**ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**
**КИНЕМАТИКА. ДИНАМИКА.**

Методическое пособие для
студентов заочной формы обучения

## *Предисловие.*

Предлагаемое учебное пособие предназначено для организации самостоятельной и аудиторной работы на лекционных и практических занятиях по курсу общей физики со студентами физико-математического факультета педагогического института, обучающихся по нефизической специальности, например, «информатика с дополнительной специальностью математика», а также студентов заочных отделений, в программу обучения которых включен курс общей физики. Оно написано по разделу “Механика” в соответствии с государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования для указанных специальностей и является обобщением многолетнего опыта работы авторов-составителей. Материал распределен по пяти основным темам, изучаемым в данном разделе курса общей физики: 1) кинематика материальной точки и вращательного движения твердого тела; 2) динамика материальной точки; 3) динамика системы материальных точек, законы сохранения; 4) механика твердого тела; 5) механические колебания и волны. По каждой теме, во-первых, достаточно подробно приведен теоретический материал, позволяющий использовать пособие в качестве конспектов для подготовки к экзаменам или зачетам, во-вторых, имеются примеры решения типовых задач, и в-третьих, набор задач для самостоятельного решения, позволяющий использовать пособие для подготовки письменных контрольных работ.

Пособие не исключает работу с учебниками и задачниками для вузов, более того, ряд вопросов в него не вошли в связи с дефицитом аудиторного времени и ограниченными возможностями данного пособия. Например, такие темы, как механика жидкости и газа, движение в неинерциальных системах отсчета предполагается в учебном процессе отвести на самостоятельное изучение или обсуждение на занятиях спецкурсов.

## 1. Предмет физики. Основная задача механики.

Мир представляет собой совокупность материальных объектов, находящихся в постоянном взаимодействии и непрерывном движении. Все, что нас окружает, называется материей. Это не только вещество (в твердом, жидком, газообразном состоянии), но вообще все, что находится вне нашего сознания. Например, силовые поля – поле тяготения, электромагнитное поле, поле ядерных сил – также являются различными формами материи. *Материя* познается через наши ощущения. Иногда восприятие материи может осуществляться не только непосредственно нашими органами чувств, но и с помощью различного вида приборов.

Всякое изменение материи называется *движением*. Оно понимается не только как механическое перемещение тел в пространстве, но и как всякий происходящий в природе процесс: физический, химический, биологический, общественный. Движение является формой существования материи. Движение материи может происходить только в пространстве и во времени.

Место расположения объектов материального мира составляет содержание понятия **пространство**. Длительность и последовательность изменения окружающего нас мира составляет содержание понятия **времени**.

Материя не может находиться вне пространства и времени, пространство и время являются взаимосвязанными формами существования материи. Для измерения пространства и времени вводятся единицы и величины длины и времени. В СИ: 1 *м* – длина, в которой укладывается определенное число раз (1.650.763.730) длина волны оранжевых лучей, испускаемых атомом криптона в вакууме; 1 *с* – интервал времени, в течение которого совершается определенное число (9.192.631.770) колебаний, соответствующих частоте излучения атома цезия 133.

Каждая наука занимается изучением определенных форм движения материи. Науки, изучающие разные формы движения, называются естественными. Физика – одна из естественных наук. «Физика» – по-гречески «природа», то есть физика изучает свойства окружающего нас мира, строение и свойства материи, законы взаимодействия и движения материальных тел. **Физика** занимается изучением физической формы движения материи, под которым понимают механическое, тепловое, электромагнитное, внутриатомное, внутриядерное движения. Соответственно формам движения физика делится на разделы: механика, молекулярная физика, электродинамика, оптика, квантовая физика. В этом семестре мы будем изучать механику.

**Механика** – это раздел физики, в котором изучается движение тел в пространстве и во времени. То, что механические явления протекают в пространстве и во времени, находит отражение в любом механическом законе. Изучая характер движения тел, мы тем самым познаем свойства пространства и времени.

***Основная задача механики*** состоит в изучении различных движений и обобщении полученных результатов в виде законов движения, с помощью которых может быть предсказан характер движения в каждом конкретном случае.

Решение этой задачи привело к установлению законов кинематики и динамики, а также к обнаружению законов сохранения энергии, импульса, момента импульса.

## Тема 1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

### 2. Модели в механике. Система отсчета. Материальная точка. Траектория, длина пути. Вектор перемещения.

*Механическое движение* – изменение положения тела относительно других тел с течением времени.

Для описания движения тел, в зависимости от условий конкретных задач, в механике используются различные *физические модели*, в которых из всего многообразия проявлений движения выделены главные, определяющие характер движения. Простейшей моделью является *материальная точка*.

*Материальная точка* – это модель тела, размерами и формой которого можно пренебречь по сравнению с масштабами движения.

При взаимодействии тел друг с другом они могут деформироваться, то есть изменять свою форму и размеры. Поэтому в механике вводится еще одна модель – *абсолютно твердое тело.* Абсолютно твердым телом называется тело, которое ни при каких условиях не может деформироваться, и при всех условиях расстояние между двумя частицами этого тела остается постоянным.

Любое движение твердого тела можно представить как комбинацию поступательного и вращательного движения. *Поступательное движение* – это движение, при котором любая прямая жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной своему первоначальному положению. *Вращательное движение* – это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой *осью вращения.*

Движение тел происходит в *пространстве* и во *времени*. Поэтому для описания движения материальной точки надо знать, в каких местах пространства эта точка находилась и в какие моменты времени она проходила то или иное положение.

*Тела отсчета* – тела, относительно которых определяется или изучается положение данного движущегося тела.

*Система отсчета* – это тело отсчета, связанная с ним система координат и способ измерения времени (часы).

*Траектория* – линия, которую описывает материальная точка в пространстве при движении. В зависимости от формы траектории движение может прямолинейным и криволинейным.

Расстояние, пройденное телом, с момента начала отсчета времени, называется *длиной пути.* Это длина траектории. Обозначения: L, S, ΔS.

Вектор, соединяющий начальное положение с последующим положением, называют *перемещением.* Обозначения: $\vec{S}$, $\vec{r}$, $\Delta\vec{r}$.

Вектор, соединяющий некотрую фиксированную точку пространства с данной движущейся точкой, назвается *радиус-вектором*.

$\vec{r}_1 + \vec{S} = \vec{r}_2 \Rightarrow \boxed{\vec{S} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta\vec{r}}$,

перемещение равно изменению радиуса-вектора. Если точку 0 совместить с точкой A, то $\vec{r}_1 = 0$, $\vec{r}_2 = \vec{r}$, $\boxed{\vec{S} = \vec{r}}$

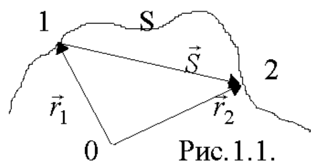


Рис.1.1.

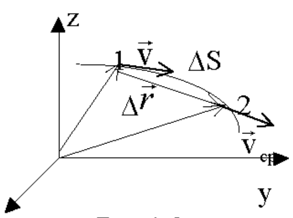


Рис.1.2.

перемещение равно радиусу-вектору.

В декартовой системе координат, используемой наиболее часто, положение точки в данный момент времени по отношению к этой системе характеризуется тремя координатами *x, y, z* или радиусом-вектором. При этом проекции радиуса-вектора на оси системы отсчета эквивалентны координатам материальной точки *x, y, z*: $\boxed{\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)}$

При движении материальной точки ее координаты с течением времени изменяются. Уравнение движения материальной точки может быть задано 3-мя способами: а) координатный $x = x(t); y = y(t); z = z(t)$, б) векторному: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (эквивалентен координатному); в) траекторный (естественный) $S = S(t)$ .)

## 3. Кинематика материальной точки. Скорость и ускорение точки.

**Кинематика** – это раздел механики, изучающий движение тел без учета взаимодействия, то есть без учета причин, вызывающих это движение.

Пусть положение материальной точки задано радиусом-вектором $\vec{r}$, проведенным из некоторой неподвижной точки О выбранной системы отсчета. При движении материальной точки ее радиус-вектор меняется в общем случае как по величине, так и по направлению, то есть радиус-вектор $\vec{r}$ зависит от времени *t*. Геометрическое место концов радиуса-вектора $\vec{r}$ будет траекторией материальной точки.

Введем понятие **скорости** материальной точки. Пусть за промежуток времени Δt материальная точка переместилась из точки 1 в точку 2 (см. рис. 1.2). *Средняя скорость* определяет путь, пройденный в единицу времени. Пусть к моменту $t_1$ был пройден путь$S_1$, а к моменту $t_2$ – $S_2$. За промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ будет пройден путь $\Delta S = S_2 - S_1$. И средняя скорость, определяемая соотношением $v_{ср} = \Delta S / \Delta t$ .Из рисунка видно, что вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ материальной точки представляет собой приращение радиуса-вектора $\vec{r}$ за время: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Вектор средней скорости $\boxed{\vec{v}_{ср} = \Delta\vec{r} / \Delta t}$.

Вектор $\vec{v}_{ср}$ совпадает по направлению с вектором $\Delta\vec{r}$ . Определим вектор скорости материальной точки как предел отношения $\Delta\vec{r}$ /Δt при Δt→0, то есть $\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$.

Это значит, что *вектор скорости материальной точки в данный момент времени равен производной от радиуса-вектора* $\vec{r}$ *по времени и* *направлен по касательной к траектории в данной точке* в сторону движения материальной точки. Модуль вектора $|\vec{v}| = |d\vec{r} / dt|$.

В классической механике состояние частицы или материальной точки в момент времени при координатном способе характеризуется тремя координатами и тремя компонентами скорости, причем предполагается, что все шесть величин в указанный момент можно найти на опыте с любой степенью точности.

Другим понятием, характеризующим движение точки, является **ускорение**. Ускорение – это физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости.

Среднее ускорение – это отношения изменения скорости ко времени, за которое это изменение произошло: $a_{ср} = \Delta v / \Delta t$. Вектор среднего ускорения: $\boxed{\vec{a}_{ср} = \Delta\vec{v} / \Delta t}$, (где $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$)– вектор изменения скорости за промежуток времени Δt. Переходя к пределу, получим вектор мгновенного ускорения: $\boxed{\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$, т.е. вектор ускорения материальной точки равен производной от скорости по времени. Направление вектора ускорения совпадает с направлением вектора $d\vec{v}$ (приращение вектора v за время dt).

При использовании для описания движения прямоугольной декартовой системы координат положение материальной точки задается тремя координатами *x, y, z*. При движении точки эти координаты изменяются во времени и, следовательно ее движение описывается тремя уравнениями *x*(t), *y*(t), *z*(t). В этом случае вектор скорости может быть разложен на три взаимно перпендикулярные компоненты: $\vec{v}_x = d\vec{x} / dt$; $\vec{v}_y = d\vec{y} / dt$; $\vec{v}_z = d\vec{z} / dt$, причем $\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$, а вектор ускорения – на компоненты: $\vec{a}_x = d\vec{v}_x / dt$; $\vec{a}_y = d\vec{v}_y / dt$; $\vec{a}_z = d\vec{v}_z / dt$, причем $\boxed{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$.

## 4. Кинематика материальной точки при прямолинейном движении.

Движение, при котором траектория – прямая линия, называется *прямолинейным* движением. При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и модуль перемещения равен пройденному пути, если направление движения не изменяется.

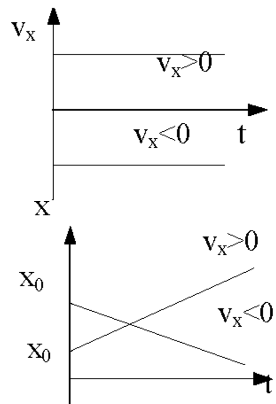


Рис.4.1

1) В случае прямолинейного *равномерного* движения

$$\vec{v} = \frac{\bar{s}}{t} = const; \quad \bar{s} = \bar{v}t; \quad \bar{a} = 0.$$

В проекции на ось ОХ:

$$v_x = \frac{x - x_0}{t} = const; \; x = x_0 + v_x t; \; a_x = 0$$

2) В случае прямолинейного равнопеременного движения

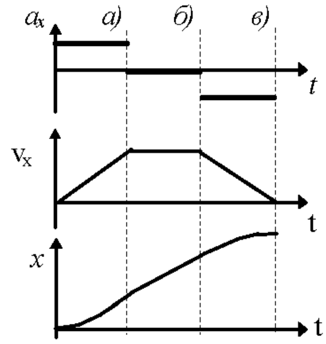


Рис.4.2.

$$\bar{a} = const; \quad \vec{v} = \vec{v}_o + \bar{a}t$$

$$\bar{s} = \vec{v}_o t + \frac{\bar{a}t^2}{2}.$$

В проекции на ось ОХ:

$$a_x = const; v_x = v_{x0} \pm a_x t;$$

$$x = x_0 + v_{x0} t \pm \frac{a_x t^2}{2}$$

На рис.4.2 изображены графики зависимостей *a*(t), v(t), s(t) при равноускоренном (*a*>*0,* случай *а)*), равномерном (*a*=0, случай *б*) и равнозамедленном (*a*<0, случай *в*) движении.

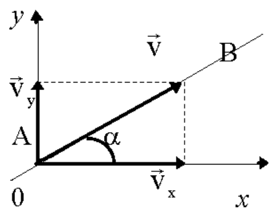


Рис.4.3.

Любое равномерное движение, происходящее с постоянной скоростью $\vec{v}$ вдоль произвольной прямой АВ (рис.4.3), можно разложить на два независимых равномерных и прямолинейных движения вдоль осей ОХ и OY со скоростями $v_x$ и $v_y$: $x= \pm x_o \pm v_x t$, $y= \pm y_o \pm v_y t$, где $v_x = v\cos\alpha$, $v_y = v\sin\alpha$.

Скорость тела в любой точке траектории $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ и направлена вдоль траектории движения.

## 5. Криволинейное движении материальной точки.

*Криволинейное движение* – движение, при котором траектория – кривая линия. Если материальная точка движется по произвольной кривой, то эту кривую надо разбить на малые дуги и каждую из них совместить с дугой некоторой окружности. Каждая такая окружность называется

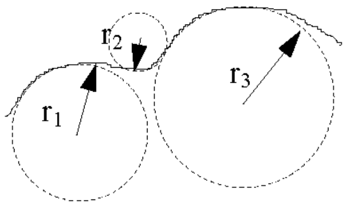


Рис.5.1.

окружностью кривизны, а радиус называется радиусом кривизны траектории в данной точке.

Рассмотрим один из видов криволинейного движения – движение материальной точки по окружности.

*1 случай*: равномерное движение по окружности, когда скорость по величине является постоянной $|\vec{\text{v}}|=\text{const}$, но изменяется по направлению (см. рис.5.2). В этом случае $\Delta\vec{\text{v}}\neq 0$, поэтому материальная точка движется с ускорением (т.к. $\vec{a}_{\text{ср}} = \Delta\vec{\text{v}} / \Delta t \neq 0$). Рассмотрим треугольник $\Delta ABC$. Он равнобедренный со стороной $|\vec{\text{v}}|=\text{v}$ и основанием $\Delta\text{v}$, причем $\vec{a}\uparrow\uparrow\Delta\vec{\text{v}}$. Если точка D стремится к точке A, то угол в вершине $\Delta ABC$ $\alpha\to 0$. Но углы при основании $\Delta ABC$ равны (равнобедренный). Так как сумма всех углов $\Delta ABC$ равна $180^0$, то углы при основании будут стремиться к $90^0$ каждый, то есть в пределе $\Delta\vec{\text{v}}\perp\vec{\text{v}}$, тогда и ускорение будет перпендикулярно вектору скорости ($\vec{a}_n\perp\vec{\text{v}}$). Длина вектора $|\Delta\vec{\text{v}}| = \Delta\text{v} = 2\text{v}\sin\frac{\alpha}{2}$. Длина дуги $\smile DA = \breve{l} = R\alpha$, а время, за которое точка пройдет этот путь $\Delta t = \breve{l} / \text{v} = R\alpha / \text{v}$. Тогда модуль среднего ускорения $a_{n-\text{ср}} = \frac{\Delta\text{v}}{\Delta t} = \frac{2\text{v}^2\sin\frac{\alpha}{2}}{R\alpha} = \frac{\text{v}^2}{R}\left[\sin\frac{\alpha}{2}\Big/\frac{\alpha}{2}\right]$. Используя первый замечательный предел $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left[\sin\frac{\alpha}{2}\Big/\frac{\alpha}{2}\right] = 1$, определим мгновенное ускорение: $a_n = \lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\text{v}^2}{R}\left[\sin\frac{\alpha}{2}\Big/\frac{\alpha}{2}\right] = \frac{\text{v}^2}{R}$, то есть $\boxed{a_n = \frac{\text{v}^2}{R}}$.

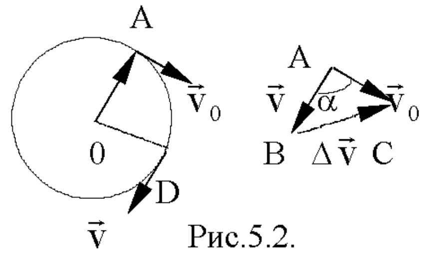


Рис.5.2.

Нормальное (центростремительное) ускорение характеризует *изменение скорости по направлению*. Вектор нормального ускорения направлен по радиусу к центру окружности.

*2 случай*. Скорость движущейся по окружности материальной точки изменяется по величине и направлению: $\boxed{\quad}$.

$\Delta\vec{\text{v}} = \vec{\text{v}}_2 - \vec{\text{v}}_1$ – полное изменение скорости; $\Delta\text{v}'$ – изменение скорости по направлению, $\Delta\text{v}''$ – изменение скорости по величине. Из $\Delta CED \Rightarrow$

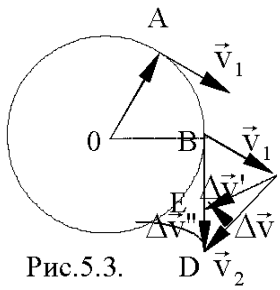


Рис.5.3.

$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}' + \vec{v}''$. Поделим обе части этого равенства на $\Delta t$ перейдем к пределу: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}'}{\Delta t} + \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{v}''}{\Delta t}$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau}.$$

Первое слагаемое является нормальным ускорением, второе $\vec{a}_\tau = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ – тангенциальное ускорение, направленное по касательной к траектории.

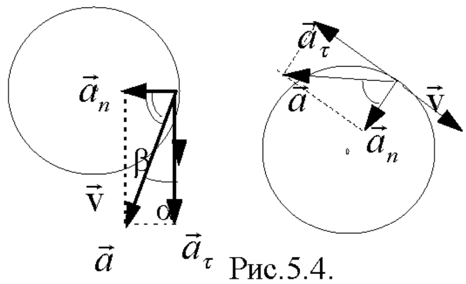


Рис.5.4.

$\vec{a}_\tau \uparrow\uparrow \vec{v}$ – если движение ускоренное; $\vec{a}_\tau \uparrow\downarrow \vec{v}$ – если движение замедленное (рис.5.4).

***Итак,*** при криволинейном движении полное ускорение состоит из двух составляющих:

1) нормальное ускорение $\vec{a}_n$ – характеризуется изменением скорости по направлению;

2) тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ характеризуется изменением скорости по величине. Так как компоненты $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$ взаимно перпендикулярны, то

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

Найти полное ускорение – это значит найти не только его величину, но и его направление в пространстве: $tg\alpha = \dfrac{|\vec{a}_\tau|}{|\vec{a}_n|}$, или $tg\beta = \dfrac{|\vec{a}_n|}{|\vec{a}_\tau|}$.

## 6. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Связь между линейными и угловыми величинами.

*Вращательным движением* называется такое движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

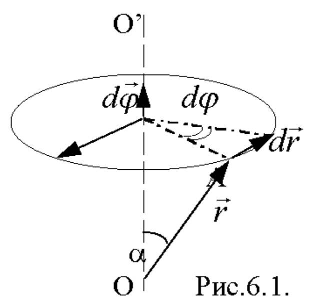


Рис.6.1.

Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси OO’. Рассмотрим бесконечно поворот тела вокруг этой оси. Угол поворота будем характеризовать вектором $d\vec{\varphi}$, модуль которого равен углу поворота, а направление совпадает с осью ОО' так, что направление поворота отвечает правилу правого винта по отношению к направлению вектора $d\vec{\varphi}$.

Найдем перемещение точи А. Положение точки А зададим радиусом-вектором $\vec{r}$, проведенным из некоторой точки О на оси вращения. Линейное перемещение конца радиуса-вектора связано с углом поворота $d\varphi$ соотношением: $|d\vec{r}| = r\sin\alpha\, d\varphi$ или в векторном виде: $\boxed{d\vec{r} = \left[d\vec{\varphi}\cdot\vec{r}\right]}$

Равенство справедливо для бесконечно малого поворота $d\varphi$.

Векторы, направление которых связывают с направлением вращения, называют *аксиальными*. Вектор $d\vec{\varphi}$ является аксиальным.

Введем векторы *угловой скорости* и *углового ускорения*.

Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ определяют как: $\boxed{\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}}$. Вектор $\vec{\omega}$ совпадает по направлению с вектором $d\vec{\varphi}$ и представляет собой аксиальный вектор.

Изменение вектора $\vec{\omega}$ со временем характеризуется вектором углового ускорения $\vec{\varepsilon}$, который определяют как $\boxed{\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}}$. Направление вектора $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением $d\vec{\omega}$ – приращением вектора $\vec{\omega}$. Вектор $\vec{\varepsilon}$ также является аксиальным.

При равномерном вращении $\varepsilon = 0$ и $\vec{\omega} = const$. $\varphi = \varphi_0 + \omega t$, где $\varphi_o$– начальное угловое перемещение.

Вращательное движение характеризуется периодом Т и частотой вращения n.

Частота вращения $n = \dfrac{N}{t}$, или $n = \dfrac{1}{T}$, где $N$ – число оборотов, совершаемых телом за время $t$; $T$ - период вращения (время одного полного оборота).

Для угловых перемещения и скорости: $\varphi = 2\pi N$; $\omega = 2\pi N$.

При равнопеременном (ε=const) вращении $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$,

$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2$, где $\omega_0$ – начальная угловая скорость.

Установим *связь между линейными и угловыми величинами.*

Найдем скорость $\vec{v}$ произвольной точки А твердого тела, которое вращается вокруг оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Формулу $d\vec{r} = \left[d\vec{\varphi}\cdot\vec{r}\right]$ поделим на соответствующий промежуток $dt$: $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ и $\dfrac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\omega}$, тогда $\boxed{\vec{\mathrm{v}} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]}$ (*).

Т.е. скорость $\vec{\mathrm{v}}$ любой точки А твердого тела, вращающегося с угловой скоростью $\vec{\omega}$, равна векторному произведению $\vec{\omega}$ на радиус-вектор $\vec{r}$ точки А относительно произвольной точки О оси вращения.

Модуль вектора скорости $\mathrm{v} = \omega r \sin\alpha = \omega R$, где R–радиус окружности, по которой движется точка А. Таким образом, $\boxed{\mathrm{v} = \omega R}$.

Продифференцируем (*) по времени: $\vec{a} = \left[\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega} \cdot \dfrac{d\vec{r}}{dt}\right]$.

Так как $\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$, $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\mathrm{v}} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$, то $\vec{a} = [\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}] + [\vec{\omega} \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]]$.

Здесь вектор $\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}]$ – тангенциальное ускорение, а вектор $\vec{a}_n = [\vec{\omega} \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]]$ – нормальное ускорение. Модули этих ускорений:

$$a_\tau = \varepsilon R, \qquad a_n = \omega^2 R.$$

Модуль полного ускорения $\boxed{a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.}$

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ 1.

*Закон движения* – это уравнение (или несколько уравнений), позволяющие определить в любой момент времени положение движущегося тела в заранее выбранной системе координат. Как правило, закон движения удобнее записать в координатной форме.

### *Примеры решения задач.*

*Задача 1.* Кинематическое уравнение движения материальной точки по прямой (ось $x$) имеет вид $x = A + Bt + Ct^3$, где $A$=4 м, $B$=2м/с, $C$=-0,5 м/с$^3$. Для момента времени $t_1$=2 с определить:1) координату точки $x_1$ точки; 2) мгновенную скорость $v_1$; 3) мгновенное ускорение $a_1$.

<u>*Дано:* $x = A + Bt + Ct^3$, $A$=4 м, $B$=2м/с, $C$=-0,5 м/с$^3$, $t_1$=2 с.</u>

*Найти*: $x_1$; $v_1$; $a_1$.

*Решение.* 1. Координату точки, для которой известно кинематическое уравнение движения, найдем, подставив в уравнение движения вместо t заданное значение времени $t_1$ : $x_1 = A + Bt_1 + Ct_1{}^3$. Подставим в это выражение значения A, B, C, $t_1$ и произведем вычисления: $x_1 = 4$ м.

2. Мгновенную скорость в произвольный момент времени найдем, продифференцировав координату $x$ по времени: $v = \dfrac{dx}{dt} = B + 3Ct^2$. Тогда в заданный момент времени $t_1$ мгновенная скорость $v_1 = B + 3Ct_1^2$.

Подставим сюда значения B,C, $t_1$ и произведем вычисления: $v_1$= - 4 м/с. Знак минус указывает на то, что в момент времени $t_1$=2 с точка движется в отрицательном направлении координатной оси.

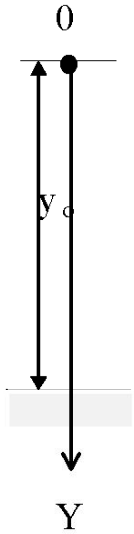
3. Мгновенное ускорение в произвольный момент времени найдем, взяв вторую производную от координаты $x$ по времени: $a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}=6Ct$. Мгновенное ускорение в заданный момент времени $t_1$ равно $a_1 = 6Ct_1$. Подставим значения C, $t_1$ и произведем вычисления: $a_1$=-6 м/с$^2$. Знак минус указывает на то, что направление вектора ускорения совпадает с отрицательным направлением координатной оси, причем в условиях данной задачи это имеет место для любого момента времени.

*Задача 2.* С вертолета, находящегося на высоте 300 м, сброшен груз. Через какое время груз достигнет земли, если вертолет: 1) неподвижен, 2) опускается со скоростью 5 м/с, 3) поднимается со скоростью 5 м/с?

*Дано*: $y_o$=300 м, $v_o$=5 м/с.

*Найти*: t - ?

*Решение*. Направим ось Y вертикально вниз, начало оси поместим в точке O на высоте $y_o$ от поверхности земли.




1. Если вертолет неподвижен, то уравнение движения груза $y=gt^2/2$. (1)

Когда груз достигнет поверхности земли ($t=t_1$, $y=y_o$), уравнение (1) примет вид $y_o=gt_1^2/2$, откуда время падения груза на землю $t_1=\sqrt{\dfrac{2y_o}{g}}$; $t_1$=7,8 с.

Так как перед падением груз опускался вместе с вертолетом со скоростью $v_o$, то уравнение движения груза

$$y=v_ot+gt^2/2. \qquad (2)$$

Когда груз достигнет поверхности земли ($t=t_2$, $y=y_o$), уравнение (2) примет вид $y_o=v_ot_2+gt_2^2/2$, откуда $t_2^2+2v_ot_2/g-2y_o/g=0$.

Решая полученное уравнение, находим

$$t_2=\frac{-v_0\pm\sqrt{v_0^2+2gy_0}}{g}; \quad t_2=\frac{-5\pm\sqrt{25+2\cdot 9{,}8\cdot 300}}{9{,}8}\approx(-0{,}5\pm 7{,}8)c.$$

Следовательно, $t_2\approx$7,3 с (отрицательный корень отбрасываем).

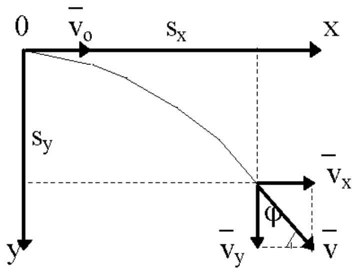
3. Составим уравнение движения груза: $y=-v_ot+gt^2/2$ (3)

(так как перед падением груз поднимается вместе с вертолетом со скоростью $v_o$). В момент достижения грузом земли ($t=t_3$, $y=y_o$) уравнение (3) примет вид $y_o= - v_ot_3+gt_3^2/2$, откуда $t_3^2-2v_ot_3/g-2y_o/g=0$.

Решая полученное уравнение, находим

$$t_3 = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gy_0}}{g}; \; t_3 = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 2 \cdot 9{,}8 \cdot 300}}{9{,}8} \approx (0{,}5 \pm 7{,}8)c$$

Отбрасывая отрицательный корень, окончательно получаем $t_3 \approx 8{,}3$ с.




*Задача 3.* С башни высотой 25 м горизонтально брошен камень со скоростью 15 м/с. Найти: 1) сколько времени камень будет в движении, 2) на каком расстоянии он упадет на землю, 3) с какой скоростью он упадет на землю, 4) какой угол составит траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю. Сопротивление воздуха не учитывать.

*Дано*: H=25 м, $v_o$=15 м/с

*Найти:* $t_n$-? $s_x$- ? $v$- ? φ- ?

*Решение.* Перемещение брошенного горизонтально камня можно разложить на два: горизонтальное $s_x$ и $s_y$ (см.рис.)

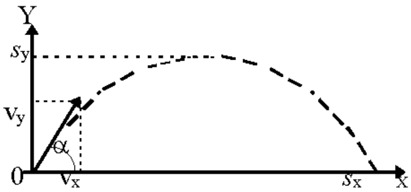
Уравнения по $OY$: $y= gt^2/2$, $v_y=gt$; по $OX$: $x= v_o t$.

В момент падения: $s_y=H=gt_n{}^2/2$, $s_x=v_o t$, где $t_n$ - время движения до поверхности земли.

Отсюда:1) $t_n = \sqrt{\dfrac{2s_y}{g}} = 2{,}26$ с; 2) $s_x=v_o t_n$= 33,9 м; 3) $v_y=gt_n$=22,1м/с;

4) $\sin\varphi = v_y/v=0{,}827$; $\varphi=55°48'$.

*Задача 4.* Мяч бросили со скоростью 10 м/с под углом 40° к горизонту. Найти: 1) на какую высоту поднимется мяч; 2) на каком расстоянии от места бросания мяч упадет на землю, 3) сколько времени он будет в движении.




*Дано:* $v_o$=10 м/с, $\alpha=40°$.

*Найти*: $s_y$ - ? $s_x$ - ? t - ?

*Решение.* Уравнения движения о осям $OX$: $x= v_{ox}t$,

$OY$: $y=v_{0y}t - gt^2/2$; $v_y= v_{0y} - gt$

1) Найдем наибольшую высоту $s_{y\,max}$, на которую поднимается тело, брошенное со скоростью $v_o$ под углом α к горизонту. Имеем : $v_y=v_o \sin\alpha - gt$; (1) $s_y=v_o t \sin\alpha - gt^2/2$. (2)

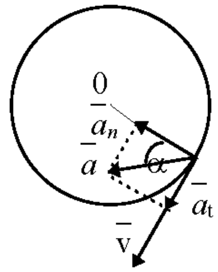
В верхней точке $v_y=0$ и из (1) получим $v_o \sin\alpha = gt_1$, отсюда время подъема мяча $t_1=v_o \sin\alpha /g$. Подставляя $t_1$ в (2), получим $s_{y\,max}= v_o^2 \sin^2\alpha /(2\,g)=2{,}1$ м.

2) Найдем дальность полета $s_{xmax}$ тела, брошенного под углом к горизонту. Имеем: $v_x=v_o \cos\alpha$, (3) $s_x=v_x t=v_o t \cos\alpha$.. (4)

Тело упадет на горизонтальную плоскость через время $t_2=2t_1=2v_o\sin\alpha/g$. Подставляя $t_2$ в (4), получим $s_{x\,max} = v_o^2 \sin 2\alpha \;/g=10{,}0$ м.

3) $t_2=2t_1=2v_o\sin\alpha \;/g=1.3$ с.

*Задача 5*. Колесо радиусом 10 см вращается с постоянным угловым ускорением 3,14 рад/с$^2$. Найти для точек на ободе колеса к концу первой секунды после начала движения: 1) угловую скорость, 2) линейную скорость, 3) тангенциальное ускорение, 4) нормальное ускорение, 5) полное ускорение и 6) угол, составляемый направлением полного ускорения с радиусом колеса.




*Дано*: R= 0,1 м, ε=3,14 рад/с$^2$

*Найти:* ω - ? v - ? $a_\tau$ - ? $a$ - ?

*Решение.* 1) При равнопеременном вращательном движении угловая скорость $\omega = \omega_o+\varepsilon t$. По условию $\omega_o=0$, тогда $\omega = \varepsilon t$, т.е. ω растет пропорционально времени. К концу первой секунды ω=3,14 рад/с.

2) Так как $v=\omega R$, то линейная скорость также пропорционально времени. К концу первой секунды v = 3,14 м/с.

3) Тангенциальное ускорение $a_t=\varepsilon R$ не зависит от t, т.е. постоянно во все время движения. В нашем случае $a_t=0{,}314$ м/с$^2$.

4) Нормальное ускорение $a_n=\omega^2R=\varepsilon^2t^2R$, т.е. нормальное ускорение растет пропорционально квадрату времени: при t=1 с $a_n=0{,}986$м/с$^2$.

5) Полное ускорение растет со временем по закону:

$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=a_t\sqrt{1+\varepsilon^2 t^4}$. При t=1 с $a=1{,}03$ м/с$^2$.

6) Имеем $\sin\alpha=\dfrac{a_t}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2t^4}}$, где α - угол, составляемый направлением полного ускорения с радиусом колеса. В начальный момент времени, т.е. при t=0, $a=a_t$ - полное ускорение направлено по касательной. При t=∞ $a = a_n$ (так как $a_t$=const и $a_n$ пропорционально времени), т.е. при t=∞ полное ускорение направлено по нормали. К концу первой секунды $\sin\alpha=a_t/a_n=0{,}314/1{,}03=0{,}305$, т.е. $\alpha=17°46'$.

***Задачи для самостоятельного решения.***

1.1. Координаты материальной точки изменяются со временем по за кону x=4t, y=3t,z=0. Найти зависимость пройденного точкой пути от времени, отсчитывая расстояние от начального ее положения. Какой путь пройдет точка за 5 с?

1.2. Лодка движется перпендикулярно берегу со скоростью 7,2 км/ч. Течение относит ее на 150 м вниз по реке. Найти: 1) скорость течения реки, 2) время, затраченное на переезд через реку. Ширина реки 0,5 км.

1.3. Тело падает вертикально с высоты 19,6 м с нулевой начальной скоростью. Какой путь пройдет тело: 1) за первую 0,1 с своего движения, 2) за последнюю 0,1 с своего движения? Сопротивление воздуха не учитывать.

1.4. Тело, брошенное вертикально вверх, вернулось на землю через 3 с. 1) Какова начальная скорость тела? 2) На какую высоту поднялось тело? Сопротивление воздуха не учитывать.

1.5. С балкона бросили мячик вертикально вверх с начальной скоростью 5 м/с. Через время 2 с мячик упал на землю. Определить высоту балкона над землей и скорость мячика в момент удара о землю.

1.6. Зависимость пройденного телом пути от времени дается уравнением $s=A+Bt+Ct^2$, где $A=3$ м, $B=2$ м/с, $C=1$ м/с$^2$. Найти среднюю скорость и среднее ускорение тела за первую, вторую и третью секунду движения.

1.7. Определить траекторию движения точки, заданного уравнениями: $x=4t^2+2$; $y=6t^2-3$; $z=0$. Построить график зависимости пути, пройденного точкой, от времени.

1.8. Движение материальной точки задано уравнениями: $x=8t^2+4$; $y=6t^2-3$; $z=0$. Определить модули скорости и ускорения точки в момент времени $t=10$ с.

1.9. Самолет летит относительно воздуха со скоростью 800 км/ч. Ветер дует с запада на восток со скоростью 15 м/с. С какой скоростью будет двигаться самолет относительно земли на юг и под каким углом к меридиану надо держать при этом курс?

1.10. Пассажир поезда, идущего со скоростью 40 км/ч, видит в течение 3 секунд встречный поезд длиной 75 м. С какой скоростью идет встречный поезд?

1.11. Камень, брошенный горизонтально, упал на землю через 0,5 с на расстоянии 5 м по горизонтали от места бросания. 1) С какой высоты был брошен камень? 2) С какой начальной скоростью он был брошен? 3) С какой скоростью он упал на землю? 4) Какой угол составляет траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю? Сопротивление воздуха не учитывать.

1.12. Камень брошен в горизонтальном направлении. Через 0,5 с после начала движения численное значение скорости камня стала в 1,5 раза больше его начальной скорости. Найти начальную скорость камня. Сопротивление воздуха не учитывать.

1.13. Мяч, брошенный горизонтально, ударяется о стенку, находящуюся на расстоянии 5 м от места бросания. Высота места удара мяча о стенку на 1 м меньше высоты, с которой брошен мяч. 1) С какой скоростью был брошен мяч? 2) Под каким углом мяч подлетает к поверхности стенки? Сопротивление воздуха не учитывать.

1.14. Камень брошен горизонтально со скоростью 15 м/с. Найти нормальное и тангенциальное ускорения камня через 1 с после начала движения. Сопротивление воздуха не учитывать.

1.15. Камень брошен горизонтально со скоростью 10 м/с. Найти радиус кривизны траектории камня через три секунды после начала движения. Сопротивление воздуха не учитывать.

1.16. Тело брошено со скоростью 14,7 м/с под углом $30^{\circ}$ к горизонту. Найти нормальное и тангенциальное ускорения тела через 1, 25 с после начала движения.

1.17. Тело брошено со скоростью 10 м/с под углом $45^{\circ}$ к горизонту. Найти радиус кривизны траектории через 1 с после начала движения. Сопротивление воздуха не учитывать.

1.18. Под каким углом к горизонту нужно направить струю воды, чтобы высота ее подъема была равна расстоянию, на которое бьет струя?

1.19. Через какое время вектор скорости тела, брошенного под углом $\alpha=60^{\circ}$ к горизонту с начальной скоростью 20 м/с, будет составлять с горизонтом угол $\beta = 30^{\circ}$? Сопротивление воздуха не учитывать.

1.20. Маховое колесо, спустя 1 минуту после начала вращения, приобретает скорость, соответствующую частоте 720 об/мин. Найти угловое ускорение колеса и число оборотов колеса за эту минуту. Движение считать равноускоренным.

1.21. Вентилятор вращается со скоростью, соответствующей частоте 900 об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки 75 оборотов. Сколько времени прошло с момента выключения вентилятора до полной его остановки?

1.22. Точка движется по окружности радиусом 20 см с постоянным тангенциальным ускорением 5 см/с$^2$. Через сколько времени после начала движения нормальное ускорение точки будет: 1) равно тангенциальному, 2) вдвое больше тангенциального?

1.23. Точка движется по окружности радиусом 2 см. Зависимость пути от времени дается уравнением $x=Ct^3$, где $C=0,1$ см/с$^3$. Найти нормальное и тангенциальное ускорение точки в момент, когда линейная скорость точки равна 0,3 м/с.

1.24. Найти угловое ускорение колеса, если известно, что через 2 с после начала движения вектор полного ускорения точки, лежащей на ободе, составляет угол $60^{\circ}$ с направлением линейной скорости этой точки.

1.25. Колесо вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi=A+Bt+Ct^2+Dt^3$, где $B=1$ рад/с, $C=1$ рад/с$^2$ и $D=1$ рад/с$^3$. Найти радиус колеса, если известно, что к концу второй секунды движения нормальное ускорение точек, лежащих на ободе колеса, равно 346 м/с$^2$.

## Тема 2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ
### 7. Законы Ньютона. Импульс.

***Динамика*** *– раздел механики, в котором изучается механическое движение с учетом причин, вызывающих движение.*

*Основные понятия динамики* – масса и сила.

*Масса* – физическая величина, характеризующая инертность тел. *Инертность* – это свойство тел сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. В классической механике инертная масса считается постоянной и не зависящей от скорости движения.

За единицу массы принят эталон – сплав платины и иридия, хранящийся в палате мер и весов в Париже: [$m$]=кг.

Масса–величина аддитивная $m_{сист} = \sum_{i=1}^{n} m_i$ и скалярная.

*Сила* – физическая величина, характеризующая действие одного тела на другое, в результате чего у тела изменяется скорость, то есть *появляется ускорение*, или происходит *деформация* тела, либо имеет место и то, и другое. В том случае, когда тело при взаимодействии получает ускорение, говорят о *динамическом* проявлении сил. В том случае, когда тело при взаимодействии деформируется, говорят о *статическом* проявлении сил. $\vec{F}$ – векторная величина . [$F$] =$Н$ (*Ньютон*).

***Первый закон Ньютона*** гласит: *существуют такие системы отсчета, относительно которых тело покоится или движется прямолинейно и равномерно, если на него не действуют другие тела или действие этих тел компенсировано.*

С*истема отсчета,* которая может покоиться или двигаться только равномерно и прямолинейно (по инерции), называется *инерциальной,* а закон называют законом инерции.

***Второй закон Ньютона*** – основной закон динамики поступательного движения – отвечает на вопрос, как изменяется механическое движение материальной точки (тела) под действием приложенных к ней сил.

Под действием некоторой силы тело приобретает ускорение. Если материальная точка (тело) испытывает действие нескольких сил, то оказывается, что ускорение, приобретенное телом, всегда прямо пропорционально равнодействующей или результирующей приложенных сил, при условии, что $m=const$, т.е. $\vec{a} \sim \vec{F}$ при $m=const$. (1)

где $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ – результирующая сила

При действии одной и той же силы на тела с разными массами их ускорения оказываются различными: $\vec{a} \sim 1/m$ при $\vec{F}$ =*const.* (2)

Используя (1) и (2) и учитывая, что сила и ускорение – векторные величины, можно записать: $\vec{a} = K\dfrac{\vec{F}}{m}$, где К – коэффициент пропорциональности. В системе СИ К=1. Тогда: $\boxed{\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}}$ (3).

Это соотношение и выражает *второй закон Ньютона*: *ускорение, приобретаемое материальной точкой (телом), пропорционально вызывающей его силе, совпадает с нею по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела).*

Соотношению (3) можно придать другой вид, представив его в виде:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}. \qquad (4)$$

Пусть масса тела постоянна (не зависит от скорости), поэтому можно внести ее под знак производной: $\vec{F} = \dfrac{d}{dt}(m\vec{v})$. (5)

Векторная величина численно равная произведению массы материальной точки на ее скорость и имеющая направление скорости, называется ***импульсом*** этой материальной точки: $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$. Подставляя это выражение в (5), получим: $\boxed{\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}}$. (6)

Это выражение – более общая формулировка второго закона Ньютона: скорость изменения импульса материальной точки равно действующей на нее силе. Выражение (6) называется уравнением движения материальной точки.

В общем случае сила, действующая на тело, изменяется со временем и по величине, и по направлению. Но в течение элементарного промежутка времени dt мы можем считать, что $\vec{F} = const$. Векторная величина $d\vec{p}$, равная $\boxed{d\vec{p} = \vec{F}dt}$, называется *элементарным импульсом (силы).* Второй закон Ньютона в дифференциальной форме: $\boxed{m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i}$,

в проекциях на оси: $m\dfrac{dv_x}{dt} = \sum F_{ix}$; $m\dfrac{dv_y}{dt} = \sum F_{iy}$; $m\dfrac{dv_z}{dt} = \sum F_{iz}$.

Из второго закона также получим размерность силы: $1H = 1\text{кг} \cdot 1(\text{м}/\text{с}^2)$.

***Третий закон Ньютона*** определяет взаимодействие между материальными точками (телами). *Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными в противоположные стороны вдоль соединяющей эти точки прямой*: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, где $\vec{F}_{12}$ – сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй; $\vec{F}_{21}$ – сила, действующая на вторую материальную точку со стороны первой.

Законы Ньютона в классической механике ***применимы*** для описания движения: а) макротел; б) для тел постоянной массы; в) при скоростях, значительно меньших скорости света.

## 8. Преобразования Галилея. Механический принцип относительности.

В механике Ньютона все законы выполняются в инерциальных системах отсчета. Пусть имеем две инерциальные системы отсчета, одну из которых мы будем условно считать неподвижной (система К с осями декартовых координат *x,y,z*). Другая же система (система К' с осями декартовых координат *x'*, *y'*, *z'*) пусть равномерно и прямолинейно движется со скоростью $\vec{u}$ относительно первой (см. рис.8.1.).

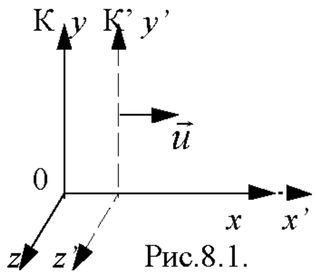


Рис.8.1.

Примем для простоты, что оси *x* и *x'* совпадают, а скорость относительного движения $\vec{v}$ направлена вдоль оси *x* или *x'*. Пусть по часам наблюдателя в системе К прошло некоторое время t. В классической физике аксиоматически принимается, что такое же время зарегистрирует и наблюдатель в системе К', т.е. $t = t'$ (1)

Так как предполагается, что в момент времени, равный t=0, начало координат обеих систем совпадали, то за время t система К' переместится на расстояние, равное $\vec{u}$t. Пусть теперь в момент t' в системе К' в точке с координатами *x'*, *y'*, *z'* произошло событие – включение электрической лампочки. Координаты лампочки, измеренные в момент $t = t'$ наблюдателем в системе К, имеют значение *x*, *y*, *z*. Видно, что между координатами в системах К и К' легко устанавливается связь:

$$x' = x - ut \quad (2)$$

$$y' = y \quad (3) \qquad\qquad z' = z \quad (4)$$

Соотношения (1)-(4) называются преобразованиями Галилея Преобразования Галилея связывают координаты и время события в указанных двух инерциальных системах отсчета. В векторной форме:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{u}t\,.$$

Дифференцируя формулы (2)-(4) по времени, получим классический *закон сложения скоростей*:

$$v_x' = v_x - u; \qquad v_y' = v_y; \qquad v_z' = v_z\,.$$

Здесь $v'_x$, $v'_y$, $v'_z$ – проекции вектора относительной скорости тела $\vec{v}\,'$ (по отношению к системе отсчета К'), а $v_x, v_y, v_z$ – проекции вектора абсолютной скорости $\vec{v}$ (по отношению к системе отсчета К). В векторной форме закон сложения скоростей примет вид: $\boxed{\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{u}}$

Продифференцируем его по времени и учтем, что $\vec{u} = const$. Получим:

$$\vec{a} = \vec{a}\,' \qquad (5)$$

В классической механике считается, что масса тела не зависит от системы отсчета, то есть $m = m'$. Умножим обе части равенства (5) на $m$:

$$m\vec{a} = m\vec{a}\,' \qquad \text{или} \quad \vec{F} = \vec{F}\,'$$

Таким образом, закон Ньютона не изменяется при переходе от системы К в систему К'.

На этом основании можно сформулировать ***механический принцип относительности Галилея***: *во всех инерциальных системах отсчета одни и те же механические явления протекают одинаковым образом, и никакими механическими опытами, проводимыми внутри данной инерциальной системы отсчета, невозможно установить, покоится система отсчета или движется равномерно и прямолинейно.*

Физические величины и физические законы, не изменяющиеся при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, называют ***инвариантными*** (не изменяющимися) к преобразованиям Галилея.

## 9. Силы в природе.

В природе существует много разных видов сил: тяготения, тяжести, Лоренца, Ампера, взаимодействия неподвижных зарядов и т.д., но все они в конечном счете сводятся к небольшому числу фундаментальных (основных) взаимодействий. Современная физика считает, что существует в природе лишь четыре вида сил или четыре вида взаимодействий:

1) гравитационное взаимодействие (осуществляется через гравитационные поля);

2) электромагнитное взаимодействие (осуществляется через электромагнитные поля);

3) ядерное (или сильное) (обеспечивает связь частиц в ядре);

4) слабое (отвечает за процессы распада элементарных частиц).

В рамках классической механики имеют дело с гравитационными и электромагнитными силами, а также с упругими силами и силами трения.

***Гравитационные силы*** (силы тяготения) – это силы притяжения, которые подчиняются закону всемирного тяготения.

***Сила тяжести*** –сила, с которой тело притягивается Землей. Под действием силы притяжения к Земле все тела падают с одинаковым относительно поверхности Земли ускорением $\vec{g}$, называемым ускорением свободного падения. По второму закону Ньютона, на всякое тело действует сила: $\vec{F} = m\vec{g}$, называемая силой тяжести.

***Вес*** – сила, с которой тело, притягиваясь к Земле, действует на подвес или опору..

Сила тяжести $m\vec{g}$ равна весу только в том случае, когда опора или подвес неподвижны относительно Земли. По модулю вес $\vec{P}$ может быть как больше, так и меньше силы тяжести $\vec{F}$. Эти силы приложены к разным телам: $m\vec{g}$ – приложена к самому телу, $\vec{P}$ – к подвесу или опоре, ограничивающим свободное движение тела в поле земного тяготения.

В случае ускоренного движения опоры (например, лифта, везущего груз) уравнение движения (с учетом того, что сила реакции опоры равна по величине весу, но имеет противоположный знак $\vec{P} = -\vec{N}$): $m\vec{g} - \vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow \quad \vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a})$. Если движение происходит вверх $P = m(g + a)$, вниз: $P = m(g - a)$.

При свободном падении тела его вес равен нулю, т.е. оно находится в состоянии *невесомости.*

***Силы упругости*** возникают в результате взаимодействия тел, сопровождающегося их деформацией. Упругая (квазиупругая) сила пропорциональна смещению частицы из положения равновесия и направлена к положению равновесия: $\vec{F} = -k\vec{r}$.

***Силы трения*** являются одним из проявлений контактного взаимодействия тел, в частности сила трения скольжения возникает при скольжении одного тела по поверхности другого: $F_{\text{тр.ск.}} = \mu_{\text{ск}} N$ и направлена по касательной к трущимся поверхностям в сторону, противоположную движению данного тела относительно другого.

Упругие силы и силы трения определяются характером взаимодействия между молекулами вещества, которое имеет электромагнитное происхождение, следовательно они по своей природе имеют электромагнитные происхождения. Гравитационные и электромагнитные силы являются фундаментальными – их нельзя свести к другим, более простым силам. Упругие силы и силы трения не являются фундаментальными. Фундаментальные взаимодействия отличаются простотой и точностью законов.

## 10. Силы трения.

Трение является одним из проявлений контактного взаимодействия тел. Трение различают двух видов: *внешнее* и *внутреннее*.

Силы *внешнего трения* возникают на поверхности контакта двух тел. *Внутреннее трение* – это тангенциальное взаимодействие между слоями одного и того же тела. Если сила трения возникает при движении твердого тела в жидкой или газообразной среде, то ее относят к силам внутреннего трения.

Трение между поверхностями твердых тел при отсутствии какой-либо прослойки или смазки называется *сухим*. Трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой, а также между слоями такой среды называется *вязким* или *жидким*.

Рассмотрим сухое трение. Различают три его вида: трение покоя, трение скольжения и трение качения.

*а) Сила трения покоя* – это сила, действующая между соприкасающимися телами, находящимися в состоянии покоя, равная по величине и противоположно направленная силе, понуждающей тело к движению.

До возникновения скольжения сила трения покоя может иметь любое направление и принимать любое значение от нуля до некоторого максимального, при котором возникает скольжение: $0 \le \vec{F}_{\text{тр пок}} \le \vec{F}^{\max}_{\text{тр пок}}$.

Силу трения покоя, равную по модулю внешней силе, при которой начинается скольжение данного тела по поверхности другого, называют *максимальной силой трения покоя.*

Французские физики Г.Амонтон и Ш.Кулон установили, что: максимальная сила трения покоя пропорциональна силе реакции опоры (нормального давления) и не зависит от площади соприкосновения трущихся тел: $\boxed{\vec{F}^{\max}_{\text{тр пок}} = \mu N}$,

где μ – коэффициент трения покоя, зависит от физической природы соприкасающихся тел и обработки их поверхностей,

*б) Трение скольжения.* Если к телу приложить внешнюю силу, превышающую $|\vec{F}^{\max}_{\text{тр пок}}|$, то тело начинает скользить. Сила трения продолжает существовать и называется *силой трения скольжения*.

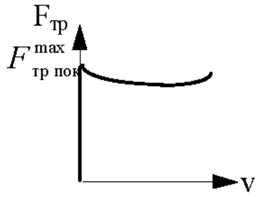


Рис. 10.1.

Силы трения скольжения действуют вдоль

поверхности контакта двух тел. Они приложены к обеим трущимся поверхностям в соответствии с третьим законом Ньютона. Модуль силы трения скольжения зависит от материала тел, состояния поверхностей и от относительной скорости движения тел (см. рис.10.1). Уменьшение силы трения скольжения при малых скоростях объясняется тем, что при движении тела, имеющиеся на его поверхности микроскопические выступы не успевают так глубоко западать в углубления поверхности другого тела, как при покое. Деформируются только «верхушки» выступов. Увеличение силы трения скольжения при больших скоростях связано с разрушением выступов и их размельчением. У грубо обработанной поверхности основную роль в возникновении сил трения покоя и скольжения играют зацепления неровностей, а при тщательной обработке – молекулярное или атомное сцепление. При специальной обработке поверхностей сила трения скольжения может практически не зависеть от скорости.

Силы трения скольжения также зависят от нормального давления на поверхность соприкосновения. При постоянной скорости движения:

$$F_{\text{тр.ск.}} = \mu_{\text{ск}} N \; .$$

Коэффициент трения скольжения $\mu_{\text{ск}}$ зависит от материала тел, состояния поверхностей и от относительной скорости движения тел. В первом приближении можно считать $\mu_{\text{ск}}$ равным коэффициенту трения покоя $\mu$ ($\mu_{\text{ск}} = \mu$). Для определения $\mu$ положим тело на наклонную плоскость и начнем увеличивать угол наклона $\alpha$. Из (1) $\mu = F / N$. При определенном значении $\alpha$ тело начинает движение вниз.

Тело приходит в движение, когда (рис.10.2)

$F = F_{\text{тр}}$ и $F = mg\sin\alpha$ ; $N = mg\cos\alpha$ , тогда:

$$\mu = \frac{F}{N} = \frac{mg\sin\alpha}{mg\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \; .$$

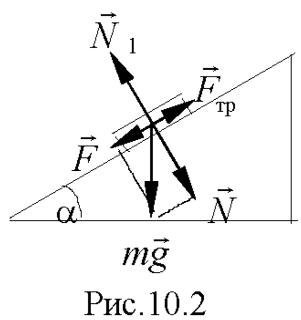


Рис.10.2

Таким образом, коэффициент трения равен тангенсу угла $\alpha_0$, при котором начинается скольжение тела по наклонной плоскости.

*в) Трение качения.* При качении тела по поверхности другого возникает особая сила – сила трения качения, которая препятствует качению тела. Сила терния качения при тех же материалах соприкасаемых тел всегда меньше силы терния скольжения. Этим пользуются на практике, заменяя подшипники скольжения шариковыми или роликовыми подшипниками. Кулон опытным путем установил для катящегося цилиндра радиуса R: $\boxed{F_K = \mu_K \dfrac{N}{R}}$, где $\mu_K$ – коэффициент трения качения, величина которого уменьшается с увеличением твердости материала и шероховатости его поверхности. Для катящегося обода $\boxed{F_K = \mu_K \dfrac{N}{2R}}$.

На тело, движущееся в вязкой (жидкой или газообразной) среде, действует ***сила жидкого трения***, тормозящая его движение.

Сила жидкого трения. вместе со скоростью обращается в нуль. При небольших скоростях она растет пропорционально скорости:

$$\vec{F}_{\text{ж.тр.}} = -k_1\vec{v} \qquad (1).$$

Коэффициент $k_1$ зависит от формы и размеров тела, характера его поверхности, а также от свойства среды, называемого вязкостью.

При увеличении скорости линейная зависимость постепенно переходит в квадратичную:

$$\vec{F}_{\text{ж.тр.}} = -k_2\vec{v}^{\,2} \qquad (2).$$

$k_2$ также зависит от формы тела, от площади лобового сопротивления, от вязкости жидкости (ею пренебрегают).

Границы области, в которой происходит переход от закона (1) к закону (2), зависят от тех же факторов, от которых зависит коэффициент $k_1$.

## 11. Работа и мощность.

Пусть тело (материальная точка) движение по некоторой произвольной криволинейной траектории. На него все время действует сила, и ее величина и направление могут быть в разных точках траектории разными. Разобьем весь путь на бесконечно малые участки, тогда во всех точках каждого данного участка можно считать силу постоянной и по величине, и по направлению. Определим *работу силы* на таком участке следующим образом:

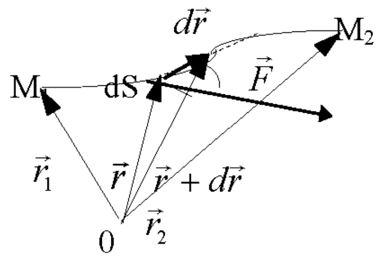



Рис.11.1.

$$dA = (\vec{F}\cdot d\vec{r}) = Fdr\cos\alpha ,$$

где $\alpha$ – угол между направлениями элементарного перемещения $d\vec{r}$ и силы $\vec{F}$. В зависимости от значения $\alpha$ A может быть отрицательной, положительной или равной 0. Так как $|d\vec{r}|$=ds, то формулу для элементарной работы можно записать и в таком виде:

$$dA = F\,dS\cos\alpha = F_S dS .$$

Суммируя элементарные работы, можно найти работу на любом протяжении траектории. $A = \int F_S dS$

Единицы работы в СИ: [$A$]=Н.м=Дж. 1 Дж – работа, совершаемая силой 1 Н на 1 м пути.

***Консервативная сила*** *– сила, работа которой определяется только начальным и конечным положениями тела и не зависят от формы пути.* Примеры консервативных сил – силы тяготения, силы упругости. Примером *неконсервативных (*диссипативных*) сил* являются силы трения.

При сравнении различных механизмов, совершающих работу, имеет смысл говорить не только о величине работы, но и величине времени, в течение которого работа совершается (то есть о скорости выполнения работы).

***Мощностью*** *называется физическая величина, равная работе, совершаемой в единицу времени* – это определение средней мощность: $N_{ср} = \frac{A}{t}$. Перейдя к пределу, получим выражение для мощности:

$$N = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = \frac{dA}{dt}}.$$

$$dA = F\,dS\cos\alpha = F_S dS \;\Rightarrow\; A = F_S S \;\Rightarrow N = \frac{d(F_S S)}{dt}.$$

Если $F_S$=*const*, то $N = F_S \frac{dS}{dt} = F_S \mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = F_S \mathrm{v}}$

Мощность в данный момент времени равна произведению проекции силы на перемещение на скорость движение в этот момент. [N]=Дж.с=Вт.

## 12. Механическая энергия.

В механике различают два вида энергии: потенциальную и кинетическую.

***Потенциальной*** называется ***энергия****, зависящая от взаимного расположения тел или взаимодействия частей одного и того же тела.*

Пусть в пространстве существует стационарное силовое поле, например, поле тяготения, создаваемое некоторым телом, которое будем считать точечным. Примем, что тело является заодно и телом отсчета. Если в некоторую точку М поля поместить другое тело (материальную точку), то оно испытывает силу, зависящую только от расстояния $r$ до источника, то есть $F = F(r)$ .

Работа, совершаемая в стационарном силовом поле при перемещении тела из некоторой точки $M_1$ в точку $M_2$ равна:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}\ . \qquad (1)$$

В общем случае работа зависит от формы и длины пути от $M_1$ до $M_2$.

Мы будем иметь дело только с *потенциальным полем* (в котором работа по перемещению не зависит ни от формы, ни от длины пути от $M_1$ до $M_2$, а зависит только от координат этих точек), следовательно, *работа в потенциальном поле, совершаемая по замкнутому пути, равна нулю.*

Сформулированное свойство потенциальных полей математически означает следующее. Подынтегральное выражение в (1) равно взятому со знаком минус *полному дифференциалу* функции $E_\text{P}(r)$, которая называется *потенциальной энергией* системы: $\boxed{dA = -dE_\text{P}(r)}$.

Таким образом, *потенциальная энергия – это физическая величина, элементарное изменение которой равно (взятой со знаком минус) элементарной работе, совершаемой силами поля.* Интегрируя последнее соотношение от $M_1$ до $M_2$, получим :

$$A_{12} = E_{\text{P}1} - E_{\text{P}2} = -(E_{\text{P}2} - E_{\text{P}1})\ . \qquad (2)$$

Отсюда вытекает, что физический смысл имеет лишь разность потенциальных энергий. Условимся считать, что когда тело находится на бесконечности ( $r = \infty$ ), то его потенциальная энергия равна нулю. *Тогда под потенциальной энергией* $E_\text{P}(r)$ *следует понимать работу, совершаемую силами поля при перемещении тела из данной точки поля в бесконечность.*

***Кинетической энергией*** *называют энергию, зависящую от скорости движения тела.*

Всякое движущееся тело может производить работу. Кинетическая энергия определяется работой, которую может совершать тело вследствие того, что оно обладает определенной скоростью.

Пусть в начальной точке пути скорость стала равной $v_1$, а в конечной точке пути $v_2$. Выражение для второго закона Ньютона $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ умножим на $d\vec{r} = \vec{v}dt$ : $\qquad m\dfrac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}dt = \vec{F}d\vec{r}$ . Получим

$$(\vec{F}d\vec{r}) = Fdr\cos\alpha = dA\ ,$$

где $\alpha = \angle(\vec{F}, d\vec{r})$ , $dA$ – элементарно малая работа на малом участке $dr$. Так векторы $\vec{v}$ и $d\vec{v}$ сонаправлены, то $d\vec{v} \cdot \vec{v} = dv \cdot v$ . Тогда:

$$dA = mv \cdot dv\ .$$

После интегрирования получим работу $A_{12}$:

$$A_{12} = \int_{v_1}^{v_2} m\text{v} \cdot d\text{v} = \frac{m\text{v}_2^2}{2} - \frac{m\text{v}_1^2}{2} = E_{K2} - E_{K1}. \qquad (3)$$

Отсюда вытекает формула, определяющая кинетическую энергию тела: $E_K = m\text{v}^2 / 2 + C$, где С – произвольная постоянная. В классической механике принято С=0. Тогда: $\boxed{E_K = \dfrac{m\text{v}^2}{2}}$. Приравнивая правые части в соотношениях (2) и (3): $-(E_{P2} - E_{P1}) = E_{K2} - E_{K1}$,
приходим к результату:

$$E_{P1} + E_{K1} = E_{P2} + E_{K2} = const \qquad (5)$$

Назовем *полной механической энергией* величину: $E = E_P + E_K$.

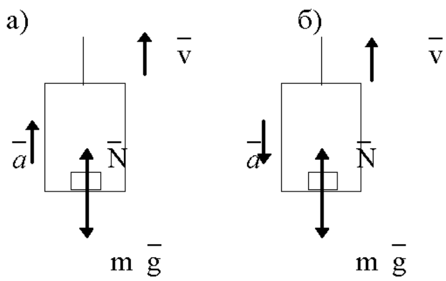
Тогда из (5) вытекает, что *полная механическая энергия тела при его перемещении вдоль любой траектории в потенциальном поле остается постоянной.*

## *РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ 2.*
### *Примеры решения задач.*

*Задача 1.* Тело массой 300 кг лежит на полу кабины грузового подъемника, поднимающегося вверх. Ускорение кабины 3 м/с$^2$. Определить силу давления тела на пол кабины.

Дано: m=300 кг, $a$=3 м/с$^2$

*Найти*: Р - ?




*Решение.* Основной закон динамики для тела запишется в виде:

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{N},$$

где $\bar{N}$ - сила реакции опоры.

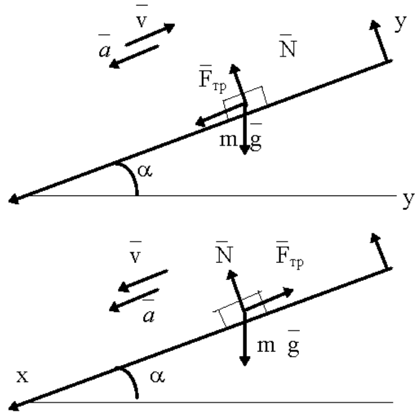
Рассмотрим два случая :

а) ускорение направлено вверх: $ma = N_1 - mg$,
отсюда $N_1 = ma + mg$.

По третьему закону Ньютона $P_1 = N_1$ , $P_1 = ma + mg$, $P_1$=3,84 кН.

б) ускорение направлено вниз:- $ma = N_2 - mg$, следовательно $N_1 = mg - ma$, т.е. $P_2 = mg - ma$, $P_2$=2,04 кН.

*Задача 2.* Ледяная горка составляет с горизонтом угол $\alpha$. По ней пускают вверх камень, который после подъема съезжает вниз. Чему равен коэффициент трения, если время спуска в n раз больше времени подъема.




<u>*Дано*: $t_2/t_1=n$.</u>

*Найти*: $\mu$ -?

*Решение.* Уравнение движения камня

$m\,\bar{a} = m\,\bar{g} + \bar{N} + \bar{F}_{тр}$.

При движении вверх - движение равнозамедленное. В проекциях на оси OX и OY: $ma_1=F_{тр}+mg\sin\alpha$; $N-mg\cos\alpha=0$, откуда $N= mg\cos\alpha$. Тогда сила трения $F_{тр} =\mu N =\mu mg\cos\alpha$, и окончательно уравнение движения $ma_1 =mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha$. (1)

При движении вниз: $ma_2= mg\sin\alpha - F_{тр}$. Проведя аналогичные преобразования, получим уравнение движения в этом случае:

$$ma_2 =mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha. \quad (2)$$

Из (1) и (2): $a_1 = g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha$; $a_2 =g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha$.

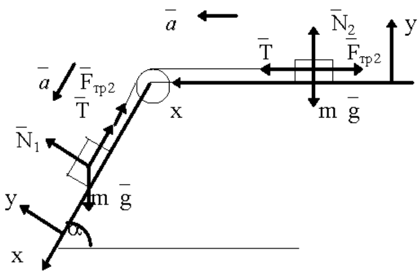
При движении вверх камень проходит путь $s=v_o t_1-a_1t_1^2/2$; скорость в конце подъема $v=0$, следовательно $v_o= a_1t_1$, тогда $s= a_1t_1^2/2$ (3).

При движении вниз камень проходит путь $s= a_1t_1^2/2$ (4).

Из (3) и (4) получим $a_1/a_2= (t_2/t_1)^2=n^2$.

Используя (1) и (2) : $(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)/(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)= n^2$, отсюда $\mu=\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\,\mathrm{tg}\alpha$.

*Задача 3.* Наклонная доска, составляющая с горизонтом угол $60^o$, приставлена к горизонтальному столу (рис.14). Два груза массой по 1 кг каждый соединены легкой нитью, перекинутой через невесомый блок, и могут перемещаться соответственно по доске и столу. Найти силу натяжения нити и ускорение системы, если коэффициент трения тел о поверхность доски и стола одинаков и равен 0,3.




<u>*Дано*: $m_1=m_2=m=1$ кг, $\alpha=60^o$, $\mu=0{,}3$</u>

*Найти*: $a$ - ? T - ?

*Решение.* На рисунке укажем все силы, действующие на каждое тело.

Уравнение движения для любого тела $m\,\bar{a}=\sum\limits_{i=1}^{N}\bar{F}_i$ .

В проекциях на оси X и Y:

*I тело* OX: $ma=mg\sin\alpha - T-F_{тр1}$

OY: $N_1 - mg\cos\alpha = 0$,

но $F_{тр1} = \mu N_1 = \mu\, mg\cos\alpha$, тогда $ma = mg\sin\alpha - T - \mu\, mg\cos\alpha$. (1)

*II тело* OX: $ma = T - F_{тр1}$

OY: $N_2 - mg = 0$,

но $F_{тр2} = \mu N_2 = \mu\, mg$, тогда $ma = T - \mu\, mg$. (2)

Решая систему уравнений (1) и (2),получим

$a = [mg\sin\alpha - mg(\mu + \mu\cos\alpha)]/(2m) = [g\sin\alpha - g\mu(1+\cos\alpha)]/2$; $T = m(a + \mu g)$.

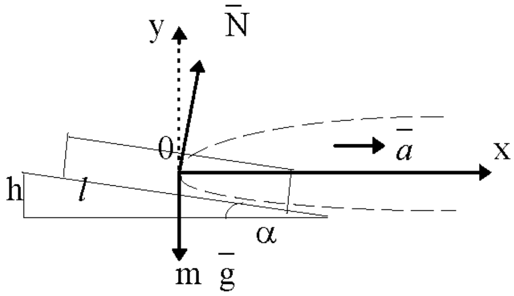
$a = 2$ м/с; $T = 5$ Н.

*Задача 4.* На сколько должен быть поднят наружный рельс над внутренним на закруглении железнодорожного пути радиусом 300 м, если ширина колеи 1524 мм? Скорость, при которой сила давления на рельсы перпендикулярна им, принять равной 54 км/ч.

*Дано*: R=300 м, $l$=1,524 м, v=15 м/с.

*Найти*: h - ?

*Решение.* Поезд должен двигаться по окружности радиуса R со скоростью v, т.е. с ускорением $a = v^2/R$, направленным горизонтально. Это ускорение вызывает равнодействующая сил $\bar{N}$ и $m\bar{g}$. Поэтому наружный рельс должен быть приподнят на некоторую высоту h. Второй закон Ньютона




$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$ в проекциях на оси OX и OY:

$ma = N\sin\alpha$, $N\cos\alpha - mg = 0$.

Откуда $\operatorname{tg}\alpha = ma/mg = v^2/(gR)$.

Так как угол $\alpha$ мал, то $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$. Из рис.16 $\sin\alpha = h/l$.

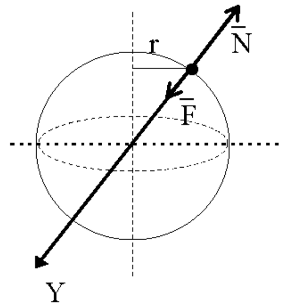
Следовательно, $h = lv^2/(Rg)$. h=0,12 м.

*Задача 5.* На экваторе некоторой планеты тело весит вдвое меньше, чем на полюсе. Плотность вещества этой планеты $3.10^3$ кг/м$^3$. Определить период вращения планеты вокруг своей оси.

*Дано*: $P = P_п/2$, $\rho = 3.10^3$ кг/м$^3$

*Найти*: T - ?

*Решение.* На тело, находящееся на поверхности планеты, действуют: $\bar{F}$ – сила тяготения со стороны планеты, $\bar{N}$ – сила нормальной реакции планеты. По определению, $F = GMm/R^2$, где $M$ - масса планеты, $m$ - масса тела, R-радиус планеты.




Масса планеты: $M = \rho V = (4/3)\pi R^3\rho$,

а $F = G(4/3)\pi R^3\rho m/R^2 = G(4/3)\pi R\rho m$. (1)

По второму закону Ньютона: $\bar{F} + \bar{N} = m\,\bar{a}_n$ ; в скалярной форме относительно оси Y:

$F–N=ma_n$, (2) или $4/3)G\pi R\rho m–N=ma_n$. (3)

Рассмотрим два частных случая движения тела.

1. Тело находится на полюсе, т.е. r=0, тогда линейная скорость тела $v=2\pi r/T=0$. Следовательно, уравнение (3) примет вид $(4/3)G\pi R\rho m–N=0$, откуда $N_п=(4/3)G\pi R\rho m$, (4)
$N_п$ - сила нормальной реакции на полюсе.

2. Тело находится на экваторе. В этом случае r=R и $v=2\pi r/T$. Тогда уравнение (3) примет вид: $(4/3)G\pi R\rho m - N=m(2\pi r)^2/RT^2$, откуда

$$T=\sqrt{\frac{m4\pi^2R}{4\pi G\rho mR/3-N}}, \qquad (5)$$

где N-сила нормальной реакции поверхности на экваторе. По условию задачи, $P_э=P_п/2$. Поскольку P=N, то $N=N_п/2$, или с учетом (4)
$N=(2/3)\ G\pi R\rho m$. Подставим формулу (6) в (5): $T=(6\pi/G\rho)^{1/2}\approx 9{,}7.10^3$ с.

## *Задачи для самостоятельной работы.*

2.1. Автомобиль массой 1 т останавливается при торможении за 5 с, пройдя при этом равнозамедленно расстояние в 25 м. Найти начальную скорость автомобиля; силу торможения.

2.2. Какую силу надо приложить к вагону, стоящему на рельсах, чтобы вагон стал двигаться равноускоренно и за время 30 с прошел путь 11 м? Масса вагона 16 т. Во время движения на вагон действует сила трения, равная 0,05 силы тяжести вагона.

2.3. Вагон массой 20 т движется с постоянным отрицательным ускорением, численно равным 0,3 м/с$^2$. Начальная скорость вагона равна 54 км/ч. 1) Какая сила торможения действует на вагон? 2) Через сколько времени вагон остановится? 3) Какое расстояние вагон пройдет до остановки?

2.4. Тело массой 0,5 кг движется так, что зависимость пройденного телом пути s от времени движения t дается уравнением $s=A\sin\omega t$, где A=5 см и $\omega=\pi$ рад/с. Найти силу, действующую на тело через 1/6 секунду после начала движения.

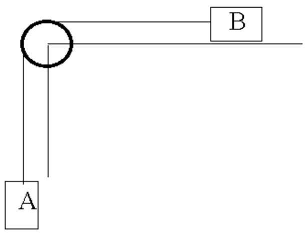
2.5. Трамвай, трогаясь с места, движется с постоянным ускорением 0,5 м/с$^2$. Через 12 с после начала движения мотор трамвая выключается и трамвай движется до остановки равнозамедленно. На всем пути движения трамвая коэффициент трения равен 0,01. Найти: 1) наибольшую скорость движения трамвая, 2) общую продолжительность движения, 3) отрицательное ускорение трамвая при замедленном движении, 4) общее расстояние, пройденное трамваем.

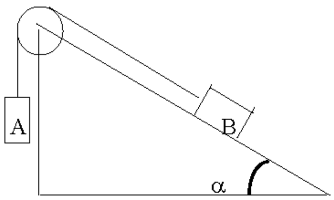
2.6. Автомобиль весит 1 т. Во время движения на автомобиль действует сила трения, равная 0,1 его силы тяжести. Найти силу тяги, развиваемую мотором автомобиля, если автомобиль движется с постоянной скоростью: 1) в гору с уклоном в 1 м на каждые 25 м пути, 2) пол гору с тем же уклоном.

2.7. Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 45°.Зависимость пройденного телом расстояния s от времени t дается уравнением $s=Ct^2$, где C=1,73 м/с$^2$. Найти коэффициент трения тела о плоскость.

2.8. На наклонной плоскости длиной 5 м и высотой 3 м находится груз массой 50 кг. Какую силу, направленную вдоль наклонной плоскости, надо приложить, чтобы: 1)удержать этот груз? 2)Втаскивать равномерно вверх? 3)Втаскивать вверх с ускорением 1 м/с$^2$. Коэффициент трения 0,2.

2.9. Невесомый блок укреплен на конце стола. Гири А и В равной массы $m_1=m_2=1$кг соединены нитью и перекинуты через блок. Коэффициент трения гири В о стол равен 0,1. Найти: 1) ускорение, с которым движутся гири, 2) натяжение нити. Трением в блоке пренебречь.




2.10. Невесомый блок укреплен на вершине наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha=30°$. Гири А и В равной массы 1 кг соединены нитью и перекинуты через блок. Найти: 1) ускорение, с которым движутся гири, 2) натяжение нити. Трением в блоке, а также трением гири В о наклонную плоскость пренебречь.

2.11. Решить предыдущую задачу при условии, что коэффициент трения гири В о наклонную плоскость равен 0,1. Трением в блоке пренебречь.

2.12. Три груза массой по 1 кг связаны нитью и движутся по горизонтальной плоскости под действием силы 10Н, направленной под углом 30° к горизонту. Определить ускорение системы и силы натяжения нитей, если коэффициент трения равен 0,1.

2.13. Человек везет двое саней массой по 15 кг каждые, связанные между собой веревкой, прикладывая силу 120 Н под углом к горизонту. Найти ускорение саней и силу натяжения веревки, связывающей сани, если коэффициент трения полозьев о снег 0,02.

2.14. Ведерко с водой, привязанное к веревке длиной 60 см, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Найти: 1) наименьшую скорость вращения ведерка, при которой в высшей точке вода из него не выливается, 2) натяжение веревки при этой скорости в высшей и низшей точках окружности. Масса ведерка с водой 2 кг.

2.15. Камень, привязанный к веревке, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Найти массу камня, если известно, что разность между максимальным и минимальным натяжениями веревки равна 9,8 Н.

2.16. Гирька массой 50 г, привязанная к нити длиною в 25 см, описывает в горизонтальной плоскости окружность. Скорость вращения гирьки соответствует 2 об/с. Найти натяжение нити.

2.17. Диск вращается вокруг вертикальной оси, делая 30 об/мин. На расстоянии 20 см от оси вращения на диске лежит тело. каков должен быть коэффициент трения между телом и диском, чтобы тело не скатилось с диска?

2.18. Определить скорость движения автомобиля массой 2 т по вогнутому мосту радиусом 100 м, если он давит на середину моста с силой 25 кН.

2.19. Самолет, летящий со скоростью 900 км/ч, делает “мертвую петлю”. Каков должен быть радиус “мертвой петли”, чтобы наибольшая сила, прижимающая летчика к сидению, была равна: пятикратному весу летчика? 2) десятикратному весу летчика?

2.20. Средняя высота спутника над поверхностью Земли 1700 км. Определить его скорость и период вращения.

2.21. Найти силу тяготения, действующую со стороны Земли на тело массой 1 кг, находящееся на поверхности Луны. Расстояние между центрами Земли и Луны принять равными 384 000 км.

2.22. Спутник делает 16 оборотов за время одного оборота Земли. Определить период, высоту и скорость спутника, считая его орбиту круговой.

## Тема 3. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ.

### 13. Законы Ньютоны для системы материальных точек. Закон сохранения импульса.

Третий закон Ньютона в соединении с первым и вторым законами позволили перейти от динамики отдельной материальной точки к динамике произвольной механической системы. Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек. Для i-й материальной точки согласно второму закону Ньютона: $\frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i) = \vec{F}_i$.

(1)

Все тела, не входящие в рассматриваемую механическую систему , называются внешними, а силы, действующие со стороны этих тел, называются *внешними силами.* Силы взаимодействия частей самой системы называются *внутренними.*

Пусть $\vec{F}_i^{внеш}$ – сумма всех внешних сил, действующих на i-ю точку системы, $\vec{F}_{ik}$ – внутренняя сила, действующая на i-ю точку со стороны k-ой, тогда: $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{внеш} + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik}$ . В результате (1) примет вид:

$$\frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \vec{F}_i^{внеш} + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik} \qquad (2)$$

Просуммируем левые и правые части (2) по i для всех материальных точек:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{внеш} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik} \qquad (3)$$

По третьему закону Ньютона: $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$. Отсюда $\vec{F}_{ik} + \vec{F}_{ki} = 0$ , т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik} = 0 .$$

Обозначим : $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{внеш} = \vec{F}^{внеш}$ – результирующая всех внешних сил и $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \vec{p}$ – импульс механической системы. Отсюда (3) примет вид:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{внеш}} \qquad (4)$$

Мы получили закон изменения импульса механической системы: *производная по времени от импульса механической системы равна вектору внешних сил, действующих на систему.*

Рассмотрим замкнутую (или изолированную) систему. Механическая система, на которую не действуют внешние силы, называют *замкнутой системой.*

Итак, если система замкнута, то $\vec{F}_i^{внеш}$=0. Из закона динамики для системы тел (материальных точек):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \qquad (5)$$

Из (5) следует, что $\boxed{\vec{p} = const}$ или

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = const} \qquad (6)$$

Мы пришли к ***закону сохранения полного импульса изолированной системы***: *при любом характере взаимодействия тел, образующих* *замкнутую систему, вектор полного импульса этой системы все время остается постоянным.*

Закон сохранения полного импульса изолированной системы – это универсальный закон природы. В более общем случае, когда система незамкнута, из (4) следует, что полный импульс незамкнутой системы не остается постоянным. Его изменение за единицу времени равно геометрической сумме всех внешних сил.

Если система незамкнута, то полный импульс незамкнутой системы не остается постоянным. Его изменение за единицу времени равно геометрической сумме всех внешних сил. Однако в некоторых случаях импульс незамкнутой системы также может сохраняться:

а) Иногда (например, при взрыве, ударе или выстреле) импульсы частей системы претерпевают большие изменения за сравнительно короткие промежутки времени. Это связано с возникновением в системе кратковременных, но весьма значительных по величине внутренних сил взаимодействия частей системы, по сравнению с которыми все постоянно действующие на систему внешние силы оказываются малыми. В этом случае внешними силами мы пренебрегаем и импульс всей системы в целом не изменяется.

б) Если система не замкнута, но $\vec{F}^{внеш}$=0, то по закону сохранения импульса импульс системы не изменяется с течением времени: $\vec{p} = const$.

в) Может оказаться, $\vec{F}^{внеш}$≠0, и $\vec{p} \neq const$, но $F_x^{внеш} = 0$ или $F_y^{внеш} = 0$. Тогда $p_x = const$ или $p_y = const$. Например, на систему действуют внешние силы, направленные вертикально, тогда $p_x = const$.

## 14. Энергия системы материальных точек. Закон сохранения механической энергии в консервативной системе.

Пусть имеем систему материальных точек. Относительно системы отсчета координаты точки изменяются вследствие их движения. Кроме того, они взаимодействуют между собой: $E_K+E_P=E$

Сумма потенциальной и кинетической энергии всех точек, входящих в эту систему, называется полной.

Выясним, как изменяется энергия в консервативной системе. Для этого запишем уравнение движения для i-ой точки:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{f}_{i1} + \vec{f}_{i2} + \ldots + \vec{f}_{in} + \vec{F}_i; \qquad i = 1,2\ldots,n$$

где $\vec{f}_{i1}; \vec{f}_{i2}; \ldots; \vec{f}_{in}$ –внутренние силы, действующие на i-ю точку, $\vec{F}_i$ – внешние.

За малое время $dt$ точка совершит перемещение $d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$. Умножим это выражение с уравнением движения:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\vec{v}_i dt = (\vec{f}_{i1} + \vec{f}_{i2} + \ldots + \vec{f}_{in})d\vec{r}_i + \vec{F}_i d\vec{r}_i \ .$$

$m_i \vec{v}_i d\vec{v}_i = dE_{K\,i}$ –изменение кинетической энергии одной точки.

$(\vec{f}_{i1} + \vec{f}_{i2} + \ldots + \vec{f}_{in})d\vec{r}_i = dA_{внутр} = -dE_{Pi}$ – изменение ее потенциальной энергии.

$\vec{F}_i d\vec{r}_i = dA_{i\,внеш}$ –работа внешних сил.

В итоге получаем: $dE_{K\,i} = -dE_{П\,i} + dA_{i\,внеш}$.

Просуммируем левые и правые части по всем точкам:

$$\sum_{i=1}^{n} dE_{K\,i} = -\sum_{i=1}^{n} dE_{П\,i} + \sum_{i=1}^{n} dA_{i\,внеш} \quad \Rightarrow \quad dE_K = -dE_П + dA_{внеш}$$

$dE_K$–изменение кинетической энергии всех точек,
$dE_P$– изменение потенциальной энергии всех точек,
$dA_{внеш}$ –работа внешних сил над всей системой за время dt.

$$dE_K + dE_P = dA_{внеш} \quad \Rightarrow d(E_K + E_P) = dA_{внеш}\ .$$

Но $E_K + E_P = E$ –полная механическая энергия системы.

$$dE = dA_{внеш}$$

$dE$–изменение полной механической энергии за время $dt$. Проинтегрируем по всему промежутку времени от $t_1$ до $t_2$. $\int_1^2 dE = \int_0^A dA_{внеш}$

$$\boxed{E_2 - E_1 = A_{внеш}}$$

Изменение полной механической энергии в незамкнутой консервативной системе равна работе внешних сил.

Если консервативная система замкнута, то внешние силы отсутствуют:

$$A_{внеш} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_2 - E_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_2 = E_1 \qquad E = const.$$

$$\boxed{E_K + E_P = const}$$

закон сохранения замкнутой консервативной системы:

*Сумма кинетической и потенциальной энергии всех материальных точек, входящих в замкнутую консервативную систему, остается величиной постоянной, какие бы изменения не происходили.*

Если система подвергается действию *неконсервативных* (диссипативных) сил, механическая энергия убывает, переходя в другие виды энергии (например, тепловую при действии сил трения). Но в целом энергия остается постоянной.

Согласно всеобщему закону сохранения и превращения энергии уменьшение или увеличение полной механической энергии системы в точности компенсируется увеличением или уменьшением какого-либо другого вида энергии.

Энергия никуда не исчезает и не появляется вновь, а лишь переходит от одного тела к другому или превращается из одного вида в другой.

## 15. Соударение двух тел.

Примером применения законов сохранения импульса и энергии при решении реальной физической задачи является удар абсолютно упругих и неупругих тел.

*Удар* или соударение – это столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время. При рассмотрении столкновений необходимо знать форму тел, массы покоя, скорости движения и их упругие свойства. Простейшим видом соударений является *центральный удар тел, при котором тела до удара движутся поступательно вдоль прямой, проходящей через их центры масс.*

Существует два предельных вида удара: абсолютно упругий и абсолютно неупругий. Рассмотрим центральный удар шаров для этих видов удара.

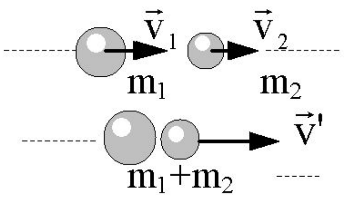


Рис.15.1.

1. ***Абсолютно неупругий удар*** *– это такой удар, после которого скорость соударяющихся тел оказывается одинаковой* (рис.15.1).

При абсолютно неупругом ударе кинетическая энергия тел полностью или частично превращается во внутреннюю энергию, поэтому здесь неприменим закон сохранения механической энергии, а применим лишь закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}', \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Частным случаем рассматриваемого взаимодействия будет такой, когда первоначальные импульсы $m_1\vec{v}_1$ и $m_2\vec{v}_2$ тел будут равны по модулю, но противоположны по направлению. В этом случае кинетическая энергия взаимодействующих тел полностью переходит во внутреннюю энергию, так как при этом совершается работа по деформации тел.

В общем случае во внутреннюю энергию тел переходит часть кинетической энергии (идет на работу деформации и нагревание тел), величину которой можно определить по разности кинетической энергии тел до и после удара:

$$\Delta E_K = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)v'^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2 .$$

Таким образом, для неупругого удара не выполняется закон сохранения механической энергии, но справедлив сохранения закон суммарной энергии различных видов – механической и внутренней.

**2. Абсолютно упругий** удар – это *такой удар, при котором механическая энергия тел не переходит в другие, немеханические, виды энергии,* так как этом случае нет деформации, на которую бы расходовалась часть энергии. Следовательно, для абсолютно упругого удара выполняются законы сохранения механической энергии и импульса:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

Перепишем систему в виде: $m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2)$ (1)

$m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2)$ (2)

Полагая $v_1 - v'_1 \neq 0$ и $v'_2 - v_2 \neq 0$, поделим первое уравнение на второе: $v_1 + v'_1 = v'_2 + v_2$ (3)

Решая систему из уравнений (3) и (2), получаем:

$$\boxed{v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}}; \quad \boxed{v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}}.$$

Скорости имеют положительный знак, если они совпадают с положительным направлением оси, выбранной нами, и отрицательный – в противном случае.

Проанализируем полученные выражения для двух шаров различных масс.

1. $m_1 = m_2 . \Rightarrow \quad v'_1 = \dfrac{2m_2 v_2}{2m_2} = v_2$ ; $v'_2 = \dfrac{2m_1 v_1}{2m_1} = v_1$ .

Шары равной массы «обмениваются» скоростями.

2. $m_1 > m_2$, $v_2 = 0$, (рис.15.2).

$v'_1 < v_1$, следовательно, первый шар продолжает двигаться в том же направлении, как и до удара, но с меньшей скоростью;

$v'_2 > v'_1$, следовательно, скорость второго шара после удара больше, чем скорость первого после удара.

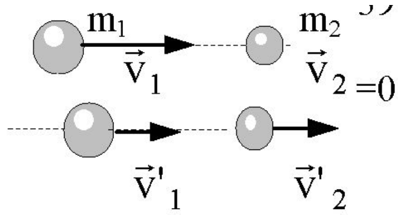


Рис.15.2.

3. $m_1 < m_2$, $v_2 = 0$, (рис.15.3)

$v'_1 < 0$, следовательно, направление движения первого шара при ударе изменяется – шар отскакивает обратно.

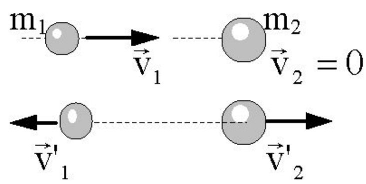


Рис.15.3.

$v'_2 < v_1$, следовательно, второй шар в ту же сторону, в которую двигался первый шар до удара, но с меньшей скоростью.

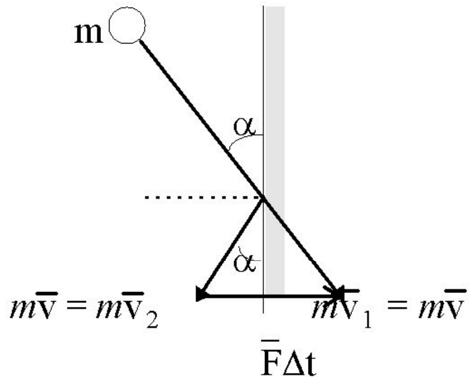
4. $m_2 >> m_1$ (например, столкновение шара со стенкой)

$v'_1 = -v_1$, $v'_2 \approx \dfrac{2m_1 v_1}{m_2} \approx 0$, следовательно, получившее удар большое тело останется в покое, а ударившее малое тело отскочит с первоначальной скоростью в противоположную сторону.

## РЕШЕНИЕ ЗАДА ПО ТЕМЕ 3

### *Примеры решения задач.*

*Задача 1.* Шар массой m, двигаясь со скоростью v, упруго ударяется о стенку под углом $\alpha$. Определить импульс силы, полученный стенкой.




<u>*Дано*: m, v, $\alpha$.</u>

*Найти*: $F\Delta t$ - ?

*Решение.* Изменение импульса шара численно равно импульсу силы, который получит стенка

$\bar{F}\Delta t = m\,\bar{v}_2 - m\,\bar{v}_1$. Из рис. $F\Delta t = 2mv \sin\alpha$.

*Задача 2.* На рельсах стоит платформа массой 10 т. На платформе закреплено орудие массой 5 т, из которого производится выстрел вдоль рельсов. Масса снаряда 100 кг; его начальная скорость относительно орудия 500 м/с. Определить скорость платформы в первый момент выстрела, если: 1) платформа стояла неподвижно; 2) платформа двигалась со скоростью 18 км/ч и выстрел был произведен в направлении ее движения; 3) платформа двигалась со скоростью 18 км/ч и выстрел был произведен в направлении, противоположном направлению ее движения.

<u>*Дано:* $m_1 = 10^4$ кг; $m_2 = 5.10^3$ кг; $m_3 = 100$ кг; $v_o = 500$ м/с; $v_1 = 5$ м/с.</u>

*Найти:* $v_x$ - ?

*Решение.* 1) При неподвижной платформе начальная скорость снаряда относительно земли равна его скорости относительно орудия. На основании закона импульса имеем $(m_1+m_2+m_3)v_1= m_3v_o+(m_1+m_2)v_x$.
В рассматриваемом случае $v_1=0$. Тогда $v_x= -m_3v_o/(m_1+m_2)= -3{,}33$ м/с= $-12$ км/ч. Знак "минус" указывает, что, если принять направление движения снаряда положительным, т.е. если принять $v_o>0$, то $v_x<0$, платформа стала двигаться в направлении, противоположном направлению движения снаряда.

2) Если выстрел был произведен в направлении движения платформы, то начальная скорость снаряда относительно земли равна $v_2=v_1+v_o$, и тогда закон сохранения импульса $(m_1+m_2+m_3)v_1= m_3\,(v_o+v_1) +(m_1+m_2)v_x$,
откуда $v_x=\{(m_1+m_2+m_3)v_1- m_3\,(v_o+v_1)\}/\,(m_1+m_2)=1{,}67$ м/с=6 км/ч.

Отметим, что $v_x>0$, т.е платформа продолжает двигаться в том же направлении, но с уменьшенной скоростью.

*Задача 3.* С наклонной плоскости высотой 1 м и длиною склона 10 м скользит тело массой в 1 кг. Найти: 1) кинетическую энергию тела у основания плоскости, 2) скорость тела у основания плоскости, 3) расстояние, пройденное телом по горизонтальной части пути до остановки. Коэффициент трения на всем пути считать постоянным и равным 0,05.

<u>*Дано:* $h=1$ *м,* $l=10$ *м,* $m= 1$ кг.</u>

*Найти:* Е - ? v- ? s - ?

*Решение.* Потенциальная энергия тела при скольжении его с наклонной плоскости переходит в кинетическую энергию и в работу против силы трения, т.е. $mgh=mv^2/2 + F_{тр}l$. Но $h=l\,\sin\alpha$, $F_{тр}=\mu mg\,\cos\alpha$, где $\alpha$-угол наклона плоскости.

1) $E= mv^2/2=mgh- F_{тр}l =mgl(\sin\alpha - \mu\,\cos\alpha)$. У нас $\sin\alpha=h/l=0{,}1$, т.е. $\alpha=5°44'$, следовательно, $\cos\alpha=0{,}995$. Подставляя числовые данные задачи, получим Е=4,9 Дж. 2) $v = \sqrt{\frac{2E}{g}}$ =3,1 м/с.

3) Кинетическая энергия, которую тело имеет у основания наклонной плоскости, переходит в работу против сил трения на горизонтальной части пути, т.е. $E=F_{тр}\,s =\mu mgs$, откуда $s=E/\mu mg=10$ м.

*Задача 4.* Сваю массой 100 кг забивают в грунт копром, масса которого 300 кг. Копер свободно падает с высоты 4 м и при каждом ударе опускается на 10 см. Определить силу сопротивления грунта, считая ее постоянной, а удар копра о сваю абсолютно неупругим.

<u>*Дано*: $m_1=300$ кг, $m_2=100$ кг, H=4м, h=0,1 м</u>

*Найти*: $F_c$ - ?

*Решение.* При падении копра его потенциальная энергия превращается в кинетическую: $m_1v_1^2/2=m_1gH$. Тогда скорость копра в момент удара о сваю $v_1=(2gh)^{1/2}$.

Удар о сваю неупругий. По закону сохранения импульса $m_1v_1=(m_1+m_2)v_2$. Отсюда $v_2=m_1v_1/(m_1+m_2)$. При движении сваи в грунт действует сила сопротивления, т.е. система незамкнута, поэтому изменение полной энергии системы: $\Delta E=A_{Fc}$;

$$\Delta E=-(m_1+m_2)gh-(m_1+m_2)v_2^2/2,$$

где $A_{Fc}=-F_ch$ - работа силы сопротивления.

Тогда $F_c=(m_1+m_2)(g+v_2^2/(2h))=(m_1+m_2)g[1+m_1^2H/(h(m_1+m_2)^2)]$.

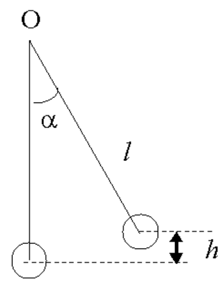
$F_c=94.10^3H=94$ кН.

*Задача 5.* Груз массой 1 кг, висящий на нити , отклоняют на угол 30°. Найти натяжение нити в момент прохождения грузом положения равновесия.

<u>*Дано:* $m$=1 кг, $\alpha$=30°</u>

*Найти:* $F_н$ - ?

*Решение.* Натяжение нити в момент прохождения маятником положения равновесия $F_н=mg+mv^2/l$.




Кроме того, по закону сохранения энергии $mgh=mv^2/2$, откуда $v=\sqrt{2gh}$. Но из рис.

$h=l-l\cos\alpha=l(1-\cos\alpha)$. Тогда

$mv^2/l=m2gh/l=2\,mg(1-\cos\alpha)$ и

$F_н=mg\,[1+2\,mg(1-\cos\alpha)]=12{,}4$ Н.

### ***Задачи для самостоятельной работы.***

3.1. Человек массой 60 кг, бегущий со скоростью 8 км/ч, догоняет тележку массой 80 кг, движущуюся со скоростью 2,9 км/ч, и вскакивает на нее. 1) С какой скоростью станет двигаться тележка? 2) С какой скоростью будет двигаться тележка, если человек бежал ей навстречу?

3.2. Снаряд массой 100 кг летящий горизонтально вдоль железнодорожного пути со скоростью 500 м/с, попадает в вагон с песком массой 10 т и застревает в нем. Какую скорость получит вагон, если: 1) вагон стоял неподвижно, 2) вагон двигался со скоростью 36 км/ч в том же направлении, что и снаряд, 3) вагон двигался со скоростью 36 км/ч в направлении, противоположном движению снаряда?

3.3. Конькобежец массой 70 кг , стоя на коньках на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой 3 кг со скоростью 8 м/с. Найти, на какое расстояние откатится при этом конькобежец, если известно, что коэффициент трения коньков о лед равен 0,02.

3.4. Человек, стоящий на неподвижной тележке, бросает вперед в горизонтальном направлении камень массой 2 кг. Тележка с человеком покатилась назад, и в первый момент после бросания ее скорость была равна 0,1 м/с. Масса тележки с человеком равна 100 кг. Найти кинетическую энергию брошенного камня через 0,5 с после начала его движения. Сопротивлением воздуха при полете камня пренебречь..

3.5. Тело массой 2 кг движется со скоростью 3 м/с и нагоняет второе тело массой 3 кг, движущееся со скоростью 1 м/с. Найти скорости тел после столкновения, если: 1) удар был неупругий, 2) удар был упругий. Тела движутся по одной прямой. Удар - центральный.

3.6. Пуля массой 10 г, летевшая со скоростью 400 м/с, пробив доску толщиной 5 см, уменьшила скорость вдвое. Определить силу сопротивления доски движению пули.

3.7. Танк, масса которого 15 т и мощность 368 кВт, поднимается в гору с уклоном $30^{\circ}$. Какую максимальную скорость может развивать танк?

3.8. Люстра массой 100 кг подвешена к потолку на металлической цепи, длина которой 5 м. Какова высота, на которую можно отклонить люстру, чтобы при последующих качаниях цепь не оборвалась, если известно, что разрыв наступает при силе натяжения 2 кН?

3.9. С башни высотой 25 м горизонтально брошен камень со скоростью 15 м/с. Найти кинетическую и потенциальную энергию камня спустя одну секунду после начала движения. Масса камня 0,2 кг.

3.10. Камень бросили под углом $60^{\circ}$ к горизонту со скоростью 15 м/с. Найти кинетическую, потенциальную и полную энергию камня: 1) спустя одну секунду после начала движения, 2) в высшей точке траектории. Масса камня 0,2 кг. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3.11. По наклонной плоскости высотой 0,5 м и длиною склона 1 м скользит тело массой в 3 кг. Тело приходит к основанию наклонной плоскости со скоростью 2,45 м/с. Найти: 1) коэффициент трения тела о плоскость, 2) количество тепла, выделенного при трении. Начальная скорость тела равна нулю.

3.12. Автомобиль массой в 1 тонну движется под гору при выключенном моторе с постоянной скоростью 54 км/ч. Уклон горы равен 4 м на каждые 100 м пути. Какую мощность должен развивать двигатель этого автомобиля, чтобы автомобиль двигался с той же скоростью в гору с тем же уклоном?

3.13. Молот массой 1,5 т ударяет по раскаленной болванке, лежащей на наковальне и деформирует болванку. Масса наковальни вместе с болванкой равна 20 т. Определить КПД при ударе молота, считая удар неупругим. Считать работу, совершенную при деформации болванки, полезной.

3.14. Два шара подвешены на параллельных нитях одинаковой длины так, что они соприкасаются. Масса первого шара 0,2 кг, масса второго 100 г. Первый шар отклоняют так, что его центр тяжести поднимается на высоту 4,5 см, и отпускают. На какую высоту поднимутся шары после соударения, если: 1) удар упругий, 2) удар неупругий?

3.15. Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на очень легком жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули в 1000 раз меньше массы шара. Расстояние от точки подвеса стержня до центра шара равно 1 м. Найти скорость пули, если известно, что стержень с шаром отклонился от удара пули на угол $10^{\circ}$.

## Тема 4. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА.
## 16. Момент силы. Момент инерции.

Теперь мы будем рассматривать движение такого тела, при котором существенную роль играют его размеры и форма, и поэтому тело нельзя рассматривать как материальную точку.

Введем основные величины применительно к простому случаю вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Пусть эта ось совпадает, например, с осью Oz декартовой системы координат. Пусть внешние силы, приложенные к разным точкам тела. лежат в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. Будем считать, что при вращении сила терния пренебрежимо мала.

Разобьем тело на столь малые элементы, чтобы их можно было бы считать материальными точками. Пусть на i-ю материальную точку массой $m_i$ и радиуса-вектора $\vec{r}$, действует внешняя сила $\vec{F}_i$ под углом $\alpha_i$ к направлению радиуса вектора.

Величина, равная векторному произведению радиуса-вектора материальной точки на вектор силы, называется ***моментом силы*** относительно заданной оси вращения:

$$\vec{M}_i = \left[r_i \vec{F}_i\right] \qquad (1).$$

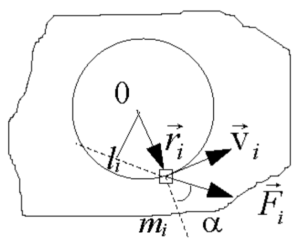


Рис.16.1

Вектор $\vec{M}_i$ направлен вдоль оси вращения. С помощью правила буравчика определяют, в какую именно сторону вдоль оси он направлен. [$M$]=Н.м.

Определим модуль вектора момента силы. Из (1) вытекает, что $M_i = F_i r_i \sin\alpha_i$, и, следовательно, при $\alpha_i = 0$ и $\alpha_i = \pi$ $M_i = 0$..

Продолжим линию силы и найдем плечо силы $l = r_i \sin\alpha_i$, тогда модуль момента силы: $M_i = l \cdot F_i$. определяется как произведение силы на плечо.

Рис.16.2.

Если *внешние силы* приложены к нескольким точкам тела, то результирующий или полный момент относительно оси вращения равен алгебраической сумме моментов каждой из сил относительной той же оси. $M=\sum_{к} M_к$. Например, на рис.16.2. результирующий момент: $M=M_1-M_2+M_3$.

Что касается полного момента всех внутренних сил (сил взаимодействия между всеми парами частиц) относительно оси вращения, то можно показать, принимая третий закон Ньютона, что он равен нулю.

***Момент инерции*** тела относительно оси вращения определяется как сумма моментов инерции материальных точек, составляющих тело.

*Момент инерции материальной точки $m_i$ определяется как величина, численно равная произведению массы на квадрат расстояния точки до оси вращения:* $I_i=m_i r_i^2$.

Тогда момент инерции тела: $I=\sum m_i r_i^2$ .

В общем случае, если тело сплошное, оно представляет собой множество точек с бесконечно малыми массам $dm$, и момент инерции тела определяется интегралом. Пределы интегрирования определяются размерами и формой тела: $I=\int_0^m r^2 dm$.

Момент инерции зависит от формы тела, относительно какой оси вращается тело, от распределения массы по объему тела.

Если ось вращения перенести на другое расстояние, то момент инерции изменяется и определяется с помощью ***теоремы Штейнера***: момент инерции тела $I$ относительно произвольной оси равен моменту инерции $I_0$ относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния $d$ между осями: $\boxed{I=I_0+md^2}$.

## 17. Определение моментов инерции тел.

1. *Момент инерции тонкостенного цилиндра массы $m$ и радиуса $R$ относительно его оси* (рис.17.1).

Все малые элементы такого цилиндра находятся на одном и том же расстоянии $R$ от его оси, проходящей через центр его масс. $I_c=\int_{(m)} R^2 dm=mR^2$, то есть $\boxed{I_c=mR^2}$.

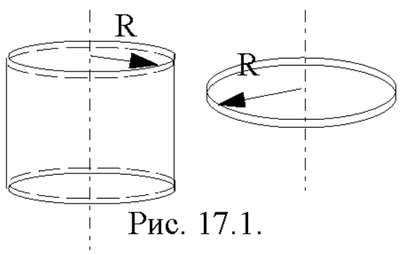


Рис. 17.1.

По этой же формуле вычисляется момент инерции однородного обруча относительно оси, перпендикулярной к плоскости обруча и проходящей через его центр.

2. *Момент инерции сплошного однородного кругового цилиндра массы m и радиуса R относительно его оси* (рис.17.2).

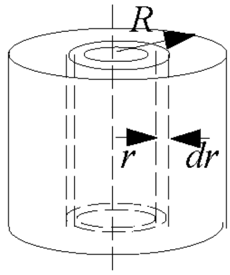


Рис.17.2

Разобьем мысленно цилиндр высотой $H$ на очень большое число соосных тонкостенных цилиндров, выделим один радиуса $r$. Его момент инерции: $dI_0 = r^2 dm = r^2 2\pi r\rho H dr = r^3 2\pi\rho H dr$,

так как $dm = \rho dV = \rho H dS = 2\pi r\rho H dr$.

$$I_0 = \int_0^R r^3 2\pi\rho H dr = 2\pi\rho H \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} R^4 \pi\rho H$$

но $m = \rho V = \rho\pi R^2 H$, поэтому: $\boxed{I_0 = mR^2/2}$.

По этой же формуле вычисляется момент инерции однородного диска относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр.

3. *Момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через центр масс* (рис.17.3.)

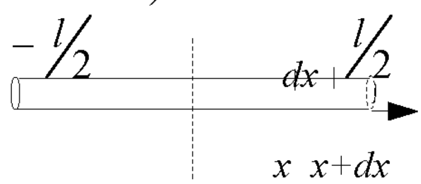


Рис. 17.3.

Разобьем стержень на малые элементы. Пусть $x$ – расстояние до оси, dx– длина элемента. Момент инерции этого элемента: $dI_0 = x^2 dm = x^2 \rho S dx$

$$I_0 = \int_{(m)} x^2 dm = \int_0^{l/2} x^2 \rho S dx + \int_0^{l/2} x^2 \rho S dx = 2\int_0^{l/2} x^2 \rho S dx = \frac{2}{3}\rho S\left(\frac{l}{2}\right)^3 = \frac{ml^2}{12}$$

так как $m = \rho V = \rho l S$. Итак, $\boxed{I_0 = ml^2/12}$.

Если ось вращения параллельна данной и проходит через один из концов стержня, то для нахождения момента инерции воспользуемся теоремой Штейнера: $I = I_0 + md^2$.

В данном случае $d = l/2$, а $I_0 = ml^2/12$, тогда

$$I = I_0 + md^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{(3+1)ml^2}{12} = \frac{ml^2}{3}.$$

Следовательно, момент инерции при таком переносе оси вращения увеличился в 4 раза.

Подобные рассуждения приводят к выражению моментов инерции других тел.

4. *Момент инерции шара* относительно его диаметра: $\boxed{I_0 = 0{,}4mR^2}$

Момент инерции шара относительно оси, параллельной диаметру и проходящее на расстоянии $l$ от центра масс: $I = 0{,}4\,mR^2 + ml^2$

5. *Момент инерции цилиндра с отверстием (колесе, муфта)*:

$$\boxed{I_0 = 0{,}5m(R_1^2 + R_2^2)}.$$

## 18. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела.

Основной закон динамики вращательного движения твердого тела устанавливает связь между полным моментом внешних сил и угловым ускорением тела.

Рассмотрим вначале материальную точку массой $m$, движущуюся по окружности радиуса $r$ (рис. 18.1). Пусть на нее действует постоянная сила $F$, направленная по касательной к окружности. По второму закону Ньютона эта сила вызывает тангенциальное ускорение:

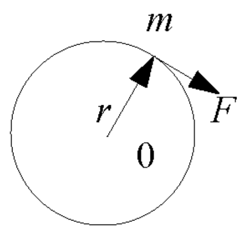


Рис.18.1.

$$a_\tau = F / m \text{ или } F = ma_\tau$$

Используя соотношение $a_\tau = \varepsilon r$, получаем $F = \varepsilon mr$.

Умножим обе части полученного равенства на $r$:

$$Fr = \varepsilon mr^2 \qquad (1).$$

Левая часть (1) является моментом силы: $M = Fr$. Правая часть (1) представляет собой момент инерции: $I = mr^2$. Таким образом,

$$M = \varepsilon I \text{ или } \varepsilon = M / I$$

Мы получили основное уравнение динамики вращательного движения материальной точки: *угловое ускорение материальной точки при ее вращении вокруг неподвижной оси пропорционально вращающему моменту и обратно пропорционально моменту инерции.*

Так как твердое тело представляет систему жестко связанных друг с другом материальных точек. Все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на оси вращения, поэтому для каждой из них справедливо соотношение: $M_i = \varepsilon_i I_i$.

В векторной форме оно примет вид: $\vec{M}_i = \vec{\varepsilon}_i I_i$

Уравнение движения одного элемента (среди совокупности других):

$$I_i \vec{\varepsilon}_i = \vec{M}_i + \vec{M}_i'$$

$\vec{M}_i'$ – моменты внутренних сил, $\vec{M}_i$ – моменты внешних сил. Просуммируем это соотношением по всем элементам:

$$\sum I_i \vec{\varepsilon}_i = \sum \vec{M}_i + \sum \vec{M}_i'$$

Силы взаимодействия между двумя элементами одинаковы и эти силы имеют одинаковое плечо ($\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$), поэтому $\sum \vec{M}_i' = 0$.

Под влиянием заданного (внешнего) момента силы тело будет вращаться с угловым ускорением $\varepsilon$, постоянным для всех элементов. Тогда:

$$\vec{\varepsilon} \sum I_i = \sum \vec{M}_i .$$

Сумма моментов инерции всех частиц определяет момент инерции твердого тела: $I = \sum m_i r_i^2 = \sum I_i$, а полный момент определяется как $\vec{M} = \sum \vec{M}_i$. Тогда получим следующее уравнение: $\boxed{\vec{M} = I\,\vec{\varepsilon}}$. Это уравнение описывает *основной закон динамики вращательного движения твердого тела:* $\vec{\varepsilon} = \dfrac{\vec{M}}{I}$ ,

угловое ускорение твердого тела прямо пропорционально полному моменту внешних сил и обратно пропорционально моменту инерции тела.

## 19. Кинетическая энергия вращения тела. Работа внешних сил при вращении твердого тела.

Определим кинетическую энергию вращающегося тела. Эта энергия должна быть равна сумме кинетических энергий отдельных материальных точек: $E_K = \sum \dfrac{m_1 v_i^2}{2}$. Учтем, что $v_i = \omega\, r_i$ и $I = \sum m_i r_i^2$, тогда получим: $E_K = \sum \dfrac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \omega^2 \sum \dfrac{m_i r_i^2}{2} = \omega^2 \dfrac{I}{2}$, $\boxed{E_K = \dfrac{I\omega^2}{2}}$.

Если тело катится по поверхности другого тела (например, цилиндр скатывается без трения с наклонной плоскости), то центр масс движется поступательно, а само тело вращается, поэтому энергия движения складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения:

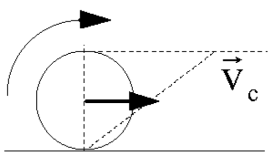


Рис.19.1.

$$E_K = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

где $v_c$ – скорость центра масс тела; $I$ – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, ω – угловая скорость вращения тела.

Из сопоставления кинетической энергии для поступательного и вращательного движений видно, что *мерой инертности* при вращательном движении служит *момент инерции.*

При вращении твердого тела его потенциальная энергия не изменяется, поэтому элементарная работа внешних сил равна приращению кинетической энергии тела: $dA = dE_K$ :

$$dA = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\omega \frac{d\omega}{dt} dt = I\,\omega\,\varepsilon\,dt\,.$$

Учитывая, что $I\varepsilon = M$ , $\omega dt = d\varphi$, имеем: $dA = M\,\mathrm{d}\,\varphi$ .

Работа внешних сил при повороте твердого тела на конечный угол $\varphi$ равна:

$$A = \int\limits_0^{\varphi_1} M\,\mathrm{d}\,\varphi.$$

Если $M = \mathrm{const}$, то формула для работы: $A = \int\limits_0^{\varphi_1} M\,\mathrm{d}\,\varphi = M\varphi$ , а если $M = 0$ , то внешние силы работу не производят.

## 20. Закон сохранения момента импульса.

***Момент импульса*** или *момент количества движения* относительно оси вращения для *i*-й материальной точки, имеющей линейную скорость $\vec{\mathrm{v}}_i$ определяется как: $\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i \cdot m_i\,\vec{\mathrm{v}}_i\right]$. Этот вектор является также направленным вдоль оси вращения и также в сторону, определяемую правилом буравчика. Так как $\vec{r}_i \perp \vec{\mathrm{v}}_i$ , то модуль вектора $\vec{L}_i$ равен $L_i = r_i m_i \mathrm{v}_i$ . Величина полного момента импульса твердого тела равна арифметической сумме моментов импульса всех его точек, так как при вращении тела все его точки вращаются в одном и том же направлении: $\vec{L} = \vec{\omega}\sum m_i r_i^2 = \vec{\omega}\,I$ . [*L*]=кг.м$^2$/с.

Момент импульса определяется формулой $\vec{L} = I\vec{\omega}$ и является вектором, совпадающим по направлению с вектором угловой скорости.

Будем считать, что момент инерции *I* остается все время постоянным, а угловая скорость изменяется со временем, так что $\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega}\,/\,dt$ . Продифференцируем $\vec{L} = I\vec{\omega}$ по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=I\frac{d\vec{\omega}}{dt},\Rightarrow\quad \frac{d\vec{L}}{dt}=I\frac{d\vec{\omega}}{dt}\quad\Rightarrow\quad \frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d(I\vec{\omega})}{dt}.$$

Сопоставляя полученное выражение с основным законом динамики вращательного движения, можно его записать в виде: $\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}$. В замкнутой системе момент внешних сил $\vec{M}=0$ и $\Rightarrow$ $\frac{d\vec{L}}{dt}=0$, откуда: $\boxed{\vec{L}=\text{const}}$, где $\vec{L}$ – векторная сумма моментов тел, входящих в эту систему.

Данное выражение представляет собой закон сохранения момента импульса: *сумма моментов импульса всех тел замкнутой системы сохраняется, то есть не изменяется с течением времени:* $I\vec{\omega}=\text{const}$.

Если в процессе вращения тела его момент инерции изменяется, то при этом должна изменяться и угловая скорость тела, причем согласно закону сохранения момента импульса: $I_1\vec{\omega}_1=I_2\vec{\omega}_2=\text{const}$.

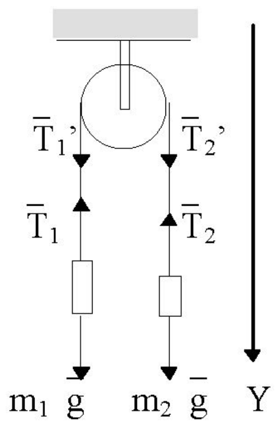
Этот закон справедлив не только для одного тела, но и для замкнутой системы тел: $I_1\vec{\omega}_1+I_2\vec{\omega}_2+\ldots+I_n\vec{\omega}_n=\text{const}$.

Закон сохранения момента импульса проявляется как в технике (например, в устройстве вертолета – для изменения ориентации), так и в природе (вращение Земли вокруг своей оси происходит с постоянной угловой скоростью, поскольку не изменяется ее момент инерции).

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ 4.

*Примеры решения задач.*

*Задача 1.* Через блок, укрепленный на горизонтальной оси, проходящей через его центр, перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы $m_1$=300 г и $m_2$=200 г. Масса блока $m_o$=300 г. Блок считать однородным диском. Найти ускорение грузов.




*Дано:* $m_1$=300 г , $m_2$=200 г, $m_o$=300 г

*Найти*: *a*-?

*Решение.* Второй закон Ньютона для первого груза

$m_1\bar{a}_1=m_1\bar{g}+\bar{T}_1$, (1)

для второго груза: $m_2\bar{a}_2=m_2\bar{g}+\bar{T}_2$. (2)

Основное уравнение динамики вращательного движения для блока:

$J\bar{\varepsilon}=\bar{M}_1+\bar{M}_2$, (3)

где $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$ - моменты сил натяжения $\bar{T}_1'$ и $\bar{T}_2'$.

Так как нить нерастяжима,то: $a_1 = a_2 = a$, $a = \varepsilon$ r, (4)
а так как нить невесома: $T_1 = T_1'$ и $T_2 = T_2'$.

Для перехода к скалярным соотношениям для описания движения грузов введем ось Y. Тогда $a_{1y} = a$, $a_{2y} = -a$. Тогда векторные уравнения (1) и (2) можно заменить скалярными

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1, \quad -m_2 a_2 = m_2 g - T_2. \qquad (5)$$

Моменты сил $\bar{T}_1'$ и $\bar{T}_2'$ направлены по оси вращения, но в противоположные стороны. Примем направление вектора $\bar{\omega}$ за положительное. Тогда векторное уравнение (3) можно переписать в виде

$J\varepsilon = T_1 r - T_2 r$, где r - радиус блока.

Очевидно, $T_1 = T_2$, если масса блока, а следовательно, и его момент инерции пренебрежительно малы. Выражая из (4) $\varepsilon$ и учитывая, что момент инерции однородного диска $J = m_o r^2/2$, получаем

$$m_o r^2 a/(2r) = T_1 r - T_2 r. \qquad (6)$$

Уравнения (5) и (6) образуют систему. Сокращая в уравнении (6) радиус блока r и складывая все три уравнения [предварительно второе из уравнений (5) надо умножить на -1], получаем

$a = g(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2 + m_o) = 1{,}5$ м/с$^2$.

*Задача 2.* На барабан массой 9 кг намотан шнур, к концу которого привязан груз массой 2 кг. Найти ускорение груза. Барабан считать однородным цилиндром. Трением пренебречь.

*Дано:* m=2 кг, $m_б$=9 кг

*Найти*: *a* - ?

Решение. Задачу можно решить двумя способами: 1) применяя основной закон динамики вращательного движения (см. решение предыдущей задачи) и 2) применяя закон сохранения энергии. Решение задачи первым способом предлагается сделать самостоятельно. При решении задачи вторым способом рассуждаем так: при опускании груза его потенциальная энергия уменьшается, переходя в кинетическую энергию груза и в кинетическую энергию вращения барабана. Таким образом,

$$mgh = mv^2/2 + J\omega^2/2. \qquad (1)$$

Но так как $J = m_б R^2/2$ и $\omega = v/R$, где R - радиус барабана, то уравнение (1) можно написать так: $mgh = mv^2/2 + m_б v^2/(2 \cdot 2) = (v^2/2)(m + m_б/2)$. (2)

Так как опускание груза происходит под действием постоянной силы, то движение груза равноускоренное, поэтому $h = at^2/2$ и $v = at$. (3).

Подставим (3) в (2) и получим $a = 2mm_б/(2m + m_б) = 3$ м/с.

*Задача 3.* Горизонтальная платформа массой 100 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, делая 10 об/мин. Человек массой 60 кг стоит при этом на краю платформы. С какой скоростью начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Считать платформу круглым однородным диском, а человека - точечной массой.

*Дано*: $m_1$=100 кг, $m_2$=60 кг, $\nu_1$=10 об/мин=1/6 об/с.

*Найти*: $\nu_2$ - ?

*Решение*. На основании закона сохранения момента количества движения имеем: $J_1\omega_1=J_2\omega_2$ (1),

где $J_1$ - момент инерции платформы с человеком, стоящим на ее краю; $J_2$ - момент инерции платформы с человеком, стоящим в центре платформы; $\omega_1$ и $\omega_1$ - угловые скорости платформы соответственно в первом и во втором положениях человека. При этом

$$J_1 = m_1R^2/2 + m_2R^2 \text{ и } J_2 = m_1R^2/2, \qquad (2)$$

где R - радиус платформы. Подставляя (2) в (1) и учитывая, что $\omega=2\pi\nu$, получим $(m_1R^2/2 + m_2R^2)\, 2\pi\nu_1 = 2\pi\nu_2\, m_1R^2/2$,

откуда $\nu_2=\nu_1(m_1R^2+2m_2R^2)/ m_1R^2=\nu_1(m_1+2m_2)/ m_1$=22 об/мин.

***Задачи для самостоятельной работы.***

4.1. Однородный стержень длиною 1 м и массой 0,5 кг вращается в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через середину стержня. С каким угловым ускорением вращается стержень, если вращающий момент равен $9,81.10^{-2}$Н.м?

4.2. Маховик, момент инерции которого равен 63,6 кг.м$^2$, вращается с постоянной угловой скоростью 31,4 рад/с. Найти тормозящий момент, под действием которого маховик останавливается через 20 с.

4.3. К ободу колеса, имеющего форму диска, радиусом 0,5м и массой 50 кг приложена касательная сила в 98 Н. Найти: 1)угловое ускорение колеса, 2)через сколько времени после начала действия силы колесо будет иметь скорость, соответствующую 100 об/с?

4.4. Маховое колесо, имеющее момент инерции 245 кг.м$^2$, вращается, делая 20 об/с. Через минуту после того как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось. Найти: 1) момент сил трения, 2) число оборотов, которое сделало колесо до полной остановки после прекращения действия сил.

4.5. На барабан радиусом 20 см, момент инерции которого равен 0,1 кг.м$^2$, намотан шнур, к которому привязан груз массой 0,5 кг. До начала вращения барабана высота груза над полом равна 1 м. Найти: 1) через сколько времени груз опустился до пола, 2) кинетическую энергию груза в момент удара о пол, 3) натяжение нити. Трением пренебречь.

4.6. Две гири с разными массами соединены нитью, перекинутой через блок, момент инерции которого J=50 кг.м$^2$ и радиус R=20 см. Момент сил трения вращающегося блока равен $M_{тр}$=98,1 Н.м. Найти разность сил натяжений нити $T_1$-$T_2$ по обе стороны блока, если известно, что блок вращается с постоянным угловым ускорением 2,36 рад/с$^2$. Блок считать однородным диском.

4.7. Блок массой 1 кг укреплен на конце стола (см. рис. 15 к зад.4.14). Гири А и В равной массы 1 кг соединены нитью и перекинуты через блок. Коэффициент трения гири В о стол равен 0,1. Блок считать однородным диском. Трением в блоке пренебречь. Найти: 1) ускорение, с которым движутся гири, 2) натяжение $T_A$ и $T_B$ нитей.

4.8. Какой путь пройдет катящийся без скольжения диск, поднимаясь вверх по наклонной плоскости с углом наклона 30$^o$, если ему сообщена начальная скорость 7 м/с, параллельная наклонной плоскости.

4.9. Радиус вала махового колеса $r=10^{-2}$ м. На вал намотан шнур, к концу которого привязан груз массой $m=0,2$ кг. Под действием силы тяжести груз опускается за $t=5$ с с высоты $h_1=1,2$ м, а затем, вследствие вращения колеса, по инерции поднимается на высоту $h_2=0,8$ м. Определить момент инерции колеса.

4.10. Медный шар радиусом R=10 см вращается со скоростью, соответствующей $\nu=2$ об/с, вокруг оси, проходящей через его центр. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить угловую скорость вращения шара вдвое.

4.11. Вентилятор вращается со скоростью, соответствующей 900 об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки 75 об. Работа сил торможения равна 44,4 Дж. Найти: 1) момент инерции вентилятора, 2) момент силы торможения.

4.12. Маховик вращается с постоянной скоростью, соответствующей $\nu=10$ об/с; его кинетическая энергия $E_к$ = 800 Дж. За сколько времени вращающий момент сил M=50 Н.м, приложенный к этому маховику, увеличит угловую скорость маховика в два раза?

4.13. Горизонтальная платформа массой 80 кг и радиусом 1 м вращается с угловой скоростью, соответствующей 20 об/мин. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. Какое число оборотов в минуту будет делать платформа, если человек, опустив руки, уменьшить свой момент инерции от 2,94 кг.м$^2$ до 0,98 кг.м$^2$? Считать платформу круглым однородным диском.

## Тема 5. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

### 21. Колебательное движение. Гармонические колебания.

Движения, обладающие той или иной степенью повторяемости, называются ***колебаниями.***

Если значения физических величин, изменяющихся в процессе движения, повторяются через равные промежутки времени, то такое движение называется ***периодическим.*** Примерами периодического движения могут служить движение планет вокруг Солнца, движение поршня в цилиндре двигателя внутреннего сгорания и др. В зависимости от физической природы колебательного процесса и «механизма» его возбуждения различают механические и электромагнитные колебания. Колебательную систему вне зависимости от ее физической природы называют ***осциллятором.*** Примером осциллятора может служить колеблющийся груз, подвешенный на пружине или нити.

***Полным колебанием*** *называют один законченный цикл колебательного движения, после которого оно повторяется в том же порядке.*

По способу возбуждения колебания делят на: *свободные*(собственные), происходящие в представленной самой себе системе около положения равновесия после какого-либо первоначального воздействия; *вынужденные* – происходящие при периодическом внешнем воздействии; *параметрические* – происходящие при изменении какого-либо параметра колебательной системы; *автоколебания* – происходящие в системах, самостоятельно регулирующих поступление внешних воздействий.

*Собственные* колебания являются не только самыми распространенными, но и самыми важными с точки зрения теории колебаний, так как условия возникновения и характер всех других типов колебаний существенно зависят от характера собственных колебаний.

Любое колебательное движение характеризуется ***амплитудой*** *A — максимальным отклонением колеблющейся точки от положения равновесия.*

Колебания точки, происходящие с постоянной амплитудой, называют ***незатухающими,*** а колебания с постепенно уменьшающейся амплитудой – ***затухающими.***

*Время, в течение которого совершается полное колебание, называют* ***периодом*** *(T).*

***Частотой*** $\nu$ *периодических колебаний называют число полных колебаний, совершаемых за единицу времени:*

Единица частоты колебаний — *герц* (Гц). *Герц – это частота колебаний, период которых равен* 1 с: 1 Гц = 1 $с^{-1}$.

***Циклической*** *или* ***круговой частотой*** *периодических колебаний называется число полных колебаний, совершаемых за время* 2π с:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \qquad [\omega]=\text{рад/с}.$$

Если положение тела в любой момент времени может быть описано единственным параметром, то тело имеет одну степень свободы. Такое колеблющееся тело называют *одномерным осциллятором*.

Несмотря на большое разнообразие колебательных процессов, все они совершаются по некоторым общим закономерностям и могут быть сведены к совокупности простейших периодических колебаний, называемых гармоническими. ***Гармонические*** – это такие колебания, которые описываются периодическим законом:

$$\xi(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

или $\xi(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ (1)

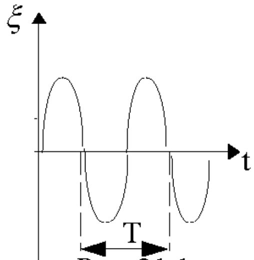


Рис. 21.1.

где $\xi(t)$ – периодически изменяющаяся величина (смещение, скорость, сила и т.д.), А – амплитуда. Система, закон движения которой имеет вид (1), называется одномерным (линейным) классическим гармоническим осциллятором или сокращенно ***гармоническим осциллятором***.

Аргумент синуса или косинуса $(\omega t + \varphi_0)$ называется *фазой колебаний.* Фаза колебания определяет смещение в момент времени t. Начальная фаза $\varphi_0$ определяет смещение тела в момент начала отсчета времени.

*Фаза колебаний представляет собой угловую меру времени, прошедшего от начала колебаний.*

Гармоническое колебание может быть представлено как движение проекции на некоторую ось конца вектора, длина которого равна амплитуде, отложенного из произвольной точки оси под углом, равным начальной фазе (рис.21.2). Пусть в плоскости рисунка некоторый вектор ОВ вращается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω. Пусть длина вектора есть А. Проекция вектора ОВ на ось ОХ имеет вид: $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, где $\varphi = \omega t + \varphi_0$ – угол, образованный вектором с осью ОХ.

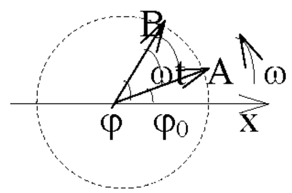


Рис.21.2.

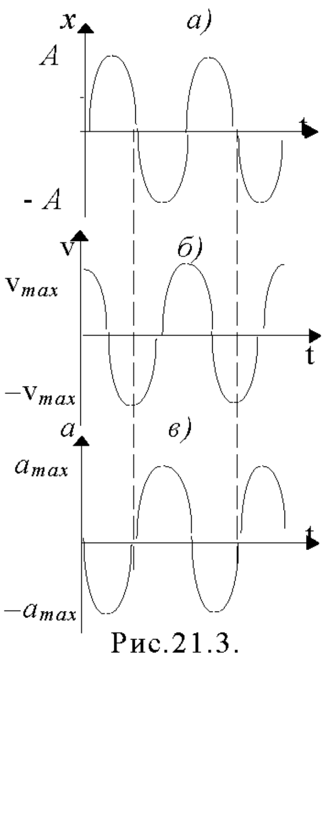


Рис.21.3.

Рассмотрим смещение $x$ колеблющегося тела относительно положения равновесия ($\xi = x$, рис.21.3, *а*).Уравнение гармонического колебания:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Первая производная от $x$ по времени дает выражение для скорости движения тела:

$$\mathrm{v} = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)\ ; \qquad (2)$$

Скорость достигает своего максимального значения в момент времени, когда $\cos(\omega t+\varphi_0)=1$: $v_{max}=A\omega$. Смещение же точки в этот момент рано нулю $x=0$ (рис. 21.3, *б*).

Ускорение изменяется со временем также по гармоническому закону:

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}A\omega\cos(\omega t+\varphi_0)=-A\omega^2(\sin\omega t+\varphi_0)=-\omega^2 x\,, \qquad (3)$$

где $A\omega^2$ – максимальное значение ускорения. Знак минус означает, что ускорение направлено в сторону, противоположную смещению, т.е. ускорение и смещение изменяются в противофазе (рис. 21.3, *в*). Из рис. 21.3. видно, что скорость достигает максимального значения, когда колеблющаяся точка проходит положение равновесия. В этот момент смещение и ускорение равны нулю.

## 22. Дифференциальное уравнение свободных колебаний. Простейшие механические колебательные системы.

***Свободными*** (собственными) называются колебания, которые происходят в отсутствие переменных внешних воздействий на колебательную систему. Они возникают вследствие какого-либо начального отклонения этой системы от состояния ее устойчивого равновесия. Для того, чтобы тело совершало гармоническое колебательное движение, на него должна действовать сила, всегда направленная к положению равновесия, а по величине – прямо пропорциональная смещению от этого положения. Силы, направленные к положению равновесия, называются ***возвращающими.***

Рассмотрим свободные колебания, происходящие в системе с одной степенью свободы. Пусть тело массой $m$ укреплено на пружине, упругость которой $k$ (пружинный маятник, рис.22.1). В отсутствие сил трения на тело, выведенное из положения равновесия, действует упругая сила пружины $F=-kx$. Тогда по второму закону динамики $F=m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

имеем: $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-kx$ или $m\dfrac{d^2x}{dt^2}+kx=0$. (1)

Если ввести обозначение $\omega=\sqrt{k/m}$, то уравнение (1) можно переписать в следующем виде: $\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0}$ (2)

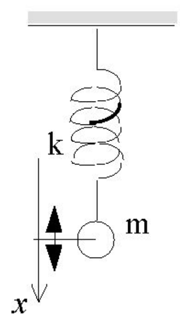


Рис.22.1

Это и есть дифференциальное уравнение свободных колебаний с одной степенью свободы. Его решением является функция вида $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$. Величина $\omega = \sqrt{k / m}$ является циклической частотой колебаний. Период колебаний пружинного маятника:

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi\sqrt{m / k} \qquad (3).$$

**Физический маятник**. Его образует твердое тело, подвешенное в поле тяжести на закрепленной горизонтальной оси. Возвращающим моментом является момент силы тяжести $M = -mgl\sin\alpha$, где $l$ – расстояние от оси до центра тяжести тела.

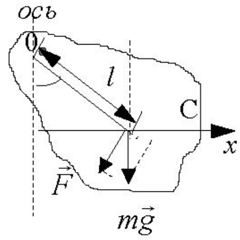


Рис. 22.2.

При малых значениях $\sin\alpha \approx \alpha$, тогда возвращающий момент: $M = -mgl\alpha$.

В соответствии с основным законом динамики вращения: $M = J\varepsilon$, где J – момент инерции маятника относительно оси, ε – угловое ускорение.

Так как $\varepsilon = -\omega^2\alpha$, то $M = -J\omega^2\alpha$. Приравнивая два момента для одного тела, находим:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}; \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}, \qquad (4)$$

где $L = \dfrac{J}{ml}$ – приведенная длина физического маятника.

***Математический маятник***. Это модель, в которой вся масса сосредоточена в материальной точке, колеблющейся на невесомой и недеформируемой нити (рис.22.3).

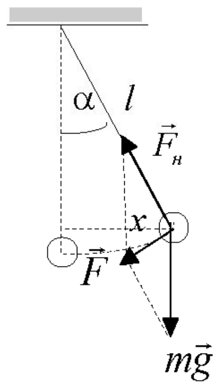


Рис.22.3.

При отклонении материальной точки от положения равновесия на малый угол α, такой, чтобы выполнялось условие $\sin\alpha \approx \alpha$, на тело будет действовать возвращающая сила $F = -mg\sin\alpha = mg\alpha$. Знак минус указывает, что сила направлена в сторону, противоположную смещению. Так как $\sin\alpha \approx \alpha = x / l$, то сила равна $F = -\dfrac{mg}{l}x$. Сила пропорциональна смещению, следовательно, под действием этой силы материальная точка будет совершать гармонические колебания. Обозначим $\dfrac{mg}{l} = k$, где $k = \omega^2 x$, имеем: $\omega^2 = g / l$ или $\omega = \sqrt{g / l}$. Отсюда период колебаний математического маятника: $T = 2\pi\sqrt{l / g}$.

## 23. Энергия гармонических колебаний.

Характерной чертой гармонического осциллятора является то, что средние значения кинетической и потенциальной энергии осциллятора равны друг другу и каждое из них составляет половину полной энергии. Покажем это.

Кинетическую энергия колеблющегося тела можно определить, если в выражение для кинетической энергии $E_K = m\text{v}^2/2$ подставить скорость $\text{v} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$ :

$$E_K = \frac{m\text{v}^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega\, t \qquad (1).$$

Потенциальная энергия, обусловленная упругой силой, определяется как эквивалент работы, необходимой для смещения тела на расстояние x от положения равновесия, и равна:

$$E_P = -\int_0^x (-kx)dx = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2 \omega t\,.$$

Учитывая, что $k = \omega^2 x$ , получим:

$$E_P = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t\,. \qquad (2).$$

Полная механическая энергия осциллятора равна:

$$E = E_K + E_P\,.$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t =$$

$$= \frac{m\omega^2 A^2}{2}(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = \frac{m\omega^2 A^2}{2}$$

$$E = \frac{m\omega^2 A^2}{2}.$$

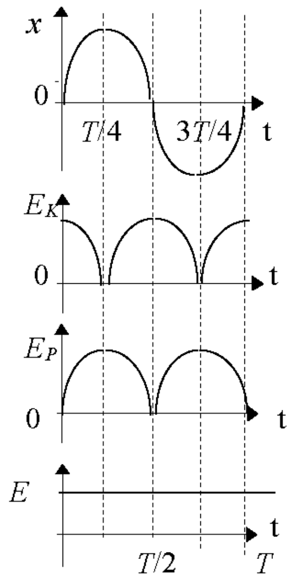


Рис.23.1.

Из выражений (1) и (2) видно, что кинетическая и потенциальная энергии изменяются со временем, причем, когда кинетическая энергия максимальна, потенциальная энергия обращается в нуль, и наоборот (рис.23.1). Период колебания кинетической и потенциальной энергий вдвое меньше периода колебаний системы. Полная механическая энергия гармонического колебания постоянна и пропорциональна квадрату амплитуды и квадрату частоты. Постоянство полной механической энергии обусловлено отсутствием потерь энергии на совершение работы против сил сопротивления.

## 24. Затухающие колебания.

Реально свободные колебания под действием сил сопротивления всегда *затухают*. Объясняется это действием сил, тормозящих движение, например, сил трения в месте подвеса при колебаниях маятника, или силой сопротивления среды. В этом случае энергия механических колебаний постепенно расходуется на работу против этих сил. Поэтому свободные колебания под действием сил сопротивления всегда затухают.

Пусть точка совершает линейное гармоническое колебание в вязкой среде. Из опыта известно, что сила сопротивления среды зависит от скорости и направлена в сторону, противоположную скорости. При малых скоростях: $F_{сопр} = -r\text{v} = -r\dfrac{dx}{dt}$, где $r$ – постоянная величина, называемая коэффициентом сопротивления среды. Уравнение колебаний:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt}.$$

Введем обозначения: $\dfrac{r}{m} = 2\beta$, $\dfrac{k}{m} = \omega_0^2$, тогда дифференциальное уравнение затухающего колебания:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (1)$$

где $\beta$ – коэффициент затухания, $\omega_0$ – собственная частота колебания. При отсутствии трения $\beta$ =0, уравнение примет вид уравнения для свободных незатухающих колебаний. В результате решения уравнения (1) получим зависимость смещения x от времени, то есть уравнение затухающего колебательного движения:

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (2)$$

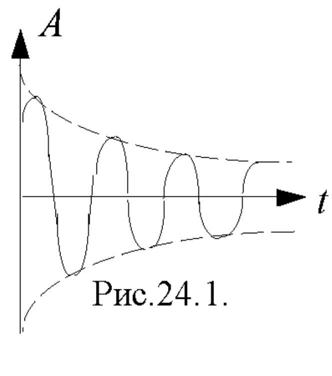


Рис.24.1.

Выражение $A_0 e^{-\beta t}$ называется амплитудой затухающего колебания. Амплитуда уменьшается с течением времени и тем быстрее, чем больше коэффициент затухания. Огибающая на графике зависит от $\beta$. Чем она больше, тем круче огибающая, то есть колебания быстрее затухают (рис.24.1).

Путем подстановки функции (2) и ее производных по времени в уравнение (1), можно найти значение угловой частоты: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Период затухающих колебаний равен: $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$.

Наглядной характеристикой затухания является отношение значений двух амплитуд, соответствующих промежутку времени в один период. Это отношение называют ***декрементом затухания*** $\theta$ :

$$\theta = \frac{A_t}{A_{t+T}} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T} .$$

Его натуральный логарифм есть безразмерная величина, называемая логарифмическим декрементом затухания: $\delta = \ln \dfrac{A_t}{A_{t+T}} = \beta T$ .

Промежуток времени $\tau = 1/\beta$, в течение которого амплитуда затухающего колебания убывает в $e$ раз, называют *временем релаксации*.

Тогда выражение для логарифмического декремента затухания примет вид: $\delta = \dfrac{T}{\tau}$ или $\delta = \dfrac{1}{N}$ .

***Логарифмический декремент затухания*** – величина, обратная числу колебаний N, по истечении которых амплитуда колебаний уменьшается в $e$ раз.

## 25. Вынужденные колебания. Резонанс.

Колебания системы, которые совершаются за счет работы периодически меняющейся внешней силы, называются *вынужденными*.

Пусть на систему действует внешняя сила, меняющаяся со временем по гармоническому закону: $F_{вн} = F_0 \cos\omega t$ , где $F_0$ – амплитуда силы (максимальное значение), ω – угловая частота колебаний вынуждающей силы. Тогда уравнение движения будет иметь вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx + r\frac{dx}{dt} = F_0 \cos\omega t .$$

Разделим обе части этого уравнения на m и введем вновь обозначения: $\dfrac{r}{m} = 2\beta$, $\dfrac{k}{m} = \omega_0^2$, тогда получим неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \qquad (1)$$

Решение этого уравнения, как известно из высшей математики, представляет собой сумму свободных и вынужденных колебаний:

$$x(t) = x_{своб}(t) + x_{вын}(t)$$

Таким образом, вынуждающая сила раскачивает систему, сообщая ей запас энергии, и пополняет расходуемую энергию, поддерживая колебательное движение. В первый момент система совершает помимо вынужденных еще свободные колебания. Частота свободных колебаний определяется по известной формуле: $\omega_{своб} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}$. Эти колебания затухают, и устанавливаются колебания, частота которых равна частоте вынуждающей силы, то есть вынужденные колебания. Когда работа вынуждающей силы сравнивается с энергией потерь, колебания становятся ***установившимися***. Амплитуда этих колебаний должна быть постоянной, если постоянна амплитуда вынуждающей силы.

Решение дифференциального уравнения при установившемся движении имеет вид:

$$x_{вын}(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (2)$$

где А, φ – величины, которые требуется определить, ω – круговая частота колебаний внешней переменной силы. Подставляя (2) в (1) (без вывода), получаем искомые величины:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^{\ 2} - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \qquad (3)$$

$$\varphi = arctg\frac{2\beta\omega}{(\omega_0^{\ 2} - \omega^2)} \qquad (4)$$

Амплитуда колебаний зависит от амплитуды и частоты внешних сил. При некоторой частоте внешних сил знаменатель в выражении (3) будет иметь минимальное значение, а амплитуда вынужденных колебаний – максимальное значение. Эта частота называется ***резонансной***. Для ее нахождения, приравниваем к нулю производную:

$$\frac{d}{dt}\left[(\omega^2 - \omega_0^{\ 2})^2 + 4\beta^2\omega\right] = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left[\omega_0^{\ 4} - 2\omega_0^2\omega^2 + \omega^4 + 4\beta^2\omega\right] = 0$$

$$-4\omega_0^2\omega + 4\omega^3 + 8\beta^2\omega = 0$$

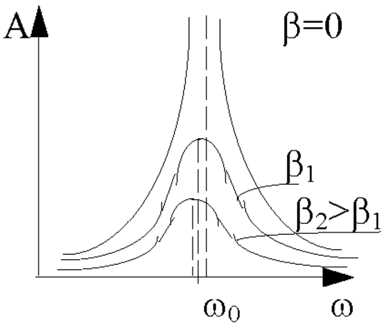


Рис. 25.1.

Сократим на $4\omega: -\omega_0^2 + \omega^2 + 2\beta^2 = 0$,

откуда получим: $\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$.

Резонансная амплитуда: $A_{рез} = \frac{F_0/m}{2m\beta\sqrt{\omega_0^{\ 2} + \beta^2}}$

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте $\omega_0$, называется ***резонансом.***

При коэффициенте затухания $\beta=0$, когда отсутствуют силы сопротивления, $\omega_{рез}=\omega_0$, а $A_{рез}$ становится бесконечно большой. На рисунке 25.1. даны зависимости амплитуды колебаний от частоты вынуждающей силы. Отдельные кривые соответствуют различным значениям коэффициента затухания $\beta$. Эти кривые называются резонансными. Чем меньше коэффициент затухания, тем резче изменяется амплитуда вынужденных колебаний. При резонансе наступают наиболее благоприятные условия для поступления энергии в колеблющуюся систему от источника внешней силы. Увеличение амплитуды происходит до тех пор, пока вся работа внешней силы не сравняется с энергией потерь.

## 26. Волновые процессы. Уравнение бегущей волны. Фазовая и групповая скорость.

Процесс распространения колебаний в среде называется ***волновым*** процессом (или ***волной***).

Все разнообразие волн в природе и технике подразделяют на два типа: волны механические (упругие) и электромагнитные.

***Упругими*** (или ***механическими***) волнами называются механические возмущения, распространяющимися в упругой среде.

Упругие волны бывают продольные и поперечные. В ***продольных*** волнах частицы среды колеблются в направлении распространения волны, в ***поперечных*** – в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения. Поперечные волны возникают при деформациях сдвига. Поэтому в жидкой и газообразной средах возникают только продольные волны.

Скорость распространения продольных волн в тонком стержне $v=\sqrt{E/\rho}$, где E – модуль Юнга, $\rho$ – плотность среды.

Скорость распространения поперечных волн в изотропном твердом теле $v=\sqrt{N/\rho}$, где $N$ – модуль сдвига.

Скорость распространения продольных (звуковых) волн в жидкости и в газе $v=\sqrt{K/\rho}$, где К – модуль объемной упругости среды, $\rho$ – плотность среды. Например, в воздухе: $v=20{,}1\sqrt{T}м/с\approx(331+0{,}6t)м/с$, где Т – термодинамическая температура, измеренная по шкале Кельвина, t– температура, измеренная по шкале Цельсия.

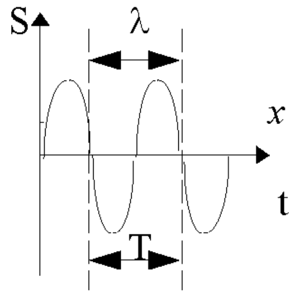


Рис.26.1.

При распространении колебаний в среде частицы не перемешаются вместе с волной, а лишь колеблются около своих положений равновесия. Поступательно перемещаются лишь фаза и энергия колебаний.

Графически волну изображают так же, как и колебания (рис.26.1).

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковых фазах, называется *волновой поверхностью*. В зависимости от формы волновой поверхности различают сферические, плоские, цилиндрические волны. Геометрическое место точек, до которых доходят колебания с одинаковой фазой к некоторому моменту времени *t*, называется *фронтом волны.* Фронт волны является частным случаем волновой поверхности.

Пусть плоская волна распространяется вдоль оси x (рис.26.1). Эта волна характеризуется: длиной волны, периодом, амплитудой, частотой, фазовой скоростью.

Расстояние, на которое определенная фаза распространяется за один период колебания, называется *длиной волны* λ. Из рисунка видно, что λ – это наименьшее расстояние между точками, колеблющимися в одинаковых фазах. Скорость распространения волны (фазовая скорость). *Фазовая скорость* –равна скорости перемещения в пространстве точек поверхности, соответствующей любому фиксированному значению фазы.

$$\mathrm{v} = \frac{dx}{dt} = \frac{\lambda}{T}.$$

Волна, распространяющаяся в пространстве от какого-либо источника называется *бегущей волной.*

Уравнением волны называется алгебраическое выражение, которое дает зависимость смещения колеблющейся точки s как функция ее координат (x) и времени t: $s = f(x,\ t)$.

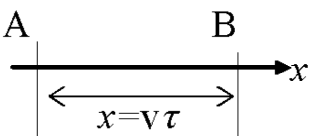


Рис.26.2.

Допустим, что в точке A упругой среды находится источник, который колеблется по закону:

$$s = A\sin\omega t\ .$$

Возьмем на оси 0X произвольную точку B, лежащую на расстоянии *x* от начала координат (рис.47.2.). Колебания дойдут до точки B через промежуток времени: $\tau = x/\mathrm{v}$. То есть точка B начнет колебаться на время τ позже точки 0. Если считать, что колебания не затухают, то можно определить смещение точки B в некоторый момент времени t:

$$s = A\sin\omega(t-\tau) \quad \text{или} \quad s = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}}\right). \qquad (1)$$

Это уравнение *бегущей волны.*

В общем случае уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси 0X имеет вид:

$$s = A\sin\left[\omega(t-\frac{x}{\text{v}})+\varphi_0\right], \qquad (2)$$

где $\varphi_0$ – начальная фаза колебаний; $\left[\omega(t-\frac{x}{\text{v}})+\varphi_0\right]$– фаза плоской бегущей волны.

Для характеристики волн используется волновое число k, характеризующее скорость изменения фазы в пространстве

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\text{v}T} = \frac{\omega}{\text{v}}. \qquad (3)$$

Учитывая (3), уравнение (2) примет вид:

$$s = A\sin(\omega t - kx + \varphi_0) \qquad (4)$$

Уравнение волны, распространяющейся вдоль отрицательного направления оси 0X отличается от (4) знаком члена $kx$.

Из условия $\omega t - kx + \varphi_0 = const$ получаем выражение для фазовой скорости: $\boxed{\text{v} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}}$.

Любую несинусоидальную волну можно заменить эквивалентной ей системой синусоидальных волн – *группой волн, или волновым пакетом.* Спектр частот – совокупность значений частот этих синусоидальных волн.

В недиспергирующей среде все синусоидальные волны, образующие волновой пакет, имеют одинаковые фазовые скорости v.. В диспергирующей среде волновой пакет перемещается со скоростью, называемой *групповой. Групповая скорость волны (пакета)* – это скорость переноса энергии этой волной: $u = \frac{d\omega}{dk}$. Связь между групповой и фазовой скоростями: $u = \text{v} - \lambda\frac{d\text{v}}{d\lambda}$. В недиспергирующей среде: $\frac{d\text{v}}{d\lambda} = 0$ и групповая скорость совпадает с фазовой.

## 27. Волновое уравнение.

Выберем ряд точек, принадлежащих сплошной среде и лежащих на одной прямой, вдоль которой распространяется продольная волна.

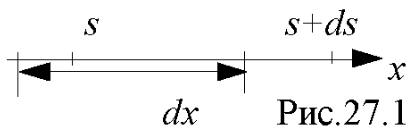


Рис.27.1.

Смещение некоторой точки, лежащей на этой прямой, из положения равновесия – $s$. Расстояние между точками – $dx$. Для точек, расположенных на расстоянии $dx$

смещения составляют $s$ и $s+ds$, то есть при перемещении точки на расстояние $dx$ смещение меняется на величину $ds$.

$\frac{ds}{dx} = \varepsilon$ – относительная деформация.

Если ε>0 – расстояние между точками увеличивается – растяжение среды; если ε<0 – сжатие.

Пусть известно уравнение плоской бегущей волны: $s = A \sin \omega (t - \frac{x}{\text{v}})$,

первая производная по времени: $\frac{ds}{dt} = A\omega \cos \omega (t - \frac{x}{\text{v}})$ (1)

и по координате: $\varepsilon = \frac{ds}{dx} = -\frac{A\omega}{\text{v}} \sin \omega (t - \frac{x}{\text{v}})$ (2)

Сравнивая (1) и (2). получим: $\frac{ds}{dt} = -\text{v}\ \frac{ds}{dx}$.

Отсюда видно, что деформация среды $\frac{ds}{dx}$ имеет по абсолютному значению наибольшую величину в тех точках. где скорость колеблющихся точек $\frac{ds}{dt}$ – наибольшая, то есть где точки проходят через положение равновесия. Из (1) и (2) найдем вторые производные:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \omega (t - \frac{x}{\text{v}})$$

$$\frac{d^2 s}{dx^2} = -\frac{A\omega^2}{\text{v}^2} \cos \omega (t - \frac{x}{\text{v}})$$

Отсюда получим дифференциальное уравнение, с помощью которого описывается распространение волны вдоль оси 0X:

$$\boxed{\frac{d^2 s}{dt^2} = \text{v}^2\ \frac{d^2 s}{dx^2}} \text{ или . } \boxed{\frac{d^2 s}{dx^2} - \frac{1}{\text{v}^2}\ \frac{d^2 s}{dt^2} = 0}$$

Получили дифференциальное уравнение, решением которого является уравнение волны. В более общем случае распространение волны в среде описывается дифференциальным уравнением в частных производных, которое называется ***волновым уравнением*** и имеет вид:

$$\boxed{\nabla^2 S - \frac{1}{\text{v}^2}\ \frac{\partial^2 S}{dt^2} = 0},$$

где S – физическая величина, которая характеризует возмущение, распространяющееся в среде с скорость v;

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{dx^2} + \frac{\partial^2}{dy^2} + \frac{\partial^2}{dz^2}$$ – оператор Лапласа.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ 5.

### *Примеры решения задач.*

*Задача 1.* Колебания материальной точки происходят относительно положения равновесия по закону $x=A\sin\omega t$ с периодом 12 с. Определить, за какой наименьший промежуток времени $t_1$ точка удалится от положения равновесия на расстояние, равное половине амплитуды. За какой промежуток времени $t_2$ она пройдет оставшуюся часть пути до максимального отклонения.

*Дано*: $x=A/2$, $T=12$ с.

*Найти*: $t_1$-? $t_2$-?

*Решение.* В момент времени $t_1$ смещение равно $A/2$:

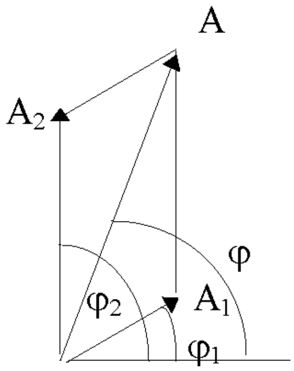
$A/2=A\sin\omega t_1$, $\sin\omega t_1=1/2$, т.е. $\omega t_1=\pi/6$, или $(2\pi/T)t_1=\pi/6$.
Отсюда $t_1=T/12=1$ с.

Расстояние от точки равновесия до точки максимального отклонения материальная точка проходит за $t=T/4$. Следовательно, $t_2=T/4- T/12= 2$ с.

*Задача 2.* Складываются два колебания одинакового направления, выражаемых уравнениями $x_1 = A_1\cos\omega(t+\tau_1)$ и $x_2 = A_2\cos\omega(t+\tau_2)$, где $A_1=1$ см; $A_2=2$ см; $\tau_1=1/6$ с; $\tau_2=1/2$ с; $\omega=\pi$ рад/с. Определить начальные фазы $\varphi_1$ и $\varphi_2$ составляющих колебаний; найти амплитуду A и начальную фазу $\varphi$ результирующего колебания.

*Решение.* Уравнение гармонического колебания имеет вид:

$$x = A\cos(\omega t+\varphi) \qquad (1).$$




Преобразуем уравнения, заданные в условии задачи, к такому же виду: $x_1 = A_1\cos(\omega t+\omega\tau_1)$ и $x_2 = A_2\cos(\omega t+\omega\tau_2)$ (2).

Из сравнения выражений (2) с (1) находим начальные фазы первого и второго колебаний: $\varphi_1=\omega\tau_1=\pi/6$рад и $\varphi_2=\omega\tau_2=\pi/2$ рад

Для определения амплитуды A результирующего колебания удобно воспользоваться векторной диаграммой, представленной на рис. Согласно теореме косинусов, получим:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1) \qquad (3)$$

$\varphi_2-\varphi_1=\pi/3$ рад.

Подставим значения $A_1$, $A_2$ и $\varphi_2 - \varphi_1$ в (3), извлечем корень и получим: A=2,65 см.

Тангенс начальной фазы результирующего колебания определим непосредственно из рисунка: $tg\varphi = \dfrac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$. Тогда

$\varphi = \mathrm{arctg}(5/\sqrt{3}) = 70{,}9^0 = 0{,}394\pi$ рад.

Так как циклические частоты складываемых колебаний одинаковы, то результирующее колебание будет иметь ту же частоту ω. Это позволяет написать уравнение результирующего колебания в виде $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, где A=2,65 см, ω=π рад/с, φ=0,394π рад.

*Задача 3.* Шарик массой 10 г совершает гармонические колебания с амплитудой 0,2 м и периодом 4 с. В начальный момент времени x=A. Найти кинетическую и потенциальную энергию в момент времени t= 1 с.

*Дано*: $m=10^{-2}$ кг, A=0,2 м, T=4 с, $x|_{t=0}=A$, t=1 с.

*Найти*: $E_к$-? $E_п$-?

*Решение*: Запишем уравнение гармонических колебаний

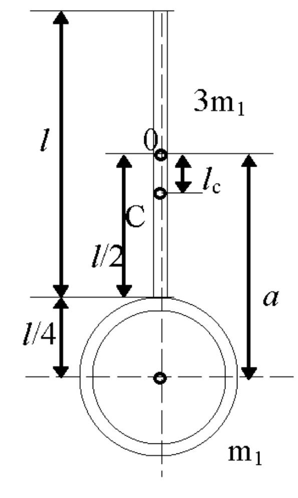
$x=A\cos(\omega t+\varphi_o)$, где $\omega=2\pi/T$. Т.к. при t=0 x=A, то можно определить начальную фазу $A\cos(\omega.0+\varphi_o)=A$, $\cos\varphi_o=1$, $\varphi_o=0$. Таким образом, $x=0{,}2\cos[(2\pi/4)t]= 0{,}2\cos[(\pi/2)t]$ (м).

Кинетическая энергия шарика определяется по формуле: $E_к=mv^2/2$, где $v=dx/dt=-A\omega\sin\omega t$. $E_к=[mA^2\omega^2\sin^2\omega t]/2$; $E_к=5.10^{-3}$Дж.

Потенциальная энергия шарика равна:

$E_п=kx^2/2=[kA^2\cos^2\omega t]/2=[kA^2\cos^2(\pi/2)]/2$, $E_п=0$.

*Задача 4* Физический маятник представляет собой стержень длиной $l$=1 м и массой $3m_1$ с прикрепленным к одному из его концов обручем диаметром $d=l/2$ и массой $m_1$. Горизонтальная ось OZ проходит через середину стержня перпендикулярно ему (рис. 24). Определить период колебаний такого маятника.




*Дано*: $l$=1 м, $m_c=3m_1$, $d=l/2$, $m_o=m_1$

*Найти*: T - ?

*Решение.* Период колебаний физического маятника определяется по формуле

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl_c}}, \qquad (1)$$

где J - момент инерции маятника относительно оси колебаний, m - его масса, $l_c$ - расстояние от центра масс маятника до оси колебаний. Момент инерции маятника равен сумме моментов инерции стержня $J_1$ и обруча $J_2$: $J=J_1+J_2$. (2)

Момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр масс, определяется по формуле $J_1=m_c l^2/12$, т.е. $J_1=m_1 l^2/4$.

Момент инерции обруча найдем, воспользовавшись теоремой Штейнера $J=J_o+ma^2$. Применив эту формулу к обручу, получим

$$J_2=m_1(l/4)^2+m_1(3l/4)^2=(5/8)m_1 l^2.$$

Подставив выражения $J_1$ и $J_2$ в формулу (2), найдем момент инерции маятника относительно оси вращения: $J=m_1 l^2/4+(5/8)m_1 l^2=(7/8)m_1 l^2$.

Расстояние $l_c$ от оси маятника до его центра масс равно

$$l_c=(\sum m_i x_i)/\sum m_i=(3m1.0+m_1(3l/4))/(3m_1+m_1)=(3/16)l.$$

Подставив в формулу (1) выражения J, $J_c$ и массы маятника ($m=3m_1+m_1=4m_1$), найдем период его колебаний: $T=2\pi\sqrt{\dfrac{\frac{7}{8}m_1 l^2}{4m_1 g\cdot\frac{3}{16}l}}=2\pi\sqrt{\dfrac{7l}{6g}}$. После вычисления по этой формуле получим T=2,17 с.

## Задачи для самостоятельного решения.

5.1. Написать уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой в 5 см, если в 1 мин совершается 150 колебаний и начальная фаза колебаний равна 45°.

5.2. Определить максимальные значения скорости $v_{max}$ и ускорения $a_{max}$ точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой А=3 см и циклической частотой $\omega=\pi/2$ рад/с.

5.3. Точка совершает гармонические колебания. Наибольшее смещение точки равно 10 см, наибольшая скорость 20 см/с. Найти циклическую частоту колебаний и максимальное ускорение точки.

5.4. Точка совершает колебания по закону $x=A\sin\omega t$. В некоторый момент времени смещение точки $x_1$ оказалось равным 5 см. Когда фаза колебаний увеличилась вдвое, смещение $x_2$ стало равным 8 см. Найти амплитуду А колебаний.

5.5. Написать уравнение движения, получающегося в результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебательных движений с одинаковым периодом 8 с и одинаковой амплитудой 0,02 м. Разность фаз между этими колебаниями равна $\pi/4$. Начальная фаза одного из колебаний равна нулю.

5.6. Найти амплитуду и начальную гармонического колебания, полученного от сложения одинаково направленных колебаний, данных уравнениями $x_1=0{,}02\sin(5\pi t+\pi/2)$ *м* и $x_2=0{,}03\sin(5\pi t+\pi/4)$ *м.*

5.7. Материальная точка массой 50 г совершает колебания, уравнение которых имеет вид $x=A\cos\omega t$, где A=10 см, ω=5 рад/с. Найти силу, действующую на точку в двух случаях: 1) в момент, когда фаза ωt=π/3 рад; 2) в положении наибольшего смещения точки.

5.8. Определить массу тела, совершающего гармонические колебания с амплитудой 0,1 м, частотой 2 Гц и начальной фазой $30^0$, если полная энергия колебаний 7,7 мДж. Через сколько секунд от начала отсчета времени кинетическая энергия будет равна потенциальной?

5.9. Грузик массой 250 г, подвешенный к пружине, колеблется по вертикали с периодом T=1 с. Определить жесткость пружины.

5.10. Гиря, подвешенная к пружине, колеблется по вертикали с амплитудой 4 см. Определить полную энергию колебаний гири, если жесткость пружины равна 1 кН/м.

5.11. Тонкий обруч, подвешенный на гвоздь, вбитый горизонтально в стену, колеблется в плоскости, параллельной стене. Радиус обруча равен 30 см. Вычислить период колебаний обруча.

5.12. Амплитуда затухающих колебаний маятника за время $t_1$=5 мин уменьшилась в два раза. За какое время $t_2$, считая от начального момента, амплитуда уменьшится в восемь раз?

5.13. Амплитуда колебаний маятника длиной 1 м за время 10 мин уменьшилась в два раза. Определить логарифмический декремент колебаний.

**Ответы.**

**1.1.** s=5t, 25 м; **1.2.** 0,6 м/с, 250 с. **1.3.** 0,049 м, 1,9 м. **1.4.** 14,7м/с, 11м. **1.5.** 9,62 м/с; -14,6 м/с. **1.7.** Прямая 3x-2y=12, расположенная в плоскости XY, с началом в точке $x_o$=2, $y_o$=-3. **1.8.** 200 м/с; 20 м/с$^2$. **1.9.** 0,069 рад; 221,7 м/с. **1.10.** 14 м/с. **1.11.** 1,22 м; 10 м/с; 11,1м/с; 26°12’. **1.12.** 4,4 м/с. **1.13.** 11,1 м/с; 68°12’. **1.14.** 5,4 м/с$^2$; 8,2 м/с$^2$. **1.15.** 305 м. **1.16.** $a_\tau=g\,v_y/v$=3,52 м/с$^2$, $a_n=gv_o\cos\alpha/v$=9,15 м/с$^2$. **1.17.** 6,3 м. **1.18.** 76°. **1.19.** $t=(v_o\cos\alpha/g)(\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\beta)$=1,2 с. **1.20.** 1,26 рад/с$^2$, 360 об. **1.21.** 10 с. **1.22** 1) $t=(R/a_t)^{1/2}$=2с; 2) $t=(2R/a_t)^{1/2}$=2,8 с. **1.23.** 4,5м/с$^2$, 0,06 м/с$^2$. **1.25.** 0,43 рад/с$^2$. **3.9.** 1.2 м.

**2.1.** $v_o=2s/t$=10м/с, $F=2sm/t^2$=2040Н. **2.2.** =8200 Н. **2.3.** 1) 6000Н; 2) через 50 с; 3) 375 м. **2.4.** -0,123 Н. **2.5.** 1)21,6 км/ч; 2) 73 с; 3) -0,098 м/с$^2$; 4) 218 м. **2.6.** 1370 Н, 590Н. **2.7.** 0,5. **2.8.** 220Н, 380 Н, 430 Н. **2.9.** 4,4 м/с$^2$, 5,4 Н. **2.10.** 2,45 м/с$^2$, 7,35 Н. **2.11.** 2,02 м/с$^2$, 7,77 Н. **2.12.** 2,1м/с$^2$; 6,2Н; 3,1Н. **2.13.** 2,6 м/с$^2$; 42 Н. **2.14.** 1) 2,43 м/с; 2) в высшей точке $F_н$=0, в низшей точке $F_н$=39,2 Н). **2.15.** 0,5 кг. **2.16.** 1,96Н. **2.17.** 0,2. **2.18.** 5 м/с. **2.19.** 1)1600 м; 2) 711 м. **2.20.** $v=R[g_o/(R+h)]^{1/2}$=7010 м/с; $T=2\pi(R+h)/v\approx7{,}24.10^3$ с. **2.21.** 2,73 мН. **2.22.** 5,39 с; 2,65.10$^5$ м, 7,7.10$^3$ м/с.

**3.1.** 5,14 км/ч; 1,71 км/ч. **3.2.** 17,8 км/ч; 53,5 км/ч; -17,8 км/ч. **3.3.** 0,3 м. **3.4.** 49 Дж. **3.5.** 1) $u_1=u_2$=1,8 м/с; 2) $u_1$=0,6 м/с; $u_2$=2,6 м/с. **3.6.** 12 кН. **3.8.** 2,5 м. **3.9.** 32,2Дж; 39,4Дж. **3.10.** 1) 6,6 Дж; 15,9Дж; 22,5 Дж; 2) 5,7 Дж; 16,8 Дж; 22,5 Дж. **3.11.** 1) 0,22; 2) 5,7 Дж. **3.12.** 11,8 кВт. **3.13.** 93%. **3.14.** 1) 5.10$^{-3}$м, 0,08 м; 2) 2.10$^{-2}$ м. **3.15.** 550 м/с .

**4.1.** 2,35 рад/с$^2$. **4.2.** 100 Н.м. **4.3.** 1) 7,8 рад/с$^2$; 2) через 1 мин 20 с. **4.4.** 1) 513 Н.м; 2) 600 об). **4.5.** 1) Через 1,1 с; 2) 0,81 Дж; 3) 4,1 Н). **4.6.** $T_1$-$T_2$= ($J\varepsilon$+$M_{тр}$)/R=1,08 кН. **4.7.** 1) 3,53 м/с$^2$; 2) 6,3 Н, 4,5 Н). **4.8.** $s=3v_o/(4g\sin\alpha)$=7,5 м. **4.9.** $J=mr^2[gt^2h_2/(h_1(h_1+h_2))-1]$=1,63.10$^3$ кг.м$^2$. **4.10.** $A=3{,}2\pi^3R^5$ $\rho\nu$=34,1 Дж. Здесь $\rho$ - плотность меди. **4.11.** 1)0,01 кг.м$^2$, 2)9,4.10$^{-2}$ Н.м. **4.12.** $\Delta t=E_к/\pi\nu M$=5 с. **4.13.** 21 об/мин.

**5.2.** 4,71 см/с, 7,4 см/с$^2$. **5.3.** 2 рад/с, 40 см/с$^2$.
**5.4.** $A=2x_1^2/(4x_1^2-x_2^2)^{1/2}$=8,33см. **5.5.** $x$=0,037 sin($\pi$t/4+$\pi$/8) *м.*
**5.6.** 4,6.10$^{-2}$м, 62$^o$46'. **5.7.** 1) -62,5 мН, 2)-125 мН. **5.8.** 9,8 г; 0,02 с. **5.9.** 4,87 Н/м. **5.10.** 0,8 Дж. **5.11.** $T = 2\pi\sqrt{2R/g}$ =1,55 с. **5.12.** 15 мин. **5.13.** 2,31.10$^{-3}$.

## Список литературы.


Александров Л.А., Яшкин А.Я. Курс общей физики. Механика. – М.: Просвещение, 1978. – 416 с.

Дмитриева В.Ф., Прокофьев В.Л. Основы физики. –М.: Высшая школа, 2001.– 527 с.

Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. – М.: Наука, 1989. – 350 с.

Волькенштейн В.С. Сборник задач по физике. - М.: Наука, 1985.

Гурьев Л.Г., Кортнев А.В., Куценко А.Н. и др. Сборник задач по общему курсу физики.- М.:Высшая школа, 1966.

Новодворская Е.М., Дмитриев Э.М. Методика проведения упражнений по физике во втузе. - М.:Высшая школа, 1981.

Парфентьва Н., Фомина М. Решение задач по физике (ч.2) -М.:Мир, 1993.

Цедрик М.С.(ред.) Сборник задач по курсу общей физики.- М.:Просвещение, 1989.

Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. - М.:Высшая школа, 1981.

**Оглавление.**