

ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
СБОРНИК ЗАДАЧ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ И РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ
(СТАТИКА, КИНЕМАТИКА)
Для студентов дневной и заочной форм обучения

Представлен комплекс многовариантных, разного уровня сложности задач по двум разделам теоретической механики – «Статика» и «Кинематика». Все включенные задачи сопровождаются методическими указаниями и подробными примерами решения, что позволяет студентам самостоятельно разобраться в изучаемом материале.

Предназначен для организации учебного процесса студентов строительных специальностей при изучении теоретической механики.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	6
Статика	7
Задача С-1. Приведение произвольной плоской системы сил к центру.....	8
Задача С-2. Определение опорных реакций балки	8
Задача С-3. Определение опорных реакций рамы	11
Задача С-4. Определение реакций опор составной балки (система двух тел)	13
Задача С-5. Определение реакций опор многопролетной балки	16
Задача С-6. Равновесие системы двух сочлененных тел	19
Задача С-7. Равновесие системы трех сочлененных тел.....	21
Задача С-8. Расчет фермы	23
Задача С-9. Приведение пространственной системы сил к центру ...	25
Задача С-10. Исследование равновесия коленчатого стержня.....	26
Задача С-11. Исследование равновесия вала.....	27
Задача С-12. Определение положения центра тяжести плоского сечения строительной конструкции	29
Задача С-13 (а; б). Определение положения центра тяжести.....	30
Задача С-14. Исследование равновесия тела с учетом сил трения....	30
Методические указания к решению задач С-1, С-2, С-3	31
Пример 1. Приведение произвольной плоской системы сил к простейшему виду	31
Пример 2. Определение опорных реакций балки	33
Пример 3. Определение опорных реакций балки	35
Пример 4. Определение опорных реакций рамы	37
Пример 5. Определение опорных реакций рамы	38
Методические указания к решению задач С-4, С-5, С-6, С-7	40
Пример 6. Определение реакций внешних опор и давления во внутреннем шарнире составной конструкции	42
Пример 7. Определение опорных реакций составной рамы и давления во внутреннем шарнире С	45
Пример 8. Определение реакций внешних опор составной конструкции (система трех тел)	48
Пример 9. Определение реакции внешних связей.....	52
Методические указания к решению задачи С-8	54
Пример 10. Произвести расчёт фермы.....	55
Пример 11. Приведение произвольной пространственной системы сил к центру.....	60

Методические указания к решению задач С-10, С-11	63
Пример 12. Определение реакции жесткой заделки стержня	64
Пример 13. Исследовать равновесие вала	66
Методические указания к задачам С-12, С-13, а, б	69
Пример 14. Определение положения центра тяжести плоской стержневой конструкций.....	70
Пример 15. Определение положения центра тяжести плоской фигуры.....	72
Пример 16. Определение положения центра тяжести плоской фигуры.....	74
Методические указания к решению задачи С-14	76
Пример 17. Исследование равновесия тела с учетом сил трения	77
Кинематика	83
Задача К-1. Кинематика точки (координатный способ задания движения)	84
Задача К-2. Кинематика точки (естественный способ задания движения).....	84
Задача К-3. Механические передачи (кинематика и преобразование простейших движений твердого тела).....	87
Задача К-4. Механические передачи (кинематический расчет привода).....	89
Задача К-5. Кинематический расчет полиспаста	92
Задача К-6. Кинематический расчет дифференциального (планетарного) механизма.....	93
Задача К-7. Кинематика рычажного механизма	95
Задача К-8. Кинематика плоского рычажного механизма (частные случаи)	97
Задача К-9. Кинематика сложного движения точки (система двух тел)	98
Задача К-10. Сложное движение точки в плоскости рисунка (переносное движение).....	100
Задача К-11. Сложное движение точки в плоскости рисунка (переносное движение – вращательное).....	103
Задача К-12. Сложное движение точки в пространстве (переносное движение – вращательное).....	103
Задача К-13. Кинематика плоского механизма с двумя степенями свободы	105

Методические указания к решению задач К-1 и К-2	107
Пример 1.....	110
Пример 2.....	113
Пример 3.....	117
Пример 4.....	119
Методические указания к решению задач К-3 и К-4	124
Пример 5.....	125
Пример 6.....	127
Методические указания к решению задач К-5 и К-6	129
Пример 7.....	130
Пример 8.....	132
Методические указания к решению задач К-7, К-8, К-13	135
Методические указания	
к решению задач К-9, К-10, К-11, К-12	137
Пример 9.....	138
Пример 10	142
Пример 11	145
Пример 12	149
Пример 13	152
Пример 14	157
Литература	159

Введение

Цель данного сборника – организация учебного процесса для студентов строительных специальностей дневной и заочной форм обучения при изучении курса «Теоретическая механика». Представленный сборник состоит из двух частей – «Статика» и «Кинематика».

Набор задач, включенный в сборник, и уровень их сложности позволяют применять его на других технических и технологических специальностях. Сборник можно использовать при выполнении расчетно-графических, контрольных работ студентами, а также для текущего контроля знаний основных программных вопросов курса теоретической механики.

«Статика» содержит 14 задач, а «Кинематика» – 13 задач, охватывающих все основные темы этих разделов.

Представленные задачи многовариантны, разного уровня сложности, что позволяет варьировать объем и содержание работ. Ко всем задачам представлены краткие методические указания к решению и примеры их выполнения.

При решении задач и оформлении работ следует выполнять следующие требования:

- номер схемы во всех задачах выбирается по последней цифре варианта задания, а номер условия по предпоследней;
- полностью переписать условие задачи, начертить схему и записать данные своего варианта;
- выполнить чертеж расчетной схемы по данным своего варианта;
- произвести расчеты по определению искомых величин, сопровождая их пояснениями;
- полученные результаты показать на отдельном чертеже, указывая истинные направления искомых величин;
- в конце работы представить список используемой литературы.

СТАТИКА

ЗАДАЧА С-1

ПРИВЕДЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ЦЕНТРУ

Привести систему сил, действующую на брус, к простейшему виду.
 Предварительно принять в качестве центра приведения точку, указанную в табл. С-1.

Таблица С-1

Исходные данные	Предпоследняя цифра варианта задания									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_1 , кН	$2\sqrt{5}$	$4\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	$4\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	$4\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	$4\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	$4\sqrt{5}$
F_2 , кН	7	11	6	12	9	13	5	14	8	10
m , кНм	4	2	2	4	8	6	0	8	6	0
q , кН/м	1,5	4,5	2,0	4,0	0,5	3,5	2,5	3,0	1,0	5,0
Центр приведения	D	B	A	C	A	D	A	D	B	C

Принять: $\operatorname{tg} \alpha = 2$; $\operatorname{tg} \beta = 0,5$.

ЗАДАЧА С-2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ БАЛКИ

На рис. С-1, С-2 показаны нагружения балок произвольной плоской системой сил. Номер схемы принимается по последней цифре варианта задания.

Благодаря наличию опор балка находится в равновесии. Определить реакции опор балки и выполнить проверку правильности решения задачи.

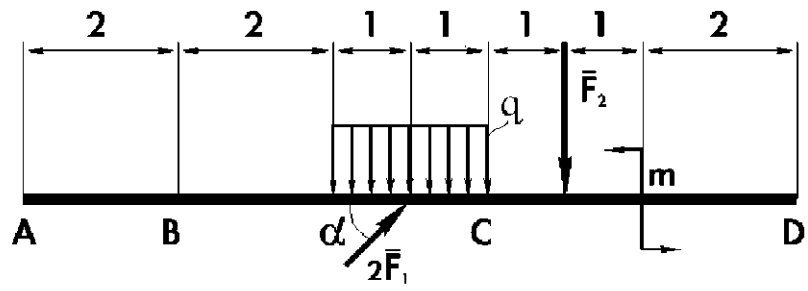
Величины нагрузок и варианты размещения опор приведены в табл. С-2.

Во всех вариантах принять: $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $\operatorname{tg} \beta = 0,5$.

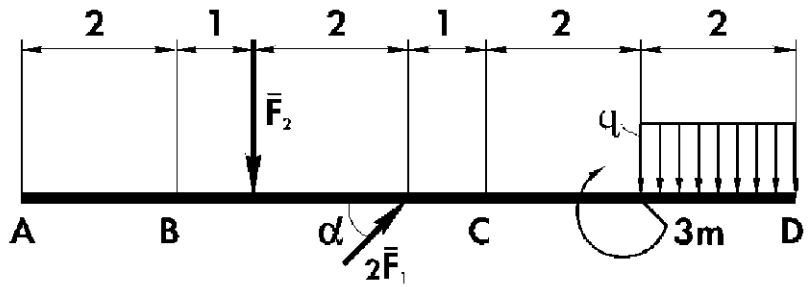
Таблица С-2

Исходные данные	Предпоследняя цифра варианта задания									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_1 , кН	$2\sqrt{5}$	$4\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	$4\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	$4\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	$4\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	$4\sqrt{5}$
F_2 , кН	7	11	6	12	9	13	5	14	8	10
m , кН·м	4	2	2	4	8	6	0	8	6	0
q , кН/м	1,5	4,5	2,0	4,0	0,5	3,5	2,5	3,0	1,0	5,0
Жесткая заделка 				A				D		
Неподвижно-шарнирная опора 	B	A				C	D		A	B
Горизонтально-подвижная опора 	C	D	A, B		C, D	A	B		B	A
Вертикально-подвижная опора 			D		A					

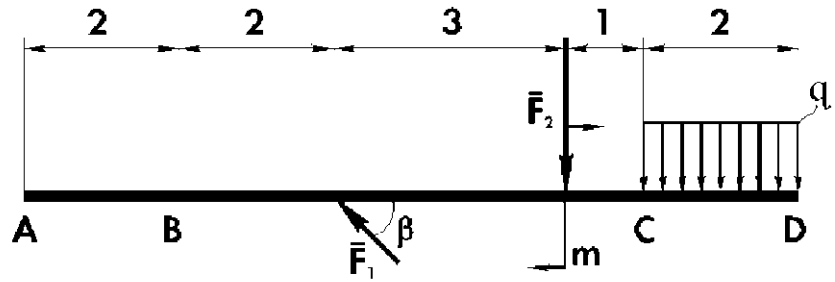
0



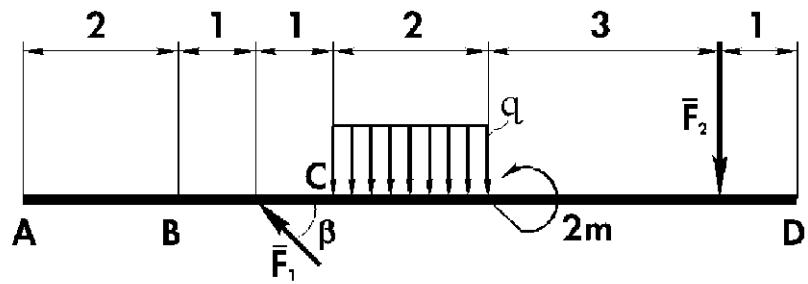
1



2



3



4

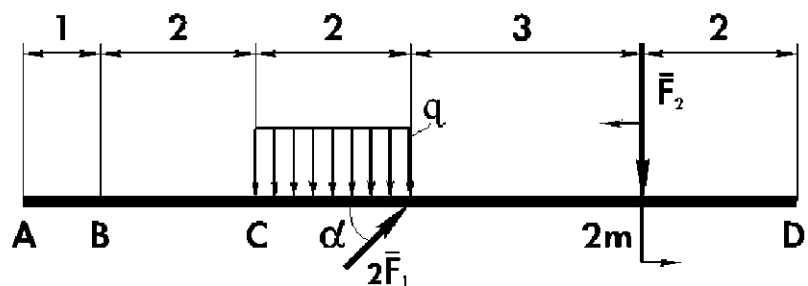


Рис. С-1

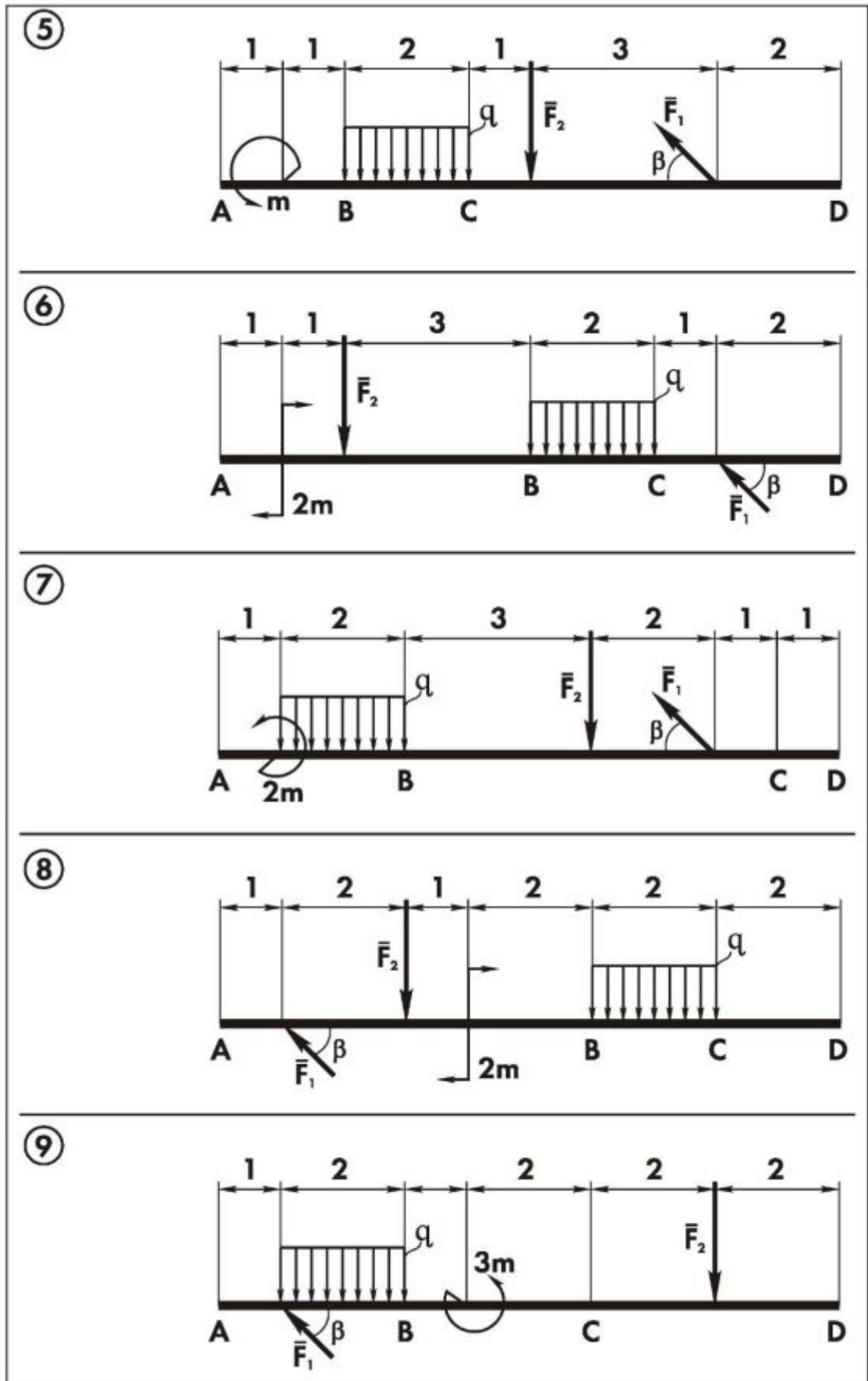


Рис. С-2

ЗАДАЧА С-3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ РАМЫ

На рис. С-3 показаны нагружения рам произвольной плоской системой сил $F_1 = 50$ кН, $F_2 = 40$ кН, $q = 10$ кН/м, $m = 20$ кН·м.

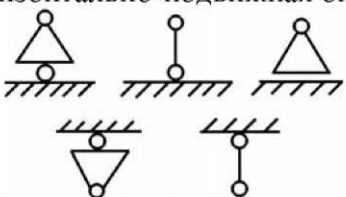
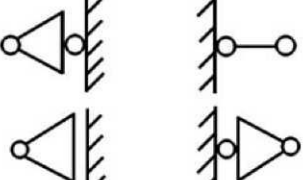
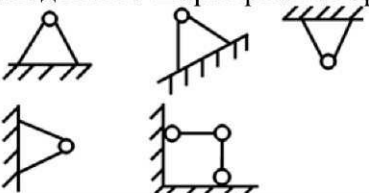
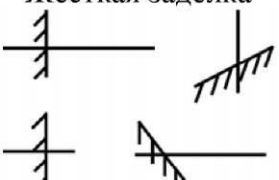
Рама находится в равновесии благодаря наличию связей, возможные варианты размещения которых приведены в табл. С-3.

Определить реакции опор, приняв размеры рамы непосредственно из рисунков схем своего варианта. Номер схемы принимается по последней цифре варианта задания.

Выполнить проверку правильности решения.

Для всех вариантов принять: $\sin \alpha = 0,8$; $\sin \beta = 0,6$; $\cos \alpha = 0,6$; $\cos \beta = 0,8$.

Таблица С-3

Внешние связи конструкции	Предпоследняя цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<p>Горизонтально-подвижная опора</p> 	E	E			A		A	C		
<p>Вертикально-подвижная опора</p> 				A						A
<p>Неподвижно-шарнирная опора</p> 	A	B		E	C		D	A		E
<p>Жесткая заделка</p> 			A			E			A	

Масштаб линейных размеров: $\square 1 \text{ м}$
 1 м

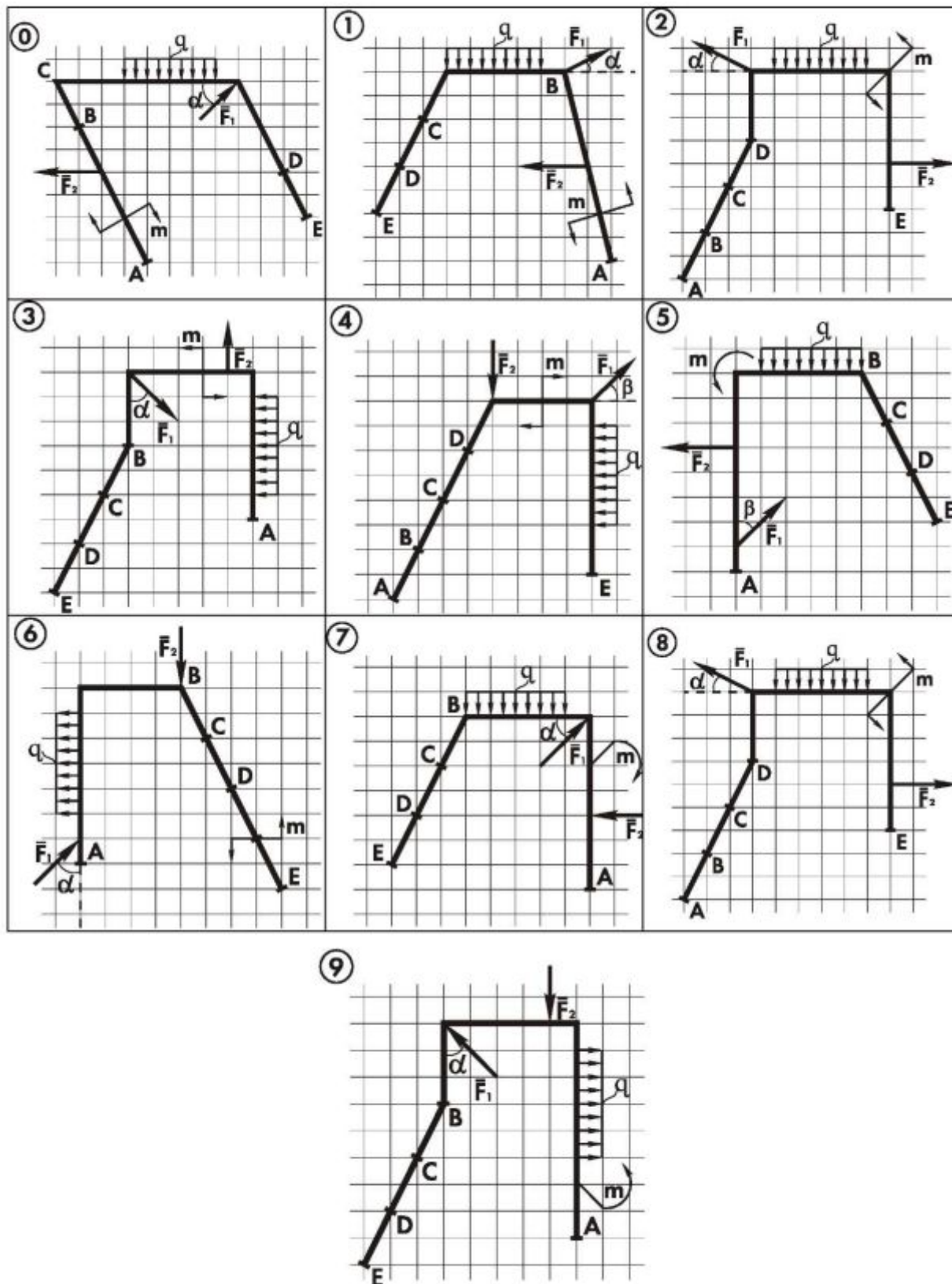


Рис. С-3


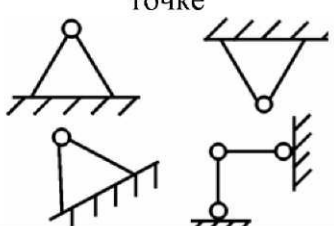
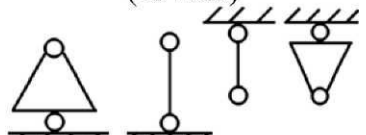
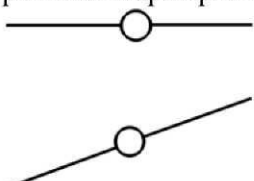
ЗАДАЧА С-4 ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР СОСТАВНОЙ БАЛКИ (система двух тел)

Конструкция, состоящая из двух невесомых балок, соединённых между собой внутренним шарниром, нагружена плоской системой сил. Благодаря наличию внешних связей конструкция находится в равновесии. Расположение внутреннего шарнира, а также внешних опор и их тип указаны в табл. С-4. Номер схемы принимается по последней цифре варианта.

Определить реакции внешних связей и давление во внутреннем шарнире, если: $F_1 = 6\sqrt{5}$ кН; $F_2 = 9$ кН; $q_1 = 3$ кН/м; $q_2 = q_{max} = 2\sqrt{5}$ кН/м; $m = 3$ кН·м; $\text{tg } \alpha = 2$; $\text{tg } \beta = 0,5$. Выполнить проверку.

В расчётах принять: $\sin \alpha = \cos \beta = 2/\sqrt{5}$; $\cos \alpha = \sin \beta = 1/\sqrt{5}$.

Таблица С-4

Внешние связи конструкции	Предпоследняя цифра варианта задания									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<p>Жёсткая заделка в точке</p> 	D			A			D		A	
<p>Неподвижная шарнирная опора в точке</p> 		A	B		D	A		C		D
<p>Горизонтально подвижная опора (вертикальный стержень) в точке (точках)</p> 	A	C, D	A, D	C	A, B	B, D	B	A, D	D	A, C
<p>Внутренний шарнир в точке</p> 	C	B	C	B	C	C	C	B	B	B

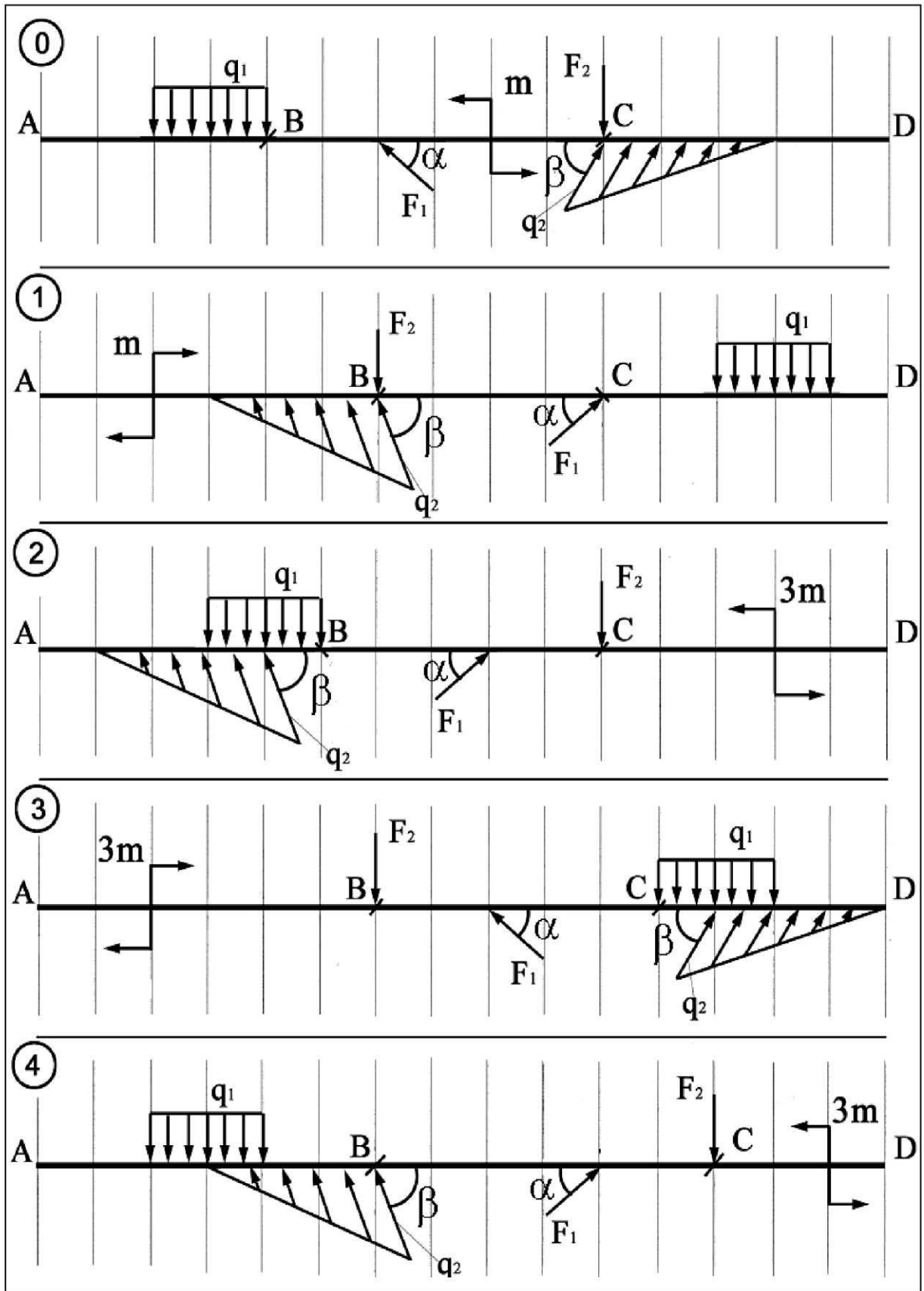


Рис. С-4

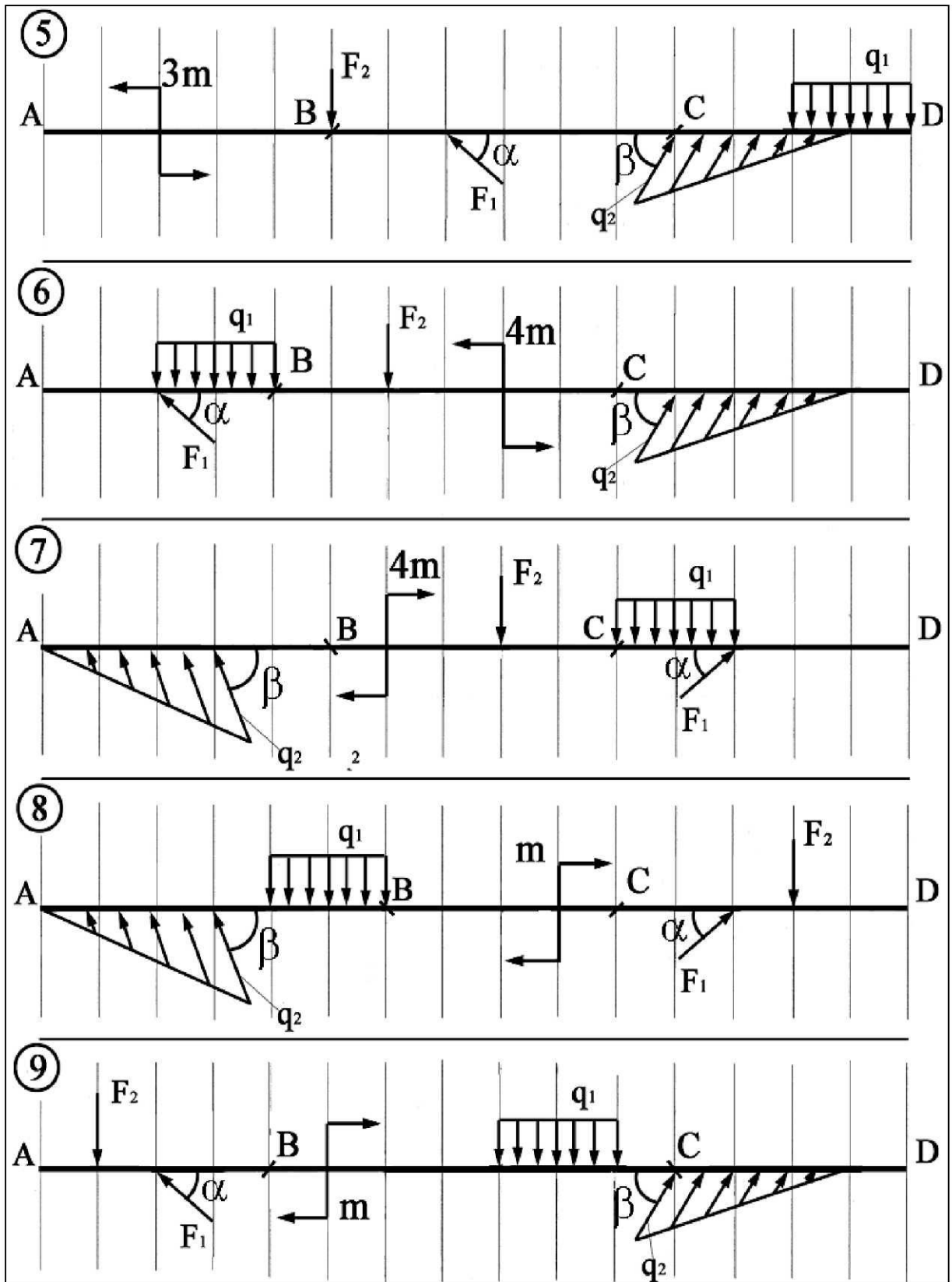


Рис. С-5

ЗАДАЧА С-5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР МНОГОПРОЛЕТНОЙ БАЛКИ




Балка AE длиной 18 м состоит из 3-х частей, соединённых между собой цилиндрическими шарнирами в тех точках, которые указаны в табл. С-5, и находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил благодаря наложенным внешним связям.

Определить реакции внешних связей и давления во внутренних шарнирах.

Величины нагрузок и варианты размещения опор приведены в табл. С-5. Номер схемы принимается по последней цифре варианта.

В расчетах принять: $\operatorname{tg} \alpha = 2$; $\operatorname{tg} \beta = 0,5$.

Таблица С-5

Исходные данные		Предпоследняя цифра варианта задания									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_1 , кН		$2\sqrt{5}$	$4\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	$4\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	$4\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	$4\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	$4\sqrt{5}$
F_2 , кН		7	11	6	12	9	13	5	14	8	10
m , кН·м		4	2	2	4	8	6	0	8	6	0
q , кН/м		1,5	1,5	2,0	4,0	0,5	3,5	2,5	3,0	1,0	5,0
Внутренние шарниры		В, D	С, D	В, С	В, D	С, D	В, С	В, С	В, D	С, D	D, В
Внешние связи балки	 Жёсткая заделка						А				Е
	 Неподвижная шарнирная опора	С	В	А	С	В		Д	А	Е	
	 Вертикальный опорный стержень (горизонтально-подвижная опора)	А, Е	А, Е	Д, Е	А, Е	А, Е	Е, Д	А, Е	С, Е	А, В	С, А

Масштаб линейных размеров: $\square 1 \text{ м}$
 1 м

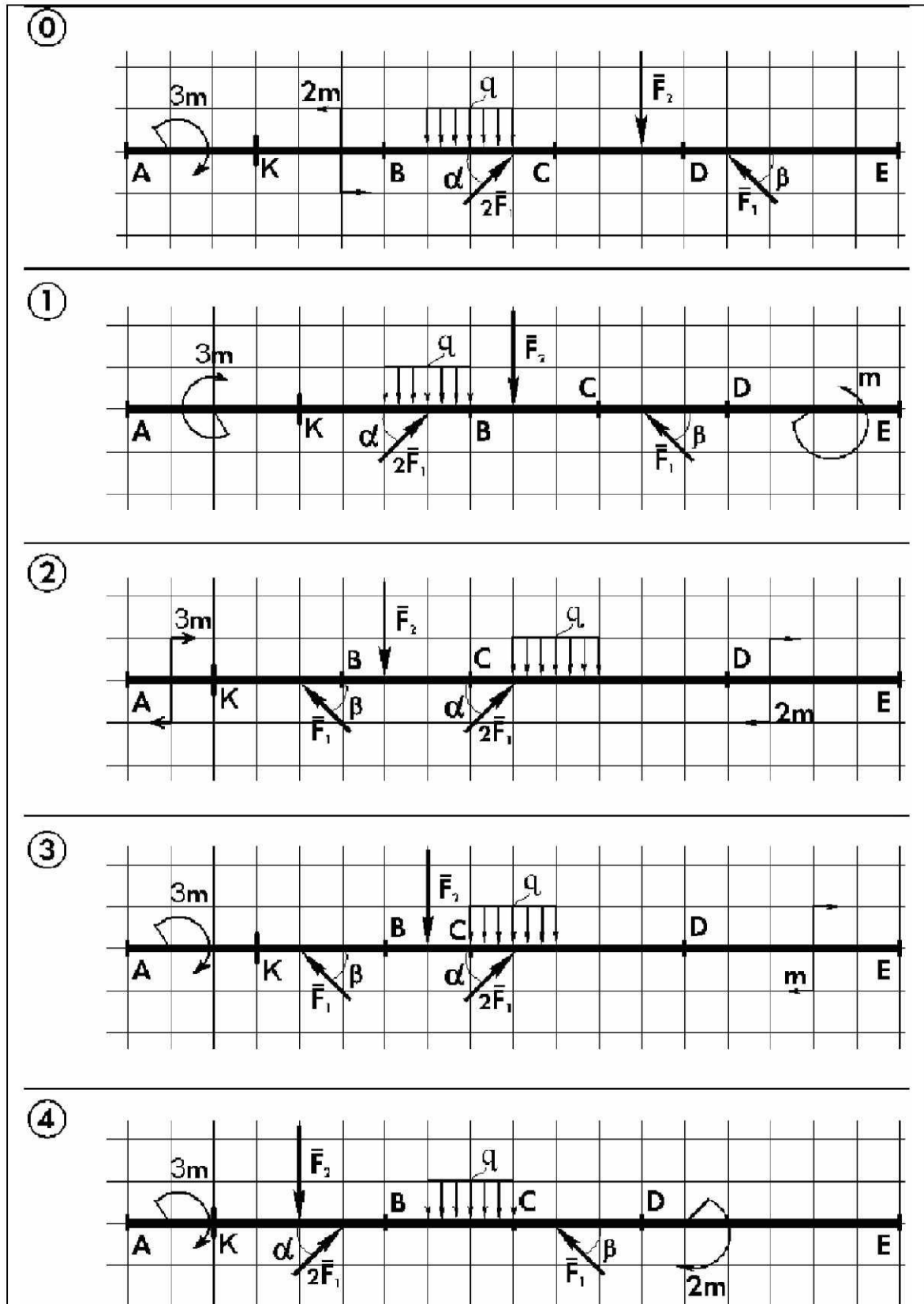


Рис. С-6

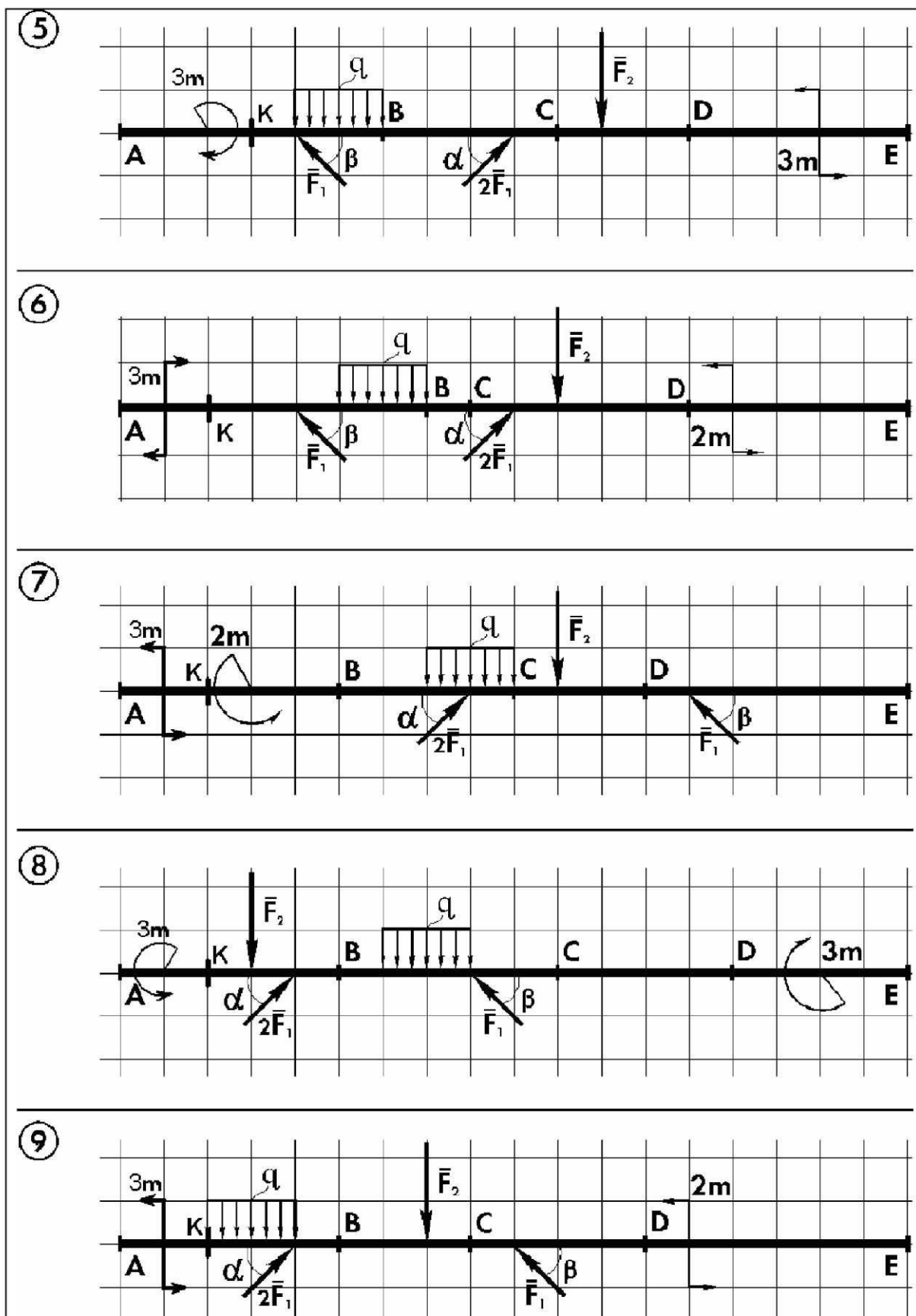


Рис. С-7

ЗАДАЧА С-6

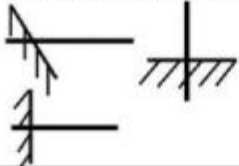

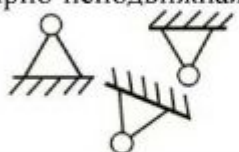
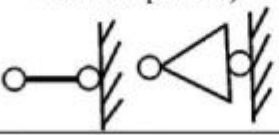

РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ СОЧЛЕНЕННЫХ ТЕЛ

Составная конструкция, состоящая из 2-х тел, соединенных внутренним шарниром, находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил.

Определить реакции опор и давление во внутреннем шарнире, если $F_1 = 10$ кН; $F_2 = 6$ кН; $q = 2$ кН/м; $m = 30$ кН·м. Во всех вариантах принять $\sin \alpha = \cos \beta = 0,8$; $\cos \alpha = \sin \beta = 0,6$.

Выполнить проверку правильности решения. Варианты размещения опор представлены в табл. С-6. Номер схемы принимается по последней цифре варианта.

Таблица С-6

Вид связи	Предпоследняя цифра варианта задания									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Жёсткая заделка 	A					D				D
Горизонтальная шарнирно-подвижная опора (вертикальный опорный стержень) 	D					B		B		
Шарнирно-неподвижная опора 		A, D	A	A, C	D		B, D	D	A, D	
Вертикальная шарнирно-подвижная опора (горизонтальный стержень) 			B, D		B, A			A		A
Внутренний шарнир 	C	C	C	B	C	C	C	C	B	B

Масштаб линейных размеров: $\square 1 \text{ м}$
 1 м

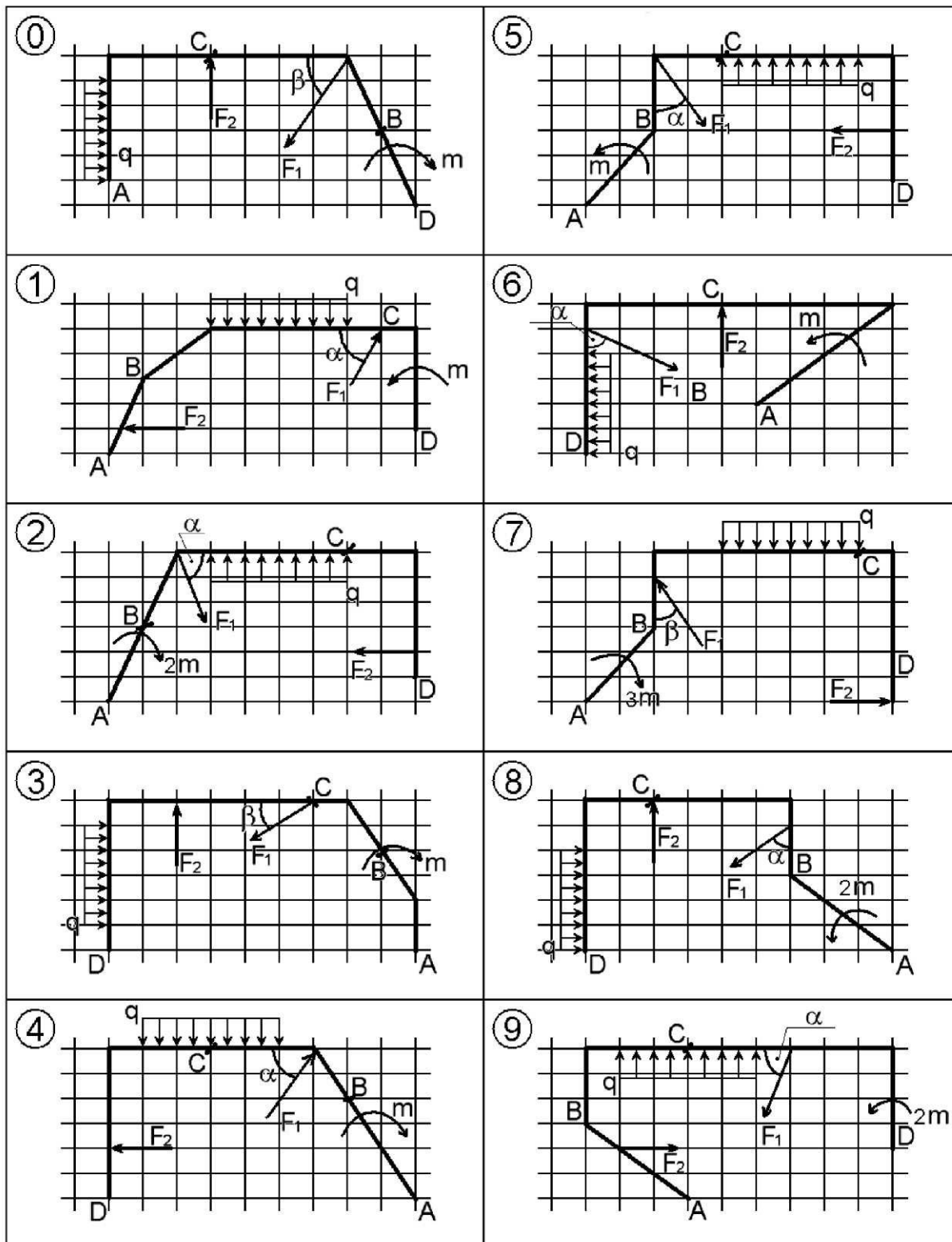


Рис. С-8

ЗАДАЧА С-7

РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТРЕХ СОЧЛЕНЕННЫХ ТЕЛ

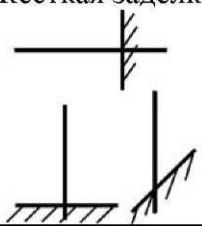
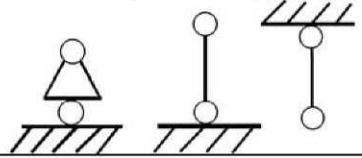
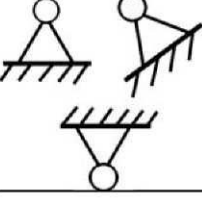
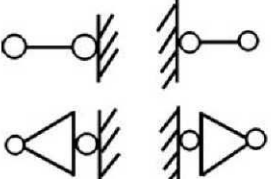
Составная конструкция, состоящая из 3-х тел, соединенных внутренними шарнирами, находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил.

Определить реакции опор и давления во внутренних шарнирах, если $F_1 = 15$ кН; $F_2 = 20$ кН; $q = 1$ кН/м; $m_1 = 10$ кН·м; $m_2 = 20$ кН·м. Во всех вариантах принять $\sin \alpha = \cos \beta = 0,8$; $\cos \alpha = \sin \beta = 0,6$.

Выполнить проверку правильности решения.

Варианты размещения опор приведены в табл. С-7. Номер схемы принимается по последней цифре варианта.

Таблица С-7

Вид связи	Предпоследняя цифра варианта задания									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Жёсткая заделка 	A				D				D	A
Горизонтальная шарнирно-подвижная опора (вертикальный опорный стержень) 		B		C, A		A		C, D		C
Шарнирно-неподвижная опора 	D	A, D	A, C	D	A	B, D	D, C	A	B	
Вертикально-подвижная опора (горизонтальный стержень) 			D	B			A	B		D

Масштаб линейных размеров: $\square 1 \text{ м}$
 1 м

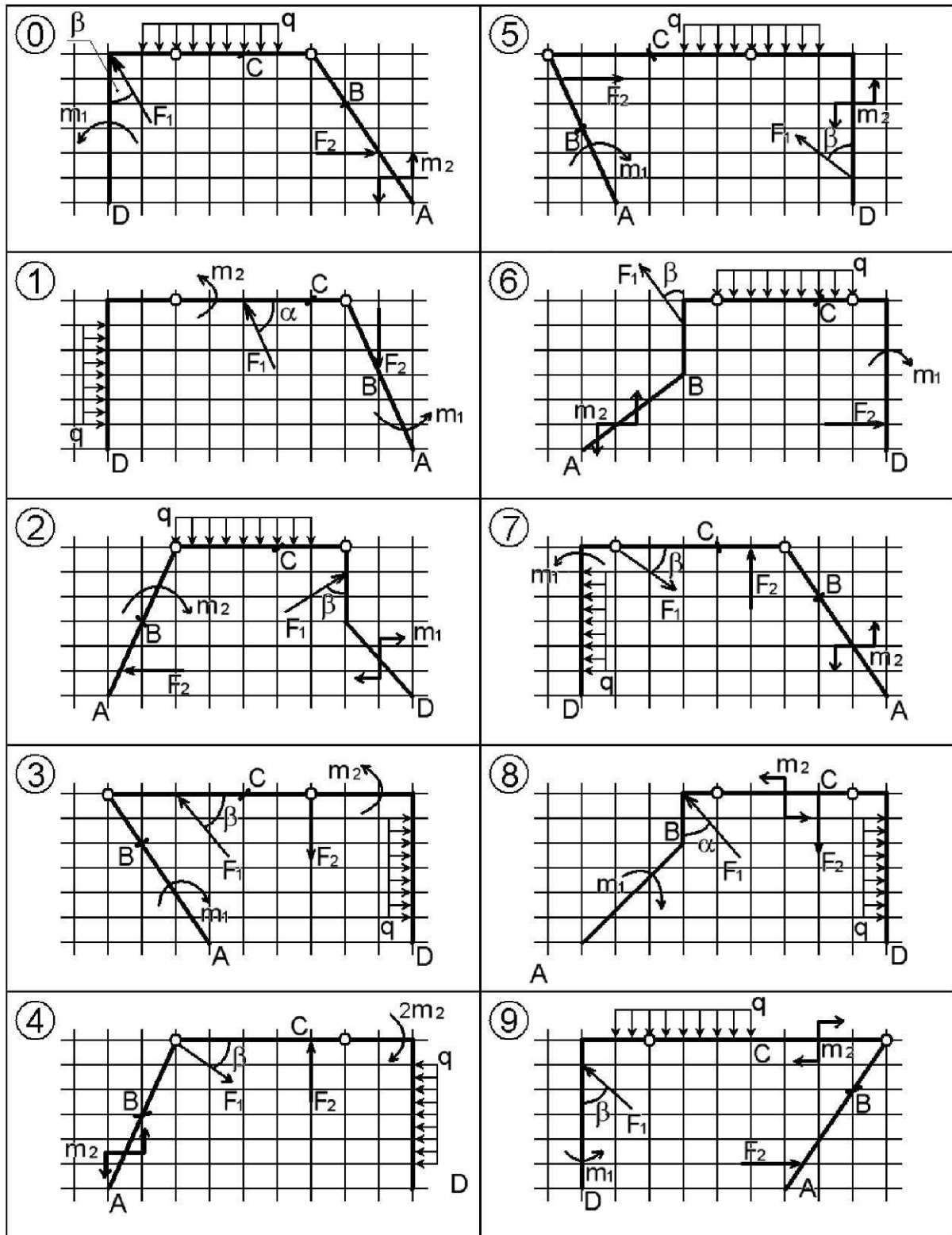


Рис. С-9

ЗАДАЧА С-8 РАСЧЕТ ФЕРМЫ

Масштаб линейных размеров: \square 1 м
1 м

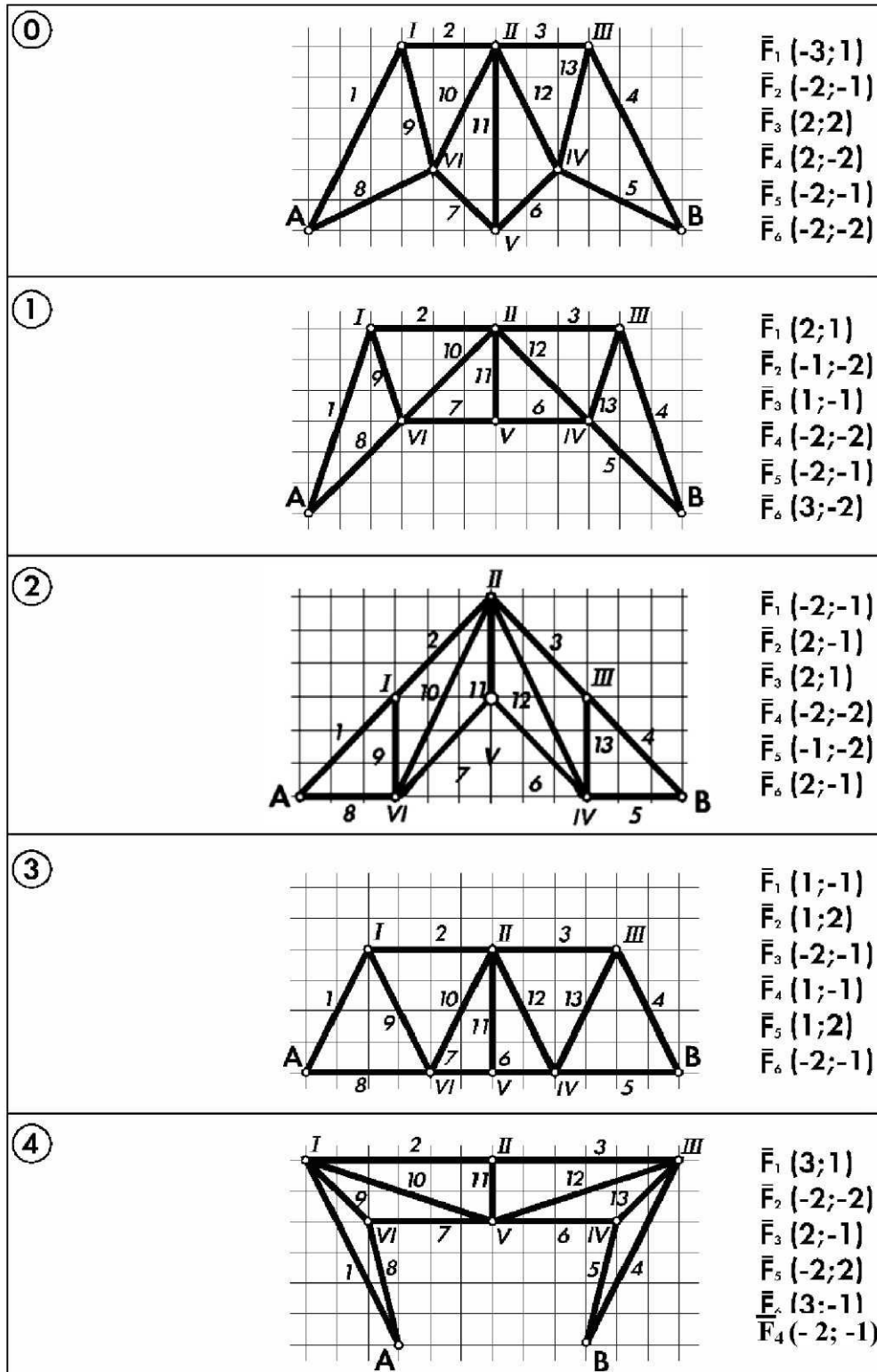


Рис. С-10

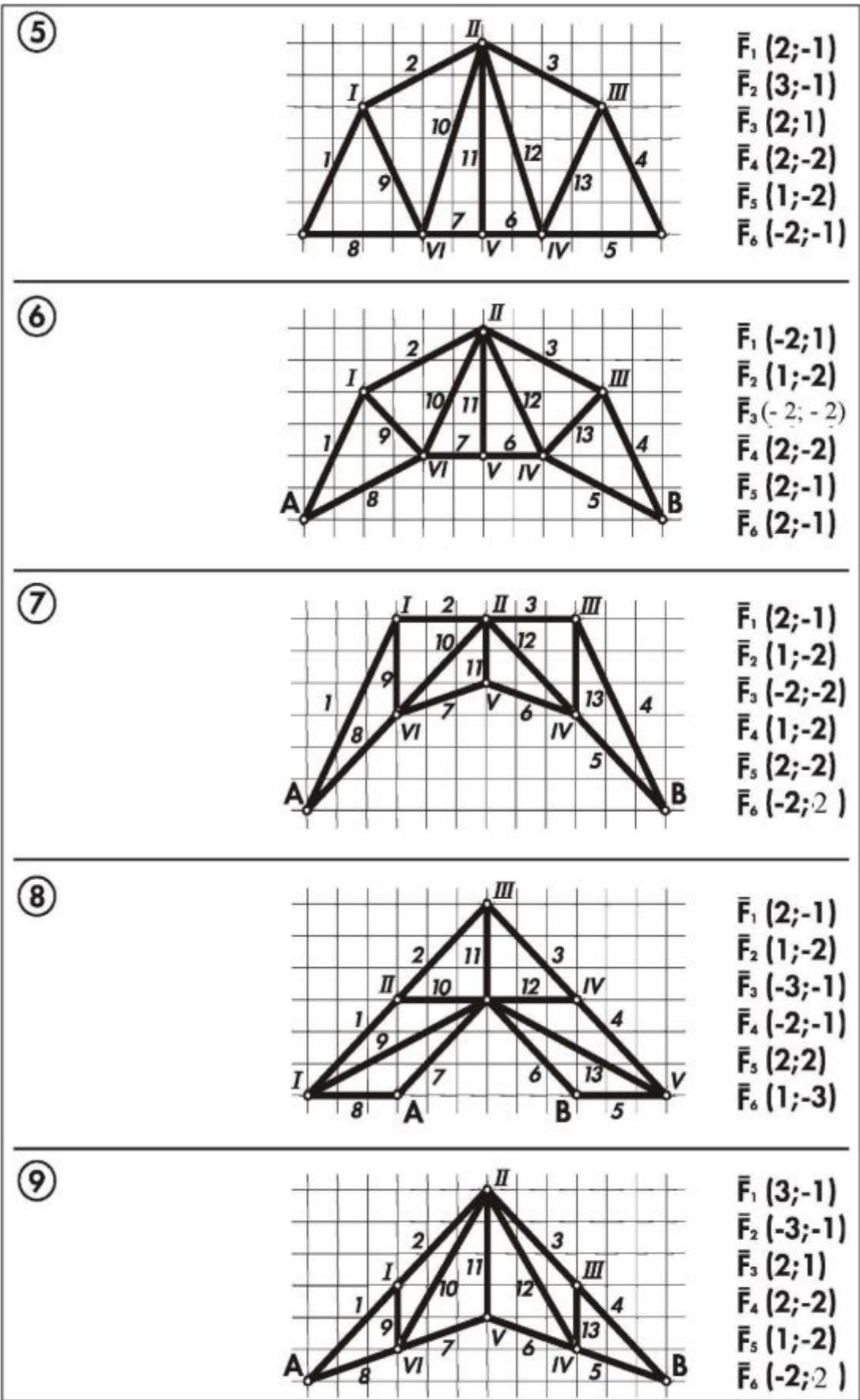


Рис. С-11

Плоская ферма нагружена тремя силами, приложенными в трёх узлах (табл. С-8). Порядковые номера сил и нагруженных узлов совпадают. Действующие силы заданы их проекциями на оси X и Y правой системы координат. Номер схемы принимается по последней цифре варианта.

Выполнить расчёт фермы:

- 1) определить реакции опор, выполнить проверку;
- 2) определить усилия в любых шести стержнях методом вырезания узлов и выполнить графическую проверку;
- 3) определить усилия в трёх стержнях (табл. С-8) методом сквозных сечений.

Таблица С-8

Исходные данные	Предпоследняя цифра варианта задания									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Горизонтально-подвижная опора (вертикальный стержень)	А	В	В	А	А	В	В	А	А	В
Неподвижная шарнирная опора	В	А	А	В	В	А	А	В	В	А
Нагруженные узлы	І	ІІ	І	ІV	І	ІІІ	ІІ	ІІІ	І	ІІ
	ІІ	ІІІ	ІІ	V	ІІ	ІV	ІІІ	ІV	ІІ	ІІІ
	ІІІ	VI	VI	VI	IV	V	IV	VI	V	V
Определить усилия методом сквозных сечений в стержнях	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
	3	4	5	6	7	8	9	10	12	13

ЗАДАЧА С-9

ПРИВЕДЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ЦЕНТРУ

Невесомая конструкция в форме коленчатого стержня $ABCD$, с участками, перпендикулярными между собой, нагружена произвольной пространственной системой сил.

Выполнить приведение данной системы сил к центру, указанному в табл. С-9.

В расчётах принять, что $q = 30$ кН/м; $m = 50$ кН·м; $AB = BC = 3$ м; $CD = 2$ м, а сведения о силах P_1 и P_2 даны в табл. С-9.

Номер схемы принимается по последней цифре варианта задания.

Таблица С-9

Исходные данные	Предпоследняя цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P_1 = 20$ кН	Сила P_1 действует в плоскости, параллельной координатной ОХУ					Сила P_1 не действует				
Угол α										
$P_2 = 40$ кН	Сила P_2 не действует					Сила P_2 действует в плоскости, параллельной координатной ОУZ				
Угол β										
Центр приведения	А	В	Д	С	А	В	Д	С	А	В

ЗАДАЧА С-10
ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ КОЛЕНЧАТОГО СТЕРЖНЯ

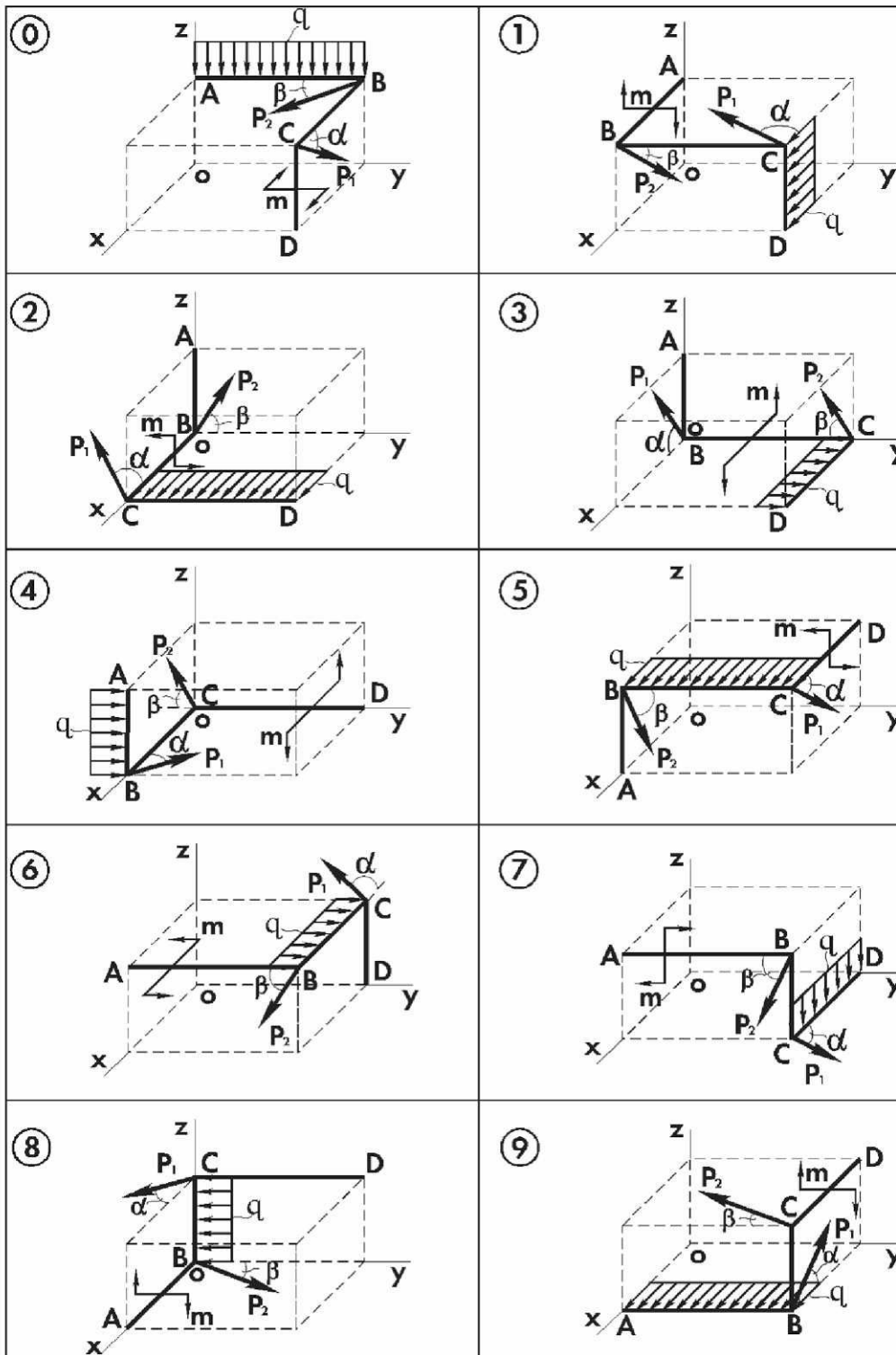


Рис. С-12. Схемы к задачам С-9, С-10

Невесомая конструкция в форме коленчатого стержня $ABCD$, с участками, перпендикулярными между собой, нагружена произвольной пространственной системой сил.

Предполагая, что стержень будет жёстко закреплён либо концом A , либо концом D , выяснить, при каком из вариантов крепления сила реакции и реактивный момент в жёсткой заделке будут меньше по абсолютной величине.

В расчётах принять, что $q = 30$ кН/м; $m = 50$ кН·м; $AB = BC = 3$ м; $CD = 2$ м, а сведения о силах P_1 и P_2 даны в табл. С-10.

Номер схемы принимается по последней цифре варианта задания.

Таблица С-10

Исходные данные	Предпоследняя цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P_1 = 20$ кН	Сила P_1 действует в плоскости, параллельной координатной OXY					Сила P_1 не действует				
Угол α	30°	45°	60°	30°	60°					
$P_2 = 40$ кН	Сила P_2 не действует					Сила P_2 действует в плоскости, параллельной координатной OYZ				
Угол β						OYZ			OXY	

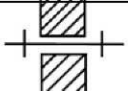
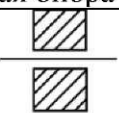
ЗАДАЧА С-11 ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ ВАЛА

Вал длиной 0,9 м установлен в опорах, одна из которых (фиксирующая) удерживает его от осевого смещения. На валу закреплено зубчатое колесо диаметром $d = 0,2$ м и шкив ременной передачи диаметром $D = 0,4$ м. Зубчатое колесо нагружено силами: окружной $F_t = 1000$ Н, радиальной $F_r = 300$ Н и осевой $F_a = 200$ Н. Натяжение ведущей ветви ремня вдвое больше ведомой: $F_1 = 2F_2$.

В зависимости от места контакта зубчатого колеса с другим (ведущим – на рисунке не показано) колесом нагрузка на данное колесо может передаваться через одну из точек, расположенных на концах горизонтального или вертикального диаметров. Определить натяжение ветвей ремня и реакции опор вала, считая, что он находится в равновесии.

Размещение опор вала, зубчатого колеса и шкива, а также варианты нагружения зубчатого колеса принять по табл. С-11.

Таблица С-11

Исходные данные	Предпоследняя цифра варианта задания									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Фиксирующая опора 	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B
Подшипник 	C	C	A	A	B	D	B	A	D	A
Зубчатое колесо (рисунок на схеме к задаче С-11)	B	D	B	C	D	A	D	B	C	D
Шкив (рисунок на схеме к задаче С-11)	D	A	D	B	C	C	A	C	B	C
Вариант нагружения зубчатого колеса	1	2	6	8	1	6	3	0	3	8

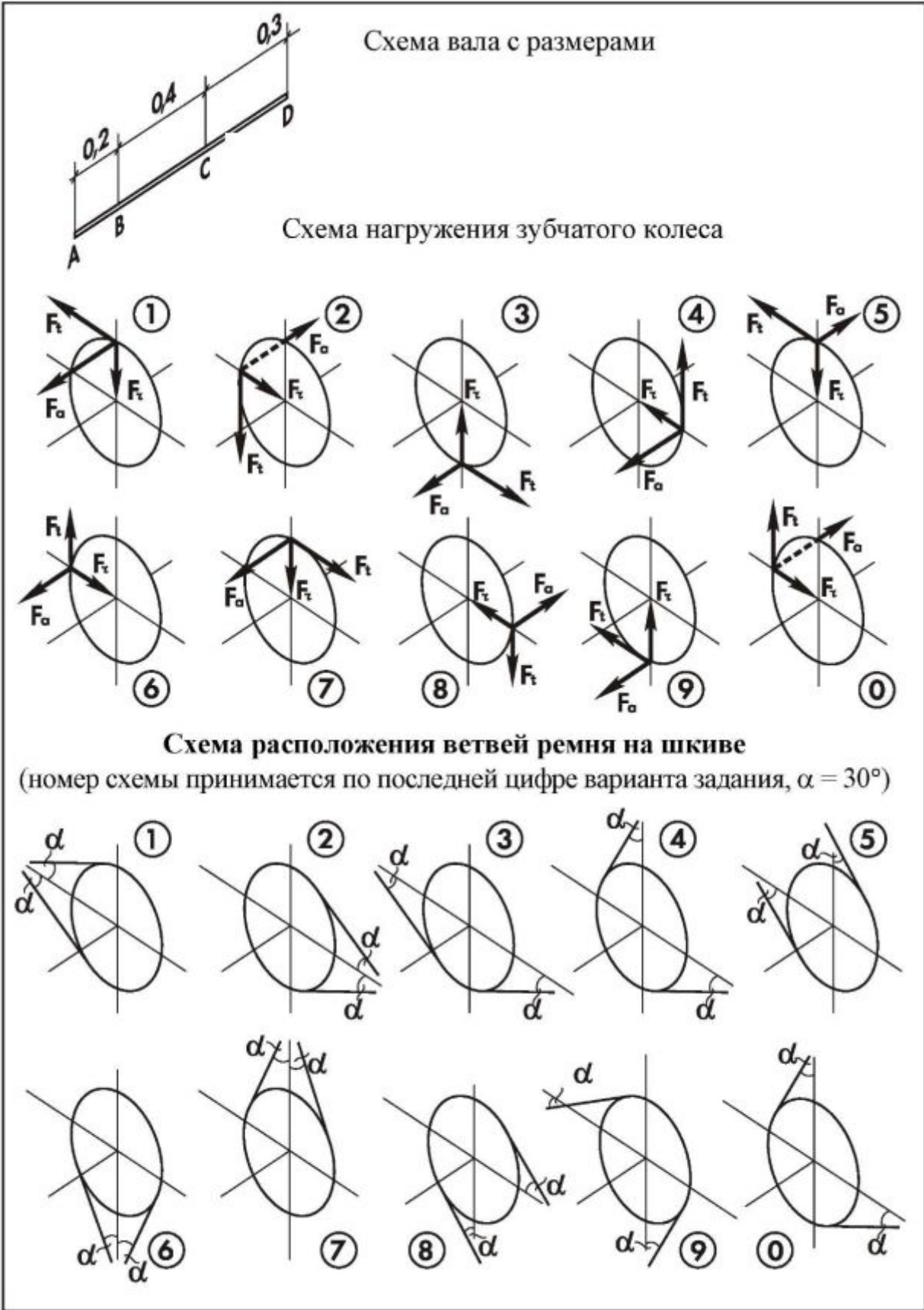


Рис. С-13

ЗАДАЧА С-12
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ
ПЛОСКОГО СЕЧЕНИЯ СТРОИТЕЛЬНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Определить координаты центра тяжести заданного сечения. Размеры на рисунках схем указаны в сантиметрах. Номер схемы принимается по последней схеме варианта.

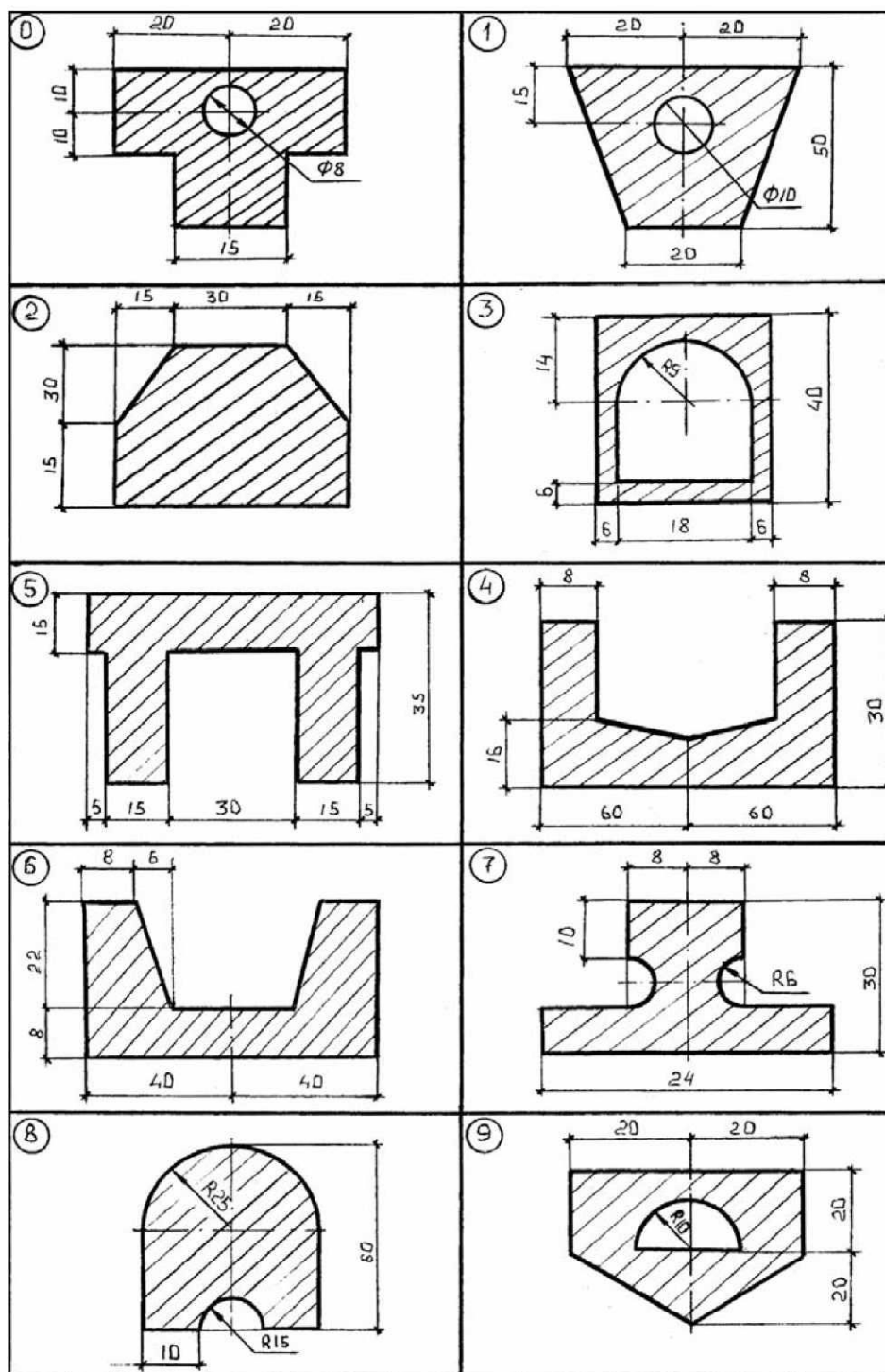


Рис. С-14

ЗАДАЧА С-13 (а; б)
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ

Задача 13, а

Определить положение центра тяжести плоской стержневой конструкции фермы, считая, что все её стержни выполнены из одного материала и имеют одинаковую форму и размеры поперечного сечения. Схему и размеры фермы принять из рис. С-10, С-11.

Задача 13, б

Определить положение центра тяжести плоской фигуры, вырезанной по внешнему контуру фермы (см. рис. С-10, С-11).

ЗАДАЧА С-14
ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ ТЕЛА С УЧЕТОМ СИЛ ТРЕНИЯ

Брусок весом P принудительно удерживается в покое на негладкой наклонной плоскости (рис. С-15.1 (а, б)).

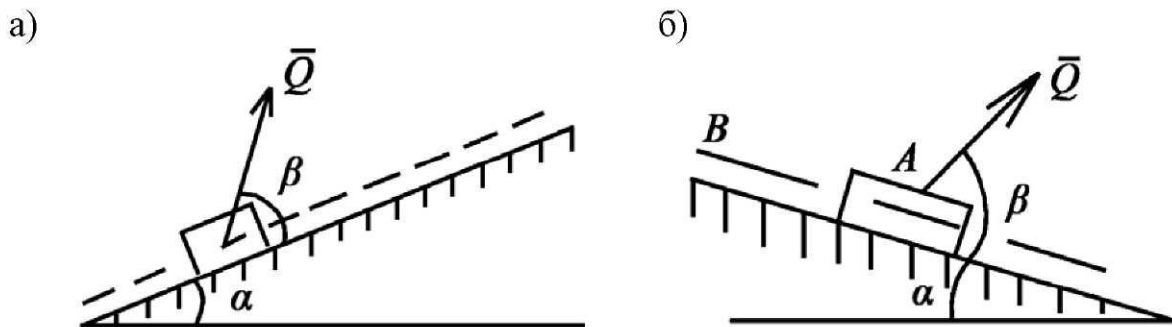


Рис. С-15.1: а) для нечетных вариантов; б) для четных и нуля

Выяснить, будет ли он оставаться в покое после приложения дополнительной силы Q или придет в движение при условии, что связь (нить) мгновенно исчезает. Определить величину и направление силы трения между бруском и плоскостью в этих условиях. Определить также величину, указанную на рис. С-15.1, при которой брусок будет еще оставаться в равновесии после приложения силы Q , если значения всех остальных величин, указанных в таблице, не изменяются.

Номер схемы принять по последней цифре варианта.

Исходные данные	Предпоследняя цифра варианта задания									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P (Н)	30	50	80	120	60	80	150	90	40	70
Q (Н)	80	60	40	90	40	70	50	100	50	30
f	0,35	0,3	0,4	0,15	0,2	0,15	0,25	0,2	0,1	0,35
α	40°	10°	50°	30°	50°	60°	70°	20°	40°	60°
β	10°	30°	60°	10°	30°	20°	60°	40°	20°	50°
Определить	Q_{\max}	P_{\max}	Q_{\min}	f_{\min}	P_{\min}	Q_{\max}	P_{\max}	Q_{\min}	f_{\min}	P_{\min}

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С-1, С-2, С-3

Эти задачи относятся к теме «Произвольная плоская система сил». Для их решения необходимо твёрдое знание следующих вопросов:

- 1) проекция силы на ось (величина, знак);
- 2) алгебраический момент относительно точки и его свойства;
- 3) теорема Вариньона о моменте равнодействующей силы;
- 4) алгебраический момент пары сил и его свойства;
- 5) распределённые нагрузки и их равнодействующие.

В задачах на равновесие несвободного твёрдого тела дополнительно надо знать вопросы:

- 1) связи и их реакции, основные типы связей;
- 2) условия и уравнения равновесия произвольной плоской системы сил, различные формы уравнений равновесия.

Пример 1

Приведение произвольной плоской системы сил к простейшему виду

Систему сил, действующих на брус AB (рис. П.1), привести к простейшему виду.

$$F_1 = 4\sqrt{5}\text{кН}; F_2 = 8\text{кН}; m = 40\text{кН}\cdot\text{м}; q = 5\text{кН}/\text{м};$$
$$\text{tg}\alpha = 2 \quad (\sin\alpha = 2/\sqrt{5}; \cos\alpha = 1/\sqrt{5}).$$

На рисунке линейные размеры указаны в метрах.

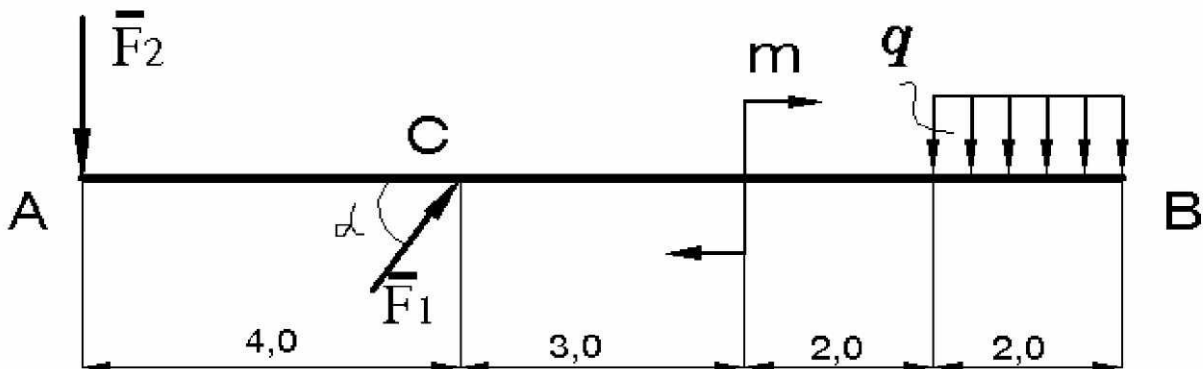


Рис. П.1

Решение

Примем в качестве центра приведения точку C (рис. П.2, а). Выберем оси проекций X и Y . Проекция главного вектора исходной системы сил на выбранные оси определяется:

$$R_x^* = \sum F_{kx} = F_1 \cos \alpha = 4\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 4 \text{ кН.}$$

$$R_y^* = \sum F_{ky} = -F_2 + F_1 \sin \alpha - q \cdot 2 = -8 + 4\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - 5 \cdot 2 = -10 \text{ кН.}$$

Главный момент заданной системы сил относительно принятого центра приведения C :

$$M_C^* = \sum m_c(\vec{F}_k) = F_2 \cdot 4 - m - q \cdot 2 \cdot 6 = 8 \cdot 4 - 40 - 5 \cdot 2 \cdot 6 = -68 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Полученный результат (с учётом знаков этих алгебраических величин, т. е. истинные направления главного вектора и главного момента) показываем на рисунке (рис. П.2, б).

Так как $R^* \neq 0$, то полученная система сил (R^*, M_C^*) может быть упрощена и заменена одной силой (т. е. исходная система сил имеет равнодействующую). Чтобы получить её, представим главный момент M_C^* в виде пары сил (\vec{P}_1, \vec{P}_2) , приняв $P_1 = P_2 = |\vec{R}_Y^*|$; $|\vec{P}_1| = |\vec{P}_2| = |\vec{R}_Y^*|$.

Приложим одну из сил пары (например, \vec{P}_1) в точке C и направим её противоположно силе R_Y^* (рис. П.2, в). Другая сила этой пары пройдёт через некоторую точку D бруса, удалённую от этой точки C на расстояние

$$h = CD = \frac{|M_C^*|}{|R_Y^*|} = \frac{68}{10} = 6,8 \text{ м.}$$

Положение точки D найдём из условия совпадения направления M_C^* и момента пары (\vec{P}_1, \vec{P}_2) . То есть точка D располагается правее точки C (см. рис. П.2, в). Далее, уравновешивающиеся силы \vec{P}_1 и R_Y^* исключаем из рассмотрения, а силу R_X^* переносим из точки C в точку D по линии ее действия (рис. П.2, г). Наконец, сложив силы \vec{P}_2 и R_X^* , получаем равнодействующую силу \vec{R} (4; -10) исходной системы сил.

$$|R| = |\vec{R}^*| = \sqrt{(R_x^*)^2 + (R_y^*)^2} = \sqrt{4^2 + (-10)^2} = \sqrt{116} = 10,8 \text{ Н.}$$

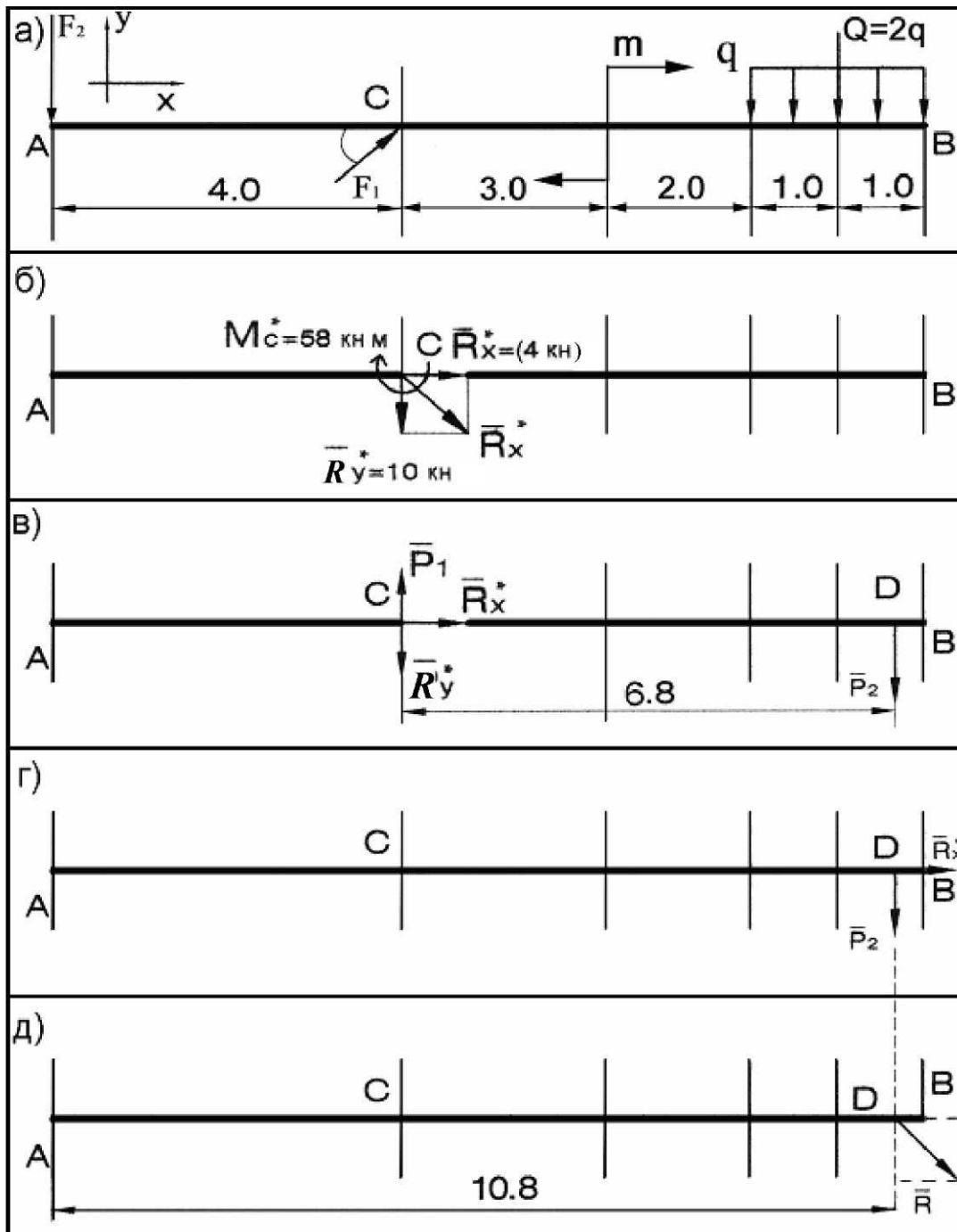


Рис. П.2

Пример 2 Определение опорных реакций балки

Балка АВ, нагруженная произвольной плоской системой сил, удерживается в равновесии при помощи неподвижной шарнирной опоры А и подвижной шарнирной опорой С (рис. П.3). Определить их реакции, если: $F_1 = 12$ кН; $F_2 = 10$ кН; $m = 4$ кН·м; $q = 6$ кН/м; $\alpha = 30^\circ$. Линейные размеры на рисунке даны в метрах.

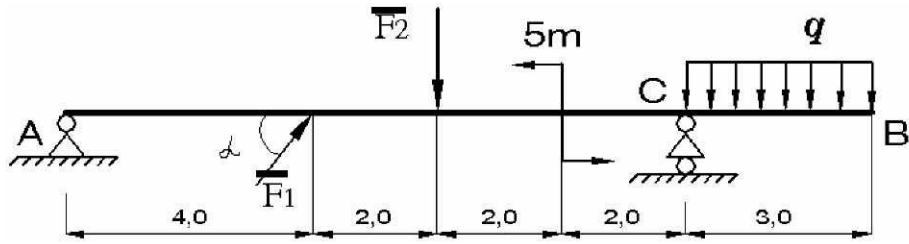


Рис. П.3

Решение

Для определения реакций опор рассмотрим равновесие балки AB . Реакция \vec{R}_C горизонтально-подвижной шарнирной опоры C направлена вертикально (предположим вверх). Реакцию \vec{R}_A неподвижной шарнирной опоры A представим в виде двух составляющих \vec{X}_A и \vec{Y}_A , направленных горизонтально и вертикально (например, вправо и вверх). Мысленно заменим опоры этими силами реакций и сделаем балку свободной (принцип освобождения от связи). Равномерно распределённую нагрузку интенсивности q , равную 6 кН/м , заменим равнодействующей силой

$$Q = q \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18 \text{ кН.}$$

Линия действия силы \vec{Q} проходит через середину участка длиной 3 м , где эта нагрузка действует. Так получается расчётная схема несвободной балки (рис. П.4), находящейся в равновесии под действием произвольной системы сил.

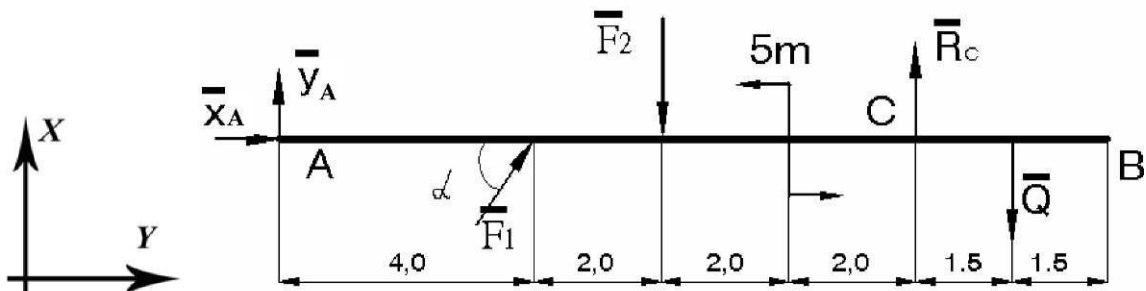


Рис. П.4

Выбрав оси проекций X и Y , составляем и решаем уравнения равновесия балки:

$$1) \sum F_{KX} = 0: X_A + F_1 \cos 30^\circ = 0; X_A + 12 \cdot 0,865 = 0; X_A = -10,4 \text{ кН.}$$

Знак « \rightarrow » указывает на то, что эта составляющая силы реакции \vec{R}_A направлена в противоположную сторону, т. е. не вправо, как предполагали вначале, а влево. Чтобы не исправлять решение, оставим без изменения выполненный ранее рисунок расчётной схемы балки, но будем иметь в виду, что $X_A = -10,4 \text{ кН}$.

$$2) \sum F_{KY} = 0: Y_A + F_1 \cdot \sin \alpha - F_2 + R_C - Q = 0;$$

$$Y_A + 12 \cdot 0,5 - 10 + R_C - 18 = 0; Y_A + R_C = 22 \text{ кН}$$

$$3) \sum m_A(\vec{F}_k) = 0: F_1 \cdot \sin \alpha \cdot 4 - F_2 \cdot 6 + 5m + R_C \cdot 10 - Q \cdot 11,5 = 0;$$

$$12 \cdot 0,5 \cdot 4 - 10 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + R_C - 18 \cdot 11,5 = 0; 24 - 60 + 20 + 10 \cdot R_C - 207 = 0; R_C = 22,3 \text{ кН}$$

Возвращаясь ко второму уравнению равновесия, вычисляем Y_A :

$$Y_A + 22,3 = 22; Y_A = -0,3 \text{ кН.}$$

Истинное направление этой составляющей силы реакций \vec{R}_A – вертикально вниз. Полная реакция опоры A :

$$R_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \sqrt{10,4^2 + 0,3^2} = 10,5 \text{ кН.}$$

Выполним проверку правильности решения задачи. Для этого составим ещё одно уравнение равновесия балки, причём такое, которое не использовалось при определении сил реакций, например:

$$\sum m_B(\vec{F}_k) = 0: -Y_A \cdot 13 - F_1 \cdot \sin \alpha \cdot 9 + F_2 \cdot 7 + 5m - R_C \cdot 3 + Q \cdot 1,5 = 0.$$

Подставим в это уравнение заданные и найденные силы, получаем:

$$-(-0,3) \cdot 13 - 12 \cdot 0,5 \cdot 9 + 10 \cdot 7 + 5 \cdot 4 - 22,3 \cdot 3 + 18 \cdot 1,5 = 0;$$

$$3,9 - 54 + 70 + 20 - 66,9 + 27 = 0; -117 + 117 = 0; 0 = 0.$$

Следовательно, неизвестные силы реакций опор определены верно.

$$|\vec{X}_A| = 10,4 \text{ кН, влево}; |\vec{Y}_A| = 0,3 \text{ кН, вниз}; |\vec{R}_C| = 22,3 \text{ кН, вверх.}$$

Пример 3

Определение опорных реакций балки

Брус, рассмотренный в примере 1, жёстко закреплён правым концом (рис. П.5). Определить реакции этой связи и выполнить проверку правильности решения.

Дано: —

$$F_1 = 4\sqrt{5} \text{ кН}; F_2 = 8 \text{ кН};$$

$$m = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 6 \text{ кН/м};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 2; (\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}).$$

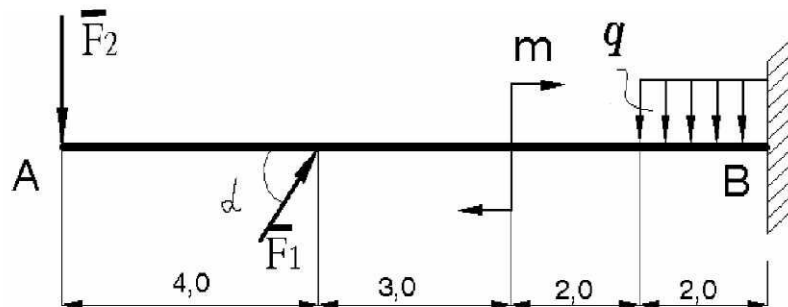


Рис. П.5

Решение

Брус, работающий на изгиб, называется балкой. Рассмотрим её равновесие под действием заданной системы сил и искомых реакций жёсткой заделки B . Эти реакции представим в виде неизвестной реактивной силы \vec{R}_B (которую сразу разложим на две составляющие, параллельные произвольно выбранным осям проекций X и Y) и реактивного момента M_B , выбрав его направление произвольно (например, против хода часовой стрелки). Заменив жёсткую заделку B этими реакциями, получаем расчётную схему балки в виде свободного твёрдого тела, находящегося в равновесии под действием указанных сил и неизвестных сил (рис. П.6). Составляем и решаем уравнения равновесия балки.

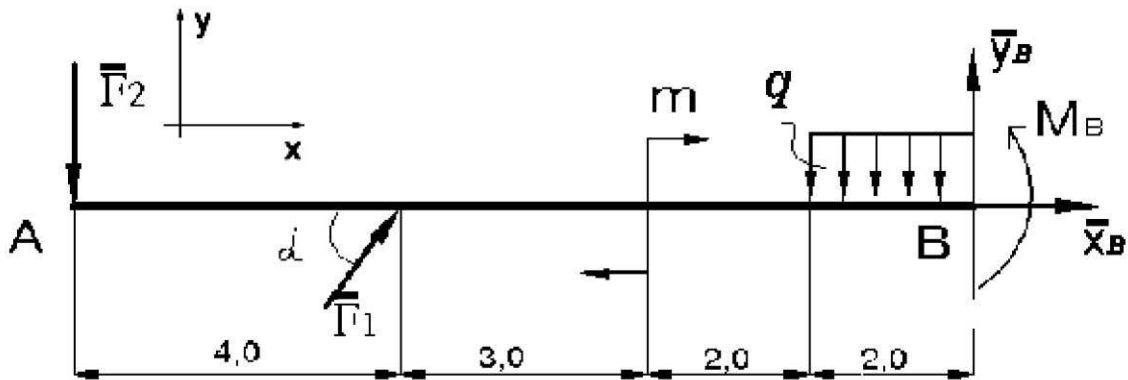


Рис. П.6

$$1) \sum F_{KY} = 0: F_1 \cdot \cos \alpha + X_B = 0; 4\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + X_B = 0; X_B = -4 \text{ кН}$$

$$2) \sum F_{KY} = 0: -F_2 + F_1 \cdot \sin \alpha - q \cdot 2 + Y_B = 0; -8 + 4\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - 5 \cdot 2 + Y_B = 0;$$

$$Y_B = 10 \text{ кН.}$$

$$3) \sum m_B(\vec{F}_k) = 0: F_2 \cdot 11 - F_1 \sin \alpha \cdot 7 - m + q \cdot 2 \cdot 1 + M_B = 0;$$

$$8 \cdot 11 - 4\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 7 - 30 + 5 \cdot 2 \cdot 1 + M_B = 0; 88 - 56 - 30 + 10 + M_B = 0;$$

$$M_B = -12 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Знак «-» при M_B указывает на то, что истинное направление реактивного момента противоположно предварительно принятому: т. е. $M_B = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$; направление – по ходу часовой стрелки.

Чтобы не проводить всё решение заново, оставим принятые направления реакций жёсткой заделки B без изменения, но будем помнить о знаках найденных реакций.

В заключение выполним проверку правильности решения задачи, составим ещё одно уравнение равновесия. Например:

$$\sum m_A = 0: F_1 \sin \alpha \cdot 4 - m - q \cdot 2 \cdot 10 + Y_B \cdot 11 + M_B = 0;$$

$$4\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 4 - 30 - 5 \cdot 2 \cdot 10 + 10 \cdot 11 + (-12) = 0; 32 - 30 - 100 + 110 - 12 = 0; 0 = 0.$$

Полученное тождество свидетельствует о правильности решения задачи. $X_B = 4$ кН (влево); $Y_B = 10$ кН (вверх); $M_B = 12$ кН·м (по ходу часовой стрелки).

Пример 4 Определение опорных реакций рамы

Плоская рама находится в равновесии благодаря наложенной связи – жесткой заделке в сечении A (рис. П.7). Определить реакции связи и выполнить проверку правильности решения.

Дано:
 $P_1 = 24$ кН; $P_3 = 12\sqrt{3}$ кН;
 $q_2 = 3$ кН/м; $m = 18$ кН·м;
 $a = \sqrt{3}$ м; $b = 3$ м.

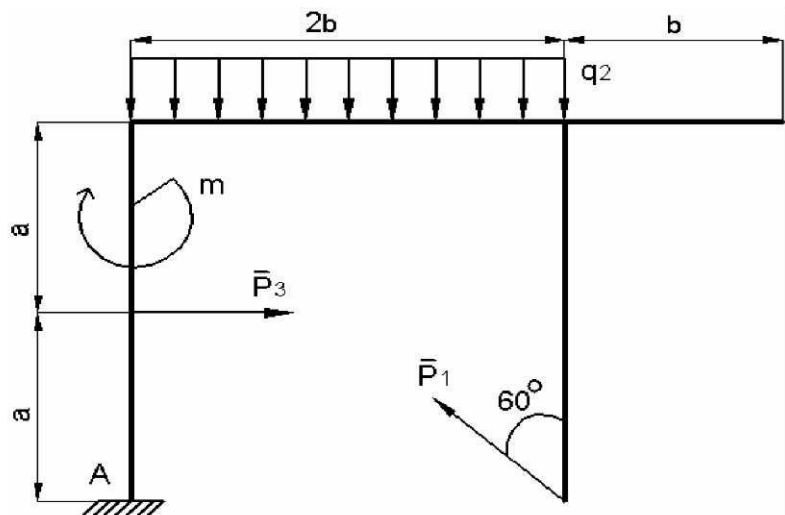


Рис. П.7

Решение

Для определения реакций жесткой заделки в точке A рассмотрим равновесие рамы, находящейся под действием произвольной плоской системы сил. Заменим жесткую заделку искомыми реакциями: X_A , Y_A , m_A , а распределенную нагрузку – ее равнодействующей:

$$Q = q_2 \cdot 2b = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18 \text{ кН.}$$

Получаем расчетную схему рамы в виде свободного твердого тела, находящегося в равновесии под действием заданной произвольной плоской системы сил и произвольной плоской системы сил реакций, заменяющих жесткую заделку A (рис. П.8).

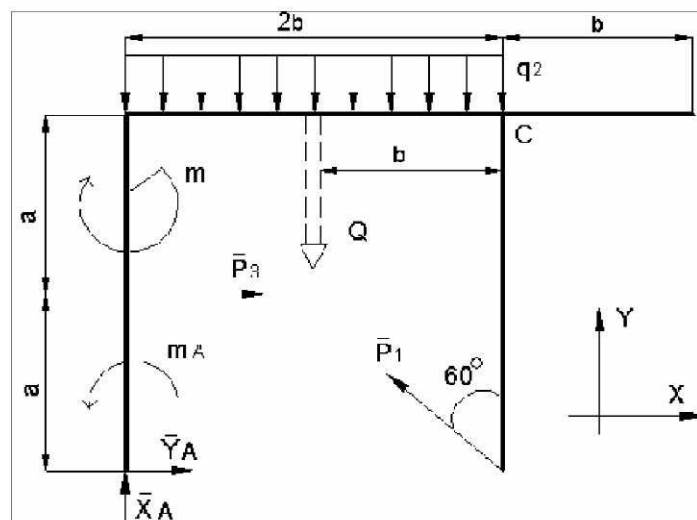


Рис. П.8

Выбираем оси проекций X и Y , составляем уравнения равновесия тела:

- 1) $\sum F_{KY} = 0: X_A - P_1 \cdot \sin 60^\circ + P_3 = 0.$
- 2) $\sum F_{KY} = 0: Y_A - Q + P_1 \cdot \cos 60^\circ = 0.$
- 3) $\sum m_A = 0: m_A - m - Q \cdot b + P_1 \cos 60^\circ \cdot 2b - P_3 \cdot a = 0.$

Подставив значения заданных величин и решив уравнения, получаем:

$$X_A = 0; Y_A = 0; m_A = 36 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для проверки составим еще одно уравнение равновесия, не использованное при решении:

$$\sum m_C(\vec{F}_k) = 0$$

$$m_A + X_A \cdot 2a - Y_A \cdot 2b - m + Q \cdot b + P_3 \cdot a - P_1 \cdot \sin 60^\circ \cdot 2a = 0$$

Подстановка полученных и заданных величин в это уравнение приводит к тождеству $0 = 0$. Следовательно, неизвестные силы реакций найдены верно.

Пример 5 Определение опорных реакций рамы

Плоская рама находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил и закреплена неподвижно при помощи неподвижной шарнирной опоры (точка A) и подвижной шарнирной опоры (точка B). Приняв линейные размеры рамы непосредственно из рис. П.9, определить реакции опор рамы и выполнить проверку правильности решения задачи.

Дано:
 $\sin\alpha = 0,8$; $\cos\alpha = 0,6$; $F_1 = 50$ кН;
 $F_2 = 30$ кН; $q = 10$ кН/м;
 $m_1 = 100$ кН·м; $m_2 = 60$ кН·м;
 $m_3 = 40$ кН·м.

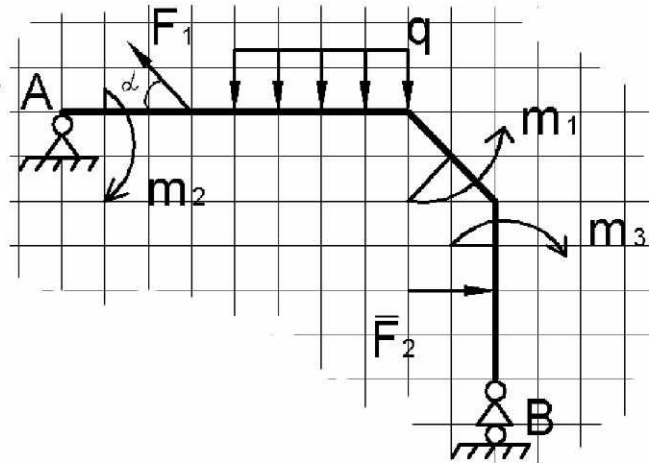


Рис. П.9

Решение

Для определения реакций связей рассмотрим равновесие рамы. Чтобы получить расчетную схему, отбросим связи и заменим их действие искомыми силами реакций. Реакцию опоры в точке A представим в виде двух составляющих \vec{X}_A и \vec{Y}_A , направленных параллельно произвольно принимаемым осям проекций X и Y (рис. П.10).

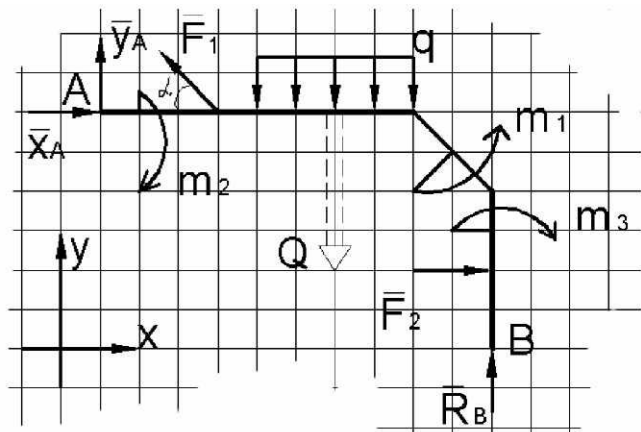


Рис. П.10

Реакция \vec{R}_B подвижной шарнирной опоры в точке B направлена перпендикулярно опорной поверхности, т. е. вертикально (например, вверх). Равномерно распределенную нагрузку интенсивности $q = 10$ кН/м заменим ее равнодействующей силой

$$Q = q \cdot 4 = 40 \text{ кН.}$$

Линия действия этой силы проходит через середину участка длиной 4 м, на который действует нагрузка.

Полученная расчетная схема представлена на рис. П.10.

Составляем и решаем уравнения равновесия произвольной плоской системы сил, действующей на раму:

$$1) \sum F_{KY} = 0: X_A - F_1 \cdot \cos\alpha + F_2 = 0; X_A - 50 \cdot 0,6 + 30 = 0; X_A = 0.$$

$$2) \sum m_A(\vec{F}_k) = 0: -m_2 + F_1 \cdot \sin\alpha \cdot 3 - Q \cdot 6 + m_1 - m_3 + R_B \cdot 10 + F_2 \cdot 4 = 0;$$

$$-80 + 50 \cdot 0,8 \cdot 3 - 40 \cdot 6 + 100 - 40 + R_B \cdot 10 + 30 \cdot 4 = 0; R_B = 2 \text{ кН.}$$

$$3) \sum m_B(\vec{F}_k) = 0:$$

$$-X_A \cdot 6 - Y_A \cdot 10 + F_1 \cdot \cos \alpha \cdot 6 - F_1 \cdot \sin \alpha \cdot 7 + Q \cdot 4 - m_2 + m_1 - m_3 - F_2 \cdot 2 = 0;$$

$$-0 - Y_A \cdot 0 + 50 \cdot 0,6 \cdot 6 - 50 \cdot 0,8 \cdot 7 + 40 \cdot 4 - 80 + 100 - 40 - 30 \cdot 2 = 0;$$

$$Y_A = -2 \text{ кН.}$$

Выполним проверку правильности полученных результатов, составив еще одно уравнение равновесия рамы. Например:

$$\sum F_{KY} = 0: Y_A - F_1 \cdot \sin \alpha - Q + R_B = 0; -2 + 50 \cdot 0,8 - 40 + 2 = 0; 0 = 0.$$

Значит реакции опор рамы найдены верно.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С-4, С-5, С-6, С-7

Эти задачи – на равновесие системы сочлененных тел. В них впервые ставится вопрос об определении внутренних сил, действующих между составными частями конструкции.

Следует иметь в виду, что внутренние силы есть во всех телах, во всех системах, в любых конструкциях. Но они, подчиняясь принципу равенства действия и противодействия, существуют всегда попарно. Поэтому в любом теле, в любой системе, в любой конструкции они между собой уравниваются. По этой причине при рассмотрении равновесия тела, системы или конструкции в целом эти внутренние силы не вводятся в уравнения равновесия. Но их знание необходимо для создания прочных, работоспособных конструкций, механизмов и т. п. Кроме того, без определения этих сил не всегда удастся решить задачи о нахождении сил реакций внешних связей методами теоретической механики.

Например, конструкция, показанная на рис. П.11, состоит из трех тел (балок AE , EK , KD), соединенных между собой шарнирами E и K .

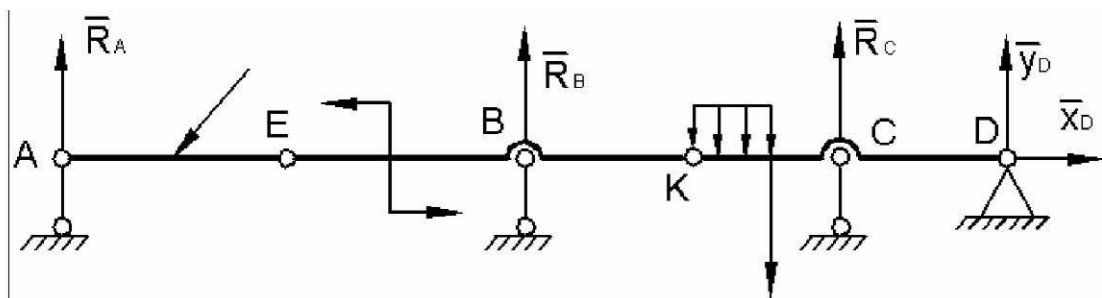


Рис. П.11

Для удержания ее в равновесии нужны внешние связи. В рассматриваемой конструкции таковыми являются опорные стержни в точках A , B , C и неподвижная шарнирная опора D . Под действием внешних заданных нагрузок в них (опорах) появляются неизвестные силы реакций общим числом 5

(в неподвижной шарнирной опоре D – две составляющие одной неизвестной по величине и направлению силы реакции \vec{R}_D). Следовательно, для их определения необходимо иметь 5 независимых уравнений. Но, оставаясь в рамках теоретической механики и исходя только из уравнений равновесия твердого тела, получить такое количество независимых уравнений невозможно. Дело в том, что количество таких (независимых между собой) уравнений равновесия определяется не особенностями рассматриваемой системы (конструкции, механизма и т. п.), а исключительно видом системы сил, приложенной к ней (сходящаяся, произвольная плоская, произвольная пространственная или какая-то иная). Например, в случае произвольной плоской системы сил таких уравнений можно составить только 3. Тем не менее, задача является статически определимой, т. е. все 5 неизвестных внешних реакций могут быть найдены. Но для этого придется дополнительно рассматривать равновесие отдельно взятых частей конструкции. Например, рассматривая только её часть AE (рис. П.12).

Из уравнений равновесия (для этой части конструкции можно составить именно 3 независимых уравнения равновесия, поскольку действующая на AE система сил также произвольная плоская) нетрудно определить и силу \vec{R}_A (которая является внешней силой и для AE и для всей конструкции $AEKD$ в целом) и силу реакции в шарнире E (с составляющими). Они – внешние для AE , но внутренние для всей конструкции в целом. После того, как силы X_E и Y_E найдены, можно рассмотреть равновесие следующей части конструкции – EK (рис. П.13).

При построении расчетной схемы необходимо учесть, что силы, действующие на эту часть конструкции со стороны AE , т. е. давления в точке E , численно равны найденным выше реакциям:

$$X'_E = X_E; Y'_E = Y_E,$$

но их направления противоположны этим реакциям:

$$\bar{X}_E = -X'_E; \bar{Y}_E = -Y'_E,$$

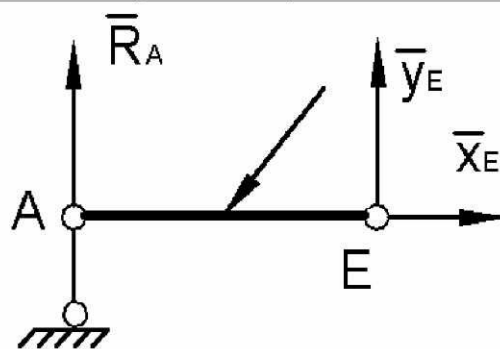


Рис. П.12

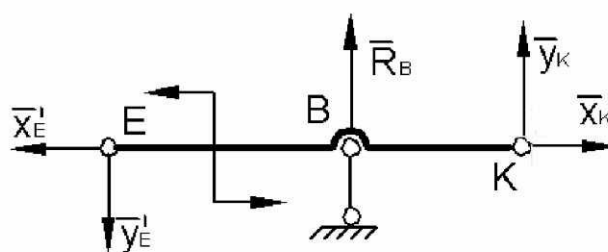


Рис. П.13

Именно с учетом этого обстоятельства и показаны силы \bar{X}'_E, \bar{Y}'_E на рис. П.13.

Снова замечаем, что в рассматриваемых фрагментах задачи и конструкции 3 неизвестных $\bar{R}_B, \bar{X}_K, \bar{Y}_K$. Но так как на балку EK действует произвольная плоская система сил, то можно составить именно 3 независимых уравнения ее равновесия. Следовательно, задача решается и все 3 неизвестные $\bar{R}_B, \bar{X}_K, \bar{Y}_K$ будут найдены.

Далее можно рассмотреть либо часть KD конструкции, либо всю конструкцию целиком. В последнем случае неизвестными будут $\bar{R}_C, \bar{X}_D, \bar{Y}_D$, т. к. \bar{R}_A и \bar{R}_B уже найдены. Снова можно составить 3 независимых уравнения равновесия и из них найти эти оставшиеся 3 неизвестные силы.

Подведем итоги. Внутренние силы существуют во всех телах, системах, конструкциях. В целом они уравниваются, но для каждой отдельно взятой части системы (конструкции) некоторые из них становятся внешними. При рассмотрении равновесия какой-либо части конструкции (системы) с такими «новыми» внешними силами обращаются как и со «старыми», в частности, эти силы входят в уравнения равновесия и при определенных условиях могут быть найдены методами теоретической механики. Это – так называемые «статически определимые задачи», в которых количество неизвестных сил и число независимых уравнений равновесия, которые можно составить для данной системы сил, равны между собой.

После определения всех внешних (для конструкции в целом) неизвестных сил можно выполнить проверку решения задачи обычным приемом – составить одно (или несколько) уравнений равновесия, неиспользованных при определении неизвестных. Например, это могут быть уравнения равновесия конструкции (системы) в целом.

Так, «расчленением» составной конструкции на отдельные части и рассмотрением их равновесия решаются задачи С-4, С-5, С-6, С-7. Они отличаются друг от друга только количеством тел, из которых состоит сложная конструкция, находящаяся под действием произвольной плоской системы сил и закрепленная неподвижно при помощи тех или иных опорных устройств. Ниже рассмотрены примеры решения подобных задач.

Пример 6

Определение реакций внешних опор и давления во внутреннем шарнире составной конструкции

Составная конструкция состоит из двух балок BA и AE , соединенных шарниром A . Определить реакции внешних опорных стержней в точках B, E и неподвижной шарнирной опоры D , удерживающих конструкцию в равновесии при действии на нее произвольной плоской системы сил (рис. П.14).

Определить также давление в соединенном (внутреннем) шарнире A .

Дано: $F_1 = 6\sqrt{5}$ кН; $F_2 = 9$ кН; $q_1 = 3$ кН/м; $q_2 = q_{\max} = 2\sqrt{5}$ кН/м;

$m = 3$ кН·м; $\operatorname{tg}\alpha = 2$; $\operatorname{tg}\beta = 0,5$; $(\sin\alpha = \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}; \cos\alpha = \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}})$.

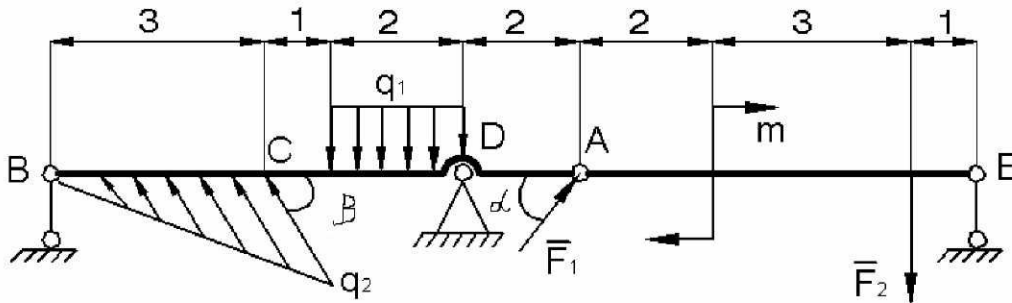


Рис. П.14

Решение

Для составной конструкции в целом имеем 4 неизвестных внешних реакции (реакции опорных стержней \bar{R}_B , \bar{R}_E и две составляющие неизвестной силы реакции \bar{R}_D неподвижной шарнирной опоры $D - \bar{X}_D, \bar{Y}_D$).

Независимых уравнений равновесия всей конструкции в целом (если воспользоваться аксиомой отвердевания) – только 3, т. к. действующая на конструкцию система сил является произвольной плоской. Этого не достаточно для определения четырех неизвестных. Поэтому воспользуемся методом расчленения составной конструкции и будем рассматривать равновесие её отдельных частей BA и AE , полученных расчленением конструкции по внутреннему шарниру A . Освободим каждое из них от внешних связей и заменим их действие искомыми силами реакций (рис. П.15, а). Распределенные нагрузки заменим их равнодействующими:

$$Q_1 = q_1 \cdot l_1 = 3 \cdot 2 = 6 \text{ кН}; Q_2 = \frac{1}{2} \cdot q_{\max} \cdot l_2 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 3 = 3\sqrt{5} \text{ кН}.$$

Линия действия силы Q_1 проходит через середину участка, где действует нагрузка q_1 , а линия действия силы Q_2 проходит через точку L , делящую участок BC на части 2 : 1, т. е. $BL = 2$ м; $LC = 1$ м.

Силы, действующие на каждую часть конструкции в точке A , между собой равны, но направлены в противоположные стороны:

$$X'_A = X_A; Y'_A = Y_A; \bar{X}'_A \uparrow \downarrow \bar{X}_A; \bar{Y}'_A \uparrow \downarrow \bar{Y}_A.$$

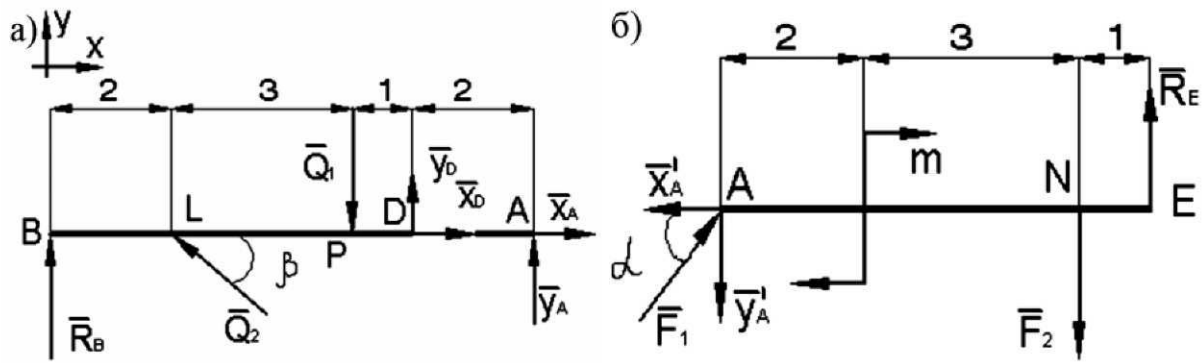


Рис. П.15.

а) левая часть конструкции; б) правая часть конструкции

В первую очередь рассматриваем равновесие тела AE , т. к. среди внешних сил, действующих на него, только 3 неизвестных, тогда как подобных сил, приложенных к телу AB – 5. При этом на каждое из тел действует произвольная плоская система сил, для которых можно составить только по 3 независимых уравнения равновесия. Выбираем оси X и Y и составляем уравнения равновесия тела AE .

$$1) \sum F_{KX} = 0: -X'_A + F_1 \cos \alpha = 0; -X'_A + 6\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 0; X'_A = 6 \text{ кН.}$$

$$2) \sum m_E(\vec{F}_k) = 0: -F_1 \cdot \sin \alpha \cdot AE + Y'_A \cdot AE - m + F_2 \cdot NE = 0;$$

$$-6\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 6 + Y'_A \cdot 6 - 3 + 9 \cdot 1 = 0; -72 + Y'_A \cdot 6 - 3 + 9 = 0; Y'_A = 11 \text{ кН.}$$

$$3) \sum m_A(\vec{F}_k) = 0: R_E \cdot AE - F_2 \cdot AN - m = 0; R_E \cdot 6 - 9 \cdot 5 - 3 = 0;$$

$$R_E \cdot 6 - 48 = 0; R_E = 8 \text{ кН.}$$

Проводим проверку правильности решения этой части задачи:

$$\sum F_{KY} = 0: -Y'_A + F_1 \cdot \sin \alpha - F_2 + R_E = 0; -11 + 6\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - 9 + 8 = 0;$$

$$-20 + 20 = 0; 0 = 0.$$

Рассматриваем равновесие тела AB . Имеем:

$$X_A = X'_A = 6 \text{ кН}; Y_A = Y'_A = 11 \text{ кН.}$$

Остальные неизвестные находим из уравнений равновесия тела AB .

$$4) \sum F_{KX} = 0: X_D + X_A - Q_2 \cdot \cos \beta = 0; X_D + 6 - 3\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 0; X_D = 0.$$

$$5) \sum m_B(\vec{F}_k) = 0: Q_2 \cdot \sin \beta \cdot BL + Q_1 \cdot BP + Y_D \cdot BD + Y_A \cdot BA = 0;$$

$$3\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 2 - 6 \cdot 5 + Y_D \cdot 6 + 11 \cdot 8 = 0; 6 - 30 + Y_D \cdot 6 + 88 = 0; Y_D = -64/6 \approx -10,67 \text{ кН}.$$

$$6) \sum m_D(\vec{F}_k) = 0: -R_B \cdot DB - Q_2 \cdot \sin \beta \cdot DL + Q_1 \cdot DP + Y_A \cdot DA = 0;$$

$$-R_B \cdot 6 - 12 + 6 + 22 = 0; R_B = 16/6 \approx 2,67 \text{ кН}.$$

Проводим проверку правильности решения этой части задачи:

$$\sum F_{KY} = 0: R_B + Q_2 \cdot \sin \beta - Q_1 + Y_D + Y_A = 0;$$

$$2,67 + 3\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - 6 - 10,67 + 11 = 0; 0 = 0.$$

Выполним проверку правильности решения всей задачи, для чего составим уравнение равновесия всей конструкции в целом (рис. П.16).

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0: -R_B \cdot 8 - Q_2 \cdot \sin \beta \cdot 6 + Q_1 \cdot 3 - Y_D \cdot 2 - m - F_2 \cdot 5 + R_E \cdot 6 = 0;$$

$$-2,67 \cdot 8 - 3\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 6 + 6 \cdot 3 + 10,67 \cdot 2 - 3 - 45 + 48 = 0; 0 = 0.$$

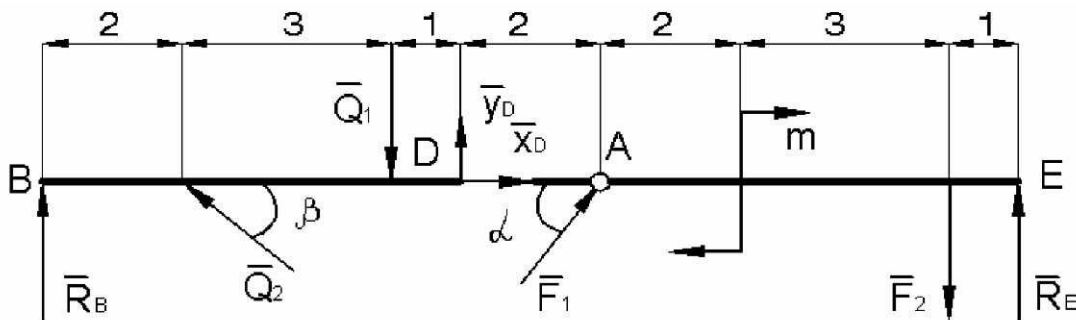


Рис. П.16

Выполненная проверка подтверждает правильность решения всей задачи.

Примечание. Силы давления в шарнире A будут иными, если силу F отнести к другому телу, но при этом реакции опор B , E и D останутся без изменения.

Пример 7

Определение опорных реакций составной рамы и давления во внутреннем шарнире C

Составная конструкция ACD имеет соединительный шарнир в точке C и опоры в точках A и D . Определить реакции внешних опор и давления в шарнире C .

Для примеров 7 –9 принять масштаб построений: $\square 1 \text{ м}$
 1 м

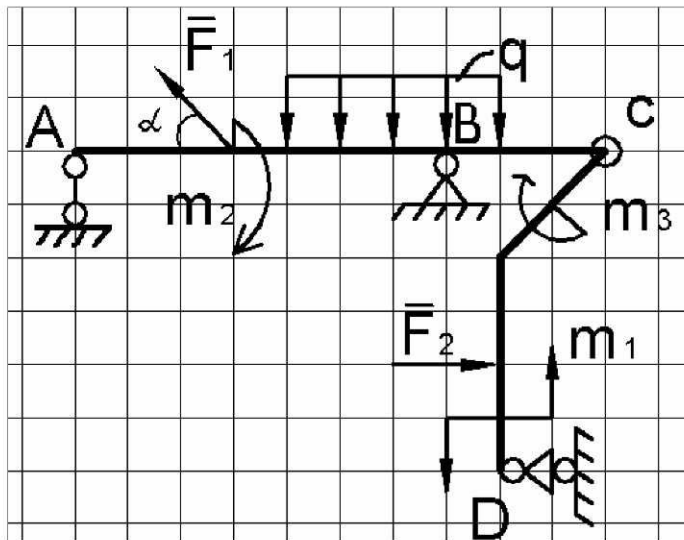


Рис. П.17

Дано:

$$\sin \alpha = 0,8; \cos \alpha = 0,6;$$

$$F_1 = 50 \text{ кН}; F_2 = 30 \text{ кН};$$

$$q = 10 \text{ кН/м}; m_1 = 100 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$m_2 = 60 \text{ кН}\cdot\text{м}; m_3 = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Решение

В равновесии под действием произвольной плоской системы сил находится составная рама, состоящая из 2-х частей (AC и DC), соединенных в точке C внутренним шарниром. Для нахождения опорных реакций и давления во внутреннем шарнире расчленим систему на отдельные части, заменяя действие отброшенной части реакциями шарнира C , а внешние опоры – их реакциями (рис. П.18).

Начнем рассматривать равновесие части конструкции DC (рис. П.19), т. к. число неизвестных сил, действующих на нее меньше (равно трем).

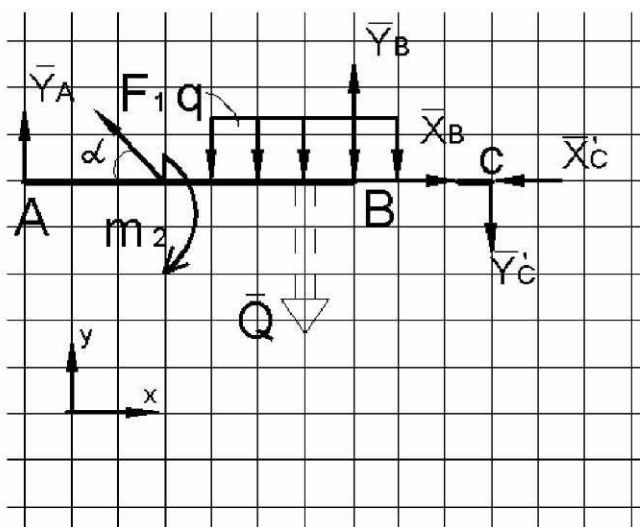


Рис. П.18

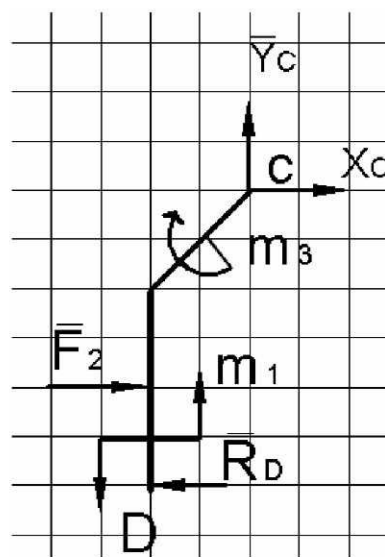


Рис. П.19

Тело DC

Составляем уравнения равновесия и решаем их:

$$\sum F_{KY} = 0: Y_c = 0. \quad \sum m_C(\vec{F}_k) = 0: -R_D \cdot 6 + m_1 + F_2 \cdot 4 - m_3 = 0;$$

$$-R_D \cdot 6 + 100 + 30 \cdot 4 - 40 = 0; \quad R_D = 30 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{KX} = 0: X_C + F_2 - R_D = 0; \quad X_C + 30 - 30 = 0; \quad X_C = 0.$$

Тело AC

Учитывая, что $X'_c = X_c = 0$ кН; $Y'_c = Y_c = 0$ составляем уравнения равновесия тела AC, предварительно заменив распределенную нагрузку ее равнодействующей Q , равной $Q = q \cdot l = 10 \cdot 4 = 40$ кН.

Линия действия этой силы проходит через середину участка с распределенной нагрузкой q (см. рис. П.18).

$$\sum m_A(\vec{F}_K) = 0: F_1 \cdot \sin \alpha \cdot 3 - m_2 - Q \cdot 6 + Y_B \cdot 7 - Y'_c \cdot 10 = 0;$$

$$50 \cdot 0,8 \cdot 3 - 60 - 40 \cdot 6 - Y_B \cdot 7 = 0; \quad Y_B = 25,7 \text{ кН.}$$

$$\sum m_B(\vec{F}_K) = 0: -Y_A \cdot 7 - F_1 \cdot \sin \alpha \cdot 4 - m_2 + Q \cdot 1 - Y'_c \cdot 3 = 0;$$

$$-Y_A \cdot 7 - 50 \cdot 0,8 \cdot 4 - 60 + 40 = 0; \quad Y_A = -25,7 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{KX} = 0: X'_C + X_B - F_1 \cdot \cos \alpha = 0; \quad -0 + X_B - 50 \cdot 0,6 = 0; \quad X_B = 30 \text{ кН.}$$

Выполним проверку правильности решения, для чего рассмотрим равновесие всей конструкции в целом (рис. П.20).

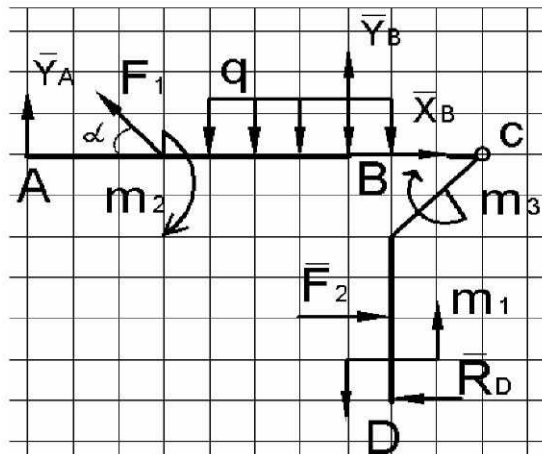


Рис. П.20

Составим уравнение ее равновесия в виде:

$$\sum m_C(\vec{F}_K) = 0:$$

$$-Y_A \cdot 10 - F_1 \sin \alpha \cdot 7 - m_2 + q \cdot 4 \cdot 4 - Y_B \cdot 3 - m_3 + F_2 \cdot 4 + m_1 - R_D \cdot 6 = 0.$$

После подстановки в уравнение заданных величин (сил, моментов и т. п.), а также найденных при решении задачи сил реакций опор получаем:

$$25,7 \cdot 10 - 50 \cdot 0,8 \cdot 7 - 60 + 10 \cdot 4 \cdot 4 - 25,7 \cdot 3 - 40 + 30 \cdot 4 + 100 - 30 \cdot 6 = 0;$$

$$637,1 - 637,1 = 0.$$

Следовательно, внешние опорные реакции определены верно.

Пример 8

Определение реакций внешних опор составной конструкции (система трех тел)

Плоская рама, состоящая из 3-х тел, соединенных шарнирами B и C , находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил (рис. П.21). Определить реакции внешних опорных устройств, а также давления в шарнирах B и C и выполнить проверку правильности решения.

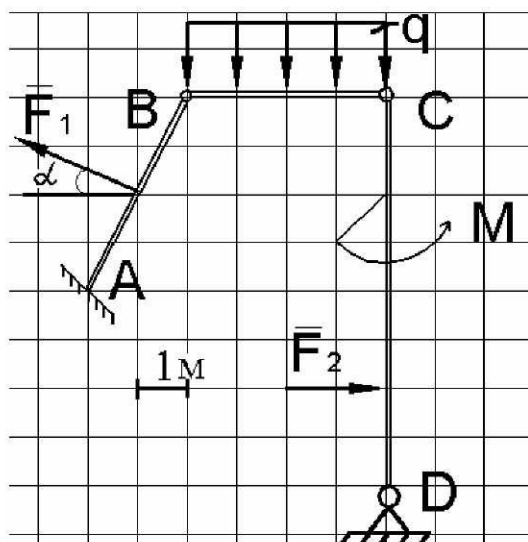


Рис. П.21

Дано:

$$F_1 = 25 \text{ кН}; F_2 = 20 \text{ кН};$$

$$q = 10 \text{ кН/м}; M = 40 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\sin \alpha = 0,6; \cos \alpha = 0,8.$$

Линейные размеры принять непосредственно из рис. П.21, выполненного в указанном масштабе.

Решение

Данная конструкция представляет собой систему 3-х тел, соединенных шарнирами B и C . Для определения реакций опор и давлений в шарнирах расчленим систему на отдельные части, заменив действие всех связей их реакциями.

В точке A тело AB закреплено жестко. Заменим жесткую заделку A системой сил реакций X_A, Y_A, m_A , выбрав их направления произвольно (см. рис. П.21). В точке D тело закреплено при помощи неподвижной шарнирной опоры, реакцию которой представим в виде системы сил (X_D, Y_D) . Реакции шарниров B и C также представим в виде систем попарно равных сил $(X_B = X'_B, Y_B = Y'_B, X_C = X'_C, Y_C = Y'_C)$ и будем считать, что силы, помеченные штрихами, действуют на среднюю часть конструкции – BC (рис. П.22, б).

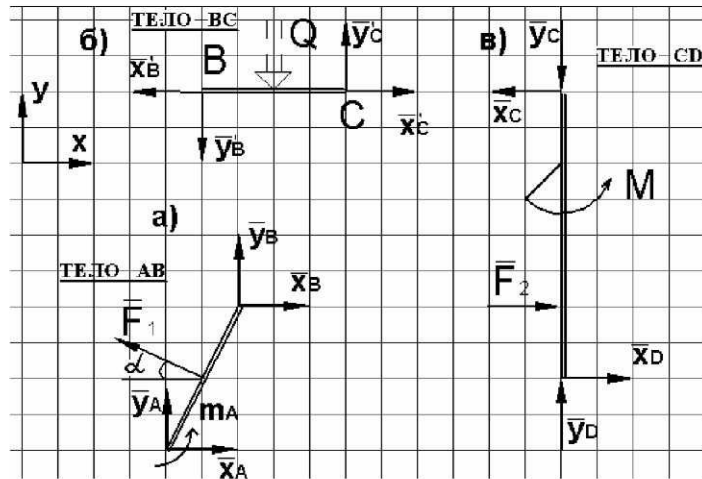


Рис. П.22

Вычислим равнодействующую распределенной нагрузки и приложим ее в середине участка распределения $Q = q \cdot BC = q \cdot 4 = 4 \cdot 10 = 40$ кН.

При рассмотрении равновесия каждого тела можем составить только 3 независимых уравнения равновесия, т. к. на любое из них (AB , BC и CD) действует произвольная плоская система сил, состоящая частично из заданных сил и частично из сил, которые необходимо определить.

Таким образом, суммарное число независимых уравнений равновесия равно 9. Столько же и неизвестных сил (в точке A – 3, в точках B , C и D – по 2 в каждой). Следовательно, задача статически определимая. Трудность ее решения состоит в том, что на каждое отдельно взятое тело из этой системы тел действует больше 3-х неизвестных сил: на тело AB – 5, на тела BC и CD – по 4).

Рассматривая равновесие каждого отдельно взятого тела можно сначала определить лишь некоторые из неизвестных сил, действующих на него. Например, из уравнений равновесия тела BC можно сразу найти силы Y'_B и Y'_C , а из уравнений равновесия тела CD – силы X_D и X_C .

Схематически этот процесс можно представить в виде следующего алгоритма (рис. П.23):



Рис. П.23. Возможные варианты первоочередного определения некоторых неизвестных сил реакций

Дальнейшее решение задачи можно провести различными путями: (рис. П.24, П.25, П.26).

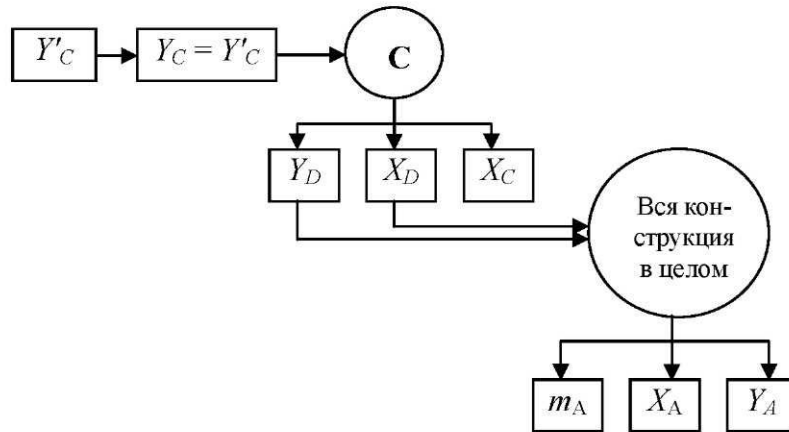


Рис. П.24

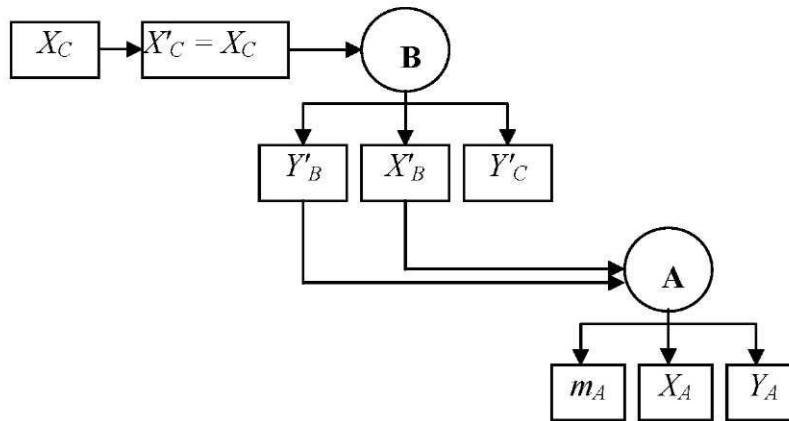


Рис. П.25

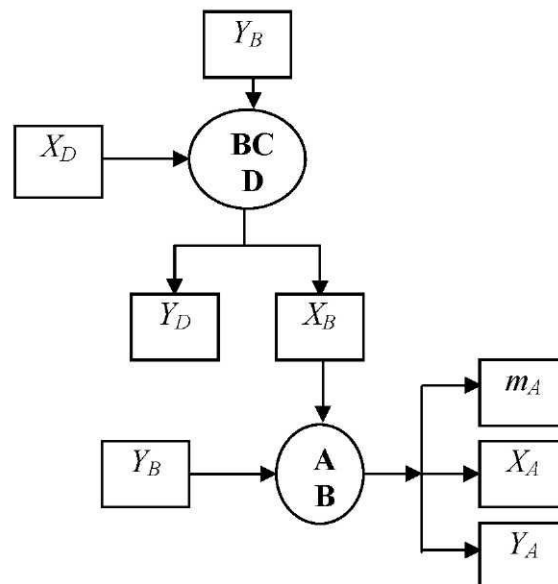


Рис. П.26

Общее число уравнений равновесия – 9, что соответствует числу неизвестных величин. Расчет можно начать или с тела *BC* или с тела *DC*.

Тело BC

$$\sum F_{KX} = 0: -X'_B + X_C = 0; X'_B = X_C.$$

$$\sum m_B(\vec{F}_K) = 0: -Q \cdot 2 + Y_C \cdot 4 = 0 \Rightarrow Y_C = 20 \text{ кН.}$$

$$\sum m_C(\vec{F}_K) = 0: Q \cdot 2 + Y'_B \cdot 4 = 0 \Rightarrow Y'_B = -20 \text{ кН.}$$

Тело CD

$$\sum F_{KY} = 0: -Y'_C + Y_D = 0; Y_D = Y'_C = 20 \text{ кН, т. к. } Y'_C = Y_C = 20 \text{ кН.}$$

$$\sum m_C(\vec{F}_K) = 0: M + X_D \cdot 8 + F_2 \cdot 6 = 0; X_D = -20 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{KX} = 0: -X'_C + F_2 + X_D = 0; X'_C = X_C = 0.$$

Значит $X'_B = X_C = 0$

Тело AB

$$X_B = X'_B = 0; Y'_B = Y_B = -20 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{KX} = 0: X_A + F_1 \cdot \cos \alpha + X_B = 0; X_A = 20 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{KY} = 0: Y_A + F_1 \cdot \sin \alpha + Y_B = 0;$$

$$Y_A = -F_1 \cdot \sin \alpha - Y_B = -25 \cdot 0,6 + 20 = 5 \text{ кН.}$$

$$\sum m_A = 0: m_A + F_1 \cdot \sin \alpha \cdot 1 + F_1 \cdot \cos \alpha \cdot 2 + Y_B \cdot 2 - X_B \cdot 4 = 0; m_A = -15 \text{ кН.}$$

Выполним проверку правильности полученных результатов, для чего составим уравнение равновесия всей конструкции (рис. П.27) в целом в виде:

$$\sum m_K(\vec{F}_K) = 0:$$

$$X_A \cdot 2 - Y_A \cdot 1 + m_A - Q \cdot 3 + M +$$

$$+ F_2 \cdot 4 + X_D \cdot 6 + Y_D \cdot 5 = 0;$$

$$20 \cdot 2 - 5 \cdot 1 - 15 - 40 \cdot 3 + 40 +$$

$$+ 20 \cdot 4 - 20 \cdot 6 + 20 \cdot 5 = 0;$$

$$0 = 0.$$

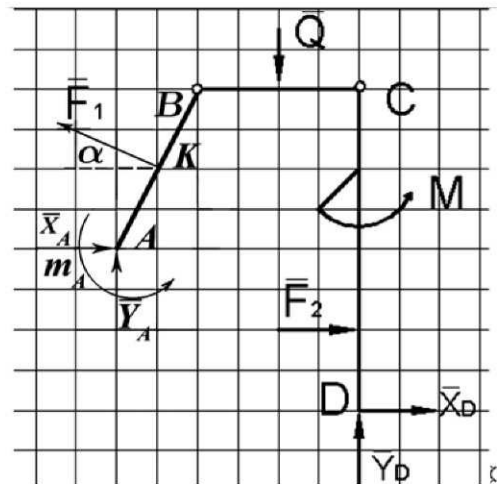


Рис. П. 27

Реакции внешних связей конструкции определены верно.

$$X_A = 20 \text{ кН} \quad X_B = X'_B = 0 \quad X'_C = X_C = 0$$

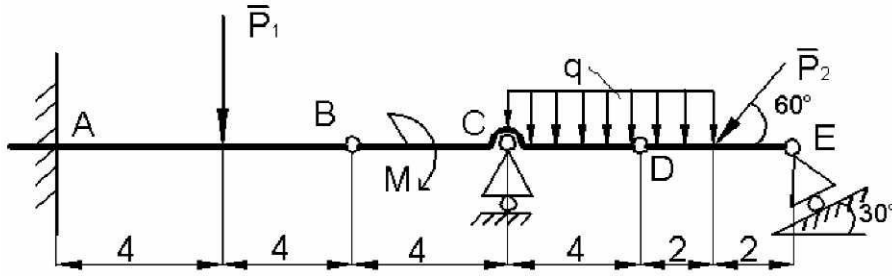
$$m_A = -15 \text{ кН} \cdot \text{м} \quad Y_B = Y'_B = -20 \text{ кН} \quad Y'_C = Y_C = 0$$

$$Y_A = 5 \text{ кН}$$

Пример 9 Определение реакции внешних связей

Конструкция, состоящая из 3-х балок, соединенных шарнирами B и D , находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил. На нее наложены внешние связи: в точке A – жесткая заделка; в точках C и E – подвижные шарнирные опоры (рис. П.28).

Определить реакции внешних связей.



Дано:
 $P_1 = 12 \text{ кН}$;
 $P_2 = 20 \text{ кН}$;
 $M = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}$;
 $q = 2 \text{ кН/м}$

Рис. П.28

Решение

Упростим расчетную схему нагружения (рис. П.29, а, б, в).

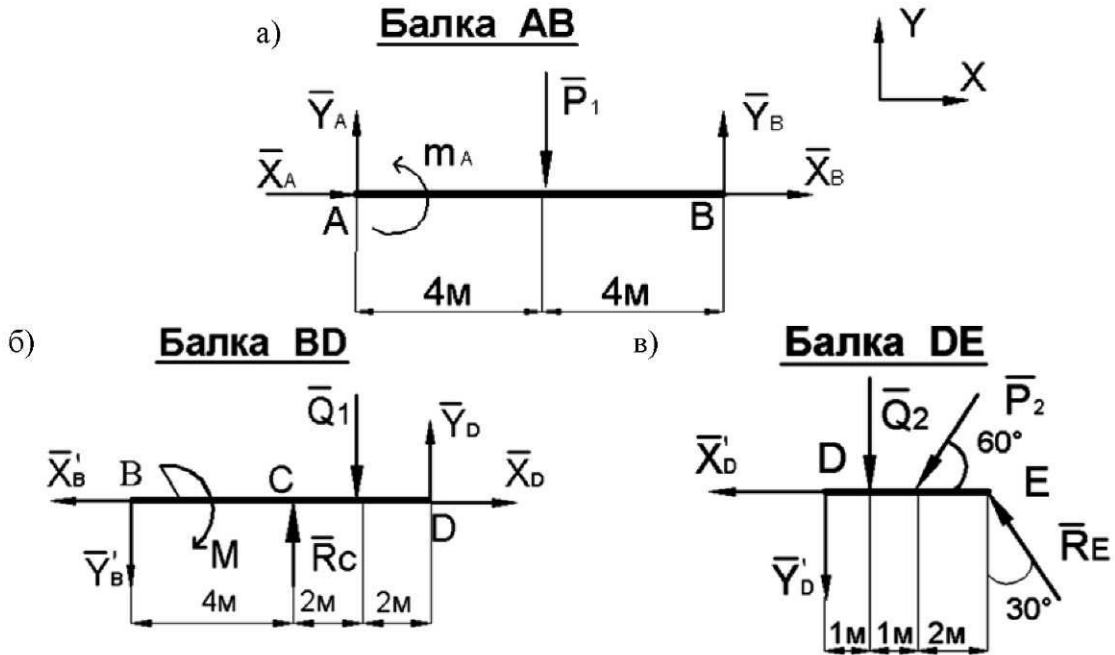


Рис. П.29

Распределенная нагрузка действует на две балки BD и DE , являющиеся абсолютно твердыми телами, поэтому заменим ее двумя равнодействующими: Q_1 и Q_2 , приложенными в середине участков распределения и равными:

$$Q_1 = q \cdot l_{CD} = 2 \cdot 4 = 8 \text{ кН}; \quad Q_2 = q \cdot l_{DK} = 2 \cdot 2 = 4 \text{ кН}.$$

Заменим наложенные на составную балку связи их реакциями и действие соединительных шарниров реакциями, рассоединив балку в шарнирах.

Максимальное число уравнений равновесия, которые можно составить для расчета каждой балки, находящейся под действием произвольной плоской системы сил – 3, поэтому расчет начинаем с рассмотрения равновесия балки DE, где число неизвестных соответствует числу уравнений равновесия.

Балка DE

$$\sum m_D(\vec{F}_K) = 0: -Q_2 \cdot 1 - P_2 \cdot \sin 60^\circ \cdot 2 + R_E \cdot \cos 30^\circ \cdot 4 = 0; R_E = 11,2 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{KX} = 0: -X'_D - P_2 \cdot \cos 60^\circ - R_E \cdot \sin 30^\circ = 0; X'_D = -15,6 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{KY} = 0: -Y'_D - Q_2 - P_2 \cdot \sin 60^\circ + R_E \cdot \cos 30^\circ = 0; Y'_D = -11,6 \text{ кН;}$$

$$Y_D = Y'_D = -11,6 \text{ кН; } X_D = X'_D = -15,6 \text{ кН.}$$

Балка BD

$$\sum F_{KX} = 0: X_D - X'_B = 0; X'_B = X_D = -15,6 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{KY} = 0: -Y'_B + R_C - Q_1 + Y_D = 0.$$

$$\sum m_B(\vec{F}_K) = 0: R_C \cdot 4 - Q_1 \cdot 6 + Y_D \cdot 8 - M = 0; R_C = 47,8 \text{ кН; } Y'_B = 28,2 \text{ кН, т. к.}$$

$$Y_B = Y'_B = 28,2 \text{ кН; } X_B = X'_B = -15,6 \text{ кН.}$$

Балка AB

$$\sum F_{KX} = 0: X_A + X_B = 0; X_A = X_B = 15,6 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{KY} = 0: Y_A - P_1 + Y_B = 0; Y_A = -16,2 \text{ кН.}$$

$$\sum m_A(\vec{F}_K) = 0: m_A - P_1 \cdot 4 + Y_B \cdot 8 = 0; m_A = -177,6 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Выполним проверку правильности решения задачи, для чего составим уравнения равновесия для всей конструкции в целом (рис. П.30).

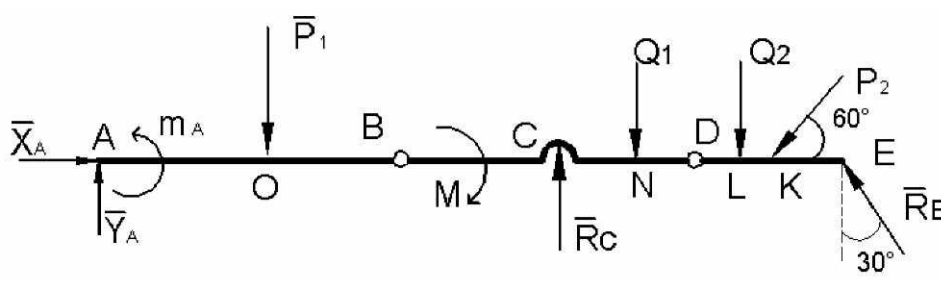


Рис. П.30

$$\sum F_{KY} = 0: Y_A - P_1 + R_C - Q_1 - Q_2 - P_2 \cdot \sin 60^\circ + R_E \cdot \cos 30^\circ = 0;$$

$$-16,2 - 12 + 47,8 - 8 - 4 - 20 \cdot 0,866 + 11,2 \cdot 0,866 = 0; \rightarrow 0 = 0.$$

Реакции опорных устройств найдены верно.

$$\sum F_{KX} = 0: X_A - R_E \cdot \sin 30^\circ = 0; 15,6 - 11,2 \cdot 0,5 = 0; \rightarrow 0 = 0.$$

$$\sum m_B(\vec{F}_K) = 0: -Y_A \cdot AB + P_1 \cdot OB - M + m_A + R_C \cdot BC - Q_1 \cdot BN - \\ - Q_2 \cdot BL - P_2 \cdot \sin 60^\circ \cdot BK + R_E \cdot \cos 30^\circ \cdot BE = 0$$

После подстановки всех заданных и найденных величин получаем: $0 = 0$.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ С-8

В этой задаче рассматривается равновесие системы сочлененных тел. Но сама эта система имеет конструктивные особенности. Отсюда – и специальные методы расчета.

Изучая описание ферм, необходимо выяснить особенности предложенной фермы: является ли она стержневой, или это – балочная ферма; изменяемая она или неизменяемая; с лишними элементами или без них; статически определяемая или статически неопределяемая.

Усилия в стержнях фермы являются внутренними силами. Они зависят от внешних нагрузок, к числу которых относятся и силы реакций внешних опор, на которых установлена ферма. Эти силы являются неизвестными. Поэтому расчет фермы начинается с определений реакций внешних опор и лишь после этого можно переходить к определению усилий в стержнях.

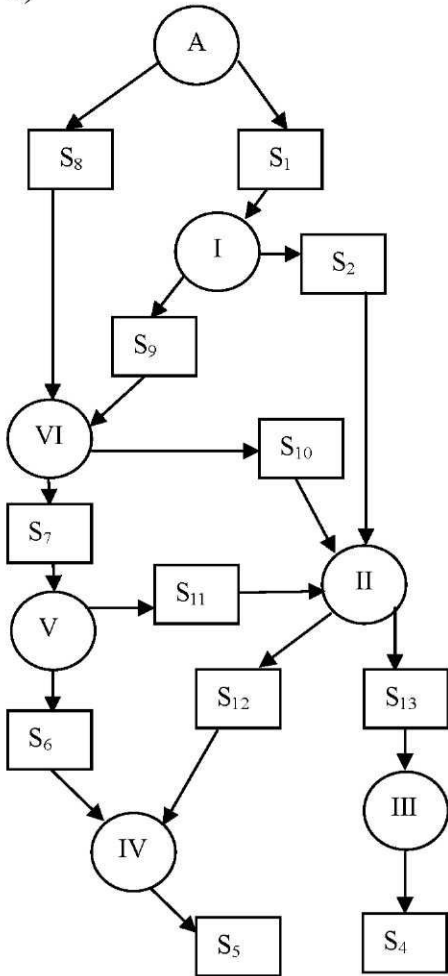
Если пользоваться методом вырезания узлов, то не имеет значения, в какой последовательности будут рассматриваться узлы. Но, так как для плоской системы сходящихся сил можно составить только два независимых уравнения равновесия, выбор очередного узла определяется этим условием: в рассматриваемом узле должно быть не более двух стержней с неизвестными усилиями. Два варианта, определяющих возможную последовательность расчёта усилий в стержнях фермы, которая рассмотрена в примере 10, показаны на рис. П.31 (а, б). Конечно, они не являются единственными. В примере реализована часть варианта «а» (рис. П.31).

Выполняя расчёты, следует помнить о том, что метод вырезания узлов даёт возможность определить усилия во всех стержнях фермы. Однако, постепенно накапливающиеся неточности и возможные ошибки приводят к концу концов к недопустимо большим погрешностям. Поэтому графическую проверку правильности расчётов каждого узла необходимо производить сразу после аналитических выкладок.

Метод сквозных сечений в принципе лишен этого недостатка и в этом его преимущество. Но с его помощью не всегда и не во всех стержнях можно определить усилия. Так, этим методом невозможно определить усилие в стержне 11 (пример 10).

С учётом сказанного и следует производить выбор метода для определения усилий во всех стержнях фермы (по 6 – 7 усилий каждым методом).

а)



б)

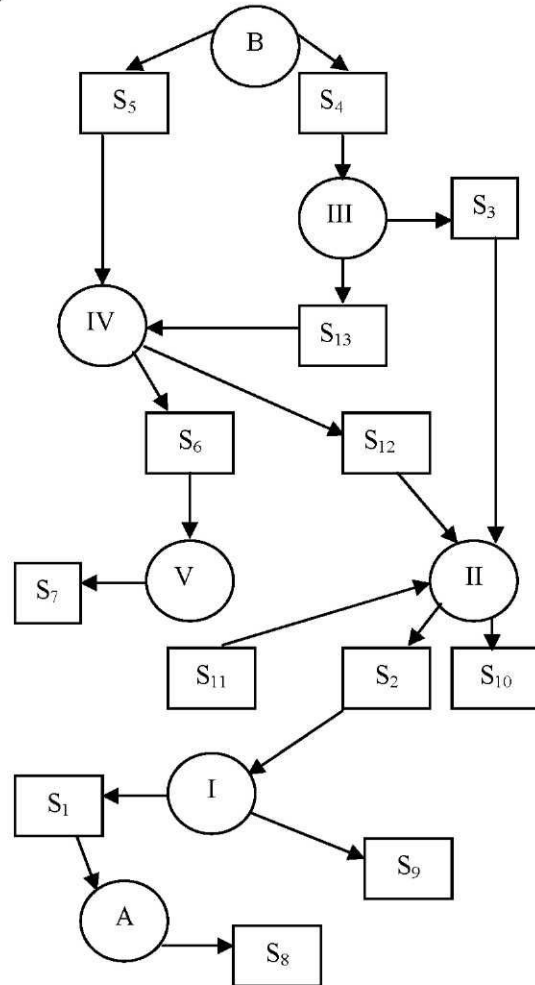


Рис. П.31. Возможные варианты алгоритмов определения усилий в стержнях фермы

Пример 10

Произвести расчёт фермы

Дано:
 $F_1(-1, 2)$; $F_2(-3, 1)$;
 $F_3(2, 0)$.

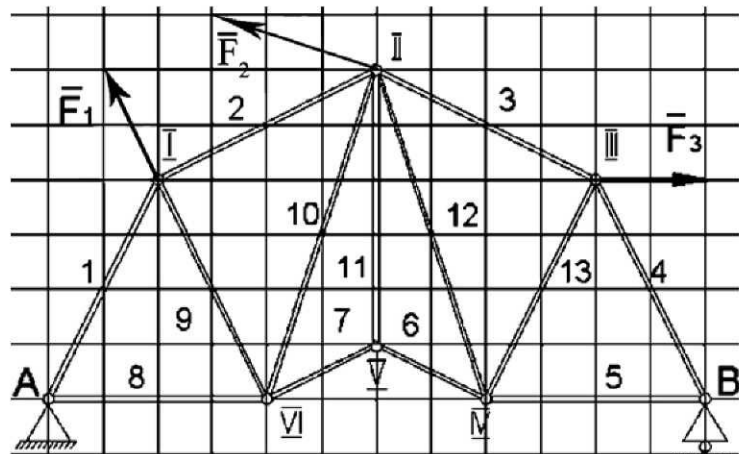


Рис. П.32

Решение

Определяем реакции внешних опор A и B из уравнений равновесия фермы в целом. При этом учитываем только внешние силы (заданные и искомые), так как внутренние силы (усилия в стержнях) образуют уравновешенную систему сил (рис. П.33).

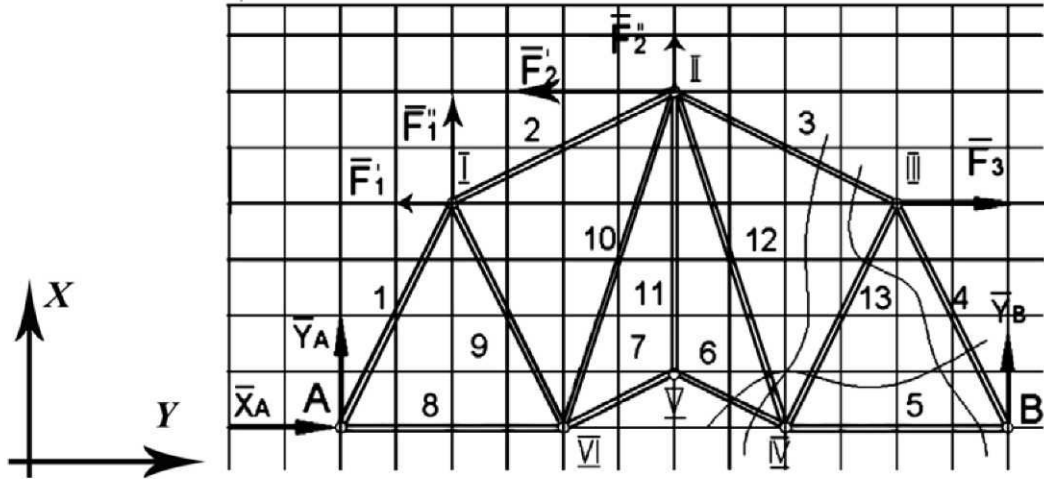


Рис. П.33

$$\begin{aligned} \sum F_{KX} = 0: X_A - F_1' - F_2'' + F_3' &= 0 \Rightarrow X_A = 2 \text{ кН}; \\ \sum m_A = 0: F_1' \cdot 4 + F_2'' \cdot 2 + F_2'' \cdot 6 + F_2'' \cdot 6 - F_3' \cdot 4 + Y_B \cdot 12 &= 0; Y_B = -2 \text{ кН}. \\ \sum F_{KY} = 0: Y_A + F_1'' + F_2'' + Y_B &= 0 \Rightarrow Y_A = -1 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} \sum m_B = 0: -Y_A \cdot 12 + F_1' \cdot 4 - F_1'' \cdot 10 + F_2' \cdot 6 - F_2'' \cdot 6 - F_3' \cdot 4 &= 0; \\ -(-1) \cdot 12 + 1 \cdot 4 - 2 \cdot 10 + 3 \cdot 6 - 1 \cdot 6 - 2 \cdot 4 &= 0. \end{aligned}$$

Реакции найдены верно:

$$34 - 34 = 0.$$

Определяем усилия в стержнях фермы методом вырезания узлов. Усилия в перерезанных стержнях направляем от рассматриваемого узла, считая, что любой стержень работает на растяжение. Придерживаемся последовательности, показанной на рис. П.31, а.

Узел А находится в равновесии под действием плоской системы сходящихся сил (рис. П.34, а). Поэтому:

$$\begin{aligned} \sum F_{KX} = 0 & X_A + S_8 + S_1 \cos \alpha_1 = 0 \\ \sum F_{KY} = 0 & Y_A + S_1 \sin \alpha_1 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

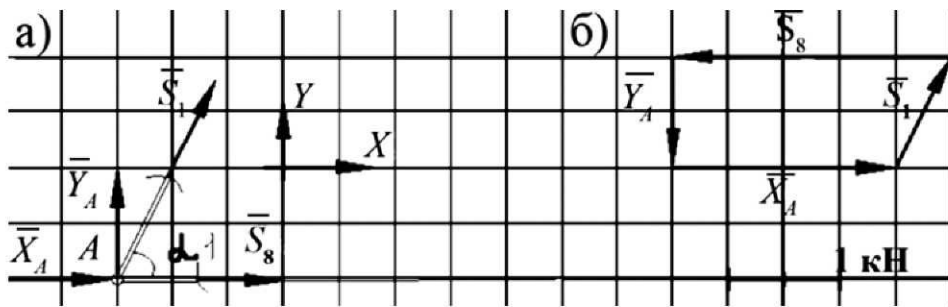


Рис. П.34

По рис. П.32, а находим $\sin \alpha_1 = 4/\sqrt{20} = 0,895$; $\cos \alpha_1 = 2/\sqrt{20} = 0,447$.

Решая систему (1), получаем: $S_1 = 1,12$ кН; $S_8 = -2,50$ кН.

Производим графическую проверку правильности определения усилий S_1 и S_8 . С этой целью выбираем масштаб для изображения сил и строим силовой многоугольник из сил, сходящихся в данном узле (рис. П.34, б).

Так как силовой многоугольник получился замкнутым, то усилия S_1 и S_8 найдены верно.

Узел I (рис. П.35, а). На него действуют силы $\vec{F}_1, \vec{S}'_1 = -\vec{S}_1, \vec{S}_2$ и \vec{S}_9 .

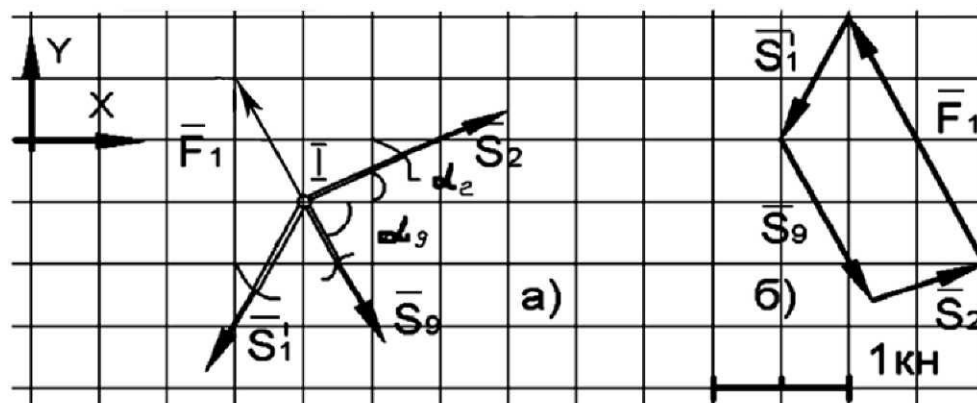


Рис. П.35

Составляем уравнения равновесия узла:

$$\begin{aligned} \sum F_{KX} = 0 & \quad -S'_1 \cdot \cos \alpha_1 - F_{1x} + S_2 \cdot \cos \alpha_2 + S_9 \cdot \cos \alpha_9 = 0 \\ \sum F_{KY} = 0 & \quad -S'_1 \cdot \sin \alpha_1 + F_{1y} + S_2 \cdot \sin \alpha_2 - S_9 \cdot \sin \alpha_9 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$(\sin \alpha_9 = \sin \alpha_1 = \cos \alpha_2 = 4/\sqrt{20} = 0,895$;
 $\cos \alpha_9 = \cos \alpha_1 = \sin \alpha_2 = 2/\sqrt{20} = 0,447).$

Решая систему (2) получаем: $S_9 = 1,56$ кН; $S_2 = 0,894$ кН.

Проводим графическую проверку правильности определения S_2 и S_9 .

Для этого в принятом ранее масштабе строим многоугольник сил, сходящихся в узле I (рис. П.35, б). Силовой многоугольник получился замкнутым. Следовательно, S_2 и S_9 найдены верно.

Узел VI (рис. П.36)

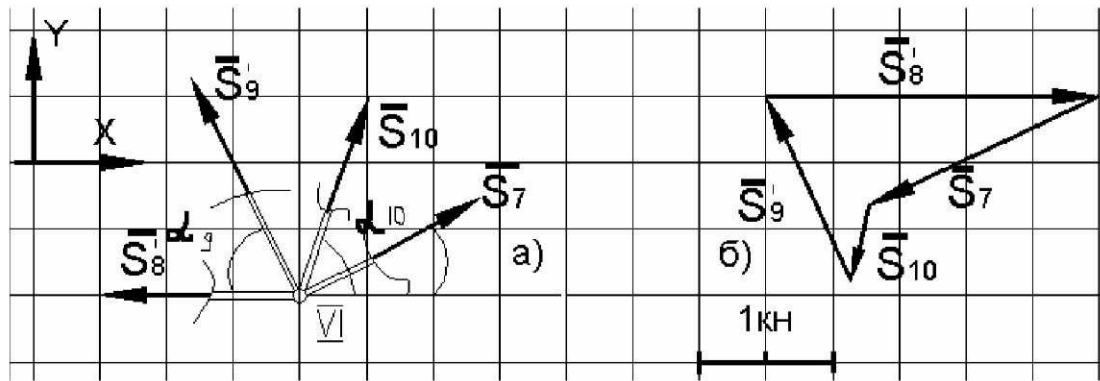


Рис. П.36

$$\begin{aligned} \sum F_{KX} = 0 & \quad -S'_8 - S'_9 \cdot \cos \alpha_9 + S'_{10} \cdot \cos \alpha_{10} + S'_7 \cdot \cos \alpha_7 = 0 \\ \sum F_{KY} = 0 & \quad S_9 \cdot \sin \alpha_9 + S_{10} \cdot \sin \alpha_{10} + S_7 \cdot \sin \alpha_7 = 0 \\ & \quad \sin \alpha_9 = 0,895; \quad \cos \alpha_9 = 0,447; \\ & \quad \sin \alpha_7 = 2/\sqrt{20} = 0,447; \quad \cos \alpha_7 = 4/\sqrt{20} = 0,895; \\ & \quad \sin \alpha_{10} = 3/\sqrt{10} = 0,949; \quad \cos \alpha_{10} = 1/\sqrt{10} = 0,316. \end{aligned} \quad (3)$$

Так как $S'_8 = S_8 = 2,50$ кН; $S'_9 = S_9 = 1,56$ кН, то решение системы (3) даёт: $S_7 = -1,79$ кН; $S_{10} = -0,636$ кН. Знаки «-» указывает на то, что эти стержни сжаты.

Рассматривая аналогичным образом следующий узел (узел V), находим: $S_{11} = -1,6$ кН; $S_6 = -1,79$ кН (стержни сжаты) и производим графическую проверку.

Для определения усилий в остальных стержнях воспользуемся методом сквозных сечений. Проводим сечение по стержням 3.13.5 (см. рис. П.33). Рассматриваем равновесие правой (отсечённой) части (рис. П.37). Действием перерезанных стержней заменяем их усилиями. Для их определения

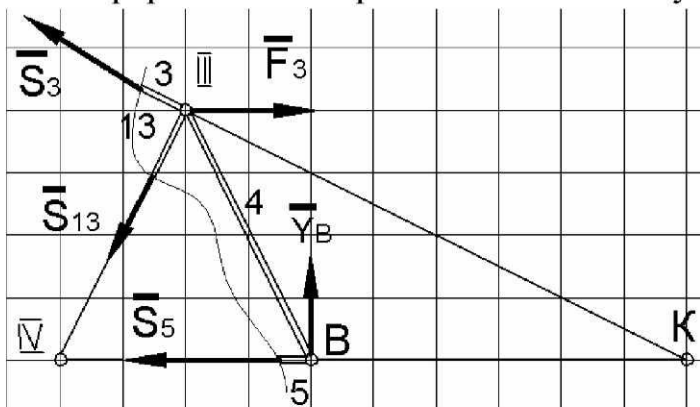


Рис. П.37

составляем такие уравнения равновесия, чтобы в каждой из них входило по одной неизвестной силе. Этого можно добиться, составляя уравнения моментов относительно точек, где пересекаются линии действия двух неизвестных усилий (так называемых точек Риттера).

Например, для определения S находим точку пересечения усилий S_5 и S_{13} – узел IV. Для определения S_5 – узел III. Для определения S_{13} (точка K) составляем уравнения моментов относительно этих точек:

$$\begin{aligned} \sum m_{III} &= -4 + Y_B \cdot 2 = 0; S_5 = -1 \text{ кН} \\ \sum m_{IV} &= S_3 \cdot h_3 - F_3 \cdot 2 + Y_B \cdot 4 = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где h_3 – плечо силы S_3 относительно узла IV.

Из рис. П.33 видно, что стержни 3 и 13 перпендикулярны. Поэтому h_3 равен длине стержня 13:

$$h_3 = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 4,46 \text{ м.}$$

Поэтому из уравнения (4) находим $S_3 = 3,58$ кН. Составляем следующее уравнение равновесия для определения S_{13} :

$$\sum m_K = 0 \quad S_{13} \cdot h_3 - F_3 \cdot 4 + Y_B \cdot 6 = 0 \quad (5)$$

Взаимное расположение точки K и узлов фермы определяем по рис. П.33.

В частности, $KB = 6$ м, а h_{13} равно расстоянию от точки K до узла III.

Так как стержень S_3 перпендикулярен S_{13} , то $h_{13} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 8,94$ м.

Из уравнения (5) находим $S_{13} = -0,447$ кН (стержень сжат).

Проводим сечение по стержням 3, 12 и 6 (рис. П.33), чтобы найти усилие S_{12} (усилие S_3 и S_6 найдены ранее). Рассматриваем равновесие правой отсеченной части (рис. П.38). Имеем:

$$\sin \alpha_{12} = 3/\sqrt{10} = 0,949; \alpha_{12} = 71,35; \sin \alpha_{13} = 4/\sqrt{20} = 0,894; \alpha_{13} = 63,25.$$

Линии действия усилий S_3 и S_6 параллельны, т. е. не имеют точки пересечения, поэтому для определения S_{12} составляем уравнение проекций на ось Z , перпендикулярную этим усилиям (ось Z направлена от узла IV к узлу III):

$$\begin{aligned} \sum F_{KZ} &= 0; \\ S_{12} \cdot \cos \gamma + F_3 \cdot \cos \alpha_{13} + Y_B \cdot \sin \alpha_{13} &= 0 \quad (6) \end{aligned}$$

Угол γ между S_{12} и осью Z :

$$\gamma = 180^\circ - \alpha_{12} - \alpha_{13} = 45^\circ.$$

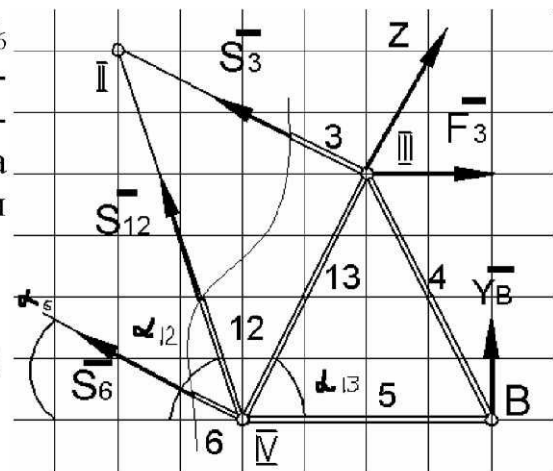


Рис. П.38

Решая уравнение (6), получаем: $S_{12} = 1,27$ кН.

Для определения неизвестного усилия составляем уравнение (рис. П.39):

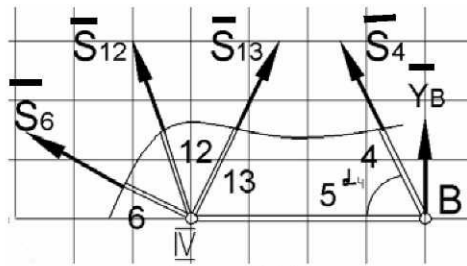


Рис. П.39

$$\sum m_{IV} = 0;$$

$$S_4 \cdot \sin \alpha_4 \cdot 4 + Y_B \cdot 4 = 0,$$

где $\sin \alpha_4 = 0,895$.

Следовательно, $S_4 = 2,24$ кН.

Выполним графическую проверку правильности полученных результатов, для чего построим силовой многоугольник для узла II (рис. П.40, а, б).

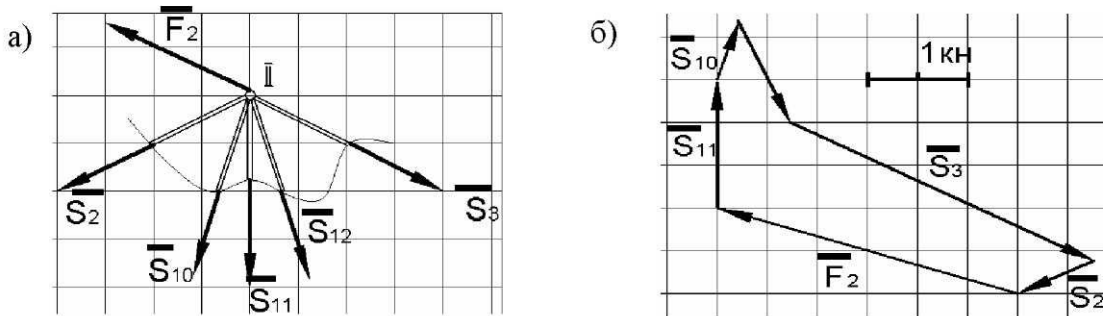


Рис. П.40

Усилие во всех стержнях определены. Результаты расчёта сводим в таблицу.

X_A	Y_A	Y_B	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
2,0	-1,0	-2,0	1,12	0,894	3,58	2,24	1,0
S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}	S_{13}
-1,79	-1,79	-2,50	1,56	-0,632	-1,60	1,27	-0,447

Пример 11

Приведение произвольной пространственной системы сил к центру

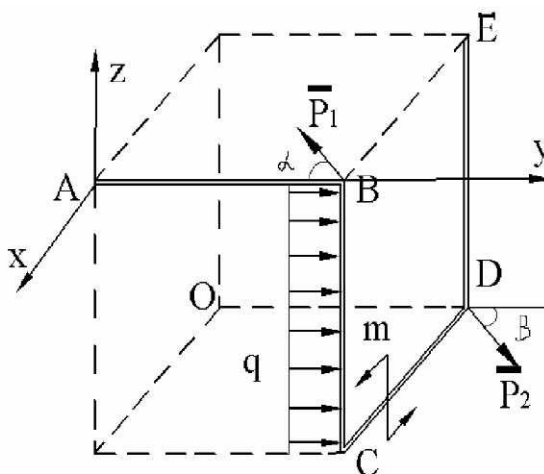


Рис. П.41

Невесомая конструкция в форме коленчатого стержня $ABCD$ с участками, параллельными или перпендикулярными между собой, нагружена произвольной пространственной системой сил. Выполнить приведение данной системы сил к центру, взятому в точке A (рис. П.41). В расчётах принять, что $q = 600$ Н/м; $m = 400$ Нм; $AB = BC = CD = DE = 1$ м; $P_1 = P_2 = 400$ Н; P_1 лежит в плоскости OXY ; P_2 в плоскости, параллельной OZY ; $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 30^\circ$.

Решение

Через центр приведения, точку A , проводим оси координат $AXYZ$. Заменяем равномерно распределенную нагрузку на участке BC коленчатого стержня $ABCB$ равнодействующей $Q = q \cdot BC = 600 \cdot 1 = 600$ Н которую прикладываем в середине участка распределения. Силы \vec{P}_1 и \vec{P}_2 раскладываем на составляющие, параллельные принятым координатным осям (рис. П.42):

$$P_1' = P_1 \cdot \sin \alpha = 283 \text{ Н};$$

$$P_1'' = P_1 \cdot \cos \alpha = 283 \text{ Н};$$

$$P_2' = P_2 \cdot \sin \beta = 200 \text{ Н};$$

$$P_2'' = P_2 \cdot \cos \beta = 346 \text{ Н}.$$

В общем случае приведения произвольной пространственной системы сил к заданному центру

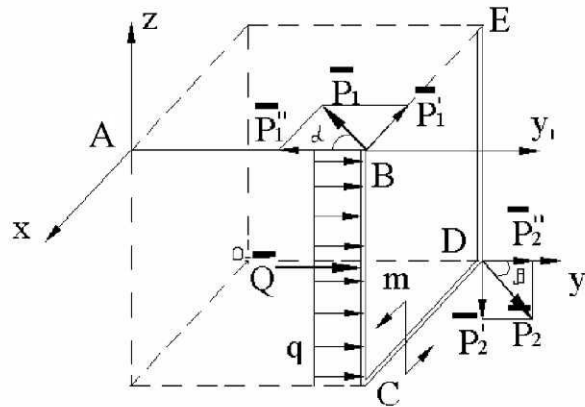


Рис. П.42

получаем в центре приведения одну силу, равную главному вектору системы, и одну пару сил с моментом, равным главному моменту системы относительно этого центра. Модуль главного вектора определяется:

$$|\vec{R}^*| = \sqrt{(R_X^*)^2 + (R_Y^*)^2 + (R_Z^*)^2},$$

где R_X^*, R_Y^*, R_Z^* – проекции главного вектора на оси координат.

Направление главного вектора определяется с помощью направляющих косинусов:

$$\cos(\widehat{\vec{R}^*, \vec{i}}) = \frac{R_X^*}{|\vec{R}^*|}; \quad \cos(\widehat{\vec{R}^*, \vec{j}}) = \frac{R_Y^*}{|\vec{R}^*|}; \quad \cos(\widehat{\vec{R}^*, \vec{k}}) = \frac{R_Z^*}{|\vec{R}^*|}.$$

Модуль главного момента относительно центра приведения определяется как

$$|\vec{M}_A^*| = \sqrt{(M_{Ax}^*)^2 + (M_{Ay}^*)^2 + (M_{Az}^*)^2},$$

где $M_{Ax}^*, M_{Ay}^*, M_{Az}^*$ – главные моменты сил относительно координатных осей, проходящих через центр приведения A .

Направление этого вектора также определяется через направляющие косинусы:

$$\cos(\widehat{M_A^*, \vec{i}}) = \frac{M_{AX}^*}{|M_A^*|}; \quad \cos(\widehat{M_A^*, \vec{j}}) = \frac{M_{AY}^*}{|M_A^*|}; \quad \cos(\widehat{M_A^*, \vec{k}}) = \frac{M_{AZ}^*}{|M_A^*|}.$$

Вычисляем проекций главного вектора на оси координат (см. рис. П.42):

$$R_X^* = \sum F_{kX} = -P_1' = -283 \text{ Н}; \quad R_Y^* = \sum F_{kY} = -P_1' + P_2'' + Q = 664 \text{ Н};$$

$$R_Z^* = \sum F_{kZ} = -P_2' = -200 \text{ Н}.$$

Вычисляем модуль главного вектора:

$$|\vec{R}^*| = \sqrt{(\sum F_{kX})^2 + (\sum F_{kY})^2 + (\sum F_{kZ})^2} = 749 \text{ Н}.$$

Вычисляем направляющие косинусы:

$$\cos(\widehat{R^*, \vec{i}}) = -283/749 = -0,377; \quad \cos(\widehat{R^*, \vec{j}}) = 664/749 = 0,866;$$

$$\cos(\widehat{R^*, \vec{k}}) = -200/749 = -0,267.$$

Вычисляем проекции главного момента системы относительно центра A . Они равны главным моментам системы сил относительно координатных осей, проходящих через центр A .

$$M_{AX}^* = \sum M_{AX}(F_k) = Q \cdot BC/2 - P_2' \cdot AB + P_2'' \cdot BC = -746 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

$$M_{AY}^* = \sum M_{AY}(F_k) = m - P_2' \cdot CD = 200 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

$$M_{AZ}^* = \sum M_{AZ}(F_k) = P_1' \cdot AB - P_2'' \cdot CD = -63,6 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Модуль главного момента системы относительно центра A определяется:

$$|M_A^*| = \sqrt{[\sum M_{AX}(F_k)]^2 + [\sum M_{AY}(F_k)]^2 + [\sum M_{AZ}(F_k)]^2}; \quad M_A^* = 775,3 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Вычисляем направляющие косинусы:

$$\cos(\widehat{M_A^*, \vec{i}}) = -746,4/775,3 = -0,962; \quad \cos(\widehat{M_A^*, \vec{j}}) = 200/775,3 = 0,258;$$

$$\cos(\widehat{M_A^*, \vec{k}}) = 63,6/775,3 = -0,082.$$

По полученным результатам построим систему (\vec{R}^*, \vec{M}_A) эквивалентной заданной произвольной пространственной системе координат (рис. П.43).

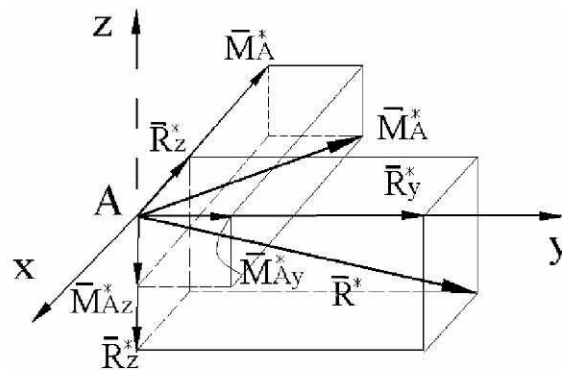


Рис. П.43

Таким образом, в результате приведения к заданной системе сил получены в центре A одна сила, равная \vec{R}^* , и одна пара с моментом, равным \vec{M}_A^* , т. е. $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, m, q) \in (\vec{R}^*, \vec{M}_A^*)$.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С-10, С-11

Эти задачи относятся к теме «Равновесие твердого тела под действием произвольной пространственной системы сил». Для их решения нужно хорошо знать вопросы:

- 1) момент силы относительно оси и его свойства;
- 2) уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил.

Особое внимание следует обратить на то, что для составления уравнений равновесия оси проекций и оси моментов могут выбираться произвольно и независимо друг от друга. Поэтому, например, все 6 уравнений могут быть записаны в форме уравнений моментов относительно 6 различных (в том числе и параллельных) осей. При выборе этих осей надо стремиться к тому, чтобы уравнения получались более простыми, и чтобы в каждое из них входило по одной неизвестной. Этого можно добиться, если ось проводить так, чтобы она была либо параллельна большому числу неизвестных сил, либо пересекала их линии действия.

Если составляется уравнение проекций на какую-то ось, то желательно эту ось направить перпендикулярно возможно большему числу сил. И, наконец, если эти рекомендации трудно выполнить, то лучше выбирать наиболее наглядную и привычную систему осей координат для составления уравнений равновесия. Это поможет избежать многих нежелательных ошибок.

Задачи, как и все предыдущие, включают элементы исследования на равновесие тела.

Пример 12 Определение реакции жесткой заделки стержня

Определить реакции жесткой заделки стержня в двух случаях:

- а) крепление в точке A ;
 - б) крепление в точке E (рис. П.44).
- Сравнить полученные результаты.

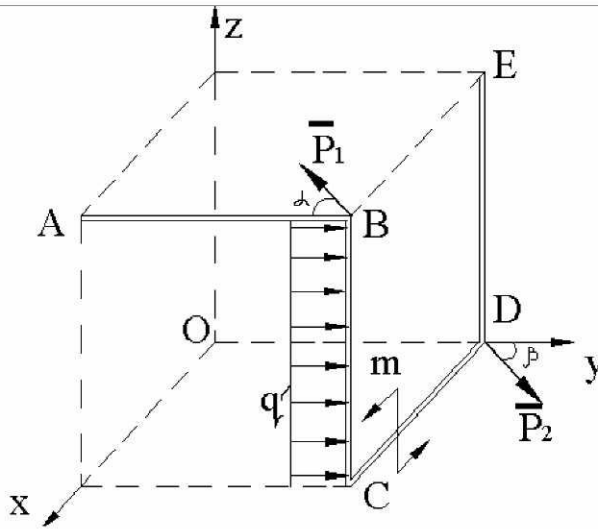


Рис. П.44

Дано:

- $P_1 = P_2 = 400 \text{ Н};$
- $m = 400 \text{ Н}\cdot\text{м};$
- $q = 600 \text{ Н/м};$
- $\alpha = 45^\circ;$
- $\beta = 30^\circ;$
- $AB = BC = CD = DE = 1 \text{ м.}$
- \vec{P}_1 лежит в плоскости, параллельной OXY ;
- \vec{P}_2 – в плоскости, параллельной OZY .

Решение

Рассмотрим случай крепления стержня концом A при помощи жесткой заделки (рис. П.45). Саму заделку сразу заменим соответствующей системой сил реакций: X_A, Y_A, Z_A и реактивными моментами m_{AX}, m_{AY}, m_{AZ} .

Силы \vec{P}_1 и \vec{P}_2 раскладываем на составляющие, параллельные осям координат:

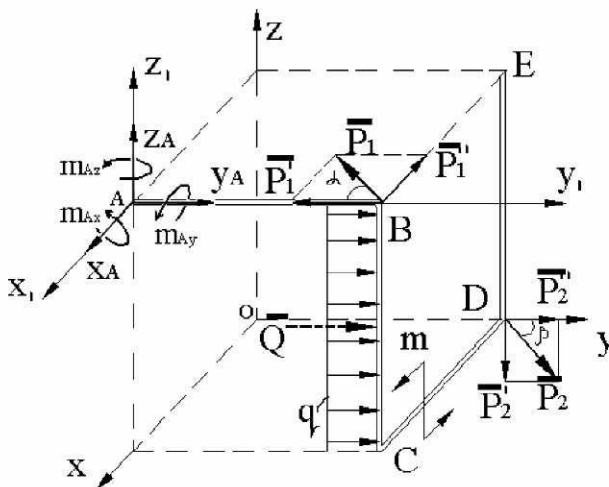


Рис. П.45

$$\vec{P}_1(\vec{P}_1', \vec{P}_1'', 0); \vec{P}_2(\vec{P}_2', \vec{P}_2'', 0),$$

где $P_1' = P_1 \cdot \sin \alpha = 282,8 \text{ Н};$

$$P_1'' = P_1 \cdot \cos \alpha = 282,8 \text{ Н};$$

$$P_1' = P_2 \cdot \sin \beta = 200 \text{ Н};$$

$$P_2'' = P_2 \cdot \cos \beta = 346,4 \text{ Н.}$$

Равнодействующая распределенной нагрузки:

$$Q = q \cdot BC = 600 \cdot 1 = 600 \text{ Н.}$$

Составляем уравнения равновесия стержня под действием произвольной пространственной системы сил:

$$\begin{aligned} \sum F_{KX} = 0: & & X_A - P_1' = 0; \\ \sum F_{KY} = 0: & & Y_A - P_1'' + P_2'' + Q = 0; \\ \sum F_{KZ} = 0: & & Z_A - P_2' = 0; \\ \sum m_{x_1} = 0: & & m_{AX} + Q \cdot BC/2 - P_2' \cdot AB + P_2'' \cdot BC = 0; \\ \sum m_{y_1} = 0: & & m_{AY} + m - P_2' \cdot CD = 0; \\ \sum m_{z_1} = 0: & & m_{AZ} + P_1'' \cdot AB - P_2'' \cdot CD = 0. \end{aligned}$$

Решая полученные уравнения, находим:

$$\begin{aligned} X_A = 282,8 \text{ Н}; \quad Y_A = -663,6 \text{ Н}; \quad Z_A = 200 \text{ Н}; \\ m_{AX} = 746,4 \text{ Н}\cdot\text{м}; \quad m_{AY} = -200 \text{ Н}\cdot\text{м}; \quad m_{AZ} = 63,6 \text{ Н}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Вычислим силу реакции и момент в заделке:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = 748,6 \text{ Н}; \quad M_A = \sqrt{m_{AX}^2 + m_{AY}^2 + m_{AZ}^2} = 775,3 \text{ Н}.$$

Рассмотрим случай жесткой заделки стержня концом E и определим реакции этой связи (рис. П.46).

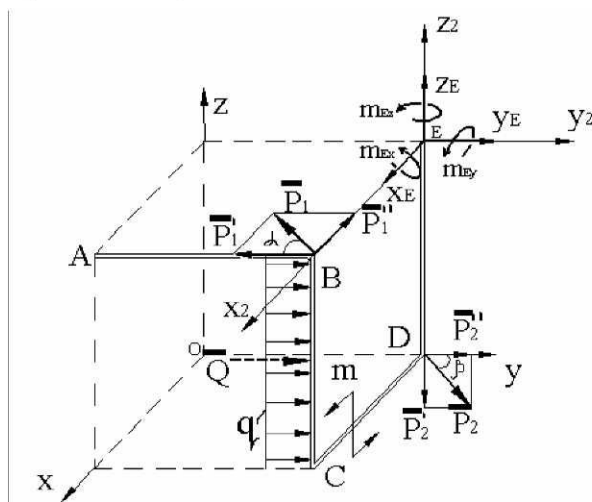


Рис. П.46

Составляем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum F_{KX} = 0: & & X_E - P_1'' = 0; \\ \sum F_{KY} = 0: & & Y_E + Q - P_1'' + P_2'' = 0; \\ \sum F_{KZ} = 0: & & Z_E - P_2' = 0; \\ \sum m_{x_2} = 0: & & m_{EX} + Q \cdot BC/2 + P_2'' \cdot BC = 0; \\ \sum m_{y_2} = 0: & & m_{EY} + m = 0; \\ \sum m_{z_2} = 0: & & m_{EZ} - P_1' \cdot CD + Q \cdot CD = 0. \end{aligned}$$

Откуда находим:

$$X_E = 282,8 \text{ Н}; Y_E = -663,6 \text{ Н}; Z_E = 200 \text{ Н};$$

$$m_{EX} = -646,4 \text{ Н}\cdot\text{м}; m_{EY} = -400 \text{ Н}\cdot\text{м}; m_{EZ} = -317,2 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Вычисляем силу реакции в заделке и реактивный момент:

$$R_E = \sqrt{X_E^2 + Y_E^2 + Z_E^2} = 748,6 \text{ Н}; M_E = \sqrt{m_{EX}^2 + m_{EY}^2 + m_{EZ}^2} = 823,6 \text{ Н}.$$

Выводы:

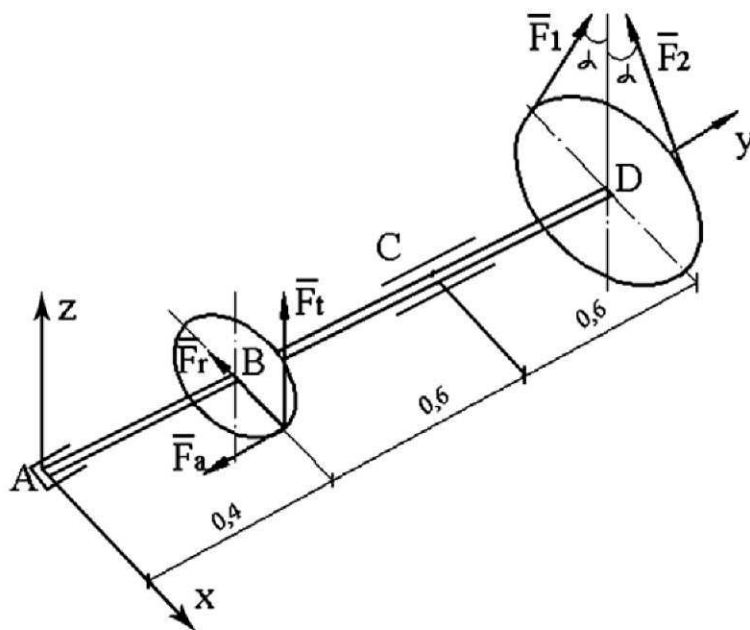
1. Величина силы реакции не зависит от места крепления стержня с помощью жесткой заделки.

2. Реактивный момент в случае закрепления стержня концом A меньше, чем при креплении его концом E .

Следовательно, предпочтение следует отдать креплению стержня концом A .

Пример 13

Исследовать равновесие вала



Дано:

$$F_t = 1000 \text{ Н};$$

$$F_r = 300 \text{ Н};$$

$$F_a = 200 \text{ Н};$$

$$\alpha = 45^\circ,$$

$$F_1 = 2F_2.$$

Рис. П.47

В точке A – опора, фиксирующая вал от осевого смещения (подпятник), в точке C – подшипник. Диаметры зубчатого колеса и шкива соответственно равны: $d = 0,2 \text{ м}$; $D = 0,4 \text{ м}$. Определить натяжение ветвей ремня и реакции опор вала, считая, что он находится в равновесии.

Решение

В подпятнике сила реакции может быть разложена на 3 составляющие: $\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A + \vec{Z}_A$. В подшипнике – на 2: $\vec{R}_C = \vec{X}_C + \vec{Z}_C$. К числу неизвестных относится натяжение одной из ветвей ремня. Учитывая, что под действием окружной силы $F_t = 1000$ Н, приложенной к зубчатому колесу, вал может вращаться ускоренно против хода часовой стрелки (если смотреть со стороны точки A), а силы натяжения ветвей ремня \vec{F}_1 и \vec{F}_2 должны препятствовать этому ускоренному вращению вала, то приходим к выводу, что ведущей ветвью ремня с натяжением \vec{F}_1 является левая ветвь, а ведомой – правая ветвь с натяжением \vec{F}_2 (рис. П.48).

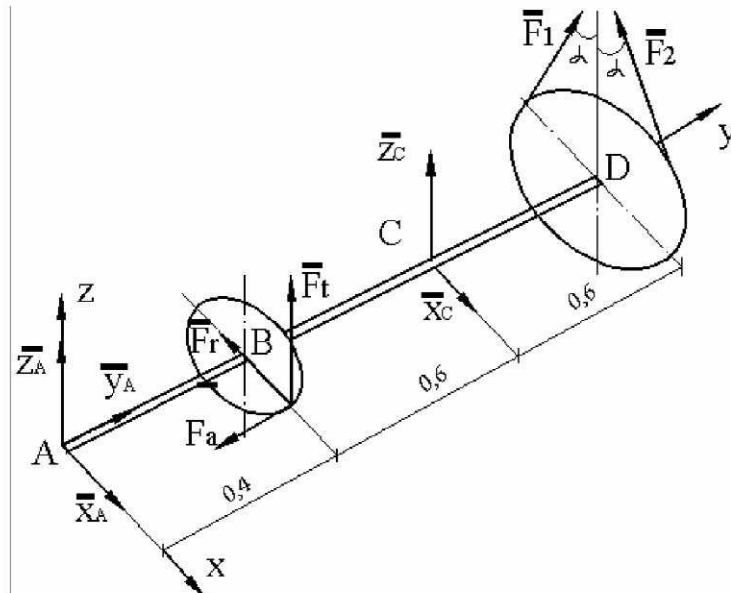


Рис. П.48

Теперь рассмотрим равновесие вала. Составляем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum m_Y = 0: & \quad -F_t \cdot d/2 + F_1 \cdot D/2 - F_2 \cdot D/2 = 0; \\ \sum m_Z = 0: & \quad F_r \cdot AB - X_C \cdot AC - F_1 \cdot \sin \alpha \cdot AD + F_2 \cdot \sin \alpha \cdot AD - F_a \cdot d/2 = 0; \\ \sum m_X = 0: & \quad F_t \cdot AB + Z_C \cdot AC + F_1 \cdot \cos \alpha \cdot AD + F_2 \cdot \cos \alpha \cdot AD = 0; \\ \sum F_{KX} = 0: & \quad X_A - F_r + X_C - F_2 \cdot \sin \alpha + F_1 \cdot \sin \alpha = 0; \\ \sum F_{KY} = 0: & \quad Y_A - F_a = 0; \\ \sum F_{KZ} = 0: & \quad Z_A + F_t + Z_C + F_1 \cdot \cos \alpha + F_2 \cdot \cos \alpha = 0. \end{aligned}$$

Решая их (с учетом $F_1 = 2F_2$), получаем:

$$\begin{aligned} F_2 = 500 \text{ Н}; F_1 = 1000 \text{ Н}; X_C = -465,6 \text{ Н}; \\ X_A = 412,1 \text{ Н}; Z_C = -2096,8 \text{ Н}; Z_A = 36,3 \text{ Н}; Y_A = 200 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Правильность решения проверим 2-мя уравнениями равновесия:

$$\begin{aligned} \sum m_{XC} = 0: & \quad -F_r \cdot BC - Z_A \cdot AC + F_2 \cdot \cos\alpha \cdot CD + F_1 \cdot \cos\alpha \cdot CD = 0; \\ \sum m_{ZC} = 0: & \quad -F_a \cdot d/2 + X_A \cdot AC - F_r \cdot BC + F_2 \cdot \sin\alpha \cdot CD - F_1 \cdot \sin\alpha \cdot CD = 0. \end{aligned}$$

Подстановкой исходных данных и результатов решения убеждаемся, что эти уравнения переходят в тождество типа $0 = 0$. Это свидетельствует о правильности найденных значений сил.

Алогичным образом, рассмотрев второй случай нагружения вала (рис. П.49), получаем:

$$Z_C = -1796,8 \text{ Н}; X_C = -965,6 \text{ Н}; Z_A = 436,3 \text{ Н}; X_A = -387,9 \text{ Н}; Y_A = 200 \text{ Н}.$$

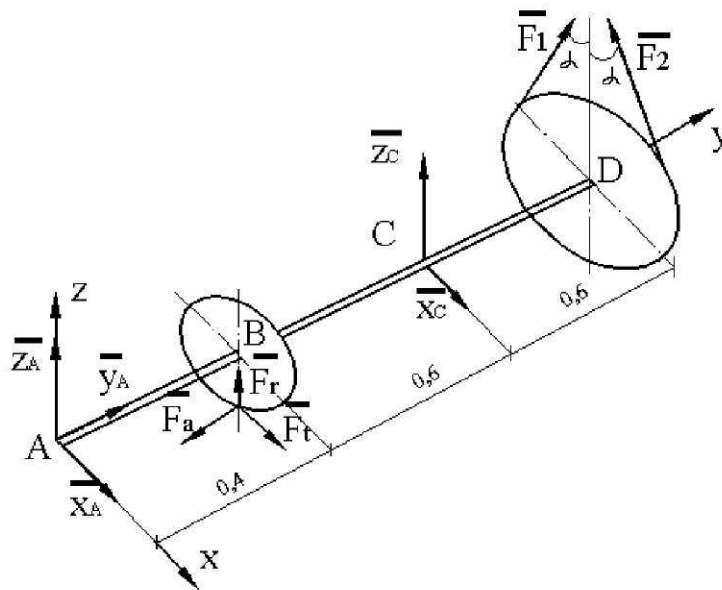


Рис. П.49

Вычисляем результирующие реакции в точках A и C для двух случаев нагружения вала.

Первый случай (см. рис. П.48):

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = 459,5 \text{ Н}; R_C = \sqrt{X_C^2 + Z_C^2} = 2147,9 \text{ Н}.$$

Второй случай (см. рис. П.49):

$$R_A = 617,1 \text{ Н}; R_C = 2256,8 \text{ Н}.$$

В качестве критерия сравнения принимаем величины $R_A^2 + R_C^2$:

$$\text{Первый случай: } R_A^2 + R_C^2 = 4,825 \text{ кН}^2;$$

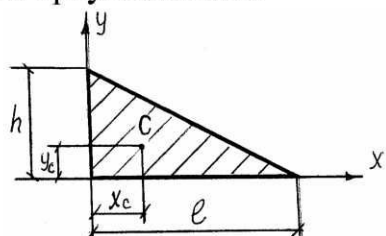
$$\text{Второй случай: } R_A^2 + R_C^2 = 5,09 \text{ кН}^2.$$

Таким образом во втором случае нагружения вала передаются большие нагрузки, поэтому первый случай нагружения вала предпочтительнее.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ С-12, С-13, а, б

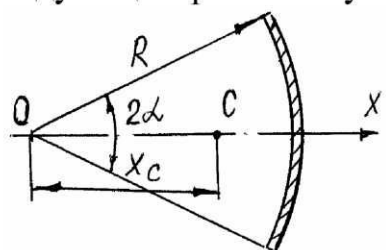
Положение центра тяжести тела (объема, площади, линии) зависит только от их формы и размеров. Если фигура имеет центр, ось или плоскость симметрии, то ее центр тяжести находится в этом центре, на этой оси или в этой плоскости. Положение центров тяжести тел простой формы определяется:

1) для треугольника:



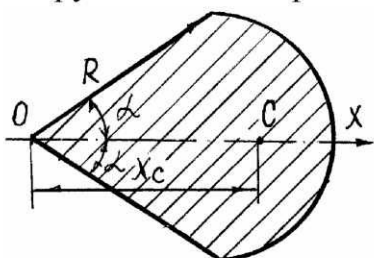
$$X_C = \frac{1}{3}l; Y_C = \frac{1}{3}h.$$

2) для дуги центрального угла:



$$X_C = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$$

3) для кругового сектора



$$X_C = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$$

Положение центра тяжести тела сложной формы находят путем разбиения этого тела на простые части, для каждой из которых можно указать положение ее центра тяжести. При этом считается, что вырезанная часть имеет отрицательный объем (отрицательную площадь).

После разбиения тела на части координаты его центра тяжести вычисляются по формулам:

$$X_C = \frac{\sum V_K X_K}{\sum V_K}; X_C = \frac{\sum S_K X_K}{\sum S_K}; X_C = \frac{\sum l_K X_K}{\sum l_K}$$

где V_K, S_K, l_K – объем, площадь, длина k -той части тела соответственно; X_K – координата центра тяжести k -той части тела.

Другие координаты находятся по аналогичным формулам.

Пример 14

Определение положения центра тяжести плоской стержневой конструкции

Определить положение центра тяжести плоской стержневой конструкции, считая, что все её стержни выполнены из одного материала и имеют одинаковую форму и размеры поперечного сечения (рис. П.50).

Размеры стержневой конструкции принять непосредственно из этого рисунка (1 клетка = 1 м).

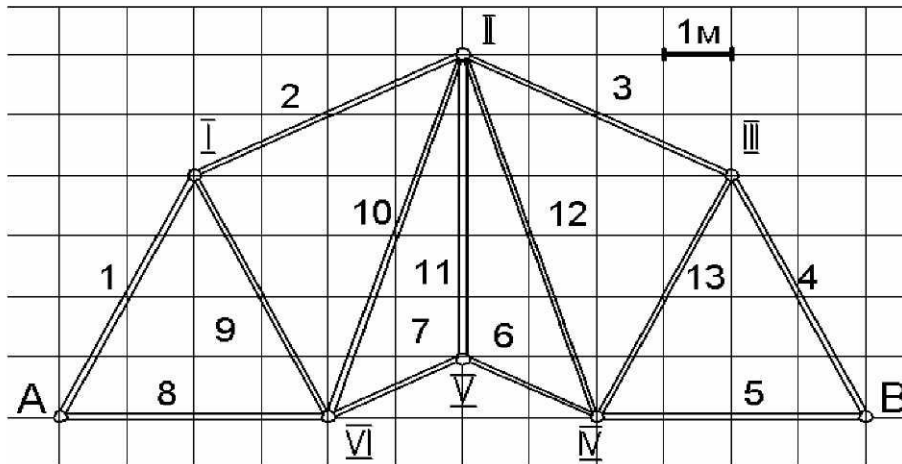


Рис. П.50

Решение

Для определения положения центра тяжести этой стержневой конструкции воспользуемся методом разбиения на отдельные стержни, длины которых можем определить, и показываем положение их центров тяжести (рис. П.51).

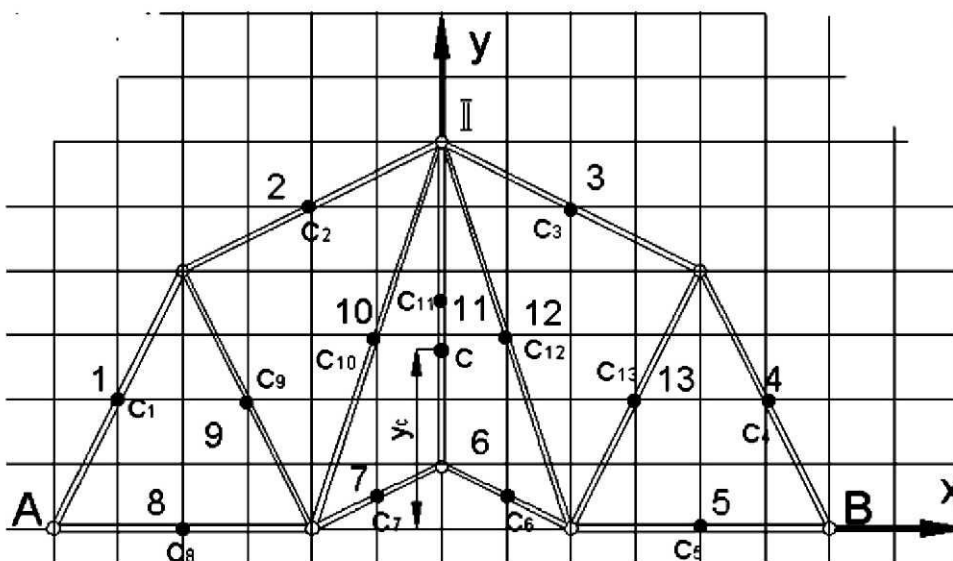


Рис. П.51

Для определения координат центра тяжести плоской стержневой конструкции, выполненной из одинаковых по свойствам стержней, можно воспользоваться формулами:

$$X_c = \frac{\sum X_k l_k}{L}; \quad Y_c = \frac{\sum Y_k l_k}{L},$$

где l_k – длина каждого выделенного стержня;

$L = \sum l_k$ – полная длина конструкции;

X_k, Y_k – координаты центра тяжести каждого выделенного стержня.

Так как предложенная стержневая конструкция имеет ось симметрии, то одну из осей координат (ось OY) совместим с этой осью, тогда центр тяжести фермы будет располагаться на этой оси – OY .

Определяем длины всех выделенных стержней и координаты Y_k их центров тяжести.

$$L = \sum l_k = 56,94 \text{ м.}$$

Результаты определения длины стержней и координаты Y_k их центров тяжести сводим в таблицу.

№ стержня	Длина стержня, l_k (м)	Координаты центра тяжести, Y_k (м)
L_1	4,47	2
L_2	4,47	5
L_3	4,47	5
L_4	4,47	2
L_5	4	0
L_6	2,24	0,5
L_7	2,24	0,5
L_8	4	0
L_9	4,47	2
L_{10}	6,32	3
L_{11}	5	3,5
L_{12}	6,32	3
L_{13}	4,47	2

Вычислим координаты Y_c центра тяжести стержневой конструкции по формуле:

$$Y_c = \frac{\sum Y_k l_k}{L} = \frac{l_1 Y_{C1} + l_2 Y_{C2} + \dots + l_{13} Y_{C13}}{L} = 2,43 \text{ м.}$$

Показываем положение центра тяжести фермы на чертеже (см. рис. П.51).

Пример 15

Определение положения центра тяжести плоской фигуры

Определить положение центра тяжести плоской фигуры, вырезанной по внешнему контуру фермы $ABDEKFLM$. Размеры контура плоской фигуры принять непосредственно из рис. П.52 (1 клетка = 1 метру длины).

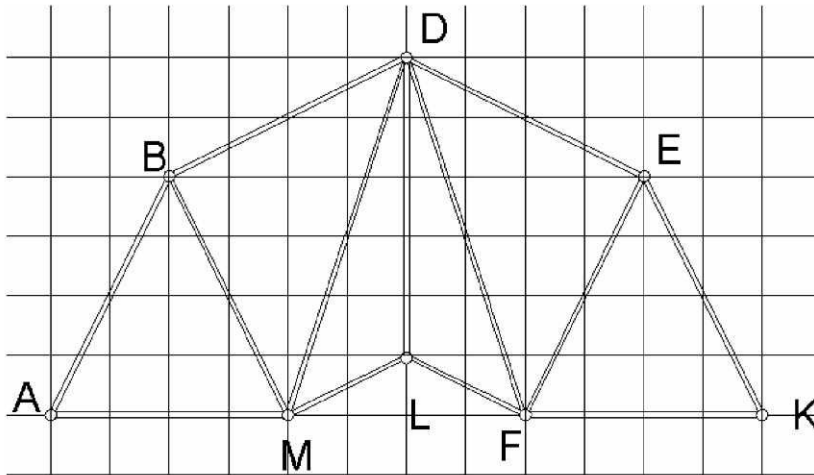


Рис. П.52

Решение

Для определения координат центра тяжести плоской фигуры воспользуемся методом разбиения. Координаты центра тяжести однородной плоской фигуры определяется по формулам:

$$X_c = \frac{\sum X_k S_k}{S}; \quad Y_c = \frac{\sum Y_k S_k}{S},$$

где X_k, Y_k – координаты центра тяжести отсечённой части;
 S_k – площадь отсечённой части;
 $S = \sum S_k$ – полная площадь сечения.

Так как заданная плоская фигура имеет ось симметрии, то ось координат (OY) совмещаем с осью симметрии. Центр тяжести фигуры будет лежать на этой оси.

Разбиваем плоскую фигуру на 5 простых частей, центры тяжести которых известны, а площадь вычисляется:

- 1 – прямоугольник 4 м · 8 м;
- 2 – вырезанный равнобедренный треугольник с основанием 4 м и высотой 1 м;
- 3, 4 – два равных прямоугольных треугольника с катетами 2 м и 4 м;
- 5 – равнобедренный треугольник с основанием 8 м и высотой 2 м.

Показываем центры тяжести этих частей C_1, C_2, \dots, C_5 и вычисляем их площади. Результаты расчётов сводим в таблицу.

№ простой части	Площадь простой части сечения, S_k (м ²)	Координаты центра тяжести, Y_k (м)	$S_k Y_k$
1	$S_1 = 4 \times 8 = 32$	2	$S_1 Y_1 = 64$
2	$S_2 = 1/2 \times 4 \times 1 = -2$	1/3	$S_2 Y_2 = -0,67$
3	$S_3 = 1/2 \times 2 \times 4 = 4$	4/3	$S_3 Y_3 = 5,33$
4	$S_4 = 1/2 \times 2 \times 4 = 4$	4/3	$S_4 Y_4 = 5,33$
5	$S_5 = 1/2 \times 8 \times 2 = 8$	$(4 + 2/3) = 4,67$	$S_5 Y_5 = 37,3$
Сумма:	$\Sigma S_k = S = 42$		

Так как фигуру 2 необходимо вырезать из прямоугольника (4×8), то её площадь считаем отрицательной.

Вычисляем координату центра тяжести плоской фигуры по формуле:

$$Y_C = \frac{S_1 Y_{C_1} + S_2 Y_{C_2} + S_3 Y_{C_3} + S_4 Y_{C_4} + S_5 Y_{C_5}}{S} = \frac{64 - 0,67 + 5,33 \cdot 2 + 37,3}{42} = 2,65 \text{ м.}$$

Показываем положение центра тяжести фигуры на чертеже (рис. П.53).

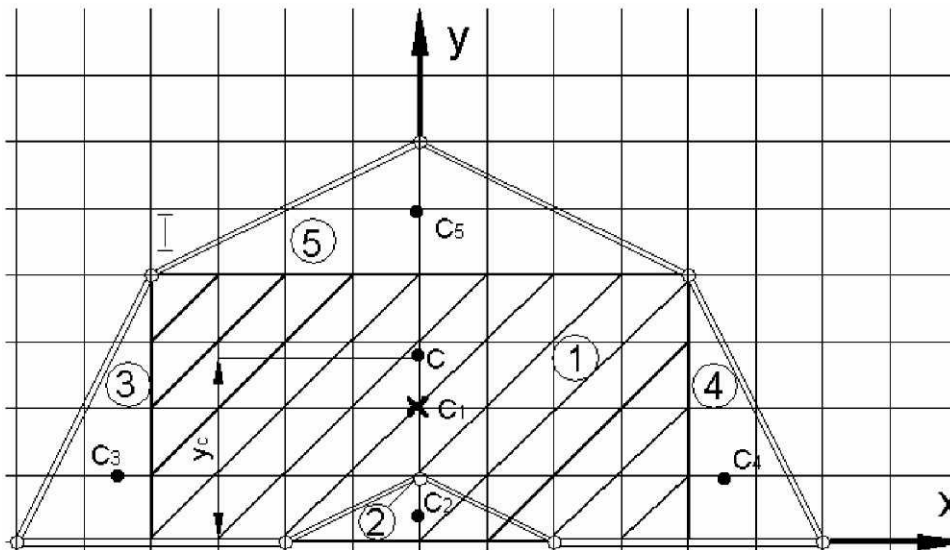


Рис. П.53

Пример 16

Определение положения центра тяжести плоской фигуры

Определить положение центра тяжести плоской фигуры, показанной на рис. П.54. Указанные размеры заданы в см.

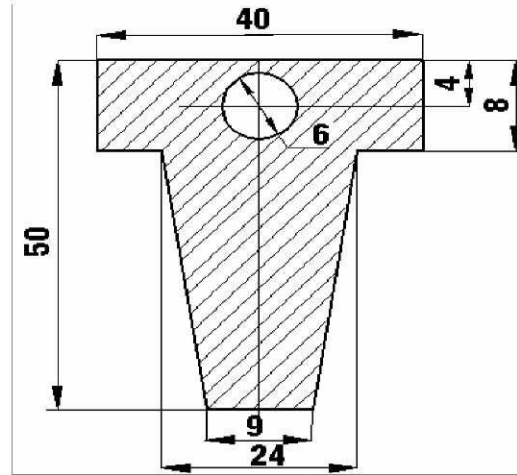


Рис. П.54

Решение

Для определения положения центра тяжести плоской фигуры воспользуемся методом разбиения.

Разобьем данную фигуру на простые части, для которых можем указать положение центров тяжести и вычислить их площади. Варианты разбиения могут быть различны. Например, они показаны на рис. П.55.

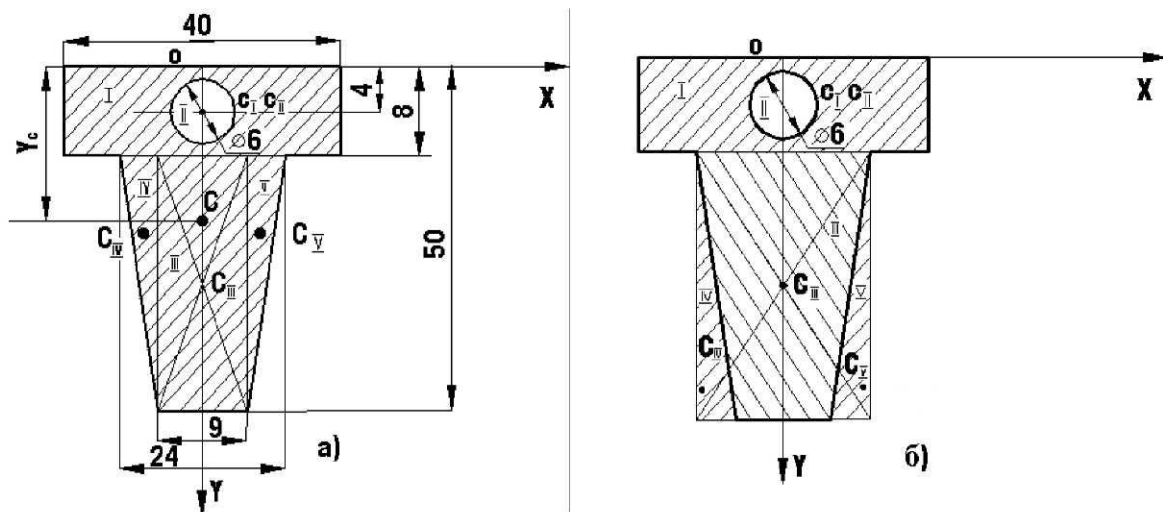


Рис. П.55

Случай (а)

Разбиваем заданную фигуру на простые части: два прямоугольника I и II, два одинаковых треугольника IV и V, и вырезанный круг III. Показываем центр тяжести этих фигур на чертеже m . C_I, C_{II}, \dots, C_V .

Случай (б)

Разбиваем заданную фигуру на простые части: два прямоугольника I и III, два одинаковых вырезанных треугольника IV и V, и вырезанный круг II.

Так как в обоих случаях число полученных простых фигур одинаково, можно принять к расчёту любой вариант.

Рассмотрим случай (а)

Координаты центра тяжести плоской фигуры определяются по формулам:

$$X_c = \frac{\sum X_k S_k}{S}; \quad Y_c = \frac{\sum Y_k S_k}{S},$$

где X_k, Y_k – координаты центра тяжести простых частей;

S_k – площадь простой части;

$S = \sum S_k$ – полная площадь.

Так как заданная плоская фигура имеет ось симметрии, то ось координат (OY) совмещаем с осью симметрии. Центр тяжести фигуры будет находиться на этой оси и его положение будет определяться одной координатой – Y_c .

Определяем координаты Y_k центров тяжести простейших частей и вычисляем их площади. Результаты расчётов сводим в таблицу. Площадь вырезанного круга будем считать отрицательной.

№ отсечённой фигуры	Координаты центра тяжести простой части фигуры, Y_k (см)	Площадь простой части, S_k (см ²)
I	4	$S_I = 8 \cdot 40 = 320$
II	4	$S_{II} = -\pi R^2 = -3,14 \cdot 3^2 = -28,3$
III	29	$S_{III} = 9 \cdot 42 = 378$
IV	22	$S_{IV} = (1/2) \cdot 42 \cdot 7,5 = 157,5$
V	22	$S_V = (1/2) \cdot 42 \cdot 7,5 = 157,5$
		$S = \sum S_k = 827,2$

Вычисляем координату центра тяжести по формуле:

$$Y_c = \frac{S_I Y_{C_I} + S_{II} Y_{C_{II}} + S_{III} Y_{C_{III}} + S_{IV} Y_{C_{IV}} + S_V Y_{C_V}}{S};$$
$$Y_c = \frac{1280 - 113,2 + 10962 + 3465 + 3465}{827,2} = 23,0 \text{ см.}$$

Показываем положение центра тяжести фигуры на чертеже.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ С-14

Решение задач статики с учетом действия сил трения имеет свои особенности. В соответствии с приближенными законами Амонтона-Кулона, силы трения скольжения появляются лишь тогда, когда одно тело скользит по поверхности другого, или тогда, когда приложенные к телу силы стремятся сдвинуть его по поверхности другого тела. В обоих случаях сила трения скольжения появляется как сила сопротивления относительно проскальзыванию тел, но ее величина существенно зависит от кинематического состояния взаимодействующих тел:

а) при скольжении данного тела по поверхности другого сила трения достигает наибольшего (предельного) значения $F_{\text{пред}}$. Величина предельной силы трения пропорциональна силе нормального давления N между трущимися поверхностями:

$$F_{\text{пред}} = N \cdot f \quad (\text{а})$$

где f – коэффициент трения скольжения;

б) в состоянии относительного покоя двух тел сила трения между ними может принимать любые значения в пределах

$$0 \leq F_{\text{тр}} \leq F_{\text{пред}} \quad (\text{б})$$

и ее величина в этом случае определяется из уравнений равновесия.

Именно эта зависимость величины силы трения скольжения от кинематического состояния взаимодействующих тел (относительный покой, относительное скольжение) и предопределяет особенности решения задач статики с учетом действия сил трения. Очень часто в подобных задачах не имеет смысла декларировать (объявлять) кинематическое состояние взаимодействующих тел: его надо устанавливать, выяснять, определять на основе анализа соотношений между действующими (заданными) силами и величиной предельной силы трения. И лишь после этого, в случае надобности, – определять величину и направление силы трения.

Другой причиной, определяющей особенности решения задач статики с учетом сил трения между телами, является вид самой системы сил, действующей на рассматриваемое тело (сходящиеся силы, произвольная плоская система сил и т. д.).

В задачах, которые включены в данный сборник, на тело действует плоская система сходящихся сил. Для решения этих задач может быть рекомендован следующий алгоритм действий.

1. Предварительно сделать конкретное предположение о том, в каком направлении может начаться движение тела после снятия принуждения, удерживавшего его в покое.

2. В принятую сторону направить ось X и вычислить силу, стремящуюся двигать тело в принятом направлении (движущую или сдвигающую силу):

$$\vec{F}_{\text{дв}} = \sum \vec{F}_{kx}^{\text{акт}}, \quad (\text{в})$$

где $\vec{F}_k^{\text{акт}}$ – активные (т.е. заданные) силы, действующие на тело.

Примечание. Отрицательное значение силы $F_{\text{дв}}$ указывает на то, что движение тела из состояния покоя (после снятия принуждения) может начаться в обратном направлении. Поэтому целесообразно сразу отказаться от первоначального предположения о направлении движения тела и изменить его на противоположное, пересчитав при этом $\vec{F}_{\text{дв}}$.

3. Определить из уравнения равновесия тела силу нормальной реакции N опорной поверхности.

Примечание. Отрицательное значение N указывает на то, что тело отрывается от этой опорной поверхности и определение силы трения между ними теряет смысл.

4. Вычислить величину предельной силы трения $\vec{F}_{\text{пред}} = N \cdot f$ и, сравнив ее с величиной движущей силы, сделать вывод о поведении тела после снятия принуждения, удерживавшего его в покое:

– если $\vec{F}_{\text{пред}} \geq \vec{F}_{\text{дв}}$, то первоначальное состояние покоя тела сохраняется и в этом случае $F_{\text{тр}} = F_{\text{дв}}$;

– если $F_{\text{пред}} < F_{\text{дв}}$, то тело начинает двигаться из состояния покоя и сила трения между телом и опорной негладкой поверхностью достигает наибольшего значения $F_{\text{тр}} = F_{\text{пред}}$.

При определенном соотношении между исходными параметрами (величины и направления активных сил, положение тела, величина коэффициента трения) возможно состояние покоя тела при действии на него силы трения. Это соотношение определяет область его равновесия. Ее определение представляет известные трудности, обусловленные необходимостью многофакторного анализа в каждой конкретной задаче. Пример такого анализа приведен ниже, но следует отметить, что в нем используются те же приближенные законы трения скольжения и полученные из них окончательные соотношения типа а, б, и в.

Пример 17

Исследование равновесия тела с учетом сил трения

Ползун может перемещаться вдоль негладкого направляющего прямолинейного стержня АВ, образующего с вертикалью угол β (рис. П.56).

К ползуну прикреплен идеально гибкий невесомый трос, перекинутый через неподвижный блок D и несущий на конце груз весом Q . В положении, когда угол между стержнем АВ и тросом, идущим к блоку, был равен α , система принудительно удерживалась в покое и находилась в плоскости рисунка.

Пренебрегая потерями на трение в блоке D и раскачиваниями груза:

1) установить кинематическое состояние ползуна непосредственно после снятия принуждения и определить при этих условиях величину и направление силы трения между ползуном и направляющим стержнем.

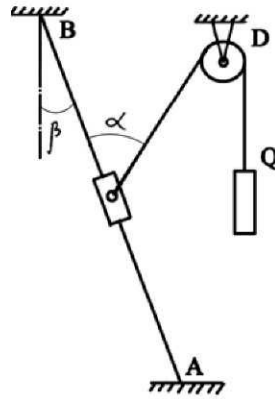


Рис. П.56

При выполнении данного пункта принять:

вес ползуна $P = 100$ Н; вес груза $Q = 150$ Н; коэффициент трения между ползуном и стержнем $f = 0,25$; углы: $\beta = 20^\circ$; $\alpha = 40^\circ$;

2) сохранив все числовые значения указанных величин за исключением силы P , определить область равновесия по этой силе, т. е. найти наименьшее и наибольшее значения силы P , при которых сохраняется первоначальное состояние покоя ползуна в исходном положении.

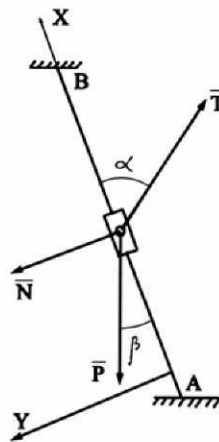


Рис. П.57

Решение

Силами, действующими на ползун, являются:

- сила тяжести P ;
- натяжение троса $T = Q$;
- нормальная реакция N ;
- сила трения $F_{\text{тр}}$.

Если пренебречь размерами ползуна, то эти силы образуют плоскую сходящуюся систему (рис. П.57).

1. Установим кинематическое состояние ползуна после снятия принуждения, удерживавшего его в первоначальном состоянии покоя.

Предположим, что после снятия принуждения ползун может начать скользить вверх вдоль стержня AB . Направим в эту сторону ось X и вычислим движущую силу:

$$F_{\text{дв}} = \sum F_{kx}^{\text{акт}} = -P \cdot \cos \beta + T \cdot \cos \alpha. \quad (1)$$

При заданных значениях $T = Q$, P , α и β получаем:

$$F_{\text{дв}} = 21,0 \text{ Н.}$$

Так как $F_{\text{дв}} > 0$, то движение ползуна (если оно начнется) будет происходить именно вверх по стержню. Но, чтобы оно началось, должно выполняться условие

$$F_{\text{дв}} > F_{\text{пред}}.$$

Определяем величину предельной силы трения, предварительно вычислив силу нормальной реакции N стержня. В данной задаче ползун не может оторваться от направляющего стержня ни при каких условиях и в зависимости от выбранного направления этой силы она может оказаться как положительной, так и отрицательной. Поэтому, в данном случае

$$F_{\text{пред}} = |N| \cdot f.$$

Из уравнения равновесия $\sum F_{ky} = 0$ (см. рис. П.57) определяем силу реакции N :

$$\begin{aligned} N + P \cdot \sin \beta - T \cdot \sin \alpha &= 0, \\ N + 100 \cdot \sin 20^\circ - 150 \cdot \sin 40^\circ &= 0, \\ N &= 62,2 \text{ Н.} \end{aligned} \quad (2)$$

Следовательно,

$$F_{\text{пред}} = |N| \cdot f = 62,2 \cdot 0,25 = 15,6 \text{ Н.}$$

Так как $F_{\text{пред}} < F_{\text{дв}}$, то ползун не может оставаться в состоянии покоя и начинает скользить по стержню вверх. Сила трения между ними равна предельной, $F_{\text{тр}} = F_{\text{пред}} = 15,6 \text{ Н}$ и направлена противоположно направлению скольжения тела, т. е. вниз.

2. Переходим к определению области равновесия ползуна по силе P . Из предыдущего решения видно, что легкий ползун не может оставаться в покое после снятия принуждения при заданных Q , α и β . Независимо от наличия трения между ползуном и стержнем активные силы, приложенные к ползуну, стремятся двигать его либо вверх, либо вниз по стержню AB . Своеобразным рубежом следует считать случай, когда $F_{\text{дв}} = 0$, т. е.

$$P \cdot \cos \beta - T \cdot \cos \alpha = 0.$$

Отсюда $P = 103 \text{ Н}$.

При таком значении силы тяжести движущая сила, т. е. сила, стремящаяся вывести тело из первоначального состояния покоя, равна нулю и, естественно, ни о каком начале движения ползуна не может быть речи.

Если вес ползуна будет меньше этого значения, то движущая сила окажется направленной вверх и первоначальное состояние равновесия может нарушиться, как было нами установлено, например, при $P = 100 \text{ Н}$.

Наоборот, если $P > 103 \text{ Н}$, то движущая сила окажется направленной вниз, и может начаться движение ползуна в эту сторону.

Рассмотрим оба варианта возможного движения ползуна из первоначального состояния покоя. В обоих случаях их реализация будет зависеть от соотношения между величинами $F_{\text{дв}}$ и $F_{\text{пред}}$.

Сначала рассмотрим случай малой силы P :

$$P < 103 \text{ Н}, \quad (3)$$

когда движение ползуна может начаться вверх из первоначального состояния покоя.

В этом случае движущая сила определяется по формуле (1), в которой величину силы P следует считать неизвестной, но подчиняющейся исходному условию (3).

Из формулы (1) получаем:

$$F_{\text{дв}} = 115 - 0,940 \cdot P \quad (4)$$

Определяем силу нормальной реакции стержня по формуле (2), где сила P также считается неизвестной, но подчиняющейся условию (3). Находим:

$$N = T \cdot \sin \alpha - P \cdot \sin \beta = 150 \cdot \sin 40^\circ - P \cdot \sin 20^\circ,$$

или

$$N = 96,5 - 0,343 \cdot P. \quad (5)$$

Чтобы сила N была положительной, необходимо выполнение условия

$$P < 283 \text{ Н}.$$

Нетрудно видеть, что это условие выполняется обязательно в силу исходного условия (3). Поэтому предельная сила трения

$$F_{\text{пред}} = N \cdot f = (96,5 - 0,343 \cdot P) \cdot 0,25,$$

или

$$F_{\text{пред}} = 24,1 - 0,0855 \cdot P. \quad (6)$$

Для сохранения состояния покоя должно выполняться условие

$$F_{\text{дв}} \leq F_{\text{пред}},$$

из которого, с учетом (4) и (6), получаем $(115 - 0,940 \cdot P) \leq 24,1 - 0,0855 \cdot P$, откуда $P \geq 106,4$ Н.

При таких значениях силы P ползун не может начать двигаться вверх по стержню. Но этот результат противоречит исходному условию ($P < 103$ Н) и поэтому не может быть принят: только при $P < 103$ Н движущая сила направлена вверх и может стремиться двигать ползун в этом направлении. Таким образом, минимальной силой тяжести ползуна, при которой он не может начать скользить вверх, является значение

$$P_{\text{min}} = 103 \text{ Н}. \quad (7)$$

Подтверждением этому служит и то, что при заданном в условии задачи значении $P = 100$ Н действительно уже нарушается первоначальное состояние покоя ползуна.

Рассмотрим теперь случай большой силы P :

$$P > 103 \text{ Н}. \quad (8)$$

При этом движущая сила направлена вниз и равна:

$$F_{\text{дв}} = P \cdot \cos \beta - T \cdot \cos \alpha = P \cdot \cos 20^\circ - 150 \cdot \cos 40^\circ \quad (9)$$

или

$$F_{\text{дв}} = 0,940 \cdot P - 115.$$

Из (2) получаем уже известное выражение (5):

$$N = 96,5 - 0,343 \cdot P.$$

Чтобы сила N была положительной, должно выполняться условие

$$P < 283 \text{ Н}. \quad (10)$$

В этом случае

$$F_{\text{пред}} = N \cdot f = (96,5 - 0,343 \cdot P) \cdot 0,25,$$

или

$$F_{\text{пред}} = 24,1 - 0,0855 \cdot P, \quad (11)$$

что совпадает с (6).

При $N < 0$ (если $P > 283$ Н)

$$F_{\text{пред}} = 0,0855 \cdot P - 24,1. \quad (12)$$

Сравнив движущую силу (9) с каждым из полученных выражений предельной силы трения, найдем значения силы P , при которых может иметь место равновесие ползуна. В обоих случаях для равновесия должно выполняться требование

$$F_{\text{дв}} \leq F_{\text{пред}}. \quad (13)$$

Для случая $N > 0$ получаем из (13) с учетом (9) и (11):

$$0,940 \cdot P - 115 \leq 24,1 - 0,0855 \cdot P,$$

откуда

$$P \leq 135,6 \text{ Н}. \quad (14)$$

Во втором случае ($N < 0$, $P > 283$ Н) из (13) с учетом (9) и (12) получаем:

$$0,940 \cdot P - 115 \leq 0,0855 \cdot P - 24,1, \text{ или}$$

$$P \leq 106,4 \text{ Н}. \quad (15)$$

Данный результат лишен смысла, так как не удовлетворяет условию $P > 283$ Н, с учетом которого он был получен и поэтому от него отказываемся. Остается единственный результат (14) $P \leq 135,6$ Н, удовлетворяющий всем другим условиям, с учетом которых он был получен. Найденное выражение (14) определяет верхнюю границу (наибольшее значение) силы P , при которой еще возможно сохранение состояния покоя ползуна, если первоначально, до снятия принуждения, он находился в этом состоянии.

Итак, $P_{\text{max}} = 135,6$ Н, и область равновесия ползуна по силе P :

$$103 \text{ Н} \leq P \leq 135,6 \text{ Н}.$$

КИНЕМАТИКА

Задача К-1

Кинематика точки (координатный способ задания движения)

По заданным уравнениям движения точки установить траекторию точки и определить скорость, касательное, нормальное и полное ускорения точки в моменты времени $t_0 = 0$ и t_1 . Выполнить чертеж траектории и показать на нем скорость и ускорение точки при $t_0 = 0$ и $t = t_1$. Определить радиус кривизны траектории при $t_0 = 0$ и $t = t_1$ и установить характер движения точки (ускоренное, замедленное, мгновенно-равномерное и т. п.).

Данные для решения принять из табл. К-1: уравнение движения по оси X – по предпоследней цифре варианта задания, а момент времени t_1 и уравнение движения по оси Y – по последней цифре варианта задания.

Таблица К-1

№ условия	Уравнение движения в см	t_1 , с	№ условия	Уравнение движения в см	t_1 , с
1	$4 \cos(\pi t)$	1,50	6	$1 - 4 \sin(\pi t)$	1,00
2	$3 \sin^2(\pi t) - 2$	0,25	7	$3 - 2 \cos(\pi t)$	0,50
3	$2 \cos^2(\pi t) - 4$	0,75	8	$3 - 6 \cos^2(\pi t)$	0,25
4	$-3 \cos(2\pi t)$	0,25	9	$2 \cos(2\pi t) - 1$	0,75
5	$2 - 4 \sin^2(\pi t)$	0,75	10	$\sin(\pi t)$	2,00

Задача К-2

Кинематика точки (естественный способ задания движения)

Точка M движется по замкнутой линии (рис. К-2, а), состоящей из плавно переходящих друг в друга прямо- и криволинейных участков. Последние выполнены из дуг окружностей радиусов $r = 10$ м и $R = 30$ м. Геометрические центры дуг окружностей обозначены на рисунках. Длины участков определяются линейными и угловыми размерами, принимаемыми непосредственно по чертежам траекторий, выполненным в масштабе: одна клетка соответствует 10 м.

Движение точки начинается в момент времени $t_0 = 0$ из пункта M_0 и происходит в соответствии с графиком изменения скорости (рис. К-2, б). Начальная дуговая координата точки $S_0 = OM = -50$ м. Положительное направление движения точки показано стрелкой на каждом из чертежей траекторий.

По заданному движению точки:

1) определить положение точки на траектории в выделенные моменты времени t_1 , t_2 и т. д. и объяснить, какие изменения в движении точки происходят в эти моменты;

2) установить особенности движения точки (равномерное, ускоренное и т. п.) и направление ее движения по траектории на промежутках времени от t_0 до t_1 , от t_1 до t_2 и т. д.;

3) вычислить путь, пройденный точкой к моменту времени $t_4 = 7$ с, если к начальному моменту $t_0 = 0$ он был равен нулю ($s_0 = 0$).

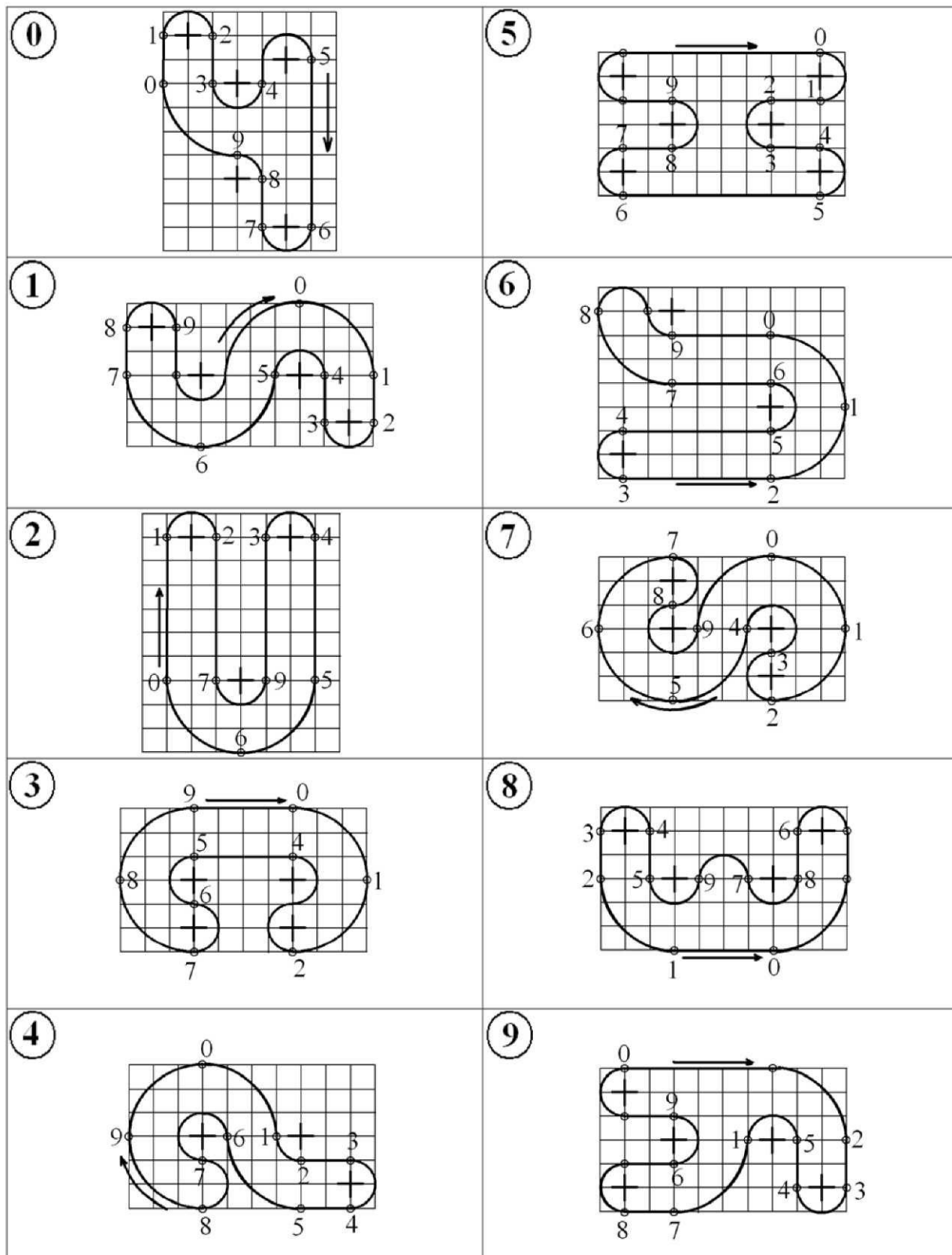


Рис. К-2, а. Чертежи траектории точки

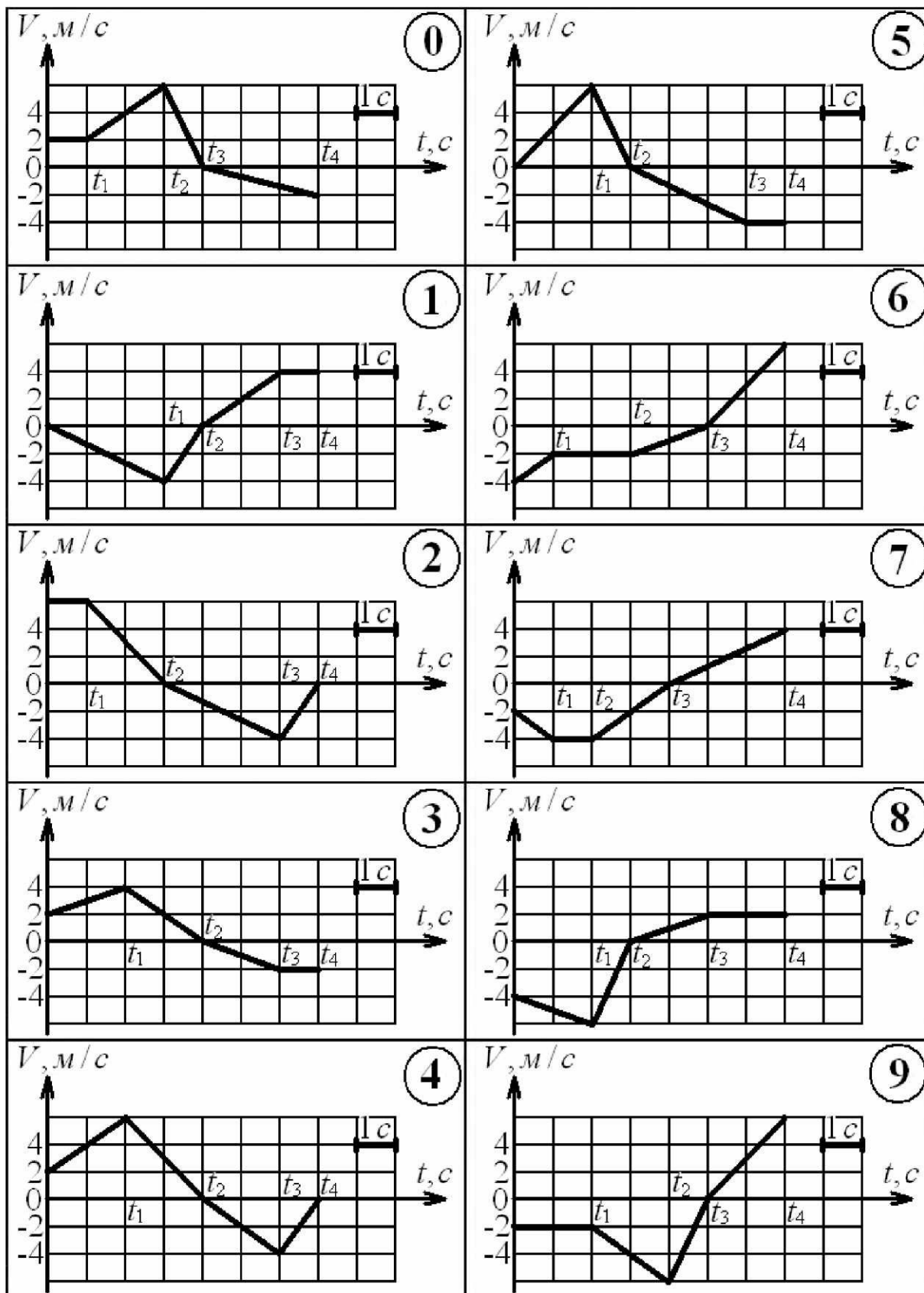


Рис. К-2, б. График изменения скорости точки

Указания к выбору траектории, начала отсчета на ней дуговых координат и графика изменения скорости точки:

1. Номер схемы с чертежом траектории принимается по последней цифре варианта задания.

2. На чертежах траекторий выделены кружками точки сопряжения прямо- и криволинейных участков. Они пронумерованы и могут быть приняты в качестве начала отсчета O дуговых координат движущейся точки. Номер такой точки на чертеже траектории и номер кинематического графика изменения скорости должны совпадать и приниматься по предпоследней цифре варианта задания.

Например, в случае варианта 26 принимаются траектория 6 и кинематический график изменения скорости номер 2. На чертеже траектории 6 точка 2 принимается за начало отсчета O дуговых координат движущейся точки M . Ее начальное положение M_0 находится в 50 м левее от точки O (рис. 1). В соответствии с графиком 2 изменения скорости: движение точки происходит сначала в направлении к началу отсчета дуговых координат, т. е. вправо от M_0 .

Задача К-3

Механические передачи (кинематика и преобразование простейших движений твердого тела)

Механизм, состоящий из зубчатой и ременной передач, дополнен устройством, преобразующим вращательное движение зубчатого колеса $3'$ в поступательное движение зубчатой рейки 4 (схемы 1, 3, 4, 5, 8), либо приспособлением для подъема и опускания груза 4 с помощью троса, намотанного на барабан $3'$ (схемы 0, 2, 6, 7, 9). Механизм может быть использован и для преобразования поступательного движения груза (рейки) во вращательное движение других звеньев.

По заданному движению одной точки (или звена) получить картину движения всего механизма в момент времени $t_1 = 1$ с (т. е. на кинематической схеме показать истинные направления движения всех звеньев механизма и его характерных точек: например, уточнить, поднимается или опускается груз 4, в какую сторону движется зубчатая рейка 4 и т. п.). Вычислить величины скоростей и ускорений (линейных, угловых) этих точек и всех звеньев в указанный момент времени.

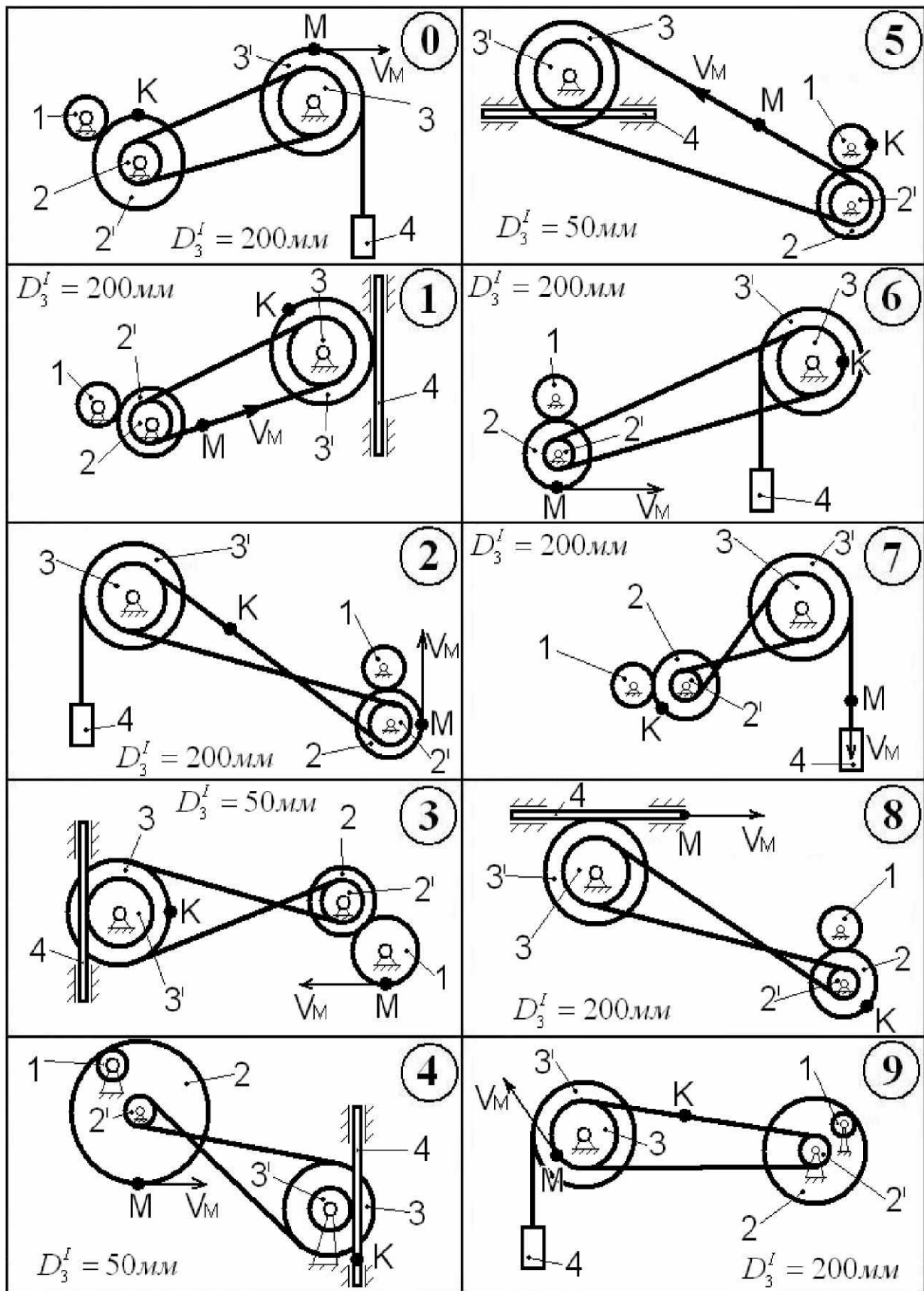


Рис. К-3

За положительное направление движения механизма принять то, при котором точка M движется так, как показано на рисунках кинематических схем (рис. К-3), т. е. на схемах 0 – 9 показано направление движения точки M , соответствующее случаю $V_M > 0$).

Таблица К-3

Предпоследняя цифра варианта	z_1	z_2	D'_2 (мм)	D_3 (мм)	ω (рад/с), ε (рад/с ²), V (м/с), a (м/с ²)	t_1 (с)
0	27	120	80	180	$\omega_3 = 5; \varepsilon_3 = 30$ (ускор.)	1,0
1	21	165	100	140	$V_K = 2(t^2 - 2t)$	3,0
2	17	102	80	160	$\omega_1 = 6; \varepsilon_1 = 10$ (замедл.)	0,5
3	19	124	90	180	$\omega_2 = 4(t^2 - 3t)$	2,0
4	17	186	125	160	$\omega_3 = 2(6 - t^2)$	3,0
5	31	124	100	125	$V_4 = 0,6(1 - t^2)$	3,0
6	18	60	100	180	$\omega_2 = 4; \varepsilon_2 = 12$ (ускор.)	2,5
7	21	85	80	140	$V_4 = -3; a_4 = 2$ (замедл.)	0,5
8	24	119	100	160	$\omega_1 = 6(t - 2t^2)$	1,0
9	19	118	125	180	$V_K = 4; a_K^\tau = 10$ (замедл.)	1,5

Примечание. В таблице приняты обозначения:

- z_1, z_2 – числа зубьев зубчатых колес;
 - ω_i, ε_i – угловая скорость, угловое ускорение звена i ($i = 1, 2, 3$), вычисляемые в рад/с и рад/с² соответственно;
 - V_K, a_K^τ – линейная скорость, касательное ускорение некоторой точки K механизма, отмеченной на рисунках кинематических схем;
 - V_4, a_4 – аналогичные параметры движения груза (или зубчатой рейки) 4.
- Единицы измерения этих величин – в системе СИ, т. е. м/с, м/с² соответственно;
- D'_2, D_3 – диаметры шкивов ременной передачи.

Задача К-4

Механические передачи (кинематический расчет привода)

На рис. К-4 показаны варианты кинематических схем привода барабана IV лебедки от двигателя M через двухступенчатый редуктор II. Для большей общности эти схемы дополнены ременной I (или цепной V) передачей, а также муфтой III.

Трос набегает на барабан со скоростью V .

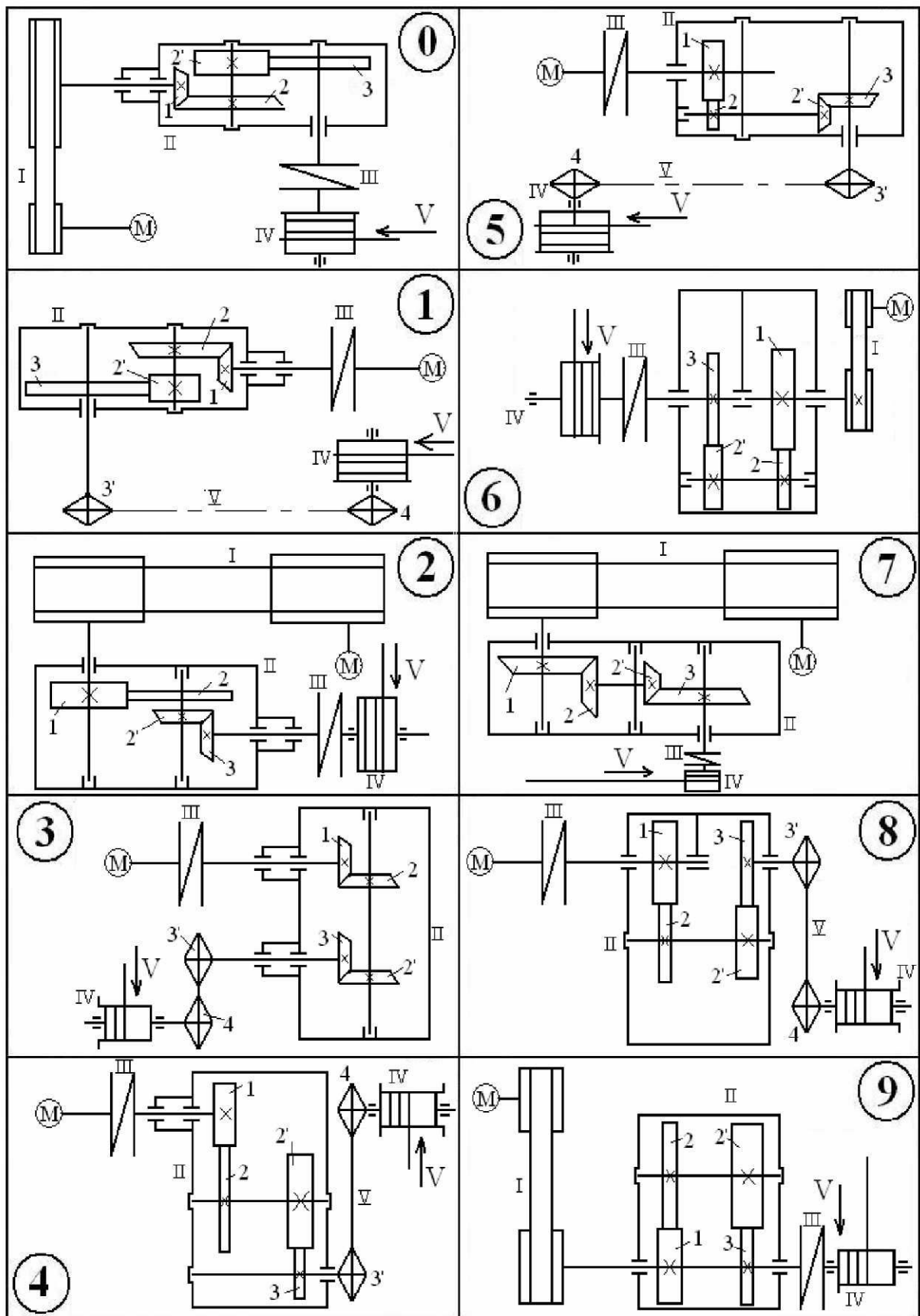


Рис. К-4

Приняв номер схемы привода по последней цифре варианта задания, а числовые данные из табл. К-4 – по предпоследней, произвести кинематический расчет привода лебедки:

1. Определить передаточные отношения всех ступеней и привода в целом.
2. Подобрать диаметр барабана D и частоту вращения вала двигателя $n_{дв}$ чтобы т. о., обеспечить требуемую скорость набегания троса на барабан с наименьшим отклонением ее ΔV от заданного значения. Диаметр барабана принять из ряда: $D = 80, 100, 120, 150, 180, 200, 250, 300, 350, 400, 500, 600, 800, 1000$ мм, а частоту вращения – из ряда $n_{дв} = 2850, 1450, 950, 720, 580$ об/мин.
3. Определить величины и направления угловых скоростей всех валов.
4. Показать на рисунке направления векторов угловых скоростей валов, считая, что трос набегает на барабан.

Примечание.

$$\Delta V = ((V_{\text{треб}} - V_{\text{обесп}}) / V_{\text{треб}}) \cdot 100\%,$$

где $V_{\text{треб}}$ – заданное (требуемое) значение скорости троса;

$V_{\text{обесп}}$ – то значение скорости троса, которое обеспечивается выбранными $n_{дв}$ и D барабана.

Таблица К-4

Величина, обозначение		Предпоследняя цифра варианта задания									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Диаметры ведущего и ведомого шкивов ременной передачи, мм	$D_{\text{вщ}}$	140	90	125	140	160	160	125	140	90	125
	$D_{\text{вм}}$	315	255	180	255	315	280	255	180	180	280
Числа зубьев зубчатых колес и звездочек	z_1	26	23	19	29	20	24	24	21	26	21
	z_2	45	43	51	93	49	50	78	74	66	65
	z'_2	19	26	20	18	21	17	22	20	24	25
	z_3	49	54	62	40	61	70	53	75	85	68
	z'_3	37	30	34	38	30	32	24	60	35	29
	z_4	83	85	49	69	59	56	49	77	70	65
Скорость набегания троса на барабан лебедки, м/с	V	1,5	2,1	2,7	3,3	3,9	3,0	3,1	1,8	2,3	2,2

Задача К-5 Кинематический расчет полиспаста

На рис. К-5 показаны схемы полиспастов, применяемых в грузо-подъемных машинах.

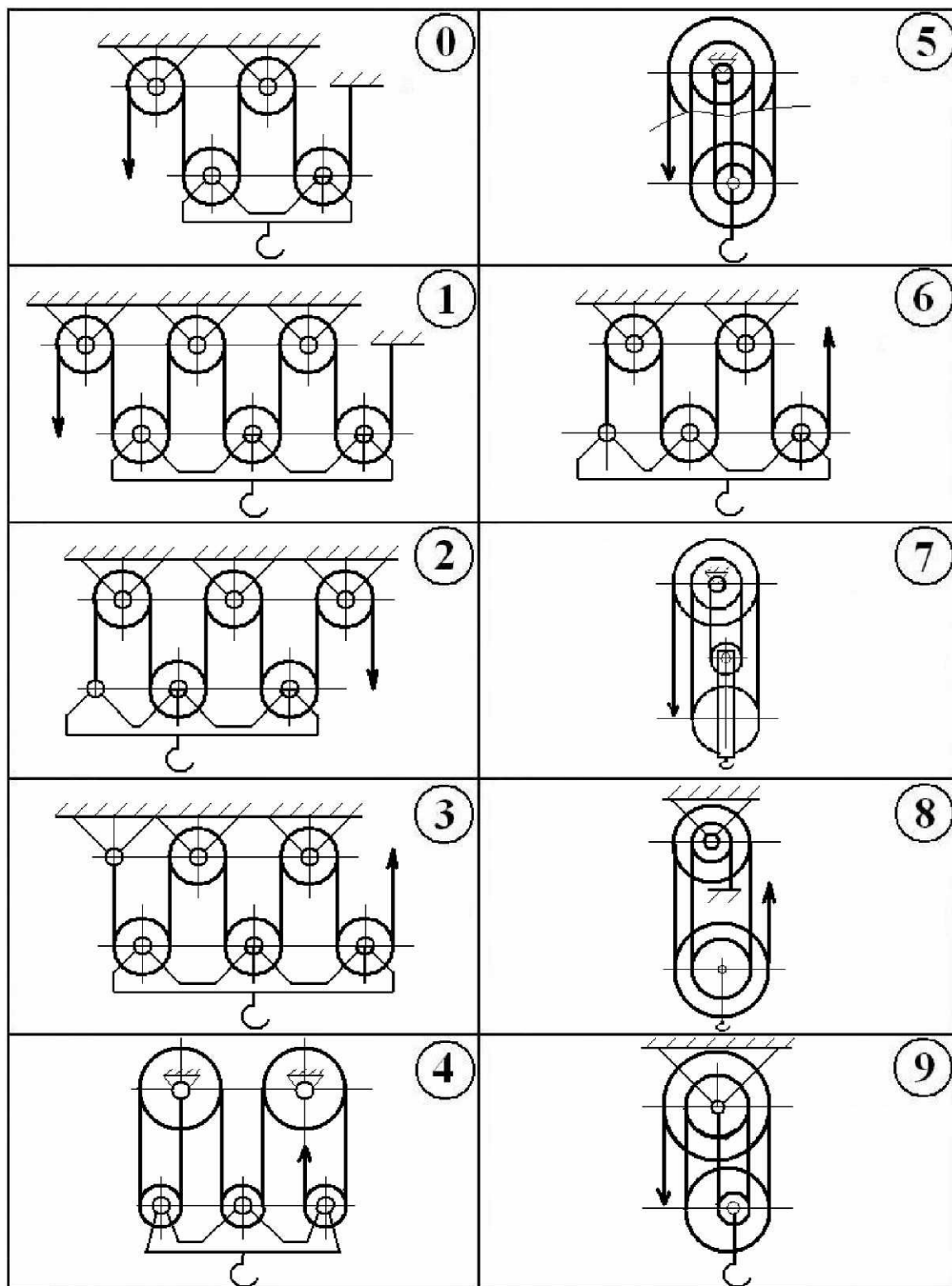


Рис. К-5

Произвести кинематический расчет полиспаста, а именно:

1. Объяснить назначение полиспастов и их применение в грузоподъемных машинах, а также принцип устройства полиспастов (на примере предложенной схемы).

2. Дать определение понятия «кратность полиспаста» и подсчитать ее для заданной схемы.

3. Определить величину и направление угловых скоростей всех блоков и показать их на рисунке.

В расчетах принять, что скорость подвижной траверсы равна скорости подъема груза $V_{гр}$. Все ветви троса параллельны (вертикальны); радиус самого маленького блока равен 5 см.

Таблица К-5

Скорость груза	Предпоследняя цифра варианта задания									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$V_{гр}$ (м/с)	0,15	0,20	0,10	0,25	0,20	0,35	0,40	0,30	0,35	0,40

Задача К-6

Кинематический расчет дифференциального (планетарного) механизма

В конструкциях некоторых приводов применяются так называемые планетарные и дифференциальные зубчатые механизмы. Их отличительной особенностью является то, что в механизме имеется колесо, которое вращается вокруг движущей оси.

Движение таких колес напоминает движение планет. Отсюда – их название: планетарные колеса или сателлиты.

Звено, несущее на себе ось сателлита, называется водилом. Ось вращения водила совпадает с геометрической осью центрального колеса.

В планетарном механизме есть неподвижное центральное колесо, которое в дифференциальном механизме может вращаться независимо от водила.

Механизмы могут быть дополнены вторым центральным колесом, а сателлиты выполнены в виде блоков из двух зубчатых колес.

Приняв номер схемы механизма по последней цифре варианта задания, произвести кинематический расчет механизма:

1) определить тип данного механизма (дифференциальный, планетарный);

2) определить угловые скорости всех звеньев механизма, предварительно выполнив рисунок схемы в соответствии с заданными размерами, приняв из таблицы только те угловые скорости, которые не противоречат кинематической схеме механизма (в частности, угловая скорость водила не может быть принята равной нулю ни при каких исходных данных таблицы).

Таблица К-6

Величины	Предпоследняя цифра варианта задания									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r_1 , см	20	15	25	17	22	18	14	12	16	11
r_2 , см	5	3	4	5	4	3	10	6	6	3
r_3 , см	7	5	6	8	10	5	6	8	4	5
ω_1 , рад/с	-5	3	-	6	-10	8	-2	-	6	-4
ω_3 , рад/с	10	-	-4	8	-	-	-6	-3	-5	-
ω_4 , рад/с	-	8	5	-	7	-4	-	-5	-	-10

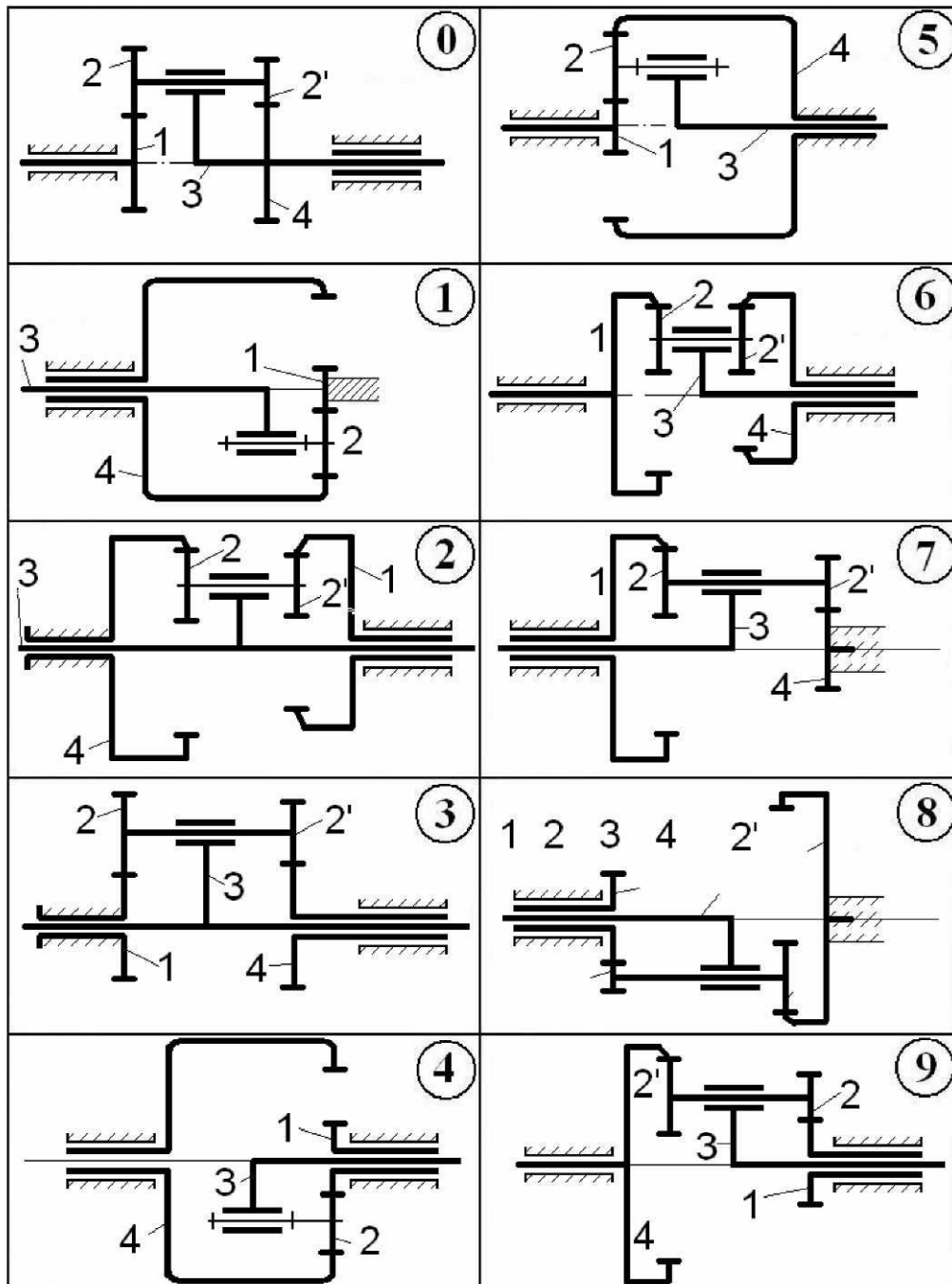


Рис. К-6

Задача К-7 Кинематика рычажного механизма

Плоский механизм состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна (схемы 0 – 7)
или из стержней 1, 2, 3 и двух ползунов (схемы 8, 9).

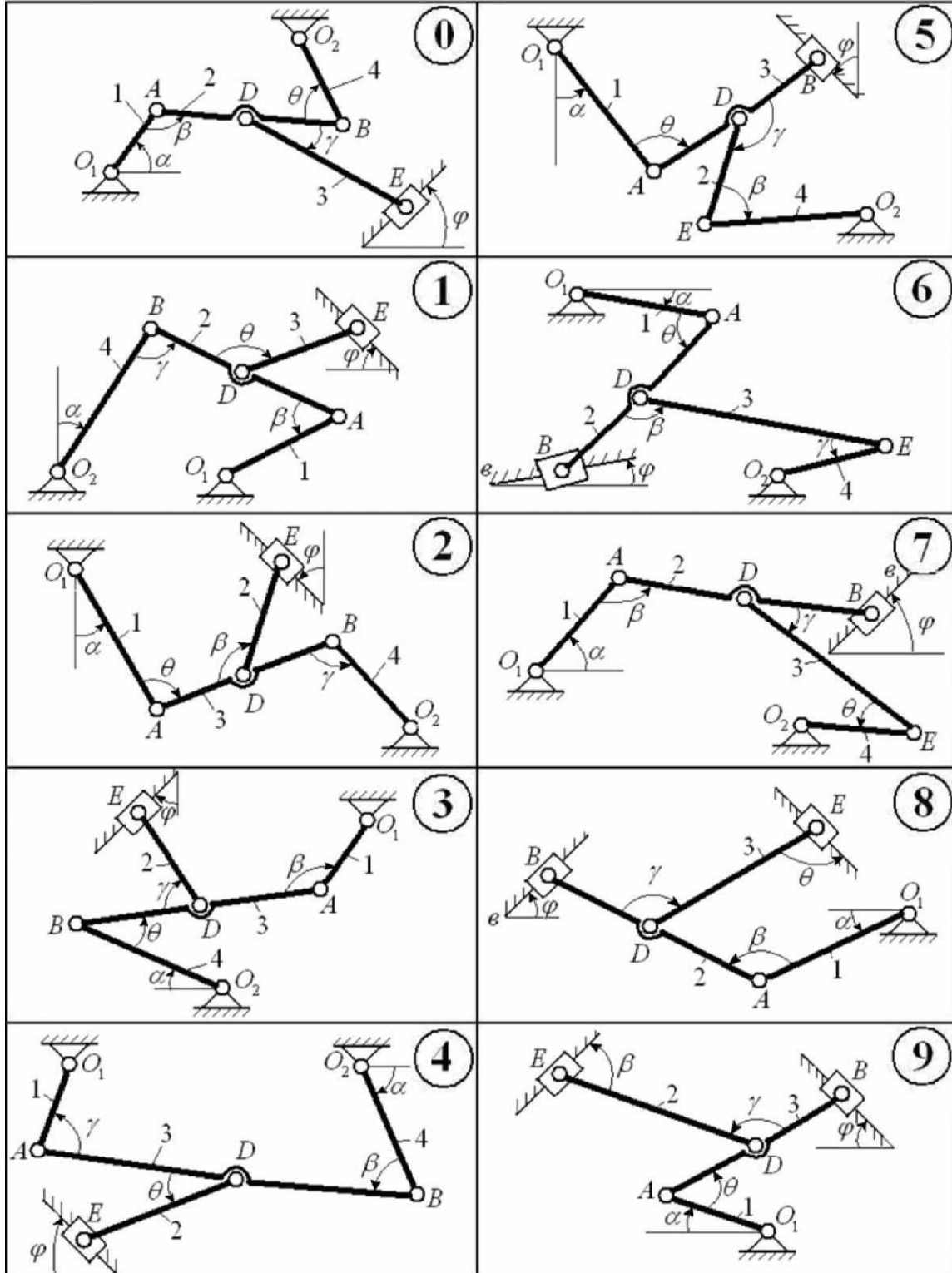


Рис. К-7

Звенья механизма соединены друг с другом и с неподвижными опорами O_1, O_2 шарнирами. Точка D находится в середине стержня AB . Длины стержней равны соответственно $l_1 = 0,4$ м, $l_2 = 1,2$ м, $l_3 = 1,4$ м, $l_4 = 0,6$ м. Положение механизма определяется углами $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \theta$. Значения этих углов и других заданных величин указаны в табл. К-7, а (для схем 0 – 4) или в табл. К-7, б (для схем 5 – 9); при этом в табл. К-7, а – ω_1, ω_4 – величины постоянные.

Определить величины, указанные в таблицах в столбцах «Найти».

Таблица К-7, а

Для схем 0 – 4

Номер условия	Углы, град.					Дано		Найти			
	α	β	γ	φ	θ	$\omega_1, 1/c$	$\omega_4, 1/c$	V точек	ω звена	a точки	ε звена
0	0	60	30	0	120	6	–	В,Е	DE	В	AB
1	90	120	150	0	30	–	4	А,Е	AB	А	AB
2	30	60	30	0	120	5	–	В,Е	AB	В	AB
3	60	150	150	90	30	–	5	А,Е	DE	А	AB
4	30	30	60	0	150	4	–	Д,Е	AB	В	AB
5	90	120	120	90	60	–	6	А,Е	AB	А	AB
6	90	150	120	90	30	3	–	В,Е	DE	В	AB
7	0	60	60	0	120	–	2	А,Е	DE	А	AB
8	60	150	120	90	30	2	–	Д,Е	AB	В	AB
9	30	120	150	0	60	–	8	А,Е	DE	А	AB

Таблица К-7, б

Для схем 5 – 9

Номер условия	Углы, град.					Дано				Найти			
	α	β	γ	φ	θ	$\omega_1, 1/c$	$\varepsilon_1, 1/c^2$	$V_B, м/с$	$a_3, 1/c^2$	V точек	ω звена	a точки	ε звена
0	120	30	30	90	150	2	4	–	–	В,Е	AB	В	AB
1	0	60	90	0	120	–	–	4	6	А,Е	DE	А	AB
2	60	150	30	90	30	3	5	–	–	В,Е	AB	В	AB
3	0	150	30	0	60	–	–	6	8	А,Е	AB	А	AB
4	30	120	120	0	60	4	6	–	–	В,Е	DE	В	AB
5	90	120	90	90	60	–	–	8	10	Д,Е	DE	А	AB
6	0	150	90	0	120	5	8	–	–	В,Е	DE	В	AB
7	30	120	30	0	60	–	–	2	5	А,Е	AB	А	AB
8	90	120	120	90	150	6	10	–	–	В,Е	DE	В	AB
9	60	60	60	90	30	–	–	5	4	Д,Е	AB	А	AB

Примечание.

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие углы: по ходу или против хода часовой стрелки (например, угол γ на схеме 8 следует отложить от DB по ходу часовой стрелки, а на схеме 9 – против хода часовой стрелки и т. д.).

Заданные угловая скорость и угловое ускорение считать направленными против хода часовой стрелки, а заданные скорость V_B и ускорение a_B – от точки B к b (на схемах 5 – 9).

Номер условия из табл. К-7, а и К-7, б принимается по предпоследней цифре варианта задания.

Задача К-8

Кинематика плоского рычажного механизма (частные случаи)

Плоский рычажный механизм состоит из трех стержней и двух ползунов, либо из четырех стержней и одного ползуна (рис. К-8).

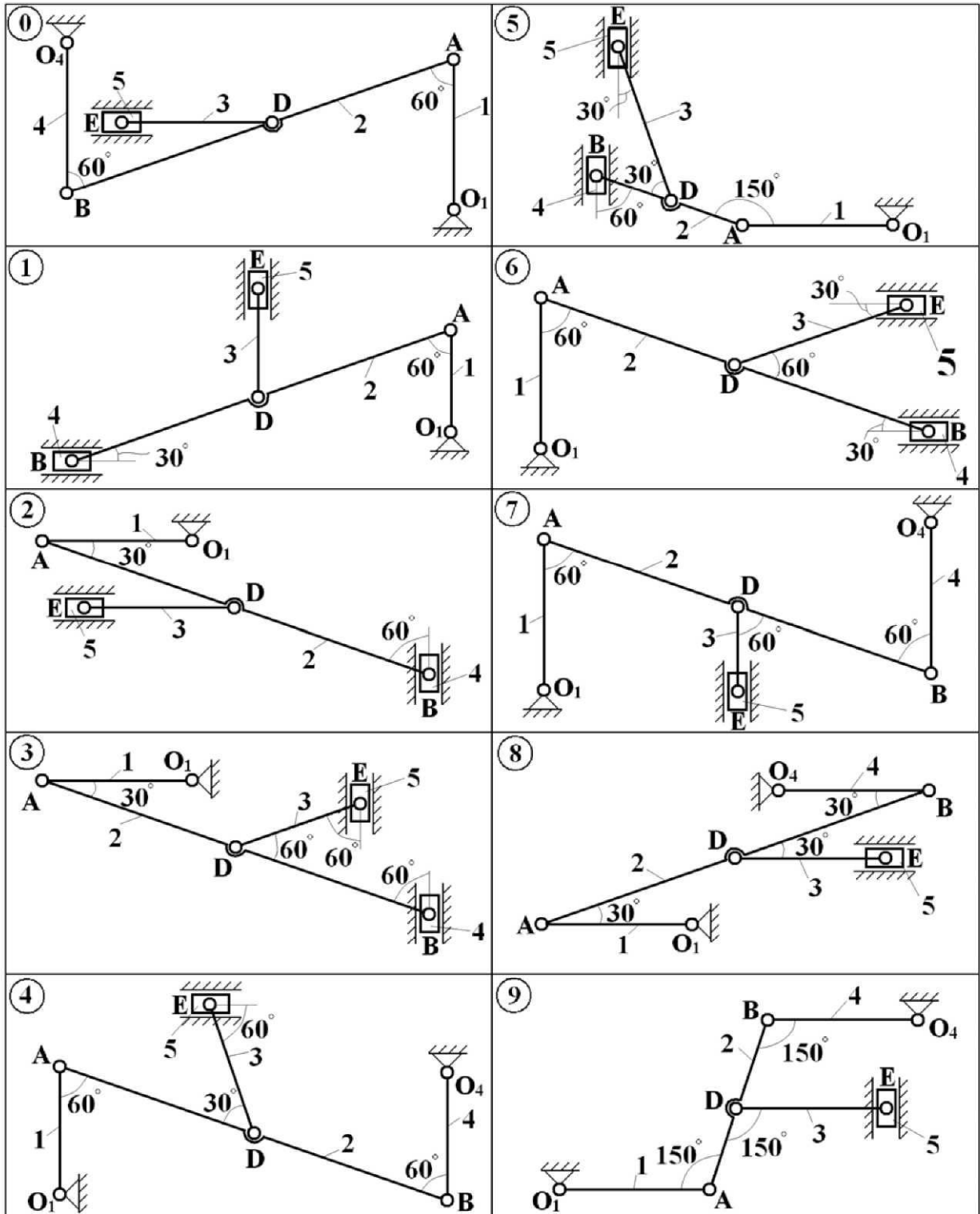


Рис. К-8

По заданной угловой скорости одного звена или линейной скорости одной точки механизма определить величины и направления:

1. Скоростей и ускорений точек, отмеченных на кинематической схеме механизма;

2. Угловых скоростей, угловых ускорений всех звеньев.

При расчете принять размеры звеньев:

$O_1A = 0,4\text{м}$; $AB = 1,2\text{м}$; $AD = DB$; $DE = 1,6\text{м}$; $O_4B = 0,6\text{м}$; звено 1 вращается равномерно против хода часовой стрелки, если в таблице указано, что $\omega_1 > 0$ и наоборот.

Таблица К-8

№ условия	Заданная величина (V – м/с; ω – рад/с)	Примечание
0	$V_A = 1,2$	$\omega_1 > 0$
1	$VD = 1,6$	$\omega_1 < 0$
2	$VB = 2,4$	$\omega_1 > 0$
3	$\omega_1 = 2$	$\omega_1 < 0$
4	$V_D = 0,8$	$\omega_1 > 0$
5	$V_A = 2,4$	$\omega_1 < 0$
6	$V_B = 1,2$	$\omega_1 > 0$
7	$\omega_1 = 3$	$\omega_1 < 0$
8	$\omega_1 = 4$	$\omega_1 > 0$
9	$V_B = 0,6$	(1 < 0)

Задача К-9

Кинематика сложного движения точки (система двух тел)

Механическая система состоит из двух тел, контакт между которыми обеспечивается специальными устройствами, не показанными на рисунке (рис. К-9).

По заданному движению одного из тел системы (табл. К-9) определить скорость и ускорение (или угловую скорость и угловое ускорение) другого тела, рассмотрев сложное движение точки K .

В расчетах применить: $R = 0,5\text{ м}$; $O_1K = 2R \sin \alpha$, $\sin \alpha = 0,6$; $\cos \alpha = 0,8$.

Номер схемы из рис. К-9 принять по последней цифре варианта, а номер условия из табл. К-9 по предпоследней.

Таблица К-9

№ условия предпоследняя цифра варианта задания	Для схем 0, 2, 3, 4, 7		Для схем 1, 5, 6, 8, 9	
	V – м/с, a – м/с ² , ω – рад/с, ε – рад/с ²		ω – рад/с ε – рад/с ²	
0	$V_2 = 2$	$a_2 = 10$ уск	$\omega_1 = 4$	$\varepsilon_1 = 10$ (уск)
1	$\omega_1 = 2$	$\varepsilon_1 = 10$ уск	$\omega_2 = 3$	$\varepsilon_2 = 5$ (уск)
2	$\omega_1 = 2$	$\varepsilon_1 = 6$ уск	$\omega_1 = -2$	$\varepsilon_1 = 5$ (зам)
3	$V_2 = 3$	$a_2 = 8$ уск	$\omega_1 = -5$	$\varepsilon_1 = 10$ (уск)
4	$\omega_1 = 2$	$\varepsilon_1 = 4$ уск	$\omega_2 = -4$	$\varepsilon_2 = 6$ (уск)
5	$\omega_1 = 2$	$\varepsilon_1 = 5$ зам	$\omega_1 = 5$	$\varepsilon_1 = 15$ (зам)

6	$V_2 = 1$	$a_2 = -10$ зам	$\omega_2 = -3$	$\varepsilon_2 = 10$ (зам)
7	$\omega_1 = 2$	$\varepsilon_1 = 6$ уск	$\omega_2 = 2$	$\varepsilon_2 = 4$ (уск)
8	$V_2 = -2$	$a_2 = 4$ зам	$\omega_1 = -3$	$\varepsilon_1 = 8$ (зам)
9	$V_2 = -3$	$a_2 = 6$ уск	$\omega_2 = 4$	$\varepsilon_2 = 12$ (уск)

Примечание.

- 1) при $\omega_1 > 0$ или $\omega_2 > 0$ вращение этого тела происходит против хода часовой стрелки;
- 2) направление движения при $V_2 > 0$ показано стрелкой на рисунках схем;
- 3) принятые сокращения «уск» – ускорение, «зам» – замедленное движение тел.

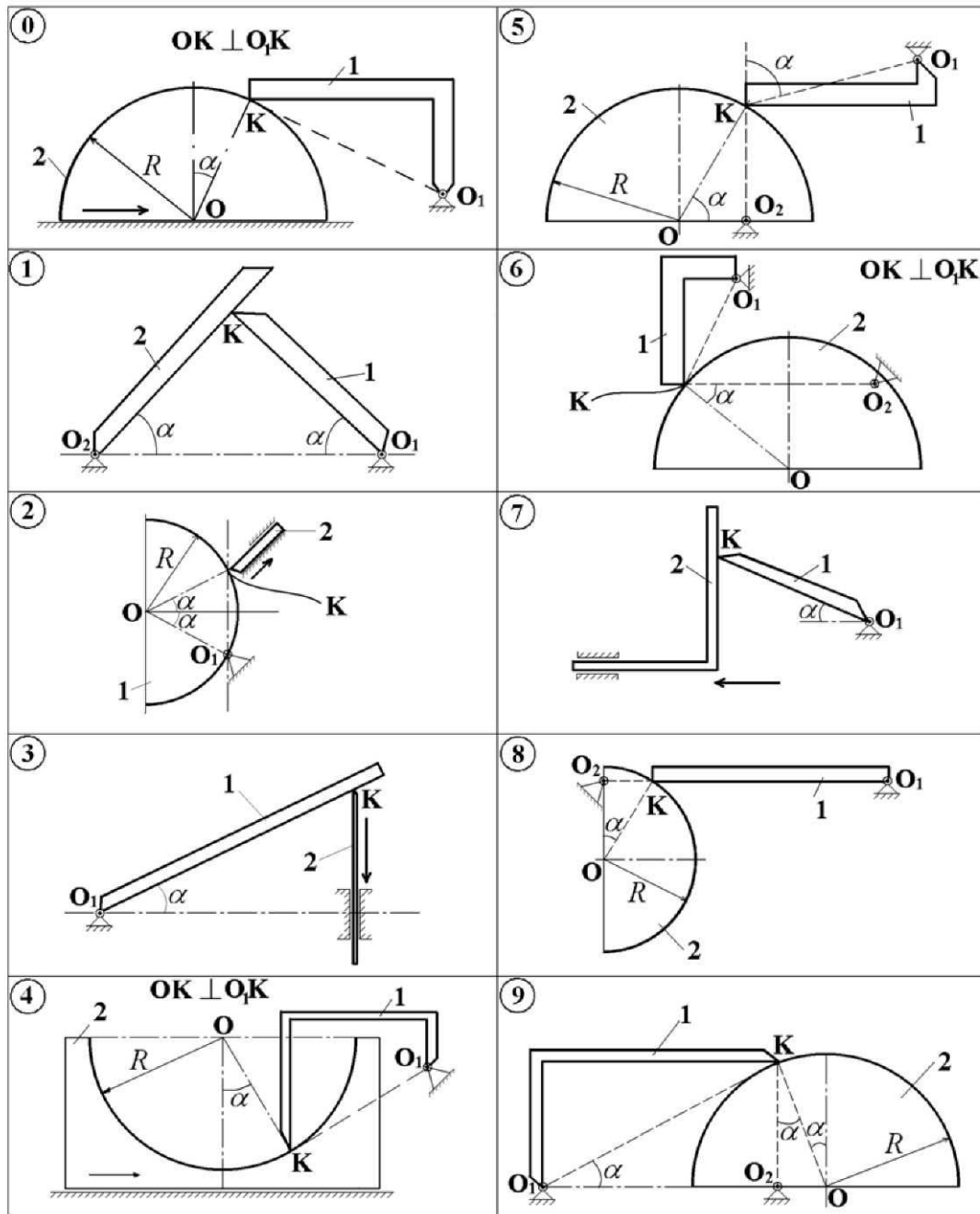


Рис. К-9

Задача К-10

Сложное движение точки в плоскости рисунка (переносное движение)

Прямоугольная пластинка, являющаяся звеном плоского механизма (рис. К-10), движется поступательно в плоскости рисунка. Это движение определяется особенностями механизма, размерами его звеньев и движением ведущего звена.

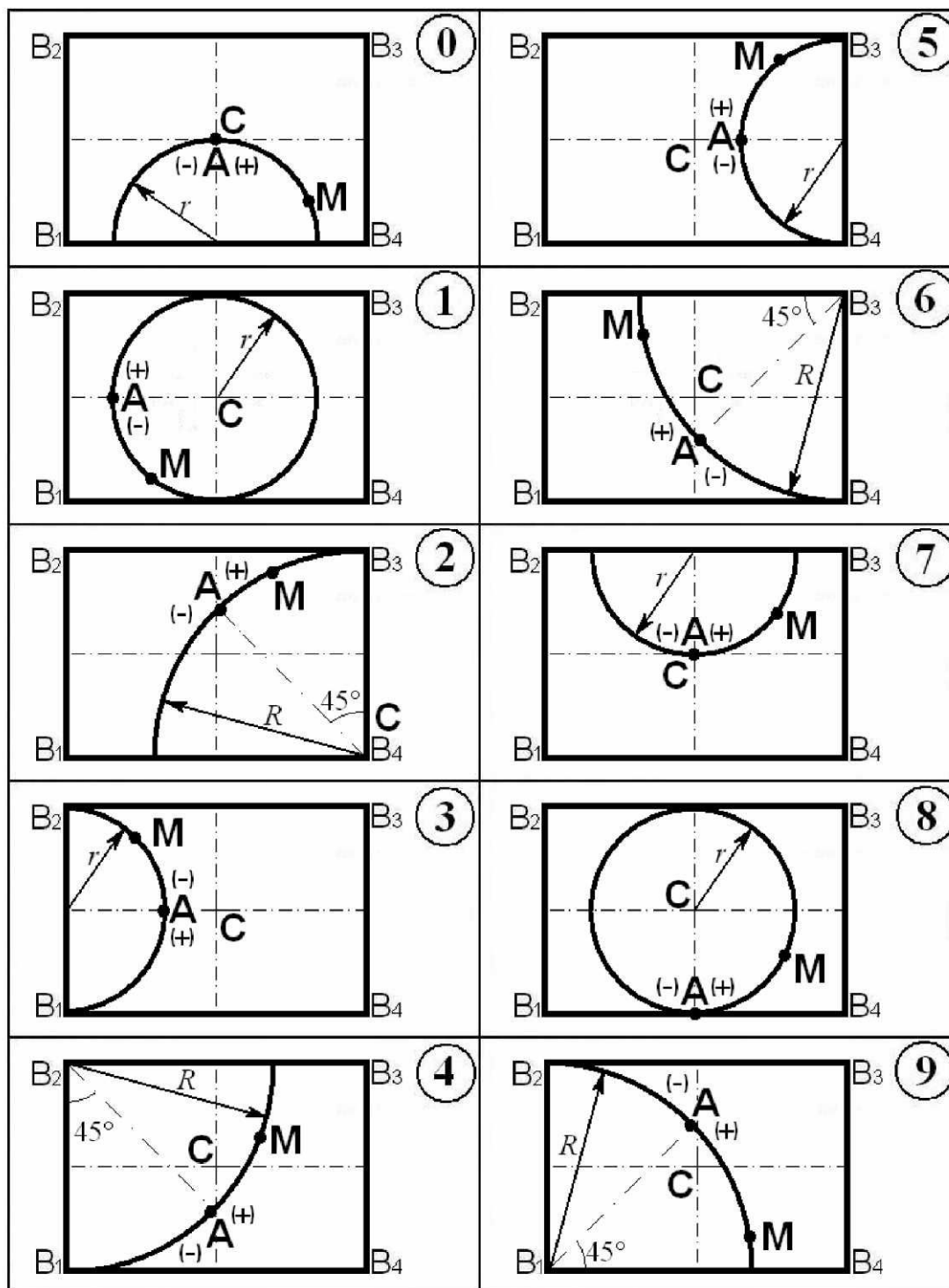


Рис. К-10, а

В табл. К-10, а приведены либо закон движения самой пластинки $S = S(t)$ в некоторой неподвижной системе отсчета, либо уравнение вращательного движения $\varphi = \varphi(t)$ ведущего звена механизма.

По пластинке перемещается точка M . Её траектория – дуга окружности радиуса $r = 0,3$ м (или $R = 0,6$ м). Эти траектории показаны на рис. К-10, а. Закон движения точки M по указанной траектории задан в табл. К-10, б. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени t_1 , указанный в табл. К-10, б.

При выполнении расчетов принять размеры пластинки

$$B_1B_2 = B_3B_4 = 0,6 \text{ м}; \quad B_2B_3 = B_1B_4 = 0,8 \text{ м}.$$

Таблица К-10, а

№ условия (предпоследняя цифра варианта задания)	Уравнение вращательного движения ведущего звена механизма. $\varphi = \varphi(t)$. φ – рад, t – сек для схем 0, 1, 2, 5, 6, 8, 9	Закон движения пластинки $S = S(t)$ (S – в м; t – в сек) для схем 3, 4, 7
0	$2t^2 - 9$	$0,4(7t - t^2)$
1	$7t - 3t^2$	$0,2(t^2 - 3)$
2	$3t - t^2$	$0,3t^2 - 0,8$
3	$5t - 2t^2$	$0,2t^2 - 0,5t$
4	$2(t^2 - 3t)$	$0,4(t^2 - t)$
5	$8t - 3t^2$	$0,5t + 0,4t^2$
6	$3t^2 - 2t$	$0,2t^3 - 1,1t$
7	$6t^2 - 3t^3$	$0,1t^3 + 0,2t^2$
8	$2t^2 - 1$	$0,1t^2 + 0,2t$
9	$4t^2$	$0,4t^3 - 0,2t^2$

Таблица К-10, б

**Уравнения движения точки M по криволинейной траектории на пластинке.
(к задачам К-10, К-11, К-12)**

№ условия (предпоследняя цифра варианта задания)	$S = \cup AM = f(t)$, м (S – в м, t – в с)	t_1 , с
0	$0,15\pi(\cos \pi t - 1)$	1,5
1	$0,3\pi(\cos 2\pi t + 0,5)$	0,75
2	$0,15\pi(\sin^2 \pi t - 1,5)$	0,75
3	$0,15\pi(\sin \pi t - 1)$	2,0
4	$0,3\pi \sin^2 \pi t$	0,25
5	$0,15\pi(\cos^2 \pi t - 1,5)$	0,25
6	$0,3\pi(\sin \pi t - 0,5)$	1,0
7	$0,15\pi(\cos \pi t + 1)$	0,5
8	$0,15\pi(\cos^2 \pi t + 0,5)$	0,75
9	$0,6\pi \cos 2\pi t$	0,75

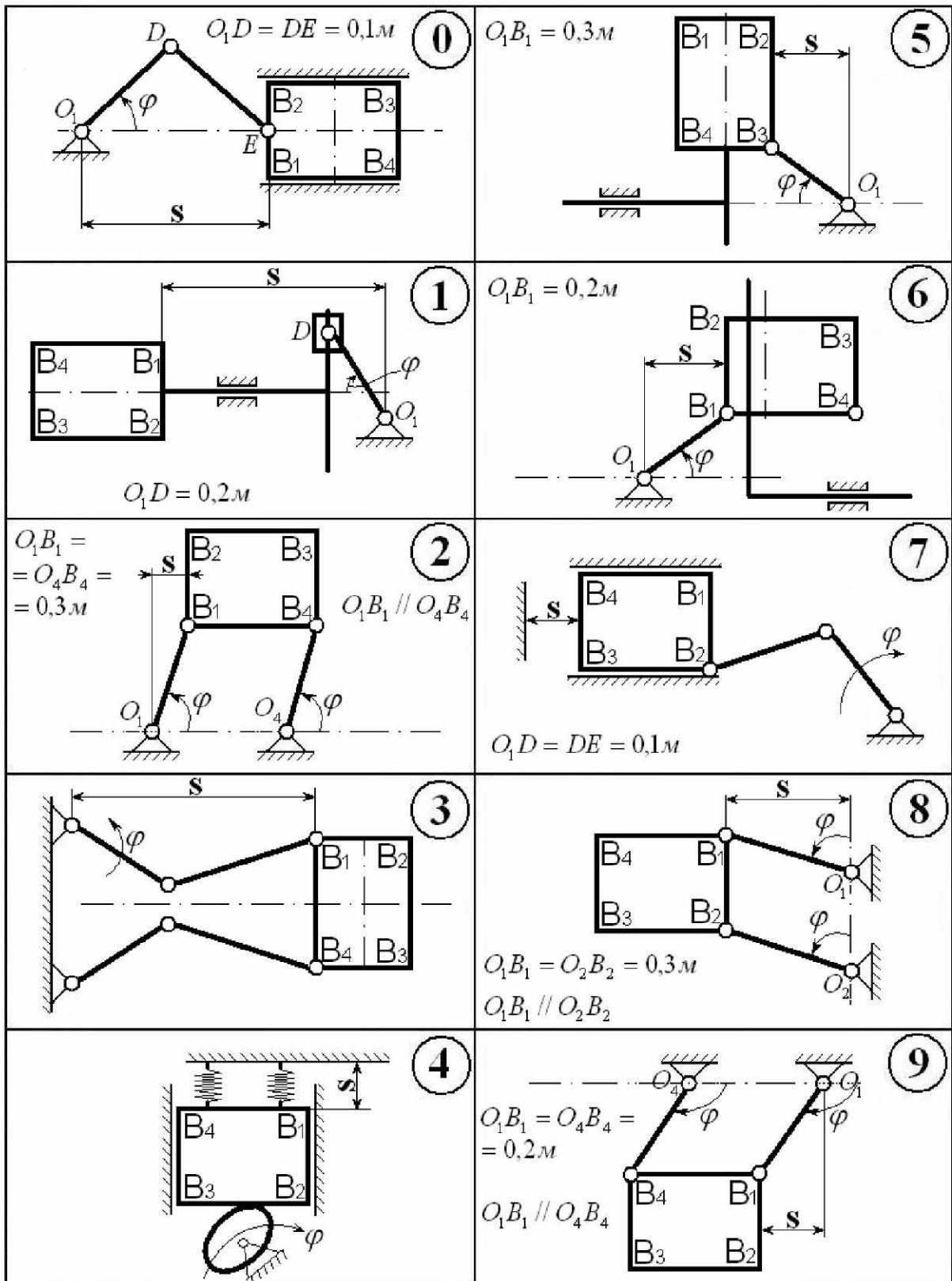


Рис. К-10, б

Задача К-11

Сложное движение точки в плоскости рисунка (переносное движение – вращательное)

Пластинка, расположенная в плоскости рисунка вращается в этой же плоскости вокруг неподвижной оси, перпендикулярной к ней и проходящей либо через одну из вершин прямоугольника $B_1B_2B_3B_4$, либо через его геометрический центр C (см. табл. К-11 и рис. К-10, а). По пластинке перемещается точка M по криволинейной траектории в виде дуги окружности радиуса $R = 0,6$ м или $r = 0,3$ м. (рис. К-10, а)

Положение точки на траектории определяется дуговой координатой $S_M = \overset{\cup}{AM} = f(t)$ (табл. К-10, б).

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени t_1 , указанный в табл. К-10, б.

В расчетах принять размеры прямоугольника $B_1B_2 = B_3B_4 = 0,6$ м; $B_2B_3 = B_1B_4 = 0,8$ м.

Таблица К-11

Параметры описывающие вращение пластины в плоскости рисунка

Ось вращения пластинки проходит через точку	Предпоследняя цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	B_1	B_2	B_3	B_4	C	B_1	B_2	B_3	B_4	C
Угловая скорость пластинки ω (рад/с)	2			-1			2	-3		-2
Угловое ускорение пластинки ε (рад/с ²) и характеристика вращательного движения (ускорение, замедление) в момент времени t_1	8 уск.			4 зам.			6 зам.	5 уск.		10 уск.
Закон вращательного движения пластинки $\varphi(t)$ (рад)		$2t^2 - 3t$	$2 - 3t^2$		$2 - t^3$	$2t^2 + 2$			$2(t^2 - 3)$	

Примечание. При $\omega > 0$ вращение пластинки происходит против хода часовой стрелки.

Задача К-12

Сложное движение точки в пространстве (переносное движение – вращательное)

Пластинка вращается вокруг неподвижной оси, расположенной в ее плоскости и в плоскости рисунка. Эта ось либо горизонтальна, либо вертикальна и проходит через две вершины прямоугольника $B_1B_2B_3B_4$ (см. рис. К-10, а, рис. К-12, табл. К-12).

На схемах рис. К-12 вектором $\vec{\omega}$ указано положительное направление вращения пластинки. Остальная информация о вращении пластинки приведена в табл. К-12.

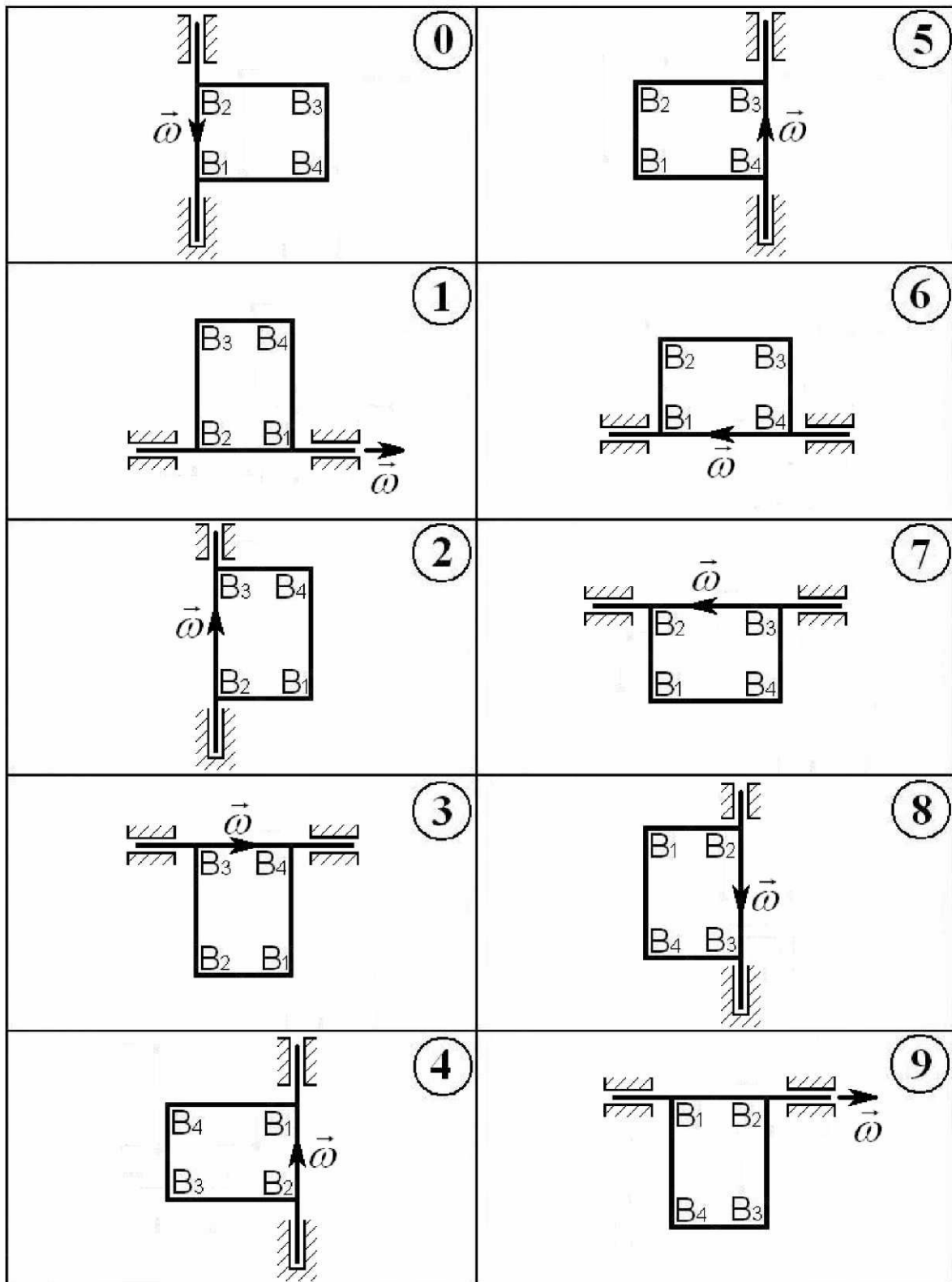


Рис. К-12

По пластинке перемещается точка M вдоль кривой, которая выполнена в виде дуги окружности радиуса $R = 0,6\text{ м}$ или $r = 0,3\text{ м}$. Положение точки M на траектории определяется дуговой координатой $\overset{\smile}{\cup} AM = f(t)$ (см. рис. К-10, а, табл. К-10, а).

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент t_1 , указанный в табл. К-10, а, считая, что в этот момент времени вращающаяся пластинка совпадает с плоскостью рисунка.

Таблица К-12

Параметры описывающие вращение пластинки $V_1V_2V_3V_4$

	Предпоследняя цифра варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Угловая скорость пластинки ω (рад/с)	$3-2t$	-4	3		2	-5	$4-3$		6	
Угловое ускорение пластинки ε (рад/с ²) и характеристика вращательного движения (ускорение, замедление)		10 уск.	6 зам.		5 уск.	16 зам.			4 уск.	
Закон вращательного движения пластинки φ (рад)				$2-3t^2$				$2t^2+2$		$3-t^3$

Задача К-13

Кинематика плоского механизма с двумя степенями свободы

Плоский дифференциальный зубчато-рычажный механизм состоит из ступенчатого блока зубчатых колес (1), трех параллельных реек (2, 3 и 4) и двух стержней 5 и 6 (рис. К-13). Последние соединены между собой шарниром в точке A и присоединены (тоже шарнирно) к зубчатым рейкам 2 и 3. Блок зубчатых колес либо зажат между этими рейками (схемы 0, 3, 6, 9), либо прижимается к ним при помощи дополнительной рейки 4 (в схемах 7 и 8 – это гладкий стержень, несущей ось блока колес, а в остальных схемах – тоже зубчатая рейка, входящая в зацепление с одним из колес).

Весь механизм расположен (и движется) в плоскости рисунка. При этом все рейки скользят поступательно в специальных неподвижных направляющих; параллельно им движется и ось C блока колес. Механизм имеет две степени свободы, т. е. любые два звена его могут быть ведущими и им можно сообщать независимые между собой движения (кроме схем 0, 7, 8 и 9 в которых ось C блока колес закреплена на рейке (4)).

В данный момент времени движение механизма определяется значениями кинематических параметров, указанных в табл. К-13, а положение его звеньев – величинами углов α и β (острый угол α образован осями рейки (2) и стержня (5), а острый угол β – осями рейки (3) и стержня (6)).

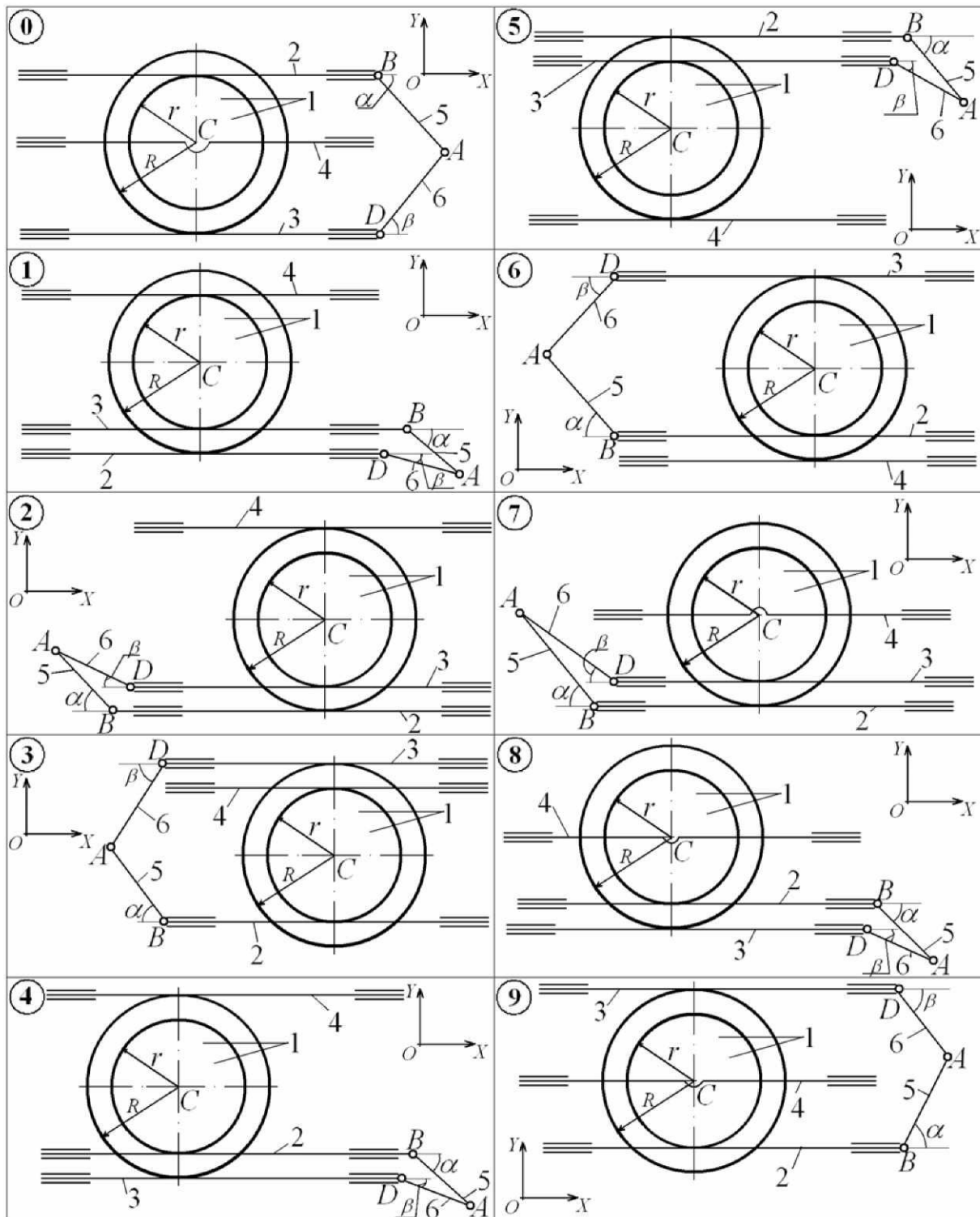


Рис. К-13

По заданным кинематическим характеристикам звеньев (точек) механизма (табл. К-13) определить угловые скорости всех звеньев и скорости точек A , B , C , D , выделенных на кинематических схемах механизма. При выполнении расчетов принять: радиусы зубчатых колес $r = 30$ см; $R = 40$ см; длины стержней (5) и (6) $AB = AD = 50$ см; $\sin\alpha = \cos\beta = 0,8$; $\sin\beta = \cos\alpha = 0,6$.

Таблица К-13

	Предпоследняя цифра варианта задания									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
V_{2X} м/с	-1,0							0,9		
V_{3X} м/с		0,9				-1,1				
M_{4X} м/с			1,2				0,8			
ω_1 рад/с		30							40	
ω_5 рад/с	40		30				-50			-60
ω_6 рад/с					-50			60		
V_{AY} м/с				0,8	0,7				1,0	
V_{AY} м/с				-1,2		1,0				0,8

Примечание. Значение $\omega_k > 0$, заданное в таблице, соответствует вращению звена k против хода часовой стрелки.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ К-1 И К-2

Эти задачи относятся к теме «Кинематика точки» (координатный и естественный способы задания движения точки).

Задача К1 решается с помощью формул, по которым определяется скорость и ускорение точки при задании ее движения в системе координат OXY . Касательное ускорение в этом случае находится по формуле:

$$a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}.$$

Для получения уравнения траектории точки в виде $f(x, y) = 0$ необходимо исключить время из заданных уравнений движения $x = x(t)$, $y = y(t)$. В предлагаемых задачах это можно сделать с помощью известных тригонометрических тождеств:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$

Выполняя рисунок траектории, следует обратить внимание на то, что не вся линия, описываемая уравнением $f(x, y) = 0$ может быть траекторией точки, т. к. функции синус и косинус любого аргумента ограничены ± 1 .

На рисунке траектории должны быть показаны положение точки и векторы ее скорости и ускорения (со всеми составляющими – V_x , V_y и т. д.). Для их изображения необходимо выбрать такие масштабы, чтобы полученный рисунок не терял наглядность и содержал информацию о движении точки, т. е. показывал истинную картину движения точки в этот момент времени.

Все искомые величины в задаче К-1 нужно определять только для заданного момента времени t_1 .

При решении задачи К-2 (естественный способ задания движения точки) наибольшую трудность может вызвать определение положения точки на траектории в нужный момент времени и пути, пройденного точкой к этому моменту. Поэтому нужно твердо знать исходные определения и понятия:

- дуговая координата;
- пройденный путь;
- алгебраическая скорость точки;

а также – геометрический смысл определенного интеграла.

Рассмотрим их подробнее.

Так, если в момент времени t_1 , дуговая координата толчки равна S_1 , а для момента времени t_2 ее необходимо найти. На основании

$$V_{\text{алг}} = \frac{dS}{dt},$$

где $S = S(t)$ – закон движения точки по траектории;

$V_{\text{алг}}$ – алгебраическая скорость точки, можно получить:

$$S_2 = S_1 + \int_{t_1}^{t_2} V_{\text{алг}} \cdot dt.$$

Здесь определенный интеграл представляет собой приращение ΔS дуговой координаты за промежуток времени от t_1 до t_2 и может быть вычислен с помощью заданного графика изменения скорости точки.

В отличие от дуговой координаты путь, пройденный точкой за этот же промежуток времени ($\Delta t = t_2 - t_1$) складывается из модулей тех приращений дуговых координат, которые получаются при движении точки от момента t_1 до момента первой ее остановки $t_{1\text{ост}}$, затем – от первой остановки до второй (в момент $t_{2\text{ост}}$) и т. д. и, наконец, от последней остановки (перед t_2) до этого момента t_2 :

$$s = \left| \int_{t_1}^{t_{1\text{ост}}} V_{\text{алг}} \cdot dt \right| + \left| \int_{t_{1\text{ост}}}^{t_{2\text{ост}}} V_{\text{алг}} \cdot dt \right| + K \cdot \left| \int_{t_{\text{ост}}}^{t_2} V_{\text{алг}} \cdot dt \right|.$$

Пусть, например, точка движется по прямолинейной траектории согласно уравнению (S – в м; t – в с)

$$S = OM = 5(1 - \cos \pi t).$$

Приняв начальное положение точки (при $t_0 = 0$) за начало отсчета дуговых координат, определим, как будет изменяться путь, пройденный точкой.

Алгебраическая скорость точки:

$$V_{\text{алг}} = \frac{dS}{dt} = 5\pi \cdot \sin \pi t$$

Моменты остановок ($V_{\text{алг}} = 0$):

$$t_{\text{ост}} = 1 \text{ с}; t_{2\text{ост}} = 2 \text{ с, и т. д.}$$

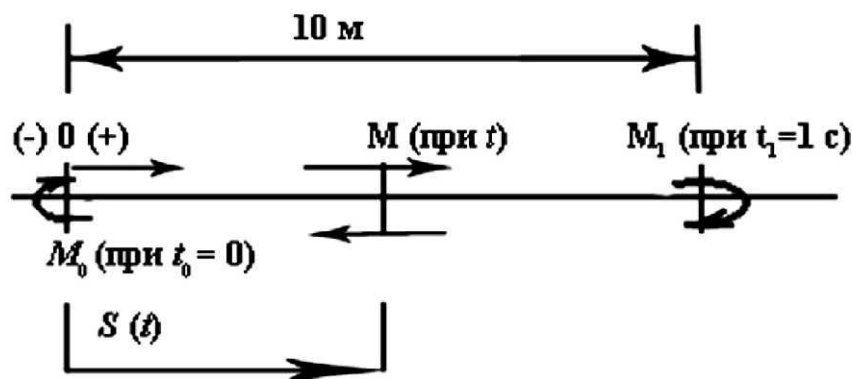
При $t < t_{\text{ост}}$ имеем $V_{\text{алг}} > 0$, т. е. точка движется в положительную сторону отсчета дуговых координат и $S = 0$.

В этом случае и пройденный точкой путь $S(t)$ будет вычисляться по той же формуле, что и дуговая координата $S(t)$ точки.

$$\text{При } 0 \leq t \leq t_{\text{ост}}: s(t) = S(t) = 5(1 - \cos \pi t).$$

$$\text{В момент } t_{\text{ост}} = 1 \text{ с}; s_1 = S_1 = 10 \text{ м.}$$

После первой остановки до момента второй остановки точка движется в сторону уменьшения дуговых координат (её скорость отрицательна). Тем не менее дуговая координата остается положительной, хотя и уменьшается (например, при $t_1 = 1,5$ с; $S = 5$ м). Пройденный путь продолжает увеличиваться. Понятно, что при $t_1 = 1,5$ с он будет равен 15 м. Для получения аналитической зависимости пройденного пути к моменту первой и второй остановки, т. е. при $t_{\text{ост}} = 1 \text{ с} \leq t \leq t_{2\text{ост}} = 2 \text{ с}$ лучше воспользоваться нижеприведенным рисунком. Остановки точки с последующим изменением направления движения происходят в положениях M_0 и M_1 , периодически повторяясь через $T = 1$ с.



Путь $s(t)$, пройденный к моменту t :

$$\begin{aligned} s(t) &= M_0M_1 + M_1M = M_0M_1 + M_1M_0 - M_0M = \\ &= 2 \cdot M_0M_1 - M_0M = 2 \cdot 10 - S(t) = 20 - 5(1 - \cos \pi t) = 15 + 5 \cos \pi t \end{aligned}$$

Следует помнить о том, что эта формула «работает» только на промежутке времени от первой до второй остановки точки.

Если нужно получить аналитическое выражение для пройденного пути за промежутки времени от 0 до t , где $t_{2\text{ост}} \leq t \leq t_{3\text{ост}}$, то снова получаем:

$$S = OM_1 + M_1O + OM = 20 + S(t) = 20 + 5(1 - \cos \pi t) = 25 - 5 \cos \pi t.$$

Итак, дуговая координата изменяется по закону:

$$S(t) = 5(1 - \cos \pi t),$$

справедливому при всех t , а пройденный точкой путь вычисляется по различным формулам в зависимости от принадлежности момента времени тому или иному временному отрезку между остановками точки.

Пример 1

Движение точки M происходит согласно уравнениям (x, y – в м, t – в с):

$$x = 4 \sin(2\pi t); \quad y = 2 - 4 \cos(2\pi t).$$

Определить траекторию точки, проанализировать ее движение по траектории и определить скорость и ускорение в моменты времени $t_0 = 0$, $t_1 = 0,5$ с и $t_2 = 1,25$ с.

Решение

1. Чтобы определить уравнение траектории точки, исключим время t из заданных уравнений движения. В данном случае это можно сделать, воспользовавшись основными тригонометрическим тождеством:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Из заданных уравнений движения получаем:

$$\sin(2\pi t) = \frac{x}{4}; \quad \cos(2\pi t) = \frac{2-y}{4}.$$

Поэтому

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{2-y}{4}\right)^2 = 1. \quad (1)$$

Это – уравнение окружности радиусом $R = 4$ м с центром O_1 , находящимся в точке с координатами $(0, + 2)$. Так как $\sin(2\pi t)$ и $\cos(2\pi t)$ –

периодические функции, изменяющиеся в пределах от -1 до $+1$, то координата x движущейся точки плавно изменяется в пределах $-4 \text{ м} \leq x \leq 4 \text{ м}$, а координата y – в пределах $-2 \leq y \leq 6 \text{ м}$. То есть траекторией точки является вся окружность, описываемая уравнением (1). Выполняем рисунок траектории точки и показываем на нем положения движущейся точки в моменты $t_0 = 0$, $t_1 = 0,5 \text{ с}$ и $t_2 = 1,25 \text{ с}$. (рис. 1.)

При $t_0 = 0$: $x_0 = 4 \sin(2\pi t_0) = 4 \sin 0 = 0$; $y_0 = 2 - 4 \cos(2\pi \cdot t_0) = 2 - 4 \cos 0 = -2 \text{ м}$.

При $t_1 = 0,5 \text{ с}$: $x_1 = 4 \cdot \sin(2\pi \cdot 0,5) = 4 \cdot \sin \pi = 0$;

$$y_1 = 2 - 4 \cdot \cos(2\pi \cdot 0,5) = 2 - 4 \cdot \cos \pi = 6 \text{ м}.$$

При $t_2 = 1,25 \text{ с}$: $x_2 = 4 \cdot \sin(2\pi \cdot 1,25) = 4 \cdot \sin(2,5 \cdot \pi) = -4 \text{ м}$;

$$y_2 = 2 - 4 \cdot \cos(2\pi \cdot 1,25) = 2 - 4 \cdot \cos(2,5 \cdot \pi) = 2 \text{ м}.$$

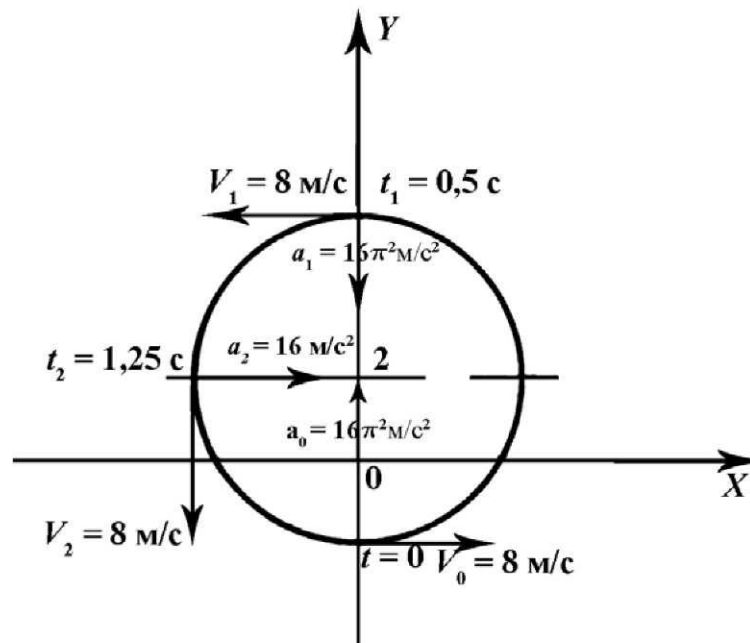


Рис. П.1

Определяем скорость точки. Ее проекции на оси координат и величина определяются выражением:

$$V_x = \frac{dx}{dt} \text{ и } V_y = \frac{dy}{dt}; V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}.$$

В данном случае:

$$V_x = 8\pi \cos(2\pi t); V_y = 8\pi \sin(2\pi t); V = 8\pi = \text{const},$$

т. е. движение точки по траектории – равномерное со скоростью $V = 8\pi \text{ м/с}$.

При $t_1 = 0,5$ м/с: $V_{x1} = 8\pi \cdot \cos(2\pi \cdot t_1) = 8\pi \cos \pi = -8\pi$ м/с;
 $V_{y1} = 8\pi \cdot \sin(2\pi \cdot t_1) = 8\pi \sin \pi = 0$.

При $t_2 = 1,25$ м/с: $V_{x2} = 8\pi \cdot \cos(2\pi \cdot t_2) = 8\pi \cos(2,5 \cdot \pi) = 0$ м/с;
 $V_{y2} = 8\pi \cdot \sin(2\pi \cdot t_2) = 8\pi \sin(2,5 \cdot \pi) = -8\pi$ м/с.

Выбрав масштаб для построения векторов скоростей, показываем на рисунке траектории скорость точки и ее проекции в моменты времени t_1 и t_2 .

Ускорение точки.

При координатном способе задания движения точки (в системе координат OXY) вычисляются проекции ускорения на координатные оси:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ и } a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

В данном случае:

$$a_x = -16\pi^2 \sin(2\pi t); a_y = 16\pi^2 \cos(2\pi t); a = 16\pi^2 = const.$$

При $t_1 = 0,5$ м/с: $a_{x1} = -16\pi^2 \sin \pi = 0$; $a_{y1} = 16\pi^2 \cos \pi = -16\pi^2$ (м/с²).

При $t_2 = 1,25$ м/с: $a_{x2} = -16\pi^2 \sin(2,5 \cdot \pi) = 16\pi^2$ (м/с²);
 $a_{y2} = 16\pi^2 \cdot \cos(2,5 \cdot \pi) = 0$.

При криволинейном движении точки ее ускорение раскладывается на касательную и нормальную составляющие. Их можно вычислить по формулам:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}; a_n = \frac{V^2}{\rho},$$

(ρ – радиус кривизны траектории).

В данном случае:

$$a_\tau = 0, \text{ т. к. } V = 8\pi = const; a_n = a = 16\pi^2 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение точки направлено к центру кривизны траектории, т. е. к точке $O_1(0, 2)$ в любом положении точки на этой кривой.

Дуговая координата и пройденный путь.

Если принять:

1. Начало отсчета дуговых координат S движущейся точки в том положении, где находилась точка в начальный момент времени $t_0 = 0$ (т. е. $S_0 = 0$).

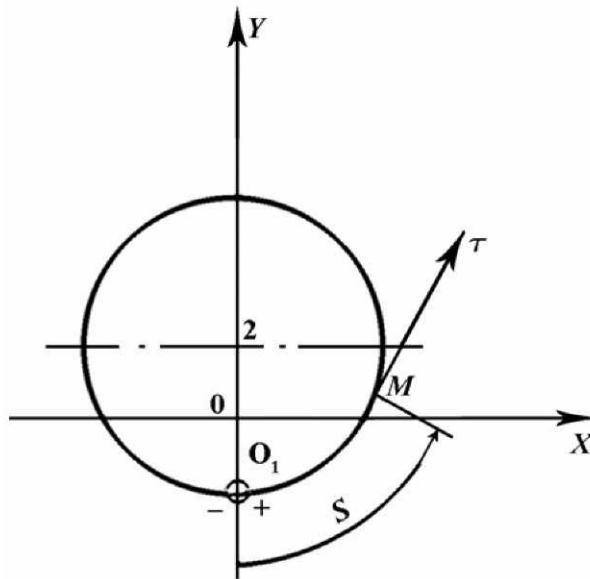


Рис. П.2

2. Направление отсчета положительных значений дуговых координат точки – по направлению ее движения.

3. Путь, пройденный точкой к начальному моменту времени $t_0 = 0$, равным нулю ($S_0 = 0$), то дуговая координата S точки в произвольный момент времени t и путь, пройденный ею к этому моменту, будут выражаться одним и тем же уравнением:

$$s = S = V \cdot t = 8\pi \cdot t \text{ (м)}.$$

Невыполнение любого из вышеперечисленных условий приведет к различным формулам для вычисления дуговой координаты (определяющей положение точки) и пройденного ею пути.

Пример 2

Движение точки M происходит согласно уравнениям (x, y – в м, t – с):

$$x = 2 \cos(2\pi t); \quad y = 2 - \sin^2(\pi t).$$

Определить траекторию точки; проанализировать движение точки по траектории и определить ее скорость и ускорение в моменты времени $t_0 = 0$ с и $t_1 = 1$ с.

Решение

1. Чтобы получить уравнения траектории, исключим время t из заданных уравнений движения:

$$\cos(2\pi t) = \frac{x}{2}; \quad \sin^2(\pi t) = 2 - y.$$

С другой стороны, имеем тригонометрическое тождество:

$$\cos(2\pi t) = 1 - 2\sin^2(\pi t).$$

Поэтому

$$\frac{x}{2} = 1 - 2(2 - y), \text{ или } x = 4y - 6. \quad (2)$$

Это выражение и является уравнением траектории точки.

Движение точки начинается в момент времени $t_0 = 0$. В этот момент

$$\begin{cases} x_0 = 2 \cos(2\pi t_0) = 2 \cos 0 = 2; \\ y_0 = 2 - \sin^2(\pi t_0) = 2 - \sin^2 0 = 2 \text{ м.} \end{cases}$$

В момент времени $t_1 = 1$ с:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \cos(2\pi t_1) = 2 \cos(2\pi) = 2 \text{ м;} \\ y_1 = 2 - \sin^2(\pi t_1) = 2 - \sin^2 \pi = 2 \text{ м.} \end{cases}$$

То есть положение точки в моменты времени $t_0 = 0$ с и $t_1 = 1$ с совпадают.

С увеличением t координаты точки изменяются периодически, с периодом $T = 1$ с и при всех изменениях t не могут выйти за пределы

$$-2 \text{ м} \leq x \leq 2 \text{ м}; 1 \text{ м} \leq y \leq 2 \text{ м}. \quad (3)$$

Поэтому траекторией точки является не вся прямая, описываемая уравнением (2), а лишь ее отрезок, заключенный в указанных пределах (3).

С учетом этого выполним рисунок траектории точки и покажем на нем ее положение в моменты времени $t_0 = 0$ и $t_1 = 1$ с (рис. П.3)

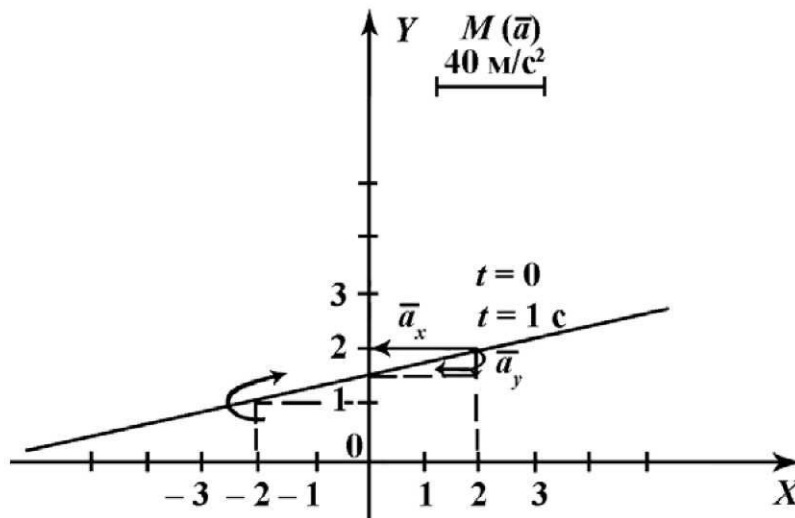


Рис. П.3

2. Определяем скорость точки. Ее проекции на оси координат определяются выражениями:

$$V_x = \frac{dx}{dt} \text{ и } V_y = \frac{dy}{dt}.$$

В нашем случае:

$$V_x = -4\pi \sin(2\pi t); V_y = -\pi \sin(2\pi t); V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \pi\sqrt{17} \sin(2\pi t).$$

При $t_0 = 0$: $V_{x0} = V_{y0} = 0$, т. е. движение начинается без начальной скорости.

$$\text{При } t_1 = 1 \text{ с: } V_{x1} = 0; V_{y1} = 0.$$

Как отмечалось выше, координаты точки периодически меняются, т. е. точка совершает колебательное движение по указанному отрезку прямой. Периодически (через 1 с) происходят остановки точки, в эти моменты происходит изменение направления движения на обратное. Моменты времени $t_0 = 0$ и $t_1 = 1$ с как раз и относятся к ним.

3. Определяем ускорение точки.

При координатном способе задания движения точки вычисляются проекцией вектора ускорения на координатные оси:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -8\pi^2 \cdot \cos(2\pi t); a_y = \frac{dV_y}{dt} = -2\pi^2 \cdot \cos(2\pi t). \quad (5)$$

Полное ускорение

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2\pi^2 \cdot \cos(2\pi t) \cdot \sqrt{17} \approx 81,3 \cdot \cos(2\pi t). \quad (6)$$

При $t_1 = 1$ с:

$$a_{x1} = -8\pi^2 \approx -78,9(\text{м/с}^2); a_{y1} = -2\pi^2 \approx -19,7(\text{м/с}^2); a_1 \approx 81,3(\text{м/с}^2).$$

4. Касательные ускорение точки.

$$\text{Так как } V = \pi\sqrt{17} \sin 2\pi t, \text{ то } a_\tau = \frac{dV}{dt} = 2\pi^2 \sqrt{17} \cos 2\pi t.$$

$$\text{При } t_1 = 1 \text{ с: } a_{\tau 1} = a_1 = 81,3(\text{м/с}^2).$$

Данное выражение полностью совпадает с выражением (6), описывающим полное ускорение точки, что вполне естественно, т. к. движение точки происходит по прямой траектории (радиус кривизны прямой $\rho = \infty$ и, следовательно,

нормальное ускорение $a_n = \frac{V^2}{\rho} = 0$ независимо от величины V).

В моменты времени, бесконечно близкие к t_1 , но предшествующие ему, движение точки замедленное, а в моменты времени, бесконечно близкие к t_1 , но после него – движение точки ускоренное.

4. Дуговая координата и путь, пройденный точкой.

Если принять:

1) начало отсчета дуговых координат S движущейся точки в том положении, где находилась точка в начальный момент времени $t_0 = 0$, т. е. в точке с координатами (2; 2) на правом конце траектории (рис. П.4), то $S_0 = 0$, при $t_0 = 0$;

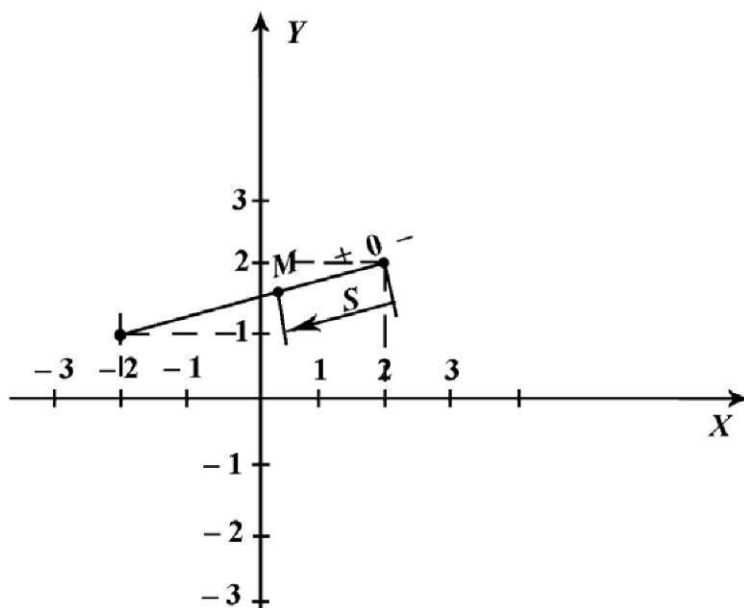


Рис. П.4

2) направление отсчета положительных значений дуговых координат – к левому концу траектории (это – вполне естественно);

3) путь, пройденный точкой к начальному моменту времени $t_0 = 0$, равным нулю ($S_0 = 0$), то дуговая координата точки в произвольный момент времени будет вычисляться по формуле:

$$S = \int V \cdot dt,$$

где V – скорость точки, изменяющаяся по закону (4'). Получаем:

$$S = \int V \cdot dt = \int \sqrt{17} \cdot \pi \cdot \sin(2\pi t) = -\frac{\sqrt{17}}{2} \cdot \cos(2\pi t) + C.$$

В соответствии с принятыми оговорками (при $t_0 = 0$, $S_0 = 0$):

$$C = \frac{\sqrt{17}}{2} (\text{м}).$$

Следовательно,

$$S = 0,5\sqrt{17} \cdot (7 + \cos 2\pi t).$$

Это – закон движения точки по траектории. Пользоваться им можно только при выполнении условий, принятых выше (начало, направление отсчета S).

Чтобы получить формулу для вычисления пути найдем моменты времени, когда происходят остановки точки. Из(4') получаем:

$$0 = \pi\sqrt{17} \cdot \sin(2\pi t).$$

Отсюда моменты остановок: $t_{1ост} = 1,5$ с; $t_{2ост} = 1$ с; $t_{3ост} = 1,5$ с и т. д.

С учетом принятой оговорки ($S_0 = 0$ при $t_0 = 0$) получаем: путь, пройденный точкой к произвольному моменту времени t : (пусть $1,5$ с $< t < 2$ с).

Пример 3

Движение точки задано уравнениями (x, y – в см, t – в сек.):

$$x = 4 \cos(\pi t) - 2; \quad y = 2 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \quad (1)$$

Найти траекторию точки, выполнить ее рисунок и показать направление движения точки по траектории в различные моменты времени.

Для момента времени $t_1 = 1,5$ с:

Вычислить положение точки и радиус кривизны траектории в этом месте, скорость и ускорение, касательное нормальное ускорение точки.

Полученные результаты показать на рисунке траектории. Сделать вывод о характере движения точки в момент t_1 .

Решение

Для получения уравнения траектории исключим время из заданных уравнений движения, воспользовавшись тождеством:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\text{имеем: } \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) = \frac{y}{2}; \quad x = 4 \cdot \cos(\pi t) - 2 = 4 \left[1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right] - 2 = 2(1 - y^2).$$

Итак, уравнение траектории

$$x = 2(1 - y^2). \quad (2)$$

Это – уравнение параболы с горизонтальной осью симметрии, совпадающей с осью OX . Но траекторией является только часть этой параболы, ограниченной координатами

$$\begin{cases} -6 \leq x \leq 2, \\ -2 \leq y \leq 2. \end{cases} \quad (3)$$

Выполняем рисунок траектории (рис. П.5).

Определим и покажем на нем положения точки в моменты времени $t_0 = 0$ и $t_1 = 1,5$ с:

$$x_0 = 2 \text{ см}; y_0 = 0; x_1 = -2 \text{ см}; y_1 = 1,41 \text{ см}.$$

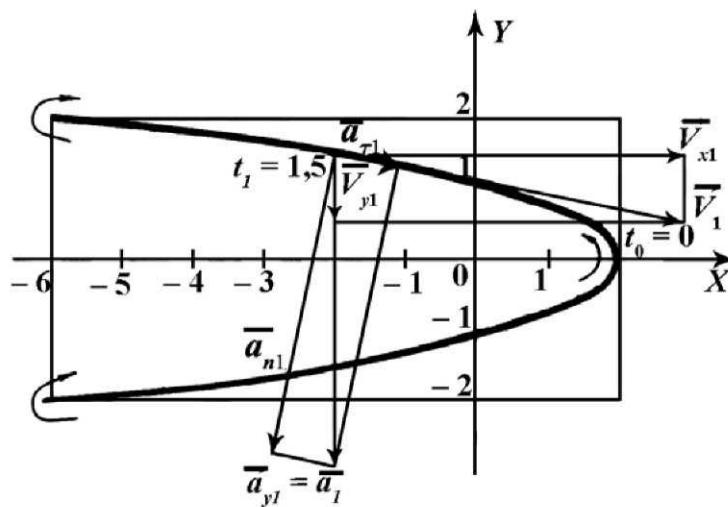


Рис. П.5

Подставляя в исходные уравнения движения точки моменты времени 0, 1/6, 2/6, и т. д. до 2 с интервалом в 1/6 с вычисляем последовательные положения точки на траектории и приходим к выводу, что точка совершает колебания вдоль выделенной части параболы и ни при каких t не выходит за пределы ограничений (3).

Определяем скорость и ускорение точки.

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt} = -4\pi \cdot \sin(\pi t); & a_x &= \frac{dV_x}{dt} = -4\pi^2 \cos(\pi t); \\ V_y &= \frac{dy}{dt} = \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right); & a_y &= \frac{dV_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{2} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right). \end{aligned}$$

$$\text{При } t_1 = 1,5 \text{ с: } V_{x1} = 12,56 \text{ см/с}; V_{y1} = -2,22 \text{ см/с}; V_1 = \sqrt{V_{x1}^2 + V_{y1}^2} = 12,76 \text{ см/с}.$$

$$\text{При } t_1 = 1,5 \text{ с: } a_{x1} = 0; a_{y1} = -3,49 \text{ см/с}^2; a_1 = \sqrt{a_{x1}^2 + a_{y1}^2} = 3,49 \text{ см/с}^2.$$

Касательное и нормальное ускорение точки при $t_1 = 1,5$ с:

$$a_{\tau 1} = \frac{V_{x1}a_{x1} + V_{y1}a_{y1}}{V_1} = 0,607 \text{ см/с}^2; \quad a_{n1} = \sqrt{a_1^2 - a_{\tau}^2} = \sqrt{3,49^2 - 0,607^2} = 3,44 \text{ см/с}^2.$$

Полученные результаты показываем на рисунке траектории точки.

Радиус кривизны траектории в точке (x_1, y_1) :

$$\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_{n1}} = \frac{12,76^2}{3,44} = 47,2 \text{ см.}$$

Движение точки в момент времени $t_1 = 1,5$ с – ускоренное, так как направления вектора скорости и вектора касательного ускорения совпадают (рис. П.5).

Пример 4

Движение точки M происходит по траектории, показанной на рис. П.6, а согласно заданному графику изменения скорости (рис. П.6, б). Движение точки начинается в момент времени $t_0 = 0$ из положения M_0 ($OM_0 = 25$ м).

Определить последовательные положения точки на траектории в выделенные на рис. П.6, б моменты времени, описать основные особенности движения точки и вычислить путь, пройденный точкой за промежуток времени $t_0 = 0$ до $t_5 = 12$ с.

Решение

Выполняем в масштабе чертеж траектории точки в соответствии с заданными размерами (рис. П.6, а). Определяем и показываем на чертеже положения точки на траектории в моменты времени t_0, \dots, t_5 .

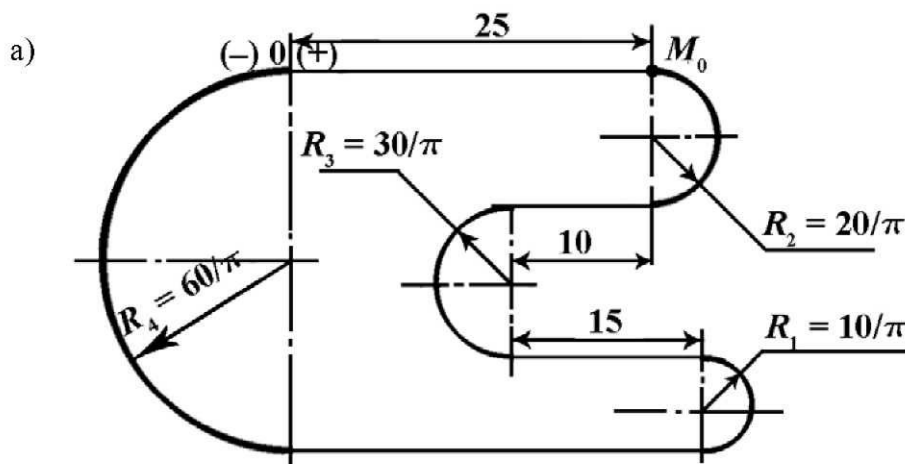


Рис. П.6, а

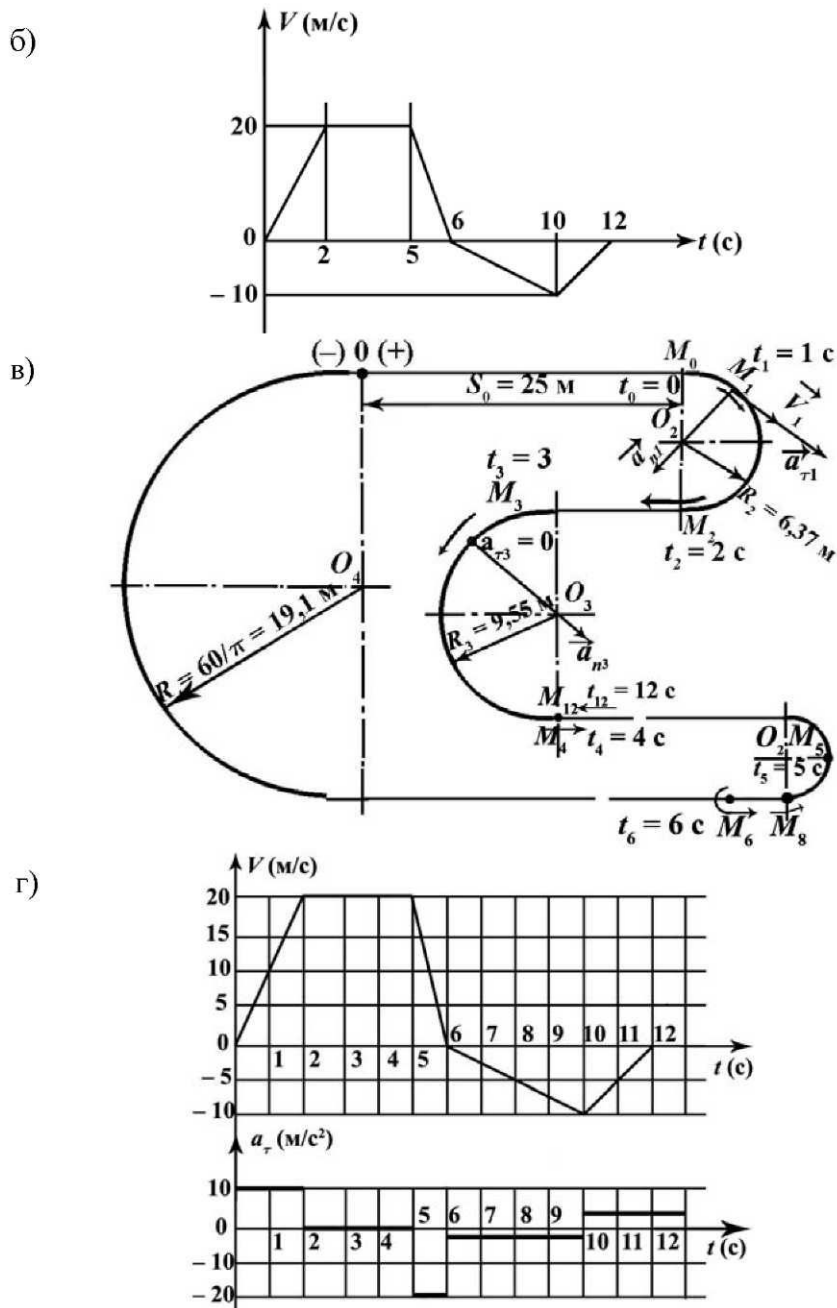


Рис. П.6 (б, в, г)

1. Дуговая координата и путь. Направление движения

Скорость V точки и закон ее движения по траектории, т. е. закон $S = f(t)$ изменения ее дуговых координат с течением времени, связаны зависимостями

$$V = \frac{ds}{dt} \text{ и } S = S_0 + \int_{t_0}^t V \cdot dt,$$

где S_0 – значение дуговой координаты точки в начальный момент времени, $S_0 = OM_0 = 25$ м.

Определенный интеграл $\int_{t_0}^t V \cdot dt$ можно вычислить (в соответствии с его геометрическим смыслом) с помощью графика изменения скорости.

Имеем (за промежуток времени от 0 до 2 с, рис П.6, б):

$$\int_0^2 V \cdot dt = \frac{1}{2}(t_1 - t_2) \cdot 20 = 20 \text{ м,}$$

а за промежуток времени от 6 до 12 с:

$$\int_6^{12} V \cdot dt = \frac{1}{2}(12 - 6) \cdot (-10) = -30 \text{ м и т. д.}$$

С учетом этого находим значение дуговых координат в интересующие моменты времени. Результаты вычислений заносим в таблицу, а на рисунке траектории указываем положение точки в эти моменты (точка M_0, M_1, M_2 и т. д.)

В отличие от дуговой координаты точки путь, пройденный ею за любой промежуток времени, не может быть отрицательным и складывается из модулей приращений дуговых координат за эти промежутки:

$$s = s_0 + |\Delta S_1| + \dots + |\Delta S_n|.$$

Результаты и этих вычислений заносим в таблицу.

Дуговая координата точки и пройденный путь

Моменты времени t , с	0	2	5	6	10	12
Дуговая координата точки в момент времени t , м	25	45	105	115	95	85
Путь, пройденный точкой к моменту t , м	0	20	80	90	110	120

Из таблицы и рисунка, на котором указаны последовательные положения точки на траектории в различные моменты времени, следует:

1) точка двигалась в положительном направлении из положения M_0 в положение M_3 , пройдя путь 90 м;

2) в момент времени 6 с произошла мгновенная остановка точки и она начала двигаться в обратном направлении: дуговая координата начала уменьшаться, а пройденный путь, естественно, продолжал увеличиваться;

3) в момент времени 12 с точка попала в положение M_5 на расстоянии 85 м от точки O , отсчитываемом вдоль траектории. Здесь произошла ее остановка.

За весь промежуток времени от t_0 с до $t_5 = 12$ с точка прошла путь 120 м.

2. Касательное ускорение. Характер движения точки

Из графика движения точки видно, что величина скорости точки изменяется. Изменение величины скорости описывается ее касательным ускорением

$$a_{\tau} = \frac{dV}{dt}.$$

Поскольку график изменения скорости состоит из прямолинейных кусочков, то a_{τ} можно определить на каждом интервале плавного изменения скорости по формуле:

$$a_{\tau} = \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

Так, на промежутке времени от $t_0 = 0$ с до $t_1 = 2$ с имеем:

$$\Delta V = V(t_1) - V(t_0) = 20 - 0 = 20 \text{ м/с}; \Delta t = t_1 - t_0 = 2 \text{ с}.$$

Поэтому здесь $a_{\tau} = \frac{20}{2} = 10 \text{ м/с}^2$.

На промежутке времени от $t_1 = 2$ с до $t_2 = 5$ с: $\Delta V = 0$ и, следовательно, $a_{\tau} = 0$. А на промежутке от $t_2 = 5$ с до $t_3 = 6$ с:

$$\Delta V = V(t_3) - V(t_2) = 0 - 20 = -20 \text{ м/с и } \Delta t = 1 \text{ с}.$$

Тогда $a_{\tau} = -20 \text{ м/с}^2$ и т. д.

Полностью график изменения касательного ускорения точки показан на рис. 6, г. После анализа вышеуказанного рисунка, а также исходного графика изменения скорости, можно сделать следующие выводы:

1) в промежуток времени от $t_0 = 0$ с до $t_1 = 2$ с точка движется ускоренно (знаки V и a_{τ} – одинаковые). Причем $V > 0$ и, следовательно, движение происходит в положительном направлении (в сторону возрастания дуговой координаты). Наконец, т. к. $a_{\tau} = \text{const}$, то движение точки равноускоренное;

2) на промежутке времени от $t_1 = 2$ с до $t_2 = 5$ с $V = \text{const}$ (равномерное движение). Так как $V > 0$, то движение точки происходит в положительном направлении;

3) от $t_2 = 5$ с до $t_3 = 6$ с точка движется равнозамедленно, но все еще в положительном направлении;

4) на промежутке времени от $t_3 = 6$ с до $t_4 = 10$ с точка движется равноускоренно назад ($V < 0$ и $a_{\tau} < 0$; $a_{\tau} = \text{const}$).

5) на последнем промежутке времени от $t_4 = 10$ с до $t_5 = 12$ с точка движется равномерно, в отрицательном направлении ($V < 0$ и $a_\tau > 0$; $a_\tau = \text{const}$)

3. Нормальное и полное ускорение точки

В различные моменты времени точка движется по прямо- и криволинейным участкам траектории. На прямолинейных участках полное ускорение точки равно ее касательному ускорению, а на криволинейных точка имеет еще и нормальное ускорение. Его величина определяется по формуле:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho},$$

где V – скорость точки в интересующий момент времени (находится по рис. 6, б или 6, г);

ρ – радиус кривизны траектории в том месте, где находится в этот момент движущаяся точка (см. п. 1 и таблицу изменение дуговых координат и пройденные пути).

Например, при $t_1 = 1$ с: точка проходит положение M_1 на криволинейном участке траектории радиусом $\rho = R_2 = 20/\pi = 6,37$ м со скоростью $V_1 = 5$ м/с. Поэтому

$$a_{n1} = \frac{V_1^2}{\rho_1} = \frac{5^2}{6,37} = 4 \text{ м/с}^2.$$

Это ускорение направлено к центру кривизны данного участка траектории, т. е. к точке O_2 (рис. 6, в).

Полное ускорение точки в этот момент равно:

$$a_1 = \sqrt{a_{\tau 1}^2 + a_{n1}^2} = \sqrt{10^2 + 4^2} = 10,88 \text{ м/с}^2.$$

Непосредственно перед моментом времени $t_2 = 2$ с точка еще находится на том же криволинейном участке траектории и поэтому в этот момент она имеет касательное ускорение (рис. 6, в), равное 10 м/с^2 и нормальное ускорение $a_n = 20^2/6,37 = 62,8 \text{ м/с}^2$. А полное ускорение

$$a_2 = \sqrt{10^2 + 62,8} = 63,6 \text{ м/с}^2.$$

Сразу после момента времени $t_2 = 2$ с исчезает и касательное, и нормальное ускорение точки.

Подобный анализ можно провести и для других моментов времени.

Методические указания к решению задач К-3 и К-4

Данные задачи – на исследование и преобразование простейших движений твердого тела (поступательных и вращательных вокруг неподвижных осей). Для их решения необходимо знание следующих вопросов:

- угловая скорость тела и его изображение на рисунках в виде вектора;
- линейные скорости точек тела, движущегося поступательно, и тела, вращающегося вокруг неподвижной оси; их свойства, картины распределения;
- механические передачи: назначение; классификация – простые, сложные; виды – ременные, зубчатые, цепные и т. п.; физические и кинематические условия нормальной работы любой механической передачи;
- понятие о передаточном отношении и его вычислении в случае простых и сложных передач.

Приступая к решению задач необходимо проанализировать какие простые передачи входят в состав заданной сложной, установить как они связаны между собой – последовательно или параллельно (т. е. как происходит передача движений: то ли от одного вала к другому, от него к третьему и т. д., или от одного вала – сразу и ко второму, и к третьему); выделить точки, через которые осуществляется передача движений от одного тела к другому. Лишь после такого последовательного анализа можно приступать к формальным вычислениям, чтобы последовательно ответить на поставленные вопросы.

В задаче К-3 предварительно, независимо от исходных данных таблицы, необходимо по схеме установить картину движения механизма в положительном направлении, т. е. в каком направлении должны вращаться колеса, шкивы, звездочки вокруг своих неподвижных осей, в каком направлении (влево, вправо, вверх, вниз) при этом должна двигаться зубчатая рейка или груз, и показать эти направления на рисунке кинематической схемы. Исходным условием является заданное на рисунке кинематической схемы направление движения точки M в положительную сторону.

Если при последующих вычислениях окажется, что угловая скорость указанного тела или линейная скорость заданной точки окажутся отрицательными, то это будет означать, что движение всего механизма происходит в обратном направлении. Чтобы в дальнейших вычислениях не иметь дело с отрицательными числами, следует тотчас приступать к выполнению рисунка с истинной картиной его движения, а во всех последующих вычислениях игнорировать отрицательные знаки угловых и линейных скоростей и ускорений.

Пример 5

Вычислить модули и указать направление кинематических параметров, характеризующих движение тел и точек системы в момент времени $t_1 = 2$ с, если дано уравнение вращения тела 2.

$$\varphi_2 = 40 e^{-t} - t^2 \text{ (рад).}$$

При вычислениях принять:

- количество зубьев колес зубчатой передачи $z_2 = 20, z_3 = 40$;
- диаметры шкивов ременной передачи $d_3 = 20$ см, $D_4 = 60$ см;
- диаметр барабана $d_4 = 20$ см;
- удаление точки K от оси вращения тела 4 $h_k = 20$ см.

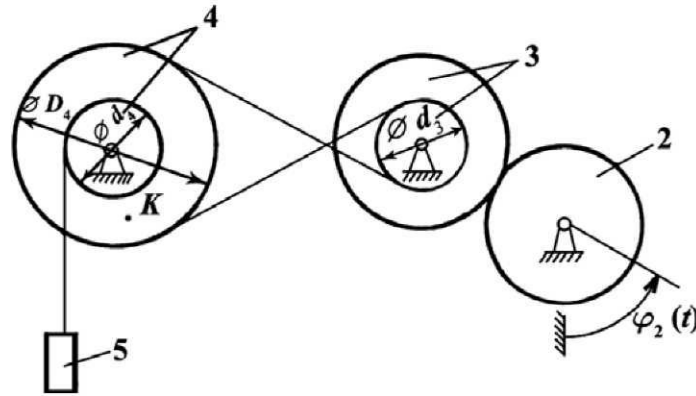


Рис. П.7

Решение

Выполняем черновой рисунок (здесь он не приводится), показывающий картину движения механизма. Картину движения механизма в положительном направлении т. е. колесо 2 вращается против хода часовой стрелки (в сторону увеличения угла φ_2 , показанного на одном рисунке). И последовательно переходит от тела 2 к телу 3, а от него к телу 4 получаем, что колесо 4 вращается тоже против хода часовой стрелки и груз 5 опускается вниз. Это – картина движения механизма в положительном направлении.

По заданному уравнению вращения тела 2 находим его дуговую координату $\varphi_2(t_1)$, угловую скорость $\omega_2(t_1)$ и угловое ускорение $\varepsilon_2(t_1)$ в момент времени t_1 :

$$\omega_2(t_1) = \frac{d\varphi_2}{dt} = \dot{\varphi}_2(t) = -40 e^{-t} - 2t \text{ рад/с;}$$

$$\varepsilon_2(t) = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = \ddot{\varphi}_2(t) = +40 e^{-t} - 2 \text{ рад/с}^2.$$

При $t_1 = 2$ с: $\varphi_2(t_1) = 1,41$ рад; $\omega_2(t_1) = -9,41$ рад/с; $\varepsilon_2(t_1) = 3,41$ рад/с².

Выполняем новый рисунок (рис. 8) схемы механической передачи, показав на нем истинные направления $\omega_2 = 9,41$ рад/с (по часовой стрелки), $\varepsilon_2 = 3,41$ рад/с² (против часовой стрелки) и координату $\varphi_2 = 1,41$ рад.

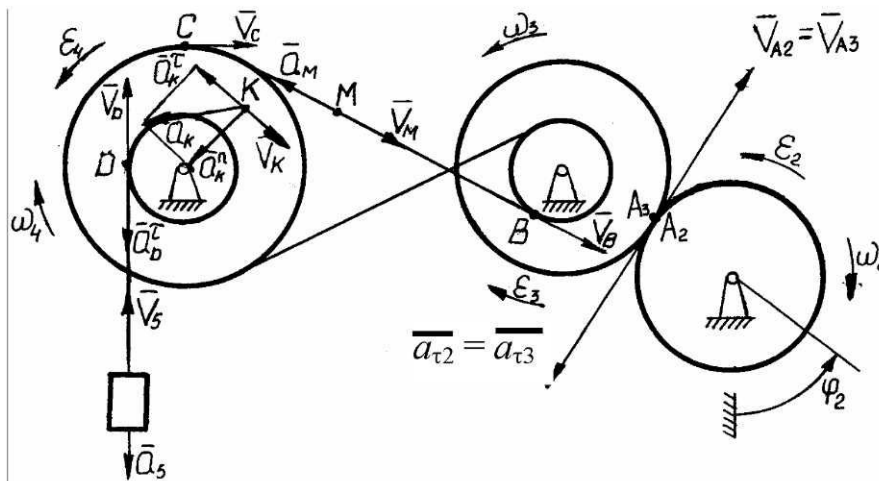


Рис. П.8

Для нормальной работы механических передач необходимо, чтобы не происходило проскальзывание тел, входящих в контакт друг с другом, а продольные деформации ремня (цепи) были пренебрежимо малы. Эти требования приводят к кинематическим условиям: линейные скорости точек тел, через которые осуществляется их контакт, должны быть равны по величине и одинаковы по направлению, и, кроме этого, все точки ремня (цепи) должны иметь одинаковые по величине линейные скорости.

С учетом этих условий определяем угловые скорости тел системы в момент времени $t_1 = 2$ с, выражая линейные скорости точек контакта через геометрические параметры и угловые скорости соответствующих тел.

$$V_{A3} = V_{A2}, \text{ т. е. } \omega_3 R_3 = \omega_2 R_2 .$$

Следовательно,

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{R_2}{R_3} = \omega_2 \frac{z_2}{z_3} .$$

Здесь отношение радиусов заменено отношением чисел зубьев, количество которых на каждом колесе пропорционально его радиусу (диаметру).

Из равенства линейных скоростей точек A_2 и A_3 ($A_2 \in 2$, $A_3 \in 3$) следует равенство касательных ускорений этих точек, поскольку $a^t = dV/dt$. А т. к. $\varepsilon = d\omega/dt$, то

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 \frac{z_2}{z_3} = 1,71 \text{ рад/с}^2 .$$

Аналогично находим $V_B = V_M = V_C$, т. е. $\omega_3 r_3 = \omega_4 R_4$. Откуда

$$\omega_4 = \omega_3 \frac{r_3}{R_4} = \omega_3 \frac{d_3}{D_4} = 1,57 \text{ рад/с}; \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_3 \frac{d_3}{D_4} = 0,57 \text{ рад/с}^2.$$

Истинные направления ω_4 и ε_4 , вектора V_B, V_M, V_C показываем на рисунке (рис. П.8).

Далее, $V_5 = V_D, a_5 = a_D'$. Следовательно,

$$V_5 = \omega_4 \frac{d_4}{2} = 15,7 \text{ см/с}; \quad a_5 = \varepsilon_4 \frac{d_4}{2} = 5,7 \text{ см/с}^2.$$

Определяем скорость и ускорение точки K в момент времени $t_1 = 2$ с: $V_K = \omega_4 h_K = 31,4 \text{ см/с}$; $\bar{a}_K = \bar{a}_K^\tau + \bar{a}_K^n$, где $a_K^n = \omega_4^2 h_K = 49,3 \text{ см/с}^2$, направлено к оси вращения тела 4.

$$a_K^\tau = \varepsilon_4 h_K = 11,4 \text{ см/с}^2; \quad a_K = \sqrt{(a_K^\tau)^2 + (a_K^n)^2} = 50,6 \text{ см/с}^2.$$

Показываем на рисунке направления скорости и ускорений точки K .

Так как вращение колеса 2 в данный момент времени происходит замедленно ($\omega_2(t_1)$ и $\varepsilon_2(t_1)$ имеют разные знаки и направления), то весь механизм движется замедленно. Линейные скорости и касательные ускорения всех точек механизма направлены противоположно друг другу.

Пример 6

Дано: $z_1 = 25$; $z_2 = 40$; $z_2' = 20$; $z_3 = 50$; $z_3' = 40$; $z_4 = 180$. Скорость набегания троса на барабан $V = K \cdot V_{zp} = 0,5 \text{ м/с}$.

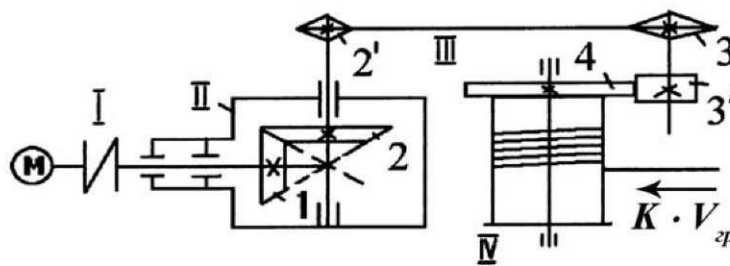


Рис. П.9

Решение

1. Определяем передаточное отношение привода. Так как его элементы соединены последовательно, то

$$U_{\text{прив}} = \frac{\omega_{\text{дв}}}{\omega_4} = U_{12} \cdot U_{23} \cdot U_{34},$$

где $\omega_{\text{дв}}$ ω_4 – угловые скорости двигателя и барабана;

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{40}{25} = 1,6,$$

U_{12} – передаточное отношение конической зубчатой передачи;

$$U_{23} = \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{z_3}{z'_2} = \frac{50}{20} = 2,5,$$

U_{23} – передаточное отношение цепной передачи;

$$U_{34} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{z_4}{z'_3} = \frac{180}{40} = 4,5,$$

U_{34} – передаточное отношение открытой зубчатой передачи 3' – 4.

Следовательно, $U_{\text{пр}} = 1,6 \cdot 2,5 \cdot 4,5 = 18,0$.

2. Произведем подбор диаметра барабана $D_{\text{б}}$ и частоты вращения вала двигателя $n_{\text{дв}}$.

Трос набегает на барабан со скоростью V . Учитывая, что при отсутствии проскальзывания троса относительно барабана эта скорость равна

$$V = \omega_4 \cdot \frac{D_{\text{б}}}{2},$$

а также что $\omega_{\text{б}} = \omega_{\text{дв}}/U_{\text{пр}}$, получаем, что требуемая скорость будет обеспечена, если

$$n_{\text{дв}} \cdot D_{\text{б}} = \frac{60 \cdot U_{\text{пр}} \cdot V}{\pi}$$

В рассматриваемом примере:

$$n_{\text{дв}} \cdot D_{\text{б}} = \frac{60 \cdot 18 \cdot 0,5}{\pi} = 429,7 \text{ (м} \cdot \text{об/мин)}.$$

($n_{\text{дв}}$ – в об/мин, $D_{\text{б}}$ – в м).

Дальнейшие расчеты удобно свести в таблицу.

№ п/п	n , об/мин	Диаметр барабана D , мм		Расхождение V , %
		Требуемый	Принимаемый	
1	2850	150,78	150	0,517
2	1425	301,56	300	0,517
3	950	452,33	500	10,6
4	720	596,59	600	0,517
5	580	740,89	800	7,98

Из таблицы видно, что варианты 1, 2 и 4 обеспечивают наибольшую точность. Но от варианта с $n_{дв} = 2850$ об/мин и $D_6 = 150$ мм следует отказаться: при маленьком диаметре потребуется слишком большая длина барабана, чтобы обеспечить необходимый объем для приема троса. А многослойная навивка троса неизбежно приведет к увеличению скорости набегания троса на барабан и, в конечном счете, – к перегрузке привода. Слишком большой диаметр барабана и низкоскоростной привод (вариант 4) приведут к неоправданному увеличению нагрузок.

Принимаем $n_{дв} = 1425$ об/мин и $D_6 = 300$ мм

3. Определяем угловые скорости валов привода:

$$\omega_{дв} = \frac{\pi \cdot n_{дв}}{30} = \frac{\pi \cdot 1425}{30} = 149,2 \text{ рад/с}; \quad \omega_1 = \omega_{дв}$$

(муфта не изменяет скорость вращения соединяемых валов).

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{U_{12}} = \frac{149,2}{1,6} = 93,3 \text{ рад/с}; \quad \omega_3 = \frac{\omega_2}{U_{23}} = \frac{93,3}{2,5} = 37,3 \text{ рад/с};$$

$$\omega_4 = \frac{\omega_3}{U_{34}} = \frac{37,3}{4,5} = 8,3 \text{ рад/с}.$$

Это – угловая скорость барабана. Скорость навивки троса:

$$V = \omega_4 \cdot \frac{D_6}{2} = 8,3 \cdot \frac{0,3}{2} = 1,24 \text{ м/с}.$$

4. Направление угловых скоростей показываем на рисунке в виде векторов (рис. П.10).

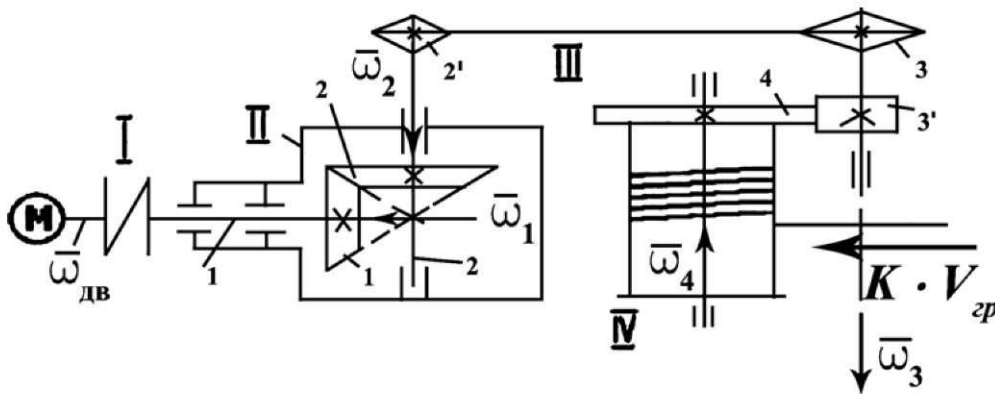


Рис. П.10

Методические указания к решению задач К-5 и К-6

Задачи К-5 и К-6 относятся к теме «Кинематика плоскопараллельного движения твердого тела». Для их решения необходимо изучить вопросы:

- мгновенный центр скоростей тела (МЦС);

- способы нахождения положения МЦС тела в зависимости от имеющейся информации о движении тела и его точек;
- способы определения скоростей точек тела и его угловой скорости с использованием МЦС.

Особое внимание следует обратить на зависимость скоростей точек тела от взаимного положения этих точек и МЦС тела. Для упрощения вычислений может оказаться полезным известное свойство пропорций.

$$\text{Если } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = n, \text{ то } \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} = n.$$

Кратность полиспаста может быть вычислена кинематическим способом, как отношение скорости свободного конца троса к скорости подъема груза. При этом считается (дополнительно к условию задачи), что трос не проскальзывает относительно блоков и является идеально гибким и нерастяжим. С учетом этих оговорок надо последовательно рассмотреть движение каждого блока в отдельности.

Для решения задачи К-6 необходимо выполнить в масштабе две проекции механизма – заданную схему и вид вдоль геометрической оси центральных колес. На этом втором виде следует показать (в масштабе) векторы скоростей характерных точек (оси сателлита, точек зацепления колес) и угловые скорости всех тел.

Пример 7

Дано: скорость подъема груза $V_{гр} = 0,5$ м/с, радиусы всех блоков одинаковы и равны 5 см.

Произвести кинематический расчёт полиспаста.

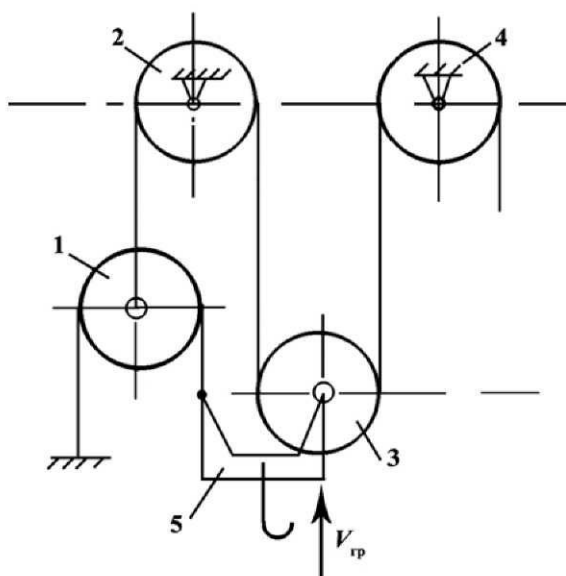


Рис. II.11

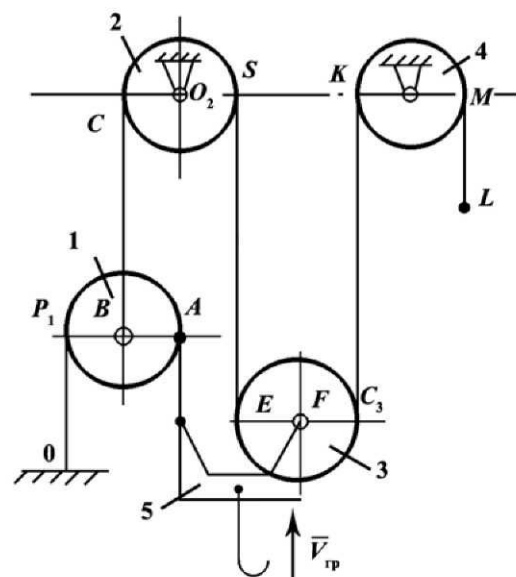


Рис. II.12

Решение

В данной системе блоки 2 и 4 вращаются вокруг неподвижных осей. По принятой терминологии они называются неподвижными. Блоки 1 и 3 – подвижные. Подвижная траверса 5 движется поступательно со скоростью $V_{\text{тр}}$. Рассмотрим последовательно движение каждого блока (рис. П.13). Блок 1 (рис. П.14, а) совершает плоскопараллельное движение.

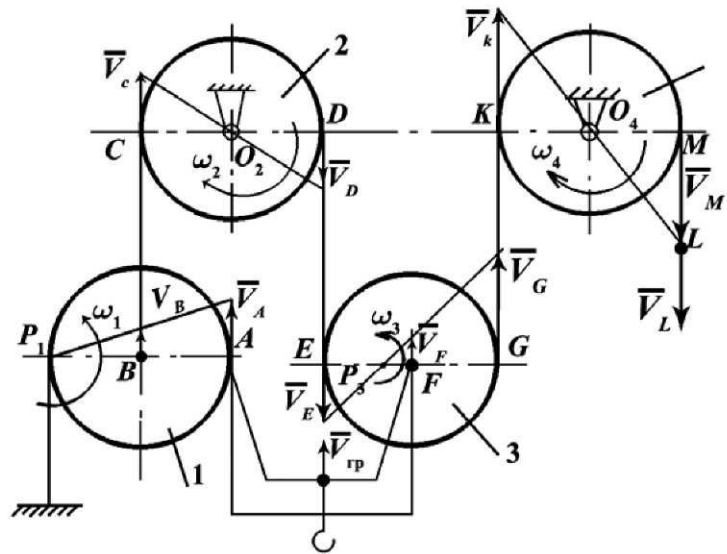


Рис. П.13

Точка P_1 является его МЦС. Точка A имеет скорость $V_A = V_{\text{тр}} = 0,5$ м/с. Угловая скорость блока 1:

$$\omega_1 = \frac{V_A}{AP_1} = \frac{V_B}{BP_1}.$$

Отсюда:

$$\omega_1 = 5 \text{ рад/с}; V_B = 0,25 \text{ м/с}.$$

С такой скоростью движутся все точки участка BC троса (рис. П.13).

Блок 2 (рис. П.14, б) вращается вокруг неподвижной оси O_2 с угловой скоростью

$$\omega_2 = \frac{V_C}{R_2} = 5 \text{ рад/с}.$$

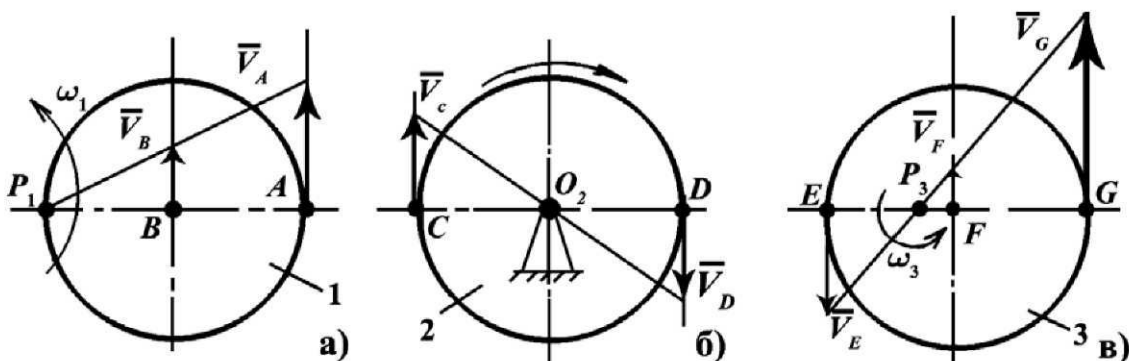


Рис. П.14

Скорость точки D (рис. П.13 и рис. П.14, б): $V_D = V_C = 0,25$ м/с.
 Эта скорость передается точке E блока 3 (рис. П.13 и П.14, в).
 Блок 3 совершает плоскопараллельное движение и при этом

$$V_E = V_D = 0,25 \text{ м/с}; V_F = V_{1p} = 0,5 \text{ м/с}.$$

Построением находим МЦС блока 3 – точку P_3 . Определяем направление угловой скорости ω_3 и затем вычисляем ее величину и расстояние P_3F , уточняющее положение МЦС блока 3:

$$\omega_3 = \frac{V_E}{EP_3} = \frac{V_F}{FP_3} = \frac{V_E + V_F}{EF} = \frac{0,25 + 0,5}{2 \cdot 0,5} = 15 \text{ рад/с}; FP_3 = \frac{V_F}{\omega_3} = \frac{0,5}{15} \text{ м}.$$

Тогда (рис. П.14, в):

$$GP_3 = FP_3 + R_3 = \frac{0,5}{15} + 0,5 = \frac{1,25}{15} \text{ м}.$$

и скорость точки G : $V_G = \omega_3 \cdot GP_3 = 1,25$ м/с.

Блок 4 (рис. П.13) вращается вокруг неподвижной оси O_4 . Его точке K передается скорость точки G : $V_K = V_G = 1,25$ м/с.

С такой же скоростью движется точка M блока и свободный конец троса: $V_M = V_L = 1,25$ м/с, а угловая скорость блока 4

$$\omega_4 = \frac{V_K}{R_4} = \frac{1,25}{0,5} = 25 \text{ рад/с}.$$

Кратность полиспаста

$$K = \frac{V_L}{V_{sp}} = \frac{1,25}{0,5} = 2,5.$$

Показываем на рисунке в картину движения системы, т. е. направления угловых скоростей блоков, положения МЦС «подвижных» блоков, скорости характерных точек – центров блоков, точек схода троса с блоков и набегания его на них.

Пример 8

Дано: $r_1 = 7$ см; $r_2 = 10$ см; $r'_2 = 15$ см; $\omega_1 = 20$ рад/с; $\omega_1 = -3$ рад/с.

Произвести кинематический расчет механизма (рис. П.15, а).

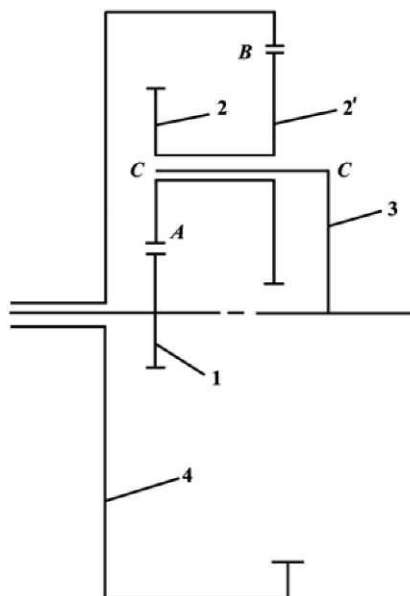


Рис. П.15, а

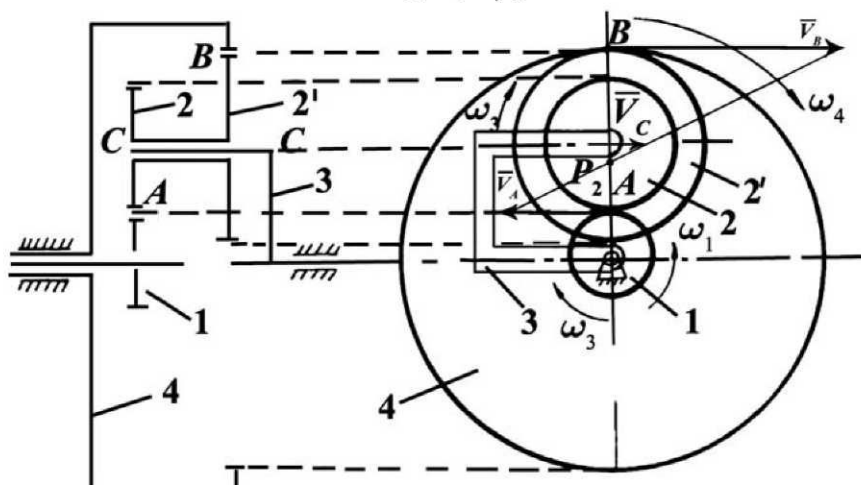


Рис. П.15, б

Определить угловые скорости всех звеньев механизма и показать их направления.

Решение

Данный механизм является дифференциальным, т. к. у него нет неподвижного центрального колеса. Выполняем в масштабе с учетом заданных линейных размеров два вида кинематической схемы механизма – исходную и вид вдоль оси вращения центральных колес (рис. П.15 а, б). На обоих видах отмечаем характерные точки, показываем в виде векторов и круговых стрелок направления заданных угловых скоростей тел ω_1 и ω_3 (центральное колесо 1 и водило 3 вращаются в разные стороны). В даль-

нейшем знаки угловых скоростей игнорируем и по мере вычисления величин показываем на дополнительном рисунке (вид вдоль осей вращения) истинные направления вращения колес и векторы скоростей точек.

Имеем: точка A_1 принадлежит центральному колесу 1, вращающемуся с угловой скоростью ω_1 вокруг неподвижной оси. Поэтому:

$$\omega_{A1} = \omega_1 r_1 = 20 \cdot 7 = 140 \text{ см/с.}$$

На рисунках точка A_1 совпадает с точкой A .

Точка C_3 (на оси сателлита) принадлежит водилу 3 вращающемуся вокруг неподвижной оси, совпадающей с осью центральных колес. Поэтому $V_{C3} = \omega_3 r_3$, где $r_3 = r_1 + r_2$ (рис. П.15, а).

Получаем: $r_3 = 17$ см; $V_{C3} = 3 \cdot 17 = 51$ см/с.

С точками A_1 и C_3 совпадают точки A_2 и C_2 сателлита (блока колес 2 – 2'). Их скорости векторно равны скоростям точек A_1 и C_3 соответственно:

$$V_{A2} = V_{A1}; V_{C2} = V_{C3}.$$

Зная величины и направления скоростей двух точек сателлита (блока колес 2 – 2'), можно найти положение МЦС этого тела (рис. П.16).

Угловая скорость блока 2 – 2':

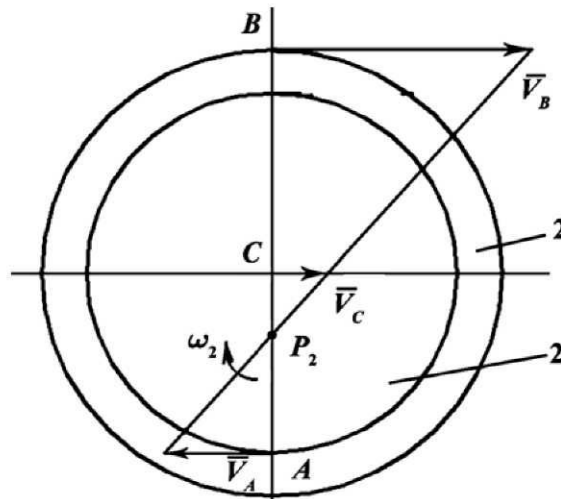


Рис. П.16

$$\omega_2 = \frac{V_c}{CP_2} = \frac{V_A}{AP_2} = \frac{V_C + V_A}{CP_2 + AP_2} = \frac{V_C + V_A}{r_2},$$

или

$$\omega_2 = \frac{51 + 140}{10} = 19,1 \text{ рад/с; } CP_2 = \frac{V_C}{\omega_2} = \frac{51}{19,1} = 2,67 \text{ м.}$$

Следовательно,

$$BP_2 = P_2C + CB = 2,67 + 15 = 17,67 \text{ см}; V_B = \omega_2 BP_2 = 19,1 \cdot 17,67 = 336 \text{ см/с}.$$

Точка B является точкой зацепления колес 2' и 4. Так как колеса не проскальзывают относительно друг друга, а колесо 4 вращается вокруг неподвижной оси, то $\omega_4 = \frac{V_B}{r_4} = \frac{336}{32} = 10,5 \text{ рад/с}$ (по часовой стрелке).

Радиус колеса 4 по рис. П.15, а: $r_4 = r_1 + r_2 + r_2' = 7 + 10 + 15 = 32 \text{ см}$.

Итак, кинематический расчет дифференциального механизма выполнен, угловая скорость и направления вращения всех звеньев механизма найдены. Результаты расчетов (картина движения) показаны на рис. П.15, б.

Методические указания к решению задач К-7, К-8, К-13

Эти задачи посвящены изучению кинематики плоских рычажных механизмов. Звенья таких механизмов совершают либо простейшие движения (поступательное, вращательное вокруг неподвижной оси), либо – плоскопараллельное. Считается, что механизм расположен в плоскости рисунка и все его звенья и точки движутся в этой же плоскости.

Приступая к решению задачи, необходимо уточнить, какое именно движение совершает каждое звено механизма. При выполнении такого анализа легко установить, что каждая подвижная точка механизма, выделенная на рисунке кинематической схемы, принадлежит одновременно двум звеньям и одно из них совершает плоскопараллельное движение. Через эти точки, общие для двух звеньев, передаётся движение от одного из них к другому.

Каждую из задач можно рассматривать, как состоящую из двух частей: 1 – определение скоростей и 2 – определение ускорений. В решении этих частей есть много общего, хотя они существенно различаются по сложности и применяемым способам. Общим здесь является то, что как при определении скоростей, так и при определении ускорений, приходится последовательно переходить от рассмотрения движения одного тела к изучению движения другого, а от него – к следующему и т. д. Такие переходы можно осуществить зная скорость (или соответственно ускорение) той точки, которая является общей для рассматриваемой пары тел. Эта последовательность решения задач вполне естественна, поскольку в самих механизмах передача движений от одного звена к другому осуществляется именно аналогичным путём.

Общим в решении задач по определению скоростей и ускорений является то, что скорости (ускорения) любых двух точек A и B одного и того

же тела не могут быть произвольными и связаны при его плоскопараллельном движении векторными зависимостями

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B,A} \quad (\text{а})$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B,A} \quad (\text{б})$$

эти выражения соответствуют представлению плоскопараллельного движения тела в виде суммы двух одновременно происходящих простейших движений: поступательного со скоростью \vec{V}_A (или ускорением \vec{a}_A) точки A , принимаемой за полюс, и вращательного движения тела вокруг этого полюса.

Обычно в качестве полюса принимается такая точка тела, скорость (или соответственно ускорение) которой уже известна из предыдущего решения.

Различия же в определении скоростей и ускорений происходят из-за того, что направления векторов ускорений в отличие от направлений векторов скоростей предсказать заранее практически невозможно. Если учесть, что при вращении тела вокруг полюса A ускорение $\vec{a}_{B,A}$ складывается из нормальной и касательной составляющих, а полное ускорение точки B , движущейся по криволинейной траектории, состоит из аналогичных частей, то исходная формула (б) принимает вид:

$$\vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau = \vec{a}_A + \vec{a}_{B,A}^n + \vec{a}_{B,A}^\tau, \quad (\text{в})$$

а формула для скорости остаётся неизменной:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B,A} \quad (\text{а})$$

Направление и (или) величина каждого из векторов, входящих в (а) или (в), могут быть заранее известны либо неизвестны. При большом количестве (более двух) таких неизвестных в одном векторном уравнении оно не может быть решено никакими приёмами.

Подобная ситуация чаще возникает при определении ускорений, но чтобы убедиться в возможности решить векторное уравнение для определения скоростей (или ускорений), необходимо производить предварительный анализ каждого уравнения. Такие анализы приведены в примерах решения задач.

Лишь после того, как будет выяснено, что записанное векторное уравнение может быть решено, приступают непосредственно к его решению.

Для определения ускорений с помощью формул типа (в) можно рекомендовать аналитический метод: метод проецирования решаемого векторного уравнения на произвольно принимаемые оси координат. Существуют и другие способы (например, графический способ – путём построения плана ускорений).

Решение векторных уравнений типа (а) с небольшим количеством векторов, входящих в него, можно осуществить и аналитически, и графически, и графоаналитическим способом.

Проецированием уравнения (а) на прямую AB получается выражение:

$$\text{Пр}_{AB} \vec{V}_B = \text{Пр}_{AB} \vec{V}_A, \quad (\text{г}),$$

называемое теоремой о проекциях скоростей двух точек твёрдого тела на прямую, соединяющую их, или основной теоремой кинематики твёрдого тела.

Оно выполняется при любом движении любого твёрдого тела (т. к. для такого тела всегда $\vec{V}_{B,A} \perp AB$).

Существует и наглядная интерпретация плоскопараллельного движения тела: в каждый момент времени это движение можно рассматривать как вращение тела вокруг МЦС (только с точки зрения распределения скоростей точек тела). Поэтому скорости точек тела могут быть успешно и с большой наглядностью определены с помощью МЦС.

Методические указания к решению задач К-9, К-10, К-11, К-12.

При решении задач на тему «Сложное движение точки» необходимо предварительно чётко установить, какое движение точки является относительным, абсолютным и переносным, как они происходят (в чём они заключаются), затем определить положение тела и точки на нём в заданный момент времени t_1 и выполнить соответствующий рисунок схемы.

При определении скоростей точки в любом из движений (в переносном, относительном, абсолютном) применяется теорема о сложении скоростей: $\vec{V}_{абс} = \vec{V}_{пер} + \vec{V}_{отн}$, а при определении ускорений – теорема Кориолиса о сложении ускорений: $\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{кор}$.

В случае поступательного переносного движения Кориолисово ускорение отсутствует и ускорение точки определяется по формуле:

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{отн}.$$

Рекомендуется решать подобные векторные уравнения аналитически, путём проецирования их на принятые оси координат. В тех случаях, когда слагаемые векторы расположены в одной плоскости (например, в плоскости рисунка) при их решении могут быть использованы другие способы (графические, графоаналитические). Следует иметь в виду, что векторные уравнения данного типа (когда векторы расположены в одной плоскости, например, в плоскости рисунка) могут быть решены только в том случае, если количество неизвестных не превышает двух. При этом к неизвестным следует относить и модуль и направление любого из векторов.

Пример 9

Механизм состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна B , соединённых друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_4 шарнирами.

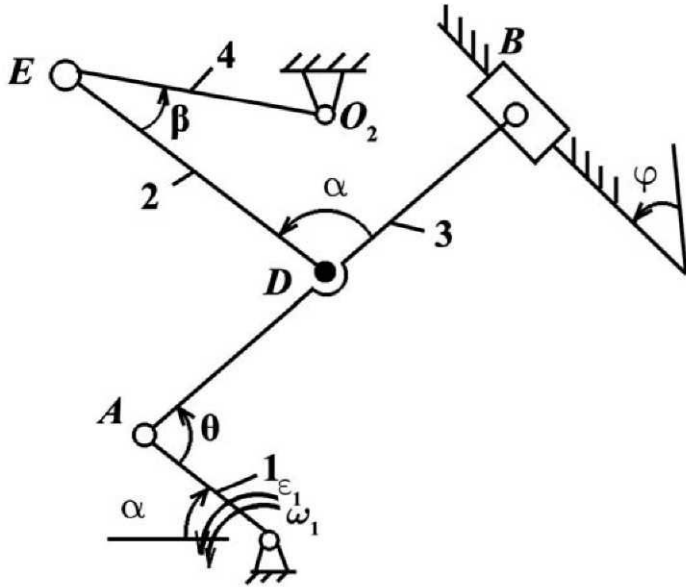


Рис. П.17

Дано:

$$\alpha = 60^\circ, \beta = 150^\circ,$$

$$\gamma = 90^\circ, \varphi = 30^\circ,$$

$$AD = DB,$$

$$l_1 = 0,4 \text{ м}; l_2 = 1,2 \text{ м},$$

$$l_3 = 1,4 \text{ м}, l_4 = 0,6 \text{ м}.$$

$$\omega_1 = 2 \text{ с}^{-1}, \epsilon_1 = 7 \text{ с}^{-2}$$

(направления ω_1 и ϵ_1 против хода часовой стрелки).

Определить:

$$V_B, V_E, \omega_2, a_B, \epsilon_2.$$

Решение

Выполняем рисунок схемы механизма в заданном положении в соответствии с исходными данными (рис. П.18)

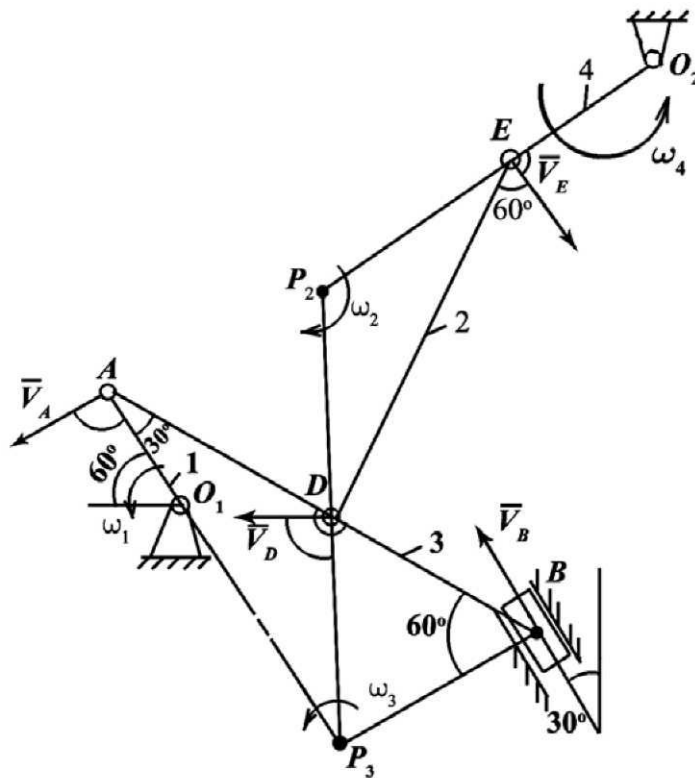


Рис. П.18

Определение скоростей

Скорость точки A . Эта точка принадлежит телу 1, вращающемуся с угловой скоростью ω_1 вокруг O_1 , поэтому

$$V_A = \omega_1 \cdot O_1A = 0,8 \text{ м/с.}$$

Вектор $\vec{V}_A \perp O_1A$ и направлен в сторону вращения.

Точка A одновременно принадлежит и телу 3, которое совершает плоскопараллельное движение. Так как известна траектория точки B тела 3, то можно определить скорость этой точки. Для этого воспользуемся понятием МЦС. Чтобы найти положение МЦС тела 3, восстановим перпендикуляры к направлениям скоростей точек A и B этого тела. На их пересечении получим точку P_3 – МЦС тела 3. Вокруг неё в данный момент времени происходит поворот тела 3 с угловой скоростью ω_3 . Направление ω_3 находим, пользуясь известным направлением \vec{V}_A : звено 3 вращается против хода часовой стрелки. Следовательно, $\vec{V}_B \perp P_3B$ и направлен в сторону вращения тела 3 (вверх по направляющей).

Вычисляем величины ω_3 и V_B .

Из полученного ΔAP_3B (он прямоугольный) находим:

$$AP_3 = AB \cdot \cos 30^\circ = 1,23 \text{ м; } BP_3 = AB \cdot \sin 30^\circ = 0,7 \text{ м.}$$

Так как по свойству скоростей точек тела, совершающего плоскопараллельное движение

$$\frac{V_A}{AP_3} = \frac{V_B}{BP_3} = \frac{V_D}{DP_3} = \omega,$$

то

$$\omega_3 = \frac{V_A}{AP_3} = 0,66 \text{ рад/с; } V_B = \omega_3 \cdot BP_3 = 0,66 \cdot 0,7 = 0,46 \text{ м/с } (\vec{V}_B \perp BP_3);$$

$$V_D = \omega_3 \cdot DP_3 = 0,66 \cdot 0,7 = 0,46 \text{ м/с } (\vec{V}_D \perp DP_3) \quad DP_3 = BP_3 = 0,7 \text{ м,}$$

из ΔP_3DP – он равносторонний из построения.

Показываем на рисунке найденные скорости. Для нахождения скорости точки E учтём, что она одновременно принадлежит и телу 2, и телу 4, причём, т.к. тело 4 вращается вокруг неподвижной оси O_4 , то скорость $\vec{V}_E \perp O_4E$ и $V_E = \omega_4 \cdot O_4E$.

Найдём МЦС тела 2 – точку P_2 (на пересечении перпендикуляров к скоростям точек D и E). По известной величине и направлению \vec{V}_D найдём угловую скорость ω_2 :

$$\omega_2 = \frac{VD}{DP_2} = 0,67 \text{ рад/с (по ходу часовой стрелки),}$$

P_2D из ΔDP_2E равно $P_2D = \frac{l_2}{2 \cos 30^\circ} = 0,69 \text{ м.}$

Тогда $V_E = \omega_2 P_2E$ ($\vec{V}_E \perp P_2E$).

Из ΔP_2ED $P_2E = P_2D$ т. к. ΔP_2DE равнобедренный. $V_E = 0,46 \text{ м/с}$

Полученные результаты расчёта показываем на рисунке

Определим ω_4 :

$$\omega_4 = \frac{V_E}{O_2E} = \frac{0,46}{0,6} = 0,77 \text{ рад/с.}$$

ω_4 направлено против хода часовой стрелки в соответствии с направлением V_E .

Определение ускорений

По заданному движению тела 1 находим ускорение точки A . Так как тело 1 вращается вокруг неподвижной оси O_1 , то

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau,$$

где $a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot O_1A = 2,8 \text{ м/с}^2$ ($\perp O_1A$ – влево); $a_A^n = \omega_1^2 \cdot O_1A = 1,6 \text{ м/с}^2$ (вдоль A_1O к точке O_1)

Показываем эти векторы на рис. П.20.

Для определения ускорения \vec{a}_B воспользуемся тем, что точка B принадлежит телу 3, совершающему плоскопараллельное движение. Этому телу принадлежит и точка A , ускорение которой уже найдено. Поэтому её (точку A) можно принять за полюс и записать для \vec{a}_B

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^n + \vec{a}_{AB}^\tau$$

или учитывая, что $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$, получаем:

	$\vec{a}_B =$	$\vec{a}_A^n +$	$\vec{a}_A^\tau +$	$\vec{a}_{BA}^n +$	\vec{a}_{BA}^τ
величина вектора	неизв.	1,6 м/с ²	2,8 м/с ²	$\omega_3^2 \cdot AB = 0,61 \text{ м/с}^2$	$\varepsilon \cdot AB = ?$ - неизв.
направление вектора	направлен вдоль направляющих	изв.	изв.	по AB от точки B к полюсу A	$\perp AB$ влево

Здесь векторная формула дополнена таблицей анализа величины и направления каждого из векторов, входящих в формулу.

Направление вектора \vec{a}_{BA}^τ показываем по перпендикуляру к AB предположительно (рис. П.19), после решения уравнения уточним это направление.

Проводим оси координат и проецируем векторное уравнение на оси X и Y . Проецируя уравнение на ось X , получаем

$$a_B \cos 30^\circ = a_A^\tau \cos 60^\circ - a_A^n \cos 30^\circ + a_{BA}^n$$

откуда находим: $a_B = 0,72 \text{ м/с}^2$

Так как $a_B > 0$, то вектор \vec{a}_B направлен так, как показано на рисунке. Проецируя уравнение на ось Y , получаем:

$$-a_B \sin 30^\circ = a_A^\tau \sin 60^\circ - a_A^n \sin 30^\circ + a_{BA}^\tau.$$

Подставляя числовые значения, вычисляем $a_{BA}^\tau = -3,58 \text{ м/с}^2$.

Знак $(-)$ показывает, что вектор \vec{a}_{BA}^τ имеет направление, противоположное показанному на рис. П.19.

Находим ε_3

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \frac{|a_{BA}^\tau|}{l_3} = 2,56 \text{ рад/с}^2.$$

Показываем истинное направление ε_3 на рисунке с учётом полученного знака у вектора \vec{a}_{BA}^τ (рис. П.20).

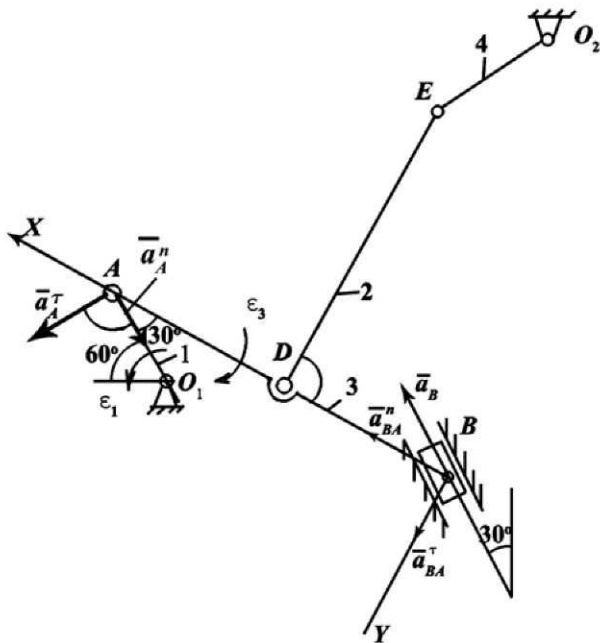


Рис. П.19

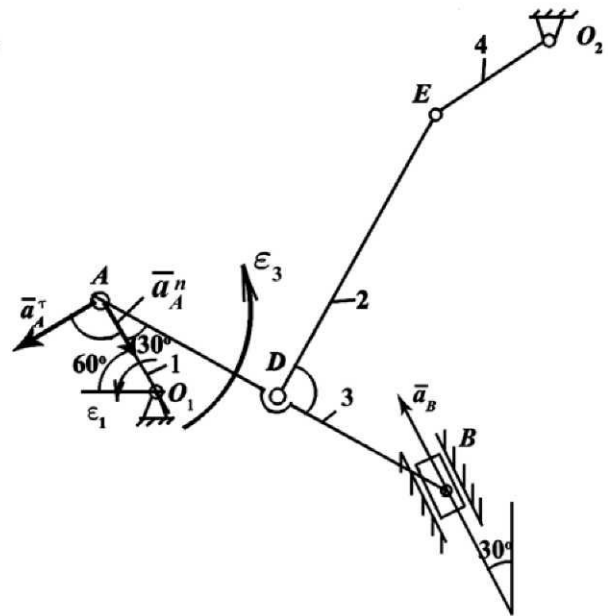


Рис. П.20

Пример 10

Шток 2, движущийся в прямолинейных направляющих своим концом K скользит по поверхности круглого эксцентрика (диска) и толкая его приводит последний во вращательное движение вокруг неподвижной оси. Шток 2 и эксцентрик 1 расположены и движутся в плоскости рисунка, а ось вращения эксцентрика перпендикулярна этой плоскости.

Дано: $V_2 = 200$ см/с; $a_2 = 1000$ см/с²; $R = 20$ см; $\alpha = 30^\circ$.

Определить: ω_1, ε_1 в этот момент времени

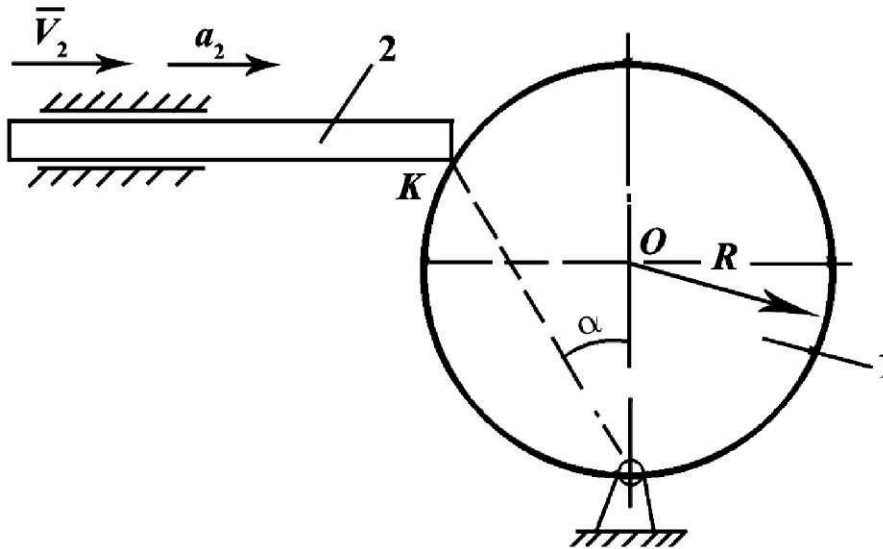


Рис. П.21

Решение

По условию задачи задано движение штока 2. С этой скоростью и ускорением движется и острие K штока относительно неподвижной системы отсчёта. Но перемещение штока приводит к повороту эксцентрика 1 вокруг оси O_1 . При этом острие K штока скользит по криволинейной поверхности эксцентрика, т. е. совершает движение относительно движущегося тела. В соответствии с определениями понятий «сложное, абсолютное, относительное и переносное движение точки» можно говорить о сложном движении острия K : вращающийся эксцентрик – подвижная система отсчёта, а его движение – переносное движение для острия.

По теореме о сложении скоростей точки, совершающей сложное движение, можно записать для точки K штока:

$$\vec{V}_K^{\text{абс}} = \vec{V}_K^{\text{пер}} + \vec{V}_K^{\text{отн}}$$

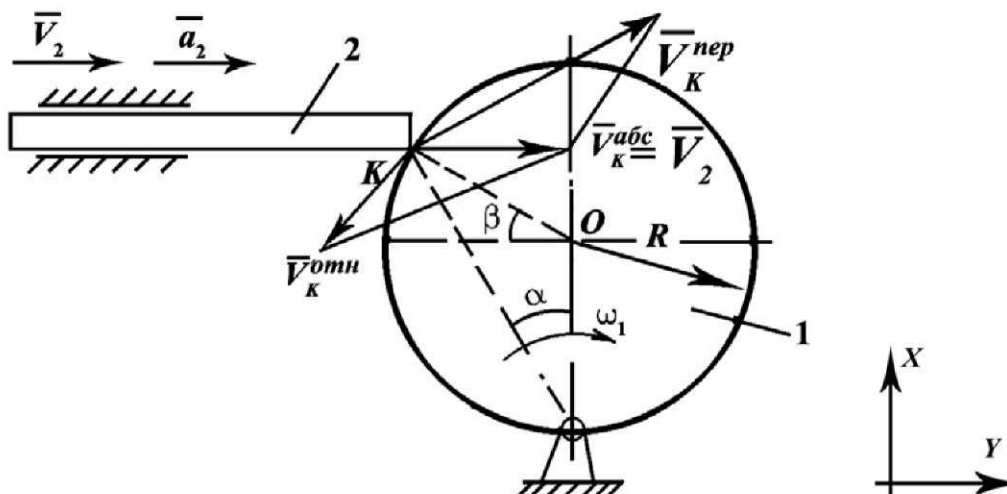


Рис. П.22

Проведём анализ векторного равенства

	$\vec{V}_K^{abc} =$	$\vec{V}_K^{пер} +$	$\vec{V}_K^{отн}$
величина	известна	$\omega_1 \cdot O_1K = ?$?
направление	известно	$\perp O_1K$, изв.	По касательной к поверхности эксцентрика

Выбирая оси X и Y , проектируем на них это векторное уравнение.

– на ось X : $V_K^{abc} = V_K^{пер} \cdot \cos \alpha - V_K^{отн} \cdot \sin \beta$;

– на ось Y : $0 = V_K^{пер} \cdot \sin \alpha - V_K^{отн} \cdot \cos \beta$.

Учитывая, что в данном положении системы (при $\alpha = 30^\circ$) угол $\beta = 30^\circ$, решаем полученную систему уравнений и находим

$$V_K^{пер} = 200\sqrt{3} = 346 \text{ см/с}; V_K^{отн} = 2000 \text{ см/с}.$$

Следовательно, $\omega_1 = \omega^{пер} = \frac{V_K^{пер}}{O_1K} = \frac{200\sqrt{3}}{20\sqrt{3}} = 10 \text{ рад/с}.$

Направление $\omega_1 = \omega^{пер}$ показано на рис. П.22. Оно определяется направлением вектора $\vec{V}_K^{пер}$, которое получается при разложении вектора \vec{V}_K^{abc} на составляющие.

Для определения ускорений воспользуемся теоремой Кориолиса, предварительно определив величину и направление вектора Кориолисова ускорения острия штока. Поскольку оба составных движения этой точки происходят в плоскости рисунка, то направление $\vec{a}_K^{кор}$ находим по правилу

Н. Е. Жуковского, повернув вектор $\vec{V}_K^{\text{отн}}$ на 90° в сторону переносного вращения. Величина ускорения Кориолиса в этом случае находится по формуле: $a_K^{\text{кор}} = 2 \cdot \omega^{\text{пер}} \cdot V_K^{\text{отн}} = 2 \cdot 10 \cdot 200 = 4000 \text{ см/с}^2$.

По теореме Кориолиса для точки K имеем:

$$\vec{a}_K^{\text{абс}} = \vec{a}_K^{\text{пер}} + \vec{a}_K^{\text{отн}} + \vec{a}_K^{\text{кор}}.$$

Но так как переносное движение – вращательное, а относительное происходит по криволинейной траектории, то ускорение точки K в каждом из этих движений складывается из касательной и нормальной составляющих: $\vec{a}_K^{\text{абс}} = \vec{a}_K^{\text{пер.т}} + \vec{a}_K^{\text{пер.н}} + \vec{a}_K^{\text{отн.т}} + \vec{a}_K^{\text{отн.н}} + \vec{a}_K^{\text{кор}}$.

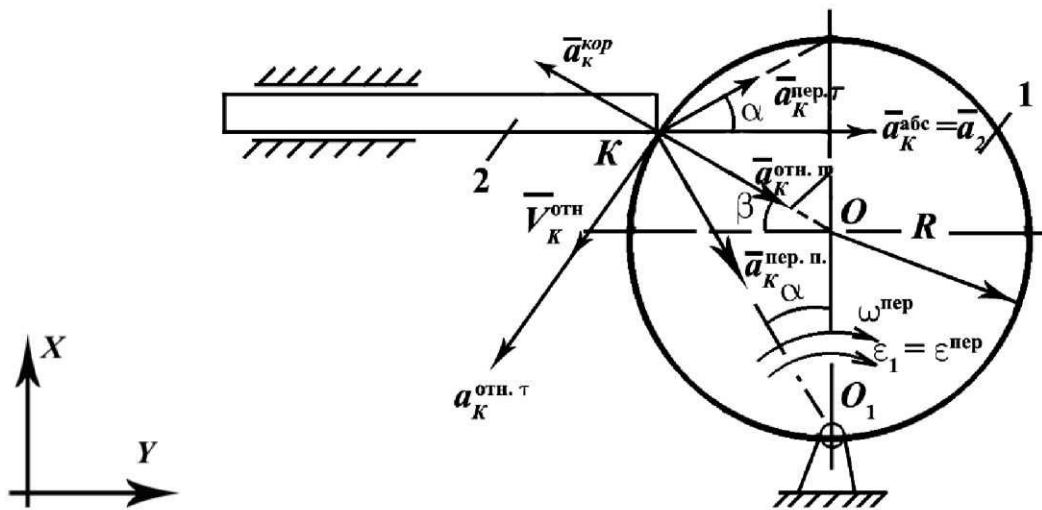


Рис. П.23

Проведём анализ векторного равенства $\vec{a}_K^{\text{абс}}$, и его результат оформим в виде таблицы:

	$\vec{a}_K^{\text{абс}} =$	$\vec{a}_K^{\text{пер.т}} +$	$\vec{a}_K^{\text{пер.н}} +$	$\vec{a}_K^{\text{отн.т}} +$	$\vec{a}_K^{\text{отн.н}} +$	$\vec{a}_K^{\text{кор}}$
величина	известна	$\epsilon_1 \cdot O_1K = ?$	$\omega_1^2 \cdot O_1K = 2000\sqrt{3}$?	$(V_K^{\text{отн}})^2 / R$	извест.
направление	известно	$\perp O_1K$	к точке O_1	$\perp OK$	к точке O	извест.

Проекция этого уравнения на оси X и Y приводят к системе:

$$a_K^{\text{абс}} = a_K^{\text{пер.т}} \cdot \cos \alpha + a_K^{\text{пер.н}} \cdot \sin \alpha - a_K^{\text{отн.т}} \cdot \sin \beta + a_K^{\text{отн.н}} \cdot \cos \beta - a_K^{\text{кор}} \cdot \cos \beta;$$

$$0 = a_K^{\text{пер.т}} \cdot \sin \alpha - a_K^{\text{пер.н}} \cdot \cos \alpha - a_K^{\text{отн.т}} \cdot \cos \beta - a_K^{\text{отн.н}} \cdot \sin \beta + a_K^{\text{кор}} \cdot \sin \beta.$$

Решение её даёт:

$$a_K^{\text{отн.}\tau} = -2460 \text{ см/с}^2; a_K^{\text{пер.}\tau} = -270 \text{ см/с}^2.$$

Знаки «-» указывают на то, что принятые ранее направления векторов $\vec{a}_K^{\text{отн.}\tau}$ и $\vec{a}_K^{\text{пер.}\tau}$ оказались неверными и в действительности эти векторы направлены противоположно показанным на рисунке.

Угловое ускорение эксцентрика:

$$\varepsilon_1 = \frac{a_K^{\text{пер.}\tau}}{O_1K} = -7,8 \text{ рад/с}^2, \text{ т. е. } \varepsilon_1 = 7,8 \text{ рад/с}^2$$

и направлено против хода часовой стрелки. Вращение эксцентрика в данный момент времени происходит замедленно, т. к. направления ε_1 и ω_1 противоположны.

Пример 11

Точка M движется по поверхности тела D по закону $\sphericalangle AM = S_{\text{отн}} = \frac{16\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6} t$ см. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M при $t_1 = 1$ с, если тело D приводится в движение вращением кривошипа O_1A по закону $\varphi = \frac{\pi t^2}{2}$ рад. На рисунке показано положение точки M , соответствующее $S_M > 0$.

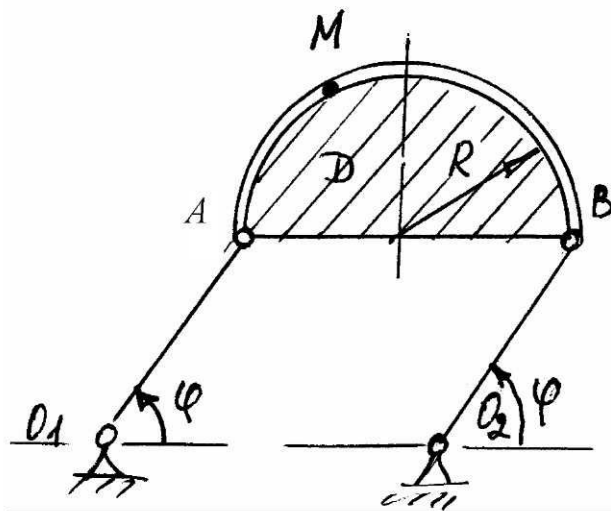


Рис. П.24

Дано: $O_1A = O_2B = 20$ см, $R = 16$ см.

Решение

Точка M совершает сложное движение, т. к. она перемещается по поверхности движущегося тела D . Движение тела D является для точки M переносным. Особенности механизма и его размеры таковы, что тело D движется поступательно и каждая его точка описывает окружность одного и того же радиуса $r = O_1A = O_2B$, но центры их для каждой точки тела D свои, не совпадающие, ни с точкой O_1 ни с точкой O_2 . Движение точки M по поверхности тела D – относительное. Оно происходит по заданному закону вдоль криволинейной траектории радиуса R с центром в точке O .

Уточним положения тела D и точки M в заданный момент времени. Положение тела D относительно неподвижной прямой O_1O_2 определяется углом φ . При $t_1 = 1$ с

$$\varphi_1 = \frac{\pi t_1^2}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ рад.}$$

Положение точки M на полуокружности ACB определяется дугой.

$$\cup AM_1 = \frac{16\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6} t_1 = \frac{16}{3} \pi \sin \frac{\pi}{6} = \frac{8\pi}{3} \text{ см.}$$

Это соответствует центральному углу

$$\alpha_1 = \frac{\cup AM_1}{R} = \frac{8\pi}{3 \cdot 16} = \frac{\pi}{6} \text{ рад} = 30^\circ.$$

Выполняем рисунок, соответствующий этим положениям точки M и тела D (рис. П.25).

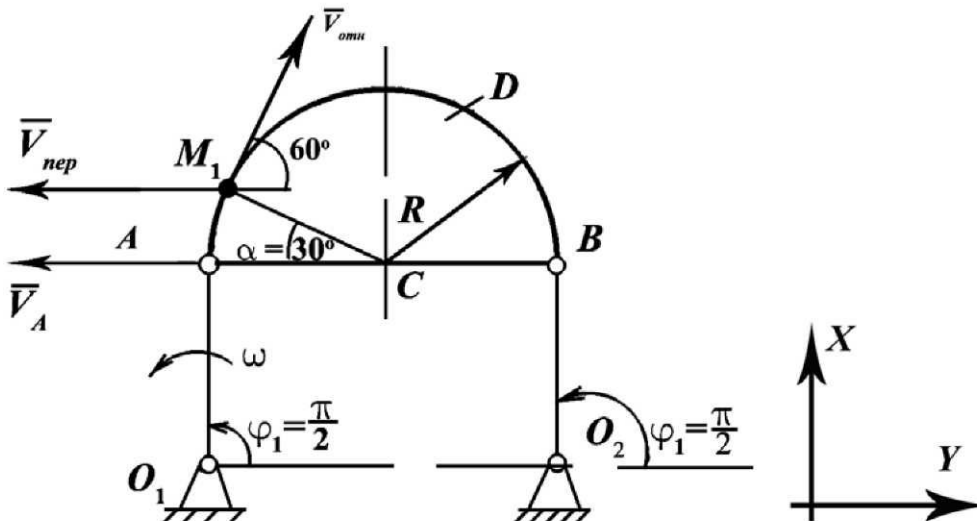


Рис. П.25

Определяем абсолютную скорость точки M по формуле:

$$\vec{V}_{\text{абс}} = \vec{V}_{\text{пер}} + \vec{V}_{\text{отн}}.$$

Относительная скорость точки: $\vec{V}_{\text{отн}} = \frac{dS_{\text{отн}}}{dt} = \frac{16\pi^2}{18} \cos \frac{\pi}{6} t$ при $t_1 = 1$ с

$V_{\text{отн}} = 7,58$ см/с. Положительный знак $V_{\text{отн}}$ показывает, что относительное движение точки происходит в положительном направлении. Вектор $\vec{V}_{\text{отн}}$ направлен по касательной к траектории относительного движения, т. е. по касательной к дуге окружности радиуса R в положении M_1 .

Переносная скорость той точки тела D , с которой совпадает в момент времени t_1 с точкой M_1 , но, т. к. тело D движется поступательно, то все его точки в каждый момент времени имеют одинаковые скорости и ускорения: они соответственно равны скорости и ускорению точки A .

Итак: $\vec{V}_{\text{пер}} = \vec{V}_A = \omega \cdot O_1A$, где ω – модуль угловой скорости звена O_1A .

Находим ω : $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \pi t$ рад/с, при $t_1 = 1$ с, $\omega = \pi$ рад/с. Показываем

направление ω на рисунке с учётом полученного знака (+), показывающего, что вращение звена O_1A происходит в направлении возрастания угла φ .

Модуль переносной скорости $V_{\text{пер}} = V_A = 3,14 \cdot 20 = 62,8$ см/с.

Вектор $\vec{V}_{\text{пер}}$ направлен $\perp O_1A$ в сторону вращения звена O_1A .

Модуль абсолютной скорости точки M можно найти аналитически, т. е. способом проекций. Показываем на рисунке направление осей координат.

$$V_{\text{абс}X} = -V_{\text{пер}} + V_{\text{отн}} \cos 60^\circ = -62,8 + 7,58 \cdot 0,5 = -59 \text{ см/с};$$

$$V_{\text{абс}Y} = V_{\text{отн}} \cos 30^\circ = 7,58 \cdot 0,86 = 6,56 \text{ см/с};$$

$$V_{\text{абс}} = \sqrt{V_{\text{абс}X}^2 + V_{\text{абс}Y}^2} = 59,4 \text{ см/с}.$$

Абсолютную скорость точки M можно найти и по теореме косинусов, т. е. графоаналитическим.

Определяем ускорение точки M . Так как движение тела D поступательное, то абсолютное ускорение точки M находится по формуле:

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{отн}}.$$

Относительное движение точки – криволинейное, поэтому

$$\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{a}_{\text{отн}}^{\tau} + \vec{a}_{\text{отн}}^n.$$

Переносное ускорение точки M в данный момент времени – ускорение точки тела D движущегося поступательно. Ускорения всех его точек одинаковы и равны, например, ускорению точки A .

$$\vec{a}_{\text{пер}} = \vec{a}_A.$$

Величина и направление $\vec{a}_{\text{пер}}$ одинаковы с ускорением точки A

$$\vec{a}_{\text{пер}} = \vec{a}_{\text{пер}}^n + \vec{a}_{\text{пер}}^\tau.$$

Расчетная формула принимает вид: $\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{отн}}^\tau + \vec{a}_{\text{отн}}^n + \vec{a}_{\text{пер}}^\tau + \vec{a}_{\text{пер}}^n$.

Вычислим модули всех векторов и покажем их направление на рисунке

$$a_{\text{отн}}^\tau = \frac{dV_{\text{отн}}}{dt} = -\frac{16\pi^3}{108} \sin \frac{\pi t}{6},$$

при $t_1 = 1$ с $a_{\text{отн}}^\tau = -2,29$ см/с²

Знаки $V_{\text{отн}}$ и $a_{\text{отн}}^\tau$ при $t_1 = 1$ с разные, т. е. относительное движение замедленное (векторы $\vec{V}_{\text{отн}}$ и $\vec{a}_{\text{отн}}^\tau$ направлены противоположно друг другу)

$$a_{\text{отн}}^n = \frac{V_{\text{отн}}^2}{\rho} = \frac{V_{\text{отн}}^2}{R};$$

при $t_1 = 1$ с; $a_{\text{отн}}^n = \frac{7,58^2}{16} = 3,59$ см/с².

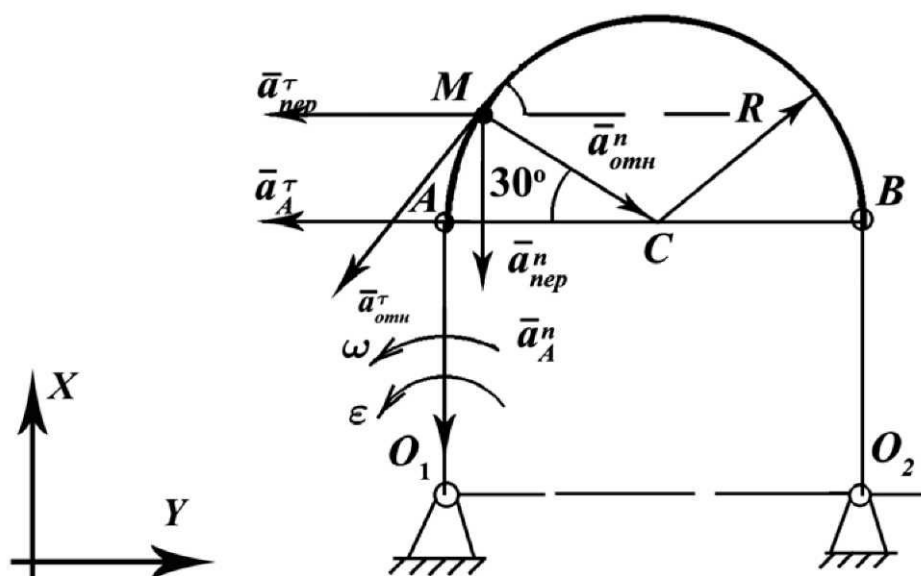


Рис. П.26

Вектор $a_{\text{отн}}^n$ направлен перпендикулярно $a_{\text{отн}}^{\tau}$ к центру кривизны траектории относительного движения, т. е. к точке C .

При поступательном переносном движении переносное ускорение точки M совпадает с ускорением любой точки тела L , например, точки A .

$$\text{Поэтому } \vec{a}_{\text{пер}}^n = \vec{a}_A \quad a_{\text{пер}}^n = a_A^n = \omega^2 O_1 A;$$

$$\text{при } t_1 = 1 \text{ с } a_{\text{пер}}^n = 3,14^2 \cdot 20 = 125,6 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_{\text{пер}}^n$ направлен вертикально вниз ($\parallel O_1 A$)

$$a_{\text{пер}}^{\tau} = a_A^{\tau} = \varepsilon \cdot O_1 A; \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \pi \text{ рад/с}^2.$$

Так как знаки ω и ε одинаковы, то вращение звена $O_1 A$ – ускоренное.

$$a_{\text{пер}}^{\tau} = 3,14 \cdot 20 = 62,8 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_{\text{пер}}^{\tau}$ направлен перпендикулярно $O_1 A$, т. е. влево. Показываем векторы ускорений на рис. П.26.

Модуль абсолютного ускорения находим способом проекций, проецируя выражения $\vec{a}_{\text{абс}}$ на принятые оси координат X и Y :

$$a_{\text{абс}X} = a_{\text{отн}}^n \cos 30^\circ - a_{\text{отн}}^{\tau} \cos 60^\circ - a_{\text{пер}}^{\tau}; \quad a_{\text{абс}Y} = a_{\text{отн}}^n \sin 30^\circ - a_{\text{отн}}^{\tau} \sin 60^\circ - a_{\text{пер}}^n$$

при $t_1 = 1 \text{ с}$

$$a_{\text{абс}X} = -60,8 \text{ см/с}^2; \quad a_{\text{абс}Y} = -125,8 \text{ см/с}^2; \quad a_{\text{абс}} = \sqrt{a_{\text{абс}X}^2 + a_{\text{абс}Y}^2} = 139,7 \text{ см/с}^2.$$

Пример 12

Треугольная пластина ADK вращается вокруг оси Z с угловой скоростью $\omega = 0,3t^2 - 2,2 \text{ рад/с}$ (положительное направление ω показано на рисунке дуговой стрелкой). По гипотенузе AD движется точка B по закону $S = AB = 2 + 15t - 3t^2 \text{ см}$ (положительное направление отсчёта S от A к D). Определить абсолютную скорость $\vec{V}_{\text{абс}}$ и абсолютное ускорение $\vec{a}_{\text{абс}}$ точки B в момент времени $t_1 = 2 \text{ с}$.

Решение

Движение точки B сложное, её движение по прямой AD является относительным, а вращение пластины – переносным. Абсолютную скорость точки B определим по формуле:

$$\vec{V}_{абс} = \vec{V}_{пер} + \vec{V}_{отн}.$$

Вычислим скорости, входящие в это равенство, и уточним их направления. Относительное движение прямолинейное, происходящее по закону $S = AB = 2 + 15t - 3t^2$ см, поэтому $V_{отн} = \dot{S} = 15 - 6t$ в момент времени $t_1 = 2$ с $V_{отн} = 3$ см/с.

Знак (+) показывает, что вектор $\vec{V}_{отн}$ направлен в сторону отсчёта положительных расстояний S , то есть к точке D (рис. П.28).

Переносное движение – это вращение пластины с угловой скоростью ω .

Найдём угловую скорость и угловое ускорение переносного вращения.

$$\omega = 0,3t^2 - 2,2 \text{ с}^{-1}; \quad \varepsilon = \dot{\omega} = 0,6t \text{ с}^{-2}.$$

При $t_1 = 2$ с; $\omega = -1 \text{ с}^{-1}$; $\varepsilon = 1,2 \text{ с}^{-2}$ знаки показывают что в момент времени $t_1 = 2$ с направление ω противоположно показанному на рис. П.28 и вращение в этот момент замедленное.

Определим положение точки B в момент времени $t_1 = 2$ с:

$$S_1 = AB_1 = 20 \text{ см.}$$

Находим по рис. П.28 расстояние h_1 точки B_1 от оси вращения:

$$h_1 = AB_1 \sin 30^\circ = 10 \text{ см.}$$

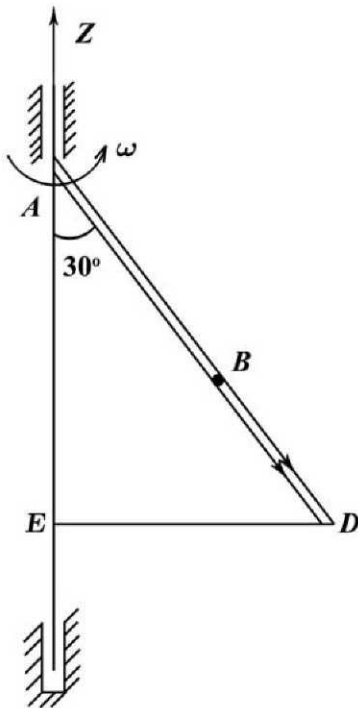


Рис. П.27

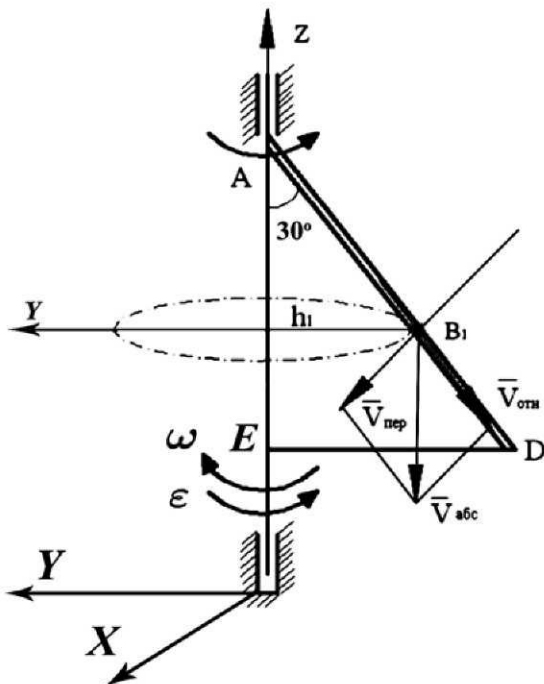


Рис. П.28

Находим $V_{\text{пер}}$

$$V_{\text{пер}} = \omega \cdot h_1 = 10 \text{ см/с.}$$

Вектор $\vec{V}_{\text{пер}}$ направлен перпендикулярно h_1 в сторону переносного вращения, т. е. по оси X неподвижных осей координат, проведенных через точку O . Для определения вектора $\vec{V}_{\text{абс}}$ необходимо сложить векторы $\vec{V}_{\text{отн}}$ и $\vec{V}_{\text{пер}}$, которые взаимно перпендикулярны, поэтому $V_{\text{абс}} = \sqrt{(V_{\text{пер}})^2 + (V_{\text{отн}})^2}$ в момент времени $t_1 = 2 \text{ с}$ $V_{\text{абс}} = 10,4 \text{ см/с}$.

Абсолютное ускорение точки B определим на основании теоремы о сложении ускорений:

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{кор}}.$$

Так как переносное движение вращательное, то $\vec{a}_{\text{пер}} = \vec{a}_{\text{пер}}^n + \vec{a}_{\text{пер}}^\tau$.

Относительное движение прямолинейное, поэтому $\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{a}_{\text{отн}}^\tau$, $\vec{a}_{\text{отн}}^n = 0$.

Расчётная формула для определения $\vec{a}_{\text{абс}}$ принимает вид:

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{пер}}^n + \vec{a}_{\text{пер}}^\tau + \vec{a}_{\text{отн}}^\tau + \vec{a}_{\text{кор}}.$$

Вычислим и величины и уточним направление всех векторов, входящие в эту формулу.

Находим $\vec{a}_{\text{отн}}$:

$$a_{\text{отн}} = a_{\text{отн}}^\tau = \frac{dV_{\text{отн}}}{dt} = -6 \text{ см/с}^2.$$

Направление вектора $\vec{a}_{\text{отн}}$ к точке A .

Находим векторы $\vec{a}_{\text{пер}}^n$ и $\vec{a}_{\text{пер}}^\tau$

$$a_{\text{пер}}^n = \omega^2 \cdot h_1 = 10 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{\text{пер}}^\tau = \varepsilon \cdot h_1 = 12 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_{\text{пер}}^n$ в плоскости рисунка перпендикулярен оси вращения к точке O_1 .

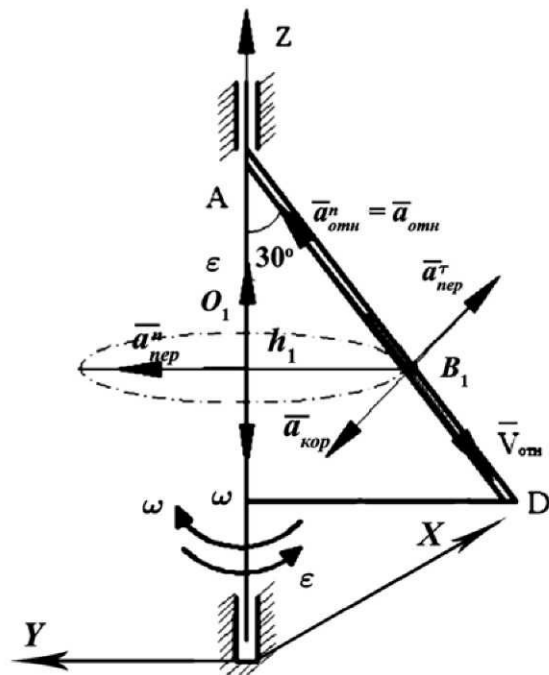


Рис. П.29

Вектор $\overline{a_{\text{пер}}^{\tau}}$ перпендикулярен O_1B_1 .

Вектор угловой скорости ω переносного вращения и вектор $\overline{V}_{\text{отн}}$ образуют угол $\alpha = 30^\circ$, поэтому модуль Кориолисова ускорения определяется как

$$a_{\text{кор}} = 2 \cdot \omega \cdot V_{\text{отн}} \cdot \sin \alpha = 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ = 3 \text{ см/с}^2.$$

Направление $\overline{a}_{\text{кор}}$ можно найти по правилу векторного произведения:

$$\overline{a}_{\text{кор}} = 2\overline{\omega}_{\text{пер}} \times \overline{V}_{\text{отн}},$$

или правилу Н. Е. Жуковского. Для этого вектор $\overline{V}_{\text{отн}}$ спроецируем в плоскость, перпендикулярную оси вращения и затем эту проекцию повернём на 90° в сторону ω , т. е. по ходу часовой стрелки. Таким образом, получим направление $\overline{a}_{\text{кор}}$. Он направлен перпендикулярно плоскости пластины, т. е. в направлении оси X .

Для определения $\overline{a}_{\text{абс}}$ воспользуемся осями, проведёнными через точку O .

Проектируя равенство $\overline{a}_{\text{абс}} = \overline{a_{\text{пер}}^n} + \overline{a_{\text{пер}}^{\tau}} + \overline{a_{\text{отн}}^{\tau}} + \overline{a_{\text{кор}}}$ на оси X, Y, Z находим проекции $\overline{a}_{\text{абс}}$ на эти оси:

$$a_{\text{абс}X} = a_{\text{пер}}^{\tau} - a_{\text{кор}} = -9 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{\text{абс}Y} = a_{\text{пер}}^n + a_{\text{отн}} \cdot \sin 30^\circ = 13 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{\text{абс}Z} = a_{\text{отн}} \cdot \cos 30^\circ = 5,2 \text{ см/с}^2.$$

Находим значение $\overline{a}_{\text{абс}}$:

$$a_{\text{абс}} = \sqrt{a_{\text{абс}X}^2 + a_{\text{абс}Y}^2 + a_{\text{абс}Z}^2} = 16,64 \text{ см/с}^2.$$

Пример 13

Тело произвольной формы вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости пластины с угловой скоростью $\omega = 2t - 1,5t^2$ (рад) (положительное направление отсчёта ω показано на рис. П.30). По дуге окружности радиуса $R = 0,5$ м движется точка B по закону $S = \cup AB = \pi \cdot R \cdot \cos \frac{\pi t}{3}$ (м), t – сек. (положительные отсчёты от A к B). Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент времени $t_1 = 2$ с.

Решение

Рассмотрим сложное движение точки B . Вращение пластины с угловой скоростью $\omega = 2t - 1,5t^2$ является переносным движением точки. Угловая скорость переносного движения определится при $t_1 = 2$ с:

$$\omega_1^{\text{пер}} = 4 - 1,5 \cdot 4 = -2 \text{ с}^{-2}.$$

Знак $(-)$ показывает, что направление ω_1 противоположно показанному на рис. П.30

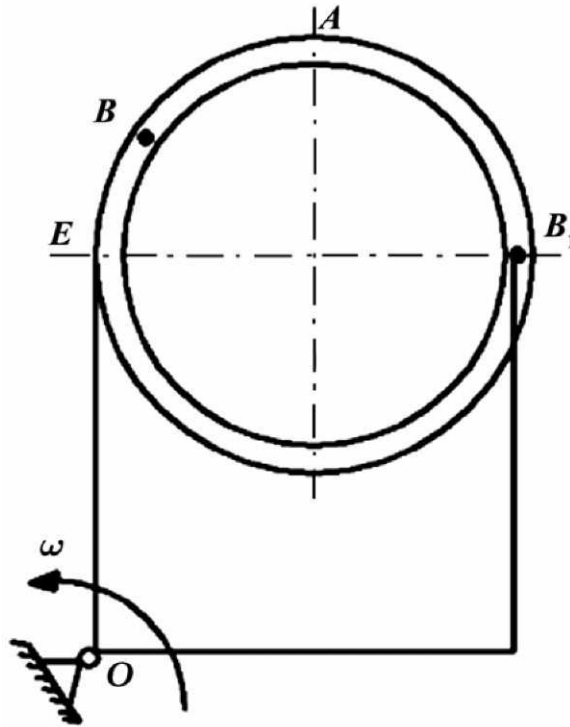


Рис. П.30

Угловое ускорение переносного движения определится

$$\varepsilon^{\text{пер}} = \dot{\omega}^{\text{пер}} = 2 - 3t \left(\text{с}^{-2} \right),$$

при $t_1 = 2$ с $\varepsilon_1^{\text{пер}} = 2 - 6 = -4 \text{ с}^{-2}$.

Показываем направление $\omega_{\text{пер}}$ и $\varepsilon_{\text{пер}}$ на рисунке с учётом полученных знаков.

Абсолютная скорость точки $\vec{V}_{\text{абс}}$ находится по формуле:

$$\vec{V}_{\text{абс}} = \vec{V}_{\text{пер}} + \vec{V}_{\text{отн}}.$$

Определяем величины, входящие в это равенство.

Относительное движение точки происходит по закону

$$S = \overset{\cup}{AB} = \pi \cdot R \cdot \cos \frac{\pi t}{3}.$$

Устанавливаем, где будет находиться точка B на дуге окружности в момент времени t_1 :

$$S_1 = \pi R \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) = -0,5\pi R(\text{м}).$$

Тогда

$$\angle ACB = \frac{S_1}{R} = -\frac{0,5\pi R}{R} = -0,5\pi \text{ (рад)}.$$

Знак $(-)$ свидетельствует о том, что точка B в момент времени $t_1 = 2$ с находится справа от точки A . Показываем её положение на рис. П.31 (точка B_1).

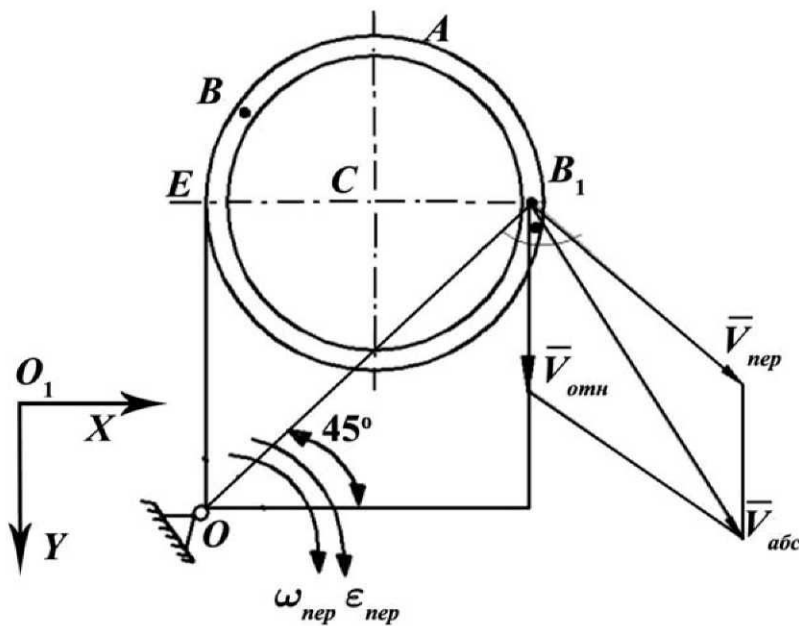


Рис. П.31

Находим числовые значения $\vec{V}_{отн}$ и $\vec{V}_{пер}$

$$V_{отн} = \dot{S} = -\frac{\pi^2 R}{3} \sin \frac{\pi t}{3}; \quad V_{пер} = |\omega_{пер}| \cdot OB_1,$$

где $OB_1 = 2R\sqrt{2} = 1,41$ м в момент времени $t_1 = 2$ с.

$$V_{отн} = -1,42 \text{ м/с}, \quad V_{пер} = 2 \cdot 1,41 = 2,82 \text{ м/с}.$$

Показываем направление векторов $\vec{V}_{\text{отн}}$ и $\vec{V}_{\text{пер}}$ с учётом полученных знаков на рис. П.31. Вектор $\vec{V}_{\text{пер}}$ направлен \perp расстоянию OB_1 в сторону переносного вращения, вектор $\vec{V}_{\text{отн}}$ направлен по касательной к траектории относительного движения в сторону, противоположную положительному отсчёту дуговой координаты S , т. к. в расчёте получен знак $(-)$.

Проведём координатные оси O_1XY и спроектируем обе части равенства, определяющего $\vec{V}_{\text{абс}}$ на оси.

$$\text{На ось } X: V_{\text{абс}X} = V_{\text{отн}X} + V_{\text{пер}X} = 0 - |V_{\text{пер}}| \cdot \cos 45^\circ = -1,99 \text{ м/с.}$$

$$\text{На ось } Y: V_{\text{абс}Y} = V_{\text{отн}Y} + V_{\text{пер}Y} = |V_{\text{отн}}| + |V_{\text{пер}}| \cdot \cos 45^\circ = 3,41 \text{ м/с.}$$

$$\text{Находим } \vec{V}_{\text{абс}}. \Rightarrow V_{\text{абс}} = \sqrt{V_{\text{абс}X}^2 + V_{\text{абс}Y}^2} = \sqrt{(-1,99)^2 + (3,41)^2} = 3,95 \text{ м/с.}$$

Абсолютное ускорение точки B_1 определим по формуле:

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{кор.}}$$

Переносное движение – это вращение пластины вокруг точки O , поэтому

$$\vec{a}_{\text{пер}} = \vec{a}_{\text{пер}}^n + \vec{a}_{\text{пер}}^\tau.$$

Относительное движение точки B_1 – криволинейное движение по окружности радиуса R пластины, поэтому

$$\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{a}_{\text{отн}}^n + \vec{a}_{\text{отн}}^\tau.$$

Расчётная формула для определения $\vec{a}_{\text{абс}}$ принимает вид:

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{пер}}^n + \vec{a}_{\text{пер}}^\tau + \vec{a}_{\text{отн}}^n + \vec{a}_{\text{отн}}^\tau + \vec{a}_{\text{кор.}}$$

Определим модуль и направление всех векторов, входящих в это равенство (рис. П.32).

$$a_{\text{пер}}^n = \omega_{\text{пер}}^2 \cdot O_1B = 2^2 \cdot 1,41 = 5,64 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_{\text{пер}}^n$ направлен по прямой B_1O к центру вращения O .

$$a_{\text{пер}}^\tau = |\varepsilon_{\text{пер}}| \cdot O_1B = 4 \cdot 1,41 = 5,64 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_{\text{пер}}^\tau$ направлен перпендикулярно OB_1 в сторону $\varepsilon_{\text{пер}}$.

$$a_{\text{отн}}^\tau = \frac{dV_{\text{отн}}}{dt} = -\frac{\pi^3 R}{9} \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$

при $t_1 = 2$ с, $a_{\text{отн}}^{\tau} = 0,86$ м/с², $a_{\text{отн}}^n = \frac{V_{\text{отн}}^2}{\rho_{\text{отн}}}$,

где $\rho_{\text{отн}}$ – радиус кривизны траектории точки в относительном движении.
 $\rho_{\text{отн}} = R$.

$$a_{\text{отн}}^n = \frac{(1,42)^2}{0,5} = 4,06 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\overline{a_{\text{отн}}^n}$ направлен перпендикулярно $\overline{V_{\text{отн}}}$ в сторону вогнутости траектории.

Вектор $\overline{a_{\text{отн}}^{\tau}}$ направлен противоположно вектору $\overline{V_{\text{отн}}}$, т. к. знаки $\overline{V_{\text{отн}}}$ и $\overline{a_{\text{отн}}^{\tau}}$ противоположны.

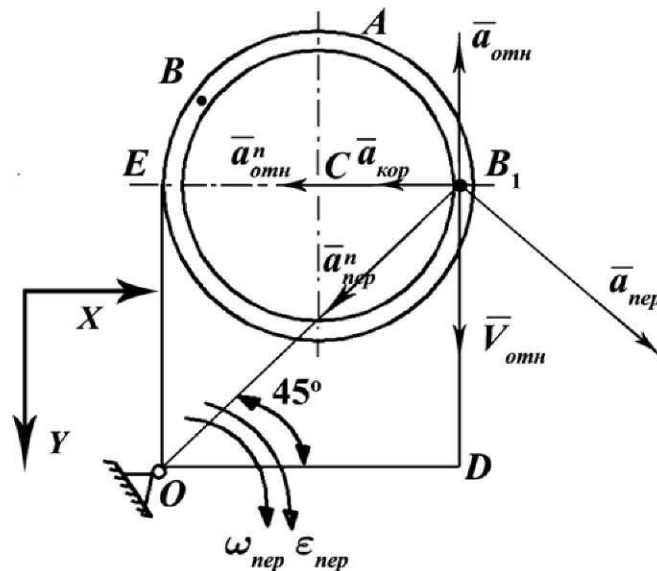


Рис. П.32

Находим Кориолисово ускорение $\overline{a_{\text{кор}}}$.

Модуль Кориолисова ускорения определяем по формуле:

$$a_{\text{кор}} = 2 \left| V_{\text{отн}} \right| \cdot \left| \omega_{\text{пер}} \right| \sin \alpha,$$

где α – угол между векторами $\overline{V_{\text{отн}}}$ и $\overline{\omega_{\text{пер}}}$.

Вектор $\overline{\omega_{\text{пер}}}$ направлен вдоль оси вращения пластины перпендикулярно к плоскости чертежа, т. е. перпендикулярен вектору $\overline{V_{\text{отн}}}$, лежащему в плоскости пластины, значит, $\alpha = 90^\circ$.

Вычисляем $|\vec{a}_{\text{кор}}|$ при $t_1 = 2$ с.

$$a_{\text{кор}} = 5,68 \text{ м/с}^2.$$

Направление $\vec{a}_{\text{кор}}$ найдём по правилу Н. Е. Жуковского, поворотом вектора $\vec{V}_{\text{отн}}$ на 90° в сторону $\omega_{\text{пер}}$.

Таким образом, значения всех входящих в правые части равенства \vec{a}_B векторов и их направления найдены. Для сложения этих векторов проводим оси координат и спроектируем обе части равенства, определяющего \vec{a}_B , на эти оси.

$$\text{На ось } X: a_{\text{абс}X} = -a_{\text{отн}}^n - a_{\text{кор}} - a_{\text{пер}}^n \cdot \cos 45^\circ + a_{\text{пер}}^t \cdot \cos 45^\circ.$$

$$\text{На ось } Y: a_{\text{абс}Y} = a_{\text{пер}}^n \cdot \cos 45^\circ + a_{\text{пер}}^t \cdot \cos 45^\circ - a_{\text{отн}}^t.$$

Подставляя числовые значения для момента времени $t_1 = 2$ с находим:

$$a_{\text{абс}X} = -9,74 \text{ м/с}^2; a_{\text{абс}Y} = 7,15 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{\text{абс}} = \sqrt{(a_{\text{абс}X})^2 + (a_{\text{абс}Y})^2} = \sqrt{9,74^2 + 7,15^2} = 12,08 \text{ м/с}^2.$$

Пример 14

Простейший рычажный механизм с двумя степенями свободы представляет собой два шарнирно соединённых стержня, свободные концы которых скользят по общей горизонтальной направляющей. Механизм расположен в плоскости рисунка (рис. П.33). Определить \vec{V}_C , если $V_A = 2$ м/с; $V_B = 3$ м/с, их направления показаны на рисунке. При вычислениях принять: $AC = 0,8$ м, $BC = 0,6$ м и в рассматриваемый момент $\cos \alpha = 0,8$, $\cos \beta = 0,6$.

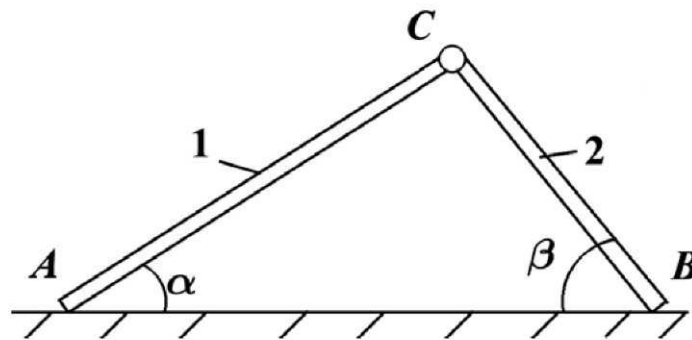


Рис. П.33

Решение

Для определения \vec{V}_C воспользуемся теоремой о проекциях скоростей и применим её отдельно к телу 1 и телу 2.

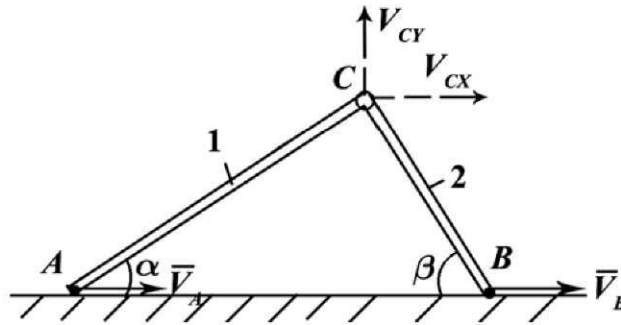


Рис. П.34

Предположив, что $\vec{V}_C = \vec{V}_{CX} + \vec{V}_{CY}$, можем записать:

1) для тела 1: $Pr_{AC} \vec{V}_A = Pr_{AC} \vec{V}_C$, или

$$Pr_{AC} \vec{V}_A = Pr_{AC} \vec{V}_{CX} + Pr_{AC} \vec{V}_{CY} \quad (1)$$

2) для тела 2 аналогично:

$$Pr_{BC} \vec{V}_B = Pr_{BC} \vec{V}_{CX} + Pr_{BC} \vec{V}_{CY} \quad (2)$$

В заданном конкретном положении механизма выражения (1) и (2) приобретают вид (рис.П.34):

$$\begin{cases} V_A \cdot \cos \alpha = V_{CX} \cdot \cos \alpha + V_{CY} \cdot \sin \alpha \\ -V_B \cdot \cos \beta = -V_{CX} \cdot \cos \beta + V_{CY} \cdot \sin \beta \end{cases}$$

или
$$\begin{cases} 2 \cdot 0,8 = V_{CX} \cdot 0,8 + V_{CY} \cdot 0,6 \\ -3 \cdot 0,6 = V_{CX} \cdot 0,6 + V_{CY} \cdot 0,8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1,6 = 0,8V_{CX} + 0,6V_{CY} \\ -1,8 = -0,6V_{CX} + 0,8V_{CY} \end{cases} \quad (3)$$

Решая полученную систему (3), находим:

$$V_{CX} = 0,46 \text{ м/с}; V_{CY} = -0,48 \text{ м/с}; V_C = \sqrt{V_{CX}^2 + V_{CY}^2} = 2,51 \text{ м/с}.$$

Истинную картину движения механизма покажем на рис. П.35.

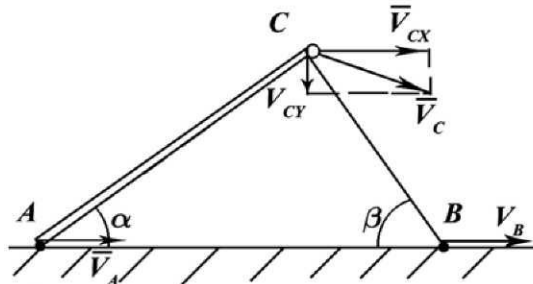


Рис. П.35

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А., Яблонский, В. М., Никифорова. Курс теоретической механики. – Ч. 1. – М.: Высш. шк., 1984 и последующие издания.
2. М. И., Бать, Г. Ю., Джанелидзе, А. С., Кельзон. Теоретическая механика в примерах и задачах. – Ч. 1. – М.: Высш. шк., 1984.
3. Н. Н., Никитин и др. Курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1983.
4. С. М., Тарг. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1986 г. и последующие издания.
5. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под. общ. ред. А. А. Яблонского. – М.: Высш. шк., 1985.