

ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие для самостоятельной работы студентов

Учебное пособие по теоретической механике (часть 1), подготовленное преподавателями кафедр «Машиноведение и технология конструкционных материалов» и «Техническая механика», предназначено для самостоятельной работы студентов, желающими овладеть практическими навыками – навыками решения задач механики.

1. Реакции связей

1.1. Связи и их реакции

В механике материальные тела рассматриваются как *свободные*, так и *несвободные (связанные)*.

Свободные тела под действием приложенных сил могут совершать *любые* перемещения в пространстве.

Несвободные (связанные) тела не могут занять любого положения в пространстве, хотя некоторые перемещения возможны.

Материальные тела, препятствующие перемещению рассматриваемого тела в пространстве, называются *связями*.

С этой точки зрения силы, действующие на рассматриваемое тело, делятся на *активные*¹ и *реактивные* (реакции связей, пассивные).

Активная сила, действуя на тело, может вызвать его движение. *Реактивная* сила, то есть сила, с которой связь действует на рассматриваемое тело, движения не вызывает, но препятствует перемещению тела под действием активных сил. Направление реакции связи противоположно направлению такого перемещения, которое тело получило бы при отсутствии связи.

Для того, чтобы уравнения равновесия и движения могли быть применены к несвободным телам, при решении задач механики используют принцип освобожденности от связей: *любое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если связь мысленно отбросить, а действие её на тело заменить соответствующей реакцией*.

1.2. Основные типы связей

Итак, *материальные тела*, препятствующие свободному перемещению рассматриваемого тела в пространстве, являются для такого тела *связями*. Естественно, количество таких тел в природе, в технике практически бесконечно. С другой стороны, если говорить о *типах связей*, можно свести количество указанных тел к небольшому числу.

Отсюда следует, что понятие и название *типа связи* является *обобщением* названий реальных физических *тел*² (деталей и узлов), поэтому названия типа связи и его технического исполнения могут не совпадать. Любой *тип связи* на практике – в реальной конструкции может быть представлен в различных исполнениях.

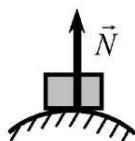
¹ Так как в подавляющем большинстве задач статики определяются реакции связей, то активные силы иногда называют задаваемыми (заданными).

² В аналитической механике осуществляется более высокая степень обобщения понятия связи: под связями понимаются условия (реализованные в виде уравнений и равенств) геометрического и кинематического характера, накладывающих ограничения на положения и скорости точек механической системы.

Так, например, невесомая нерастяжимая нить как *тип связи* может быть реализована на практике веревкой, тросом, канатом, цепью, ремнем и тому подобной гибкой связью, если вес её много меньше нагрузок, приложенных к телу, для которого эта нить является связью. В современной технике подпятник как тип связи может быть реализован на практике либо радиально-упорным подшипником, либо сочетанием радиального и упорного подшипников.

Рассмотрим основные *типы связей*.

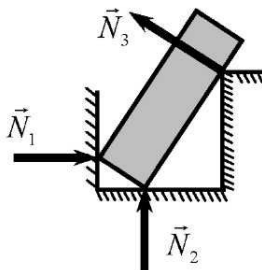
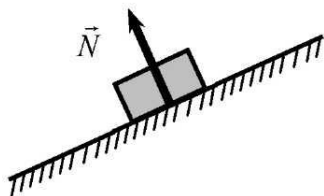
I Гладкая поверхность



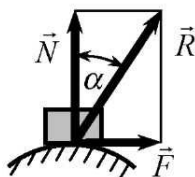
Реакция \vec{N} направлена по *общей нормали* к соприкасающимся поверхностям. (Напомним, что нормалью к поверхности в точке называют прямую, проходящую через эту точку перпендикулярно касательной плоскости

к поверхности в этой точке. Отсюда следует, что нормаль к плоскости – это перпендикуляр.)

Частные случаи:

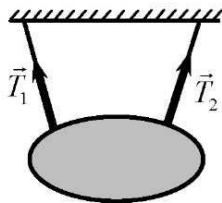


II Шероховатая поверхность



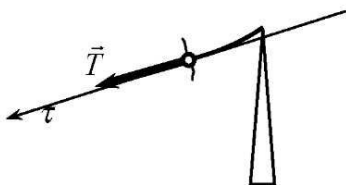
Реакция шероховатой поверхности кроме нормальной имеет ещё и касательную составляющую – силу трения \vec{F} . Угол α между полной реакцией \vec{R} и нормальной составляющей \vec{N} называют *углом трения*.

III Невесомая нерастяжимая нить



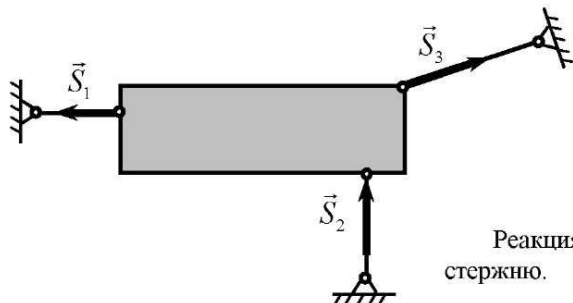
Реакция направлена по нити к точке подвеса.

IV Весомая нить



Реакция направлена по касательной к нити.

V Невесомый недеформируемый прямолинейный стержень



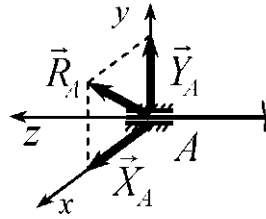
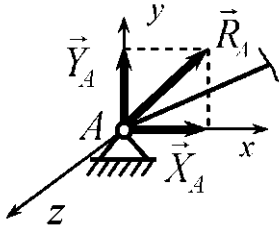
Реакция направлена по стержню.

VI Неподвижный цилиндрический шарнир (неподвижная шарнирная опора) и подшипник

Несмотря на конструктивную разницу, эти связи образуют один тип.

Реакция \vec{R}_A цилиндрического шарнира (или подшипника) пересекает его ось и может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (подшипника), то есть в плоскости $X_A Y_A$.

При решении задач реакцию \vec{R}_A часто раскладывают на составляющие \vec{X}_A и \vec{Y}_A , находящиеся в плоскости, перпендикулярной оси подшипника. *Осевая составляющая реакции подшипника отсутствует.*



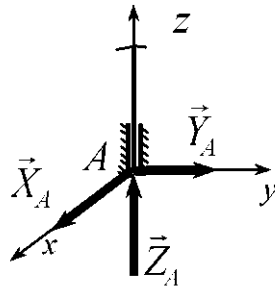
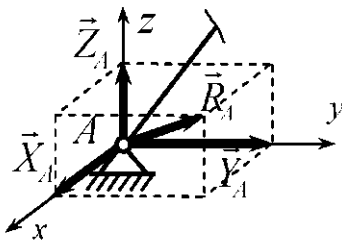
В случае, если на тело действует плоская система сил, составляющая реакции, не лежащая в плоскости действия сил отсутствует.

В любом случае *реакция подшипника не имеет осевой составляющей.*

VII Сферический (шаровой) шарнир и подпятник

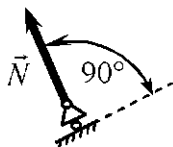
Несмотря на разницу в конструкции, эти связи образуют один тип, и отличаются от рассмотренного выше типа связи наличием третьей составляющей реакции.

Реакция сферического шарнира (или подпятника) проходит через центр шарнира и может иметь любое направление: таким образом реакция \vec{R}_A сферического шарнира (или подпятника) имеет три составляющие - \vec{X}_A , \vec{Y}_A и \vec{Z}_A . При решении задач, изобразив эти составляющие на рисунке, реакцию \vec{R}_A обычно на рисунке не показывают.



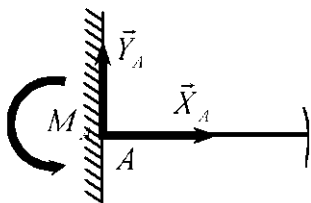
В случае, если на тело действует плоская система сил, составляющая реакции, не лежащая в плоскости действия сил отсутствует.

VIII Подвижная шарнирная опора



Реакция перпендикулярна плоскости перемещения катков.

IX Жесткая заделка (зашемление)



Реакцией заделки кроме составляющих \vec{X}_A и \vec{Y}_A реактивной силы является реактивная пара сил с моментом M_A (короче говоря, реактивный момент M_A).

В случае, если на тело действует произвольная пространственная система сил, реакция заделки может быть представлена тремя составляющими реактивной силы (\vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Z}_A) и тремя составляющими вектора-момента в заделке (\vec{M}_{AX} , \vec{M}_{AY} , \vec{M}_{AZ}).

2. Решение основных задач статики

2.1. Краткие сведения из теории

Определение 1. Статикой называют раздел механики, в котором изучается **равновесие материальных тел** под действием приложенных к ним сил.

Основными понятиями статики являются, таким образом, фундаментальные понятия: материальная точка, материальное тело, равновесие, сила³.

Определение 2. Под материальной точкой в механике понимают материальное (вещественное) тело, размерами которого можно пренебречь при решении данной задачи.

Тело, совершающее поступательное движение можно считать материальной точкой независимо от его размеров.

В курсе общей механики изучение основ начинают, как правило⁴, с механики твердого тела (абсолютно твердого и деформируемого).

Определение 3. Под абсолютно твердым телом понимают тело, расстояния между двумя любыми точками которого не изменяются в течение всего времени движения.

С другой стороны, такое тело может быть представлено как частный случай системы материальных точек - совокупности (множества) материальных точек, взаимодействующих между собой, с внутренними «замороженными»⁵ связями.

Под равновесием материальной точки в соответствии с законом инерции (1-м законом Ньютона) следует понимать состояние ее прямолинейного и равномерного движения, либо состояние покоя по отношению к соответствующей (инерциальной) системе отсчёта. Таким образом, для материальной точки (либо поступательно движущегося тела) понятия равновесия и покоя совпадают.

Тогда под равновесием системы материальных точек (а в частности, и абсолютно твердого тела) следует понимать совокупность равновесий всех без исключения материальных точек, входящих в состав системы.

Из вышеизложенного следует, что методы статики применимы для исследования равновесия механических систем, либо полностью находящихся в состоянии покоя, либо для систем, в состав которых помимо покоящихся тел входят движущиеся с постоянной скоростью материальные точки.

³ Подразумевается, что обучающийся (studentis) знаком с основами математики и физики.

⁴ Имеются в виду технические высшие учебные заведения.

⁵ Строго говоря, *стационарными* и *идеальными* связями.

В технике, в большинстве реальных расчётных схем, состояние равновесия отождествляется с состоянием покоя.

Определение 4. Под силой понимают меру⁶ механического взаимодействия материальных тел.

При решении задач статики весьма существенными в практическом смысле понятиями являются: **проекция силы на ось и на плоскость, момент силы относительно центра и оси, а также момент пары сил**

Определение 5. Проекцией силы на ось называют длину отрезка оси, заключенную между проекциями начала и конца вектора этой силы на эту ось.

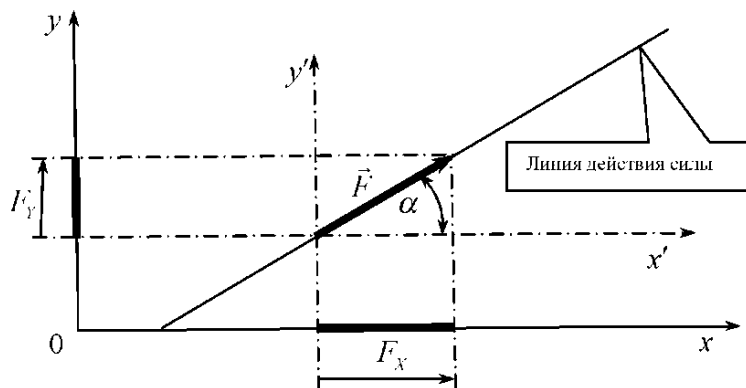


Рис.2.1. Проекция силы на ось

Очевидно, что величины проекций силы \vec{F} на оси x и y определяются выражениями:

$$F_x = F \cos \alpha, \quad (2.1)$$

$$F_y = F \cos(90^\circ - \alpha) = F \sin \alpha. \quad (2.2)$$

Таким образом, если через линию действия силы и ось можно провести плоскость (прямые либо параллельны, либо пересекаются) вычислять величину проекции силы на ось удобно по правилу:

Проекция силы на ось равна произведению модуля вектора силы на косинус острого угла между силой и осью⁷; знак проекции проще определить непосредственно из рисунка.

В случае, если угол между силой и осью найти трудно (скрещивающиеся прямые), удобно применять *двойное проецирование*:

сначала спроецировать вектор силы на плоскость, содержащую ось, а затем

⁶ Строго говоря, одну из мер.

⁷ Строго говоря, речь идёт об угле между линией действия силы и осью, параллельной заданной и проходящей через начало вектора силы.

спроецировать полученный вектор на ось.

Определение 6. Проекцией силы на плоскость называют вектор, заключенный между проекциями начала и конца вектора этой силы на эту плоскость (рис. 2.2).

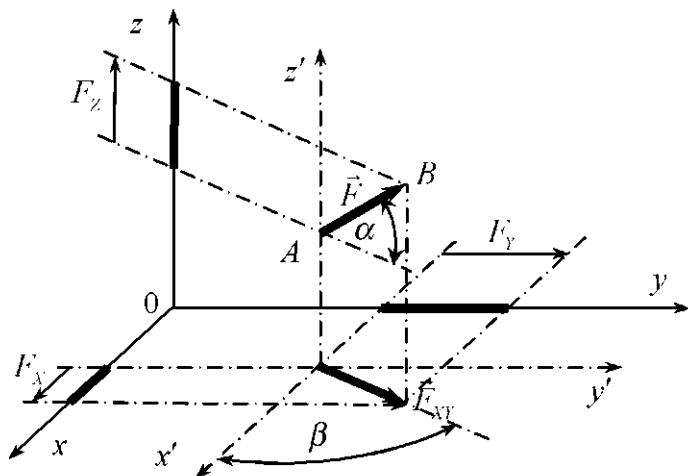


Рис. 2.2. Проекция силы на плоскость

Величины проекций силы \vec{F} на оси x , y и z определяются выражениями:

$$F_x = F_{xy} \cos \beta = F \cos \alpha \cos \beta, \quad (2.3)$$

$$F_y = F_{xy} \sin \beta = F \cos \alpha \sin \beta, \quad (2.4)$$

$$F_z = F \sin \alpha. \quad (2.5)$$

Определение 7. Моментом силы относительно центра (точки) называют взятое с соответствующим знаком произведение величины (модуля вектора) силы на плечо.

Определение 8. Плечом силы называют расстояние центра момента (точки, относительно которой вычисляется момент) от линии действия силы - иными словами, длину перпендикуляра, опущенного из центра момента на линию действия силы

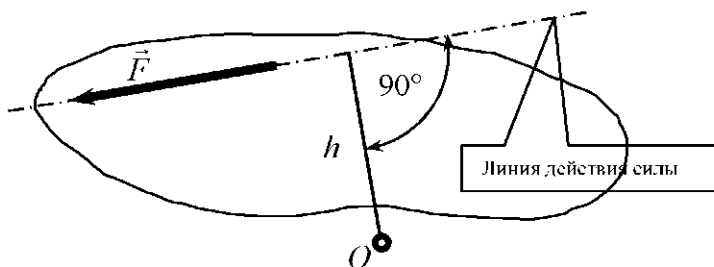


Рис. 2.3. Момент силы относительно центра

$$m_o(\vec{F}) = \pm Fh. \quad (2.6)$$

Правило знаков: если сила стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, момент силы принято считать положительным, в противном случае – отрицательным

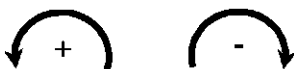


Рис. 2.4. Правило знаков

Следствие: Момент силы относительно центра равен нулю, если линия действия силы проходит через центр момента.

Определение 9. Моментом силы относительно оси называют момент проекции силы на плоскость, перпендикулярную данной оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью.

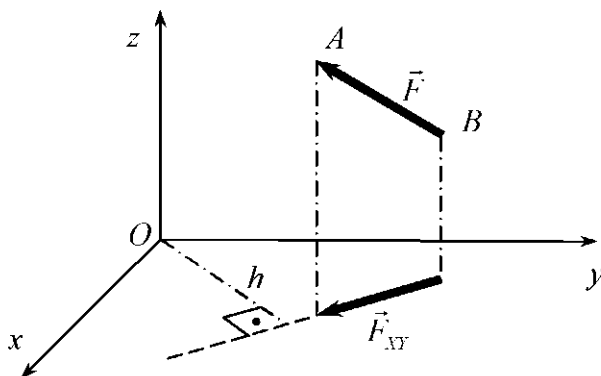


Рис.2.5. Момент силы относительно оси

$$m_z(\vec{F}) = m_o(\vec{F}_{XT}). \quad (2.7)$$

Следствие: Момент силы относительно оси равен нулю в двух случаях:

- а) если линия действия силы параллельна оси;
- б) если линия действия силы пересекает ось.

Определение 10. Парой сил называют систему двух равных по величине антипараллельных сил.

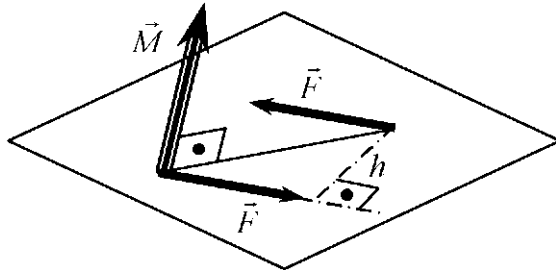


Рис. 2.6. Пара сил и вектор-момент пары

Определение 10. Моментом пары называют взятое с соответствующим знаком произведение одной из сил пары на плечо.

Определение 11. Плечом пары называют расстояние между линиями действия сил пары.

Правило знаков: если пара сил стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, момент пары принято считать положительным, в противном случае - отрицательным.

Определение 12. Вектором-моментом пары называют вектор, равный по модулю моменту пары, перпендикулярный плоскости пары и направленный так, что если смотреть с конца его возможное вращение тела под действием пары кажется происходящим против хода часовой стрелки.

Поскольку действие пары сил на тело сводится к моменту пары, на практике часто вместо понятий пары сил и момента пары сил используется упрощенный синоним - «момент». Отсюда следует и соответствующее изображение пары.

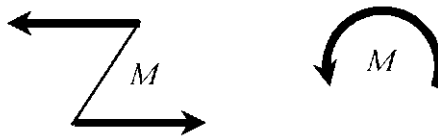


Рис.2.7. Два изображения пары сил.

Существенные для решения задач свойства пары сил:

1. Пара сил (момент) на ось не проецируется, а входит лишь в уравнения моментов.
2. Для того, чтобы найти сумму моментов сил пары относительно некоторой оси, достаточно спроецировать на эту ось вектор момент пары.

Другие существенные сведения из теории (в первую очередь, условия равновесия), необходимые для решения задач статики представляется целесообразным привести при рассмотрении примеров – решении конкретных задач.

2.2. Последовательность решения задач

1. Уяснить условие задачи, выполнить чертеж (рисунок).
2. Выбрать тело (систему тел), равновесие которого (которой) будет рассматриваться.
3. Изобразить силы, действующие на выбранное тело (систему тел): активные и реакции связей. Установить вид полученной системы сил.
4. Выбрать удобные оси координат (и центры моментов - если это нужно).
5. Записать соответствующие (полученной системе сил см. п.3) уравнения равновесия и решить их.
6. Проанализировать полученный результат, сделать выводы.

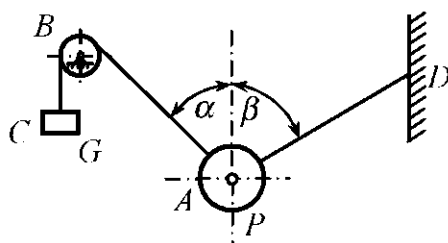
2.3. Примеры

2.3.1. Система сил, сходящихся в одной точке

(сходящаяся система сил)

Пример 2.1. Светильник A весом P удерживается в равновесии двумя тросами. Первый из них - ABC перекинут через блок B , и несет на конце противовес C весом G , предназначенный для регулирования высоты подвеса светильника. Второй трос - AD прикреплен своим концом к стене. В положении равновесия указанные тросы составляют с вертикалью углы α и β соответственно.

Считая светильник однородным шаром, а тросы – невесомыми нерастяжимыми нитями, пренебрегая трением на блоке, определить вес противовеса и натяжение троса AD для нижеприведенных значений P, α, β .



Дано:

$$P = 1 \text{ кН}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\beta = 60^\circ$$

Определить:

$$G, T.$$

Решение:

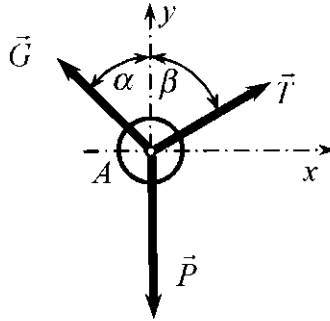
Выполняем рисунок.

Рассмотрим равновесие светильника A .

На него действует одна активная сила вес \vec{P} .

Для того, чтобы изобразить реактивные силы, применим принцип освобождения от связей.

Связями для светильника являются тросы AB и AD . Отбрасываем мысленно связи и заменяем их действие на светильник соответствующими реакциями – натяжениями тросов, направленными по этим тросам. Очевидно, что при отсутствии трения на блоке натяжение троса AB равно по величине весу противовеса G ; усилие в правом тросе обозначим \vec{T} .



Силы $\vec{P}, \vec{G}, \vec{T}$, действующие на светильник, образуют плоскую систему сходящихся сил. Для такой системы сил можно составить два независимых уравнения равновесия в форме проекций оси координат.

Выбрав оси координат x и y , составим такие (соответствующие полученной системе сил) уравнения равновесия.

$$\sum F_x = 0, \quad -G \sin \alpha + T \sin \beta = 0; \quad (a)$$

$$\sum F_y = 0, \quad G \cos \alpha + T \cos \beta - P = 0. \quad (b)$$

Решим полученную систему уравнений.

Из уравнения (a) выразим G .

$$G = T \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}. \quad (c)$$

Подставив (c) в (b) найдём T .

$$T \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cos \alpha + T \cos \beta - P = 0 \Rightarrow$$

$$T = \frac{P \sin \alpha}{\sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha} = \frac{P \sin \alpha}{\sin(\beta + \alpha)} \quad (d)$$

Из равенства (c) найдём G .

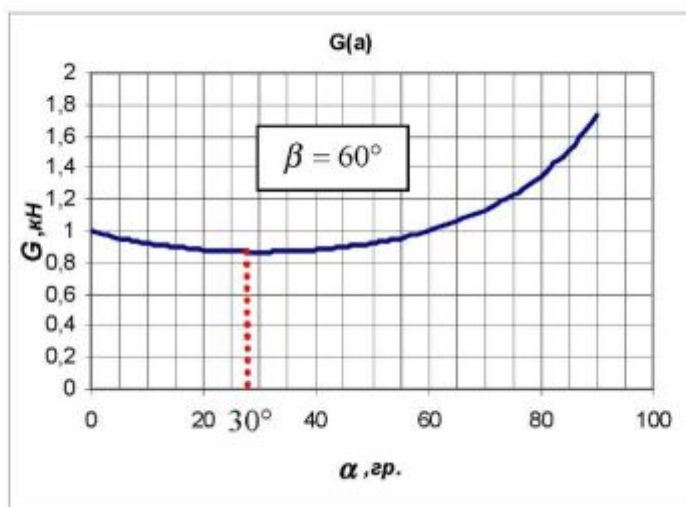
$$G = \frac{P \sin \alpha}{\sin(\beta + \alpha)} \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{P \sin \beta}{\sin(\beta + \alpha)}. \quad (e)$$

Для заданных численных значений, и имеем:

$$T = \frac{P \sin \alpha}{\sin(\beta + \alpha)} = \frac{1 * \sin 45^\circ}{\sin(60^\circ + 45^\circ)} = 0,7321 \text{ кН},$$

$$G = \frac{P \sin \beta}{\sin(\beta + \alpha)} = \frac{1 * \sin 60^\circ}{\sin(60^\circ + 45^\circ)} = 0,8966 \text{ кН}.$$

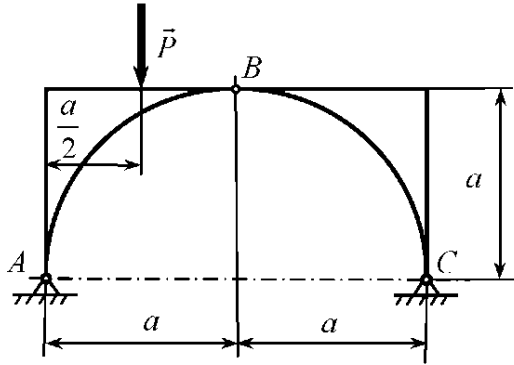
В качестве дополнительного исследования, построим графики зависимостей величины G от величины угла α . Этот график, построенный в соответствии с формулой (e) для одного из значений β , имеет вид:



Из графика видно, что минимальное значение G соответствует $\alpha \approx 30^\circ$. Исследовав зависимость $G(\alpha)$ - выражение (e) на экстремум, легко установить, что $\alpha = 30^\circ$.

Пример 2.2. На арочный мост, состоящий из двух секций, действует вертикальная сила \vec{P} . Пренебрегая весом частей моста, определить реакции опор A и C .

Схема конструкции моста приведена на рисунке.



Дано:

p
 a

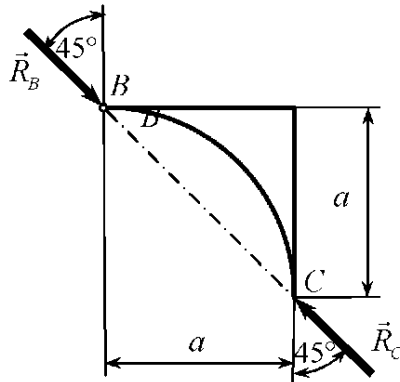
Определить:

\vec{R}_A, \vec{R}_C

Решение:

Конструкция состоит из двух частей (секций), причем неизвестными являются не только искомые реакции опор в точках A и C , но и давление в промежуточном шарнире B .

Рассмотрим сначала равновесие секции BC .



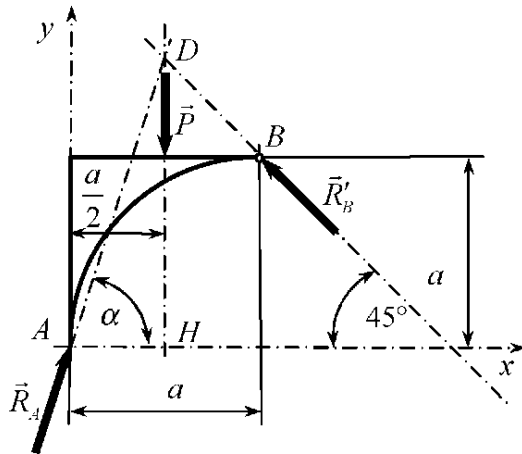
На неё действуют две силы: \vec{R}_C - реакция опоры C - и \vec{R}_B реакция секции AB .

Поскольку тело (секция BC) находится в равновесии под действием двух сил, то, в соответствии со второй аксиомой статики, эти силы находятся на одной прямой, равны по величине и направлены в противоположные стороны. Очевидно, что такой прямой (общей линией действия этих сил)

является прямая BC , проходящая через точки приложения сил B и C . Из размеров конструкции следует, что эта прямая образует с вертикалью угол 45° . Таким образом.

$$R_B = R_C = R. \quad (a)$$

Рассмотрим теперь равновесие секции AB .



На неё действуют три силы: активная сила \vec{P} , \vec{R}_A - реакция опоры A и \vec{R}'_B - реакция секции BC . При этом, по третьему закону Ньютона и в соответствии с (a), имеем:

$$\vec{R}'_B = -\vec{R}_B \Rightarrow R'_B = R_B = R. \quad (b)$$

Поскольку тело (секция AB) *в равновесии* под действием, *трех* сил, лежащих в одной плоскости и непараллельных между собой, то, в соответствии с теоремой о трех силах, линии действия этих сил пересекнутся в одной точке.

В данном случае это точка D .

В самом деле.

Линия действия реакции \vec{R}'_B секции BC , направленная в соответствии с третьим законом Ньютона (пятой аксиомой статики) в сторону, противоположную реакции \vec{R}_B секции AB , составляет с горизонталью угол 45° . Линия действия активной силы \vec{P} вертикальна по условию задачи. Линии действия указанных двух непараллельных сил пересекаются в точке

D , следовательно, и линия действия \vec{R}_A - реакции опоры A пройдет через эту точку.

Выбрав оси координат, запишем для такой системы сил соответствующие уравнения равновесия. Введем при этом в рассмотрение угол α - угол между осью x и линией действия реакции \vec{R}_A . Вышеуказанные силы образуют систему сил, сходящихся в одной точке.

$$\sum F_x = 0, R_A \cos \alpha - R'_B \cos 45^\circ = 0; \quad (c)$$

$$\sum F_y = 0, R_A \sin \alpha - P + R'_B \sin 45^\circ = 0. \quad (d)$$

Решим полученную систему уравнений.

Из уравнения (c) с учётом (b) следует:

$$R_A = R'_B \frac{\cos 45^\circ}{\cos \alpha} = R \frac{\cos 45^\circ}{\cos \alpha}. \quad (e)$$

Подставив последнее выражение в уравнение (d), учтем (a) найдем R .

$$R \cos 45^\circ \operatorname{tg} \alpha - P + R \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$R = R_B = \frac{P}{\cos 45^\circ (\operatorname{tg} \alpha + 1)} = \frac{P\sqrt{2}}{\operatorname{tg} \alpha + 1}. \quad (f)$$

$$R_A = \frac{P\sqrt{2}}{\operatorname{tg} \alpha + 1} \frac{\cos 45^\circ}{\cos \alpha} = \frac{P}{\sin \alpha + \cos \alpha}. \quad (g)$$

Вычислим тригонометрические функции угла α из $\triangle ADH$.

Очевидно, что

$$AH = \frac{a}{2}, DH = \frac{3a}{2} \Rightarrow AD = \sqrt{(AH)^2 + (DH)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = a \frac{\sqrt{10}}{2};$$

$$\sin \alpha = \frac{DH}{AD} = \frac{3}{\sqrt{10}}, \cos \alpha = \frac{AH}{AD} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{DH}{AH} = 3.$$

Тогда окончательно

$$R_B = \frac{P\sqrt{2}}{3+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}P.$$

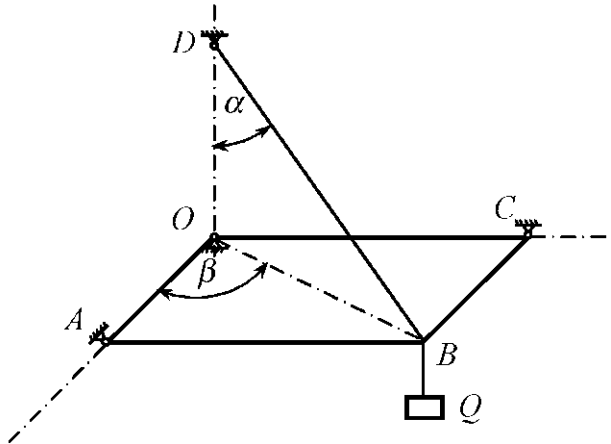
$$\frac{\cos 45^\circ}{\cos \alpha} = \frac{P}{\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}}} = \frac{\sqrt{10}}{4}P.$$

Легко видеть, что $R_A > R_B$, что соответствует, в свою очередь, схеме нагружения моста.

Пример 2.3. Светильник весом Q удерживается в равновесии тросом BD , составляющим с вертикалью угол α , и взаимно перпендикулярными горизонтальными стержнями AB и BC , скрепленными между собой шарниром B и закрепленными шарнирно в неподвижных точках A и C .

Диагональ BO прямоугольника $ABCO$ составляет со стороной AO угол β .

Считая трос невесомой нерастяжимой нитью, а стержни невесомыми и недеформируемыми, определить усилия в тросе и стержнях для нижеприведенных значений Q , α , β .



Дано:

$$Q = 10 \text{ кН}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\beta = 35^\circ$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3$$

Решение:

Выполняем рисунок.

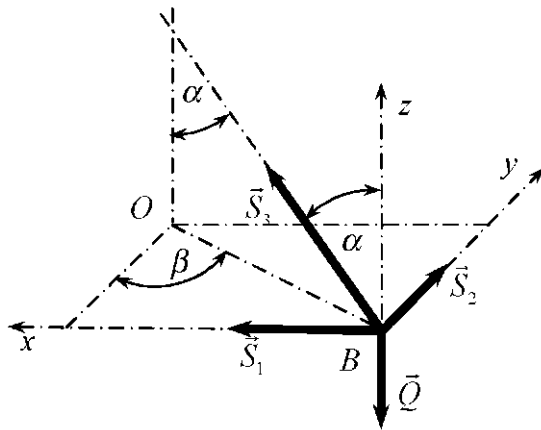
Рассмотрим равновесие узла B .

На него действует одна активная сила - вес светильника \vec{Q} .

Связями для узла B являются стержни AB и BC , а также трос BD . Отбрасываем мысленно связи, заменив их действие на узел соответствующими реакциями: усилиями в стержнях и натяжением троса.

Обозначим эти реакции так: \vec{S}_1 , \vec{S}_2 , и \vec{S}_3 .

Силы \vec{Q} , \vec{S}_1 , \vec{S}_2 , \vec{S}_3 , действующие на узел, образуют пространственную систему сил, сходящихся в точке B .



Выбрав оси координат x , y и z , составим для полученной системы сил соответствующие уравнения равновесия, используя при этом (по мере необходимости) метод двойного проецирования.

$$\sum F_x = 0, \quad S_1 + S_3 \sin \alpha \sin \beta = 0; \quad (a)$$

$$\sum F_y = 0, \quad S_2 + S_3 \sin \alpha \cos \beta = 0; \quad (b)$$

$$\sum F_z = 0, \quad S_3 \cos \alpha - Q = 0. \quad (c)$$

Решим полученную систему уравнений.

Из уравнения (c) найдём S_3 .

$$S_3 = \frac{Q}{\cos \alpha} \quad (d)$$

$$S_3 = \frac{10}{\cos 30^\circ} = 11,547 \text{ кН}.$$

Подставив (d) в (a) и (b), найдем S_1 и S_2 :

$$S_1 = -S_3 \sin \alpha \sin \beta = -Q \operatorname{tg} \alpha \sin \beta. \quad (e)$$

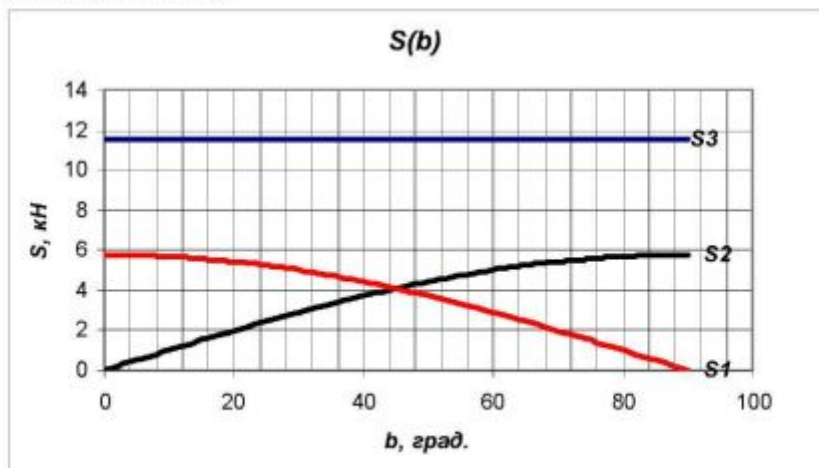
$$S_1 = -10 \operatorname{tg} 30^\circ \sin 35^\circ = -3,312 \text{ кН}.$$

$$S_2 = -S_3 \sin \alpha \cos \beta = -Q \operatorname{tg} \alpha \cos \beta. \quad (f)$$

$$S_2 = -10 \operatorname{tg} 30^\circ \cos 35^\circ = -4,729 \text{ кН}.$$

Знаки указывают на то, что стержни AB и BC сжаты, а трос BD растянут. Заметим, что при правильном решении иной результат не мог быть получен: нить, являясь односторонней связью, не сопротивляется сжатию.

В качестве дополнительного исследования построим графики зависимостей абсолютных величин S_1 , S_2 и S_3 от величины угла β . Эти графики, построенные в соответствии с формулами (e), (f) и (d) для $\alpha = 30^\circ$, имеют вид:

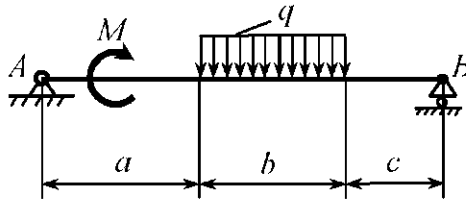


Из графиков видно:

- абсолютная величина S_1 при увеличении β от $\beta = 0^\circ$ до $\beta = 90^\circ$ монотонно увеличивается;
- абсолютная величина S_2 при увеличении β от $\beta = 0^\circ$ до $\beta = 90^\circ$ монотонно уменьшается;
- значения S_1 и S_2 совпадают при $\beta = 45^\circ$;
- величина S_3 от значения β не зависит.

2.3.2. Плоская система параллельных сил

Пример 2.4. На двухопорную невесомую балку, изображенную ниже, действуют момент M и равномерно распределенная нагрузка интенсивности q , приложенная на участке длиной b . Определить реакции опор.



Дано:

$$M = 2,4 \text{ кНм}$$

$$q = 0,8 \text{ кН/м}$$

$$b = 1,9 \text{ м}$$

$$c = 1,2 \text{ м}$$

Определить:

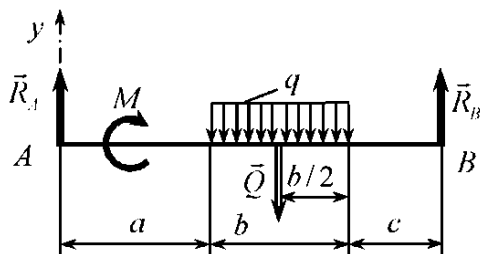
$$\vec{R}_A, \vec{R}_B$$

Решение:

Рассмотрим равновесие балки AB .

На неё действуют момент M и равномерно распределённая нагрузка интенсивности q , приложенная на участке длиной b . Отбросив мысленно связи – неподвижный шарнир A и подвижно-шарнирную опору B , заменим действие связей на балку соответствующими реакциями \vec{R}_A и \vec{R}_B . при этом реакцию \vec{R}_B направляем перпендикулярно плоскости перемещения катков – то есть вертикально, реакция \vec{R}_A также вертикальна по очевидной причине: все другие силы (силовые факторы) на горизонтальную ось не проецируются.

Таким образом, силы, действующие на балку, образуют плоскую систему параллельных сил.



Для такой системы сил можно записать два независимых уравнения равновесия. Запишем эти уравнения в форме уравнений моментов. При этом будем учитывать, что равнодействующая \bar{Q} равномерно распределенной нагрузки интенсивности q , действующей на участке длиной b , равна по величине qb и приложена в середине этого участка.⁸

$$\sum m_A(\vec{F}) = 0, \quad R_B(a+b+c) - M - qb\left(a + \frac{b}{2}\right) = 0, \quad (a)$$

$$\sum m_B(\vec{F}) = 0, \quad -R_A(a+b+c) - M + qb\left(c + \frac{b}{2}\right) = 0. \quad (b)$$

Решим полученную систему уравнений.

Из уравнения (a) найдём R_B .

$$R_B = \frac{M + qb\left(a + \frac{b}{2}\right)}{a+b+c} = \frac{2,4 + 0,8 * 1,9\left(2 + \frac{1,9}{2}\right)}{2 + 1,9 + 1,2} = 1,3498 \text{ кН}.$$

Из уравнения (b) найдём R_A .

$$R_A = \frac{-M + qb\left(c + \frac{b}{2}\right)}{a+b+c} = \frac{-2,4 + 0,8 * 1,9\left(1,2 + \frac{1,9}{2}\right)}{2 + 1,9 + 1,2} = 0,1702 \text{ кН}.$$

Знаки при величинах найденных реакций указывают на то, что направления реакций, приведённых на расчётной схеме, соответствуют действительности.

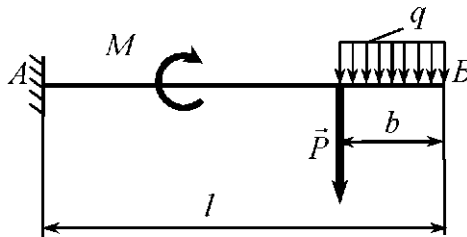
⁸ Обычно в Высших Учебных Заведениях эту равнодействующую в явном виде на рисунке не изображают. В дальнейшем и мы будем следовать этой традиции.

Для проверки составим уравнения проеций на вертикальную ось y .

$$\sum F_y = R_A + R_B - qb = 0,1702 + 1,3498 - 0,8 * 1,9 = 0,$$

что подтверждает правильность результата.

Пример 2.5. На защемленную в стене балку длины l действуют момент M , сосредоточенная вертикальная сила \vec{P} и равномерно распределенная нагрузка интенсивности q , приложенная на участке длиной b . Пренебрегая весом балки, определить реакции заделки.



Дано:

$$\begin{aligned} M &= 3,6 \text{ кН} \\ P &= 5,4 \text{ кН} \\ q &= 1,2 \text{ кН/м} \\ l &= 7,4 \text{ м} \\ b &= 1,9 \text{ м} \end{aligned}$$

Определить:

$$\vec{R}_A, M_A.$$

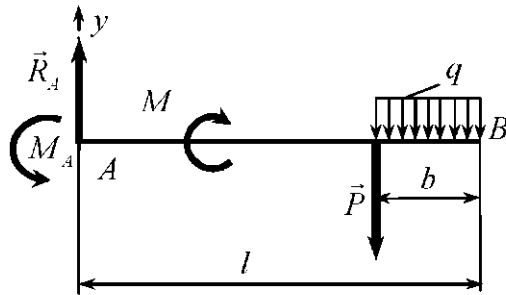
Решение:

Рассмотрим равновесие балки AB .

На неё действуют момент M , сосредоточенная вертикальная сила \vec{P} и равномерно распределенная нагрузка интенсивности q , приложенная на участке длиной b . Отбросив мысленно связь-заделку A , заменим её действие соответствующими реакциями: реактивной силой \vec{R}_A и реактивным моментом M_A .

Силы, действующие на балку, образуют плоскую систему параллельных сил.

Для такой системы сил можно записать два независимых уравнения равновесия. Запишем одно из этих уравнений в форме уравнения проеций, а второе - в форме уравнения моментов. При этом будем учитывать сведения, касающиеся равномерно распределенной нагрузки, приведенные в предыдущем примере.



$$\sum F_Y = 0, \quad R_A - P - qb = 0; \quad (a)$$

$$\sum m_A(\vec{F}) = 0, \quad M_A - M - P(l - b) - qb\left(l - \frac{b}{2}\right) = 0. \quad (b)$$

Решим полученную систему уравнений.

Из уравнения (a) найдем R_A .

$$R_A = P + qb = 5,4 + 1,2 * 1,9 = 7,680 \text{ кН}.$$

Из уравнения (b) найдем M_A .

$$\begin{aligned} M_A &= M + P(l - b) + qb\left(l - \frac{b}{2}\right) = \\ &= 3,6 + 5,4(7,4 - 1,9) + 1,2 * 1,9\left(7,4 - \frac{1,9}{2}\right) = 48,006 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Знаки при величинах найденных реакций указывают на то, направления реакций, приведенных на расчетной схеме, соответствуют действительности.

Для проверки составим уравнение моментов относительно точки B:

$$\begin{aligned} \sum m_B(\vec{F}) &= -R_A l + M_A - M + Pb + qb \frac{b}{2} = \\ &= -7,680 * 7,4 + 48,006 - 3,6 + 5,4 * 1,9 + 1,2 * 1,9 \frac{1,9}{2} = 0, \end{aligned}$$

что подтверждает правильность результатов.

Пример 2.6. Определить наибольшее значение веса груза P_1 , поднимаемого поворотным подъемным краном веса P_2 . Кран установлен на железнодорожной дрезине веса P_3 . Максимальный вылет стрелы крана равен l , ширина колеи - a , расстояние центра тяжести крана C от вертикальной плоскости, проходящей через продольную ось дрезины, при максимальном вылете стрелы - b .

Дано:

$$P_2 = 12 \text{ кН}$$

$$P_3 = 50 \text{ кН}$$

$$a = 1,52 \text{ м}$$

$$l = 3 \text{ м}$$

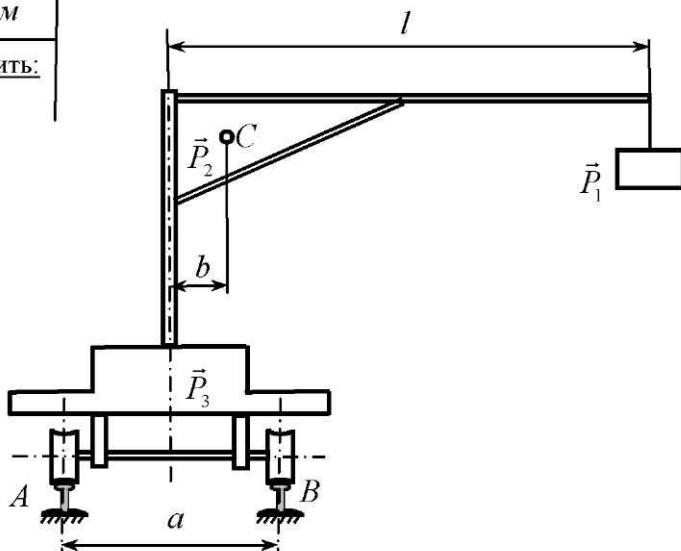
$$b = 0,6 \text{ м}$$

Определить:

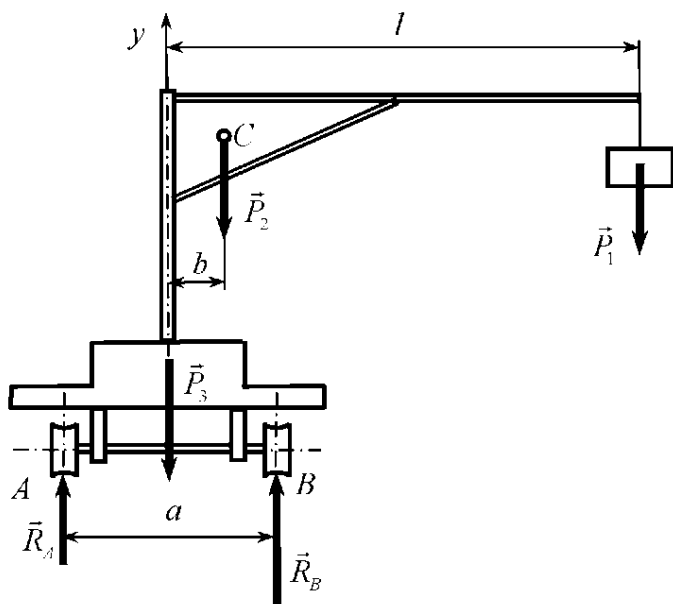
$$P_1.$$

Решение:

Очевидно, что наиболее неблагоприятным случаем (а именно для такого случая и должен проводиться расчет), является перпендикулярное по отношению к продольной оси дрезины расположение плоскости симметрии стрелы. Расчетная схема имеет в этом случае вид:



Рассмотрим равновесие дрезины с краном и грузом (кран выполняет свои функции тогда, когда дрезина не движется).



На эту механическую систему действуют активные силы: вес груза \vec{P}_1 , вес подъемного крана \vec{P}_2 , вес дрезины \vec{P}_3 . Связями для указанной механической системы являются рельсы. Реакции этих связей \vec{R}_A и \vec{R}_B вертикальны. Таким образом, на выбранную систему тел действует плоская система параллельных сил. Однако в данном случае, нет необходимости использовать два уравнения равновесия.

В самом деле. Во-первых, численное значение реакции \vec{R}_B не нужно определять по условию задачи, с другой стороны, механическая система «дрезина - кран - груз», являющаяся твердым телом, может рассматриваться как рычаг.

Условие равновесия рычага может быть сформулировано так:

Для равновесия рычага необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов сил, действующих на рычаг, относительно точки опоры⁹ была равна нулю.

⁹ В качестве центра момента может быть выбрана и другая точка, однако, в этом случае, реакция в точке опоры дает дополнительную неизвестную, для определения которой и потребовалось бы дополнительное уравнение равновесия.

При превышении наибольшего (критического) значения веса груза P_1 , произойдет *опрокидывание* дрезины с краном и грузом относительно рельса B . Это и есть точка опоры.

Итак

$$\sum m_B(\vec{F}) = 0, \quad -R_A a + P_3 \frac{a}{2} + P_2 \left(\frac{a}{2} - b \right) - P_1 \left(l - \frac{a}{2} \right) = 0. \quad (a)$$

Уравнение содержит две неизвестных величины: R_A и P_1 . Иначе и быть не могло: уравнения равновесия отражают равновесие конструкции, как физическое состояние, до момента начала опрокидывания, включая этот момент. Однако эти уравнения не отражают сам факт опрокидывания, поэтому дополнительно к уравнению (a) необходимо добавить условие опрокидывания.

Это условие очевидно: при опрокидывании левое колесо отрывается от рельса, поэтому в момент опрокидывания

$$R_A = 0. \quad (b)$$

Тогда

$$P_3 \frac{a}{2} + P_2 \left(\frac{a}{2} - b \right) - P_1 \left(l - \frac{a}{2} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$P_1 = \frac{P_3 \frac{a}{2} + P_2 \left(\frac{a}{2} - b \right)}{l - \frac{a}{2}} = \frac{(P_3 + P_2)a - 2P_2 b}{2l - a} \quad (c)$$

$$P_1 = \frac{(50 + 12) * 1,52 - 2 * 12 * 0,6}{2 * 3 - 1,52} = 17,82 \text{ кН}.$$

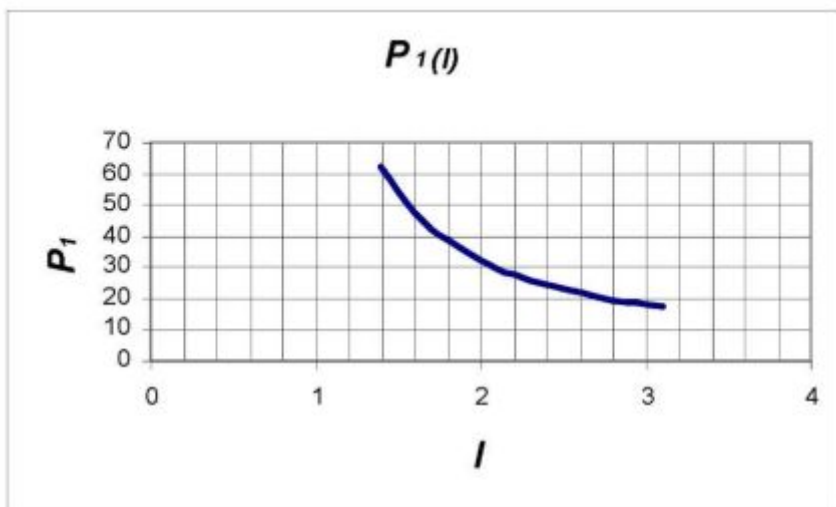
Допускаемое наибольшее значение поднимаемого груза

$$[P_1] < \frac{P_1}{k} = \frac{17,82}{1,4} = 12,72 \text{ кН}.$$

где k - коэффициент грузовой устойчивости.

Принимаем, $[P_1] = 12 \text{ кН}$.

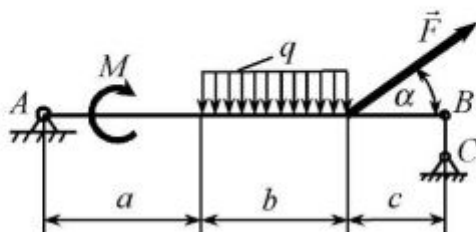
График зависимости грузоподъемности крана от вылета стрелы, построенный по формуле (c), имеет вид:



По какой причине построение графика начинается со значения $l \approx 1,2m$ авторы предлагают догадаться читателю.

2.3.3. Произвольная плоская система сил

Пример 2.7. На двухопорную невесомую балку, изображенную ниже, действуют сила \vec{F} , составляющая с балкой угол α , и момент M и равномерно распределенная нагрузка интенсивности q , приложенная на участке длиной b . Определить реакции опор.



Дано:

$$F = 10 \text{ кН}$$

$$M = 2,4 \text{ кНм}$$

$$q = 0,8 \text{ Н/м}$$

$$a = 2 \text{ м}$$

$$b = 1,9 \text{ м}$$

$$c = 1,2 \text{ м}$$

$$\alpha = 40^\circ$$

Определить:

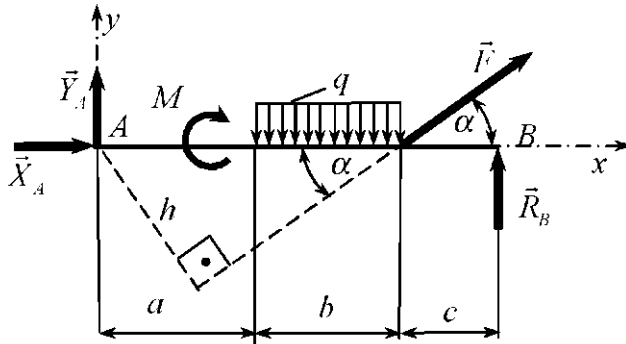
$$\vec{R}_A, \vec{R}_B$$

Решение:

Рассмотрим равновесие балки AB .

На неё действуют сила \vec{F} , составляющая с балкой угол α , момент M и равномерно распределённая нагрузка интенсивности q , приложенная на участке длиной b . Отбросив мысленно связи – неподвижный шарнир A и невесомый стержень BC , заменим действие связей соответствующими реакциями – \vec{R}_A и \vec{R}_B . При этом реакцию \vec{R}_B направляем по стержню BC – то есть вертикально; реакцию \vec{R}_A представим её горизонтальной и вертикальной составляющими – \vec{X}_A и \vec{Y}_A .

Силы, действующие на балку, образуют плоскую систему параллельных сил.



Для такой системы сил можно записать три независимых уравнения равновесия. Запишем эти уравнения в основной форме: составим 2 уравнения и 1 уравнение моментов. Выбрав горизонтальную x и вертикальную y оси координат, в качестве центра моментов выбираем точку A : линии действия *неизвестных* сил \vec{X}_A и \vec{Y}_A проходят через эту точку, следовательно, моменты этих сил относительно этой точки будут равны 0.

При составлении уравнений равновесия будем учитывать соображения, приведенные в примере 2.4., касающиеся равномерно распределённой нагрузки.

$$\sum F_X = 0, \quad X_A + F \cos \alpha = 0; \quad (a)$$

$$\sum F_Y = 0, \quad Y_A + R_B - qb + F \sin \alpha = 0; \quad (b)$$

$$\sum m_A(\vec{F}) = 0,$$

$$R_B(a + b + c) - M - qb\left(a + \frac{b}{2}\right) + F(a + b)\sin \alpha = 0. \quad (c)$$

Решим полученную систему уравнений.

Из уравнения (c) найдём R_B .

$$R_B = \frac{M + qb\left(a + \frac{b}{2}\right) - F(a + b)\sin \alpha}{a + b + c} =$$

$$= \frac{2,4 + 0,8 * 1,9\left(2 + \frac{1,9}{2}\right) - 10(2 + 1,9)\sin 40^\circ}{2 + 1,9 + 1,2} = -3,5656 \text{ кН}.$$

Из уравнения (b) найдём Y_A .

$$Y_A = -R_B + qb - F \sin \alpha = 3,5656 + 0,8 * 9 - 10 * \sin 40^\circ =$$

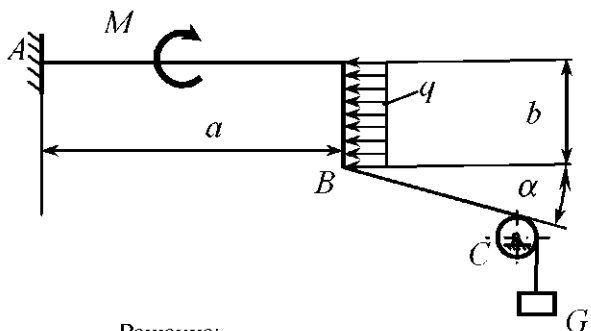
$$= 4,3377 \text{ кН}.$$

Из уравнения (a) найдём X_A .

$$X_A = -F \cos \alpha = -10 * \sin 40^\circ = 6,4279 \text{ кН}.$$

Знаки при величинах найденных реакций указывают на то, что направления реакций \vec{X}_A и \vec{Y}_A , приведённых на расчётной схеме, соответствуют действительности, а направления реакции \vec{R}_B противоположно указанному на схеме.

Пример 2.8. На плоский ломаный брус AB , заделанный в стену действуют момент M и равномерно распределенная нагрузка интенсивности q , приложенная на участке длиной b . Кроме того, в точке B бруса прикреплен трос, перекинутый через блок C , составляющий угол α с горизонтом и несущий на конце груз весом G . Пренебрегая трением на блоке и весом бруса, определить составляющие реакции заделки.



Дано:

$$M = 2,8 \text{ кН}$$

$$G = 2,4 \text{ кН}$$

$$q = 0,8 \text{ кН/м}$$

$$a = 3,2 \text{ м}$$

$$b = 1,9 \text{ м}$$

$$\alpha = 25^\circ$$

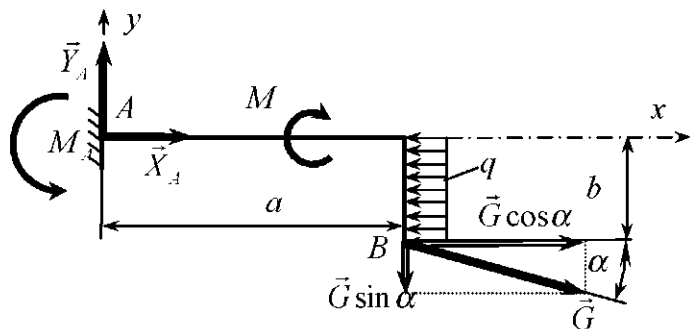
Определить:

$$\vec{R}_A, M_A.$$

Решение:

Рассмотрим равновесие ломаного бруса AB .

На него действуют момент M , сосредоточенная вертикальная сила и равномерно распределенная нагрузка интенсивности q , приложенная на участке длиной b . Отбросив мысленно связь-заделку A , заменим её действие соответствующими реакциями: реактивной силой \vec{R}_A , представленной горизонтальной \vec{X}_A и вертикальной \vec{Y}_A составляющими, а также реактивным моментом M_A . Другой связью является трос BC . Натяжение троса при отсутствии трения на блоке равно по величине весу груза G и направлено по тросу.



Силы, действующие на брус, образуют произвольную плоскую систему сил. Для такой системы сил можно составить три независимых уравнения равновесия. Выбрав оси координат x и y , а также центр моментов A , запишем два из этих уравнений в форме уравнения проекций, а третье – в форме уравнения моментов. При составлении последнего уравнения будем учитывать теорему Вариньона (теорему о моменте равнодействующей), согласно которой момент равнодействующей системы сил относительно точки (оси) равен сумме моментов сил относительно этой точки (оси). Применяя эту теорему к силе \vec{G} , разложим эту силу на горизонтальную ($\vec{G} \cos \alpha$) и вертикальную ($\vec{G} \sin \alpha$) составляющие.

$$\sum F_x = 0, \quad X_A + G \cos \alpha - qb = 0; \quad (a)$$

$$\sum F_y = 0, \quad Y_A - G \sin \alpha = 0; \quad (b)$$

$$\sum m_A(\vec{F}) = 0,$$

$$M_A - M - qb \frac{b}{2} - G \sin \alpha * a + G \cos \alpha * b = 0. \quad (c)$$

Решим полученную систему уравнений.

Из уравнения (a) найдём X_A .

$$X_A = -G \cos \alpha + qb = -2,4 \cos 25^\circ + 0,8 * 1,9 = -0,655 \text{ кН}.$$

Из уравнения (b) найдём Y_A .

$$Y_A = G \sin \alpha = Y_A = 2,4 \sin 25^\circ = 1,014 \text{ кН}.$$

Из уравнения (c) найдём M_A .

$$\begin{aligned} M_A &= M + q \frac{b^2}{2} - G(\cos \alpha - a \sin \alpha) = \\ &= 2,8 + 0,8 \frac{0,8^2}{2} - 2,4(1,9 * \cos 25^\circ - 3,2 * \sin 25^\circ) = 3,357 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Знаки при величинах найденных реакций указывают на то, что направления реакций \vec{Y}_A и M_A , приведённых на расчётной схеме, соответствуют действительности; реакция \vec{X}_A направлена в сторону, противоположную указанной на рисунке.

Для проверки составим уравнения моментов относительно точки B :

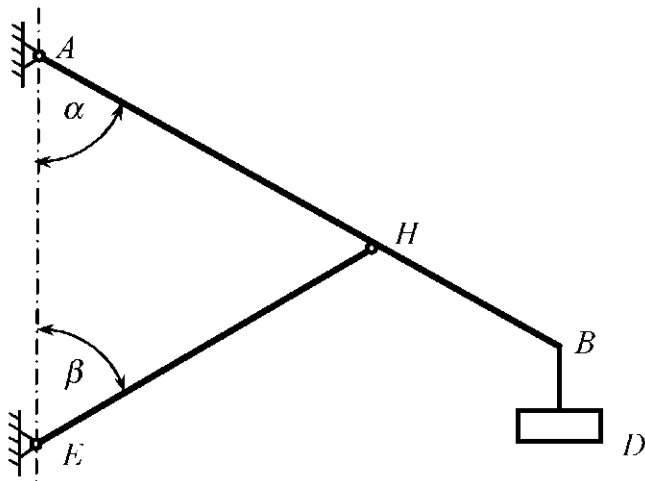
$$\begin{aligned} \sum m_B(\vec{F}) &= M_A - M - Y_A a - X_B b + q \frac{b^2}{2} = \\ &= 3,357 - 2,8 - 1,014 * 3,2 - (-0,665) * 1,9 + 0,8 \frac{1,9^2}{2} = \\ &= 6,0645 - 6,0448 = 0,0197 \text{ кНм} \approx 0. \end{aligned}$$

Относительная погрешность составляет

$$\delta = \frac{0,0197}{6,0448} 100\% = 0,323\%,$$

что вполне допустимо в технических расчётах.

Пример 2.9. Брус AB весом P_1 и длиной l_1 , прикрепленный одним концом к стене шарниром A и несущий на другом конце B груз D весом G , поддерживается брусом EH весом P_2 и длиной l_2 . Брус EH соединен брусом AB шарниром H , а со стеной - шарниром E , находящимся на одной вертикали с шарниром A . Брусья AB и EH составляют с этой вертикалью углы α и β соответственно. Считая брусья однородными, определить реакции шарниров A и E .



Дано:

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 \text{ кН} \\ P_2 &= 0,6 \text{ кН} \\ G &= 2,4 \text{ кН} \\ l_1 &= 1,2 \text{ м} \\ l_2 &= 0,8 \text{ м} \\ \alpha &= 45^\circ \\ \beta &= 60^\circ \end{aligned}$$

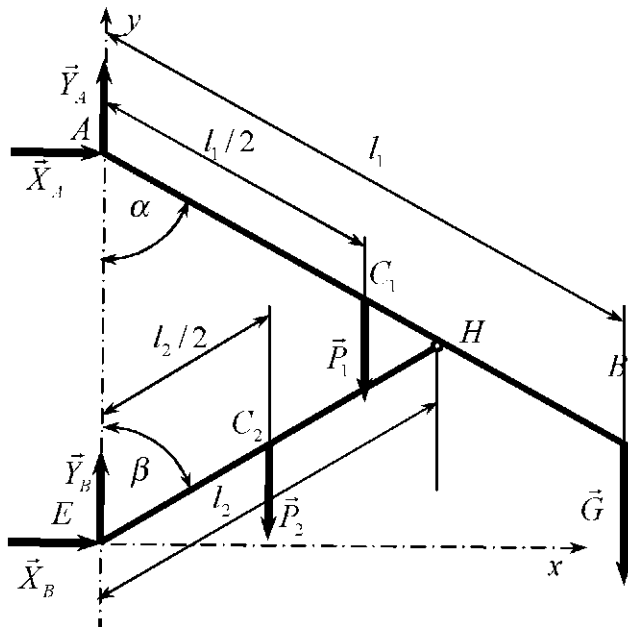
Определить:

$$\vec{R}_A, \vec{R}_B$$

Решение:

Уясняя условие задачи, необходимо отметить, что конструкция состоит из *двух* тел, находящихся под действием произвольной плоской системы сил. Таким образом, для данной конструкции можно составить *шесть* ($2 \times 3 = 6$) независимых уравнений равновесия. С другой стороны, задача содержит *шесть* неизвестных: по две составляющих реакций в трех шарнирах (A, E, H). Следовательно, число независимых уравнений равновесия совпадает с числом неизвестных, следовательно, задача является статически определимой. Отметим также, что по условию задачи не требуется определять давление в промежуточном шарнире H , что может быть учтено при составлении уравнений равновесия.

Рассмотрим сначала равновесие всей конструкции.



На конструкцию действуют силы: вес груза \vec{G} , вес бруса \vec{P}_1 , вес бруса \vec{P}_2 , составляющие реакций шарниров A и E - \vec{X}_A и \vec{Y}_A , \vec{X}_B и \vec{Y}_B . Эти силы образуют произвольную плоскую систему сил. Выбрав оси координат и центр моментов, запишем три уравнения равновесия.

$$\sum F_X = 0, \quad X_A + X_B = 0; \quad (a)$$

$$\sum F_Y = 0, \quad Y_A + Y_B - P_1 - P_2 - G = 0; \quad (b)$$

$$\sum m_A(\vec{F}) = 0, \quad X_B AE - Gl_1 \sin \alpha - P_1 \frac{l_1}{2} \sin \alpha - P_2 \frac{l_2}{2} \sin \beta = 0. \quad (c)$$

Выразим расстояние AE через заданные величины. Из $\triangle AFH$ по теореме синусов

$$\frac{AE}{\sin [180^\circ - (\alpha + \beta)]} = \frac{l_2}{\sin \alpha} \Rightarrow AE = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} l_2.$$

Из уравнения (c) с учётом последнего выражения легко получить:

$$\begin{aligned} X_B &= \sin \alpha \frac{l_1 \left(G + \frac{P_1}{2} \right) \sin \alpha + \frac{P_2}{2} \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \\ &= \sin 45^\circ \frac{1,2 \left(2,4 + \frac{1}{2} \right) \sin 45^\circ + \frac{0,6}{2} \sin 60^\circ}{\sin(45^\circ + 60^\circ)} = 3,453 \text{ кН}. \end{aligned}$$

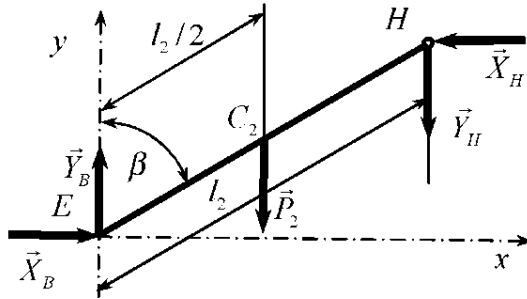
Из уравнения (a) найдём X_A :

$$X_A = -X_B = -3,453 \text{ кН}.$$

Рассмотрим теперь равновесие бруса EH .

На него действуют силы: вес бруса \vec{P}_2 , составляющие реакций шарниров E и H : X_E и Y_E , X_H и Y_H . Эти силы образуют произвольную плоскую систему сил. Однако, поскольку составляющие реакции шарнира H определять не требуется, составим лишь одно уравнение равновесия – уравнение моментов, приняв за центр моментов точку H .

$$\sum m_H(\vec{F}) = 0, \quad X_B l_2 \cos \beta - Y_B l_2 \sin \beta + P_2 \frac{l_2}{2} \sin \beta = 0. \quad (d)$$



Тогда

$$Y_B = \frac{X_B}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{P_2}{2} = \frac{3,453}{\operatorname{tg} 60^\circ} + \frac{0,6}{2} = 2,294 \text{ кН}.$$

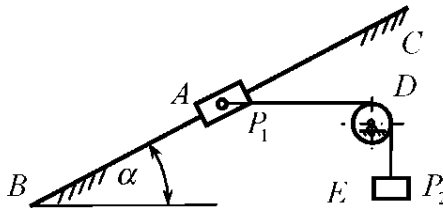
Из уравнения (b) найдём Y_A .

$$Y_A = -Y_B + P_1 + P_2 + G = -2,294 + 1 + 0,6 + 2,4 = 1,706 \text{ кН}.$$

Анализируя результат можно отметить, что благодаря удачному выбору тел и форм уравнений равновесия решение задачи упростилось: не пришлось составлять и решать все шесть уравнений равновесия.

2.3.4. Равновесие с учётом сил трения

Пример 2.10. Ползун A весом P_1 , находится на неподвижной направляющей BC , составляющей с горизонтом угол α . К ползуну прикреплена нить, перекинутая через блок D и несущая на конце груз E весом P_2 (участок нити AD горизонтален). Ползун удерживается в равновесии за счет сил трения между ним и направляющей. Определить значение f коэффициента трения, при котором для заданных ниже значений P_1 , P_2 , и α обеспечивается равновесие ползуна.



Дано:

$$P_1 = 100H$$

$$P_2 = 120H$$

$$\alpha = 40^\circ$$

Определить:

f .

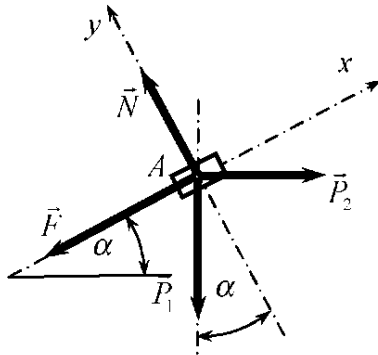
Решение:

Рассмотрим равновесие ползуна A .

На него действуют силы: вес ползуна \vec{P}_1 , натяжение нити, равное весу груза \vec{P}_2 , нормальная реакция направляющей \vec{N} и сила трения \vec{F} .

Что касается направления силы трения \vec{F} , то до окончания расчета для конкретных численных значений P_1 , P_2 и α однозначно ответить на вопрос об этом направлении невозможно: ползун может скользить по наклонной плоскости как вверх, так и вниз.

Предположим, что сила трения F направлена так, как это указано на рисунке. (Если в результате расчета будет получено отрицательное значение коэффициента трения, то в условиях данной задачи это будет означать, что действительное направление силы трения противоположно, изображенному на рисунке; эта предполагаемая ситуация требует дополнительного анализа.)



Перечисленные силы образуют плоскую систему сходящихся сил. Выбрав оси координат, запишем соответствующие этой системе сил уравнения равновесия.

$$\sum F_x = 0, \quad P_2 \cos \alpha - F - P_1 \sin \alpha = 0; \quad (a)$$

$$\sum F_y = 0, \quad -P_2 \sin \alpha + N - P_1 \cos \alpha = 0; \quad (b)$$

Поскольку в условии данной задачи рассматривается предельное состояние равновесия, величина силы трения подчиняется закону Амонтона:

$$F = fN$$

Решим полученную систему уравнений.

Из уравнения (b) следует:

$$N = P_1 \cos \alpha + P_2 \sin \alpha, \text{ тогда}$$

$$F = f(P_1 \cos \alpha + P_2 \sin \alpha),$$

и уравнение (а) можно переписать в виде:

$$P_2 \cos \alpha - P_1 \sin \alpha = f(P_1 \cos \alpha + P_2 \sin \alpha).$$

Найдем значение f .

$$\begin{aligned} f &= \frac{P_2 \cos \alpha - P_1 \sin \alpha}{P_1 \cos \alpha + P_2 \sin \alpha} = \\ &= \frac{120 \cos 40^\circ - 100 \sin 40^\circ}{100 \cos 40^\circ + 120 \sin 40^\circ} = 0,1798 \approx 0,18. \end{aligned}$$

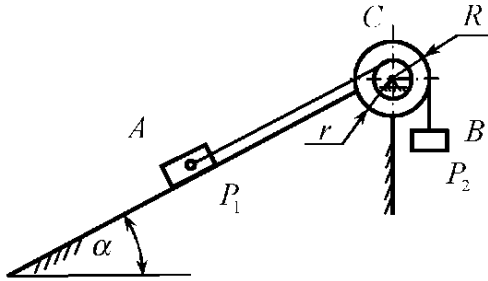
Знак $+$ при значении f указывает на то, что действительное направление силы трения соответствует изображенному на рисунке направлению. Однако, анализ уравнения (а) показывает, что при ином соотношении между величинами P_1 , P_2 и α направление силы трения могло быть другим. В самом деле, при ином соотношении между величинами P_1 , P_2 и α ползун A мог бы двигаться и вниз по направляющей. Это означало бы, что ползун A мог бы потерять равновесие также и в этой гипотетической ситуации. В этом случае, интервал геометрических параметров механической системы, обеспечивающих равновесие системы, называют зоной застоя¹⁰.

Подробнее определение границ зоны застоя рассматривается в следующем примере.

Пример. 2.11. Механическая система состоит из груза A весом P_1 , лежащего на шероховатой наклонной плоскости, груза B весом P_2 , невесомого ступенчатого блока C и невесомой нерастяжимой нити, их соединяющей. Угол наклона плоскости к горизонту равен α , коэффициент трения груза A о плоскость - f , радиусы ступеней блока R и r .

При каких значениях угла α механическая система будет находиться в равновесии? Трением на блоке пренебречь.

¹⁰ Первично, это термин механики, но не политики!



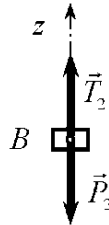
Дано:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= 6 \text{ кН} \\
 P_2 &= 2 \text{ кН} \\
 R &= 0,8 \text{ м} \\
 r &= 0,4 \text{ м} \\
 f &= 0,15
 \end{aligned}$$

Определить:
 α .

Решение:

Рассмотрим сначала равновесие груза B .

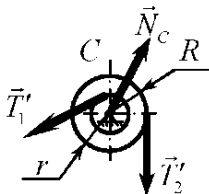


На него действуют две силы: вес груза \vec{P}_2 и натяжение нити \vec{T}_2 . Эти две силы образуют систему сил, действующих по одной прямой.

Выбрав ось, запишем уравнение равновесия, из которого найдём натяжение нити \vec{T}_2 :

$$\sum F_z = 0, \quad T_2 - P_2 = 0 \Rightarrow T_2 = P_2. \quad (a)$$

Рассмотрим теперь равновесие ступенчатого блока C .



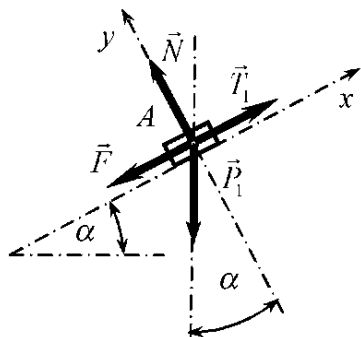
На него действуют три силы: натяжение нити \vec{T}_1' , реакция оси блока \vec{N}_C и натяжение нити \vec{T}_2' . При этом, по третьему закону Ньютона и соответствии с (a), имеем:

$$\vec{T}_2' = -\vec{T}_2 \Rightarrow T_2' = T_2 = P_2. \quad (b)$$

Учитывая, что \vec{N}_C определять нет необходимости, запишем для полученной произвольной плоской системы сил лишь одно уравнение равновесия – уравнение моментов, выбрав в качестве центра моментов точку C ¹¹.

$$\sum m_C(\vec{F}) = 0, \quad T_1 r - T_2 R = 0 \Rightarrow T_1 = T_2 \frac{R}{r} = P_2 \frac{R}{r}. \quad (c)$$

Рассмотрим, наконец, равновесие груза A .



На него действуют четыре силы: вес груза \vec{P}_1 , нормальная составляющая реакции плоскости \vec{N} , натяжение нити \vec{T}_1 и сила трения \vec{F} . При этом, по третьему закону Ньютона и соответствии с (c), имеем:

$$\vec{T}_1 = -\vec{T}_1' \Rightarrow T_1 = T_1' = P_2 \frac{R}{r}. \quad (d)$$

Кроме того, поскольку исследуется предельное состояние равновесия, по закону Амонтона

$$F = fN. \quad (e)$$

Что касается направления силы трения \vec{F} , то здесь нужно рассмотреть *два случая*: при потере равновесия груз A может, как подниматься по наклонной плоскости, так и спускаться по ней.

В первом случае сила трения \vec{F} направлена вниз по наклонной плоскости, во - втором – в противоположную сторону.

Силы, действующие на груз, образуют плоскую систему сходящихся сил. Выбрав оси координат x и y , запишем соответствующие уравнения равновесия.

$$\sum F_x = 0, \quad T_1 - F - P_1 \sin \alpha = 0; \quad (f)$$

$$\sum F_y = 0, \quad N - P_1 \cos \alpha = 0. \quad (g)$$

¹¹ Под C будем понимать как весь блок, так и точку пересечения его оси с плоскостью чертежа.

Из уравнения (g) следует:

$$N = P_1 \cos \alpha,$$

тогда уравнение (f) с учётом выражений (d) и (e) переписывается в виде

$$P_2 \frac{R}{r} - fP_1 \cos \alpha - P_1 \sin \alpha = 0. \quad (h)$$

Разрешим последнее уравнение относительно α . Вводя для упрощения записи новые постоянные, перепишем уравнение (h) так:

$$A_1 \cos \alpha + B_1 \sin \alpha + C_1 = 0, \quad (i)$$

где

$$A_1 = -fP_1, \quad B_1 = -P_1, \quad C_1 = P_2 \frac{R}{r}. \quad (k)$$

Введём новую переменную U , такую, что $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = U$. Тогда

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - U^2}{1 + U^2}, \quad \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2U}{1 + U^2}.$$

Уравнение (i) переписывается в этом случае в виде

$$A_1 \frac{1 - U^2}{1 + U^2} + B_1 \frac{2U}{1 + U^2} + C_1 = 0, \quad \text{или}$$

$$A_1 - A_1 U^2 + 2B_1 U + C_1 + C_1 U^2 = 0, \quad \text{или}$$

$$(-C_1 + A_1)U^2 - 2B_1 U + (-C_1 - A_1) = 0, \quad \text{или}$$

$$AU^2 - 2BU + X = 0,$$

где $A = -C_1 + A_1 = -P_2 \frac{R}{r} - fP_1 = -2 \frac{0,8}{0,4} - 0,15 * 6 = -4,9 \text{ кН}$,

$$B = B_1 = -P_1 = -6 \text{ кН},$$

$$X = -C_1 - A_1 = -P_2 \frac{R}{r} + fP_1 = -2 \frac{0,8}{0,4} + 0,15 * 6 = -3,1 \text{ кН}.$$

$$U_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AX}}{A} = \frac{-6 \pm \sqrt{(-6)^2 - (-4,9) * (-3,1)}}{-4,9} =$$

$$= \frac{-6 \pm 4,562}{-4,9};$$

$$U_1 = \frac{-6 + 4,562}{-4,9} = 0,293; \quad U_2 = \frac{-6 - 4,562}{-4,9} = 2,156.$$

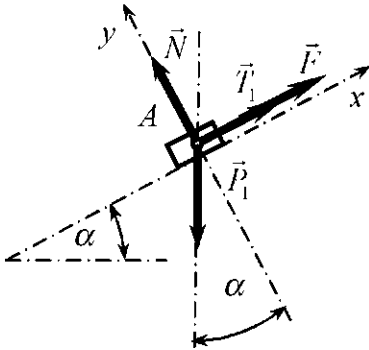
$$\alpha_1 = 2 \operatorname{arctg} U_1 = 2 \operatorname{arctg}(0,293) = 32,66^\circ;$$

$$\alpha_2 = 2 \operatorname{arctg} U_2 = 2 \operatorname{arctg}(2,156) = 130,23^\circ.$$

Второй корень ($\alpha_2 = 130,23^\circ$) не имеет физического смысла: при значениях угла $90^\circ < \alpha < 270^\circ$ груз A оторвется от наклонной плоскости и механическая система, а, следовательно, и условия задачи станут другими.

Тогда, в первом из рассматриваемых случаев, $\alpha = \alpha_1 = 32,66^\circ$.

Рассмотрим теперь второй случай; в этом случае сила трения \vec{F} направлена вверх по наклонной плоскости.



Уравнение равновесия (f) переписывается в этом случае так:

$$T_1 + F - P_1 \sin \alpha = 0.$$

Тогда уравнения (h), (i) и (k) принимают вид:

$$P_2 \frac{R}{r} + f P_1 \cos \alpha - P_1 \sin \alpha = 0,$$

$$A_2 \cos \alpha + B_2 \sin \alpha + C_2 = 0, \quad (l)$$

где

$$A_2 = f P_1, \quad B_2 = -P_1, \quad C_2 = P_2 \frac{R}{r}.$$

Введём снова переменную U , такую, что $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = U$,

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - U^2}{1 + U^2}, \quad \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2U}{1 + U^2}.$$

Уравнение (l) переписывается в этом случае в виде

$$A_2 \frac{1-U^2}{1+U^2} + B_2 \frac{2U}{1+U^2} + C_2 = 0, \text{ или}$$

$$A_2 - A_2 U^2 + 2B_2 U + C_2 + C_2 U^2 = 0, \text{ или}$$

$$(-C_2 + A_2)U^2 - 2B_2 U + (-C_2 - A_2) = 0, \text{ или}$$

$$AU^2 - 2BU + X = 0,$$

$$\text{где } A = -C_2 + A_2 = -P_2 \frac{R}{r} + fP_1 = -2 \frac{0,8}{0,4} + 0,15 * 6 = -3,1 \text{ кН},$$

$$B = B_2 = -P_1 = -6 \text{ кН},$$

$$X = -C_2 - A_2 = -P_2 \frac{R}{r} - fP_1 = -2 \frac{0,8}{0,4} + -0,15 * 6 = -4,9 \text{ кН}.$$

$$U_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AX}}{A} = \frac{-6 \pm \sqrt{(-6)^2 - (-3,1) * (-4,9)}}{-3,1} =$$

$$= \frac{-6 \pm 4,562}{-3,1};$$

$$U_1 = \frac{-6 + 4,562}{-3,1} = 0,464; \quad U_2 = \frac{-6 - 4,562}{-3,1} = -3,407.$$

$$\alpha_1 = 2 \arctg U_1 = 2 \arctg(0,464) = 49,78^\circ;$$

$$\alpha_2 = 2 \arctg U_2 = 2 \arctg(-3,407) = -147,28^\circ.$$

Второй корень ($\alpha_2 = -147,28^\circ$) не имеет физического смысла: при значениях угла $-90^\circ > \alpha > -270^\circ$ груз A оторвется от наклонной плоскости и механическая система, а, следовательно, и условия задачи станут другими.

Тогда, во втором из рассматриваемых случаев. $\alpha = \alpha_1 = 49,78^\circ$.

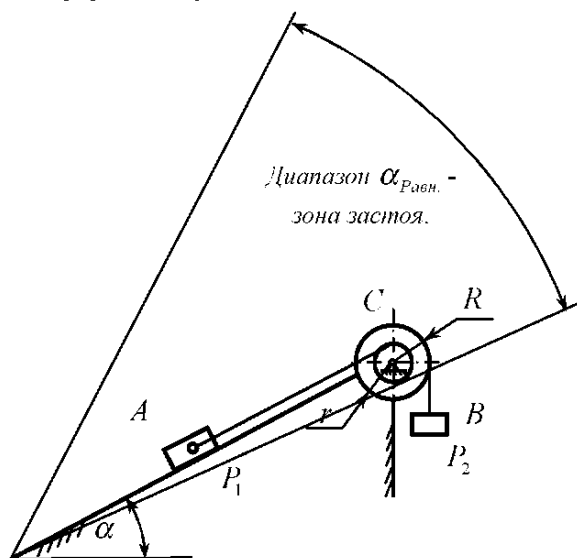
Таким образом, при движении груза A вверх по наклонной плоскости значение угла α , при котором начинается это движение, составляет $32,66^\circ$. С другой стороны, при движении груза A вниз по наклонной плоскости значение угла α , при котором начинается это движение, составляет $49,78^\circ$.

Следовательно, величина зоны равновесия (зоны застоя) в условиях данной задачи определяется соотношением

$$32,66^\circ \leq \alpha_{\text{равн.}} \leq 49,78^\circ.$$

При $-90^\circ < \alpha < 32,66^\circ$ и $49,78^\circ > \alpha > 90^\circ$ равновесие данной механической системы невозможно.

Графическая интерпретация приведена ниже.



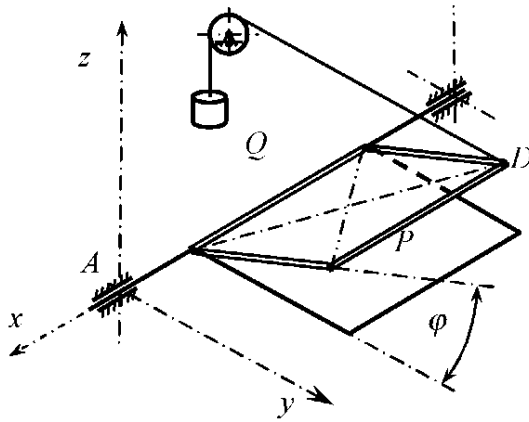
2.3.5. Произвольная пространственная система сил

Пример 2.12. Крышка вентиляционного люка весом P , закрепленного на горизонтальной оси, удерживается в равновесии посредством троса, привязанного в точке D рамы, перекинутого через блок и несущего груз Q . Угол раскрытия люка φ регулируется величиной груза Q .

Определить значение угла φ при равновесии крышки, пренебрегая трением на блоке, считая крышку люка однородной плитой прямоугольной формы. В положении равновесия трос горизонтален и параллелен оси Y , указанной на рисунке¹².

¹² В исходных расчетных схемах для упрощения восприятия конструкции иногда изображают координатные оси. Это вовсе не означает, что исследователь при решении задачи обязан выбирать такие же оси – выбор осей координат является прерогативой исследователя.

Кроме того, следует учитывать несущественность того, какая именно из ортогональных систем координат – правая или левая, используется при решении задач статики.



Дано:

$$P = 200H$$

$$Q = 150H$$

Определить:

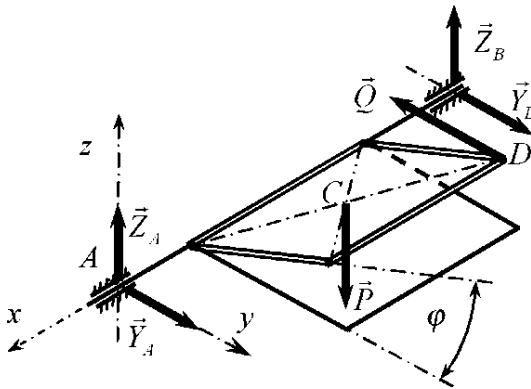
φ

Решение:

Рассмотрим равновесие крышки люка закреплённого на оси AB .

На это тело действуют активная сила – вес крышки люка \vec{P} . Реакциями связей являются натяжение нити, равнос при отсутствии трения на блоке

величине веса груза Q , а также составляющие реакций подшипников: \vec{Y}_A, \vec{Z}_A и \vec{Y}_B, \vec{Z}_B . (Авторы пособия ещё раз считают необходимым напомнить: *реакция подшипника не имеет осевой составляющей.*) Традиционное для российской школы механиков обозначение составляющих реакций ($\vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{Y}_B, \vec{Z}_B$) предполагает, кроме иных соображений, согласие исследователя с выбором осей, представленных в исходной расчётной схеме.

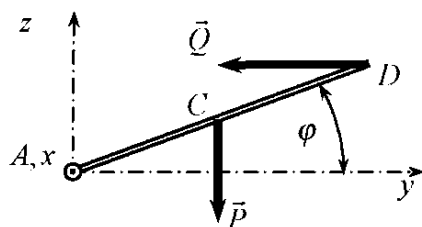


Система сил, действующих на выбранное тело, представляет собой произвольную пространственную систему сил. Для такой системы сил можно было бы записать шесть уравнений равновесия: три уравнения проекций на координатные оси и три уравнения моментов относительно этих осей.

Однако при решении данной задачи можно ограничиться всего одним уравнением равновесия - уравнением моментов относительно оси X .

В самом деле, поскольку в данной задаче не требуется определять составляющие реакций подшипников, нет необходимости составлять других уравнений равновесия.

Для наглядности изобразим вид на конструкцию со стороны оси X . При этом, учитывая, что момент силы относительно оси равен нулю в случае, если линия действия силы пересекает эту ось, не станем изображать на указанной проекции силы $\vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{Y}_B, \vec{Z}_B$. Таким образом, на вспомогательном нижеприводимом рисунке изображены лишь силы \vec{P} и \vec{Q} , моменты которых относительно оси X отличны от нуля.



Составим уравнение моментов относительно оси X . При этом будем учитывать, что в силу однородности материала крышки точка C является серединой ширины крышки AD .

Напомним, что моментом силы относительно оси называют момент проекции силы на плоскость, перпендикулярную данной оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью. В данном случае обе силы \vec{P} и \vec{Q} , моменты которых относительно оси X отличны от нуля проецируются на плоскость yz в натуральную величину, а указанной точкой пересечения оси с этой плоскостью является точка A .

Таким образом

$$\sum m_x(\vec{F}) = 0, \quad Q * AD * \sin \varphi - P \frac{AD}{2} \cos \varphi = 0, \quad \text{откуда}$$

$$Q \sin \varphi - \frac{P}{2} \cos \varphi = 0 \Rightarrow Q \sin \varphi = \frac{P}{2} \cos \varphi.$$

Поделив последнее выражение на $\cos\varphi$, получим

$$Q * \operatorname{tg}\varphi = \frac{P}{2}, \text{ откуда}$$

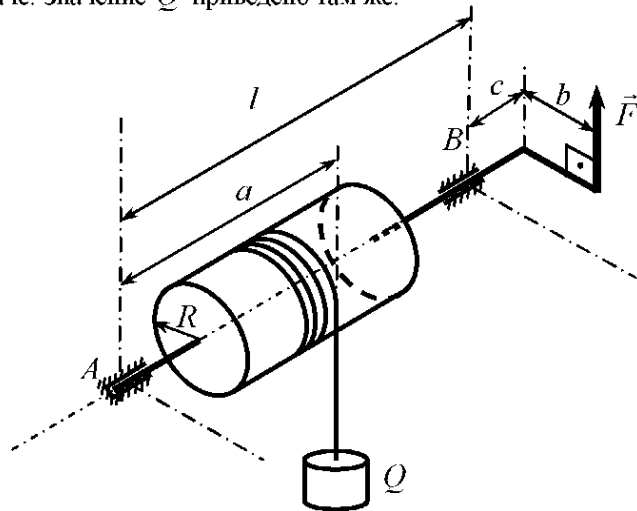
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{P}{2Q} = \frac{200}{2 * 150} = 0,667.$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} = 0,667 = 33,7^\circ.$$

Пример 2.13. Колодезный ворот - устройство для ручного подъёма воды из колодца, представляет собой барабан, закреплённый на коленчатом валу (вал с рукояткой), который, в свою очередь, установлен в подшипниках A и B . При подъёме на барабан наматывается цепь, несущая груз: ведро с водой весом Q . При этом силы тяжести ворота и цепи пренебрежимо малы по сравнению величиной Q .

Определить величину силы F , которую необходимо приложить к рукоятке ворота для того, чтобы груз Q поднимался равномерно. Условие равномерности подъёма обусловлено свойствами груза – отсутствием расплёскивания воды. Определить также реакции подшипников.

Размеры механизма указаны на рисунке, а их численные значения – в данных к задаче. Значение Q приведено там же.



Дано:

$$Q = 120 \text{ Н}$$

$$R = 0,2 \text{ м}$$

$$l = 1,2 \text{ м}$$

$$a = 0,7 \text{ м}$$

$$b = 0,4 \text{ м}$$

$$c = 0,2 \text{ м}$$

Определить:

$$F, R_A, R_B.$$

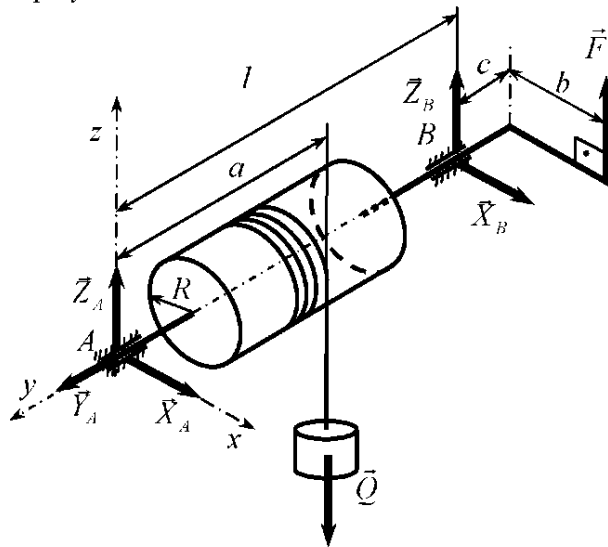
Решение:

Первичный анализ условия задачи вызывает недоумение: как можно для *движущихся тел* использовать уравнения статики? Однако противоречие это кажущееся. В самом деле, как это отмечалось в разделе пособия 2.1, методы статики применимы для исследования равновесия механических систем, либо полностью находящихся в состоянии покоя, либо для систем, в состав которых помимо покоящихся тел входят движущиеся с постоянной скоростью материальные точки.

Груз Q (ведро с водой) совершает поступательное движение, следовательно, он может считаться материальной точкой. Кроме того, он движется равномерно, поэтому методы решения задач статики в данном случае вполне применимы.

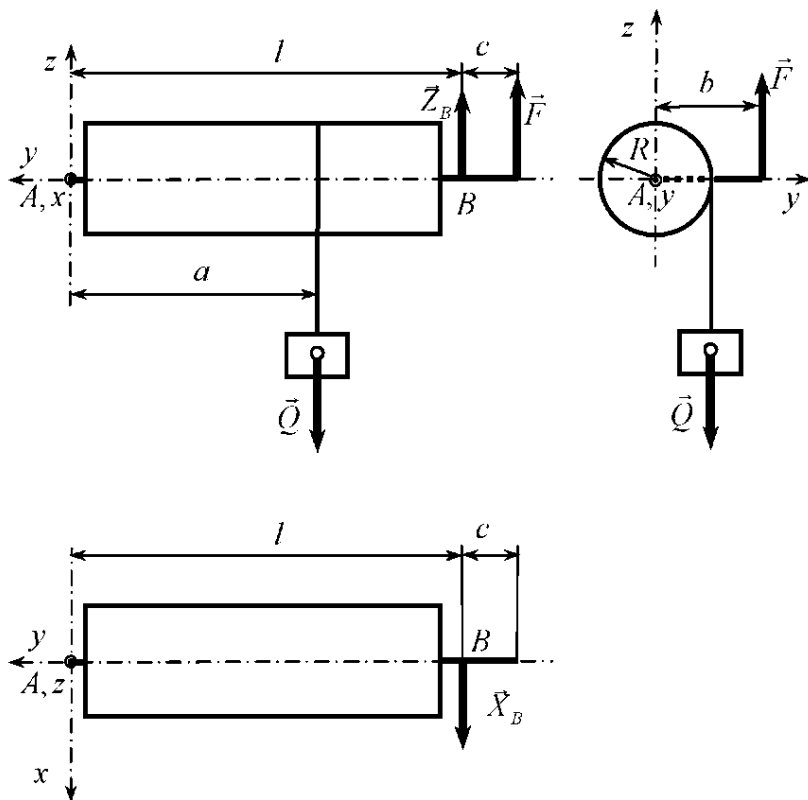
Рассмотрим равновесие механической системы, состоящей из механизма для подъёма груза Q и самого груза.

На эту систему действуют активные силы \vec{F} и \vec{Q} , а также составляющие реакций подпятника A и подшипника B . Выбрав, для удобства обозначения составляющих реакций подшипников и последующего составления уравнений равновесия координатные оси x , y и z , изобразим эти оси и эти силы на рисунке.



Перечисленные силы образуют произвольную пространственную систему сил, для которой можно записать шесть уравнений равновесия: три уравнения проекций сил на оси координат и три уравнения моментов сил относительно этих осей.

Для упрощения составления последних трех уравнений выполним три вида механизма со стороны положительных направлений осей. При этом, также как и предыдущем примере, силы, не дающие момента относительно соответствующей оси (параллельные ей или пересекающие её), изображать не будем.



Запишем уравнения равновесия и решим их.

$$\sum F_x = 0, \quad X_A + X_B = 0, \quad (a)$$

$$\sum F_y = 0, \quad Y_A = 0, \quad (b)$$

$$\sum F_Z = 0, \quad Z_A + Z_B - Q + F = 0, \quad (c)$$

$$\sum m_x(\vec{F}) = 0, \quad Z_B l + F(l + c) + Qa = 0, \quad (d)$$

$$\sum m_r(\vec{F}) = 0, \quad Fb - QR = 0, \quad (e)$$

$$\sum m_z(\vec{F}) = 0, \quad -X_B l = 0. \quad (f)$$

Из уравнения (f) найдём X_B .

$$X_B = 0.$$

Из уравнения (a) найдём X_A .

$$X_A = -X_B = 0.$$

Из уравнения (e) найдём F .

$$F = Q \frac{R}{b} = 120 \frac{0,2}{0,4} = 60H.$$

Из уравнения (d) найдём Z_B .

$$Z_B = -\frac{F(l + c) + Qa}{l} = -\frac{60(1,2 + 0,2) + 120 * 0,7}{1,2} = -140кН.$$

Из уравнения (c) найдём Z_A .

$$Z_A = -Z_B + Q - F = 140 + 120 - 60 = 200H.$$

Анализируя полученные результаты, можно отметить:

- 1) судя по знаку, направление силы \vec{Z}_B противоположно указанному на расчётной схеме;
- 2) учет результата $Y_A = X_A = X_B = 0$ означает, что на механизм в данном положении рукоятки действует пространственная система *параллельных* сил.

Пример 2.14. На звёздочку C шпиль¹³ AB весом P действуют силы натяжения бесконечной цепи, причем натяжение ведущей ветви цепи вдвое больше натяжения ведомой ветви. Ветви цепи составляют угол β с касательными к окружности звёздочки, проведёнными в точках касания. Шпиль удерживается в равновесии силой \vec{F} , приложенной к зубчатому колесу E , направленной под углом α к касательной, проведённой через точку приложения силы K . Определить силы натяжения ветвей цепи, а также реакции подпятника A и подшипника B . Размеры механизма (линейные и угловые) указаны на рисунке, а их численные значения – в данных к задаче.

Дано:

Решение:

$$P = 2кН$$

$$F = 3кН$$

$$T_1 = 2T_2$$

$$D_1 = 0,2 м$$

$$D_2 = 0,4 м$$

$$l_1 = 0,5 м$$

$$l_2 = 0,3 м$$

$$l_3 = 0,2 м$$

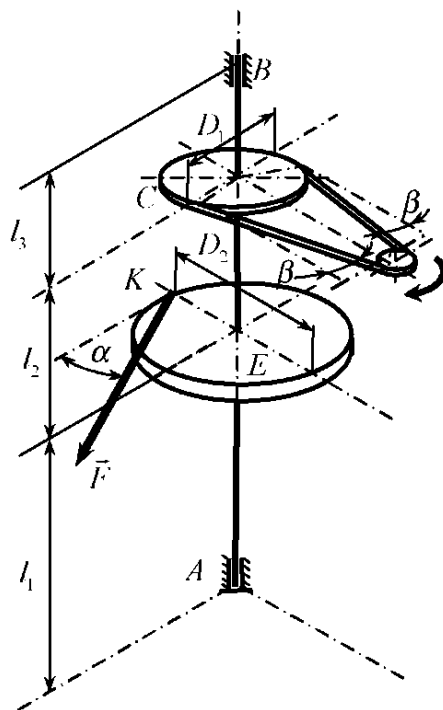
$$\alpha = 20^\circ$$

$$\beta = 30^\circ$$

Определить:

$$\vec{R}_A, \vec{R}_B,$$

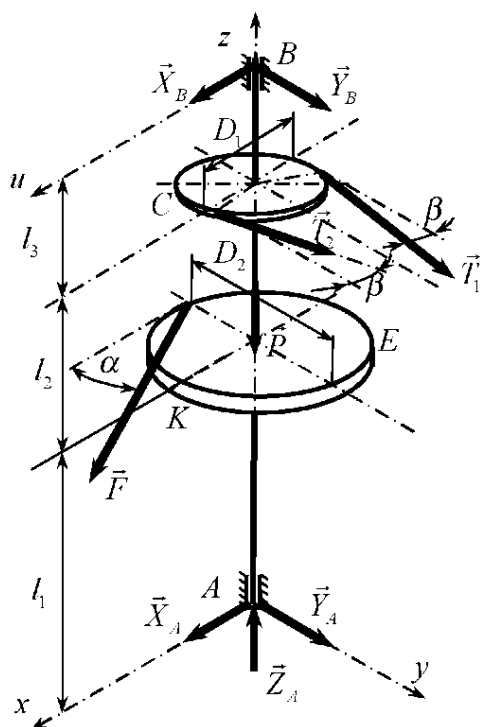
$$\vec{T}_1, \vec{T}_2.$$



Рассмотрим равновесие шпиль. На него действуют: вес \vec{P} , (включающий силы тяжести звёздочки, зубчатого колеса и других деталей

¹³ Шпилем (от гол. spij) называют, в частности, судовую лебёдку с вертикальным валом для работы с тросами и цепями.

шпиля), сила \vec{F} , реакции подпятника \vec{R}_A и подшипника \vec{R}_B , силы натяжения ведущей \vec{T}_1 и ведомой \vec{T}_2 ветвей цепи.

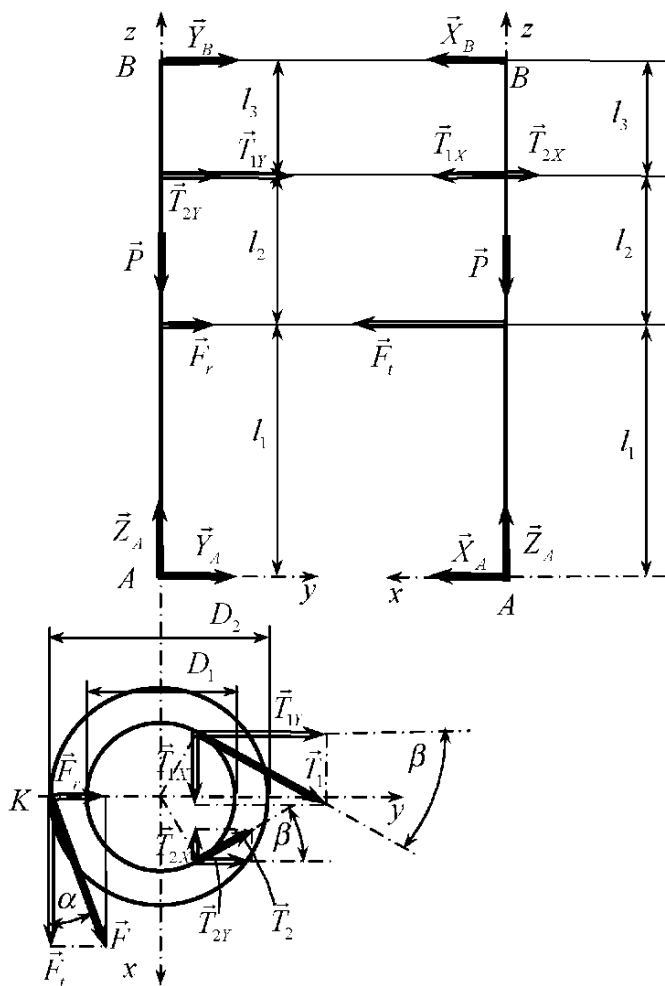


При изображении сил на расчётной схеме, как и ранее, реакции подпятника \vec{R}_A и подшипника \vec{R}_B , удобно будет представить их составляющими $(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A)$ и $(\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{Z}_B)$, выбрав предварительно, соответствующие оси координат.

Кроме того, следует отметить тот факт, что поскольку цепь как тип связи (нерастяжимая нить), являясь односторонней связью, может оказывать сопротивление лишь растяжению. обе ветви цепи натянуты, поэтому силы натяжения \vec{T}_1 и \vec{T}_2 ветвей цепи направлены ОТ звездочки.

Все эти силы образуют произвольную пространственную систему сил. Для такой системы сил можно записать шесть независимых уравнений равновесия: три уравнения проекций сил на оси координат и три уравнения моментов сил относительно этих осей.

Для того, чтобы проще составить уравнения моментов, выполним проекции шпиль с действующими на него силами на три плоскости (три вида механизма со стороны положительных направлений осей).



Кроме того, силу \vec{F} удобно разложить на радиальную¹⁴ и трансвер-

¹⁴ индексс - r

сальную¹⁵ (окружную) составляющие:

$$\vec{F}_r = \vec{F} \sin \alpha, \quad \vec{F}_l = \vec{F} \cos \alpha. \quad (a)$$

Силы \vec{T}_1 и \vec{T}_2 удобно разложить на составляющие по осям x и y :

$$\vec{T}_{1x} = \vec{T}_1 \sin \beta, \quad \vec{T}_{1r} = \vec{T}_1 \cos \beta. \quad (b)$$

$$\vec{T}_{2x} = \vec{T}_2 \sin \beta, \quad \vec{T}_{2r} = \vec{T}_2 \cos \beta. \quad (c)$$

(Согласно теореме Вариньона, момент равнодействующей некоторой системы сил относительно оси равен алгебраической сумме моментов сил системы относительно этой оси.)

Изобразив эти составляющие на вышеуказанных видах, запишем шесть уравнений равновесия, добавив к ним уравнение, связывающее величины сил \vec{T}_1 и \vec{T}_2 .

$$\sum F_x = 0, \quad X_A + X_B + T_{1x} - T_{2x} + F_t = 0, \quad (d)$$

$$\sum F_y = 0, \quad Y_A + Y_B + T_{1r} + T_{2r} + F_r = 0, \quad (e)$$

$$\sum F_z = 0, \quad Z_A - P = 0, \quad (f)$$

$$\sum m_x(\vec{F}) = 0, \\ -Y_B(l_1 + l_2 + l_3) - T_{1r}(l_1 + l_2) - T_{2r}(l_1 + l_2) - F_r l_1 = 0, \quad (h)$$

$$\sum m_y(\vec{F}) = 0, \\ X_B(l_1 + l_2 + l_3) + T_{1x}(l_1 + l_2) - T_{2x}(l_1 + l_2) + F_t l_1 = 0, \quad (i)$$

$$\sum m_z(\vec{F}) = 0, \quad F_t \frac{D_2}{2} + T_2 \frac{D_1}{2} - T_1 \frac{D_1}{2} = 0, \quad (j)$$

$$T_1 = 2T_2. \quad (k)$$

Решим полученную систему уравнений с учётом соотношений (a), (b), (c).

Из уравнения (f) найдём Z_A .

$$Z_A = P = 2kH.$$

Перепишав уравнение (j) с учётом (a) и (k), найдём значения T_1 и T_2 .

¹⁵ индекс - t

$$F \cos \alpha \frac{D_2}{2} + T_2 \frac{D_1}{2} - 2T_2 \frac{D_1}{2} = 0,$$

$$F \cos \alpha D_2 = T_2 D_1 \Rightarrow T_2 = F \frac{D_2}{D_1} \cos \alpha = 3 \frac{0,4}{0,2} \cos 20^\circ = 5,638 \text{ кН},$$

$$T_1 = 2T_2 = 2 * 5,683 = 11,276 \text{ кН}.$$

Из уравнения (i) с учётом (a), (b) и (k) найдём X_B .

$$\begin{aligned} X_B &= -\frac{(T_{1X} - T_{2X})(l_1 + l_2) + F l_1}{l_1 + l_2 + l_3} = \\ &= -\frac{(T_1 - T_2) \sin \beta (l_1 + l_2) + F l_1 \cos \alpha}{l_1 + l_2 + l_3} = \\ &= -\frac{T_2 \sin \beta (l_1 + l_2) + F l_1 \cos \alpha}{l_1 + l_2 + l_3} = \\ &= -\frac{5,638 * \sin 30^\circ * (0,5 + 0,3) + 3 * 0,5 * \cos 20^\circ}{0,5 + 0,3 + 0,2} = -3,665 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Из уравнения (d) найдём X_A .

$$\begin{aligned} X_A &= -X_B - T_{1X} + T_{2X} - F_x = -X_B - (T_1 - T_2) \sin \beta - F \cos \alpha = \\ &= -X_B - T_2 \sin \beta - F \cos \alpha = \\ &= 3,665 - 5,638 * \sin 30^\circ - 3 * \cos 20^\circ = -1,983 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Из уравнения (h) с учётом (a), (c) и (k) найдём Y_B .

$$\begin{aligned} Y_B &= -\frac{(T_{1Y} + T_{2Y})(l_1 + l_2) + F l_1}{l_1 + l_2 + l_3} = \\ &= -\frac{(T_1 + T_2) \cos \beta (l_1 + l_2) + F l_1 \sin \alpha}{l_1 + l_2 + l_3} = \\ &= -\frac{3T_2 \cos \beta (l_1 + l_2) + F l_1 \sin \alpha}{l_1 + l_2 + l_3} = \\ &= -\frac{3 * 5,638 * \cos 30^\circ * (0,5 + 0,3) + 3 * 0,5 * \sin 20^\circ}{0,5 + 0,3 + 0,2} = -12,231 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Из уравнения (e) найдём Y_A .

$$\begin{aligned} Y_A &= -Y_B - T_{1Y} - T_{2Y} - F_r = -Y_B - (T_1 + T_2)\cos\beta - F\sin\alpha = \\ &= -Y_B - 3T_2\cos\beta - F\sin\alpha = \\ &= 12,231 - 3 * 5,638 * \cos 30^\circ - 3 * \sin 20^\circ = -3,443 \text{ кН}. \end{aligned}$$

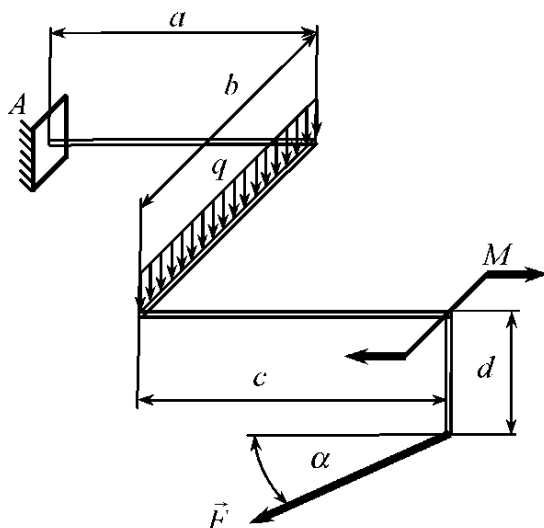
В качестве проверки составим ещё одно уравнение- уравнение моментов относительно оси u :

$$\begin{aligned} \sum m_u(\vec{F}_i) &= Y_A(l_1 + l_2 + l_3) + T_{1Y}l_3 + T_{2Y}l_3 + F_r(l_2 + l_3) = \\ &= Y_A(l_1 + l_2 + l_3) + 3T_2l_3\cos\beta + F(l_2 + l_3)\sin\alpha = \\ &= -3,443 * (0,5 + 0,3 + 0,2) + 3 * 5,638 * 0,2 * \cos 30^\circ + \\ &+ 3 * (0,3 + 0,2) * \sin 20^\circ = -3,443 + 3,3443 = 0. \end{aligned}$$

Анализируя результаты решения задачи, следует отметить, что любой методический приём – в данном случае, использование теоремы Вариньона при составлении уравнений моментов - должен быть применён осмысленно и целесообразно. Так, при составлении уравнений (h) и (i) силы \vec{T}_1 и \vec{T}_2 было удобно разложить на составляющие, а при составлении уравнения (j) - нет!

Обобщая сделанный вывод, необходимо напомнить, что результат решения задачи не зависит от выбранного исследователем метода её решения (разумеется, при корректном решении).

Пример 2.15. Определить реакцию заделки A пространственного ломаного бруса (пространственной незамкнутой рамы), нагруженного (нагруженной), сосредоточенной силой \vec{F} , равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q и парой сил с моментом M , как показано на расчетной схеме. Сила \vec{F} расположена в горизонтальной плоскости.



Дано:

$$F = 5 \text{ кН}$$

$$M = 8 \text{ кНм}$$

$$q = 2 \text{ кН/м}$$

$$a = 3 \text{ м}$$

$$b = 4 \text{ м}$$

$$c = 3,5 \text{ м}$$

$$d = 1,5 \text{ м}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Определить:

$$\vec{R}_A, \vec{M}_A.$$

Решение:

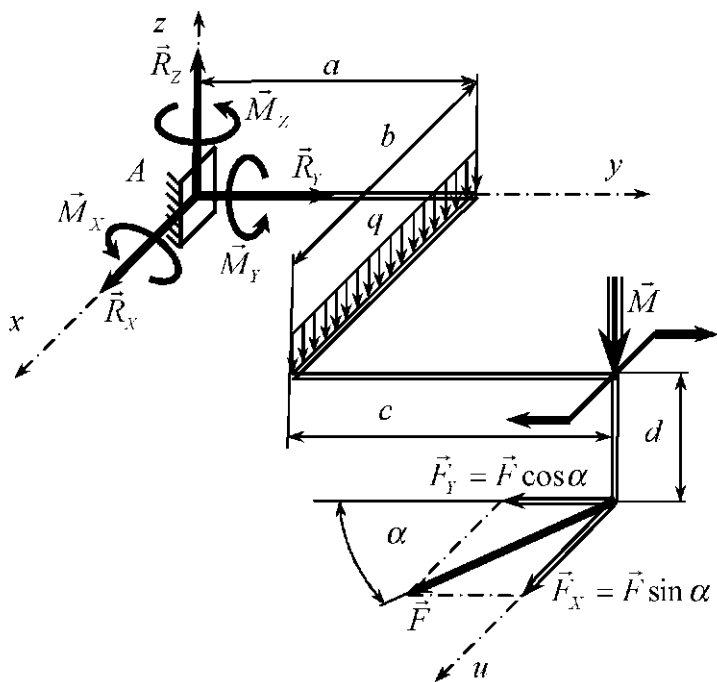
Рассмотрим равновесие ломаного бруса. На него действуют активные силовые факторы: сосредоточенная сила \vec{F} , равномерно распределенная нагрузка интенсивности q и пара сил с моментом M .

Связью для ломаного бруса является заделка A . Реакцией такого типа связи является, как известно, реактивная сила и реактивный момент (\vec{R}_A, \vec{M}_A). Однако в отличие от ранее рассмотренных примеров, поскольку брус находится под действием пространственной системы активных сил, реактивная сила и реактивный момент имеют по три составляющих: $\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$ и $\vec{M}_x, \vec{M}_y, \vec{M}_z$. Изображая составляющие реактивного вектора-момента заделки на рисунке, их часто представ-

стрелками, показывающими модули этих составляющих – реактивные моменты относительно трёх осей, а также направления этих моментов.

Изобразим на расчётной схеме все активные и реактивные силовые

факторы. Для удобства силу \vec{F} разложим на две составляющие, выбрав предварительно оси координат. Все эти силовые факторы образуют произвольную пространственную систему сил.



Для такой системы сил можно составить шесть независимых уравнений равновесия. Запишем эти уравнения. При этом будем учитывать, что равнодействующая равномерно распределенной нагрузки равна по величине произведению интенсивности нагрузки на длину соответствующего участка и приложена в середине этого участка. Сумму моментов сил пары относительно координатных осей будем вычислять как проекцию вектора-момента пары, перпендикулярного плоскости пары, на соответствующую ось.

$$\sum F_x = 0, \quad R_x + F \sin \alpha = 0, \quad (a)$$

$$\sum F_y = 0, \quad R_y - F \cos \alpha = 0, \quad (b)$$

$$\sum F_z = 0, \quad R_z - qb = 0, \quad (c)$$

$$\sum m_x(F) = 0, \quad M_x - qba - F \cos \alpha * d = 0, \quad (d)$$

$$\sum m_y(\vec{F}) = 0, \quad M_y + qb \frac{b}{2} - F' \sin \alpha * d = 0, \quad (e)$$

$$\sum m_z(\vec{F}) = 0, \quad M_z - M - F' \cos \alpha * b - F' \sin \alpha * (a + c) = 0. \quad (f)$$

Решим полученную систему уравнений.

Из уравнения (a) найдём R_x .

$$R_x = -F' \sin \alpha = -5 * \sin 30^\circ = -2,5 \text{ кН}.$$

Из уравнения (b) найдём R_y .

$$R_y = F' \cos \alpha = 5 * \cos 30^\circ = 4,330 \text{ кН}.$$

Из уравнения (c) найдём R_z .

$$R_z = qb = 2 * 4 = 8 \text{ кН}.$$

Из уравнения (d) найдём M_x .

$$M_x = qba + F'd \cos \alpha = 2 * 4 * 3 + 5 * 1,5 * \cos 30^\circ = 30,495 \text{ кНм}.$$

Из уравнения (e) найдём M_y .

$$M_y = -q \frac{b^2}{2} + F'd \sin \alpha = -2 \frac{4^2}{2} + 5 * 1,5 * \sin 30^\circ = -12,250 \text{ кНм}.$$

Из уравнения (f) найдём M_z .

$$\begin{aligned} M_z &= M + F'b \cos \alpha - F'(a + c) \sin \alpha = \\ &= 8 + 5 * 4 * \cos 30^\circ * b + 5 * (3 + 3,5) * \sin 30^\circ = 41,571 \text{ кН} \end{aligned}$$

Знаки указывают на то, действительные направления \vec{R}_x и M_z противоположны указанным на схеме.

В качестве проверки составим дополнительное уравнение моментов относительно оси u .

$$\begin{aligned} \sum m_x(\vec{F}) &= M_x + qbc - R_y d - R_z(a + c) = \\ &= 30,495 + 2 * 4 * 3,5 - 4,330 * 1,5 - 8 * (3 + 3,5) = \\ &= 58,495 - 58,495 = 0. \end{aligned}$$

что подтверждает правильность расчёта.

Следует заметить, что выполненный расчёт является первой, предварительной и необходимой ступенью расчётов конструкции на прочность, жесткость и устойчивость. Такие расчёты изучаются в курсе сопротивления материалов.

3. Центр тяжести твердого тела

3.1. Краткие сведения из теории

Определение 1. Центром параллельных сил называют точку на линии действия равнодействующей системы этих сил, вокруг которой поворачивается эта равнодействующая при одновременном повороте всех сил системы на один и тот же угол.

Из этого определения следует, что положение центра параллельных сил не зависит от ориентации сил в пространстве.

Определение 2. Центром тяжести твердого тела называют центр параллельных между собой сил тяжести отдельных частей этого тела¹⁶, а равнодействующую этих сил – весом¹⁷ тела.

Из последнего определения следует, что положение центра тяжести тела не зависит от ориентации его в пространстве.

Основной способом определения положения центра тяжести является применение метода разбиения. Для практической реализации идеи этого метода тело мысленно разбивают на части простой (элементарной) геометрической формы. При этом предполагается, что указанная простота (элементарность) этой части тела обусловлена возможностью найти положения центра тяжести этого элемента тела.

Алгоритм метода разбиения может быть реализован теоремами о симметрии¹⁸. формулами для подсчёта координат центров тяжести тел сложной формы, а также справочными данными о положении центров тяжести тел про-

¹⁶ Параллельность сил тяжести отдельных частей тела определена условиями реальной деятельности инженера. В самом деле, только для тел, размеры которого сопоставимы с размерами земного шара (например, полярной зимней «шанки» льдов), силы тяжести отдельных частей этого тела образуют сходящуюся в систему сил. Вероятность встречи инженера-практика с такими случаями в своей деятельности маловероятна. В противном случае может быть разработан иной физико-математический аппарат.

¹⁷ Приводимое здесь определение веса тела (традиционное для курсов теоретической механики в отечественной и зарубежных школах) не является вполне строгим. Авторы пособия это отчетливо осознают. Однако, в своей практической деятельности специалист, подготовленный для работы в промышленности (особенно специалист в области статки сооружений и конструкций), вряд ли будет иметь дело с невесомостью и другими аналогичными явлениями. Кроме того, задачи, в которых нагрузка на связи (в частности опорные устройства) изменяется за счёт движения элементов механической системы с ускорениями, рассматриваются в курсе динамики отдельно. В этих задачах динамики используется, как правило, фундаментальное понятие центра масс (центра инерции) механической системы.

Таким образом, понятия веса тела и силы тяжести тела авторы будут считать синонимами (по крайней мере, в рамках настоящего пособия).

¹⁸ Теоремы Паппы - 1 ульдена здесь не приводятся из-за малой вероятности потребности в них для инженера-практика.

стой формы. Некоторые из этих данных, необходимых для решения задач, приведены в разделе 3.3.

Теоремы о симметрии. Если однородное тело имеет ось (плоскость, центр) симметрии, то центр тяжести этого тела находится на этой оси (в этой плоскости, в этом центре).

Практическим выводом из приведённых выше теорем является рекомендация выбирать в качестве координатной оси ось симметрии. В этом случае координаты центра тяжести по отношению к другим осям будут равны нулю.

Формулы для подсчёта координат центров тяжести тел сложной формы с соответствующими пояснениями приведены ниже.

Для неоднородного тела

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\sum_{k=1}^n p_k x_k}{\sum_{k=1}^n p_k}, y_C = \frac{\sum_{k=1}^n p_k y_k}{\sum_{k=1}^n p_k}, z_C = \frac{\sum_{k=1}^n p_k z_k}{\sum_{k=1}^n p_k} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

При $n \rightarrow \infty$

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\iiint_P x * dp}{P}, y_C = \frac{\iiint_P y * dp}{P}, z_C = \frac{\iiint_P z * dp}{P} \end{aligned} \right\} \quad (3.1')$$

Для однородного тела

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\sum_{k=1}^n v_k x_k}{\sum_{k=1}^n v_k}, y_C = \frac{\sum_{k=1}^n v_k y_k}{\sum_{k=1}^n v_k}, z_C = \frac{\sum_{k=1}^n v_k z_k}{\sum_{k=1}^n v_k} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

При $n \rightarrow \infty$

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\iiint_V x * dv}{V}, y_C = \frac{\iiint_V y * dv}{V}, z_C = \frac{\iiint_V z * dv}{V} \end{aligned} \right\} \quad (3.2')$$

Для однородной пластины постоянной толщины и сечения твердого тела плоскостью (пластины нулевой толщины)

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n S_k x_k}{\sum_{k=1}^n S_k}, y_C = \frac{\sum_{k=1}^n S_k y_k}{\sum_{k=1}^n S_k}, z_C = \frac{\sum_{k=1}^n S_k z_k}{\sum_{k=1}^n S_k} \quad (3.3)$$

При $n \rightarrow \infty$

$$x_C = \frac{\iint x^* ds}{S}, y_C = \frac{\iint y^* ds}{S}, z_C = \frac{\iint z^* ds}{S} \quad (3.3')$$

Для тяжёлой однородной линии

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n l_k x_k}{\sum_{k=1}^n l_k}, y_C = \frac{\sum_{k=1}^n l_k y_k}{\sum_{k=1}^n l_k}, z_C = \frac{\sum_{k=1}^n l_k z_k}{\sum_{k=1}^n l_k} \quad (3.4)$$

При $n \rightarrow \infty$

$$x_C = \frac{\int x^* dl}{L}, y_C = \frac{\int y^* dl}{L}, z_C = \frac{\int z^* dl}{L} \quad (3.4')$$

В вышеприведённых формулах:

x_C, y_C, z_C - координаты центра тяжести C твердого тела;

x_k, y_k, z_k - координаты центров тяжести C_k элементов тела;

P_k, V_k, S_k, l_k - силы тяжести, объёмы, площади и длины элементов неоднородного тела, однородного тела, плоского сечения и тяжелой линии соответственно;

dp, dv, ds, dl - дифференциалы вышеуказанных величин;

x, y, z - координаты dp, dv, ds, dl соответственно;

$$P = \sum_{k=1}^n p_k \text{ - вес тела; } V = \sum_{k=1}^n v_k \text{ - объём тела;}$$

$$S = \sum_{k=1}^n s_k \text{ - площадь сечения; } L = \sum_{k=1}^n l_k.$$

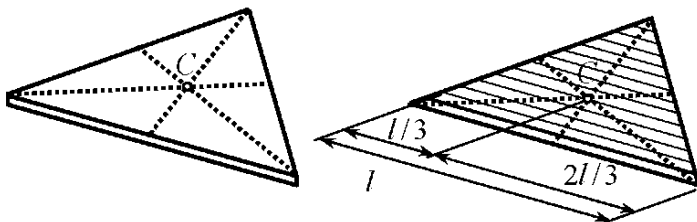
Числители правых частей в выражениях (3.1) – (3.4) называют статическими моментами сил тяжести, объёмов, длин, площадей соответственно.

3.2. Последовательность решения задач

1. Уяснить условие задачи, выполнить чертёж.
2. Выбрать произвольные (случайные) оси координат.
3. Мысленно разбить тело на части простой (элементарной) геометрической формы, для которых можно найти положения центров тяжести каждого из элементов тела.
4. Выразить координаты центров тяжести каждого из элементов тела по отношению к выбранной произвольной системе координат.
5. Исходя из физического смысла задачи, выбрать для её решения одну из групп формул ряда (3.1) – (3.4). В зависимости от выбора найти значения либо сил тяжести, либо объёмов, либо площадей, либо длин элементов тела. При этом силы тяжести (объёмы, площади) вырезом считаются отрицательными¹⁹.
6. Подсчитать по выбранной группе формул координаты центра тяжести всего тела. Изобразить этот центр тяжести на чертеже.
7. Проанализировать полученный результат, сделать выводы.

Справочные данные

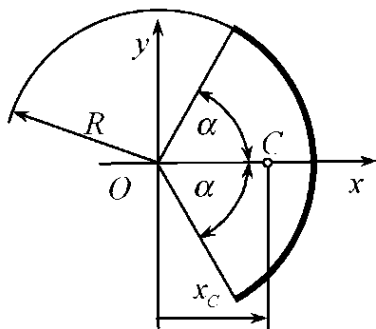
3.3.1. Центр тяжести однородной треугольной пластины и треугольного сечения.



¹⁹ Этот приём называют методом полостей (вырезов).

Центр тяжести находится на пересечении медиан, и находится, таким образом, на расстоянии двух третей от соответствующей вершины и одной трети от её основания.

3.3.2. Центр тяжести однородной дуги тяжелой окружности.



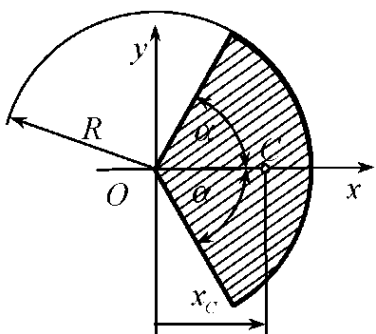
$$x_C = \frac{R \sin \alpha}{\alpha} \quad (3.5).$$

Для полуокружности

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \text{ тогда}$$

$$x_C = \frac{2R}{\pi} \quad (3.6').$$

3.3.3. Центр тяжести однородного кругового сектора.



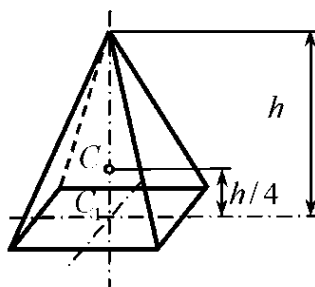
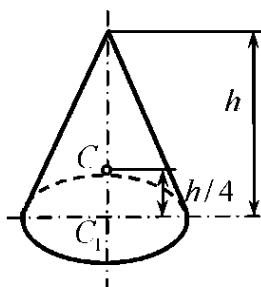
$$x_C = \frac{2 R \sin \alpha}{3 \alpha} \quad (4.5).$$

Для полукруга

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \text{ тогда}$$

$$x_C = \frac{4 R}{3 \pi} \quad (4.6').$$

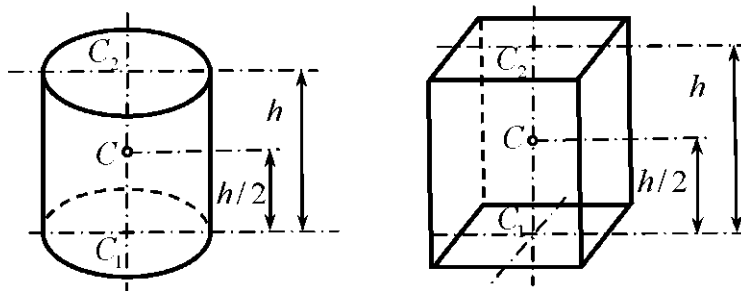
3.3.4. Центр тяжести однородных конуса и пирамиды.



Центр тяжести находится на отрезке прямой, соединяющей центр тяжести основания с вершиной, на расстоянии, составляющем четверть высоты фигуры, отсчитываемой от плоскости основания.

Это справедливо как для наклонных, так и для прямых тел.

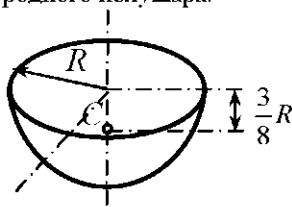
3.3.5. Центр тяжести однородных цилиндра и призмы.



Центр тяжести лежит в середине отрезке прямой, соединяющей центры тяжести оснований.

Это справедливо как для наклонных, так и для прямых тел.

3.3.6. Центр тяжести однородного полушара.



Центр тяжести находится на расстоянии $3R/8$ от диаметральной плоскости полушара.

Примеры

Пример 3.1. Горизонтальное сечение (план) тела плотины малой гидроэлектростанции представляет собой трапецию (одна из боковых сторон которой перпендикулярна основаниям) с вырезом в форме круга (отверстие предназначено для установки генератора).

Размеры элементов сечения в общем виде приведены на рисунке, а их численные значения – в данных к задаче.

Определить положение центра тяжести сечения.

Дано:

$$r = 1,6 \text{ м}$$

$$a = 7,2 \text{ м}$$

$$b = 3,4 \text{ м}$$

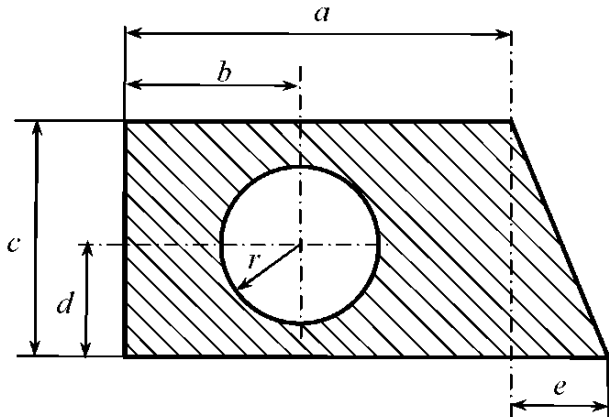
$$c = 4,9 \text{ м}$$

$$d = 2,4 \text{ м}$$

$$e = 1,2 \text{ м}$$

Определить:

$$x_C, y_C.$$



Решение:

Выберём оси координат xOy .

Мысленно разобьём сечение на три тела простой формы: прямоугольник 1, круг 2 и треугольник 3, при этом, решая задачу, будем учитывать, что круг 2 является *вырезом*.

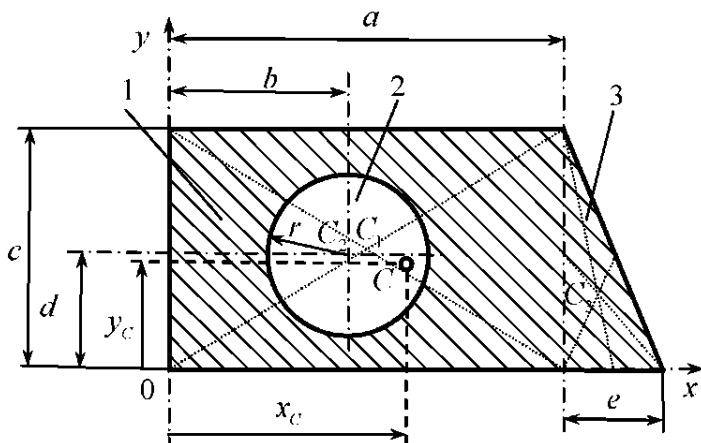
Выразим координаты центров тяжести (C_1 , C_2 и C_3) указанных тел.

Центр тяжести прямоугольника C_1 является его центром симметрии, тогда

$$x_1 = \frac{a}{2}, \quad y_1 = \frac{c}{2}. \quad (a)$$

Центр тяжести круга C_2 является также его центром симметрии, тогда

$$x_2 = b, \quad y_2 = d. \quad (b)$$



Центр тяжести треугольника C_3 находится на пересечении медиан, и находится, таким образом, на расстоянии двух третей от соответствующей вершины и одной трети от её основания. Тогда

$$x_3 = a + \frac{e}{3}, \quad y_3 = \frac{c}{3}. \quad (c)$$

Для ответа на вопрос задачи выбираем группу формул (3.3). При этом для плоского сечения имеет смысл использование первых двух формул:

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\sum_{k=1}^n S_k x_k}{\sum_{k=1}^n S_k}, & y_C &= \frac{\sum_{k=1}^n S_k y_k}{\sum_{k=1}^n S_k} \end{aligned} \right\}$$

Применительно к данной задаче последние выражения могут быть переписаны в виде:

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\sum_{k=1}^3 S_k x_k}{\sum_{k=1}^3 S_k} = \frac{s_1 x_1 - s_2 x_2 + s_3 x_3}{s_1 - s_2 + s_3}, \\ y_C &= \frac{\sum_{k=1}^3 S_k y_k}{\sum_{k=1}^3 S_k} = \frac{s_1 y_1 - s_2 y_2 + s_3 y_3}{s_1 - s_2 + s_3}. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Знак минус при s_2 означает наличие выреза.

Найдём значения соответствующих площадей.

Площадь прямоугольника

$$s_1 = ac. \quad (e)$$

Площадь круга

$$s_2 = \pi r^2. \quad (f)$$

Площадь треугольника

$$s_3 = \frac{1}{2}ce. \quad (h)$$

Подставив выражения (a), (b), (c), (e), (f), (h) в формулы (d), подсчитаем координаты центра тяжести сечения.

$$\left. \begin{aligned}
 x_c &= \frac{c \frac{a^2}{2} - \pi r^2 b + \frac{ce}{2} \left(a + \frac{e}{3} \right)}{ac - \pi r^2 + \frac{ce}{2}} = \\
 &= \frac{4,9 \frac{7,2^2}{2} - 3,14 * 1,6^2 * 3,4 + \frac{4,9 * 1,2}{2} \left(7,2 + \frac{1,2}{3} \right)}{7,2 * 4,9 - 3,14 * 1,6^2 + \frac{4,9 * 1,2}{2}} = 4,043 м; \\
 y_c &= \frac{a \frac{c^2}{2} - \pi r^2 d + \frac{c^2 e}{6}}{ac - \pi r^2 + \frac{ce}{2}} = \\
 &= \frac{7,2 \frac{4,9^2}{2} - 3,14 * 1,6^2 * 2,4 + \frac{4,9^2 * 1,2}{6}}{7,2 * 4,9 - 3,14 * 1,6^2 + \frac{4,9 * 1,2}{2}} = 2,384 м.
 \end{aligned} \right\}$$

Изобразим центр тяжести сечения на рисунке.

Найденные значения координат центра тяжести сечения могут быть использованы для прочностных расчётов.

Пример 3.2. Установленный на детской площадке грибок, представляет собой полушарие, закреплённое на вертикальном столбе цилиндрической формы. Конструкция жёстко соединена с фундаментом. Схема её и размеры в общем виде приведены на рисунке, а их численные значения – в данных к задаче.

Элементы конструкции выполнены из одного однородного материала.

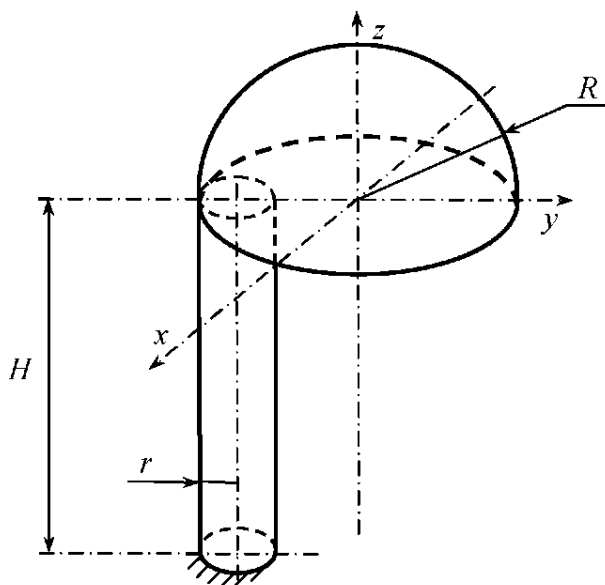
Определить положение центра тяжести конструкции.

Дано:

$$R = 0,6\text{ м}, \quad r = 0,125\text{ м}, \quad H = 1,6\text{ м};$$

Определить:

$$x_C, y_C.$$



Выберём оси координат x, y, z . Очевидно, что плоскость yz является для всей конструкции плоскостью симметрии, поэтому центр тяжести C конструкции в этой плоскости. Тогда $x_C = 0$. Кроме того, в силу указанной симметрии представляется удобным отказаться от аксонометрии, а дать вид со стороны оси x .

Мысленно разобьём конструкцию на два тела простой формы: полушарие 1 и цилиндр 2.

Выразим координаты центров тяжести (C_1 и C_2) указанных тел.

Центр тяжести C_1 полушария лежит на его оси симметрии и находится на расстоянии $3R/8$ от диаметральной плоскости. Таким образом

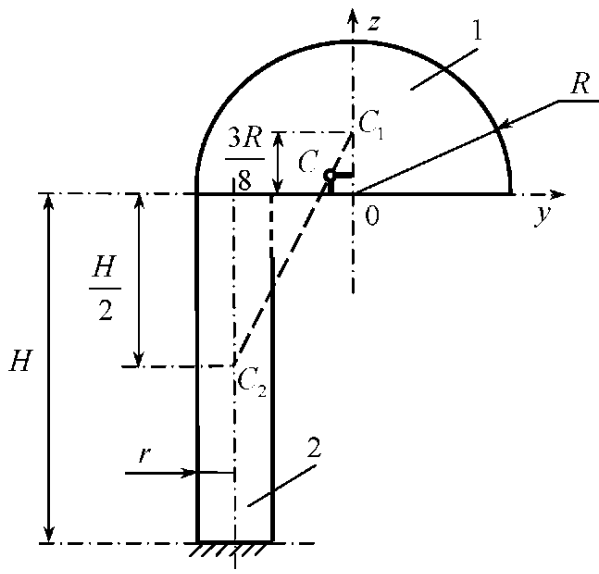
$$y_1 = 0, \quad z_1 = \frac{3R}{8}. \quad (a)$$

Центр тяжести C_2 цилиндра также, лежит на его оси симметрии и находится на расстоянии $H/2$ от каждого из оснований. Таким образом

$$y_2 = -(R-r), \quad z_2 = -\frac{H}{2}. \quad (b)$$

Для ответа на вопрос задачи выбираем группу формул (3.2). Поскольку значение $x_C = 0$ уже найдено, достаточно использовать только две формулы из трёх:

$$y_C = \frac{\sum_{k=1}^n v_k y_k}{\sum_{k=1}^n v_k}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n v_k z_k}{\sum_{k=1}^n v_k} \left. \right\}$$



Применительно к данной задаче последние выражения могут быть переписаны в виде:

$$\left. \begin{aligned} y_C &= \frac{\sum_{k=1}^2 v_k y_k}{\sum_{k=1}^2 v_k} = \frac{v_1 y_1 + v_2 y_2}{v_1 + v_2}, \\ z_C &= \frac{\sum_{k=1}^2 v_k z_k}{\sum_{k=1}^2 v_k} = \frac{v_1 z_1 + v_2 z_2}{v_1 + v_2}. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Найдём значения соответствующих объёмов.

Объём полушария

$$v_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3. \quad (d)$$

Объём цилиндра

$$v_2 = \pi r^2 H. \quad (e)$$

Подставив выражения (a), (b), (d), (e) в формулы (c), подсчитаем координаты центра тяжести конструкции.

$$\begin{aligned}
 y_c &= \frac{\frac{2}{3}\pi R^3 * 0 - \pi r^2 H(R-r)}{\frac{2}{3}\pi R^3 + \pi r^2 H} = -\frac{r^2 H(R-r)}{\frac{2}{3}R^3 + r^2 H} = \\
 &= -\frac{0,125^2 * 1,6 * (0,6 - 0,125)}{\frac{2}{3}0,6^3 + 0,125^2 * 1,6} = -0,0703\text{ м}, \\
 z_c &= \frac{\frac{2}{3}\pi R^3 \frac{3}{8}R - \pi r^2 H \frac{H}{2}}{\frac{2}{3}\pi R^3 + \pi r^2 H} = \frac{\frac{1}{4}R^4 - \frac{r^2}{2}H^2}{\frac{2}{3}R^3 + r^2 H} = \\
 &= \frac{\frac{1}{4}0,6^4 - \frac{0,125^2}{2}1,6^2}{\frac{2}{3}0,6^3 + 0,125^2 * 1,6} = 0,0633\text{ м}.
 \end{aligned}$$

Изобразим центр тяжести сечения на рисунке.

Анализируя полученный результат, путём несложных рассуждений можно прийти к следующему выводу. Центр тяжести C конструкции находится на отрезке прямой, соединяющей центры тяжести полушария C_1 и цилиндра C_2 , и делит этот отрезок на части, обратно пропорциональные объёмам этих тел (внутренним образом).

Пример 3.3. Демонстрационная модель гранецентрированной октаэдрической кристаллической решётки анизотропного металлического сплава, иллюстрирующая результат неоднородного температурного воздействия, представляет собой 14 шаров, соединённых стержнями.

Шары расположены в вершинах прямоугольного параллелепипеда и в серединах его граней. Зная размеры опоясывающего параллелепипеда модели ($30 \times 25 \times 25\text{ см}$), пренебрегая весом стержней, найти положение тяжести указанной модели. Номера шаров приведены на рисунке, а значения их сил тяжести - в данных к задаче²⁰.

²⁰ Схема вышеуказанной модели кристаллической решётки взята из учебника Арзамасова Б.Н. «Материаловедение», Москва, «Машиностроение», 1986, стр. 11.

Дано:

$$p_1 = 0,16H$$

$$p_2 = 0,16H$$

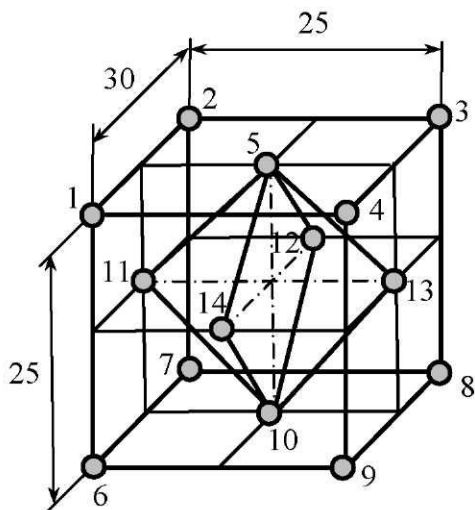
$$p_3 = 0,2H$$

$$p_4 = 0,2H$$

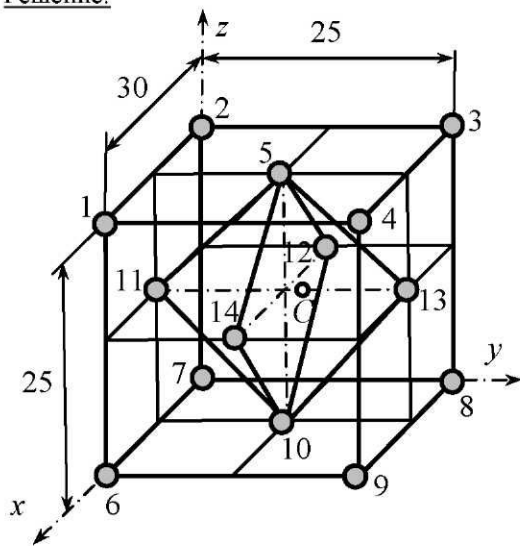
$$p_5 = 0,17H$$

$$p_6 = 0,16H$$

$$p_7 = 0,16H$$



Решение:



Определить:

$$x_C, y_C, z_C.$$

Выберём оси координат xuz .

Разбивка конструкции на тела простой формы обусловлена условиями задачи: силы тяжести элементов конструкции приложены в шарах.

Исходя из физического смысла задачи, выбираем для решения группу формул (3.1). Применительно к условию задачи они могут быть записаны в виде:

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\sum_{k=1}^{14} p_k x_k}{\sum_{k=1}^{14} p_k}, y_C = \frac{\sum_{k=1}^{14} p_k y_k}{\sum_{k=1}^{14} p_k}, z_C = \frac{\sum_{k=1}^{14} p_k z_k}{\sum_{k=1}^{14} p_k} \end{aligned} \right\} (a)$$

Записанные в развернутом виде эти формулы достаточно громоздки; громоздкими являются и последующие выкладки, записанные в традиционной форме. В практической деятельности специалистов – расчётчиков принято такие расчёты оформлять в виде таблиц.

Особенно удобны для этого электронные таблицы, позволяющие проводить и все необходимые вычисления. Пойдём этим путём²¹.

k	p_k	x_k	y_k	z_k	p_kx_k	p_ky_k	p_kz_k
	<i>H</i>	<i>см</i>	<i>см</i>	<i>см</i>	<i>Hсм</i>	<i>Hсм</i>	<i>Hсм</i>
1	0,16	30	0	25	4,8	0	4
2	0,16	0	0	25	0	0	4
3	0,2	0	25	25	0	5	5
4	0,2	30	25	25	6	5	5
5	0,17	15	12,5	25	2,55	2,125	4,25
6	0,16	30	0	0	4,8	0	0
7	0,16	0	0	0	0	0	0
8	0,2	0	25	0	0	5	0
9	0,2	30	25	0	6	5	0
10	0,17	15	12,5	0	2,55	2,125	0
11	0,18	15	0	12,5	2,7	0	2,25
12	0,2	0	12,5	12,5	0	2,5	2,5
13	0,22	15	25	12,5	3,3	5,5	2,75
14	0,2	30	12,5	12,5	6	2,5	2,5
Σ	2,58				38,7	34,75	32,25

Используя формулы (a), получим окончательно:

²¹ В данном случае используется Microsoft Office Excel 2003.

X_c	Y_c	Z_c
CM	CM	CM
15	13,469	12,5

Изобразим центр тяжести модели на рисунке.

Анализируя решение задачи, можно сделать следующие выводы.

Использование электронных таблиц значительно уменьшило громоздкость записей и существенно упростило вычисления.

Однако следует понимать, что различные электронные средства - это лишь *инструмент* для решения задач механики (хотя и очень мощный).

Библиографический список

1. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Под редакцией Джанелидзе Г.Ю. и Меркина Д.Р. Том первый. Статика и кинематика. Издание шестое, стереотипное. «Наука», Москва, 1972.
2. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Под редакцией Джанелидзе Г.Ю. и Меркина Д.Р. Том второй. Динамика. Издание пятое, стереотипное. «Наука», Москва, 1972.
3. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Под редакцией Джанелидзе Г.Ю. и Меркина Д.Р. Том третий. Специальные главы механики. Издание шестое, стереотипное. «Наука», Москва, 1973.
4. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Том первый - статика и кинематика. Издание восьмое, переработанное и дополненное. «Наука», Москва, 1972.
5. Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников А.Л. Курс теоретической механики. Издание 3-е, переработанное и дополненное. «Высшая школа», Москва, 1974.
6. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики, «Высшая школа», Москва, 1986, 1995.
7. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. Москва, «Наука», 1986.
8. Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. «Высшая школа», Москва, 1985.
9. Бельтюков В.П. и др. п/р Сигаева Н.П. Теоретическая механика. Методические указания по выполнению курсовых работ. Часть I. Статика. Новомосковск, 1983.
10. Сигаев Н.П., Лысюк А.Я. Решение задач статики. Учебное пособие по теоретической механике. Новомосковск, 2000.

Приложения

Приложение 1

Связь между технической и международной системами измерения

Ниже в виде таблицы приведены единицы измерения основных механических величин (включая внесистемные единицы - **ВНЕ**).

Величина (обозначение)	Единицы измерения				Соотношение между единицами
	SI (международная)		МКГС (техническая)		
	Наименование	Размерность (обозначение)	Наименование	Размерность (обозначение)	
1	2	3	4	5	6
Длина	метр	<i>м</i> , м	метр	<i>м</i> , м	
Время	секунда	<i>с</i> , с	секунда	<i>с</i> , с	
Масса	килограмм	<i>кг</i> , кг	<i>т.е.м.</i> (инергуст.)	<i>кГ</i> $c^2 / м$	$1 \text{ т.е.м.} = 9,81 \text{ кг}$
Сила	Ньютон	<i>Н</i> , Н	килограмм силы	<i>кГ</i> , кГ, <i>ксс</i> , ксс	$1 \text{ кГ} \approx 9,81 \text{ Н}$
Угол	радиан	<i>рад</i> , рад ВНЕ-градус	радиан	<i>рад</i> , рад ВНЕ-градус	$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад}$
Угловая скорость (ω)	радиан в секунду	<i>рад/с</i> ($1/c, c^{-1}$) <i>рад/с⁻¹</i> , ($1/c, c^{-1}$)	радиан в секунду ВНЕ-число оборотов в минуту	<i>рад/с</i> ($1/c, c^{-1}$) <i>об/мин</i> (<i>n</i>)	$\omega = \frac{\pi n}{30}$
Угловое ускорение	радиан в секунду в квадрате (радиан в секунду за секунду)	<i>рад/с²</i> , ($1/c^2, c^{-2}$) <i>рад/с²</i> , ($1/c, c^{-2}$)	радиан в секунду в квадрате (радиан в секунду за секунду)	<i>рад/с²</i> , <i>рад/с²</i> , ($1/c^2, c^{-2}$) ($1/c, c^{-2}$)	
Площадь	кв. метр	<i>м²</i> , м ²	кв. метр	<i>м²</i> , м ²	
Объем	куб. метр	<i>м³</i> , м ³	куб. метр	<i>м³</i> , м ³	
Работа, энергия	Джоуль	<i>Дж</i> , Дж <i>Джс</i> <i>Им</i>	килограмм- мометр	<i>кГм</i> , кГм	$1 \text{ кГм} = 9,81 \text{ Дж}$

1	2	3	4	5	6
Мощность	Ватт	<i>Вт, Вт</i> <i>Вт Дж/с</i>	килограммометр в секунду ВНЕ- лопадинная сила	<i>кгм/с,</i> <i>кгм/с</i> <i>л.с., л.с.</i>	<i>1 кгм/с</i> <i>=9,81Вт</i> ВНЕ- <i>1 л.с. =</i> <i>=75 кгм/с</i> <i>= 0,736 кВт</i> <i>1 кВт</i> <i>=1,36л.с.</i>
Давление, механическое напряжение	Паскаль	<i>Па, Па</i> <i>Па =Н/м²</i>	ВНЕ- атмосфера техническая	<i>кгм²</i> <i>1 ат</i> <i>(атм)=</i> <i>1 кг/см²</i>	<i>1 кгм²=</i> <i>=9,81 Па</i> ВНЕ- <i>1 кг/см²=</i> <i>=1 ат=</i> <i>=0,981*10⁵Па=</i> <i>≈0,1 МПа</i>

Отдельные распространённые алфавиты

Поскольку современному специалисту приходится работать и с иностранной литературой, по просьбе студентов приводятся отдельные распространённые алфавиты. Кроме того, произношение многих букв различных алфавитов, имеющих в своей основе латинский шрифт, отражающих обозначения физических величин, фамилии учёных, термины и т.д. могут различаться по ряду причин (в первую очередь - исторических). Это иногда приводит к дополнительным трудностям для студентов, изучающих учебные дисциплины, в которых широко используются обозначения, взятые из латиницы. Поэтому здесь приводятся отдельные алфавиты с русскими названиями соответствующих букв. Названия эти, естественно, не претендуют на звуковую транскрипцию - произношение.

Греческий алфавит

$A\alpha$	альфа	$N\nu$	ни (ню)
$B\beta$	бэ́та	$\Xi\xi$	кси
$\Gamma\gamma$	гамма	Oo	омикрон
$\Delta\delta$	дельта	$\Pi\pi$	пи
$E\varepsilon$	э́псилон	$\rho\rho$	ро
$Z\zeta$	дзэ́та	$\Sigma\sigma$	сигма
$\eta\eta$	э́та	$T\tau$	тау
$\Theta\theta$	тэ́та	Yy	ипсилон
$I\iota$	йота	$\Phi\phi$	фи
$K\kappa$	ка́ппа	$X\chi$	хи
$\Lambda\lambda$	ла́мбда (лямбда)	$\Psi\psi$	пси
$M\mu$	ми (мю)	$\Omega\omega$	омега

Латинский алфавит

<i>A a</i>	а	<i>N n</i>	эн
<i>B b</i>	бэ	<i>O o</i>	о
<i>C c</i>	цэ	<i>P p</i>	пэ
<i>D d</i>	дэ	<i>Q q</i>	ку
<i>E e</i>	э	<i>R r</i>	эр
<i>F f</i>	эф	<i>S s</i>	эс
<i>G g</i>	гэ (жэ)	<i>T t</i>	тэ
<i>H h</i>	ха (аш)	<i>U u</i>	у
<i>I i</i>	и	<i>V v</i>	вэ
<i>J j</i>	йот (жи)	<i>W w</i>	дубль-вэ
<i>K k</i>	ка	<i>X x</i>	икс
<i>L l</i>	эль	<i>Y y</i>	игрек
<i>M m</i>	эм	<i>Z z</i>	зэт

Английский алфавит

<i>A a</i>	эй	<i>N n</i>	эн
<i>B b</i>	би	<i>O o</i>	оу
<i>C c</i>	си	<i>P p</i>	пи
<i>D d</i>	ди	<i>Q q</i>	кью
<i>E e</i>	и	<i>R r</i>	а
<i>F f</i>	эф	<i>S s</i>	эс
<i>G g</i>	джи	<i>T t</i>	ти
<i>H h</i>	эйч	<i>U u</i>	ю
<i>I i</i>	ай	<i>V v</i>	ви
<i>J j</i>	джей	<i>W w</i>	дабл-ю
<i>K k</i>	кэй	<i>X x</i>	экс
<i>L l</i>	эл	<i>Y y</i>	вай
<i>M m</i>	эм	<i>Z z</i>	зэд

Немецкiй алфавит

<i>A a</i>	а	<i>N n</i>	ЭН
<i>B b</i>	бэ	<i>O o</i>	о
<i>C c</i>	цэ	<i>P p</i>	пэ
<i>D d</i>	дэ	<i>Q q</i>	ку
<i>E e</i>	э	<i>R r</i>	эр
<i>F f</i>	эф	<i>S s</i>	эс
<i>G g</i>	гэ	<i>T t</i>	тэ
<i>H h</i>	ха	<i>U u</i>	у
<i>I i</i>	и	<i>V v</i>	фау
<i>J j</i>	йот	<i>W w</i>	вэ
<i>K k</i>	ка	<i>X x</i>	икс
<i>L l</i>	эль	<i>Y y</i>	ипсилон
<i>M m</i>	эм	<i>Z z</i>	цэт

Французскiй алфавит

<i>A a</i>	а	<i>N n</i>	ЭН
<i>B b</i>	б	<i>O o</i>	о
<i>C c</i>	сэ	<i>P p</i>	пэ
<i>D d</i>	дэ	<i>Q q</i>	кю
<i>E e</i>	оё	<i>R r</i>	эр
<i>F f</i>	эф	<i>S s</i>	эс
<i>G g</i>	жэ	<i>T t</i>	тэ
<i>H h</i>	аш	<i>U u</i>	у
<i>I i</i>	и	<i>V v</i>	в
<i>J j</i>	жи	<i>W w</i>	в
<i>K k</i>	ка	<i>X x</i>	икс
<i>L l</i>	эль	<i>Y y</i>	игрек
<i>M m</i>	эм	<i>Z z</i>	зэт

Итальянский алфавит

<i>A a</i>	а	<i>P p</i>	пи
<i>B b</i>	би	<i>R r</i>	эrrэ
<i>C c</i>	чи	<i>Q q</i>	ку
<i>D d</i>	ди	<i>S s</i>	эссэ
<i>E e</i>	э	<i>T t</i>	ти
<i>F f</i>	эффэ	<i>U u</i>	у
<i>G g</i>	джи	<i>V v</i>	ву
<i>H h</i>	акка	<i>Z z</i>	дзета
<i>I i</i>	и	<i>J j</i>	и лунга
<i>L l</i>	эллэ	<i>K k</i>	каппа
<i>M m</i>	эммэ	<i>W w</i>	дуппио ву
<i>N n</i>	эnnэ	<i>X x</i>	икс
<i>O o</i>	о	<i>Y y</i>	ипсилон

Испанский алфавит

<i>A a</i>	а	<i>M m</i>	эмс
<i>B b</i>	бэ	<i>N n</i>	энс
<i>C c</i>	сэ	<i>Ñ ñ</i>	энье
<i>Ch ch</i>	че	<i>O o</i>	о
<i>D d</i>	дэ	<i>P p</i>	пэ
<i>E e</i>	э	<i>Q q</i>	ку
<i>F f</i>	эфе	<i>R r</i>	эrrэ
<i>G g</i>	хе	<i>S s</i>	эсс
<i>H h</i>	аче	<i>T t</i>	тэ
<i>I i</i>	и	<i>U u</i>	у
<i>J j</i>	хота	<i>V v</i>	увэ
<i>K k</i>	ка	<i>X x</i>	эксис
<i>L l</i>	эле	<i>Y y</i>	и гриега
<i>ll ll</i>	эльс	<i>Z z</i>	эста

Оглавление

Предисловие.....	3
Введение.....	5
1. Реакции связей.....	6
1.1. Связи и их реакции.....	6
1.2. Основные типы связей.....	6
2. Решение основных задач статики.....	11
2.1. Краткие сведения из теории.....	11
2.2. Последовательность решения задач.....	16
2.3. Примеры.....	17
2.3.1. Система сил, сходящихся в одной точке.....	17
2.3.2. Плоская система параллельных сил.....	26
2.3.3. Произвольная плоская система сил.....	33
2.3.4. Равновесие с учётом сил трения.....	41
2.3.5. Произвольная пространственная система сил.....	49
3. Центр тяжести твердого тела.....	65
3.1. Краткие сведения из теории.....	65
3.2. Последовательность решения задач.....	68
3.3. Справочные данные.....	68
3.4. Примеры.....	71
3.5. Заключение.....	81
Библиографический список.....	82
Приложения.....	83