наблюдения приходят две волны: прямая, идущая непосредственно от источника колебаний

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_m \cos(\omega t - kx) \quad (8.3.3)$$

и отражённая от закреплённого конца

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_m \cos[\omega t - k(2l - x) - \pi]. \quad (8.3.4)$$

Во-первых, здесь учтено, что вторая волна от источника  $O$  до точки наблюдения  $M$  проходит расстояние  $l + (l - x) = 2l - x$ ; во-вторых, при отражении, фаза волны изменяется на  $\pi$ . Согласно принципу суперпозиции, результирующее колебание в любой точке среды описывается уравнением

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_m \cos(\omega t - kx) + \varepsilon_m \cos[\omega t - k(2l - x) - \pi].$$

Воспользовавшись формулой тригонометрии

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

найдем уравнение стоячей волны

$$\varepsilon = 2\varepsilon_m \cos \left[ k(l - x) + \frac{\pi}{2} \right] \cos \left[ (\omega t - kl) - \frac{\pi}{2} \right]. \quad (8.3.5)$$

Физический смысл этого уравнения состоит в следующем. Во-первых, все точки в стоячей волне совершают колебания с одинаковой частотой  $\omega$ , о чём говорит множитель  $\cos \left[ (\omega t - kl) - \frac{\pi}{2} \right]$ . Во-вторых, амплитуда этих колебаний определяется множителем

$$2\varepsilon_m \cos \left[ k(l - x) + \frac{\pi}{2} \right] = \varepsilon_{\text{мст}}, \quad (8.3.6)$$

который может быть назван амплитудой колебаний в стоячей волне. Из формулы (8.3.6) следует, что точки с различной координатой  $x$  мо-

гут иметь различную амплитуду колебания в стоячей волне. Рассмотрим два частных случая.

1. Допустим, что выполняется соотношение

$$\cos\left[k(l-x) + \frac{\pi}{2}\right] = \pm 1. \quad (8.3.7)$$

В этом случае, согласно формуле (8.3.6), амплитуда колебаний в стоячей волне максимальна по абсолютной величине

$$\varepsilon_{\text{мст}} = 2\varepsilon_m. \quad (8.3.8)$$

Точки стоячей волны, которые совершают колебания с максимальной амплитудой, называются *пучностями мгновенных смещений*. Найдём их положение. Условие (8.3.7) выполняется, если

$$k(l-x) + \frac{\pi}{2} = m\pi = 2m\frac{\pi}{2},$$

где  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Учитывая, что  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , где  $\lambda$  – длина бегущей волны, получим

$$\frac{2\pi}{\lambda}(l-x) = (2m-1)\frac{\pi}{2}.$$

Откуда находим

$$(l-x) = (2m-1)\frac{\lambda}{4}, \quad (8.3.9)$$

т.е. *пучности мгновенных смещений в стоячей волне находятся на расстояниях, кратных нечётному числу четвертей длины волны от закреплённого конца*.

2. Допустим, что положение точки в стоячей волне удовлетворяет условию

$$\cos\left[k(l-x) + \frac{\pi}{2}\right] = 0. \quad (8.3.10)$$

В этом случае, согласно формуле (8.3.6), амплитуда колебаний точки в стоячей волне равна нулю

$$\varepsilon_{\text{мст}} = 0, \quad (8.3.11)$$

т.е. в стоячей волне есть точки, которые не совершают колебания. Они называются *узлами стоячей волны*. Найдём их положение. Формула (8.3.10) выполняется, если

$$k(l-x) + \frac{\pi}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2},$$

где  $m$  – целые числа. Учитывая, что  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , найдём

$$\frac{2\pi}{\lambda}(l-x) = m\pi \text{ или } (l-x) = m\frac{\lambda}{2}, \quad (8.3.12)$$

т.е. узлы стоячей волны образуются на расстояниях, кратных целому числу половолн от закреплённого конца.

Для наглядного наблюдения стоячей волны закрепляют крайний правый элемент дискретной периодической структуры неподвижно, а первый элемент её приводят в медленные колебания с помощью электродвигателя (рис. 8.1). Подбирают частоту возбуждения структуры такой, чтобы её средний элемент не совершал колебания. На рис. 8.9 дано положение элементов дискретной структуры (мгновенные фотографии) через последовательно равные промежутки времени:  $\Delta t = \frac{1}{8}T$ ,  $T$  –

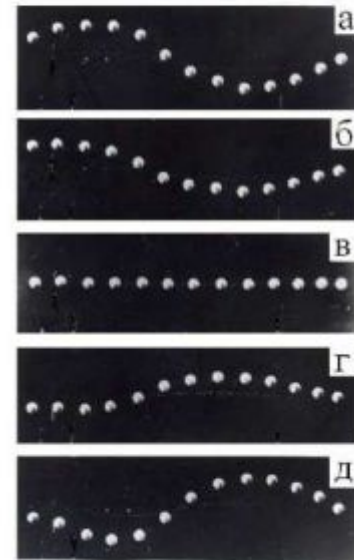


Рис. 8.9

период колебаний элементов. Из опыта следует, что в середине дискретной структуры расположен узел стоячей волны, а по разные стороны от него – пучности смещений. Причём элементы, находящиеся по разные стороны от узла, совершают противофазные колебания, т.е. с разностью фаз, равной  $\pi$ . Следовательно, расстояние между соседними пучностями смещений в стоячей волне равно  $\frac{\lambda}{2}$ , где  $\lambda$  – длина бегущей волны.

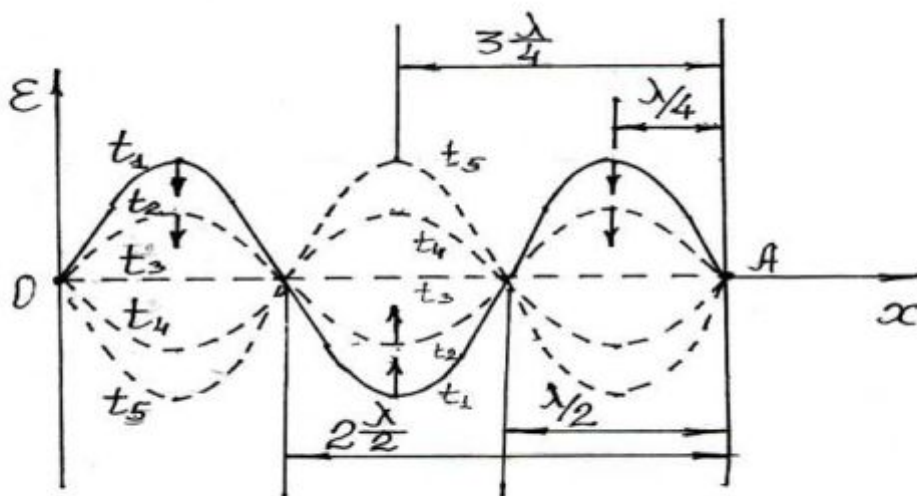


Рис. 8.10

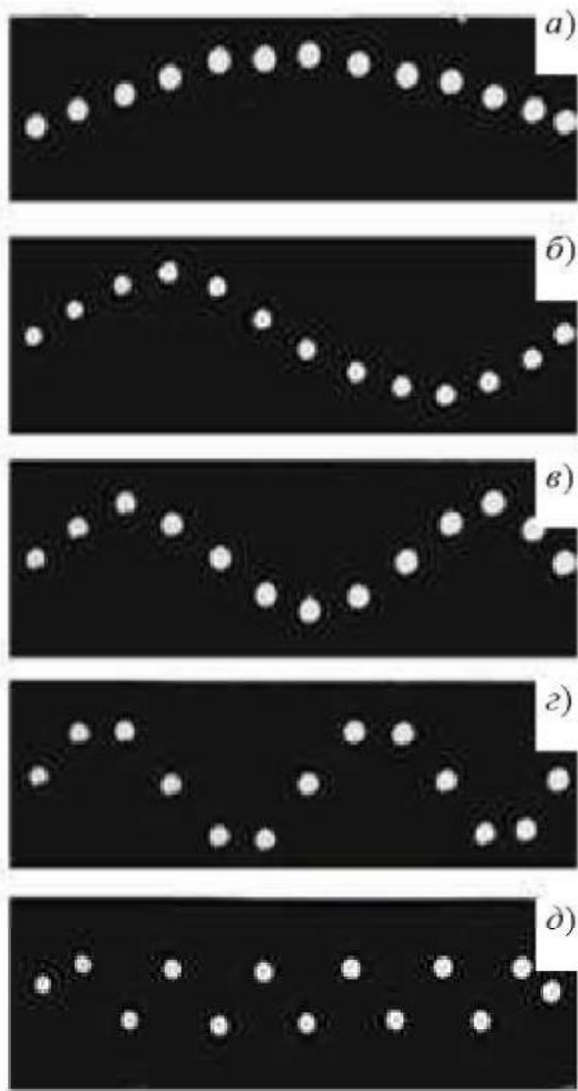


Рис. 8.11

На рисунке 8.10 показано положение колеблющихся точек в последовательно равные промежутки времени  $t_1, t_2, t_3, \dots$  и положение узлов и пучностей мгновенных смещений в стоячей волне.

Известно, что в закреплённой с обоих концов натянутой струне при возбуждении поперечных колебаний устанавливаются стоячие волны, причём в местах закрепления струны должны располагаться узлы. Наглядно, подобные стоячие волны можно наблюдать в дискретной периодической структуре (рис. 8.1), для чего её крайние элементы закрепляют неподвижно. Для наблюдения стоячей волны, в которой имеется одна пучность, отклоняют центральный элемент структуры от положения равновесия на максимальное расстояние (рис. 8.11, а) и отпускают. Все элементы (кроме крайних) структур совершают колебания

с одинаковой частотой  $\omega_1$ , но с различной амплитудой. Эти собственные колебания структуры часто называют *первой модой движения*. Для наблюдения стоячей волны, в которой имеется две пучности мгновенных смещений, отклоняют 4 и 10 элементы структуры на максимальное расстояние в противоположные стороны (рис. 8.11, б) и отпускают. Наблюдают стоячую волну, в которой имеется две пучности мгновенных смещений, а в центре узел. При этом вторая мода собственных колебаний имеет частоту  $\omega_2$ , причём  $\omega_2 > \omega_1$ . На рис. 8.11, в, г показано положение элементов периодической структуры в начальный момент времени для наблюдения стоячих волн, имеющих соответственно три и четыре пучности мгновенных смещений.

Из проведённых опытов следует, что в дискретной периодической структуре возбуждаются такие собственные или нормальные колеба-

ния (моды движения), когда на длине  $L$  структуры укладывается целое число полуволн

$$L = m \frac{\lambda_m}{2} \text{ или } \lambda_m = \frac{2L}{m}, \quad (8.3.13)$$

где  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$  – номер моды движения. Длинам волн  $\lambda_m$  соответствуют частоты  $\nu_m$  мод движения

$$\nu_m = \frac{v_m}{\lambda_m} \text{ или } \nu_m = \frac{mv_m}{2L}, \quad (8.3.14)$$

где  $v_m$  – фазовая скорость волны при соответствующей частоте. Легко видеть, что с увеличением номера моды движения частота увеличивается. Частоты  $\nu_m$  называются *собственными частотами*. Для струны собственные частоты оказываются кратными частоте  $\nu_1 = \frac{v}{2L}$ , которая называется основной. Частоты остальных мод движения носят название обертонов:  $\nu_2 = 2\nu_1$ ,  $\nu_3 = 3\nu_1$  и т.д. В общем случае, сложное движение струны или дискретной структуры можно представить как наложение нескольких стоячих волн с различными собственными частотами.

Собственные или нормальные колебания дискретной периодической структуры отличаются от колебаний закреплённой на концах струны, для которой характерно непрерывное распределение массы по длине, тем, что для периодической структуры существует максимальная собственная критическая частота колебаний, при которой соседние элементы совершают противофазные колебания (рис. 8.11, д).

#### 8.4. ЭНЕРГИЯ УПРУГИХ ВОЛН

Энергия упругих волн определяется кинетической и потенциальной энергией колеблющихся частиц среды. Выберем в среде, где распространяется механическая волна, элементарный объём  $\Delta V_0$  настолько малый, что деформации и скорость движения всех частиц в результате колебаний были одинаковы, одинаковыми будем считать и начальные фазы этих колебаний. Кинетическая энергия частиц рассматриваемого объёма  $\Delta V_0$  равна

$$T = \frac{\Delta m u^2}{2}, \quad (8.4.1)$$

где  $\Delta m = \rho \Delta V_0$  – масса частиц среды объёма  $\Delta V_0$ ;  $\rho$  – плотность вещества. Следовательно, для кинетической энергии имеем



$$T = \frac{1}{2} \rho u^2 \Delta V_0. \quad (8.4.2)$$

Учитывая выражение (8.1.11) для колебаний частиц волны, найдём скорость частиц

$$u = \frac{d\varepsilon}{dt} = -\omega \varepsilon_m \sin(\omega t - kx).$$

Следовательно, для кинетической энергии получаем выражение

$$T = \frac{1}{2} \rho \Delta V_0 \omega^2 \varepsilon_m^2 \sin^2(\omega t - kx). \quad (8.4.3)$$

Расчёты показывают, что потенциальная энергия  $\Pi$  частиц объёма  $\Delta V_0$  имеет ту же величину (8.4.3). Поэтому полная энергия частиц, находящихся в объёме  $\Delta V_0$  среды, равна

$$\Delta E = T + \Pi = 2T = \rho \Delta V_0 \omega^2 \varepsilon_m^2 \sin^2(\omega t - kx). \quad (8.4.4)$$

Для *плотности энергии*, сосредоточенной в единице объёма, получим значение

$$W = \frac{\Delta E}{\Delta V_0} = \rho \omega^2 \varepsilon_m^2 \sin^2(\omega t - kx). \quad (8.4.5)$$

Отсюда следует, что плотность энергии упругой волны в различных точках различна. В одной и той же точке пространства плотность энергии изменяется с течением времени как квадрат синуса. Так как среднее значение квадрата синуса за достаточно большой промежуток времени равно  $\frac{1}{2}$ , то среднее значение плотности энергии равно

$$\overline{W} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \varepsilon_m^2. \quad (8.4.6)$$

Единицей плотности энергии служит  $\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$ .

Таким образом, в результате распространения волн, среда обладает дополнительной энергией, которая доставляется от источника колебаний. Следовательно, упругая волна переносит энергию. Энергию, переносимую волной через некоторую поверхность в единицу времени, принято называть *поток энергии*

$$\Phi = \frac{\Delta E}{\Delta t}. \quad (8.4.7)$$

Единицей измерения потока энергии служит 1 Вт.

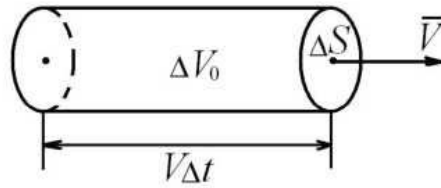


Рис. 8.12

Через площадку  $\Delta S$  (рис. 8.12) за время  $\Delta t$  будет переноситься энергия  $\Delta E$ , которая заключена в объёме  $\Delta V_0$  цилиндра основанием  $\Delta S$  и длиной  $v\Delta t$ , где  $v$  – скорость волн

$$\Delta E = W\Delta V_0 = Wv\Delta S\Delta t. \quad (8.4.8)$$

Следовательно, поток энергии равен

$$\Phi = \frac{\Delta E}{\Delta t} = Wv\Delta S. \quad (8.4.9)$$

Поток энергии в различных точках площади  $\Delta S$  может быть различным. Для характеристики течения энергии в различных точках среды вводится векторная величина, называемая *плотностью потока энергии*, которая показывает, какая энергия переносится волной в единицу времени через единичную площадку, установленную перпендикулярно направлению распространения волны

$$U = \frac{\Delta E}{\Delta t \Delta S} \text{ или } U = \frac{\Delta \Phi}{\Delta S}. \quad (8.4.10)$$

Единицей плотности потока энергии служит  $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ . Учитывая выражение (8.4.9), найдём

$$U = Wv, \quad (8.4.11)$$

или в векторной форме записи

$$\vec{U} = W \cdot \vec{v}, \quad (8.4.12)$$

где вектор  $\vec{U}$  носит имя Умова (Умов Н.А. – русский физик).

## 8.5. ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ

Упругие волны, распространяющиеся в воздухе с частотой, заключённой в пределах 20...20 000 Гц, достигнув человеческого уха, вызывают ощущение *звука*. В соответствии с этим, упругие волны в любой среде, имеющие частоту, лежащую в указанных пределах, называют *звуковыми волнами* или просто *звуком*. Волны с частотами, большими 20 000 Гц, называют *ультразвуками*; волны с частотой, меньшей 20 Гц, называют *инфразвуками*. Источником звука являются различные колеблющиеся тела с соответствующей частотой: струны, мембраны, столбы воздуха в духовых музыкальных инструментах и т.п.

*Чистым тоном* или чистым звуком называют слуховое ощущение, получаемое от простого гармонического или синусоидального колебания. *Высота чистого тона* определяется частотой колебаний источника звука: чем больше частота, тем выше звук. Часто, источник звука создаёт *периодическое, но негармоническое колебание*, которое согласно теореме Фурье (см. разд. 7.7) можно представить как суперпозицию гармонических колебаний с кратными частотами:  $\omega, 2\omega, 3\omega \dots$ . При этом основная частота  $\omega$  определяет основной тон, а дополнительные кратные частоты (обертоны)  $2\omega, 3\omega, 4\omega \dots$  определяют *тембр звука*.

Основной энергетической характеристикой звука является *сила звука* или *интенсивность*  $J$ , которая по своему определению совпадает с плотностью потока энергии (8.4)

$$J = \frac{\Delta E}{\Delta t \Delta S}. \quad (8.5.1)$$

Для того, чтобы вызвать звуковое ощущение, звуковая волна должна обладать некоторой минимальной интенсивностью или силой звука  $J_0$ , которая называется *порогом слышимости*. Человеческое ухо наиболее чувствительно к звукам с частотой 1000...4000 Гц. В этой области порог слышимости составляет порядка  $J_0 = 10^{-12} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ . К звукам, с частотой большей и меньшей, чем указано выше, ухо человека менее чувствительно. При слишком большом увеличении силы звука человеческое ухо перестаёт воспринимать колебания как звук, и испытывает болевое ощущение. *Порог болевого ощущения* составляет примерно  $J_6 = 10^{-4} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ .

Интенсивности или силе звука  $J$  соответствует ощущение *громкости*  $S$  как субъективной характеристики звука. Свойство человеческого уха таково, что ощущение громкости возрастает значительно медленнее, чем увеличивается сила звука. При этом абсолютное изменение физиологического ощущения громкости  $\Delta S$  пропорционально относительному изменению силы звука  $\frac{\Delta J}{J}$

$$\Delta S = k \frac{\Delta J}{J} \quad \text{или} \quad dS = k \frac{dJ}{J}, \quad (8.5.1)$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности. Проинтегрируем полученное соотношение (8.5.1)

$$\int_0^S dS = k \int_{J_0}^J \frac{dJ}{J}.$$

Пределы интегрирования выбираем из следующих условий: порог слышимости  $J_0$  соответствует громкость  $S = 0$ , а силе звука  $J$  – громкость  $S$ . Интегрирование даёт

$$S = k \ln \frac{J}{J_0}. \quad (8.5.2)$$

Единицей громкости, измеренной по этой формуле при  $k = 1$ , является *непер*. Для измерения громкости в децибелах, необходимо от натуральных логарифмов перейти к десятичным и считать, что  $k = 10$ . Тогда получим

$$S(\text{Дб}) = 10 \lg \frac{J}{J_0}. \quad (8.5.3)$$

Например, громкость  $S = 30$  Дб означает, что  $10 \lg \frac{J}{J_0} = 30$  или  $\lg \frac{J}{J_0} = 3$ , т.е.  $\frac{J}{J_0} = 1000$ . Следовательно, при громкости  $S = 30$  Дб сила  $J$  данного звука больше порога слышимости в 1000 раз. Соответственно, громкость  $S = 60$  Дб означает, что сила данного звука больше порога слышимости в 1 000 000 раз и т.д. Шуму реактивного двигателя соответствует громкость больше 120 Дб.

## 8.6. ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА

Явлением Доплера называется изменение частоты волн, воспринимаемых наблюдателем либо вследствие своего перемещения относительно среды, в которой распространяются волны, либо вследствие перемещения источника волн относительно среды, в которой распространяются волны, либо вследствие одновременного перемещения наблюдателя и источника.

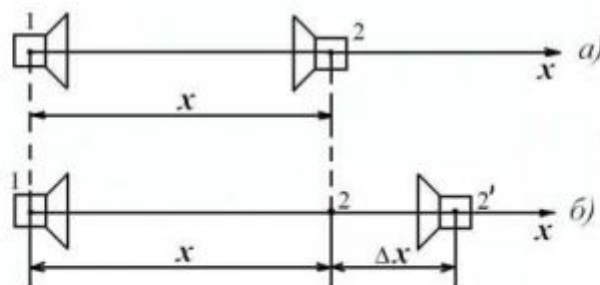


Рис. 8.13

Рассмотрим явление Доплера на примере звуковых волн. Пусть источник 1 звука и приёмник 2 расположены на расстоянии  $x$  друг от друга (рис. 8.13). Допустим, что источник звука совершает колебания с частотой  $\omega_0$  по гармоническому закону

$$\varepsilon = \varepsilon_m \sin \omega_0 t. \quad (8.6.1)$$

Если приёмник 2 (рис. 8.13, а) звука неподвижен, то колебания, приходящие в точку 2 запаздывают по фазе на величину  $kx$ , где  $k$  – волновое число. Следовательно, уравнение колебаний, воспринимаемых приёмником, запишется в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_m \sin(\omega_0 t - kx). \quad (8.6.2)$$

Допустим, что при неподвижном источнике звука, приёмник перемещается со скоростью  $u$  от источника (рис. 8.13, б). За время  $t$  он перемещается на расстояние  $\Delta x = ut$  и занимает положение, характеризующееся точкой 2'. Колебания, приходящие в точку 2', дополнительно запаздывают по фазе на величину  $k\Delta x = kut$ . Следовательно, уравнение колебаний подвижного приёмника имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_m \sin(\omega_0 t - kx - k\Delta x) \text{ или } \varepsilon = \varepsilon_m \sin(\omega_0 t - kx - kut). \quad (8.6.3)$$

Запишем полученное уравнение в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_m \sin[(\omega_0 t - kut) - kx].$$

Учитывая, что волновое число  $k = \frac{\omega_0}{v}$ , получим

$$\varepsilon = \varepsilon_m \sin \left[ \omega_0 \left( 1 - \frac{u}{v} \right) t - kx \right]. \quad (8.6.4)$$

Сравнивая формулы (8.6.2) и (8.6.4), заключаем, что при удалении приёмника звука от неподвижного источника, регистрируется частота

$$\omega = \omega_0 \left( 1 - \frac{u}{v} \right), \quad (8.6.5)$$

которая меньше частоты  $\omega_0$ , создаваемой источником звука ( $\omega < \omega_0$ ), так как скорость приёмника  $u$  меньше скорости звука  $v$  ( $u < v$ ).

Нетрудно показать, что если приёмник звука приближается к неподвижному источнику, регистрируемая частота увеличивается

$$\omega = \omega_0 \left( 1 + \frac{u}{v} \right). \quad (8.6.6)$$

Можно доказать, что частота, регистрируемая неподвижным приёмником, также изменяется: при удалении источника звука частота уменьшается

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + \frac{u}{v}}, \quad (8.6.7)$$

а при приближении увеличивается

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{u}{v}}. \quad (8.6.8)$$

Если источник и приёмник движутся с одинаковой скоростью  $u$  одновременно вдоль прямой, соединяющей их, то общая формула эффекта Доплера имеет вид

$$\omega = \omega_0 \frac{1 \pm \frac{u}{v}}{1 \mp \frac{u}{v}}. \quad (8.6.8)$$

Если источник и приёмник движутся одновременно относительно неподвижной среды со скоростями  $u'$  и  $u$  под углами  $\varphi'$  и  $\varphi$  к направлению звуковой волны, соответственно, то получим формулу

$$\omega = \omega_0 \frac{1 \pm \frac{u}{v} \cos \varphi}{1 \mp \frac{u'}{v} \cos \varphi'}. \quad (8.6.9)$$

Отсюда следует, что для упругих волн невозможен «поперечный» эффект Доплера, т.е. изменение частоты не происходит ( $\omega = \omega_0$ ), если источник или приёмник перемещаются перпендикулярно ( $\varphi' = 90^\circ$ ,  $\varphi = 90^\circ$ ) к направлению распространения волны.

Явление Доплера является следствием перехода от одной инерциальной системы отсчёта к другой. При этом, в случае малых скоростей движения источника и приёмника, справедливым было использование преобразований Галилея. Для электромагнитных волн и, в частности, света, явление Доплера следует из преобразований Лоренца и зависит только от относительной скорости источника и приёмника  $u$ . Если  $\varphi$  – угол между скоростью и линией наблюдения, измеренный в системе приёмника, то воспринимаемая частота  $\omega$  равна

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{u}{c} \cos \varphi}, \quad (8.6.10)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме. Согласно этой формуле, для электромагнитных волн, изменение частоты может происходить и при  $\varphi = 90^\circ$ , т.е. при движении источника перпендикулярно к линии наблюдения

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} . \quad (8.6.11)$$

«Поперечный» эффект Доплера является чисто релятивистским эффектом.

Регистрация спектров различных галактик показала, что их линии в видимой части спектра всегда смещены в направлении красного конца (красное смещение). Это говорит о том, что регистрируемые длины волн света, идущего от различных галактик, увеличиваются, а частоты уменьшаются. Следовательно, согласно явлению Доплера, красное смещение может быть объяснено взаимным удалением одиночных галактик, т.е. *расширением Вселенной*.

## 9. ЭЛЕМЕНТЫ ГИДРОДИНАМИКИ

### 9.1. ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ. УРАВНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Многие жидкости (вода, спирт, ртуть и др.) обладают малой сжимаемостью, под которой понимается относительное изменение объема  $\frac{\Delta V}{V}$  при изменении давления  $\Delta p$  на единицу

$$\beta_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\Delta V}{\Delta p} \right)_T. \quad (9.1.1)$$

В противоположность жидкостям газы сжимаются достаточно легко. Теория и опыт показывают, что сжимаемостью жидкости или газа можно пренебречь, если скорость их течения мала по сравнению со скоростью звука в них. В этом случае принято говорить о *несжимаемой* жидкости.

При течении жидкости и газов между движущимися слоями возникают *силы внутреннего трения*, которые определяют *вязкость* жидкости или газа.

*Идеальной жидкостью* называется несжимаемая и не имеющая вязкость жидкость. При достаточно малых скоростях течения многие жидкости и газы удовлетворяют данному условию.

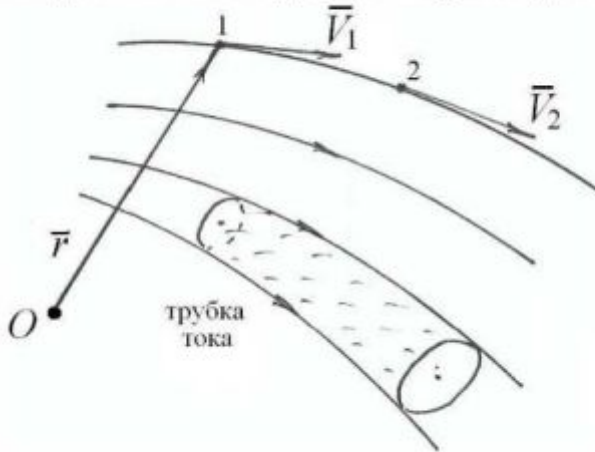


Рис. 9.1

Поток жидкости характеризуется тем, что различные точки пространства имеют различные скорости:  $v = v(\vec{r}; t)$ , где  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки;  $t$  – время. *Линиями тока* называются траектории, по которым движутся частицы жидкости, или кривые, касательные, в каждой точке которых совпадают с вектором скорости  $\vec{v}$  частиц в этих точках (рис. 9.1).

Линии тока проводят так, что их густота пропорциональна величине скорости частиц в данном месте. Тогда по картине линий тока можно судить не только о направлении, но и о величине вектора  $\vec{v}$  скорости в различных точках потока жидкости: там, где линии тока гуще, скорость больше, и наоборот, где линии тока реже, там меньше скорость.



Если скорость зависит от времени, то течение жидкости называется *нестационарным*, если она не зависит от времени, течение называют *стационарным*.

Если в каждой точке потока скорость определяется однозначно (*ламинарное течение*), то линии тока никогда не пересекаются, и частицы не могут проникать через боковую поверхность трубки тока.

Возьмём трубку тока (рис. 9.2). Предположим, что скорость жидкости в сечении  $S_1$  равна  $v_1$ , а в сечении  $S_2$  –  $v_2$ . За время  $\Delta t$  вся масса  $\Delta m_1$ , находящаяся на расстоянии  $v_1 \Delta t$  от сечения  $S_1$ , пройдёт через него

$$\Delta m_1 = \rho_1 S_1 v_1 \Delta t, \quad (9.1.2)$$

где  $\rho_1$  – плотность жидкости в первом сечении.

Массовый расход жидкости в первом сечении равен

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \rho_1 S_1 v_1. \quad (9.1.3)$$

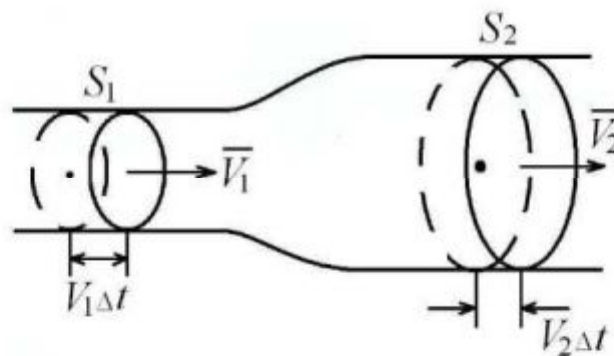


Рис. 9.2

При ламинарном течении, за то же время  $\Delta t$  такая же масса жидкости пройдёт через сечение  $S_2$  трубки тока

$$\Delta m_2 = \rho_2 S_2 v_2 \Delta t \quad \text{или} \quad \frac{\Delta m_2}{\Delta t} = \rho_2 S_2 v_2. \quad (9.1.4)$$

По закону сохранения массы получаем

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2. \quad (9.1.5)$$

Это уравнение непрерывности для сжимаемой жидкости и газа, т.е. *при стационарном течении массовый расход жидкости в каждом поперечном сечении трубки тока одинаков*.

Для несжимаемых жидкостей и газов ( $\rho_1 = \rho_2$ ) получим следующее уравнение непрерывности

$$S_1 v_1 = S_2 v_2, \quad (9.1.6)$$

т.е. при стационарном течении несжимаемой жидкости объёмный расход жидкости в каждом сечении трубки тока одинаков.

## 9.2. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Пусть имеется произвольная трубка тока идеальной жидкости, расположенная в поле тяжести Земли (рис. 9.3). Рассмотрим объём жидкости, ограниченный стенками трубки тока и перпендикулярными к линиям тока сечениями  $S_1$  и  $S_2$ . За время  $\Delta t$  этот объём переместится вдоль трубки тока, причём сечение  $S_1$  переместится в положение  $S'_1$ , пройдя путь  $\Delta l_1$ ; сечение  $S_2$  переместится в положение  $S'_2$ , пройдя путь  $\Delta l_2$ . В силу несжимаемости жидкости, заштрихованные объёмы будут одинаковы:  $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$ . Рассмотренное перемещение трубки тока равносильно перемещению объёма  $\Delta V_1$  из первого положения во второе –  $\Delta V_2$ . Причём массы этих объёмов одинаковы:  $\Delta m = \rho \Delta V$ , где  $\rho$  – плотность жидкости.

Возьмём сечение трубки тока и отрезки  $\Delta l$  настолько малыми, чтобы всем точкам каждого из заштрихованных объёмов  $\Delta V$  можно было приписать одно и то же значение скорости  $v$ , давления и высоты. Тогда изменение полной энергии жидкости при переходе из первого состояния во второе будет равно

$$\Delta E = \left( \frac{\rho \Delta V v_2^2}{2} + \rho \Delta V g h_2 \right) - \left( \frac{\rho \Delta V v_1^2}{2} + \rho \Delta V g h_1 \right). \quad (9.2.1)$$

В идеальной жидкости силы вязкого трения отсутствуют. Поэтому данное приращение энергии должно равняться работе, совершённой над выделенным объёмом силами давления, т.е.

$$A = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = (p_1 - p_2) \Delta V. \quad (9.2.2)$$

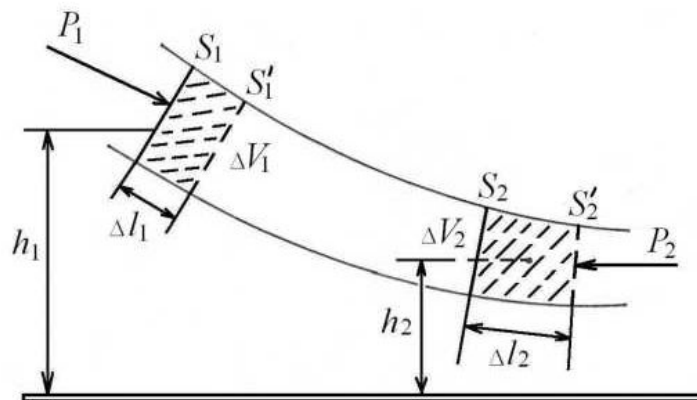


Рис. 9.3

По закону сохранения энергии приравниваем выражение (9.2.1) и (9.2.2). Сокращая на  $\Delta V$  и перенося члены с одинаковыми индексами в одну часть равенства, получим

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2. \quad (9.2.3)$$

Поскольку сечения 1 и 2 могут быть выбраны произвольно, то, следовательно, сумма  $\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p$  остаётся неизменной в любом сечении трубки тока

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}. \quad (9.2.4)$$

Это уравнение называется *уравнением Бернулли*. Оно выражает закон сохранения энергии при установившемся движении несжимаемой идеальной жидкости. Величина  $\frac{\rho v^2}{2}$  представляет удельную кинетическую энергию, т.е. кинетическую энергию единицы объёма движущейся жидкости (Дж/м<sup>3</sup>). Величина  $\rho g h$  есть удельная потенциальная энергия жидкости в поле тяжести. Величина  $p$  представляет собой удельную потенциальную энергию сил давления  $\left( \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right)$ .

Уравнение Бернулли (9.2.4) говорит, что полная энергия единицы объёма жидкости остаётся постоянной величиной при её течении.

В частном случае, при  $v_1 = v_2$  из формулы (9.2.3) найдём

$$p_1 - p_2 = \rho g (h_2 - h_1), \quad (9.2.5)$$

разность давлений будет такая же, как и в случае покоящейся жидкости.

При горизонтальном расположении трубки тока  $h_1 = h_2$  получим

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2. \quad (9.2.6)$$

Отсюда следует, что скорость течения идеальной несжимаемой жидкости обратно пропорциональна давлению жидкости (рис. 9.4).

Так как все члены в уравнении (9.2.4) имеют размерность давления, то это уравнение часто формулируют по-другому. Давление  $p$  называют *статическим напором*, величину  $\rho g h$  – *гидравлическим напором*, а величину  $\frac{\rho v^2}{2}$  – *динамическим напором*. Тогда из (9.2.4) следует, что полный напор жидкости, складывающийся из статического, гидравлического и динамического напоров, остаётся постоянным.

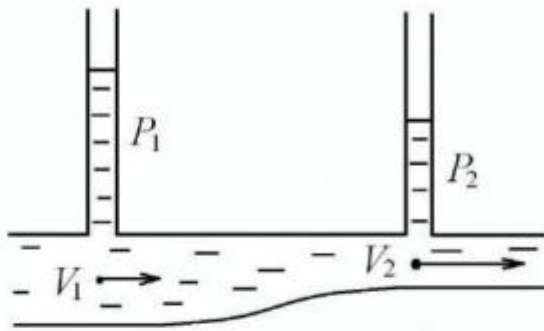


Рис. 9.4

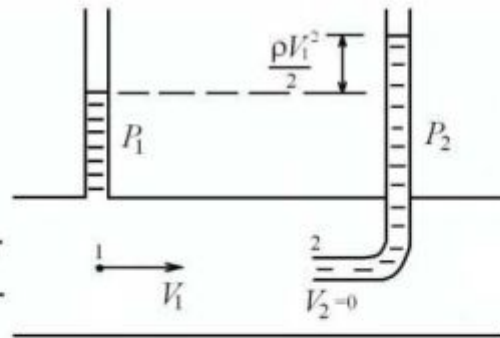


Рис. 9.5

Для измерения динамического напора применяется изогнутая трубочка Пито (рис. 9.5). Пусть статический напор в точке 1 линии тока равен  $p_1$  и скорость течения  $v_1$ . В точке 2 перед изогнутой трубочкой Пито скорость частиц  $v_2 = 0$ , статический напор равен  $p_2$ . Для точек 1 и 2 согласно уравнению Бернулли, имеем

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = p_2. \quad (9.2.7)$$

Откуда динамический напор жидкости равен

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 - p_1. \quad (9.2.8)$$

В заключение рассмотрим истечение идеальной несжимаемой жидкости под действием силы тяжести (рис. 9.6). Применим уравнение Бернулли для двух сечений 1 и 2. Учтём, что  $p_1 = p_2 = p_0$  и  $v_1 \ll v_2$ , т.е. скоростью  $v_1$  можно пренебречь. Уравнение Бернулли имеет вид

$$\rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2.$$

Откуда найдём

$$v_2 = \sqrt{2g(h_2 - h_1)}. \quad (9.2.9)$$

Полученная формула называется *формулой Торричелли*. Она даёт неплохие результаты для жидкости с малой вязкостью.

Наличие вязкости реальных жидкостей приводит к тому, что при течении жидкости происходят потери её энергии на внутреннее трение между слоями. Это приводит к потере напора при течении жидкостей.

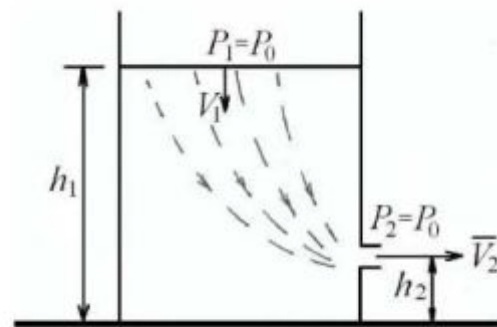


Рис. 9.6

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

---

Изучая механику, студент должен не только запомнить ту или иную формулу, описывающую физическое явление, но и знать физические величины, входящие в эту формулу, их размерность и единицы измерения. Знать границы применимости физических законов, понимать, когда эти законы применимы, а когда нет. Другими словами, развивая свое мышление, необходимо стремиться к тому, чтобы за формальными математическими формулами студент мог видеть реальные физические явления и процессы, происходящие в окружающем нас мире. Это позволит исключить формализм в знаниях, когда теоретические положения существуют сами по себе, практическое применение идет другим путем, а жизнь развивается в своём направлении. Глубокое знание теории и умение применять его в реальных ситуациях, без сомнения, помогут в карьерном росте.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

---

1. Зисман, Г.А. Курс общей физики. Т. 1. Механика, молекулярная физика, колебания и волны / Г.А. Зисман, О.М. Тодес. – М. : Наука, 1969. – 399 с.
2. Киттель, Ч. Берклевский курс физики. Т. 1. Механика / Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман. – М. : Наука, 1971. – 478 с.
3. Ландау, Л.Д. Курс общей физики. Механика и молекулярная физика / Л.Д. Ландау, А.И. Ахиезер, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука, 1965. – 384 с.
4. Молотков, Н.Я. Изучение колебаний на основе современного эксперимента / Н.Я. Молотков. – Киев : Радянська школа, 1988. – 160 с.
5. Савельев, И.В. Курс общей физики. Т. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика / И.В. Савельев. – М. : КНОРУС, 2009. – 528 с.
6. Хайкин, С.Э. Физические основы механики / С.Э. Хайкин. – М. : Наука, 1971. – 751 с.
7. Курс физики. Т. 1 / Б.М. Яворский, А.А. Детлаф и др. – М. : Высшая школа, 1965. – 376 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

---

|   |    |
|---|----|
| ВВЕДЕНИЕ .....  | 3  |
| 1. КИНЕМАТИКА .....   | 5  |
| 1.1. Механическое движение. Пространственно-временная система отсчёта ..... | 5  |
| 1.2. Скорость .....   | 7  |
| 1.3. Ускорение .....  | 11 |
| 1.4. Кинематика движения материальной точки по окружности .....             | 17 |
| 1.5. Кинематика твёрдого тела .....   | 22 |
| 2. ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ .....                                  | 28 |
| 2.1. Закон инерции .....  | 28 |
| 2.2. Силы и масса тел .....   | 30 |
| 2.3. Второй закон Ньютона .....   | 34 |
| 2.4. Третий закон Ньютона .....   | 38 |
| 2.5. Сила тяжести и вес тел .....   | 39 |
| 2.6. Механический принцип относительности .....                             | 44 |
| 2.7. Опыт Майкельсона и постулаты Эйнштейна .....                           | 46 |
| 2.8. Преобразования Лоренца и основные следствия из них .....               | 50 |
| 2.9. Закон сохранения импульса для системы материальных точек .....         | 55 |
| 2.10. Движение тела переменной массы .....                                  | 60 |
| 3. РАБОТА И МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ .....                                      | 63 |
| 3.1. Понятие об энергии, работе и мощности .....                            | 63 |
| 3.2. Кинетическая энергия и теорема об изменении кинетической энергии ..... | 65 |
| 3.3. Консервативные силы и потенциальная энергия .....                      | 69 |
| 3.4. Космические скорости .....   | 72 |
| 3.5. Закон сохранения энергии .....   | 74 |
| 3.6. Абсолютно неупругий удар .....   | 76 |
| 3.7. Абсолютно упругий удар .....   | 79 |

|   |     |
|---|-----|
| 4. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА .....                                      | 83  |
| 4.1. Момент силы .....  | 83  |
| 4.2. Момент импульса материальной точки .....   | 84  |
| 4.3. Теорема об изменении момента импульса материальной точки .....                         | 85  |
| 4.4. Теорема об изменении момента импульса твёрдого тела .....                              | 87  |
| 4.5. Момент импульса твёрдого тела относительно оси. Момент инерции .....                   | 90  |
| 4.6. Основной закон динамики вращательного движения тела относительно неподвижной оси ..... | 94  |
| 4.7. Кинетическая энергия вращающегося тела .....   | 97  |
| 4.8. Закон сохранения момента импульса тела относительно оси .....                          |     |
| 5. УПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ ТЕЛ .....   | 100 |
| 5.1. Идеальные упругие тела .....   | 100 |
| 5.2. Деформация стержней .....  | 100 |
| 5.3. Деформация сдвига .....  | 102 |
| 5.4. Деформация кручения .....  | 103 |
| 6. ДВИЖЕНИЕ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЁТА .....   | 104 |
| 6.1. Понятие о силах инерции .....  | 104 |
| 6.2. Силы инерции в системах отсчёта, движущихся поступательно .....                        | 106 |
| 6.3. Силы инерции во вращающихся системах отсчёта .....                                     | 107 |
| 6.4. Кориолисова сила инерции .....   | 110 |
| 7. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ .....   | 113 |
| 7.1. Понятие о колебательном движении .....   | 113 |
| 7.2. Собственные колебания пружинного маятника .....  | 114 |
| 7.3. Энергия собственных гармонических колебаний .....                                      | 119 |
| 7.4. Собственные колебания физического маятника .....                                       | 121 |
| 7.5. Свободные колебания при наличии вязкого трения .....                                   |     |
| 7.6. Понятие о методе векторных диаграмм .....  | 124 |



|  |     |
|--|-----|
| 7.7.ложение двух гармонических колебаний, направленных по одной прямой ..... | 128 |
| 7.8. Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний                        | 135 |
| 7.9. Вынужденные колебания .....   | 138 |
| 7.10. Механические автоколебания .....                                       | 142 |
| 7.11. Релаксационные колебания .....   | 144 |
| 7.12. Параметрические колебания .....  | 145 |
| 7.13. Связанные колебания .....  | 149 |
| 8. МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ .....  | 155 |
| 8.1. Понятие о механических волнах. Уравнение бегущей волны .....            | 155 |
| 8.2. Скорость распространения механических волн .....                        | 161 |
| 8.3. Принцип суперпозиции и образование стоячих волн ....                    | 163 |
| 8.4. Энергия упругих волн .....  | 169 |
| 8.5. Звуковые волны .....  | 171 |
| 8.6. Эффект Доплера .....  | 173 |
| 9. ЭЛЕМЕНТЫ ГИДРОДИНАМИКИ .....  | 177 |
| 9.1. Движение жидкости. Уравнение непрерывности .....                        | 177 |
| 9.2. Уравнение Бернулли .....  | 179 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....   | 182 |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....  | 183 |

**ДЛЯ ЗАМЕТОК**

A set of horizontal lines for taking notes, consisting of a thick header line followed by multiple thin lines.