ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебно-методический комплекс для
студентов машиностроительных специальностей

Представлены содержание теоретического курса, краткий конспект лекций, задания и методические указания для выполнения курсовой, расчетно-графической и контрольных работ, контрольные задания для студентов-заочников, методические рекомендации по организации учебного процесса, словарь терминов и рекомендуемая литература, составленные в едином методическом ключе.

Предназначен для студентов машиностроительных специальностей очной и заочной форм обучения, а также молодых преподавателей.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Механикой называют науку, изучающую механическое движение. Она является краеугольным камнем современной техники. Изучение механики в университете имеет определяющее значение для формирования навыков и мышления будущего инженера. Здесь студент впервые узнает, как результаты исследования представлять в удобных формулах и числовых расчетах и одновременно указывать границы их применимости. Содержание курса должно учитывать характер основной специальности и быть органически связанным с физикой, сопротивлением материалов, теорией механизмов и машин.

Развитие любой отрасли техники ставит перед механикой новые задачи, и как правило, решение этих задач способствует прогрессу не только в этой области, но и достаточно удаленных от нее.

Программа курса теоретической механики должна отражать современное состояние науки и техники и при ее создании следует учитывать одну из основных задач высшего образования – *научить студента учиться*, то есть на базе минимального количества материала студенту надо преподнести такие знания и привить такие навыки, которые позволят ему в дальнейшем всю необходимую дополнительную информацию находить и усваивать самостоятельно. Поэтому очень важным для изучения теоретической механики являются хорошие учебники, учебные пособия и научно-популярные книги, в которых творчески отражаются новейшие достижения в области науки и техники.

Данный УМК предназначен для студентов машиностроительных специальностей университета (1-36 01 01, 1-36 01 03, 1-36 01 04, 1-36 01 06) и решает следующие задачи:

- комплексное представление учебно-методических материалов в едином методическом ключе;
- повышение уровня самостоятельной работы студентов при освоении теоретического курса;
- методическое руководство по выполнению различных заданий управляемой самостоятельной работы студентов;
- методические рекомендации по организации учебного процесса при изучении теоретической механики.

Учебно-методический комплекс включает в себя содержание теоретического курса, краткий конспект лекций по основным разделам, задания и методические указания для выполнения различных форм управляемой самостоятельной работы, методические рекомендации по эффективной организации учебного процесса, словарь терминов на русском и английском языках, список рекомендуемой и имеющейся в библиотеке университета литературы.

Программа в учебно-методическом комплексе рассчитана на 180 – 200 часов аудиторных занятий, в том числе теоретический курс соответствует 90 – 108 часам.

В итоге изучения курса теоретической механики студент должен знать основные понятия и законы механики и вытекающие из этих законов методы изучения равновесия и движения материальной точки, твердого тела и механической системы, уметь применять полученные знания для решения соответствующих конкретных задач механики.

ТЕМАТИКА ЛЕКЦИОННОГО КУРСА

ВВЕДЕНИЕ

Механическое движение как одна из форм движения материи. Предмет механики и ее роль среди естественных и технических наук. Механика как теоретическая база областей современной техники

СТАТИКА

Основные понятия статики: абсолютно твердое тело, сила, эквивалентные и уравновешенные системы сил, равнодействующая сила. Предмет и две основные задачи статики. Аксиомы статики. Связи и реакции связей.

Система сходящихся сил. Геометрический и аналитический способы сложения сил. Проекция силы на ось и на плоскость. Правило двойного проектирования. *Равнодействующая сходящихся сил*. Геометрическое и аналитическое условие равновесия сходящихся сил. Теорема о трех непараллельных силах.

Теория пар сил. Алгебраический момент силы и его свойства. Момент силы относительно центра как вектор. Пара сил и ее свойства. Алгебраический момент пары сил и его свойства. Момент пары сил как вектор. Теорема об эквивалентном переносе пары сил в плоскости ее действия. Сложение пары сил. Условие равновесия системы пар сил.

Произвольная плоская система сил. Теорема о параллельном переносе силы. Приведение произвольной плоской системы сил к данному центру. Главный вектор и главный момент плоской системы сил и их вычисление. Частные случаи приведения. Условия и уравнения равновесия произвольной плоской системы сил. Различные формы уравнения равновесия. Равновесие плоской системы параллельных сил. Сосредоточенные силы и распределенные нагрузки. Равновесие систем тел. Статически определимые и неопределимые системы. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей.

Произвольная пространственная система сил. Момент силы относительно оси; зависимость между моментом силы относительно оси и центра на этой оси. Приведение пространственной системы сил к центру. Главный вектор и главный момент пространственной системы сил и их вычисление. Условия и уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей относительно оси. Аналитические условия равновесия произвольной системы сил; случай параллельных сил. Частные случаи приведения произвольной системы сил, динамический винт.

Трение. Равновесие при наличии сил трения. Трение скольжения при покое и движении. Коэффициент трения. Угол и конус трения. Область равновесия. Трение качения; коэффициент трения качения.

Цент тяжести. Центр параллельных сил и центр тяжести. Приведение системы параллельных сил к равнодействующей. Центр параллельных сил, его радиус-вектор и координаты. Центр тяжести твердого тела; центр тяжести объема, площади и линии. Способы определения положения центра тяжести тел.

КИНЕМАТИКА

Кинематика точки. Предмет кинематики. Пространство и время в классической механике. Относительность механического движения. Система отсчета. Задачи кинематики.

Способы задания движения точки. Скорость точки и ее определение при различных способах задания движения точки. Ускорение точки и его определение при векторном и координатном способах задания движения точки. Естественный трехгранник и его оси. Скорость и ускорение точки в проекциях на оси естественного трехгранника, касательное и нормальное ускорения точки.

Кинематика твердого тела. Поступательное движение твердого тела. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек тела. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Уравнение вращательного движения тела. Угловая скорость и угловое ускорение тела. Линейные скорость и ускорения точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Векторы угловой скорости и углового ускорения тела. Выражение скорости точки вращающегося тела и ее нормального и касательного ускорений в виде векторных произведений.

Плоскопараллельное движение твердого тела. Уравнения движения плоской фигуры. Разложение движения плоской фигуры на поступательное вместе с полюсом и вращательное вокруг полюса. Независимость угловых скорости и ускорения фигуры от выбора полюса Определение скорости любой точки фигуры. Теорема о проекциях скоростей двух точек фигур. Мгновенный центр скоростей; определение с его помощью скоростей точек плоской фигуры. Определение ускорения любой точки плоской фигуры. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки или сферическое движение. Углы Эйлера. Уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Мгновенная скорость вращения. Векторы угловых скорости и ускорения тела. Определение скоростей и ускорений точек тела.

Сложное движение точки. Определение понятий: переносное, относительное, абсолютное движения, скорости и ускорения точки в этих движениях Теорема о сложении скоростей. Теорема о сложении ускорений. Определение ускорения Кориолиса: величина, направление, причина появления. Случай поступательного переносного движения.

Сложное движение твердого тела. Сложение поступательных движений. Сложение мгновенных вращений тела вокруг пересекающихся и параллельных осей. Пара мгновенных вращений. Кинематический винт. Мгновенная винтовая ось.

ДИНАМИКА

Основные законы динамики. Предмет динамики. Основные понятия и определения: масса, материальная точка, сила; постоянные и переменные силы. Законы классической механики. Инерциальная система отсчета. Задачи динамики.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых координатах и в проекциях на оси естественного трехгранника.

Две основные задачи динамики для материальной точки. Решение первой задачи динамики. Решение второй задачи динамики: постоянные интегрирования и их определение по начальным условиям.

Общие теоремы динамики точки и их значение. Количество движения точки. Элементарный импульс и импульс силы за конечный промежуток времени. Теорема об изменении количества движения точки в дифференциальной и конечной формах. Момент количества движения точки относительно центра и оси. Теорема об изменении момента количества движения точки. Сохранение момента количества движения точки в случае центральной силы. Элементарная работа силы; ее аналитическое выражение. Работа силы на конечном пути. Работа сил тяжести, упругости и тяготения. Мощность. Кинетическая энергия материальной точки. Теорема об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной и конечной формах.

Динамика несвободной материальной точки.

Динамика механической системы. Механическая система. Масса системы. Центр масс системы и его координаты. Классификация сил, действующих на механическую систему. Свойства внутренних сил. Моменты инерции относительно плоскости и оси и полюса. Радиус инерции. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей. Осевые моменты инерции некоторых тел. Дифференциальные уравнения движения механической системы.

Общие теоремы динамики системы. Теорема о движении центра масс системы. Закон сохранения движения центра масс. Количество движения механической системы. Теорема об изменении количества движения системы в дифференциальной и конечной формах. Закон сохранения количества движения. Главный момент количества движения или кинетический момент механической системы относительно центра и оси.

Динамика абсолютно твердого тела. Кинетический момент вращающегося твердого тела относительно оси вращения. Теорема об изменении кинетического момента системы. Закон сохранения кинетического момента. Кинетическая энергия механической системы. Вычисление кинетической энергии твердого тела, в различных случаях его движения. Работа и мощность сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси. Равенство нулю суммы работ внутренних сил, действующих в твердом теле. Теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной и конечной формах. Закон сохранения механической энергии системы при действии на нее потенциальных сил.

Принцип Д'Аламбера для материальной точки; сила инерции. Принцип Д'Аламбера для механической системы. Главный вектор и главный момент сил инерции.

Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела. Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Физический маятник. Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.

Связи и их уравнения. Классификация связей: голономные и неголономные, стационарные и нестационарные, удерживающие и неудерживающие связи. Возможные перемещения системы. Число степеней свободы системы. Идеальные связи. Принцип возможных перемещений. Применение принципа возможных перемещений к определению реакций связей и простейшим машинам. *Общее уравнение динамики.* Обобщенные координаты системы и их вычисление. Условия равновесия системы в обобщенных координатах. Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа II рода.

Теория удара. Явление удара. Ударная сила и ударный импульс. Действие ударной силы на материальную точку. Теорема об изменении количества движения материальной точки при ударе. Прямой центральный удар тела о неподвижную поверхность; упругий и неупругий удары. Коэффициент восстановления при ударе. Прямой центральный удар двух тел. Теорема Карно.

ВВЕДЕНИЕ

Механикой называют науку, изучающую механические движения. Все явления, наблюдаемые в материальном мире, как бы сложны они не были, представляют собой различные формы и свойства материи. Основной формой существования материи является движение. Материя может переходить из одной формы в другую. В механике рассматриваются только такие формы материи, которые можно назвать вещественными, в отличие от таких материальных объектов, как, например, электрический заряд, электромагнитная волна и другие.

Всякое изменение материи называют *движением.* Движение может иметь различные виды. Одним из видов движения является механическое. *Механическим движением* называют перемещения вещественных форм материи в пространстве и времени.

Теоретическая механика создавалась вместе с развитием всей культуры человечества. Многие законы и факты в области механики были известны еще в древности, задолго до нашей эры; например, знаменитый закон Архимеда, и сейчас имеющий в технике большое значение. Однако знания той эпохи не были систематизированы, не составляли еще единой науки-механики.

В XVII в. великие ученые Галилей и Ньютон систематизировали первоначальные сведения о механике и дали точную формулировку основных ее положений. Они установили законы механики, соответствующие истинным закономерностям механических движений, и тем создали основу для дальнейшего ее развития. В XX в. Эйнштейн установил еще более точное соответствие законов механики реальным явлениям природы, создав теорию относительности.

Российские ученые, такие как М.В. Остроградский (1801 – 1862), Н.Е. Жуковский (1847 – 1921), С.В. Ковалевская (1850 – 1891), С.А. Чаплыгин (1869 – 1942), А.М. Ляпунов (1857 – 1918), К.Э. Циолковский (1857 – 1935), А.Н. Крылов (1863 – 1945), А.Ю. Ишлинский, (1913 – 2003) И.И. Артоболевский (1905 – 1977) и многие другие своими исследованиями и открытиями в значительной мере содействовали развитию механики и ее приложений в технике и естествознании. Плодотворно работают сейчас белорусские ученые, такие М.С. Высоцкий, Л.Г. Красневский, Ю.М. Плескачевский, С.Е. Карпович, О.В. Берестнев, А.В. Чигарев, Р.М. Игнатищев, А.В. Локтионов, Г.И. Михасев, В.С. Вихренко и многие другие, продолжая славные традиции корифеев российской науки.

Теоретическая механика имеет большое значение для всех разделов техники и естествознания, и особенно в авиации, космонавтике, машиностроении и приборостроении всех видов, автоматике, кибернетике и других. Изучая механические движения, происходящие в пространстве и во времени, теоретическая механика широко применяет математические методы исследования, методы абстракции, обобщения, формальной логики.

В основу каждого раздела механики положен ряд понятий и определений; принята система аксиом – важнейших положений, проверяемых на опыте – и путем логических рассуждений сделаны соответствующие выводы. Эти выводы – теоремы – представляют собой правила для различных расчетов, необходимых при количественном изучении тех или иных механических движений.

Теоретическая механика делится на три отдельные части: статику, кинематику и динамику.

Статикой в механике обычно называют ту ее часть, которая занимается изучением законов равновесия материальных тел.

Статика в свою очередь имеет разделы: статика твердого тела и статика материальных систем (жидких, газообразных, упругих и других).

Кинематика изучает чисто геометрические формы механических движений материи без выяснения условий и причин, вызывающих эти движения.

Динамика является наиболее широкой ветвью механики, изучающей движение в зависимости от физических факторов, обусловливающих его.

1. СТАТИКА

1.1. Основные понятия и аксиомы статики

Статика – это раздел теоретической механики, в котором изучаются общие правила сложения сил и условия равновесия материальных тел под действием сил.

Основные объекты статики – абсолютно твердое тело и сила.

Абсолютно твердым (недеформируемым) называется тело, у которого расстояния между любыми двумя точками остаются неизменными. В действительности тела в природе под действием различных причин несколько меняют свою форму и размеры, то есть деформируются. Но во многих случаях эти деформации малы и не являются определяющими факторами при выводе общих закономерностей движения и равновесия таких тел.

Механическое движение сопровождается механическим взаимодействием, которое изменяет движение или приводит к деформации самих взаимодействующих тел. Такое взаимодействие в механике описывается понятием *"сила"*. Чем больше деформация тела или изменение его движения, тем больше сила, которая приводит к этому.

Сила – это количественная мера механического взаимодействия материальных тел, в результате которого взаимодействующие тела могут сообщать друг другу ускорения или деформироваться.

Сила – векторная величина, которая характеризуется численным значением или модулем, точкой приложения и направлением.

Точкой приложения силы называется та материальная частица тела, на которую непосредственно передается действие от другого тела. Под *направлением силы* понимают направление того перемещения, которое получает под действием этой силы материальная точка, вначале находившаяся в покое. Прямая, по которой направлена сила, называется *линией действия.*

На рисунках будем изображать силы в виде направленных отрезков, и обозначать их какой-либо буквой со знаком вектора (рис. 1.1). Такими же буквами, но без знака вектора будем обозначать их модули ($\vec{F}$ – сила, F – ее модуль).

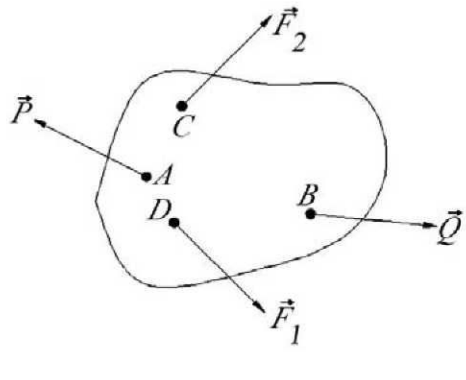


Рис. 1.1. К понятию системы сил

За единицу силы в Международной системе единиц принимается такая сила, которая, будучи приложена к материальной точке массой 1кг, вызывает ее ускорение в инерциальной системе отсчета, равное 1м/с^2. Эта единица называется *ньютоном* (Н).

Совокупность сил, действующих на материальное тело, называется системой сил (см. рис. 1.1).Среди сил системы наравне с заданными могут быть и неизвестные, подлежащие определению.

Простейшие свойства сил, приложенных к абсолютно твердому телу, устанавливаются аксиомами статики. Опираясь на них, логическим путем строятся все положения статики абсолютно твердого тела. В частности, выводятся правила, по которым можно заменить заданную систему сил более простой эквивалентной системой. Эту операцию называют *сложением сил*. Может решаться и обратная задача – замена одной силы системой сил (*разложение силы на составляющие*). *Системы сил, которые производят одинаковое действие на тело, называются эквивалентными.*

Запись $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{P}, \vec{Q}) \sim (\vec{P}_1, \vec{P}_2)$ означает, что системы сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{P}, \vec{Q})$ и $(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$ эквивалентны.

Одна сила, эквивалентная системе сил, называется равнодействующей силой данной системы.

Система сил, эквивалентная нулю, называется уравновешенной. Под действием такой системы сил абсолютно твердое тело находится в равновесии.

Выяснение условий эквивалентности различных систем сил, установление способов замены одной системы сил, приложенной к абсолютно твердому телу, другой эквивалентной системой сил входят в задачи статики. Но их решение выполняет вспомогательную роль, так как конечной целью является получение условий равновесия твердых тел при действии на них различных систем сил.

В статике будем пользоваться системой отсчета, неизменно связанной с Землей. Поэтому, когда говорим, что *тело находится в равновесии*, то имеем в виду покой или равномерное прямолинейное движение этого тела *по отношению к Земле.*

В основе статики лежат *аксиомы* – простые исходные положения, подтверждаемые многовековой практикой и не нуждающиеся в доказательствах. Они *устанавливают основные свойства сил, приложенных к материальной точке и к абсолютно твердому телу.*

Аксиома I. **Для равновесия двух сил, приложенных к абсолютно твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы эти силы были равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны** (рис. 1.2):

$$\text{если } (\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0, \text{ то } F_1 = F_2, \text{ но } \vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

Аксиома II. **Не изменяя действия системы сил на абсолютно твердое тело, можно прибавить к этой системе (или отнять от нее) взаимно уравновешивающиеся силы** (рис. 1.3):

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{P}_1) \sim \vec{P}_1, \text{ если } (\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0$$

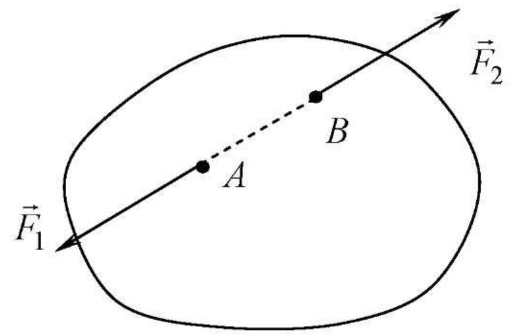


Рис. 1.2. К понятию аксиомы I

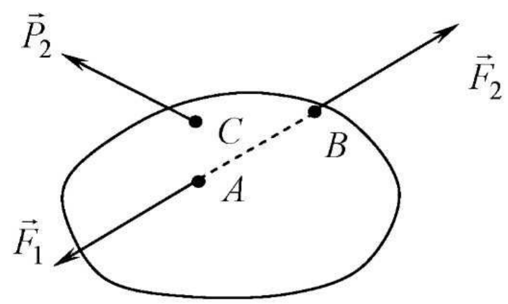


Рис. 1.3. К понятию аксиомы II

Следствие. *Не изменяя действия данной силы на абсолютно твердое тело, ее можно переносить по линии действия в любую другую точку тела.*

Аксиома III (аксиома параллелограмма сил). **Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке тела, по величине и направлению совпадает с диагональю параллелограмма, построенного на этих силах** (рис. 1.4).

Если обозначим через $\vec{R}$ равнодействующую двух сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, то на основании этой аксиомы имеем:

$$\vec{R} \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2).$$

Аксиома IV (принцип равенства действия и противодействия). **Силы, с которыми действуют друг на друга два тела, равны по величине и направлены по одной прямой в противоположные стороны** (рис. 1.5):

$$F_{12} = F_{21}, \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

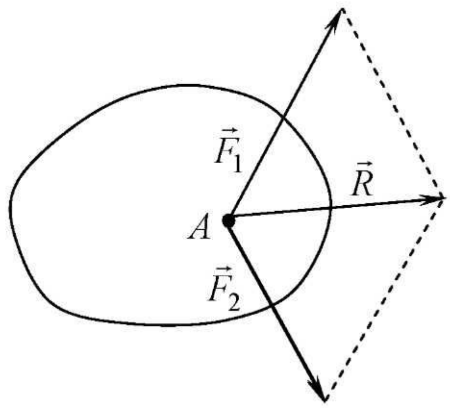


Рис. 1.4. К понятию аксиомы III

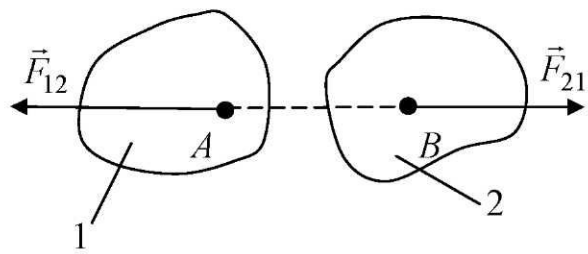


Рис. 1.5. К понятию аксиомы IV

Важно заметить, что действие и противодействие представляют собой две силы, приложенные всегда к двум разным телам. Поэтому их нельзя считать взаимно уравновешивающимися.

Аксиома V (принцип затвердевания). **Если деформируемое (не абсолютно твердое) тело, которое находилось под действием системы сил в состоянии равновесия, станет абсолютно твердым, то его равновесие не нарушится.**

Эта аксиома имеет важное значение при изучении равновесия деформируемых тел. Из нее следует, что *условия равновесия абсолютно твердого тела являются необходимыми и для равновесия деформируемого тела.*

Таким образом, принцип затвердевания устанавливает связь между статикой абсолютно твердого тела и статикой деформируемого тела.

1.2. Связи и реакции связей

Точка (или тело) называются *свободными,* если они могут получать любые перемещения в пространстве. Если же тело поставлено в условия, что некоторые перемещения для него становятся невозможными, то такое тело называется *несвободным.*

Любые ограничения, накладываемые на движения тел, в механике называются связями.

Связи, с которыми приходится встречаться в механике, осуществляются при помощи материальных тел (твердых или гибких). Между несвободным телом и телом, осуществляющим связь, появляются силы взаимодействия. *Сила, с которой связь действует на рассматриваемое тело, препятствуя его перемещению в том или ином направлении, называется реакцией связи.*

Из аксиомы IV следует, что сила, с которой тело действует на связь, и реакция этой связи имеют одинаковые величины, но противоположные направления.

Силы взаимодействия тела и связи зависят от других сил, приложенных к несвободному телу. Эти силы *называются активными*. Как правило, они бывают известными (заданными). Нахождение сил реакций является одной из важнейших практических задач, решаемых в механике.

Сила реакции, как и любая другая сила, является величиной векторной, она характеризуется численным значением (модулем) и направлением. Существует общее правило, характеризующее взаимодействие рассматриваемого тела и связи: *направление силы реакции противоположно тому, в котором связь препятствует перемещению.*

Все многообразие связей, осуществляемых при помощи материальных тел, можно разделить на несколько основных типов.

Гладкая поверхность. Тело свободно опирается на гладкую (без трения) поверхность связи в точке A (рис. 1.6). В этом случае реакция опорной поверхности приложена к телу в точке A и направлена по общей нормали, проведенной в этой точке к поверхностям соприкасающихся тел. Поэтому она называется нормальной реакцией и обозначается обычно через $\vec{N}$.

Нить. Связь осуществляется при помощи гибкого тела (троса, каната, цепи и т.п.). Реакция такой связи (реакция нити) приложена к телу в точке крепления к нему нити и направлена вдоль нее к точке подвеса (силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ на рис. 1.7).

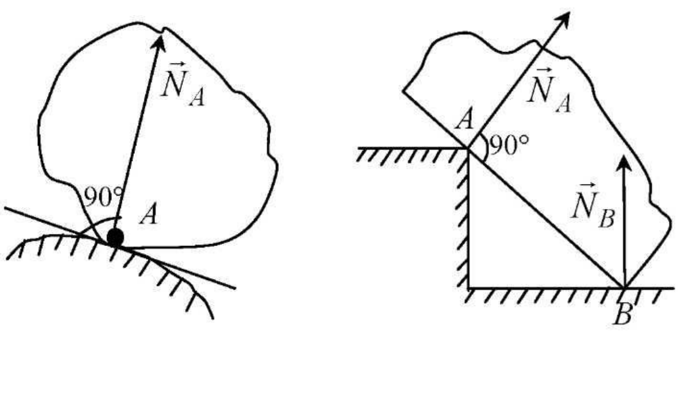


Рис. 1.6. Реакция гладкой поверхности

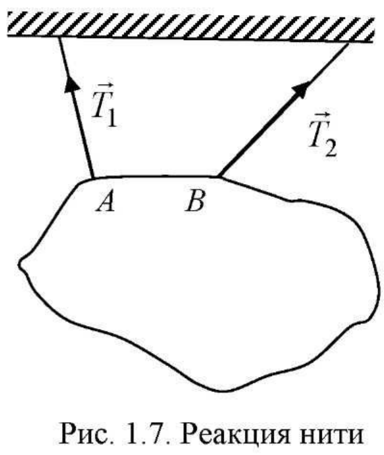


Рис. 1.7. Реакция нити

Неподвижная шарнирная опора. *Шарниром* называется такое подвижное соединение тел, которое дает им возможность свободно поворачиваться относительно друг друга. Если таким способом присоединить тело к неподвижному основанию (стойке), то получается шарнирно-неподвижная опора. При отсутствии трения в шарнире такая опора препятствует перемещению тела в любом направлении, перпендикулярном оси шарнира. Поэтому ее реакция может принимать любое направление, перпендикулярное оси шарнира (например, в плоскости рисунка). При решении задач эту силу реакции обычно представляют в виде двух составляющих сил, которые направляют перпендикулярно друг другу, например, параллельно принятым осям координат (рис. 1.8).

Неподвижная шарнирная опора может быть выполнена при помощи сферического шарнира (рис. 1.9). В этом случае неподвижным остается только геометрический центр B шарнира. Через него проходит линия действия силы реакции, которая может иметь любое направление в пространстве. Поэтому ее представляют уже в виде трех составляющих (направляя параллельно осям x, y, z). Каждая из них указывает на то, что точка B (центр шарнира) не может перемещаться в этом направлении.

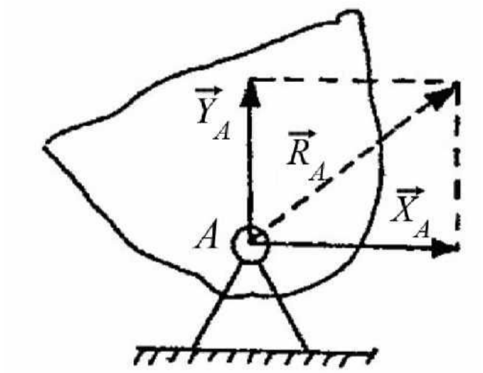


Рис. 1.8. К определению реакции в шарнирно-неподвижной опоре

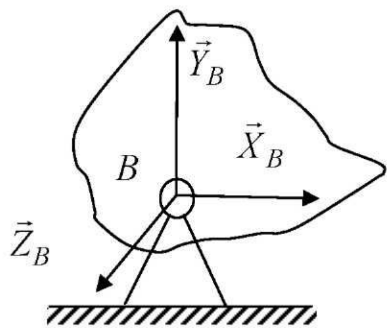


Рис. 1.9. К определению реакции в сферическом шарнире

Подвижная шарнирная опора. Если стойку шарнира поставить на катки так, чтобы она могла свободно перемещаться по опорной поверхности, то реакция такой шарнирной опоры будет направлена (в случае гладкой поверхности) по нормали к ней (рис. 1.10).

Стержневая связь (стержень). Эта связь осуществляется при помощи жесткого невесомого стержня произвольного очертания. На концах стержня имеются шарниры, при помощи которых он крепится к телу и к неподвижному основанию. *Реакция стержневой связи направлена по прямой, соединяющей концевые шарниры* (рис. 1.11).

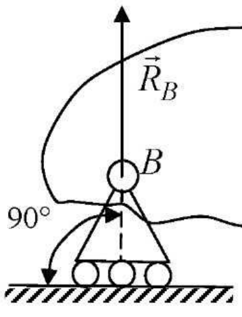


Рис. 1.10. Реакция шарнирной подвижной опоры

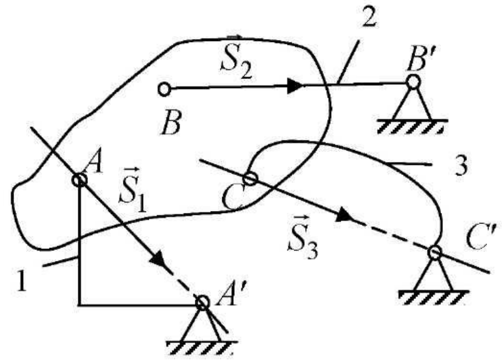


Рис. 1.11. К определению реакций в стержнях

Жесткая заделка или защемление. Так называется связь, ограничивающая любые перемещения тела. В жесткой заделке появляется система сил реакций, которую обычно представляют в виде одной силы (сила реакции жесткой заделки) и одной пары сил с моментом M (реактивный момент). При решении задач их раскладывают на составляющие силы и моменты, которые символизирует ограничение того или иного движения тела. Например, в случае плоской системы сил, они представляются в виде $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ и $\tilde{m}_A$ (рис. 1.12), которые показывают, что тело не может свободно перемещаться в направлении этих сил (или в противоположном направлении) и не может поворачиваться вокруг точки A. В случае пространственной системы сил, реакцию жесткой заделки представляют в виде трех составляющих сил $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$, $\vec{Z}_{\text{B}}$ и трех моментов M_{Bx}, M_{By} и M_{Bz} относительно осей x, y и z (рис. 1.13). Их направление принимают произвольно, и после решения задачи, то есть после вычисления составляющих сил реакций и реактивных моментов, уточняют эти направления.

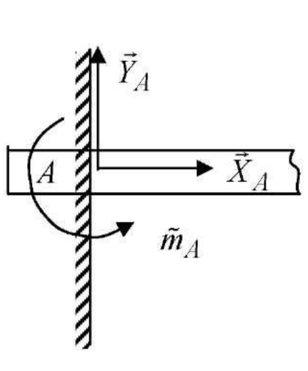


Рис. 1.12. К определению реакций в жесткой заделке (плоская система)

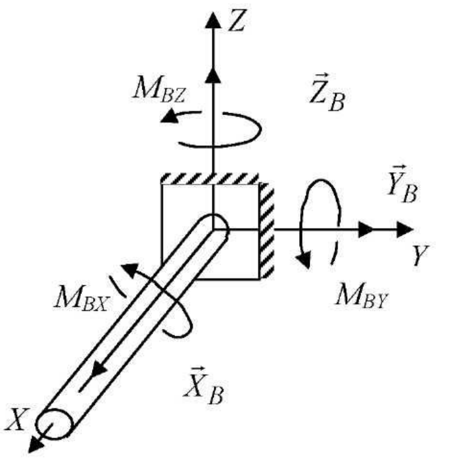


Рис. 1.13. К определению реакций в жесткой заделке (пространственная система)

1.3. Системы сходящихся сил

Сходящимися называются силы, линии, действия которых пересекаются в одной точке.

Если линии действия всех сил системы лежат в одной плоскости, то она называется плоской, в противном случае – пространственной.

Сложением сходящихся сил называется операция определения их равнодействующей.

Простейшую систему образуют две силы, сходящиеся в одной точке. Ранее мы выяснили, что силу, приложенную к твердому телу, можно переносить по ее линии действия и прикладывать в любой точке тела. А из аксиомы III следует, что они могут быть заменены одной силой, величина и направление которой совпадают с диагональю параллелограмма, построенного на векторах этих сил. Поэтому можно записать

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 . \tag{1.1}$$

Этот способ сложения двух сил называется *правилом параллелограмма сил.*

Нетрудно видеть, что для нахождения равнодействующей силы необязательно строить параллелограмм: достаточно к концу одной силы (например, первой) перенести вектор второй силы, а затем из начала первой провести вектор к концу второй (перенесенной) силы (рис. 1.14). Получившийся треугольник называется силовым, а соответствующее правило нахождения равнодействующей силы – *правилом силового треугольника.*

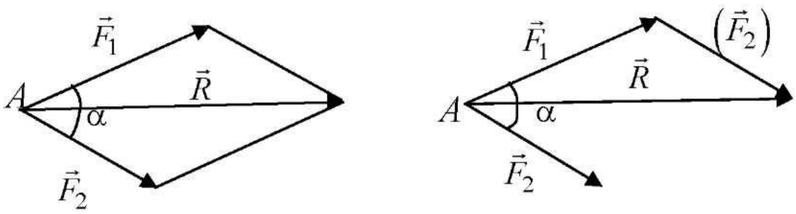


Рис. 1.14. К понятию сложения сил

Равнодействующую двух сходящихся сил можно найти и с помощью вычислений:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha} \tag{1.2}$$

Чтобы найти равнодействующую в том случае, когда на тело действует большое число сходящихся сил (рис. 1.15), можно воспользоваться правилом силового треугольника последовательно для сложения сначала двух, затем трех и так далее сил. В результате получим так называемый *силовой многоугольник*, в котором вектор, проведенный из начала первой силы к концу последнего перенесенного вектора, и будет изображать искомую равнодействующую:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k . \tag{1.3}$$

При построении силового многоугольника может получиться так, что конец последней перенесенной силы (F_n) попадает в начало первой, то есть многоугольник замкнется (рис. 1.16). В этом случае равнодействующая сила системы окажется равной нулю и, следовательно, данная система сил эквивалентна нулю, то есть находится в равновесии.

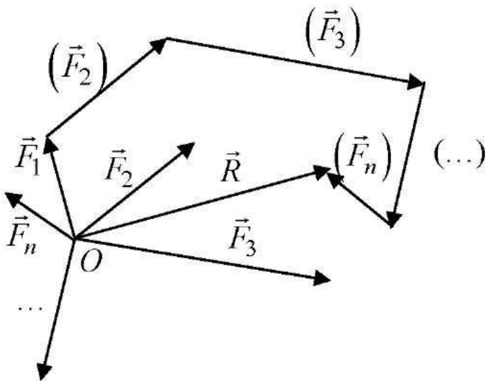


Рис. 1.15. К понятию силового много угольника

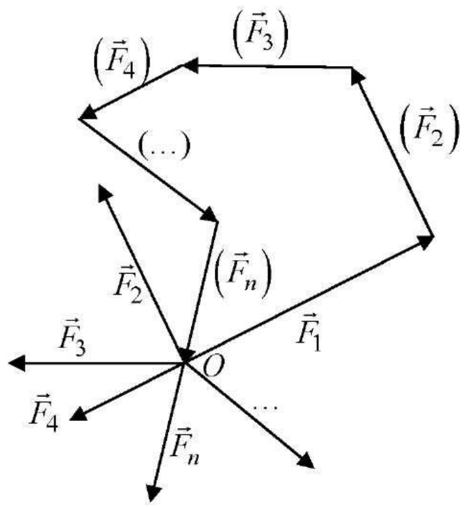


Рис. 1.16. К понятию системы сходящихся сил

Отсюда заключаем, что *для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный на этих силах, был замкнут.*

Пусть задана сила $\vec{F}$ и некоторая ось X – ось проекций (рис. 1.17).

Из математики известно, что проекция любого вектора (например, силы $\vec{F}$) на какую-либо ось (например, X) находится по формуле

$$\vec{F}_x = F \cdot \cos\alpha , \tag{1.4}$$

где α – угол между вектором $\vec{F}$ и осью X.

Знак косинуса этого угла и определяет знак проекции вектора на ось. Например, если угол α острый, то $\cos(\alpha) > 0$ и $F_x > 0$; если $90° > \alpha > 270°$, то $F_x < 0$ и т. д.

В частных случаях, когда $\alpha = 0$ (то есть сила параллельна оси проекций и имеет такое же направление), то $F_{1x} = F_1$; если вектор силы перпендикулярен оси проекций, то $F_{2x} = 0$, поскольку $\cos 90° = 0$ и т. д.

Рассмотрим теперь определение равнодействующей сходящихся сил с помощью проекций.

Пусть задана система сходящихся сил ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$), на которых построили силовой многоугольник $ABCDE$, где вектор $\overrightarrow{AE}$ соответствует равнодействующей силе $\vec{R}$ данной системы (рис. 1.18). Выберем ось x и найдем проекции каждой силы на эту ось. Получаем

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}. \tag{1.5}$$

То есть, *проекция равнодействующей системы сходящихся сил на ось равна алгебраической сумме проекций сил, составляющих эту систему.*

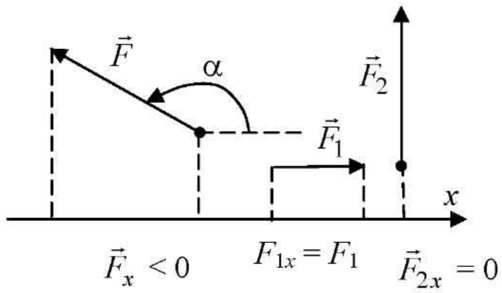


Рис. 1.17. К понятию проекции силы на ось

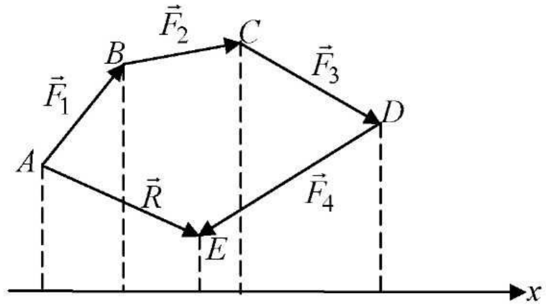


Рис. 1.18. К выводу формулы (1.5)

Полученный результат можно применить и к определению проекции равнодействующей силы на любую другую ось (например, y и z прямоугольной пространственной системы координат $Oxyz$). Следовательно, в случае системы, состоящей из n сил:

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{kx}; \quad R_y = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ky}; \quad R_z = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{kz}. \tag{1.6}$$

Зная проекции равнодействующей силы на оси координат, можно найти ее величину в случае плоской системы сил по формуле

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \tag{1.7}$$

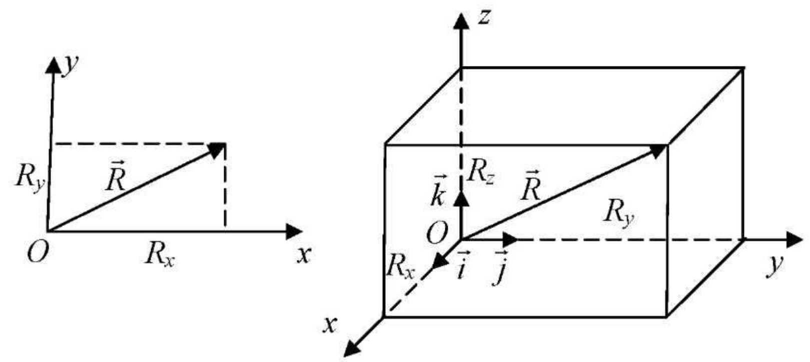


Рис. 1.19. К выводу формул (1.7) и (1.8)

В случае пространственной системы сходящихся сил величина силы R находится, как длина диагонали прямоугольного параллелепипеда, ребрами которого являются R_x, R_y, R_z (рис. 1.19):

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \tag{1.8}$$

Направление равнодействующей, то есть углы, образуемые ею с осями Ox, Oy и Oz, можно найти из формул:

$$\cos(\vec{R},\vec{i}) = \frac{R_x}{R}; \quad \cos(\vec{R},\vec{j}) = \frac{R_y}{R}; \quad \cos(\vec{R},\vec{k}) = \frac{R_z}{R} \tag{1.9}$$

Получим теперь аналитические уравнения равновесия сходящихся сил. Как мы установили ранее, для равновесия сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный на векторах сил системы, был замкнут, то есть $\vec{R} = 0$. Следовательно, для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие три уравнения равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{kz} = 0, \tag{1.10}$$

а в случае плоской системы сходящихся сил – два уравнения, так как всегда можно принять ось Oz перпендикулярно плоскости, в которой действуют силы системы:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ky} = 0 \tag{1.11}$$

Итак, *для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил системы на каждую из координатных осей равнялась нулю.*

1.4. Теория пар сил

Парой сил называется система двух равных по модулю антипараллельных сил, приложенных к одному твердому телу (рис. 1.20).

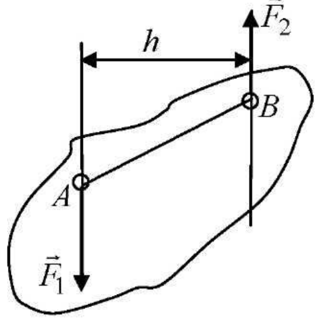


Рис. 1.20. К понятию пары сил

Пара сил (далее – пара), как и сила, является самостоятельной силовой единицей, характеризующей механическое взаимодействие материальных тел.

Пара производит на тело вращательное действие. Количественной мерой этого действия является момент пары.

Алгебраическим моментом пары называется взятое со знаком плюс или минус произведение модуля одной из сил пары на плечо. Плечом пары называется кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары. Момент пары обозначается буквой M:

$$M = \pm F_1 h = \pm F_2 h \tag{1.12}$$

Будем считать момент пары положительным, если пара стремится поворачивать тело против хода часовой стрелки, и отрицательным – по ходу часовой стрелки.

Момент пары обладает следующими свойствами:

1. При переносе сил по линиям их действия момент пары не изменяется, так как при этом не изменяются ни величины сил, образующих пару, ни ее плечо.

2. Момент пары не зависит от положения центра моментов:

$$M_O = M_B = M_C = M.$$

Здесь символом M_O обозначен момент пары относительно точки O.

Не изменяя действия данной пары сил на твердое тело, ее можно заменить любой другой парой, расположенной в той же плоскости и имеющей тот же алгебраический момент.

Следовательно, *любые пары, расположенные в одной плоскости и имеющие одинаковые алгебраические моменты, эквивалентны.*

Это дает возможность не уточнять из каких сил состоит пара и чему равно ее плечо. Поэтому пары на рисунках изображают при помощи круговых стрелок или условным знаком в виде двух связанных антипараллельных сил, равных по величине (рис. 1.21), с указанием только направлений, в которых эти пары стремятся поворачивать тело.

Сложением пар называется операция замены системы пар эквивалентной более простой системой сил.

Систему пар, действующих в одной плоскости, можно заменить одной парой, момент которой равен алгебраической сумме моментов исходных пар. Следовательно, *система пар на плоскости может находиться в равновесии только тогда, когда алгебраическая сумма моментов этих пар равна нулю:*

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_n = \sum_{k=1}^{n} M_k = 0 \tag{1.13}$$

Отсюда также вытекает, что *плоскую систему пар сил можно уравновесить только парой сил, действующей в этой же плоскости.*

Действие пары (или системы пар) на твердое тело полностью определяется их алгебраическими моментами. Но сказанное справедливо в том случае, когда пары расположены в одной плоскости. Если же к телу приложена система пар, действующих в разных плоскостях, то каждая из них будет стремиться поворачивать тело в своей плоскости действия. Поэтому введенного понятия о моменте пары как алгебраической величине недостаточно. Его надо дополнить, одновременно определив и положение плоскости действия пары. Это можно выполнить, если рассматривать моменты пар сил как векторные величины.

Условимся направлять вектор, изображающий момент пары, перпендикулярно плоскости действия пары в такую сторону, чтобы с его конца было видно, что пара стремится поворачивать эту плоскость против хода часовой стрелки (рис. 1.22). Длину вектора будем принимать равной модулю алгебраического момента пары в этой плоскости.

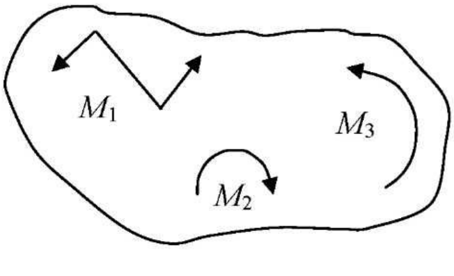


Рис. 1.21. К понятию пары сил

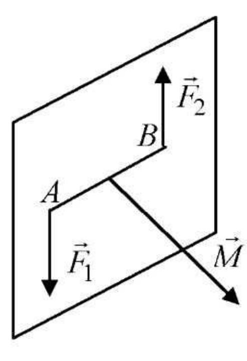


Рис. 1.22. К понятию векторного момента пары сил

Так как *пару сил можно перемещать в плоскости ее действия и переносить в другую плоскость тела, параллельную первой, то вектор мо-*

мента пары можно показывать из любой точки тела. Такие векторы называются свободными.

Если на тело действует система пар, как угодно расположенных в пространстве, то все они могут быть показаны в виде векторов, изображающих их моменты. Причем все они могут быть приложены в одной (любой) точке тела. При необходимости их можно сложить по правилу сложения векторов. Получившийся при этом результирующий вектор будет соответствовать моменту пары, эквивалентной всей системе пар.

1.5. Произвольная плоская система сил

Представим себе твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси, перпендикулярной к плоскости рисунка и пересекающей эту плоскость в точке O (рис. 1.23). Пусть на это тело действуют силы, лежащие в этой же плоскости, например, $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Такое тело называется рычагом. Эффективность силы, приложенной к рычагу и стремящейся повернуть его вокруг оси вращения, определяется величиной и направлением момента этой силы относительно точки O.

В общем случае центром моментов может быть любая точка, даже не принадлежащая телу. При изучении плоской системы сил момент силы относительно точки рассматривается как алгебраическая величина.

Алгебраическим моментом силы $\vec{F}$ относительно точки O называется взятое со знаком плюс или минус произведение модуля силы на длину перпендикуляра, опущенного из этой точки на линию действия силы (рис. 1.24):

$$M_O(\vec{F}) = \pm Fh \tag{1.14}$$

Расстояние h от центра моментов до линии действия силы $\vec{F}$ называется плечом этой силы относительно точки O.

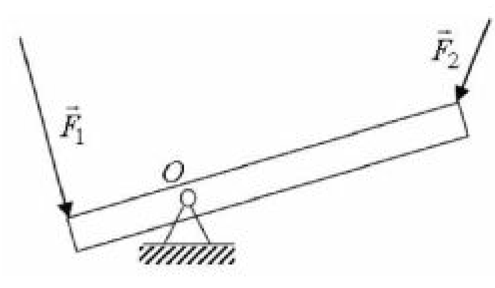


Рис. 1.23. К понятию рычага

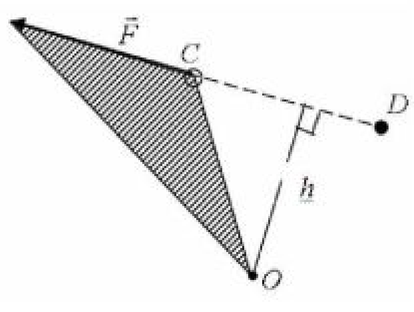


Рис. 1.24. К понятия момента силы относительно точки

Момент силы относительно точки считается положительным, если сила стремится повернуть тело вокруг центра моментов против хода часовой стрелки, в противном случае - отрицательным.

Момент силы измеряется в Н·м.

Отметим следующие свойства алгебраического момента силы относительно точки:

1. При переносе силы по линии действия ее момент не изменяется, так как при этом сохраняются и величина силы, и ее плечо относительно центра моментов.

2. Момент силы относительно точки равняется нулю, если центр моментов лежит на линии действия силы, так как в этом случае плечо силы равно нулю (рис. 1.24): $M_D(\vec{F}) = 0$.

Теорема Вариньона: **алгебраический момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил относительно любого центра равен сумме алгебраических моментов сил, составляющих систему, относительно того же центра.**

Пусть к телу в точке C приложены силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ и сила $\vec{R}$ является их равнодействующей. Примем в качестве центра моментов произвольную точку O. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} M_O(\vec{F}_k) = M_O(\vec{R}) \qquad (1.15)$$

Задача об эквивалентной замене произвольной плоской системы сил более простой системой решается приведением системы сил к центру. В основе этого метода лежит теорема о параллельном переносе силы:

Не изменяя действия силы на твердое тело, ее можно перенести параллельно самой себе и приложить в любой другой точке тела, добавив при этом пару с моментом, равным моменту силы относительно новой точки ее приложения.

Пусть к твердому телу в точке A приложена сила $\vec{F}$ (рис. 1.25). Действие этой силы на тело не изменится, если в произвольно взятой точке B тела приложим к нему две уравновешивающиеся силы $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$, причем $F' = F'' = F$ и $\vec{F}' // \vec{F} // \vec{F}''$. Полученную систему трех сил можно рассматривать как состоящую из силы $\vec{F}'$, которая равна заданной силе $\vec{F}$, но перенесена в точку B параллельно себе, и пары сил ($\vec{F}$, $\vec{F}''$) с моментом M:

$$M = -Fh = M_B(\vec{F}) \qquad (1.16)$$

Итак,

$$\vec{F} \sim (\vec{F}', M) \tag{1.17}$$

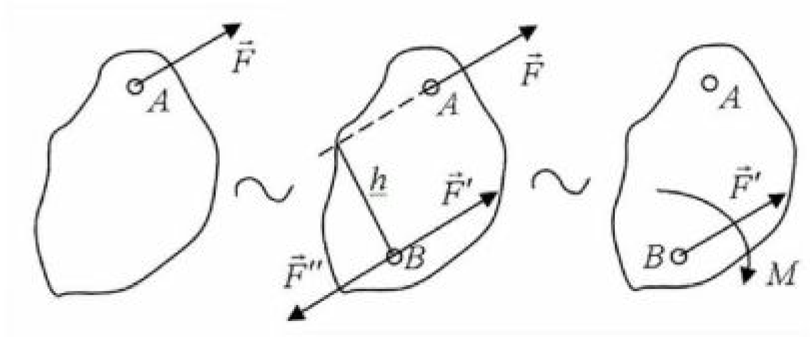


Рис. 1.25. К вопросу о параллельном переносе сил

Рассмотрим систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$, приложенных к твердому телу в точках A_1, A_2, ..., A_n и действующих в плоскости рис. 1.26. Используя предыдущий прием, перенесем каждую силу в произвольно взятую точку O – центр приведения. Вместо исходных сил получим геометрически равные им силы:

$$\vec{F}_1' = \vec{F}_1,\ \vec{F}_2' = \vec{F}_2,\ \ldots,\ \vec{F}_n' = \vec{F}_n, \tag{1.18}$$

сходящиеся в точке O, и присоединенные пары с моментами:

$$M_1 = M_0(\vec{F}_1),\ M_2 = M_0(\vec{F}_2),\ \ldots,\ M_n = M_0(\vec{F}_n). \tag{1.19}$$

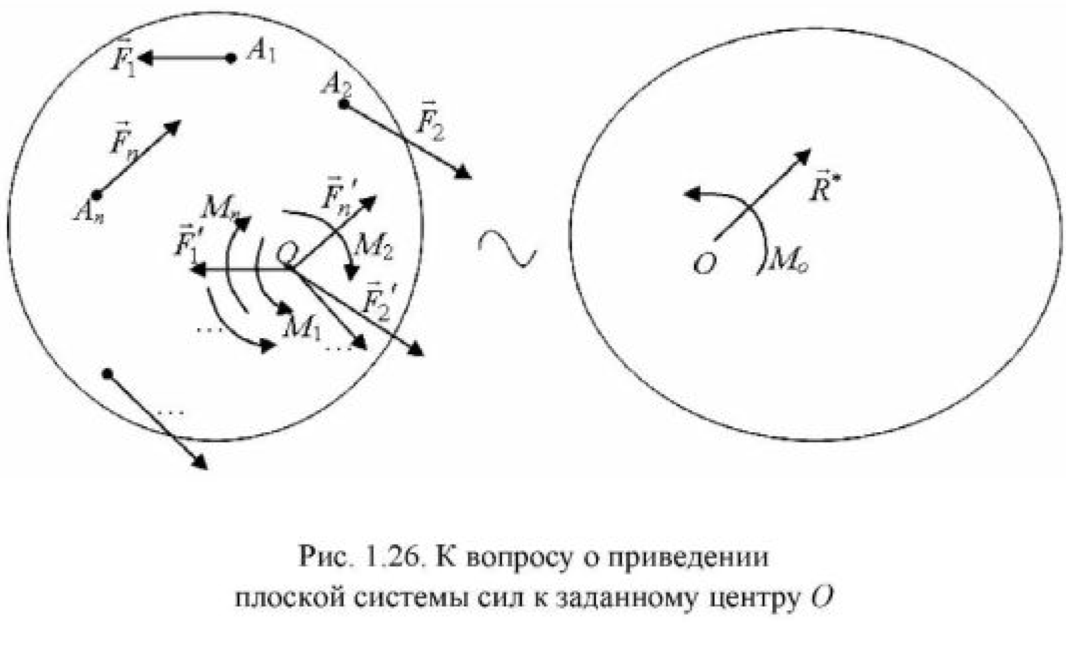


Рис. 1.26. К вопросу о приведении
плоской системы сил к заданному центру O

Сложив силы, сходящиеся в точке O, найдем их равнодействующую:

$$\vec{R}^* = \vec{F}_1' + \vec{F}_2' + \ldots + \vec{F}_n',$$

или

$$\vec{R}^* = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n. \tag{1.20}$$

Итак, силы, приложенные в точке O, заменили одной силой $\vec{R}^*$. Эта *сила, равная геометрической сумме сил системы, называется ее главным вектором*. Очевидно, что он не зависит от центра приведения.

Теперь сложим присоединенные пары, появившиеся при параллельном переносе сил заданной системы в центр приведения O:

$$M_0 = M_1 + M_2 + \ldots + M_n = \sum_{k=1}^{n} M_0(\vec{F}_k)$$

или

$$M_0 = M_0(\vec{F}_1) + M_0(\vec{F}_2) + \ldots + M_0(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^{n} M_0(\vec{F}_k) \tag{1.21}$$

Этот момент называется *главным моментом системы сил относительно центра приведения O*. При перемене центра приведения он будет иметь другое значение, поскольку его слагаемые зависят от положения этой точки.

Таким образом, *в результате приведения к точке O, заданная система сил заменена более простой эквивалентной системой, состоящей из одной силы* (главный вектор системы) *и одной пары сил* с моментом, равным главному моменту системы сил относительно центра приведения O:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n) \sim (\vec{R}^*, M).$$

Следовательно, *плоские системы сил эквивалентны между собой, если они имеют одинаковые главные векторы и главные моменты.*

Чтобы упростить заданную плоскую систему сил, нет необходимости выполнять все указанные преобразования. Достаточно определить величину и направление главного вектора, а также вычислить главный момент системы относительно центра приведения.

Приняв точку O за начало системы координат Oxy можем записать:

$$R_x^* = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \quad R_y^* = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}. \tag{1.22}$$

Зная проекции главного вектора на оси Ox и Oy, находим его величину и направление:

$$R^* = \sqrt{(R_x^*)^2 + (R_y^*)^2}; \tag{1.23}$$

$$\cos(\widehat{\vec{R}^*, \vec{x}}) = R_x^* / R^*, \ \cos(\widehat{\vec{R}^*, \vec{y}}) = R_y^* / R^*. \tag{1.24}$$

Главный момент системы относительно точки O вычисляется по формуле (1.21).

При вычислении $\vec{R}^*$ и M_0 могут получиться следующие результаты:

1) $R^* \neq 0$, а $M_0 = 0$. Это означает, что данная система сил эквивалентна одной силе, то есть приводится к равнодействующей, причем эта равнодействующая по величине и направлению совпадает с главным вектором и приложена в центре приведения O.

2) $R^* = 0$, а $M_0 \neq 0$. В этом случае система приведена к паре сил с моментом, равным главному моменту системы.

Так как пару сил можно переносить в плоскости ее действия в любое другое место, то при перемене центра приведения результат не изменится и система сил будет эквивалентна одной и той же паре с одним и тем же моментом.

3) $R^* \neq 0$, а $M_0 \neq 0$. Такая система сил допускает дальнейшее упрощение и приводится к равнодействующей силе.

4) $R^* = 0$, а $M_0 = 0$. В данном случае исходная система сил эквивалентна нулю, то есть находится в равновесии.

Вернемся к рассмотрению случая приведения произвольной плоской системы сил к центру O, когда главный вектор и главный момент некоторой системы сил не равны нулю. Предположим, что получили систему, показанную на рис. 1.27.

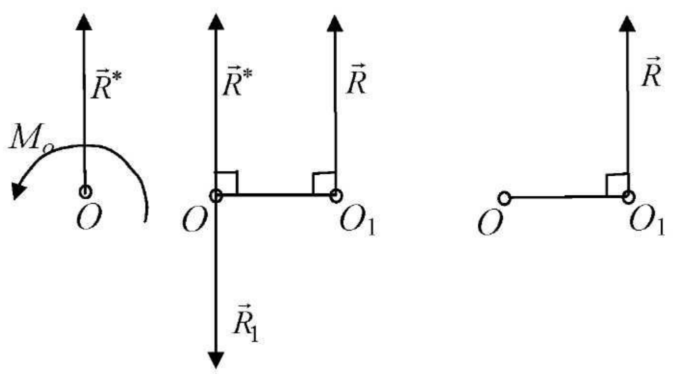


Рис. 1.27. К вопросу приведения плоской системы сил к равнодействующей

Заменим главный момент парой сил $(\vec{R}_1, \vec{R})$. Силы этой пары примем равными главному вектору $R_1 = R = R^*$ и одну из них приложим в точке O, направив ее противоположно $\vec{R}^*$. Линия действия другой силы пары пройдет на расстоянии OO_1, равном плечу пары:

$$OO_1 = |M_0| / R^* \tag{1.25}$$

В полученной системе трех сил $\vec{R}^*$ и $\vec{R}_1$ уравновешиваются, и их можно из рассмотрения исключить. После этого останется одна сила, геометрически равная главному вектору системы и приложенная в точке O_1. Так как она эквивалентна первоначальной системе сил, то является ее равнодействующей.

Итак, в рассматриваемом случае ($R^* \neq 0$ и $M_0 \neq 0$) система сил приводится к равнодействующей.

Теорема Вариньона: **если плоская система сил имеет равнодействующую, то ее алгебраический момент относительно любого центра *O* равен сумме алгебраических моментов сил системы относительно того же центра.**

Если $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \sim \vec{R}$, то

$$M_0(\vec{R}) = \sum_{k=1}^{n} M_0(\vec{F}_k). \tag{1.26}$$

Ранее установлены условия равновесия произвольной плоской системы сил:

$$\vec{R}^* = 0 \text{ и } M_0 = 0. \tag{1.27}$$

Из этих условий получим аналитические уравнения равновесия произвольной плоской системы сил, используя формулы (1.21 и 1.23):

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_0(\vec{F}_k) = 0. \tag{1.28}$$

Таким образом, *для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций сил системы на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, равнялись нулю.*

Система (1.28) называется основной формой уравнений равновесия произвольной плоской системы сил. Для составления этих уравнений оси проекций x и y, а также центр моментов O могут выбираться совершенно произвольно в плоскости действия сил системы. Пользуясь этим правом выбора, можно заменить уравнения проекций на уравнения моментов относительно других центров и получить еще две системы:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0\,,\ \sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0\,,\ \sum_{k=1}^{n} M_0(\vec{F}_k) = 0\,. \tag{1.29}$$

(*ось проекций x не должна быть перпендикулярна прямой OA*);

$$\sum_{k=1}^{n} M_B(\vec{F}_k) = 0,\ \sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0,\ \sum_{k=1}^{n} M_0(\vec{F}_k) = 0. \tag{1.30}$$

(*центры моментов B, A и O не должны находиться на одной прямой*).

Системы (1.29) и (1.30) называются соответственно второй и третьей формами уравнений равновесия произвольной плоской системы сил.

Ограничения на выбор центров моментов обусловлены следующим.

Предположим, что система сил приводится к равнодействующей $\vec{R}^*$. Поскольку об этом заранее не известно, то может случиться так, что выбранная ось проекций окажется перпендикулярной силе $\vec{R}^*$, а центры моментов O и A – на линии ее действия (рис. 1.28). Тогда уравнения системы (1.29) будут выполняться. То есть, приходим к противоречию: уравнения равновесия выполняются, хотя система сил не является уравновешенной. Во избежание подобных случаев и вводятся указанные ограничения.

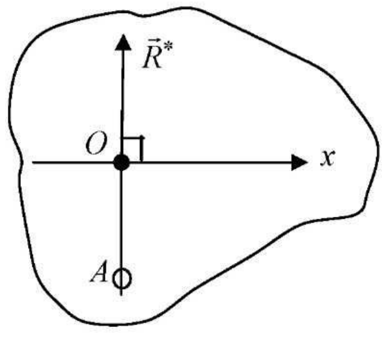


Рис. 1.28. К выводу формулы (1.29)

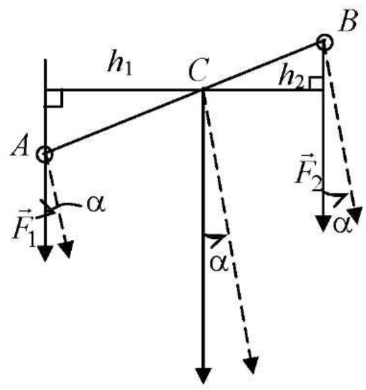


Рис. 1.29. К понятию равнодействующей двух параллельных сил

Система двух параллельных сил является плоской, так как через их линии действия всегда можно провести плоскость.

Пусть к твердому телу в точках A и B приложены две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, направленные по параллельным прямым в одну сторону (рис. 1.29). Главный вектор этой системы $\vec{R}^* = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ направлен в ту же сторону, что и заданные силы, и параллелен им. Его модуль равен сумме величин сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ и отличен от нуля. В этом случае система сил приводится к равнодействующей, причем ее величина и направление такие же, как и у главного вектора, то есть $R = F_1 + F_2$ и $\vec{R} \uparrow\uparrow \vec{R}^*$.

Чтобы найти точку, через которую проходит линия действия силы $\vec{R}$, воспользуемся теоремой Вариньона. Предположим, что равнодействующая сила системы проходит через какую-то точку C на прямой AB. Примем эту точку за центр моментов и по теореме Вариньона будем иметь:

$$AC / CB = F_2 / F_1.$$

Точка C, через которую проходит линия действия равнодействующей системы двух параллельных сил, направленных в одну и ту же сторону, делит отрезок AB между точками приложения сил системы на части, обратно пропорциональные величинам этих сил.

В заключение отметим следующее, если силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ повернуть в одну и ту же сторону на угол α, то все сказанное выше останется без изменений. Это означает, что точка C является геометрической характеристикой системы параллельных сил: через нее всегда проходит линия действия равнодействующей двух параллельных, одинаково направленных сил, имеющих заданные величины, независимо от их направления по отношению к прямой AB. Эта точка называется центром системы двух параллельных сил.

Рассмотрим плоскую систему параллельных сил (рис. 1.30).

Для ее равновесия необходимо и достаточно, чтобы выполнялись общие для любой плоской системы сил условия равновесия: главный вектор и главный момент системы относительно любого центра должны быть равны нулю. Полученные из них аналитические уравнения (1.28) применимы и в данном случае. Вспомним, что на выбор осей проекций и центра моментов для составления этих уравнений не накладываются никакие ограничения. Но так как линии действия сил рассматриваемой системы параллельны, то сумма проекций сил системы на ось, перпендикулярную им (например, на ось Oy), будет тождественно равна нулю. Исключив по этой причине одно из уравнений системы (1.28), получаем, что *для равновесия плоской системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два уравнения:*

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_0(\vec{F}_k) = 0. \qquad (1.31)$$

В качестве уравнений равновесия могут быть использованы и другие, например:

$$\sum_{k=1}^{n} M_0(\vec{F}_k) = 0, \ \sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0, \qquad (1.32)$$

в которых центры моментов должны выбираться так, чтобы прямая OA не была параллельна линиям действия сил системы.

Рассматривая понятие силы, мы отмечали, что в реальных условиях сосредоточенные, то есть приложенные в точке, силы не встречаются. Они обязательно распределены по объему, площади или линии. Рассмотрим такие силы.

Простейшей системой распределенных сил является система, показанная на рис. 1.31, *а*. Силы системы равномерно распределены на прямолинейном участке AB длиной l, направлены в одну сторону и параллельны между собой. Сила, приходящаяся на единицу длины участка, называется интенсивностью распределенных сил (или распределенных нагрузок). Она измеряется в Н/м и обозначается буквой q.

Рассматриваемая система сил имеет равнодействующую:

$$Q = ql, \qquad (1.33)$$

проходящую посередине участка AB, по которому распределены силы.

Другим примером является система параллельных сил, направленных в одну сторону, но переменной интенсивности: силы распределены по закону треугольника (рис. 1.31, *б*).

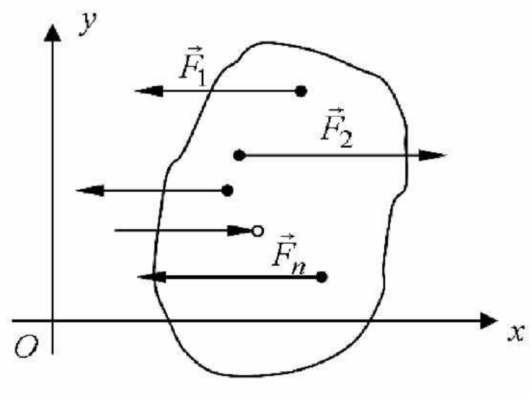


Рис. 1.30. К выводу уравнений равновесия плоской системы параллельных сил

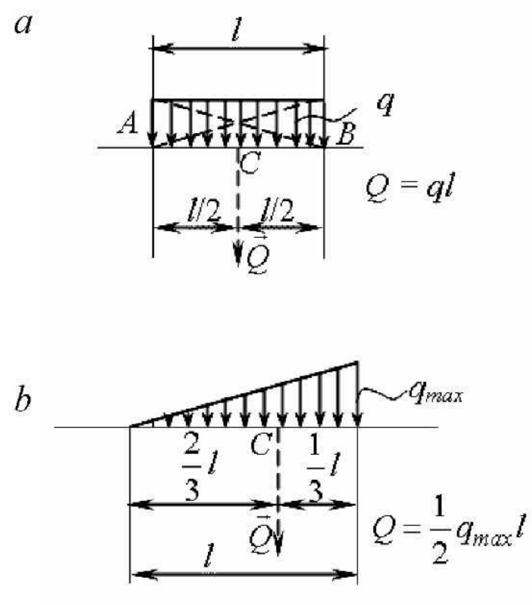


Рис. 1.31. К понятию равнодействующей системы распределенных сил: *а* – постоянной интенсивности; *б* – переменной интенсивности

Такая система сил тоже имеет равнодействующую Q:

$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} l \, . \qquad (1.34)$$

Ее линия действия проходит через точку C, которая располагается ближе к тому концу участка, где интенсивность нагрузки – наибольшая и расстояние до точки C от этого конца участка равно 1/3 длины всего участка.

1.6. Произвольная пространственная система сил

Момент силы $\vec{F}$ относительно точки О, характеризующий ее вращательный эффект, определяется тремя элементами: численным значением (модулем); плоскостью действия, в которой находятся центр моментов и сила; направлением поворота в этой плоскости. В случае плоской системы сил достаточно указывать только численное значение и направление момента силы относительно точки, то есть рассматривать его как алгебраическую величину.

В случае пространственной системы сил плоскости поворота для каждой силы различны и их следует указывать отдельно. Проще всего это можно сделать, если изображать момент силы относительно точки как вектор. *В механике принято направлять вектор момента силы относительно точки по перпендикуляру к плоскости, в которой находятся сила и центр моментов О, в такую сторону, чтобы с конца его было видно, что сила стремиться поворачивать тело против хода часовой стрелки* (рис. 1.32). Длину вектора принимают равной величине момента. Построенный таким образом вектор будет одновременно характеризовать величину момента силы относительно точки, плоскость, в которой сила стремиться поворачивать тело, и направление поворота этой плоскости. Сама же точка приложения этого вектора будет являться центром моментов.

Ранее мы говорили о вращательном эффекте силы, приложенной к телу, относительно точки этого тела. В технике приходится иметь дело с телами, которые могут вращаться вокруг оси (например, валы, оси, зубчатые колеса и другие детали различных машин и устройств). Поэтому очень важно установить, какое действие оказывает сила, приложенная к таким телам. Вращательный эффект, создаваемый силой в подобных случаях, характеризуется ее моментом относительно оси вращения тела.

Пусть некоторая сила $\vec{F}$ и ось Z занимают произвольное положение по отношению друг к другу (рис. 1.33). Через точку O, произвольно принятую на оси, проведем плоскость π, перпендикулярную ей.

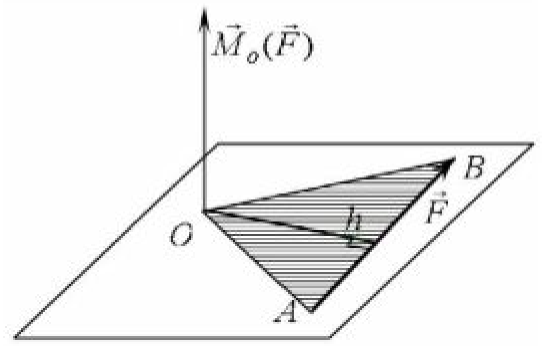


Рис. 1.32. К понятию векторного момента силы относительно точки

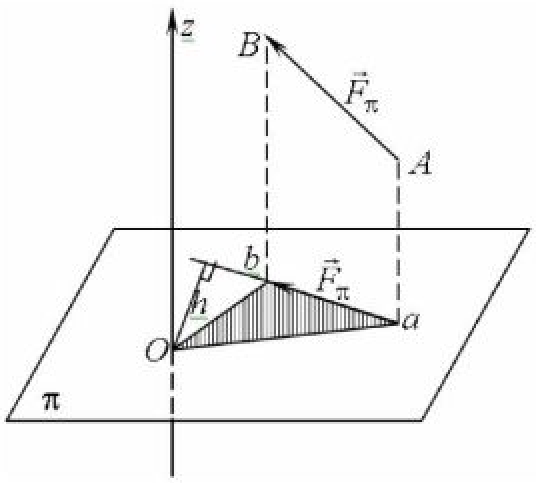


Рис. 1.33. К понятию момента силы относительно оси Z

Из начала и конца вектора $\overrightarrow{AB}$, изображающего силу $\vec{F}$, опустим перпендикуляры на эту плоскость. Их основания являются проекциями точек A и B на плоскость π. Из проекции начала силы $\vec{F}$ на плоскость π (точка a) к проекции конца силы (точка b) проведем вектор $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{F}_\pi$.Он является проекцией вектора силы $\vec{F}$ на плоскость π. Момент силы $\vec{F}_\pi$ относительно точки O принимается за момент силы $\vec{F}$ относительно оси z и обозначается символом $M_z = (\vec{F})$.

Моментом силы $\vec{F}$ относительно оси z называется момент проекции этой силы на плоскость перпендикулярную оси относительно точки O их пересечения:

$$M_z(\vec{F}) = M_0(\vec{F}_\pi) = \pm F_\pi h. \tag{1.35}$$

Из этого определения следует, что момент силы относительно оси – алгебраическая величина. Правило знаков: *если с конца оси моментов видно, что сила стремится поворачивать тело вокруг этой оси против хода часовой стрелки, то ее момент относительно этой оси будем считать положительным, а если по ходу часовой стрелки – отрицательным.*

Момент силы относительно оси обращается в нуль в следующих двух случаях:

1) *если сила параллельна оси моментов* (в этом случае проекция силы на плоскость перпендикулярную оси равна нулю);

2) *если линия действия силы пересекает эту ось* (плечо силы $\vec{F}_\pi$ относительно точки O равно нулю).

Эти случаи можно объединить: момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось моментов лежат в одной плоскости.

Ранее мы установили, что при параллельном переносе силы в другую точку тела необходимо добавить к этой силе присоединенную пару. Ее момент рассматривали как алгебраическую величину. Эти результаты с некоторыми уточнениями можно использовать и в случае пространственной системы сил.

Так как через линию действия любой силы и точку в пространстве всегда можно провести плоскость, то параллельный перенос силы тоже всегда осуществляется в плоскости. Но присоединенные пары будут расположены в разных плоскостях. Поэтому моменты присоединенных пар следует рассматривать как векторы:

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_0(\vec{F}_1),\ \ \vec{M}_2 = \vec{M}_0(\vec{F}_2),\ ....,\ \vec{M}_n = \vec{M}_0(\vec{F}_n)\,. \tag{1.36}$$

Перенося каждую силу в точку O (центр приведения), будем заменять ее геометрически равной силой, приложенной в точке O, и векторному моменту $\vec{M}_k$:

$$\vec{F}_k \sim (\vec{F}'_k, \vec{M}_k)\,. \tag{1.37}$$

Складывая силы, сходящиеся в точке O, получим главный вектор системы:

$$\vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \ldots + \vec{F}'_n = \vec{R}^*,$$

или

$$\vec{R}^* = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k\,. \tag{1.38}$$

То есть, *главный вектор произвольной пространственной системы сил равен геометрической сумме сил системы.*

Сложив векторные моменты присоединенных пар, получим главный момент системы сил относительно центра приведения:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_n = \vec{M}_0$$

или

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_0(\vec{F}_1) + \vec{M}_0(\vec{F}_2) + \ldots + \vec{M}_0(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{F}_k)\,. \tag{1.39}$$

То есть, *главный момент произвольной пространственной системы сил относительно центра приведения равен геометрической сумме векторных моментов сил системы относительно этого центра.*

Таким образом, *любая произвольная пространственная система сил может быть заменена эквивалентной системой, состоящей из одной силы и одной пары сил*:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \sim (\vec{R}^*, \vec{M}_0). \quad (1.40)$$

Величина и направление главного вектора системы определяются через его проекции на оси координат:

$$R_x^* = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}; \; R_y^* = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}; \; R_z^* = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}; \quad (1.41)$$

$$R^* = \sqrt{(R_x^*)^2 + (R_y^*)^2 + (R_z^*)^2}; \quad (1.42)$$

$$\cos\alpha = R_x^* / R^*; \; \cos\beta = R_y^* / R^*; \; \cos\gamma = R_z^* / R^*. \quad (1.43)$$

Для вычисления главного момента произвольной пространственной системы сил относительно центра приведения O сначала вычисляются главные моменты системы сил относительно координатных осей Ox, Oy и Oz:

$$\vec{M}_x = \vec{M}_x(\vec{F}_1) + \vec{M}_x(\vec{F}_2) + ... + \vec{M}_x(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_x(\vec{F}_k)$$

$$\vec{M}_y = \vec{M}_y(\vec{F}_1) + \vec{M}_y(\vec{F}_2) + ... + \vec{M}_y(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_y(\vec{F}_k) \quad (1.44)$$

$$\vec{M}_z = \vec{M}_z(\vec{F}_1) + \vec{M}_z(\vec{F}_2) + ... + \vec{M}_z(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_z(\vec{F}_k)$$

Затем находятся величина и направление $\vec{M}_0$ по формулам:

$$M_0 = \sqrt{(M_x)^2 + (M_y)^2 + (M_z)^2}, \quad (1.45)$$

$$\cos\alpha_1 = M_x / M_0; \; \cos\beta_1 = M_y / M_0; \cos\gamma_1 = M_z / M_0, \quad (1.46)$$

где α_1, β_1, γ_1 – углы, которые образуют главный момент $\vec{M}_0$ с осями координат.

Произвольная пространственная система сил будет находиться в равновесии, если она эквивалентна нулю. Это возможно лишь тогда, когда главный вектор и главный момент системы относительно произвольно взятого центра O равны нулю.

Условия:

$$\vec{R}^* = 0, \; \vec{M}_0 = 0 \quad (1.47)$$

являются *необходимыми и достаточными условиями равновесия* пространственной системы сил. Они равносильны следующим шести аналитическим уравнениям равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0;\ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0;$$
$$\sum_{k=1}^{n} M_x(\vec{F}_k) = 0;\ \sum_{k=1}^{n} M_y(\vec{F}_k) = 0;\ \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k) = 0 \tag{1.48}$$

Таким образом, *для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил системы на каждую из трех координатных осей, а также алгебраические суммы моментов всех сил системы относительно каждой из этих осей были равны нулю.*

Пространственная система параллельных сил является частным случаем произвольной пространственной системы сил, так как линии действия всех сил параллельны между собой, но не лежат в одной плоскости.

Примем такую систему координат *Oxyz,* чтобы ось *Oz* была параллельна линиям действия сил системы (рис. 1.34). Тогда две другие оси, *Ox* и *Oy*, будут перпендикулярны им и проекции сил системы на эти оси будут равны нулю. Следовательно, два уравнения системы (1.47) автоматически выполнятся, и их составление сведется к записи тождества $0 \equiv 0$. Кроме этого, момент каждой силы относительно оси *Oz,* параллельной линиям действия сил, тоже будет равен нулю. Следовательно, последнее уравнение системы (1.47) выполнится тождественно. В результате из шести уравнений системы (1.27) останется три:

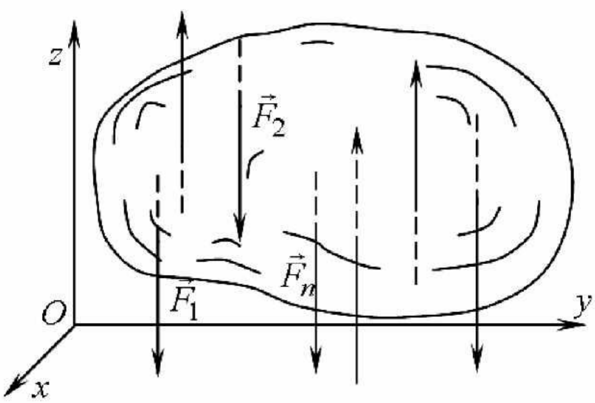


Рис. 1.34. К вопросу уравнений равновесия пространственной системы параллельных сил

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0;\ \sum_{k=1}^{n} M_x(\vec{F}_k) = 0;\ \sum_{k=1}^{n} M_y(\vec{F}_k) = 0. \tag{1.49}$$

Итак, *для равновесия пространственной системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций их на ось, параллельную* *линиям действия сил системы, а также суммы моментов сил относительно двух осей, перпендикулярных им, равнялись нулю.*

Рассматривая различные системы сил, мы получили условия и уравнения их равновесия. При этом выяснили, что уравнения могут составляться в различных формах. Но важно отметить следующее. В какой бы форме они ни составлялись, их число, например, в случае произвольной пространственной системы сил – шесть. Следовательно, если в задаче рассматривается равновесие тела под действием такой системы сил, то *методами статики* можно определить не более шести неизвестных.

Аналогичную ситуацию имеем и в случае любой другой системы сил: *количество уравнений равновесия ограничено и определяется видом самой системы сил.* Например, для плоской системы сходящихся сил их всего два, а для произвольной плоской системы – три и т. д.

Количеством уравнений равновесия определяется и число неизвестных, которые можно найти, решая задачи статики.

Если в задаче статики число неизвестных равно количеству уравнений равновесия, то она может быть решена методами, которые мы рассматриваем. Такие задачи называются статически определимыми. Если же количество неизвестных больше числа уравнений равновесия, то задача становится статически неопределимой. Для решения таких задач наравне с уравнениями равновесия применяются методы, которые рассматриваются в сопротивлении материалов.

1.7. Центр тяжести

На все частицы материального тела вблизи земной поверхности действуют силы притяжения к Земле, называемые силами тяжести. Если размеры тела сравнительно невелики, то эти силы параллельны между собой и направлены в одну сторону. Их равнодействующая называется силой тяжести тела. Очевидно, что

$$P = \sum_{k=1}^{n} P_k , \qquad (1.50)$$

где P – сила тяжести тела;

P_k – сила тяжести k-той частицы.

Как было показано ранее, равнодействующая двух параллельных и одинаково направленных сил проходит через одну и ту же точку C при любой ориентации сил относительно прямой, соединяющей точки их приложения. Этот результат может быть распространен и на случай большого числа параллельных сил, направленных в одну сторону, так как, найдя центр первых двух сил, в нем можно приложить их равнодействующую, затем найти центр этой равнодействующей и некоторой третьей силы системы и т. д. Следовательно, система сил тяжести частиц материального тела имеет свой центр, через который проходит линия действия их равнодействующей. Эта геометрическая точка, принадлежащая телу, называется его центром тяжести.

Чтобы найти положение центра тяжести тела, выберем систему координат $Oxyz$, неизменно связанную с телом. Ось Oz направим вертикально вверх, то есть параллельно линиям действия сил тяжести. Тогда можно записать:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n}(P_k x_k)}{P}\ ;\ y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n}(P_k y_k)}{P}\ ;\ z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n}(P_k z_k)}{P}\ . \qquad (1.51)$$

По таким же формулам можно вычислять координаты центра тяжести тела, если с ним сама система координат непосредственно не связана.

Представим себе некоторый объем V, заполненный однородным веществом, имеющим удельный вес γ. Силы тяжести такого тела и некоторой его частицы пропорциональны их объемам V и V_k:

$$P = V\gamma\ ,\ P_k = V_k\gamma\,. \qquad (1.52)$$

Если в формулы (1.51) подставить значения P и P_k, то получаем:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n}(V_k x_k)}{V};\ y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n}(V_k y_k)}{V};\ z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n}(V_k z_k)}{V}. \qquad (1.53)$$

Выражения (1.53) определяют положение центра тяжести объема, который является его геометрической характеристикой.

Рассмотрим теперь тонкую однородную пластинку весом P. Эта сила равномерно распределена по всей площади пластинки, так что

$$P = A\ \gamma,$$

где γ – сила тяжести, приходящаяся на единицу площади.

Мысленно разобьем всю пластинку на n частей (k = 1, 2, ..., n). Очевидно, что сила тяжести P_k равна $A_k \cdot \gamma$.

Выберем систему координат, расположенную в плоскости пластинки, и найдем положение ее центра тяжести C:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n}(A_k x_k)}{A}\ ;\ y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n}(A_k y_k)}{A}\ . \qquad (1.54)$$

где x_k и y_k – координаты центров тяжести выделенной части.

Эти формулы определяют положение центра тяжести пластинки, но положение этой точки не зависит ни от силы тяжести, ни от вещества, из которого сделана пластинка. Следовательно, по ним находится положение центра тяжести не самой пластинки, а ее площади. Так мы пришли к понятию "*центр тяжести плоской фигуры*", то есть геометрического объекта, не обладающего массой. Это понятие является еще одной геометрической характеристикой плоской фигуры.

Аналогичными рассуждениями можно прийти к понятию "*центр тяжести геометрической линии*":

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n}(L_k x_k)}{L}\ ;\ y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n}(L_k y_k)}{L}\ ;\ z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n}(L_k z_k)}{L}\ . \qquad (1.55)$$

где L_k – длина k-той части, на которые разбита вся линия.

В полученных формулах (1.51) – (1.55), определяющих центры тяжести материального и геометрического тел, суммы состоят из бесчисленного множества слагаемых. Правила вычисления таких сумм излагаются в курсе интегрального исчисления. Здесь мы рассмотрим некоторые приемы, позволяющие легко определить центры тяжести простейших тел и фигур.

1. Метод симметрии.

Если материальное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести такого тела находится в этой плоскости. Действительно, каждой частице M' такого тела соответствует частица M'', расположенная по другую сторону от плоскости симметрии и имеющая такую же силу тяжести. Равнодействующая сила тяжести обеих частиц проходит через середину отрезка $M''M'$, то есть лежит в плоскости симметрии. Очевидно, что так обстоит дело со всеми точками тела, и поэтому равнодействующая сил тяжести всех частиц тела проходит через точку C, находящуюся в плоскости симметрии.

Например, центр тяжести прямоугольника находится в точке пересечения его диагоналей, где пересекаются две оси симметрии прямоугольника. Точно так же центр тяжести параллелограмма, имеющего центр симметрии в точке пересечения диагоналей, находится в этой точке.

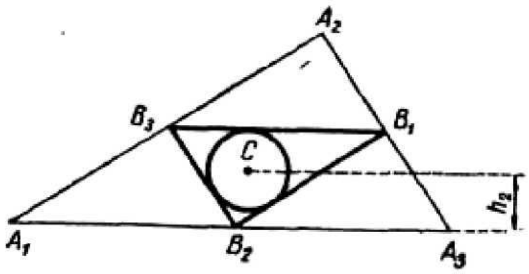
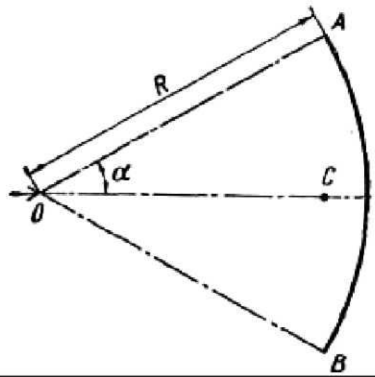
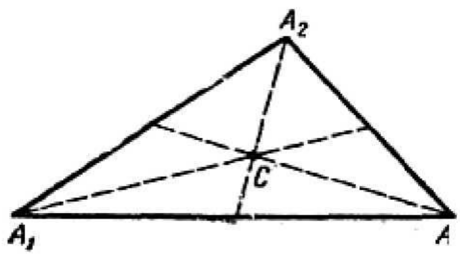
2. Метод разбиения.

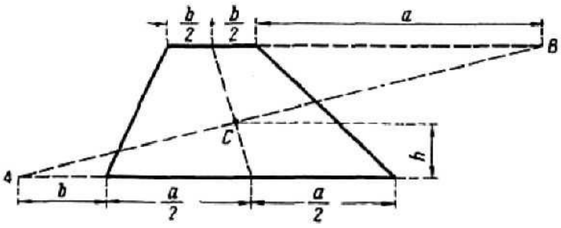
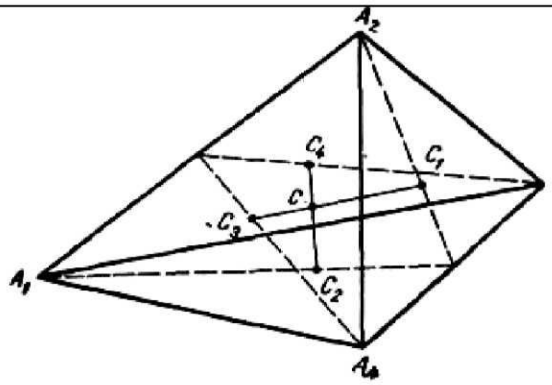
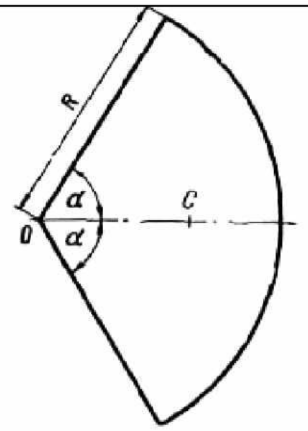
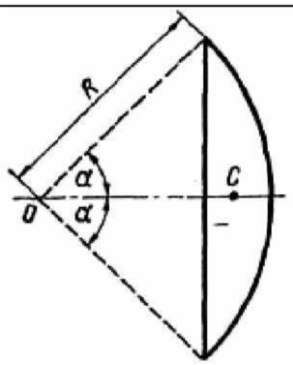
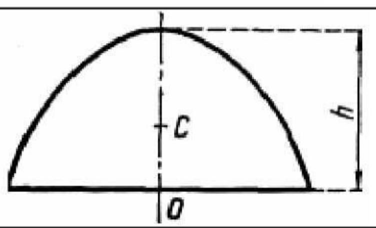
Сущность данного метода состоит в том, что рассматриваемое тело разбивается на несколько простейших тел, причем таких, что положение центра тяжести каждого из них можно определить заранее, например, используя метод симметрии или по известным формулам. Пусть это будут точки $C_1(x_1, y_1, z_1)$, $C_2(x_2, y_2, z_2)$ и т.д. Обозначим центр тяжести всего тела буквой C, а его координаты – x_c, y_c, z_c. Они могут быть найдены по формулам (1.51), в которых суммы состоят уже из конечного числа слагаемых по количеству частей, на которые разбивается тело.

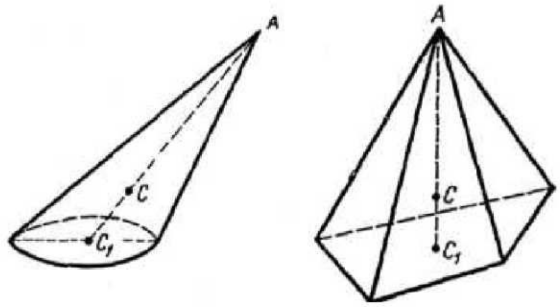
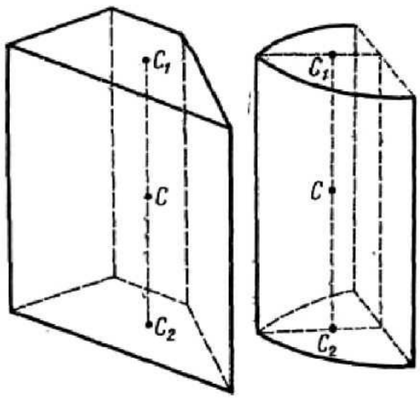
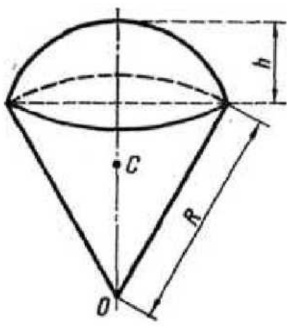
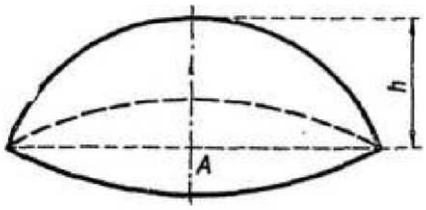
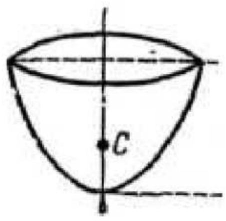
Положения центров тяжести некоторых простых плоских и объемных фигур приведены в табл. 1.

Таблица 1

Положение центров тяжести некоторых однородных линий, фигур и тел

Положение центра тяжести линии		
Периметр треугольника		Центр тяжести находится в центре круга, вписанного в треугольник $\Delta B_1B_2B_3$, где B_1, B_2, B_3 – середины сторон данного треугольника. $h_2 = \frac{H_2}{2} \cdot \frac{a_1 + a_3}{a_1 + a_2 + a_3}$, где a_1, a_2, a_3 – стороны данного треугольника и H_2 – высота, соответствующая стороне a_2
Дуга окружности радиуса R		$OC = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$
Положение центра тяжести площади		
Треугольник		Центр тяжести находится в точке пересечения медиан: $x_c = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$, $y_c = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$, где x_i, y_i – координаты вершин треугольника

Трапеция		Центр тяжести находится в точке пересечения прямой AB и прямой, соединяющей середины параллельных сторон. $$h=\frac{H}{3}\cdot\frac{a+2b}{a+b},$$ где H – высота трапеции
Четырехугольник		Центр тяжести C находится в точке пересечения отрезков $[C_1C_2]$ и $[C_3C_4]$, где C_1 – центр тяжести треугольника $\Delta A_2A_3A_4$, C_2 – центр тяжести треугольника $\Delta A_1A_3A_4$, C_3 – центр тяжести треугольника $\Delta A_1A_2A_4$ и C_4 – центр тяжести треугольника $\Delta A_1A_2A_3$
Круговой сектор радиуса		$$OC=\frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$
Круговой сегмент радиуса		$$OC=\frac{4}{3}\frac{R\sin^3\alpha}{2\alpha-\sin^2\alpha}$$
Параболический сегмент		$$OC=\frac{2}{5}h$$

Положение центра тяжести объема		
Пирамида или конус		$$C_1C = \frac{1}{4} AC_1,$$ где C_1 – центр тяжести основания, A – вершина и C – центр тяжести пирамиды или конуса
Призма или цилиндр		Центр тяжести C находится в середине отрезка, соединяющего центры тяжести C_1 и C_2 верхнего и нижнего оснований
Шаровой сектор радиуса		Центр тяжести C лежит на оси симметрии, причем $$OC = \frac{3}{8}(2R - h),$$ где h – высота шарового сегмента
Шаровой сегмент радиуса		Центр тяжести C лежит на оси симметрии на расстоянии от основания сегмента $$AC = \frac{3}{4}\frac{(2R - h)^2}{(3R - h)}$$
Параболоид вращения		Центр тяжести C лежит на оси симметрии на расстоянии от вершины параболоида $$OC = \frac{2}{3}h,$$ где h – высота параболоида

1.8. Трение

1.8.1. Трение скольжения

При скольжении одного тела по поверхности другого (или при стремлении сдвинуть его) в плоскости соприкосновения тел возникают силы сопротивления, препятствующие их относительному движению (рис. 1.35).

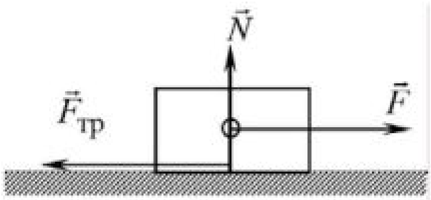


Рис. 1.35. К понятию *трения скольжения*

Эти силы называются силами трения скольжения. Во многих задачах механики, в том числе и при рассмотрении равновесия тел, приходится учитывать действие этих сил. С этой целью используются приближенные законы трения скольжения, полученные опытным путем. Их сущность сводится к следующим утверждениям:

1. Силы трения появляются лишь тогда, когда другие приложенные к телу силы стремятся сдвинуть его (или когда оно уже скользит) по поверхности другого тела.

Сила трения, действующая на данное тело, направлена в сторону, противоположную направлению относительного движения тела, или в сторону, противоположную той, куда действующие силы стремятся сдвинуть тело.

2. В конкретных условиях сила трения может принимать любые значения в пределах от нуля до некоторого предельного значения $F_{пред}$, которое достигается в состоянии относительного проскальзывания или в состоянии предельного равновесия тела.

3. Величина предельной силы трения пропорциональна силе нормального давления N между трущимися поверхностями и не зависит от величины площади соприкасания тел:

$$F_{пред} = N f, \tag{1.56}$$

где f – коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом трения скольжения.

Объединяя второй и третий законы можем записать:

$$0 \le F_{тр} \le Nf, \tag{1.57}$$

причем $F_{тр} = N f$ – в состоянии относительного проскальзывания или в состоянии предельного равновесия, а в остальных случаях значение $F_{тр}$ определяется из уравнений равновесия.

1.8.2. Угол и конус трения

Рассматривая реакции связей, мы предполагали, что при свободном опирании тела на какую-то поверхность, ее реакция направлена по нормали к ней. Опыт показывает, что это предположение не соответствует действительности. Оказывается, реакция реальной (негладкой) неподвижной поверхности образует с нормалью некоторый угол (рис. 1.36) и ее можно разложить на две составляющие: силу $\vec{N}$, направленную по нормали к опорной поверхности, и силу $\vec{F}_{тр}$, лежащую в касательной плоскости и препятствующую скольжению тела по этой поверхности.

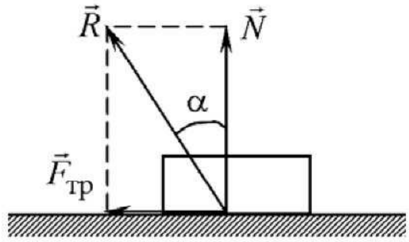


Рис. 1.36. К определению реакции связи негладкой поверхности

Величина этого угла определяется значением силы трения, которая развивается между телом и связью. Но сила трения не может превосходить своего предельного значения. Поэтому наибольшее значение угла α находим из выражения:

$$\mathrm{tg}\alpha_{\max} = f \tag{1.58}$$

или

$$\alpha_{\max} = \mathrm{arctg}\, f = \varphi \tag{1.59}$$

Этот *наибольший угол, на который может отклониться линия действия силы реакции негладкой поверхности от нормали, проведенной к ней в точке контакта тел, называется углом трения скольжения. Тангенс угла трения равен коэффициенту трения скольжения:*

$$tg\varphi = f \tag{1.60}$$

Геометрическое место прямых линий, проведенных из точки A под углом к нормали опорной поверхности в точке A, называется конусом трения (рис. 1.37). Если коэффициент трения скольжения имеет одинаковые значения во всех направлениях, то конус трения – круговой. Если же коэффициент трения в различных направлениях неодинаков, то конус трения не будет круговым.

Таким образом, линия действия полной реакции негладкой поверхности всегда отклонена от нормали к этой поверхности и в случае относительного проскальзывания тела по этой поверхности проходит по образующей конуса трения, а при относительном равновесии – внутри него.

Введенные понятия «*конус трения*» и «*угол трения*» имеют не только теоретическое значение. Их применение позволяет решить вопрос о возможном поведении тела на негладкой поверхности при приложении к нему заданных сил.

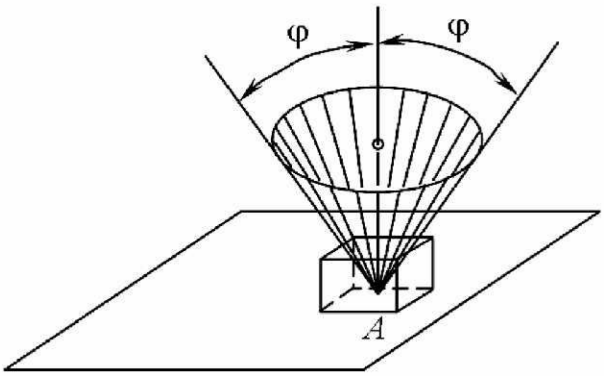


Рис. 1.37. К понятию *конуса трения*

Заштрихованная на рис. 1.37 зона представляет область, обладающую замечательным свойством: как бы ни была велика по интенсивности сила, линия действия которой расположена внутри этой области, эта сила не приведет в движение тело, опирающееся на плоскость. Сдвиг тела возможен лишь такой силой, линия действия которой проходит вне конуса трения.

1.8.3. Трение качения

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

Представим себе колесо, стоящее на горизонтальной плоскости (рис. 1.38). Пусть $\vec{P}$ – вес колеса и его линия действия проходит через центр O колеса. Приложим в этой точке горизонтальную силу $\vec{T}$.

При действии сдвигающего усилия $\vec{T}$ в месте контакта катка и поверхности возникает сила трения скольжения $\vec{F}_{тр}$, препятствующая проскальзыванию катка. Эти две равные по модулю силы $\vec{T}$ и $\vec{F}_{тр}$ образуют пару, которая стремится повернуть каток.

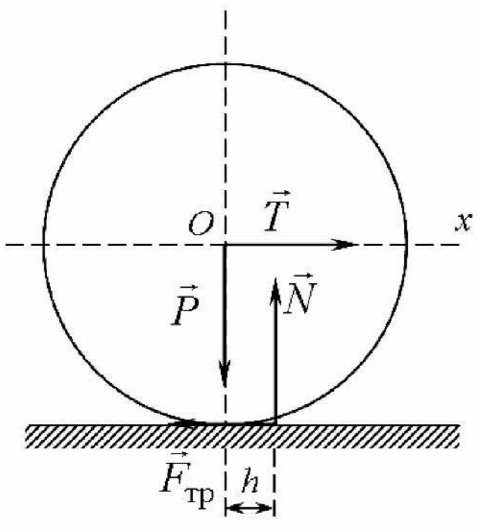


Рис. 1.38. К понятию *трения качения*

Под действием силы $\vec{P}$ происходит деформация в месте контакта, и нормальная реакция $\vec{N}$ сдвигается в сторону действия силы $\vec{T}$ на некоторое расстояние h. В результате силы $\vec{P}$ и $\vec{N}$ образуют другую пару, препятствующую действию пары ($\vec{T}$, $\vec{F}_{тр}$). Максимальную величину $h = k$, соответствующую предельному положению равновесия, называют *коэффициентом трения качения*. В отличие от безразмерного коэффициента трения скольжения f коэффициент трения качения k имеет размерность длины.

Значение $\vec{T}$, соответствующее случаю предельного равновесия:

$$T = N\frac{k}{r} \tag{1.61}$$

При $T > Nk/r$ каток начнет катиться. Отметим, что трение качения возникает только при перекатывании упругих тел. Если же соприкасающиеся тела абсолютно твердые, то деформации нет и $T = 0$, то есть для качения абсолютно твердого катка по абсолютно твердой поверхности не потребуется никакой силы.

Обычно сила T, определенная по уравнению (1.61), значительно меньше максимальной силы трения скольжения, определенной по (1.56). Поэтому тела преодолевают трение качения значительно раньше, чем начнется скольжение. Благодаря малому сопротивлению движению подшипники качения и получили большое применение в технике.

Скольжение возможно при $T > fN$, а качение начинается при $T > Nk/r$. Таким образом, если $f > k/r$,то скольжение не возможно; если $f = k/r$,то происходит одновременно и качение и скольжение; если же $f < k/r$ – качение невозможно.

При решении задач действие трения качения учитывается моментом сил сопротивления качению M_c (рис. 1.39). Его величина, как и величина силы трения скольжения, изменяется от нуля до предельного значения:

$$0 \le M_c \le M_{пред}, \tag{1.62}$$

где $M_{пред} = Nk$. (1.63)

Своего предельного значения момент сил сопротивления качению достигает в состоянии движения, то есть при перекатывании колеса.

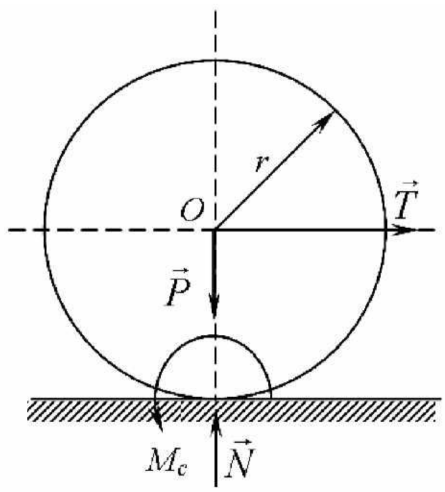


Рис. 1.39. К определению момента сил сопротивления качению

1.9. Вопросы для самоконтроля

1. В чем состоит предмет статики?
2. Что называется материальной точкой? Системой материальных точек?
3. Что называется абсолютно твердым телом?
4. Что такое сила и какими признаками она характеризуется?
5. Что называется системой сил?
6. Что называется равнодействующей силой? Уравновешивающей силой? В чем их отличие?
7. Какие системы сил называются эквивалентными?
8. Какая система сил называется уравновешенной или системой сил, эквивалентной нулю?
9. Какая система называется уравновешивающей ?
10. Сформулируйте аксиомы статики.
11. Чем отличается несвободное тело от свободного?
12. Что называют связью?
13. Что называют силой реакции связи?
14. В чем заключается аксиома или принцип освобождаемости от связи?
15. Перечислите основные типы связей. Как направлены их реакции в каждом случае?
16. Сформулируйте геометрический и аналитический методы определения равнодействующей плоской и пространственной системы сходящихся сил?
17. Как проектируется сила на ось и на плоскость? Чем отличаются эти проекции и как они вычисляются?
18. Как формулируются условия равновесия системы сходящихся сил в геометрической и аналитической формах?
19. Сформулируйте теорему о равновесии трёх непараллельных сил?
20. Что называется парой сил? Системой пар сил?
21. Разъясните основные характеристики пары сил?
22. Сформулируйте теоремы об эквивалентности пар сил?
23. Как направлен и чему равен по модулю вектор-момент пары сил?
24. При каком условии две пары будут эквивалентны?
25. В чём состоит теорема о сложении пар сил, расположенных в одной плоскости и различных плоскостях?
26. В чём состоит условие равновесия системы пар, расположенных в одной плоскости и в различных плоскостях?

27. Какая система сил называется произвольной плоской системой сил?

28. Как определяется на плоскости момент силы относительно точки (центра)?

29. Как направлен и чему равен по модулю вектор-момент силы относительно точки?

30. В каком случае момент силы относительно точки равен нулю?

31. Что называется момент силы относительно данной оси и как выбирается знак этого момента?

32. В каких случаях момент силы относительно данной оси равен нулю?

33. Какая существует зависимость между вектором- моментом силы относительно данной точки и моментом той же силы относительно оси, проходящей через эту точку?

34. Что называется главным вектором произвольной плоской (или произвольной пространственной) системы сил? Какая разница между главным вектором и равнодействующей? Какое сходство?

35. Изменится ли главный вектор данной системы сил при перемене центра приведения?

36. Что называется главным моментом произвольной плоской системы сил и главным вектором-моментом произвольной пространственной системы сил?

37. Сформулируйте теорему о параллельном переносе силы.

38. Расскажите о приведении произвольной пространственной системы сил к центру.

39. Перечислите различные случаи приведения произвольной плоской системы сил к центру. То же для произвольной пространственной системы сил.

40. Сформулируйте условия равновесия произвольной плоской системы сил.

41. Какие формы условий равновесия произвольной плоской системы сил вы знаете?

42. Сформулируйте условия равновесия произвольной пространственной системы сил.

43. Сформулируйте условия равновесия пространственной и плоской системы параллельных сил.

44. В каком случае произвольная пространственная система сил приводится к динамическому винту?

45. Что называется центральной винтовой осью произвольной пространственной системы сил?

46. Какие задачи называются статически определимыми и неопределимыми?

47. В чем заключается метод решения задачи о равновесии системы, состоящей из нескольких твердых тел?

48. Расскажите о методах расчета плоской фермы.

49. Каким свойством обладает центр параллельных сил?

50. По каким формулам вычисляется радиус-вектор и координаты параллельных сил?

51. По каким формулам вычисляются координаты центра тяжести однородных тел, плоских фигур и линий?

52. Что называется статическим моментом площади плоской фигуры относительно оси? Как он вычисляется и какую имеет размерность?

53. Как определить положение центра тяжести площади, если известно положение центров тяжести отдельных ее частей?

54. Какие существуют способы нахождения центров тяжести тел? В чем заключаются эти способы?

55. В чем заключается способ отрицательных площадей и объемов для определения центра тяжести тел?

2. КИНЕМАТИКА

Механика – наука об общих законах механического движения и механического взаимодействия материальных тел.

Механическое движение – это изменение положения тел в пространстве с течением времени.

О таком движении можно говорить лишь в том случае, если указано еще какое-то тело, относительно которого рассматривается положение интересующего нас тела. Такие тела называются *телами отсчета.*

Пространство и время являются всеобщими формами существования движущейся материи. Их реальные свойства тесно связаны друг с другом. Но в классической механике (в отличие от механики релятивистской, то есть механики в теории относительности) эти свойства не учитываются и считается, что время изменяется одинаково во всех системах отсчета и для всех тел. При математическом описании механического движения время выступает в роли универсального аргумента.

Пространство в классической механике считается трехмерным, а его свойства, одинаковые во всех направлениях, описываются геометрией Евклида.

Механическое движение сопровождается механическим взаимодействием. Оно приводит к изменению состояния движения взаимодействующих тел или к изменению их формы и размеров.

В теоретической механике рассматривается движение и взаимодействие абсолютно твердых тел, то есть таких тел, у которых не изменяется расстояние между любыми его точками.

Основной задачей кинематики является определение таких параметров, которые характеризуют геометрические свойства и особенности механического движения в данный момент времени, а так же – их изменение с течением времени.

2.1. Кинематика точки

2.1.1. Способы задания движения точки

Движение точки можно определить тремя способами: векторным, координатным и естественным.

Векторный способ. Положение точки можно определить с помощью радиус-вектора $\overrightarrow{r_M}$, проведенного из некоторой заданной неподвижной точки O в данную точку M (рис. 2.1). При движении точки радиус-вектор $\overrightarrow{r_M}$

изменяется по величине и направлению. Каждому моменту времени t соответствует свое значение $\overrightarrow{r_M}$. Следовательно, $\overrightarrow{r_M}$ является функцией времени t:

$$\overrightarrow{r_M} = \overrightarrow{r_M}(t) \tag{2.1}$$

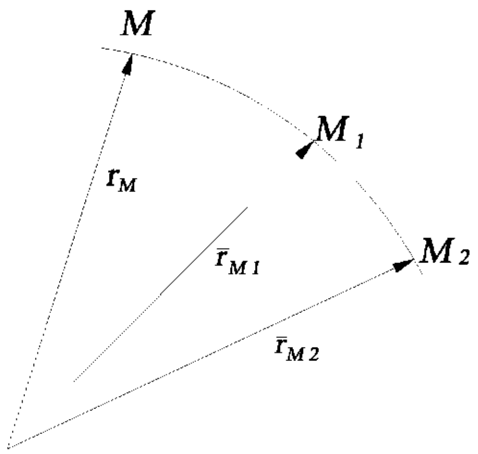


Рис. 2.1. К векторному способу задания движения точки

Уравнение (2.1) называется *кинематическим уравнением движения точки в векторной форме*. Оно позволяет найти положение точки в пространстве в любой момент времени t. Поэтому (2.1) является законом движения точки, а также описывает в векторной форме траекторию точки.

Векторный способ определения движения точки применяется в радиолокации и телеметрии.

Координатный способ. Этот способ определения движения точки состоит в том, что задаются координаты точки как функции времени. Так в прямоугольной пространственной системе координат $Oxyz$:

$$x_M = f_1(t); \quad y_M = f_2(t); \quad z_M = f_3(t) \tag{2.2}$$

Между векторным и координатным способами задания движения точки существует следующая связь (рис. 2.2):

$$\vec{r}_M = i\vec{x}_M + j\vec{y}_M + k\vec{z}_M \tag{2.3}$$

где i, j, k – орты (или единичные векторы) соответственно направленные по осям координат Ox, Oy, Oz.

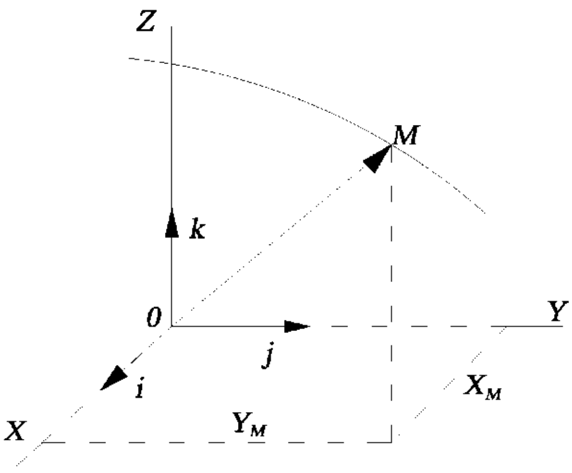


Рис. 2.2. К координатному способу задания движения точки

Уравнения (2.2) являются уравнениями траектории в параметрической форме. Исключая параметр t из уравнений (2.2), получаем уравнение траектории в явной форме.

Координатный способ определения движения точки широко используется в морской навигации, где появление корабля определяется его географическими координатами (широта, долгота).

Естественный способ. Если траектория точки известна заранее, то для определения закона движения точки в пространстве достаточно задать положение точки на ее траектории. С этой целью одну из точек, например O, на траектории принимают за начало отсчета дуговых координат, а положение движущейся точки M определяют ее расстоянием от точки O. При этом расстояние $\breve{OM} = S_M$ отсчитывается по дуге траектории (рис. 2.3).

При движении точки это расстояние изменяется так, что

$$\breve{OM} = S_M = f(t) \tag{2.4}$$

Уравнение (2.4) называется *законом движения точки по траектории*.

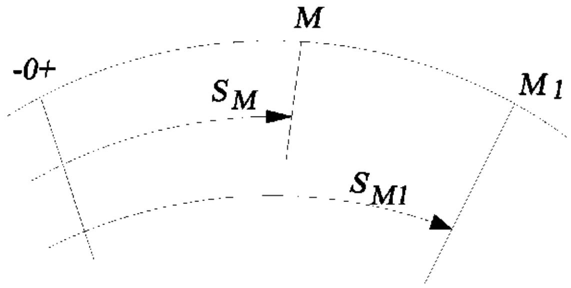


Рис. 2.3. К естественному способу задания движения точки

Таким образом, при естественном способе задания движения точки необходимо, чтобы были указаны: траектория точки, начало отсчета дуговых координат (точка O) и закон движения точки M по траектории. Кроме этого должно быть указано, в каком направлении от точки O следует откладывать положительные и отрицательные значения дуговых координат. Иными словами, должны быть указаны положительное и отрицательное направления движения точки.

Естественный способ задания движения точки является единственно приемлемым для железнодорожного транспорта.

2.1.2. Скорость точки

Скоростью точки называют одну из кинематических мер ее движения. Эта величина показывает как быстро и в каком направлении происходит движение точки. Выясним, каким математическим выражением можно описать это понятие. Для этого рассмотрим векторный способ задания движения точки.

Радиус-вектор $\bar{r} = \bar{r}(t)$ определяет положение точки в пространстве в данный момент времени t, а радиус-вектор $\bar{r} = \bar{r}(t + \Delta t)$ – в момент времени $(t + \Delta t)$ (рис. 2.4). Изменение радиус-вектора за промежуток времени Δt

$$\overline{\Delta r} = \bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t) \tag{2.5}$$

называется *перемещением точки за этот промежуток времени*. Он показывает на какое расстояние и в каком направлении произошло изменение положения точки в пространстве, то есть характеризует движение точки за этот промежуток времени только с геометрической точки зрения, сравнивая положения точки в различные моменты времени.

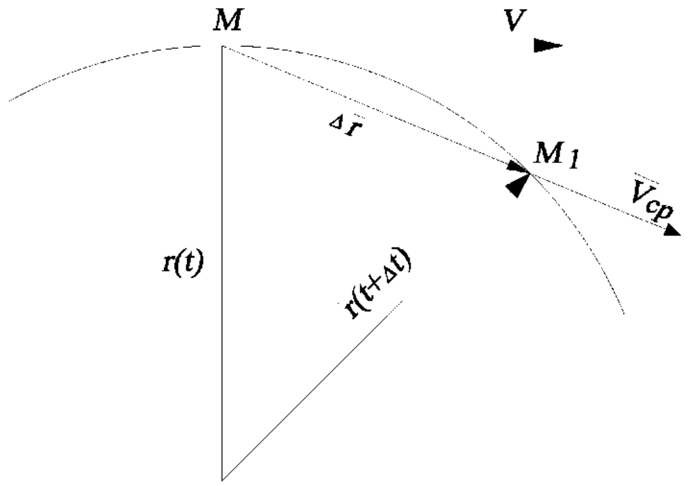


Рис. 2.4. К понятию скорости точки

Отношение перемещения точки $\Delta\vec{r}$ к промежутку времени Δt характеризует среднюю быстроту, с которой произошло движение точки внутри этого промежутка времени, а также – в каком направлении оно произошло. Это отношение считают *средней скоростью* точки за этот промежуток времени Δt

$$\vec{V}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{2.6}$$

Средняя скорость $\vec{V}_{cp}$ направлена по секущей MM_1, проведенной к траектории точки.

Перейдя к пределу этого отношения при $\Delta t \to 0$, получим вектор, характеризующий и быстроту и направление движения точки в момент времени t.

$$\vec{V} = \lim \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{2.7}$$

Очевидно, что он направлен по касательной, проведенной к траектории точки из положения M.

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{2.8}$$

Именно эту производную по времени от радиус-вектора движущейся точки и имеют в виду, когда говорят о скорости точки (о векторе скорости точки).

Полученная формула одновременно является математическим выражением для вычисления скорости точки при векторном способе задания движения этой точки.

Скорость точки в прямоугольной декартовой системе координат. Если движение точки задано координатным способом:

$$x_M = f_1(t);\ y_M = f_1(t);\ z_M = f_3(t),$$

то скорость точки определяется по ее проекциям на оси координат. Действительно, разложим вектор скорости $\vec{V}_M$ и радиус-вектор $\vec{x}_M$ по ортам координатных осей (рис. 2.2). Получим

$$\overline{V_M} = \bar{i}V_X + \bar{j}V_Y + \bar{k}V_Z, \tag{2.9}$$

$$\vec{r}_M = \vec{i}x_M + \vec{j}y_M + \vec{k}z_M, \tag{2.10}$$

где x_M, y_M, z_M – координаты движущейся точки; V_x, V_y, V_z – проекции скорости на оси координат.

По определению скорости имеем: $\vec{V}_M = \dfrac{d\vec{r}_M}{dt}$.

Подставляя в эту формулу значения $\vec{V}_M$, $\vec{r}_m$ получим:

$$\vec{i}V_x + \vec{j}V_y + \vec{k}V_z = \vec{i}\,\frac{dx_M}{dt} + \vec{j}\,\frac{dy_M}{dt} + \vec{k}\,\frac{dz_M}{dt} \tag{2.11}$$

откуда

$$V_x = \frac{dx_M}{dt};\ V_y = \frac{dy_M}{dt};\ V_z = \frac{dz_M}{dt} \tag{2.12}$$

Следовательно, *проекции скорости на оси координат равны первым производным по времени от соответствующих координат точки*. Модуль скорости определяется по формуле

$$V_M = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \tag{2.13}$$

Направление скорости определяется по направляющим косинусам

$$cos\left(\vec{V}_M \wedge x\right) = \frac{V_x}{V_M};\ \cos\left(\vec{V}_M\ y\right) = \frac{V_y}{V_M};\ \cos\left(\vec{V}_M\ z\right) = \frac{V_z}{V_M} \tag{2.14}$$

Скорость точки в естественных координатах. Движение точки будет задано в естественной форме, если известна ее траектория и закон (или уравнение) движения по траектории $S_M = f(t)$, где S_M – дуговая координата точки (рис. 2.5), заданная как функция времени. Точка O – начало дуговых координат.

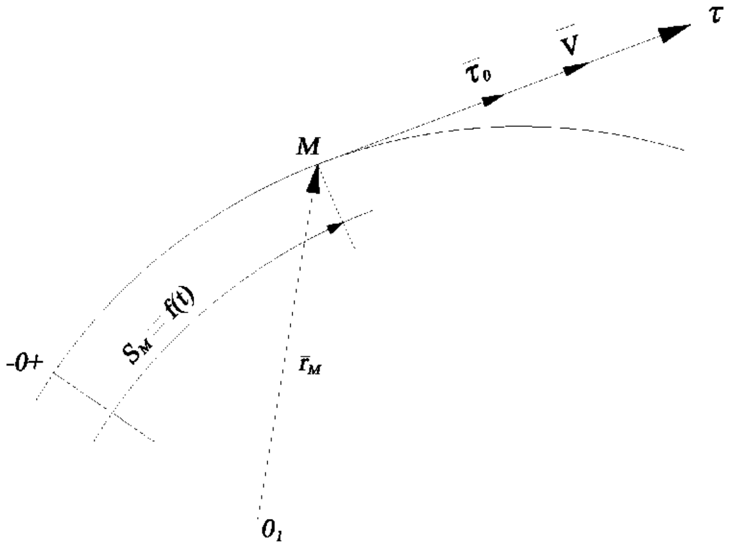


Рис. 2.5. К понятию алгебраической скорости точки

Направим ось $M\tau$ (касательную к траектории в положении M) в сторону увеличения дуговых координат. Единичный вектор (орт) этой оси обозначим $\vec{\tau}^0$. так как вектор скорости точки направлен тоже по касательной к траектории в данном месте M, то

$$\vec{V}_M = \left(Пр_\tau \vec{V}_M\right)\vec{\tau}^0 = V_\tau \vec{\tau}^0 \tag{2.15}$$

Проведем из неподвижной точки O_1 радиус-вектор точки M – $\vec{r}_M$

$$\vec{r}_M = \vec{r}\left(\vec{s}_M\right) = \vec{r}\left[s_M(t)\right] \tag{2.16}$$

Величина $V_\tau = Пр_\tau \vec{V}_M$ быть положительной, если движение происходит в сторону увеличения дуговых координат в положительном направлении по траектории отрицательной или равной нулю. Ее называют алгебраической скоростью точки (в отличие от вектора $\vec{V}_M$ и его модуля $\left|\vec{V}_M\right| = V_M$).

Выясним, как можно вычислить алгебраическую скорость точки, применяя формулу (2.8), получим

$$\vec{V}_M = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt}, \tag{2.17}$$

где $\left|\dfrac{d\vec{r}}{dS}\right| = 1$ – единичный орт касательной.

$$\bar{V}_M = \frac{dS_M}{dt} \cdot \bar{\tau}^0 \tag{2.18}$$

Сравнивая это выражение с уравнением (2.15), делаем вывод, что алгебраическая скорость точки (проекция вектора скорости на направление касательной к траектории) равна первой производной по времени от дуговой координаты точки

$$V_{ал} = \frac{dS_M}{dt}. \tag{2.19}$$

Скорость точки при естественном способе задания движения находится дифференцированием по времени закона движения точки по траектории.

2.1.3. Ускорение точки

Кинематическая мера, характеризующая быстроту изменения во времени скорости точки, называется *ускорением*.

Рассмотрим два сколь угодно близких положения точек M и M_1 на траектории. Скорость точки M обозначим $\vec{V}_M$,а в точке M_1 – $\vec{V}_M$ (рис. 2.6). Геометрическое приращение вектора скорости за промежуток времени Δt найдем, построив в точке M вектор, равный $\vec{V}_1$ и соединив концы векторов $\vec{V}_M$ и ($\vec{V}_1$).

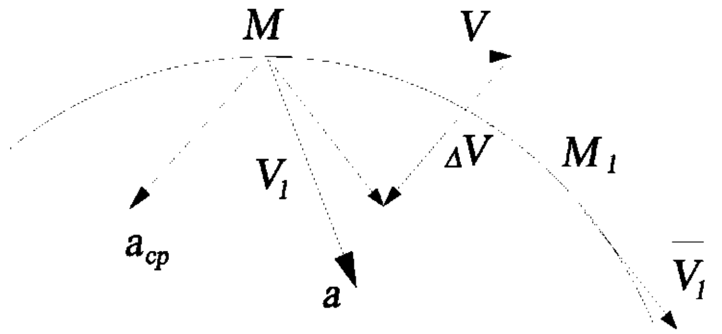


Рис. 2.6. К понятию *ускорения* точки

Отношение $\Delta \vec{v}_M$ к Δt представляет собой среднее ускорение $\vec{a}_{cp}$, то есть

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{V}_M}{\Delta t} \tag{2.20}$$

Вектор $\vec{a}_{cp}$ имеет направление $\Delta \vec{V}_M$ (рис. 2.6)

Переходя в (2.20) к пределу при $\Delta t \to 0$, найдем ускорение в данный момент времени

Если этот предел существует, то получим

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{V}_M}{dt} = \overrightarrow{\dot{V}_M} \tag{2.22}$$

или

$$\vec{a}_M = \frac{\overrightarrow{d^2 r_M}}{dt^2} = \overrightarrow{\ddot{r}_M}\ , \tag{2.23}$$

так как

$$\vec{V}_M = \frac{\overrightarrow{dr_M}}{dt} = \overrightarrow{\dot{r}_M}\ . \tag{2.24}$$

Из (2.22) видно, что ускорение точки равно нулю лишь тогда, когда скорость точки $\overrightarrow{V_M}$ постоянна как по величине, так и по направлению. Это соответствует только прямолинейному и равномерному движению. В системе СИ за единицу ускорения принимают 1 м/с^2.

Так как *ускорение в данной точке* равно первой производной по времени от скорости, то оно *направлено по касательной* к годографу скорости. Проводя в каждой точке траектории векторы, соответственно равные $\frac{\overrightarrow{dV_M}}{dt}$ определим направление ускорения в каждой точке (рис. 2.6).

Проекции ускорения на оси декартовых координат. Если движение точки задано координатным способом: $x_м = f_1(t)$; $y_м = f_2(t)$; $z_м = f_3(t)$, то, раскладывая векторы $\overrightarrow{a_M}$, $\overrightarrow{V_M}$ по ортам координатных осей, получим

$$\overrightarrow{V_M} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k} \tag{2.25}$$

$$V_x = \frac{dx_M}{dt};\ V_y = \frac{dy_M}{dt};\ V_z = \frac{dz_M}{dt} \tag{2.26}$$

$$\bar{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \frac{dV_x}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k}$$

или
$$a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \frac{d^2x_M}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y_M}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z_M}{dt^2}\vec{k}\ ,$$

где a_x, a_y, a_z, – проекция ускорения на оси координат.

На основании (2.22) можно написать:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x_M}{dt^2};\ \ a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y_M}{dt^2};\ \ a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z_M}{dt^2} \tag{2.27}$$

Проекции ускорения на неподвижные оси координат равны первым производным по времени от соответствующих проекций скорости на те же оси или вторым производным по времени от соответствующих координат движущейся точки.

Модуль ускорения

$$a_M = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (2.28)$$

Направляющие косинусы ускорения соответственно равны

$$\cos(\overrightarrow{a_M}\,\hat{}\,x) = \frac{a_x}{a_M};\ \cos(\overrightarrow{a_M}\,\hat{}\,y) = \frac{a_y}{a_x} \qquad (2.29)$$

Понятие о естественных осях и естественном трехграннике. Кинематические характеристики движения точки тесно связаны с геометрическими свойствами траектории. Поэтому целесообразно рассматривать движение точки в системе координат, образованной главными направлениями пространственной кривой. Как известно из дифференциальной геометрии, в каждой точке кривой можно провести одну касательную линию $M\tau$ и бесконечное множество нормалей. Их геометрическое место представляет собой единственную в точке M нормальную плоскость N.

Проведем через $M\tau$ касательную плоскость. Вращая ее вокруг $M\tau$, можно получить сколько угодно плоскостей, касающихся кривой в точке M. Среди этих плоскостей найдутся такие, к которым кривая как бы прилегает наибольшим или наименьшим числом своих точек. Эти плоскости называются соприкасающейся и спрямляющей. Наименование последней происходит от того, что если заставить кривую касаться этой плоскости большим числом своих точек, то кривая начнет спрямляться. Эти три характерные плоскости, которые можно провести в точке M, между собой взаимно перпендикулярны и образуют так называемый естественный трехгранник.

Линии пересечения этих плоскостей (рис. 2.7) образуют так называемую естественную систему координат. Оси этой системы называются касательной – $M\tau$, главной нормалью – Mn и бинормалью – $Mв$. При этом $M\tau$ получается пересечением соприкасающейся и спрямляющей плоскостей; Mn – пересечением нормальной и соприкасающейся плоскостей; $Mв$ пересечением нормальной и спрямляющей плоскостей.

Положительное направление осей выбирают следующим образом:

– $M\tau$ – в сторону увеличения дуговой координаты;

– Mn – в сторону вогнутости кривой, к центру ее кривизны;

– $Mв$ так, чтобы получилась правая система координат: $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$.

Рис. 2.7. Естественный трехгранник и естественные оси координат

При движении точки M по траектории вместе с ней перемещается и связанная с ней естественная система координат, направления осей которых непрерывно изменяется в пространстве.

О кивизне кривой. Угол между двумя касательными в двух сколь угодно близких точках M и M_1 на кривой называется углом смежности (рис. 2.8). Обозначим его через $\Delta\alpha$. Отношение $\Delta\alpha$ к элементу дуги ΔS называется *средней кривизной кривой* $K_{ср}$ на отрезке MM_1

$$K_{ср} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta S}. \qquad (2.30)$$

Предел этого отношения при $M_1 \to M$ называется *кривизной кривой* в данной точке:

$$K = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta S} = \lim_{M_1 \to M} \frac{\Delta\alpha}{\Delta S} = \frac{da}{dS} \qquad (2.31)$$

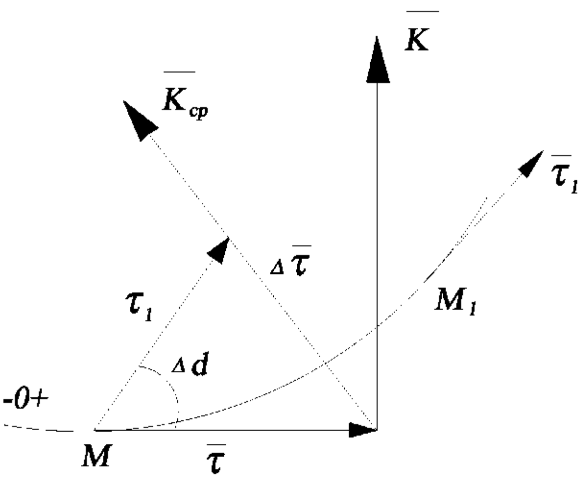


Рис. 2.8. К понятию *кривизны* кривой

Следует заметить, что в общем случае кривизна кривой не является постоянной величиной и изменяется от точки к точке.

Величина ρ *обратная кривизне кривой в данной точке* M называется *радиусом кривизны* кривой в этой точке: $\rho = \frac{1}{K}$, откуда

$$\rho = \frac{dS}{da}. \qquad (2.32)$$

Радиус кривизны имеет простой геометрический смысл: среди множества окружностей, касающихся кривой в точке M найдется такая, которая имеет наибольший порядок соприкосновения с кривой. Ее радиус и есть радиус кривизны кривой в точке M.

Теорема о разложении ускорения по осям естественного трехгранника

Теорема: **Полное ускорение точки равно векторной сумме касательного (тангенциального) и нормального (центростремительного) ускорения.**

Доказательство:

Пусть движение точки задано естественным образом, то есть известны траектория точки и уравнение движения по траектории S $S(t)$. Рассмотрим два бесконечно близких положения точки M на траектории (рис. 2.9). Скорость точки M будет $\vec{v}$, а точки M_1.

$$\vec{V}_1 = \vec{V} + \Delta\vec{V}. \tag{2.33}$$

Проведем в точке M касательную τ, ее главную нормаль n и найдем проекции ускорения точки на эти оси. В точке M проведем вектор, параллельный и равный $\vec{V}_1$. Угол между $\vec{V}$ и $\vec{V}_1$ – это угол смежности α. По определению ускорения $\vec{a}$, имеем

$$\vec{a} = \overrightarrow{\frac{dV}{dt}} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{\frac{\Delta V}{\Delta t}}. \tag{2.34}$$

Среднее ускорение $\overrightarrow{a_{ср}} = \dfrac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t}$ имеет направление вектора $\Delta\vec{V}$, и следовательно, расположено в плоскости, проходящей через касательную к траектории в точке M, параллельно касательной в смежной точке M_1 (см. рис. 2.9). Следовательно, ускорение в точке M, как предел среднего ускорения, когда точка M_1 стремится к точке M, расположено в соприкасающейся плоскости в точке M траектории и направлено в сторону вогнутости траектории.

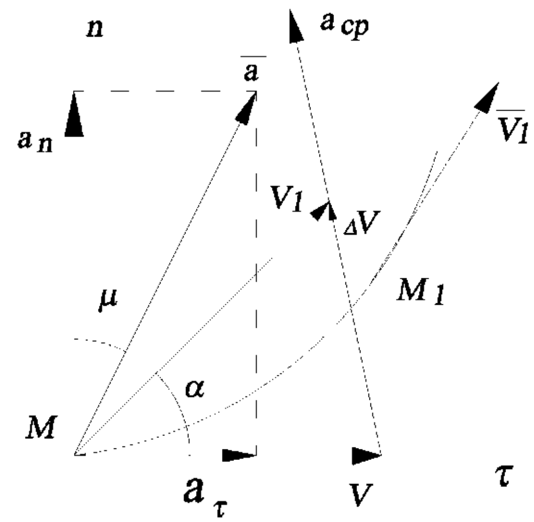


Рис. 2.9. К выводу формулы (2.35)

Таким образом, проекция ускорения на бинормаль равна нулю

$$a_в = 0.$$

Для нахождения проекции ускорения на касательную a_τ и главную нормали a_n рассмотрим движение точки по плоской кривой, так как вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости, совпадающей в этом случае с плоскостью рисунка (рис. 2.9).

Так как $\vec{V} = V_\tau \vec{\tau}^0$, а ускорение $\vec{a} = \frac{\overrightarrow{dV}}{dt}$, то

$$\vec{a} = V_\tau \frac{\overrightarrow{d\tau^0}}{dt} + \frac{dV_\tau}{dt}\vec{\tau}^0 \qquad (2.35)$$

При дифференцировании вектора неизменной величины он поворачивается на 90° в сторону вращения дифференцируемого вектора. В рассматриваемом случае замечаем, что независимо от направления движения точки M, вектор $\vec{\tau}^0$ поворачивается так, что после дифференцирования его направление совпадает с направлением главной нормали, поэтому первый вектор в формуле (2.35) направлен по главной нормали, то есть является нормальной $\vec{a}_n$ составляющей вектора ускорения. Вторая составляющая вектора $\vec{a}$ направлена по $\vec{\tau}^0$, то есть является его касательной составляющей $\vec{a}_\tau$.

Таким образом:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau. \qquad (2.36)$$

Определение проекций ускорения точки на касательную и главную нормаль (касательное и нормальное ускорение). Вычислим проекции вектора $\vec{a}$ на оси M_τ и M_n. Так как $V_\tau = \frac{dS}{dt}$, то проекция ускорения на касательную (касательное ускорение) будет

$$a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}. \qquad (2.37)$$

Оно *характеризует изменение скорости точки только по величине* и равно первой производной по времени от проекции скорости точки на направление касательной (от алгебраической скорости точки) или второй производной по времени от закона движения точки по траектории.

Найдем теперь проекцию ускорения на главную нормаль (нормальное ускорение).

Дифференцирование вектора $\vec{\tau}^0$ неизменной величины приводит к увеличению его модуля в $\frac{da}{dt}$ раз, где в данном случае a – угол смежности.

Заменяя $\frac{da}{dt} = \frac{da}{dS}$ и $\frac{dS}{dt} = \frac{V_\tau}{\rho}$, получаем

$$a_n = \frac{V_\tau^2}{\rho} = \frac{V^2}{\rho}. \qquad (2.38)$$

Нормальное ускорение *характеризует изменение скорости только по направлению*. Нормальное ускорение равно отношению квадрата скорости к радиусу кривизны. Нормальное ускорение всегда направлено по главной нормали в сторону вогнутости траектории (к центру кривизны).

Раскладывая ускорение на составляющие по естественным осям, получим

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau = \vec{a}_n \qquad (2.39)$$

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \qquad (2.40)$$

Направление ускорения определим по формуле

$$tg\mu = \frac{a_\tau}{a_n}, \qquad (2.41)$$

где μ – угол между полным ускорением $\vec{a}$ и нормалью (рис. 2.9).

Частные случаи движения точки:

- $a_n = 0$, $a_\tau = 0$ – прямолинейное равномерное движение, $V = \text{const}$;
- $a_n = 0$, $a_\tau \neq 0$ – прямолинейное неравномерное движение;
- $a_n \neq 0$, $a_\tau = 0$ – криволинейное неравномерное движение, $V = \text{const}$;
- $a_n \neq 0$, $a_\tau \neq 0$ – криволинейное равномерное движение.

2.2. Кинематика твердого тела

В кинематике твердого тела при различных видах движения интересуются кинематическими характеристиками как движения твердого тела в целом, так и кинематическими характеристиками движения отдельных его точек.

2.2.1. Простейшие движения твердого тела

К простейшим движениям твердого тела относятся поступательное движение и вращательное движение вокруг неподвижной оси.

Поступательное движение твердого тела. *Поступательным* называется такое движение твердого тела, при котором любая намеченная в нем прямая движется, оставаясь параллельной самой себе.

Устанавливаются основные свойства поступательного движения теоремой.

К простейшим движениям твердого тела относятся поступательное движение и вращательное движение вокруг неподвижной оси.

Поступательное движение твердого тела. *Поступательным* называется такое движение твердого тела, при котором любая намеченная в нем прямая движется, оставаясь параллельной самой себе.

Устанавливаются основные свойства поступательного движения теоремой.

Теорема. **При поступательном движении твердого тела траектории всех точек одинаковы (то есть совпадают при наложении), а скорости и ускорения всех точек геометрически равны** (рис. 2.10).

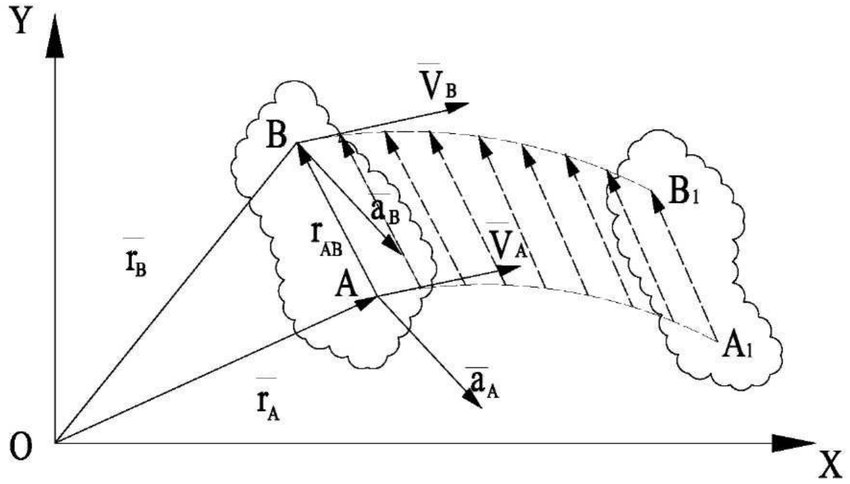


Рис. 2.10. К теореме о поступательном движении твердого тела

Это значит, что

$$\overline{V_B} = \overline{V_A} \quad \text{и} \quad \overline{\alpha_B} = \overline{\alpha_A}\,. \tag{2.42}$$

Из теоремы следует, что изучение поступательного движения твердого тела сводится к изучению движения какой-либо одной его точки, то есть к задаче кинематики точки. Уравнение поступательного движения тела имеют вид:

$$x_A = x_A(t)\,;\;\; y_A = y_A(t)\,;\;\; z_A = z_A(t)\,. \tag{2.43}$$

Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси. *Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором прямая, проходящая через какие-нибудь две точки тела, во время движения, остается неподвижной.* Эта прямая называется *осью вращения* тела. Обозначим ее Oz. Все остальные точки описывают окружности в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. Положение тела при вращении вокруг неподвижной оси определя-

При вращении тела угол поворота непрерывно изменяется по времени. Следовательно

$$\varphi = \varphi(t). \tag{2.44}$$

Уравнение (2.44) называется *кинематическим уравнением вращательного движения тела вокруг неподвижной оси.*

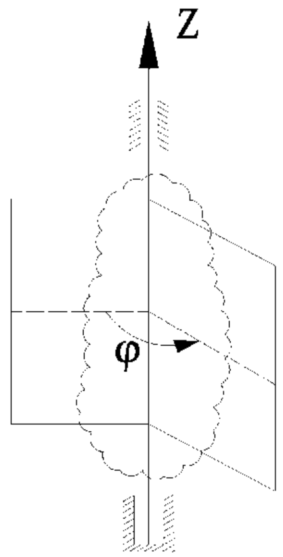


Рис. 2.11. К понятию вращательного движения твердого тела

2.2.2. Угловая скорость и угловое ускорение тела вращающегося вокруг неподвижной оси

Угловая скорость тела в данный момент (обозначается ω) *характеризует быстроту изменения угла поворота* в данный момент времени и равна производной по времени от кинематического уравнения вращения тела

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{2.45}$$

Угловая скорость измеряется в радианах в секунду. В технике угловую скорость часто задают числом оборотов в минуту, то есть частотой вращения. В этом случае угловую скорость, выраженную в рад/сек, определяют так

$$\omega = \frac{\pi n}{30}, \tag{2.46}$$

где n – число оборотов в минуту.

Знак ω совпадает со знаком φ.

Угловое ускорение характеризует быстроту изменения угловой скорости и обозначается буквой ε.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{2.47}$$

Угловое ускорение измеряется в рад/с^2 или 1/с^2 или с$^{-2}$.

Если в расчетах знаки ω и ε одинаковы, то вращение тела ускоренное, если противоположны – то замедленное.

Угол поворота, *угловая скорость* и *угловое ускорение* являются *кинематическими характеристиками вращательного движения* твердого тела вокруг неподвижной оси.

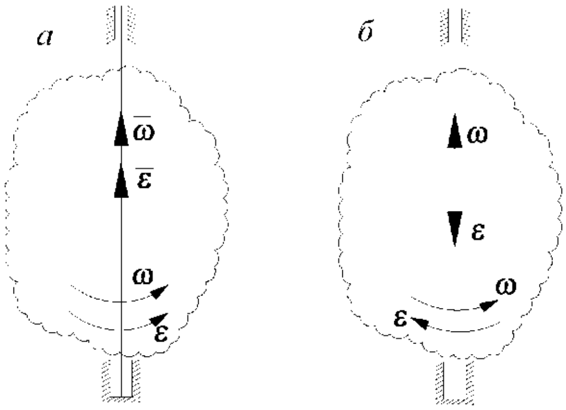


Рис. 2.12. Направление векторов $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ при вращательном движении: *а* – ускоренном; *б* – замедленном

Угловую скорость и угловое ускорение тела вращающегося вокруг неподвижной оси можно изобразить в виде векторов $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ направленных вдоль оси вращения (рис. 2.12 *а*, *в*), соблюдая правило: вектор $\bar{\omega}$ направляется вдоль оси вращения в ту сторону, чтобы, глядя с конца вектора $\bar{\omega}$ вращение тела было видно происходящим против хода часовой стрелки. Вектор $\bar{\varepsilon}$ направляется вдоль оси вращения с учетом характера вращения тела, то есть при ускоренном вращении векторы совпадают по направлению (рис. 2.12 *а*), при замедленном противоположны (рис. 2.12 *б*).

Определение скорости и ускорения точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Траекториями точек тела при его вращении вокруг неподвижной оси, являются окружностями расположенные в плоскостях перпендикулярных к оси вращения. Центры этих окружностей находятся в точках пересечения оси вращения с указанными плоскостями. Радиусы данных окружностей называются также радиусами вращения точек тела (рис. 2.13 *а*).

Скорость любой точки тела вращающегося вокруг неподвижной оси называется линейной. Скорости точек на ободе маховика или вращающегося диска называются также *окружными скоростями.*

Скорость точки K определяется

$$V_k = \omega \cdot h_k, \tag{2.48}$$

где h_k – расстояние от точки до оси вращения.

Линейная скорость точки тела вращающегося вокруг неподвижной оси по величине равна произведению радиуса вращения на величину угловой скорости. Линейная скорость направлена по касательной к окружности в сторону вращения и таким образом перпендикулярна радиусу вращения (рис. 2.13 *б*).

Полное ускорение точки можно вычислить, как векторную сумму касательного $\overline{a_\tau}$ и нормального $\overline{a_n}$ ускорений. Выразим эти ускорения через кинематические характеристики вращательного движения тела, то есть – через ω и ε

$$\begin{aligned} a_k^n &= \omega^2 \cdot h_k, \\ a_k^\tau &= \varepsilon \cdot h_k, \end{aligned} \tag{2.49}$$

$$a_k = \sqrt{(a_k^n)^2 + (a_k^\tau)^2}.$$

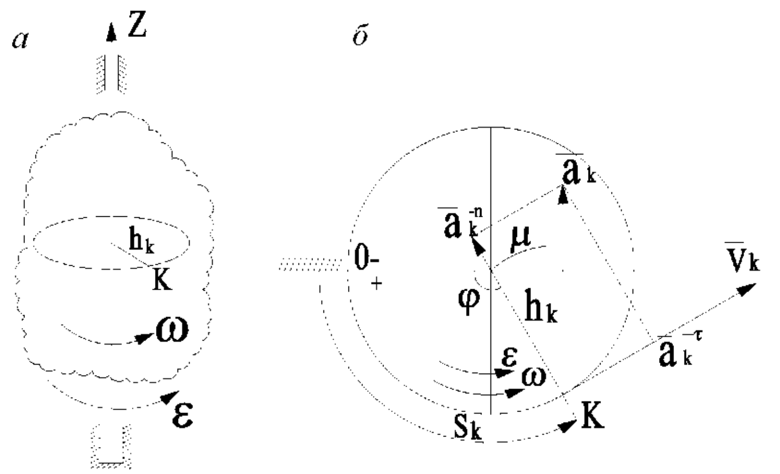


Рис. 2.13. К определению линейной скорости и ускорения точки при вращательном движении: *а* – вращающееся тело; *б* – распределение скорости и ускорения точки *K*

Следовательно, нормальное ускорение точки тела при вращении его вокруг неподвижной оси равно произведению радиуса вращения на квадрат угловой скорости. Касательное ускорение равно произведению радиуса вращения на угловое ускорение. Нормальное ускорение всегда направлено по радиусу вращения к центру вращения. Касательное ускорение направлено по касательной к траектории, то есть перпендикулярно радиусу вращения в сторону углового ускорения (рис. 2.2.4).

Модуль полного ускорения точки можно найти по формуле

$$a_k = h_k \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{2.50}$$

Направление полного ускорения определим по тангенсу угла μ (рис. 2.13, *б*), который образует вектор полного ускорения с нормальным ускорением. Получим

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{h_k \cdot |\varepsilon|}{h_k \omega^2} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$$

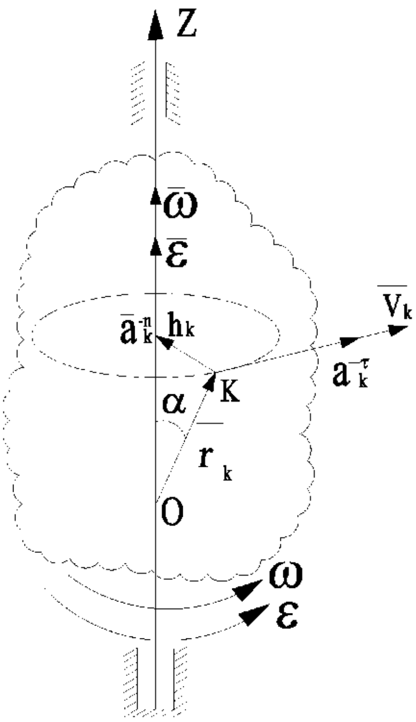


Рис. 2.14. К выводу формул (2.51) и (2.52)

Как следует из (2.49) величины скоростей и ускорений прямо пропорциональны удалению точек тела от оси вращения, а коэффициент пропорциональности зависит от угловой скорости и углового ускорения тела. То есть чем больше угловая скорость и угловое ускорение тела и чем дальше находится точка от оси вращения, тем больше ее скорость и ускорение. При этом вектор полного ускорения любой точки тела образуют с соответствующим радиусом вращения один и тот же угол μ, величина которого однозначно зависит от угловой скорости и углового ускорения тела.

Векторные формулы скорости и ускорения точки вращающегося тела. Линейная скорость точки тела вращающегося вокруг неподвижной оси равна векторному произведению угловой скорости тела на радиус-вектор точки (рис. 2.14)

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}\,. \tag{2.51}$$

Эта формула называется формулой Эйлера.

Вектор ускорения точки определяется как

$$\overline{a} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \overline{v}_k\,, \tag{2.52}$$

где $\overline{a}_\tau = \overline{\varepsilon} \times \overline{r}$ – касательное ускорение; $\overline{a}_n = \overline{\omega} \times \overline{v}_k$ – нормальное ускорение.

2.3. Плоскопараллельное движение твердого тела

2.3.1. Уравнения плоскопараллельного движения

Плоскопараллельным движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости H (рис. 2.15).

Плоское движение совершают многие части механизмов и машин. Частным случаем плоскопараллельного движения является вращательное движение твердого тела.

Рассмотрим сечение S тела какой-нибудь плоскостью $П$ (рис. 2.15), параллельной плоскости H при плоскопараллельном движении все точки тела, лежащие на прямой M_1M_2, перпендикулярной к сечению S движутся тождественно. Поэтому для изучения движения всего тела достаточно изучить движение сечения S в плоскости $П$. В дальнейшем будем плоскость $П$ совмещать с плоскостью рисунка и рассматривать движение плоской фигуры в плоскости $П$.

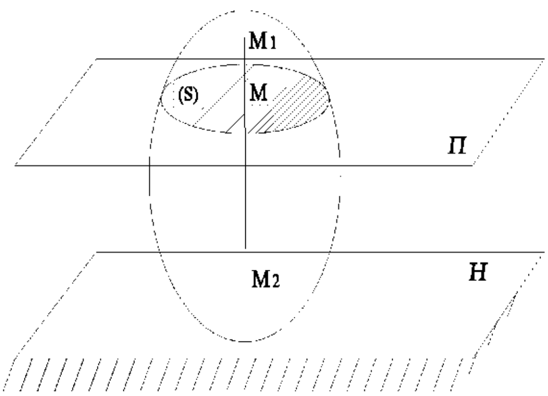


Рис. 2.15. К определению понятия плоскопараллельное движение твердого тела

Положение сечения S в плоскости $П$ определяется положением какого-нибудь проведенного в этом сечении отрезка AB. В свою очередь, зная координаты X_A,Y_A точки A и угол φ, который отрезок AB образует с осью X. (рис. 2.16)

Точку А, выбранную для определения положения сечения S, будем в дальнейшем называть *полюсом*.

При вращении тела величины X_A, Y_A, φ будут изменяться. Чтобы знать закон движения тела, то есть знать его положение в пространстве в любой момент времени, надо знать зависимости:

$$x_A = f_1(t),$$
$$y_A = f_2(t) \qquad (2.53)$$
$$\varphi = f_3(t).$$

Эти уравнения называются уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела.

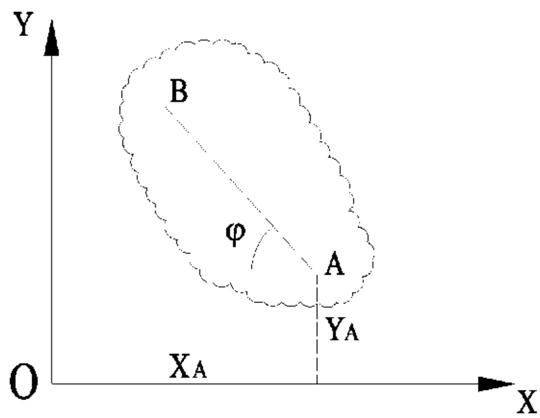


Рис. 2.16. К определению уравнений плоскопараллельного движения твердого тела

2.3.2. Разложение плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное

Плоскопараллельное движение тела состоит из суммы поступательного и вращательного движений. Из рис. 2.17 видно, что сечение S можно привести из положения 1 в положение 2 следующим образом. Переместить сначала тело поступательно, так, чтобы полюс A_1, двигаясь вдоль своей траектории, перешел а положение A_2, а затем повернем сечение вокруг полюса A_2 на угол φ_1. Аналогично за полюс можно принять точку B и переместить тело поступательно, так, что точка B_1 перейдет в положение B_2, а затем повернем сечение на угол φ_2 вокруг полюса B_2.

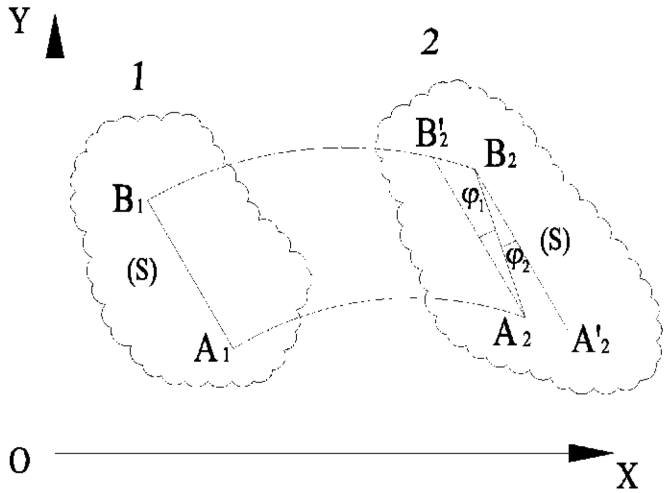


Рис. 2.17. О разложении плоскопараллельного движения на простейшие движения

Таким же путем можно переместить тело из положения 2 в положение 3 и т.д. отсюда заключаем, что *плоскопараллельное движение можно рассматривать как бесконечную последовательность бесконечно малых перемещений, поступательного вместе с полюсом и вращательного вокруг полюса.*

Основными кинетическими характеристиками рассмотренного движения является скорость и ускорение поступательного движения, равные скорости и ускорению полюса, также угловая скорость ω и угловое ускорение ε вращательного движения вокруг плюса. Значения этих характеристик в любой момент времени t можно найти по уравнениям. При изучении движения можно в качестве полюса выбирать любую точку тела, при этом кинетические характеристики поступательной части движения изменяются, а вращательная часть движения не изменится $\varphi_1 = \varphi_2$ (рис. 2.17). Следовательно, вращательная часть движения от выбора полюса не зависит, то есть $\omega_1 = \omega_2$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

2.3.3. Определение скоростей точек

Скорость любой точки при плоскопараллельном движении равна геометрической сумме скорости точки, принятой за полюс и скорости во вращательном движении этой точки относительно полюса (рис. 2.18)

$$\overline{V_B} = \overline{V_A} + \overline{V_{BA}} \tag{2.54}$$

где $\overline{V_A}$ – скорость точки принятой за полюс;

$\overline{V_{BA}}$ – вращательная скорость точки B относительно точки A; $V_{BA} = \omega \cdot AB$ и $\overline{V_{BA}} \perp AB$ направлен в сторону вращения плоской фигуры.

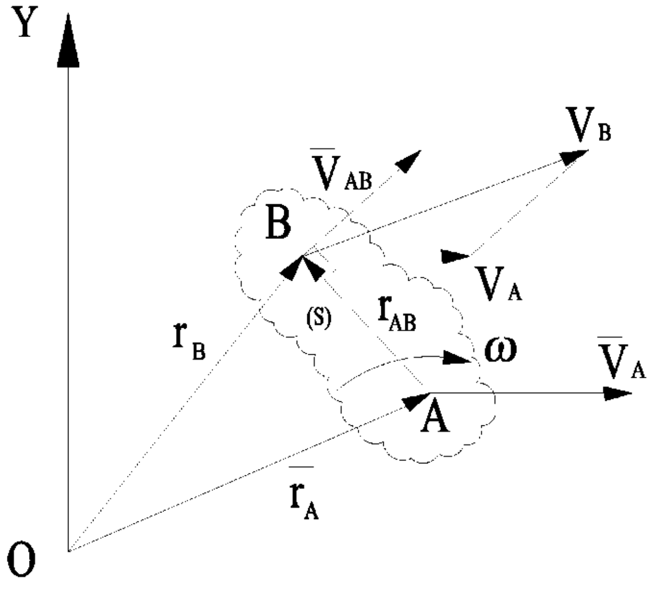


Рис. 2.18. К определению скорости точки B при плоскопараллельном движении

2.3.4. Теорема о проекциях скоростей двух точек

Проекции скоростей двух точек на прямую, соединяющую эти точки, равны (рис. 2.19).

$$\overline{V_B} = \overline{V_A} + \overline{V_{BA}}.$$

Если спроектировать это равенство на прямую AB учитывая, что $V_{BA} = \omega \cdot AB$ и $\overline{V_{AB}} \perp AB \to \omega$, получаем

$$\overline{V_B}\cos\beta = \overline{V_A}\cos\alpha \tag{2.55}$$

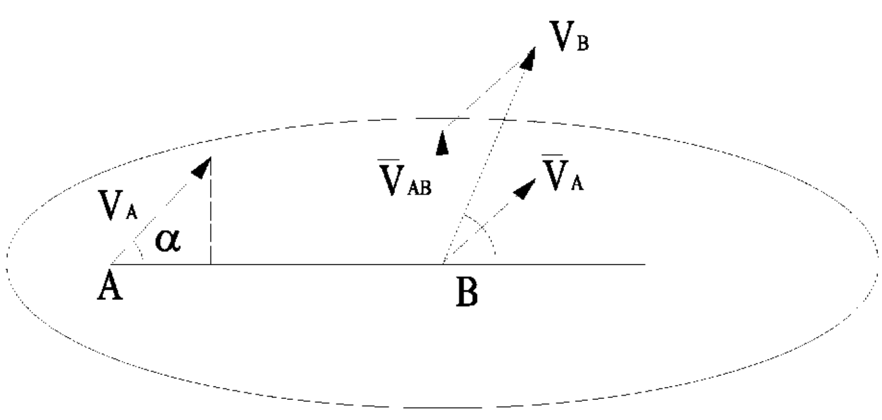


Рис. 2.19. Проекции скоростей двух точек на соединяющую их прямую

2.3.5. Мгновенный центр скоростей (МЦС)

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Эту точку обозначаем – P.

Теорема. **Для плоской фигуры в любой момент времени существует единственная точка, скорость которой равна нулю**, эта точка МЦС.

2.3.6. Определение скоростей точек с помощью мгновенного центра скоростей

Пусть в данный момент времени для плоской фигуры задана угловая скорость ω и положение МЦС – точки P (рис. 2.20). Скорости точек A, B и C определяются по формулам:

$$\begin{aligned} V_A &= \omega \cdot AP, \quad \overline{V_A} \perp AP \to \omega \\ V_B &= \omega \cdot BP, \quad \overline{V_B} \perp BP \to \omega \\ V_C &= \omega \cdot CP, \quad \overline{V_C} \perp CP \to \omega \end{aligned} \qquad (2.56)$$

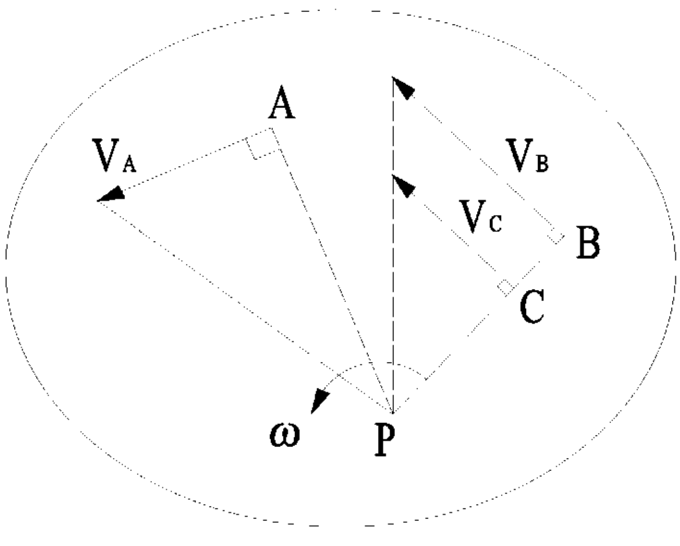


Рис. 2.20. Распределение скоростей точек относительно МЦС

Скорость любой точки плоской фигуры определяется как вращательная вокруг мгновенного центра скоростей. Используя (2.56), можно записать свойство скоростей точек при плоском движении относительно МЦС

$$\frac{V_B}{V_C} = \frac{BP}{CP}$$

Скорости точек при плоскопараллельном движении пропорциональны расстояниям до мгновенного центра скоростей.

2.3.7. Способы нахождения мгновенного центра скоростей

1. Если тело катится без проскальзывания (рис. 2.21) по неподвижной поверхности, то точка касания является мгновенным центром скоростей.

2. Пусть для плоской фигуры в данный момент времени (рис. 2.22) известна скорость точки A и угловая скорость ω фигуры. Находим положение мгновенного центра скоростей, вычисляя расстояние $AP = \frac{V_A}{\omega}$ и откладывая его на перпендикуляре к $\overline{V_A}$ в сторону ω.

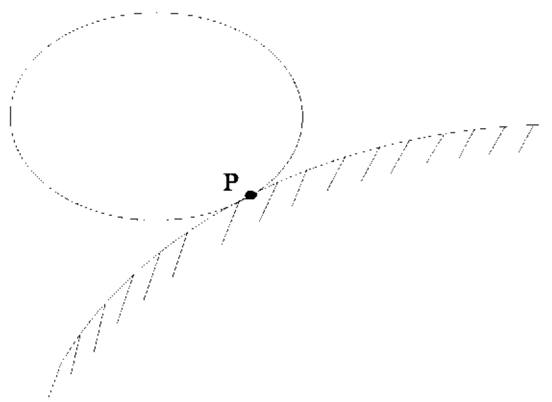


Рис. 2.21. К 1 способу нахождения МЦС

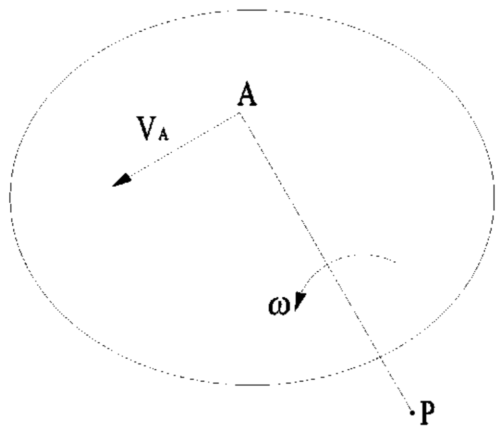


Рис. 2.22. Ко 2 способу нахождения МЦС

3. Если для плоской фигуры в данный момент времени известны направления скоростей двух точек A и B (рис. 2.23), мгновенный центр скоростей находится на пересечении перпендикуляров к направлениям скоростей этих точек.

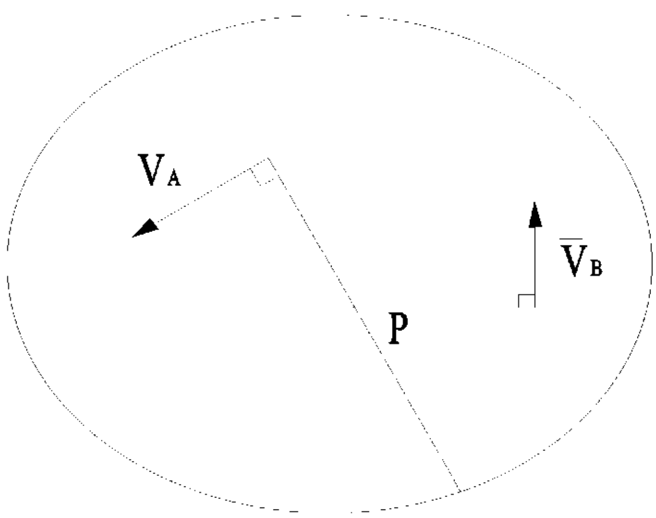


Рис. 2.23. К 3 способу нахождения МЦС

4. Для плоской фигуры в данный момент времени известны скорости двух точек A и B и $\overline{V_A} \parallel \overline{V_B}$, и $\overline{V_A} \perp AB$. Мгновенный центр скоростей находится построением (рис. 2.24 *а*, *б*).

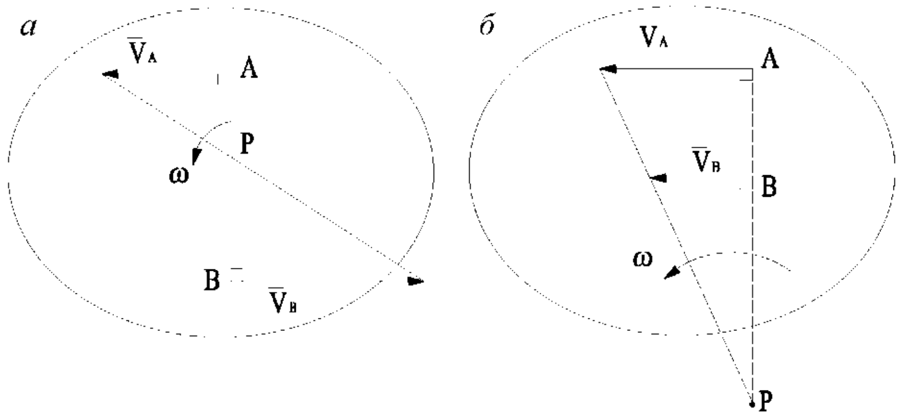


Рис. 2.24. К 4 способу нахождения МЦС: а – вектора $\overline{V_A}$ и $\overline{V_B}$ направлены в разные стороны; б – вектора $\overline{V_A}$ и $\overline{V_B}$ направлены в одну сторону

5. Если для плоской фигуры в данный момент времени известно, что $V_A = V_B$; $V_A \parallel V_B$, то $P \to \infty$ (рис. 2.25).

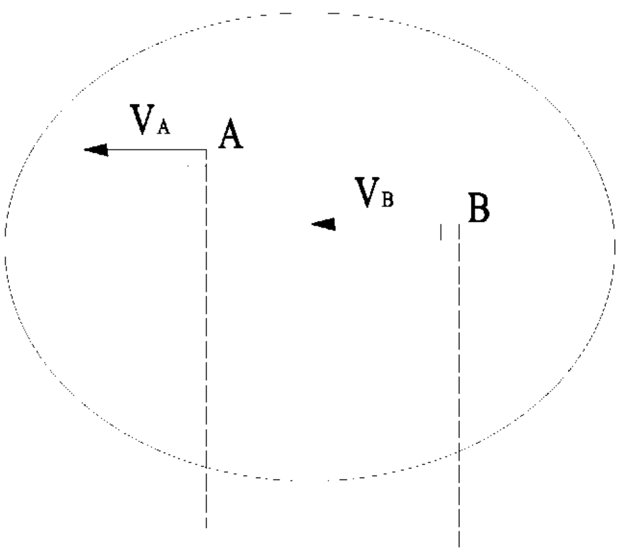


Рис. 2.25. К 5 способу нахождения МЦС

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A}{\infty} = 0$$

$$\overline{V_A} = \overline{V_B} = \overline{V_K} = \ldots$$

Тело совершает мгновенное поступательное движение.

2.3.8. Определение ускорений точек при плоском движении тела

Ускорение любой точки при движении равны геометрической сумме векторов ускорений точки, принятой за полюс и ускорения во вращательном движении этой точки вместе с плоской фигурой относительно полюса (рис. 2.26)

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}}, \tag{2.57}$$

где $\overline{a}_A$ – ускорение точки принятой за полюс,

$\overline{a}_{BA}$ – вращательное ускорение точки B вокруг A.

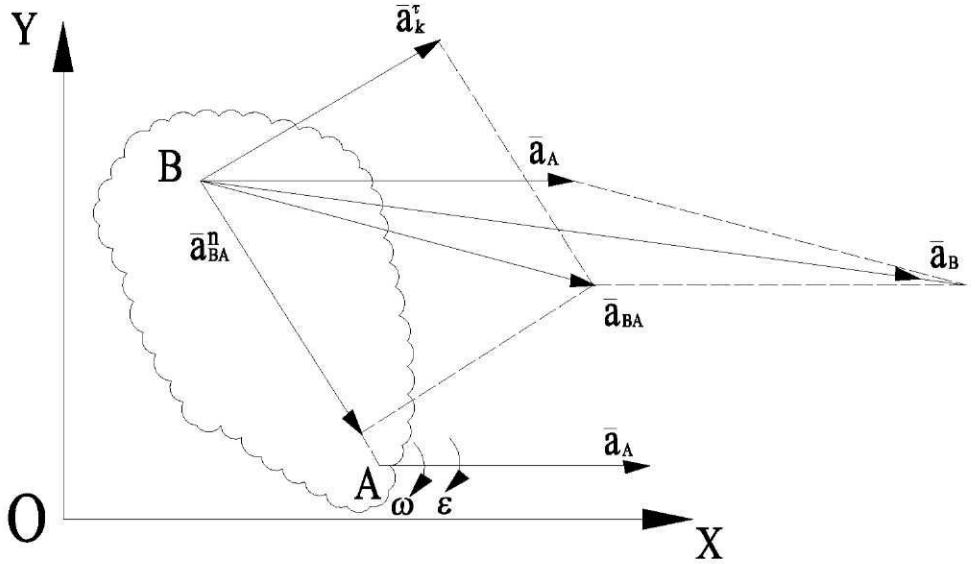


Рис. 2.26. К определению ускорения точки при плоском движении

Вращательное ускорение точки определяется по формуле

$$\overline{a}_{BA} = \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^\tau,$$

где $a_{BA}^\tau = \varepsilon AB$ – касательное ускорение точки B относительно A.

Вектор касательного ускорения $\overline{a_{BA}^\tau} \perp AB$ и направлен в сторону углового ускорения ε.

Вектор нормального ускорения точки B относительно A равен

$$a_{AB}^n = \omega^2 AB$$

и направлен от B к A.

2.4. Сложное движение точки

2.4.1. Определения

Движение точки M называется *сложным*, если эта точка участвует одновременно в двух или нескольких движениях.

Выберем неподвижную систему отсчета O, X, Y, Z. Подвижную систему отсчета связываем с движущимся телом (рис. 2.27).

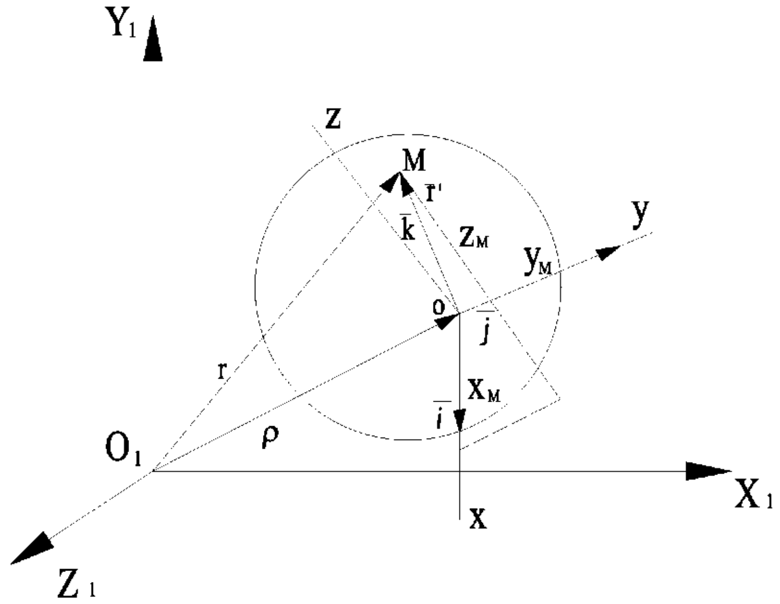


Рис. 2.27. К определению понятий переносное, относительное и абсолютное движение точки

Радиус-вектор $\bar{r}'$ характеризует движение точки относительно подвижной системы отсчета. При изменении этого вектора с течением времени координаты точки изменяются x_M, y_M, z_M (координаты точки M в подвижной системе отсчета), и единичные векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ подвижных осей координат остаются постоянными (рис. 2.27).

Радиус-вектор $\bar{\rho}$ характеризует движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной. При этом единичные векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ изменятся по направлению за счет движения подвижной системы отсчета, координаты точки x_M, y_M, z_M – останется неизмененными (рис. 2.27).

Радиус-вектор $\bar{r}$ характеризует движение точки относительно неподвижной системы отсчета, при этом изменяются координаты точки и единичные векторы по направлению.

Движение точки относительно подвижной системы отсчета, когда изменятся координаты x_M, y_M, z_M – *относительное движение*.

Скорость и ускорение точки в относительном движении – относительные – $\overline{V}_{отн}$, $\overline{a}_{отн}$.

Движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной системы отсчета – переносное движение. При этом движении изменяются единичные векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ по направлению, а координаты точки x_M, y_M, z_M остаются постоянными. Скорость и ускорение точки в этом движении – переменные – $\overline{V}_{пер}$, $\overline{a}_{пер}$.

Движение точки относительно неподвижной системы отсчета (участвующий одновременно в двух и более движениях) – *сложное или абсолютное.* Скорость и ускорение точки в этом движении – абсолютные – $\overline{V}_{абс}$, $\overline{a}_{абс}$.

2.4.2. Теорема о сложении скоростей

Скорость точки в абсолютном движении равна векторной сумме ее скоростей в переносном и относительном движении

$$\overline{V}_{абс} = \overline{V}_{пер} + \overline{V}_{отн} \qquad (2.58)$$

где $\overline{V}_{пер}$ – скорость точки в переносном движении;

$\overline{V}_{отн}$ – скорость точки в относительном движении (рис. 2.28).

Модуль абсолютной скорости равен:

$$V_{абс} = \sqrt{V_{пер}^2 + V_{отн}^2 + 2 \cdot V_{пер} \cdot V_{отн} \cdot \cos\varphi}$$

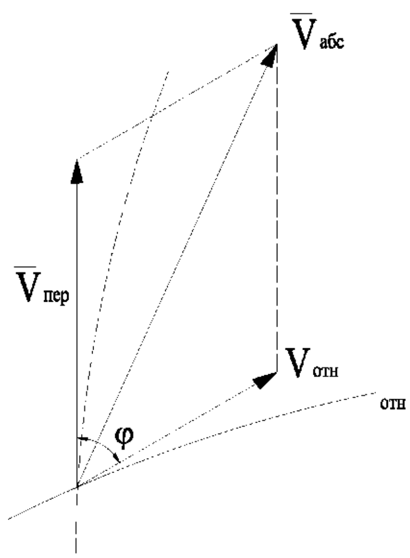


Рис. 2.28. О нахождении вектора абсолютной скорости

2.4.3. Определение ускорения точки в сложном движении

Ускорение точки в абсолютном движении равно геометрической сумме ее ускорений в переносном, относительном движении и ускорения Кориолиса.

$$\overline{a}_{абс} = \overline{a}_{пер} + \overline{a}_{отн} + \overline{a}_{кор}, \qquad (2.59)$$

где $\overline{a}_{пер} = \overline{a}^{n}_{пер} + \overline{a}^{\tau}_{пер}$ – переносное ускорение в общем случае переносного движения;

$\overline{a}_{отн} = \overline{a}^{n}_{отн} + \overline{a}^{\tau}_{отн}$ – относительное ускорение в криволинейном относительном движении;

$a_{кор}$ – ускорение Кориолиса:

$$\overline{a}_{кор} = 2 \cdot \overline{\omega} \times \overline{V}_{отн}. \quad (2.60)$$

Таким образом, $\overline{a}_{абс} = \overline{a}^{n}_{пер} + \overline{a}^{\tau}_{пер} + \overline{a}^{n}_{отн} + \overline{a}^{\tau}_{отн} + \overline{a}_{кор}$.

2.4.4. Ускорение Кориолиса (модуль и направление)

Вектор ускорения Кориолиса равен удвоенному векторному произведению вектора угловой скорости и вектора относительной скорости.

$$\overline{a}_{кор} = 2 \cdot \overline{\omega} \times \overline{V}_{отн}.$$

Модуль ускорения Кориолиса

$$a_{кор} = 2 \cdot \omega \cdot V_{отн} \cdot \sin(\overline{\omega} \wedge \overline{V}_{отн}).$$

Кориолисово ускорение обращается в ноль:

1. $\omega = 0$ и при поступательном переносном движении;
2. $V_{отн} = 0$;
3. $\overline{V}_{отн} // \overline{\omega}$.

Если переносное движение по виду поступательное, то $a_{кор} = 0$, и

$$\overline{a}_{абс} = \overline{a}_{пер} + \overline{a}_{отн}.$$

2.4.5. Правило Жуковского (для определения направления $a_{кор}$)

Для определения направления ускорения Кориолиса необходимо спроектировать вектор относительной скорости в плоскость перпендикулярную вектору омега и повернуть проекцию (в этой плоскости) в сторону вращения (в сторону ω) на 90°.

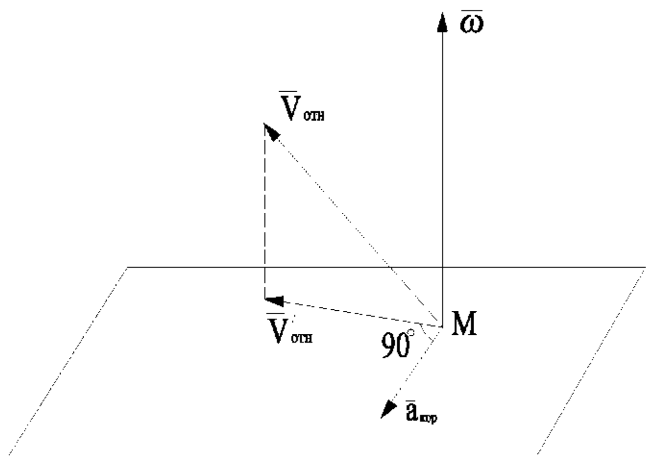


Рис. 2.29. К нахождению направления ускорения Кориолиса

Если векторы $\overline{\omega}$ и $\overline{V}_{отн}$ взаимно перпендикулярны, то направление ускорения Кориолиса можно определить поворотом $\overline{V}_{отн}$ в сторону вращения на 90° (рис. 2.30).

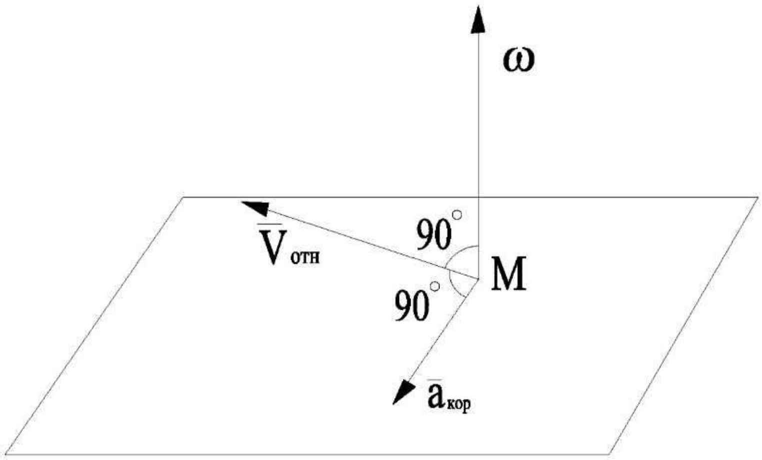


Рис. 2.30. К нахождению направления $\overline{a}_{кор}$, если $\overline{\omega} \perp \overline{V}_{отн}$.

2.5. Сложное движение твердого тела

Движение тела называется *сложным*, если оно одновременно участвует в двух или нескольких движениях.

2.5.1. Сложение поступательных движений

Если тело движется поступательно со скоростью $\bar{V}_1$ и вместе с подвижной системой отсчета движется поступательно со скоростью $\bar{V}_2$, то, очевидно, что результирующее движение будет тоже поступательным, со скоростью

$$\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 .$$

2.5.2. Сложение вращений вокруг параллельных осей

Рассмотрим случай относительного вращения тела с угловой скоростью $\overline{\omega}_1$ вокруг оси Aa', укрепленной на кривошипе ba (рис. 2.31), а переносное

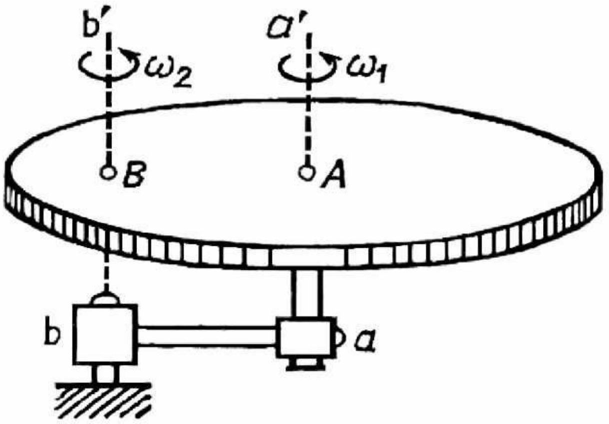


Рис.2.31. К сложению вращений вокруг параллельных осей

движение – вращение кривошипа вокруг оси Bb', параллельной оси Aa' с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$. Движение тела будет плоскопараллельным.

2.5.3. Вращения тела вокруг параллельных осей

Здесь возможны три случая:

1. *Вращения направлены в одну сторону* (рис. 2.32).

Определяя скорости V_A и V_B, получаем

$$V_A = \omega_2 AB, \quad V_B = \omega_1 AB,$$

$$\omega = \frac{V_A}{AC} = \frac{V_B}{BC} = \frac{V_B + V_A}{AC + BC} = \frac{\omega_1 AB + \omega_2 AB}{AB} = \omega_1 + \omega_2 .$$

При сложении вращений вокруг параллельных осей, происходящих в одном направлении, результирующее движение будет мгновенным вращением вокруг параллельной оси с угловой скоростью, равной сумме угловых скоростей.

Направление ω против хода часовой стрелки.

2. *Вращения направлены в разные стороны* (рис. 2.33)

Примем $\omega_1 > \omega_2$. Определяем скорости точек A и B, находящихся на осях вращения.

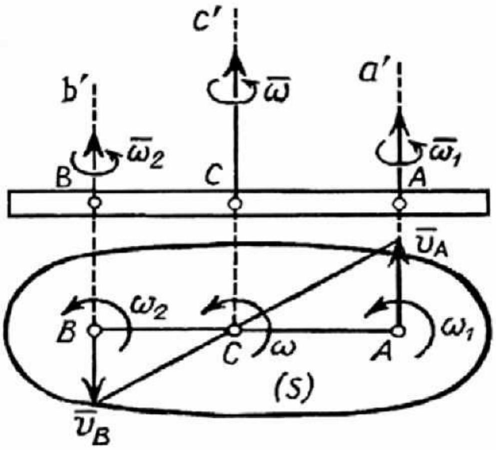


Рис. 2.32. О сложении вращений вокруг параллельных осей, направленных в одну сторону

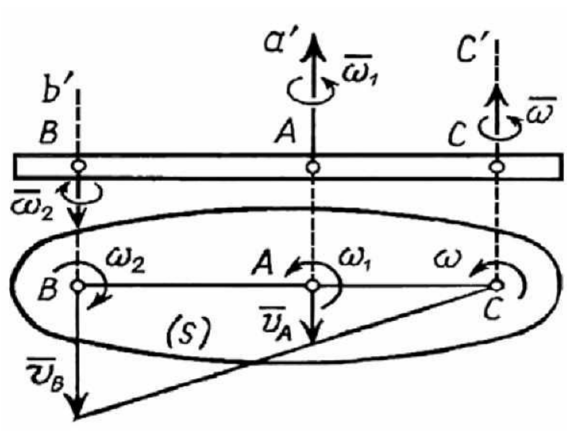


Рис. 2.33. О сложении вращений вокруг параллельных осей направленных в разные стороны

$$V_A = \omega_2 AB, \quad V_B = \omega_1 AB,$$

$$\omega = \frac{V_A}{AC} = \frac{V_B}{BC} = \frac{V_B - V_A}{BC - AC} = \omega_1 - \omega_2 .$$

При сложении вращений вокруг параллельных осей, происходящих в противоположных направлениях с ω_1 и ω_2 при $\omega_1 > \omega_2$, результирующее движение будет мгновенным вращением относительно параллельной оси с угловой скоростью, равной разности ($\omega_1 - \omega_2$) слагаемых вращений и направленной в сторону большей угловой скорости.

3. *Сложное вращение относительно параллельных осей, происходящих в противоположных направлениях при* $\omega_1 = \omega_2$ (рис. 2.34)

$$V_A = \omega_2 AB, \quad V_B = \omega_1 AB,$$

$$V_A = V_B, V_A \parallel V_B,$$

$$\omega = 0.$$

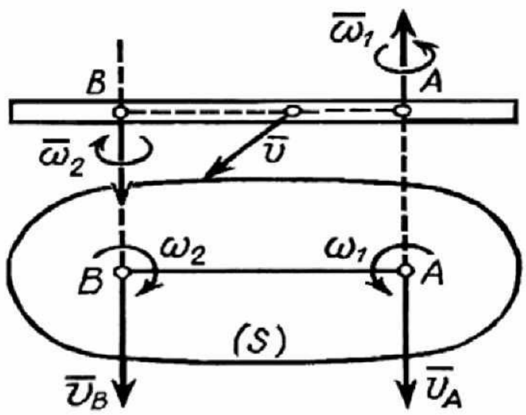


Рис. 2.34. К иллюстрации сложного вращения (случай 3)

При сложении вращении относительно параллельных осей с одинаковыми угловыми скоростями, направленными в разные стороны, результирующим будет поступательное движение со скоростью

$$V = V_A = V_B = \omega_1 AB = \omega_2 AB.$$

2.6. Вопросы для самоконтроля

1. Что изучает раздел кинематика?
2. Какие задачи решает кинематика точки и твердого тела?
3. Какие способы задания движения точки вы знаете?
4. В чем сущность векторного способа задания движения точки, координатного, естественного способа задания движения точки?
5. Дайте определение основных кинематических характеристик движения.
6. Как определить скорость точки при векторном, координатном и естественном способах задания движения точки?
7. Что такое «алгебраическая скорость» точки. В каком направлении происходит движение точки при положительном и отрицательном значении алгебраической скорости?
8. Как определяется ускорение точки при векторном, координатном и естественном способах задания движения точки?
9. В чем отличие естественных осей координат от декартовых?

10. При каком движении точки $\vec{a} = \vec{a}_n$, при каком движении точки $\vec{a} = \vec{a}_\tau$?

11. Какой угол образуют векторы $\vec{a}$ и $\vec{V}$ при ускоренном криволинейном движении, при каком движении точки векторы $\vec{a}$ и $\vec{V}$ перпендикулярны, при каком движении точки угол между $\vec{a}$ и $\vec{V}$ тупой?

Простейшие движения твердого тела

12. Какое движение твердого тела называется поступательным и вращательным?

13. Как вычисляется ω и ε при вращательном движении твердого тела?

14. Записать зависимость между угловой скоростью ω и числом оборотов тела в минуту n.

15. Как направляются векторы угловой скорости и углового ускорения при вращательном движении твердого тела?

16. Запишите формулу вычисления ускорения точки при вращательном движении твердого тела.

17. Опишите картину распределения скоростей точек при вращательном движении твердого тела; опишите картину распределения ускорений точек при вращательном движении твердого тела.

18. Каково геометрическое место точек при вращательном движении твердого тела, скорости которых равны геометрически, равны по модулю?

19. Как определяется ускорение точки при равномерном вращении тела вокруг неподвижной оси?

20. Записать векторную формулу линейной скорости точки вращающегося тела.

Плоскопараллельное движение твердого тела

21. Какое движение твердого тела называется плоскопараллельным, из каких простейших движений складывается плоское движение твердого тела?

22. Как изменятся уравнения плоского движения твердого тела при замене точки, принятой за полюс? Как направлены векторы $\overline{\omega}$ и $\overline{\varepsilon}$ при плоском движении твердого тела

23. Как определяются скорости точек плоской фигуры с помощью МЦС?

24. Как определяются скорости точек плоской фигуры по заданным уравнениям ее движения?

25. Как определить ускорение точки плоской фигуры по уравнениям ее движения?

26. Ускорения двух точек плоской фигуры перпендикулярны прямой, соединяющей эти точки. Чему в этот момент времени равна угловая скорость фигуры?

27. Скорости двух точек плоской фигуры перпендикулярны прямой, их соединяющей, и равны по величине. Чему равна угловая скорость фигуры?

28. Ускорения двух точек плоской фигуры направлены вдоль прямой, соединяющей эти точки. Чему в этот момент времени равно ε?

29. Как движется плоская фигура, если скорости двух ее точек равны и одинаково направлены?

30. Дайте определение абсолютного, переносного и относительного движения.

31. В чем состоит теорема о сложении скоростей?

32. Сформулируйте теорему о сложении ускорений точки в сложном движении.

33. Модуль, направление, физический смысл ускорения Кориолиса.

34. В каких случаях ускорение Кориолиса равно нулю?

35. Как определить абсолютные ускорения точки при поступательном переносном движении?

36. Чему равна проекция ускорения Кориолиса движущейся точки на направление ее относительной скорости?

37. Может ли абсолютное ускорение точки состоять из одного переносного ускорения?

38. Может ли абсолютное ускорение точки состоять из одного относительного ускорения?

39. Может ли абсолютное ускорение точки состоять из одного ускорения Кориолиса?

40. Почему ускорение Кориолиса точек при плоском движении тела равно нулю?

3. ДИНАМИКА

Динамикой называется раздел теоретической механики, в котором движение материальных тел изучается в связи с механическим взаимодействием последних. Существенным отличием динамики от кинематики является то, что в динамике учитывается масса движущихся тел и рассматривается зависимость параметров движения от сил, действующих на эти тела.

В качестве движущихся объектов, в динамике рассматриваются материальная точка и система материальных точек (механическая система).

При динамических исследованиях материальная точка – абстрактный образ реального тела (или его части), который имеет вид геометрической точки с массой, равной массе данного тела (или части этого тела).

Механической системой или системой материальных точек называется совокупность материальных точек, связанных между собой так, что движение каждой из них зависит от движения остальных. Примеры механических систем: свободное твердое тело; механизм, состоящий из ряда звеньев; солнечная система.

3.1. Основные законы динамики

Основные законы динамики были сформулированы Ньютоном в его труде «Математические начала натуральной философии», изданном в 1687 г.

Первый закон (закон инерции). *Если на материальную точку не действуют никакие силы, то она находится в состоянии покоя или движется равномерно и прямолинейно.* Это свойство материальной точки называется *инерцией.*

Второй закон (зависимость между силой и ускорением). *Сила, действующая на материальную точку, сообщает последней ускорение, направленное так же, как сила, и прямо пропорциональное силе.* Математическим выражением второго закона служит векторное уравнение (называемое *основным уравнением динамики*)

$$\vec{F} = m\vec{a}, \tag{3.1}$$

где $\vec{F}$ – вектор силы, приложенной к материальной точке;

$\vec{a}$ – вектор ускорения, приобретенного материальной точкой под действием данной силы;

m – скалярная величина, называемая массой данной материальной точки.

При скоростях движения, далеких от скорости распространения света, масса материальной точки принимается постоянной. *Масса* – постоянный параметр, характеризующий *инерционность тела* при поступательном движении.

Масса тела может быть найдена как отношение веса тела P к величине ускорения свободного падения в месте взвешивания g, то есть

$$m = \frac{P}{g}. \tag{3.2}$$

Векторная величина

$$\vec{K} = m \cdot \vec{V} \tag{3.3}$$

называется *количеством движения материальной точки*. Этот параметр характеризует передачу механического движения от одного материального тела к другому.

Если учесть, что

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt},$$

то уравнение (3.1) может быть написано в виде

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \frac{d\vec{K}}{dt}. \tag{3.4}$$

Уравнение (3.4) представляет собой другое *выражение* **второго закона динамики**: *вектор силы, действующей на материальную точку, равен производной по времени от вектора количества движения этой точки.*

Третий закон (закон равенства действия и противодействия). *Силы, с которыми действуют друг на друга две материальные точки, равны по величине и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки.*

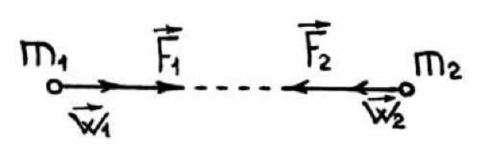


Рис. 3.1. К понятию третьего закона Ньютона

Четвертый закон (закон независимости действия сил). *Вектор результирующего ускорения материальной точки равен сумме векторов ускорений, приобретаемых данной точкой при действии на нее каждой из этих сил в отдельности.*

Если на точку массы m действуют n сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, …, $\vec{F}_n$, то математическим выражением четвертого закона будет следующая формула

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{a}_k \,, \tag{3.5}$$

где $\vec{a}$ – вектор результирующего ускорения.

Если силы приводятся к одной равнодействующей, то вектор последней

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \,. \tag{3.6}$$

Сопоставляя выражения (3.5) и (3.6), заключаем, что

$$\vec{R} = m \cdot \vec{a} \,. \tag{3.7}$$

Отметим, что наиболее точно этому определению соответствует гелиоцентрическая система отсчета, начало которой совпадает с центром Солнца, а оси направлены в сторону трех звезд, условно называемых «неподвижными».

При решении ряда инженерных задач за инерциальную систему принимают геоцентрическую, начало которой совпадает с центром Земли.

3.2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

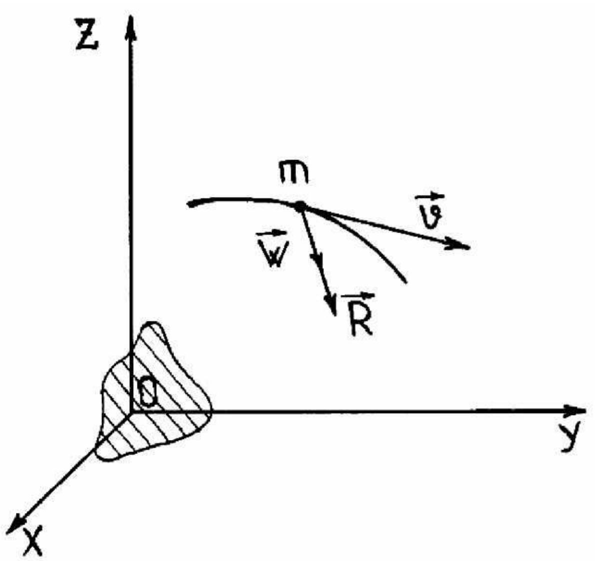


Рис. 3.2. К выводу дифференциальных уравнений движения материальной точки

Рассмотрим движение точечной массы m относительно инерциальной системы отсчета $Oxyz$ (рис. 3.2).

Пусть $\vec{R}$ – вектор равнодействующей сил, приложенных к m; $\vec{a}$ – вектор ускорения этой точки; а x, y, z – ее текущие координаты. На основании уравнения (3.7) имеем

$$m \cdot \vec{a} = \vec{R} \,.$$

Проектируя это векторное уравнение на оси инерциальной системы отсчета получаем,

$$m \cdot \vec{a}_x = R_x, \quad m \cdot \vec{a}_y = R_y, \quad m \cdot \vec{a}_z = R_z. \tag{3.8}$$

Учитывая, что проекции ускорения равны вторым производным по времени от соответствующих координат, а проекции равнодействующей равны алгебраическим суммам соответствующих проекций данных сил, получаем:

$$m \cdot \ddot{x} = X, \; m \cdot \ddot{y} = Y, \; m \cdot \ddot{z} = Z, \tag{3.9}$$

где

$$X = R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}; \; Y = R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}; \; Z = R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}. \tag{3.10}$$

Выражения (3.9) представляют собой дифференциальные уравнения движения материальной точки. Они служат основным средством решения динамических задач.

Вся система трех дифференциальных уравнений (3.9) соответствует движению материальной точки в пространстве. Для описания движения точки в плоскости достаточно двух уравнений (если две оси координат расположить в этой плоскости). Для описания прямолинейного движения достаточно одного уравнения (если ось координат направить параллельно траектории точки).

3.3. Две основные задачи динамики материальной точки

Первая основная задача (прямая задача). По известному закону движения точки определить закон изменения во времени равнодействующей сил, приложенных к точке.

Если закон движения материальной точки m задан в координатной форме

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \tag{3.11}$$

то проекции ускорения точки в функции времени находятся двукратным дифференцированием кинематических уравнений движения (3.11), а проекции искомой равнодействующей – путем умножения массы m на вторые производные соответствующих координат:

$$\begin{cases} X(t) = m \cdot \ddot{x}(t), \\ Y(t) = m \cdot \ddot{y}(t), \\ Z(t) = m \cdot \ddot{z}(t). \end{cases} \tag{3.12}$$

Выражения (3.12) представляют собой решения уравнений (3.11) относительно величин, стоящих в правых частях. При решении первой основной (прямой) задачи динамики точки приходится прибегать лишь к дифференцированию. Поэтому первая задача, как правило, решается до конца аналитическими методами.

Вторая основная задача (обратная задача). По известному закону изменения равнодействующей сил, приложенных к точке, найти закон движения точки.

Если известны выражения

$$X = X(t), \quad Y = Y(t), \quad Z = Z(t), \tag{3.13}$$

то для получения кинематических уравнений движения точки необходимо двукратное интегрирование этих выражений.

Из кинематики известно, что

$$x = x_0 + \int_0^t V_x dt,$$

где

$$V_x = V_{x0} + \int_0^t a_x dt.$$

В данном случае, на основании выражения (3.9)

$$a_x = \frac{X(t)}{m}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x = x_0 + V_{x0} \cdot t + \dfrac{1}{m} \cdot \displaystyle\int_0^t \left[\int_0^t X(t)dt \right] dt, \\ y = y_0 + V_{y0} \cdot t + \dfrac{1}{m} \cdot \displaystyle\int_0^t \left[\int_0^t Y(t)dt \right] dt, \\ z = z_0 + V_{zo} \cdot t + \dfrac{1}{m} \cdot \displaystyle\int_0^t \left[\int_0^t Z(t)dt \right] dt. \end{cases} \tag{3.14}$$

Выражения (3.14) представляют собой решения дифференциальных уравнений второго порядка (3.9), где

x_0, y_0, z_0 – координаты начального положения материальной точки;

V_{x0}, V_{y0}, V_{z0} – проекции начальной скорости этой точки.

Поскольку при решении второй (обратной) задачи динамики точки приходится прибегать к интегрированию дифференциальных уравнений, эта задача аналитически решается не всегда. Сложность ее решения зависит от закона изменения равнодействующей сил, приложенных к точке. Наиболее просто обратная задача решается когда X, Y, Z:

1) постоянны;

2) представляют собой явные функции времени;

3) являются явными функциями координат точки;

4) являются явными функциями скорости точки.

В тех случаях, когда закон изменения равнодействующей не выражается функциями, а задается, например, в виде ряда значений, соответствующих различным моментам времени (что часто бывает при экспериментальном исследовании движения), то, чтобы найти закон движения, прибегают к методам численного интегрирования.

3.4. Общие теоремы динамики материальной точки

3.4.1. Теорема об изменении количества движения материальной точки

Согласно второму основному закону динамики, вектор силы, действующей на материальную точку

$$\vec{F} = \frac{d\vec{K}}{dt},$$

где $\vec{K} = m \cdot \vec{v}$ – вектор количества движения материальной точки.

Из последнего выражения следует, что

$$d\vec{K} = \vec{F} \cdot dt. \qquad (3.15)$$

Векторная величина, стоящая в правой части уравнения (3.15) обозначается $d\vec{S}$ и называется *элементарным импульсом силы* $\vec{F}$ (или импульсом силы $\vec{F}$ за бесконечно малый промежуток времени). Элементарный импульс *характеризует механическое воздействие на материальное тело за бесконечно малый промежуток времени.*

Подставляя в правую часть уравнения (3.15) $d\vec{S}$, получаем

$$d\vec{K} = d\vec{S}. \qquad (3.16)$$

Эта формула выражает теорему об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной форме:

Изменение количества движения материальной точки за бесконечно малый промежуток времени равно элементарному импульсу силы, действующей на эту точку.

Изменение вектора количества движения за конечный промежуток времени может быть найдено интегрированием

$$\int_0^t d\vec{K} = \int_0^t d\vec{S}$$

$$\vec{K} - \vec{K}_0 = \vec{S} \qquad (3.17)$$

$$\vec{K} = m \cdot \vec{v}\,; \quad \vec{K}_0 = m \cdot \vec{v}_0 .$$

Векторная величина

$$\vec{S} = \int_0^t d\vec{S} = \int_0^t \vec{F}(t)dt \qquad (3.18)$$

называется *импульсом силы* $\vec{F}$ *за время* t. Импульс силы является мерой механического воздействия па материальное тело за конечный промежуток времени.

Размерность импульса $[S] = [F] \cdot [t] = H \cdot сек$.

Векторное уравнение (3.17) выражает теорему об изменении количества движения материальной точки в конечной форме:

Изменение количества движения материальной точки за конечный промежуток времени равно импульсу силы, действующей на эту точку, за данный промежуток времени.

Векторное выражение (3.18) эквивалентно трем скалярным, получающимся путем проектирования этого выражения на оси координат:

$$S_x = \int_0^t X(t)dt\,;$$

$$S_y = \int_0^t Y(t)dt\,; \qquad (3.19)$$

$$S_z = \int_0^t Z(t)dt\,;$$

где $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ – проекции на соответствующие оси силы, действующей на материальную точку.

Векторное уравнение (3.17) можно записать в виде

$$m \cdot \vec{V} - m \cdot \vec{V}_0 = \vec{S}\,. \qquad (3.20)$$

Проектируя уравнение (3.20) на оси координат и учитывая формулы (3.19), получаем систему скалярных уравнений:

$$m \cdot V_x - m \cdot V_{x0} = \int_0^t X(t)dt\,;$$

$$m \cdot V_y - m \cdot V_{y0} = \int_0^t Y(t)dt\,; \qquad (3.21)$$

$$m \cdot V_z - m \cdot V_{z0} = \int_0^t Z(t)dt\,.$$

Частные случаи

1. $S_x = \int_0^t X(t)dt = 0\,.$

В этом случае $m \cdot V_x - m \cdot V_{x0} = 0$. Это означает, что $v_x = v_{x0}$.

Следовательно, в случае, когда импульс проекции силы действующей на материальную точку, за рассматриваемый промежуток времени равен нулю, соответствующая проекция скорости точки имеет одинаковое значение в начале и конце данного промежутка времени.

2. $X(t) = const = X$.

В этом случае $m \cdot V_x - m \cdot V_{x0} = X \cdot t$. Это означает, что $V_x = V_{x0} + \dfrac{X}{m} \cdot t$, то есть $W_x = \dfrac{X}{m} = const$.

Следовательно, в случае, когда проекция силы, действующей на материальную точку, в течение рассматриваемого промежутка времени остается постоянной, соответствующая проекция скорости точки изменяется пропорционально времени.

3. $X(t) = 0$.

В этом случае, как и в первом, $m \cdot V_x - m \cdot V_{x0} = 0$. Это означает, что $V_x = V_{x0} = \text{const}$.

Следовательно, в случае, когда проекция силы, действующей на материальную точку, в течение рассматриваемого промежутка времени равна нулю, соответствующая проекция скорости точки остается постоянной.

Теорема об изменении количества движения материальной точки, доказанная для случая, когда на точку действует всего одна сила $\vec{F}$, остается справедливой и для произвольного числа сил. В последнем случае во всех формулах данного пункта под $\vec{F}$ следует понимать равнодействующую сил, приложенных к точке.

3.4.2. Теорема о моменте количества движения материальной точки

Момент количества движения материальной точки относительно данною центра *O* обозначается $\vec{L}_0$ и выражается векторным произведением.

$$\vec{L}_0 = \vec{M}_0(\vec{K}) = \vec{r} \times \vec{K} = \vec{r} \times m\vec{v}, \qquad (3.22)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор материальной точки относительно данного центра *O*.

На рис. 3.3 показана точечная масса, движущаяся по криволинейной траектории со скоростью $\vec{v}$, и построен вектор $\vec{L}_0$ момента количества движения этой массы относительно точки *O*, принятой за начало координат.

Дифференцируя выражение (3.22) по времени, получаем

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{V} + \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{V}).$$

Поскольку $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}$, а $\dfrac{d}{dt}(m\vec{V}) = \vec{R}$,

где $\vec{R}$ – вектор равнодействующей сил, приложенных к точке,

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{R}.$$

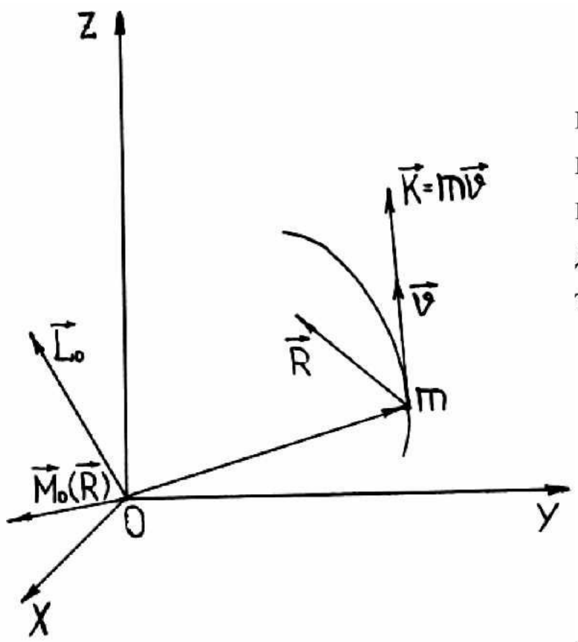


Рис. 3.3. К выводу формулы (3.23)

Первое слагаемое в правой части последнего выражения равно нулю, а второе представляет собой момент относительно начала координат равнодействующей сил, приложенных к точке

$$\vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_0(\vec{R}).$$

Таким образом,

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0(\vec{R}). \qquad (3.23)$$

Тем самым доказана теорема о моменте количества движения материальной точки.

Производная по времени от момента количества движения материальной точки, взятого относительно некоторого центра, равна моменту равнодействующей сил, приложенных к точке, относительно того же центра.

Проектируя векторное уравнение (3.23) на оси координат, получаем систему трех скалярных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dL_x}{dt} = M_x(\vec{R}); \\ \dfrac{dL_y}{dt} = M_y(\vec{R}); \\ \dfrac{dL_z}{dt} = M_z(\vec{R}). \end{cases} \tag{3.24}$$

Проектируя уравнение (3.22) на оси координат, получаем:

$$\begin{cases} L_x = M_x(m\vec{V}) = (\vec{r} \times m\vec{V})_x = ymV_z - zmV_y = m(yV_z - zV_y); \\ L_y = M_y(m\vec{V}) = (\vec{r} \times m\vec{V})_y = zmV_x - xmV_z = m(zV_x - xV_z); \\ L_z = M_z(m\vec{V}) = (\vec{r} \times m\vec{V})_z = xmV_y - ymV_x = m(xV_y - yV_x), \end{cases} \tag{3.25}$$

где x, y, z текущие координаты движущейся точки.

Частные случаи

1. $M_x\left(\vec{R}\right) = 0$.

Это может быть, когда $\vec{R}$ и ось Ox лежат в одной плоскости. В данном случае

$$L_x = m(yV_z - zV_y) = \text{const}.$$

Откуда следует, что

$$yV_z - zV_y = \text{const}$$

2. $\overline{M}_0\left(\overline{R}\right) = 0$.

Это может быть, когда линия действия силы $\overline{R}$ проходит через центр O. В данном случае

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = 0 \text{, то есть } \vec{L}_0 = \overrightarrow{const}.$$

Это означает, что векторное произведение радиуса-вектора рассматриваемой материальной точки на вектор ее количества движения все время сохраняет одну и ту же ориентацию в пространстве. Это возможно лишь в том случае, когда радиус-вектор остается в одной плоскости. Следовательно, материальная точка, на которую действует сила, описывает плоскую траекторию. Плоскость траектории проходит через центр силы.

3.4.3. Элементарная работа силы

Элементарной работой силы (или работой силы на бесконечно малом перемещении точки ее приложения) называется скалярное произведение

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}\,, \tag{3.26}$$

где $\vec{F}$ – вектор силы;

$d\vec{r}$ – бесконечно малое перемещение (дифференциал радиус-вектора) точки её приложения.

Если сила действует на точечную массу, то $d\vec{r}$ есть вектор элементарного перемещения последней. Поскольку

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad d\vec{r} = \vec{V}dt\,,$$

правую часть выражения (3.26) можно переписать так

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{V}dt = F \cdot \left|V\right| \cos(\vec{F},\vec{V})dt$$

Произведение $F\cos(\vec{F},\vec{V})$ представляет собой проекцию вектора силы $\vec{F}$ на направление скорости. Обозначая эту проекцию F_V, получим

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F\left|V\right|dt = F_V \left|ds\right| = F_V d\sigma\,,$$

где $\left|V\right|$ – модуль вектора скорости (величина скорости);

$d\sigma$ – дифференциал пройденного пути.

С другой стороны, $V = V\vec{\tau}$. Поэтому

$$F\left|V\right|\cos(\vec{F},\vec{V}) = FV\cos(\vec{F},\vec{\tau})\,,$$

где $V = \dot{s}$ – алгебраическая величина скорости;

τ – орт касательной к траектории, направленный в сторону возрастания s.

Произведение $F\cos(\vec{F},\vec{\tau})$ представляет собой проекцию вектора силы $\overline{F}$ на касательную к траектории. Обозначая эту проекцию F_τ, получаем

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_\tau V dt = F_\tau ds.$$

Учитывая, что

$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}, \text{ а } d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k},$$

находим еще одно выражение для dA

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Таким образом, величина элементарной работы может быть найдена по одной из следующих формул

$$dA = F_V\left|ds\right| = FVd\sigma = F_\tau V dt = F_\tau ds = Xdx + Ydy + Zdz. \qquad (3.27)$$

Элементарная работа характеризует воздействие, оказываемое силой на материальное тело, при бесконечно малом перемещении последнего.

Из формулы (3.27) следует, что элементарная работа может быть положительной, отрицательной и равной нулю. Необходимо подчеркнуть, что dA не обязательно является полным дифференциалом какой-нибудь функции.

Если элементарное перемещение $d\vec{r}$ совершено под действием системы сил: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots, \vec{F}_n$, то

$$dA = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot d\vec{r} = d\vec{r}\cdot\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = \vec{R}\cdot d\vec{r},$$

где $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$ – равнодействующая системы сил.

Таким образом, элементарная работа равнодействующей равна алгебраической сумме элементарных работ составляющих сил на том же перемещении.

Если элементарное перемещение $d\vec{r}$ разложить на несколько составляющих перемещений $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, d\vec{r}_3, \ldots, d\vec{r}_n$ так, чтобы

$$d\vec{r} = \sum_{i=1}^{n} d\vec{r}_i, \text{ то } dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}\cdot d\vec{r}_i.$$

Это означает, что элементарная работа силы на некотором перемещении равна алгебраической сумме элементарных работ этой силы на составляющих перемещениях.

3.4.4. Работа силы на конечном пути

Работой силы на конечном пути S точки приложения последней (или просто работой) называется предел суммы элементарных работ данной силы на бесконечно малых перемещениях, из абсолютных величин которых слагается данный путь. Работа выражается криволинейным интегралом

$$A = \int_{(s)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (3.28)$$

Учитывая формулу (3.27), можно написать следующие формулы для определения работы

$$A = \int_{(s)} F_\tau V dt = \int_{(s)} F_\tau ds = \int_{(s)} (Xdx + Ydy + Zdz). \qquad (3.29)$$

Размерность работы

$$[A] = [F] \cdot [s] = Н \cdot м = Дж.$$

Ранее отмечалось, что выражение элементарной работы, стоящее под знаком интеграла в уравнении (3.29) не всегда является полным дифференциалом. Поэтому аналитическое определение работы на конечном перемещении не всегда возможно. Рассмотрим ряд частных случаев, когда эту работу удается вычислить.

1. $\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{const}}$. В этом случае

$$A = F \int_{(\sigma)} \cos(\vec{F}, \vec{\tau}) ds = Fl \cos\alpha, \qquad (3.30)$$

где $l = M_0M$;

α угол между вектором силы и хордой M_0M, равной результирующему перемещению точки.

Согласно выражению (3.30), работа силы, постоянной по величине и направлению, не зависит от формы траектории и величины пути, пройденного точкой приложения силы, а зависит лишь от начального и конечного положений этой точки.

2. $F \cos(\vec{F}, \vec{\tau}) = F_\tau = \mathrm{const}$. В этом случае

$$A = F_\tau \int_{(\sigma)} ds = F_\tau (s - s_0). \qquad (3.31)$$

3. $\vec{F} = \overrightarrow{const}$ и $\cos(\vec{F}, \vec{\tau}) = \overrightarrow{const}$. Данный случай соответствует прямолинейному движению точки приложения силы. При этом выражение (3.31) принимает вид

$$A = X(x - x_0) \qquad (3.32)$$

Работа силы на конечном круговом перемещении

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z(\overline{F})d\varphi, \qquad (3.33)$$

где φ_0 и φ – значения угла, определяющего начальное и конечное положение точки приложения силы.

Если $M_z(\vec{F}) = \text{const}$, то

$$A = M_z(\vec{F})(\varphi - \varphi_0). \qquad (3.34)$$

3.4.5. Мощность силы

Мощностью силы (или просто мощностью) называется скалярная величина, характеризующая быстроту приращения работы силы. Мощность обозначается буквой N и выражается отношением элементарной работы силы ко времени, в течение которого она совершена:

$$N = \frac{dA}{dt}. \qquad (3.35)$$

На основании формулы (3.27)

$$N = F_V\left|V\right| = F_\tau V = XV_x + YV_y + ZV_z. \qquad (3.36)$$

Если сила приложена к телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, то

$$N = M_z(\vec{F})\frac{d\varphi}{dt} = M(\vec{F})\omega, \qquad (3.37)$$

где ω – угловая скорость тела.

Размерность мощности

$$[N] = \frac{[A]}{[t]} = \text{Н·м / с} = \text{Дж / с} = \text{Вт}.$$

3.4.6. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки

Кинетической энергией материальной точки называется положительная скалярная величина

$$T = \frac{mV^2}{2},$$

где m – масса точки;

V – скорость точки относительно выбранной системы отсчета.

Кинетическая энергия представляет собой *меру механического движения*, характеризующую способность перехода последнего в другие формы движения материи.

Размерность кинетической энергии

$$[T] = [m]\,[V]^2 = Нм - Дж.$$

Согласно второму закону динамики, $m\vec{a} = \vec{F}$.

Проектируя это векторное уравнение на касательную к траектории, получаем

$$ma_\tau = F_\tau .$$

Поскольку $a_\tau = \dot{V}$, то

$$m\dot{V} = F_\tau . \qquad (3.38)$$

Умножая обе части выражения (3.38) на Vdt , получаем

$$mVdV = F_\tau V dt ,$$

так как

$$mVdV = d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = dT \text{, а } F_\tau V dt = dA \text{, то}$$

$$dT - dA \qquad (3.39)$$

Уравнение (3.39) выражает теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальной форме:

Изменение кинетической энергии материальной точки при бесконечно малом перемещении последней равно элементарной работе силы, приложенной к этой точке.

Интегрируя уравнение (3.39), получаем

$$\int\limits_{V_0}^{V} dT = \int\limits_{(s)} dA ,$$

что соответствует $T - T_0 - A$, или

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A . \qquad (3.40)$$

Уравнение (3.40) выражает теорему об изменении кинетической энергии точки в конечной форме:

Изменение кинетической энергии материальной точки на конечном пути равно работе на данном пути силы, приложенной к этой точке.

Если на материальную точку действуют несколько сил, в правую часть уравнения (3.40) следует подставлять алгебраическую сумму работ всех сил.

3.5. Движение несвободной материальной точки

3.5.1. Классификация связей

Материальная точка называется несвободной, если её движение ограничено какими-нибудь заранее заданными условиями. Как было сказано ранее, препятствия, ограничивающие движение точки, называются связями. Сила, с которой связь действует на данную материальную точку, называется реакцией связи. Все остальные силы, приложенные к несвободной материальной точке, называются активными силами.

Активная сила может не зависеть от других сил, приложенных к точке. Реакция связи зависит от активных сил. Если активных сил нет, реакция связи обращается в нуль. Реакция связи всегда направлена в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться несвободной материальной точке.

Математическое выражение ограничения, налагаемое связью на движение материальной точки, называется уравнением связи.

Если, например, точка при движении не может сойти с некоторой линии, то уравнением связи является уравнение упомянутой линии.

Связь называется *удерживающей* (двухсторонней) в том случае, если точка не может совершать перемещения, при которых связь нарушается.

Связь называется *неудерживающей* (односторонней) в том случае, если она допускает перемещения, при которых связь нарушается.

Связь называется *стационарной*, если в ее уравнение явным образом не входит время. В противном случае связь называется *нестационарной*.

Идеальной связью называется связь, наложение которой не влечёт за собой возникновения сил трения. Реакция идеальной связи перпендикулярна к траектории несвободной материальной точки.

Связи могут ограничивать не только положения, но и скорости несвободной материальной точки. В дальнейшем речь будет идти лишь о связях, ограничивающих положение (так называемых геометрических связях).

3.5.2. Дифференциальные уравнения движения несвободной материальной точки

Равнодействующую всех сил, приложенных к несвободной материальной точке, при идеальной связи можно представить в виде суммы двух сил: результирующей активной силы $\overline{F}$ и нормальной реакции связи $\overline{N}$:

$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{N}$$

На основании второго закона динамики получим:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N}. \tag{3.41}$$

Проектируя обе части этого векторного уравнения на оси x, y, z получаем систему скалярных уравнений

$$\begin{gathered} mW_x = F_x + N_x \\ mW_y = F_y + N_y \\ mW_z = F_z + N_z, \end{gathered}$$

которую можно переписать в виде:

$$\begin{gathered} m\ddot{x} = F_x + N_x \\ m\ddot{y} = F_y + N_y \\ m\ddot{z} = F_z + N_z. \end{gathered} \tag{3.42}$$

Уравнения (3.42) представляют собой *дифференциальные уравнения движения несвободной материальной точки.*

Если данная материальная точка описывает плоскую кривую, то часто оказывается более удобным проектировать (3.41) на естественные оси координат.

При этом получается система уравнений

$$\begin{cases} ma_\tau = F_\tau, \\ ma_n = F_n + N. \end{cases}$$

Подставляя значения составляющих ускорения, получаем

$$\begin{cases} m\dfrac{dV}{dt} = F_\tau, \\ m\dfrac{V^2}{\rho} = F_n + N, \end{cases} \tag{3.43}$$

где V – скорость точки; ρ – радиус кривизны траектории.

Уравнения (3.43) называются *естественными уравнениями движения несвободной материальной точки.*

3.5.3. Принцип Д'Аламбера для несвободной материальной точки

Сила, с которой движущаяся материальная точка действует на тело, сообщающее ей данное ускорение, называется силой инерции. Если материальная точка одновременно взаимодействует с несколькими телами, сила инерции представляет собой геометрическую сумму сил, приложенных ко всем этим телам.

Согласно второму закону динамики, вектор силы, необходимой для сообщения материальной точке ускорения, равен

$$\overline{F} = m\vec{a}\,.$$

Следовательно, вектор силы инерции, приложенной к телу, сообщающему точке ускорение,

$$\vec{F}^{ин} = -m\vec{a}\,. \qquad (3.44)$$

К несвободной материальной точке приложены активная сила $\overline{F}$ и реакция связи $\overline{N}$, геометрическая сумма которых

$$\vec{F} + \vec{N} = m\vec{a}\,.$$

Если к рассмотренным двум силам добавить силу инерции, то эти три силы будут уравновешивать друг друга.

Следовательно,

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}^{ин} = 0\,. \qquad (3.45)$$

Векторное уравнение (3.45) выражает принцип Д'Аламбера для несвободной материальной точки:

Силы, приложенные к несвободной материальной точке (активные силы и реакция связи), уравновешиваются силой инерции.

Если условно принять, что на данную материальную точку, кроме сил, к ней приложенных, действует и сила инерции, то при таком допущении точка будет находиться в равновесии, то есть в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения. На этом основан метод сведения задач динамики точки к задачам статики (метод кинетостатики).

Решение задач динамики точки с помощью принципа Д'Аламбера (по методу кинетостатики) нужно производить в такой последовательности:

– мысленно остановить движение точки;

– к силам, действующим на точку при ее движении, добавить силу инерции;

– составить статические уравнения равновесия полученной системы сил;

– решить уравнения равновесия относительно искомых величин.

3.6. Динамика относительного движения материальной точки

Рассмотрим особенности динамики относительного движения материальной точки. Основную систему отсчета $Oxyz$ будем считать инерциальной. На переносное движение и движение точки относительно подвижной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$ никаких ограничений налагать не будем.

3.6.1. Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки

Согласно второму закону динамики, в инерциальной системе отсчета

$$m\vec{a} = \vec{R},$$

где $\vec{R}$ – равнодействующая сил, приложенных к точке.

По теореме Кориолиса

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k, \tag{3.46}$$

где $\vec{a}_e$ – переносное ускорение;

$\vec{a}_r$ – относительное ускорение;

$\vec{a}_k$ – ускорение Кориолиса.

Умножаем уравнение (3.46) на m, а затем приравняем правую часть полученного выражения к $\vec{R}$

$$m\vec{a}_e + m\vec{a}_r + m\vec{a}_k = \vec{R},$$

откуда

$$m\vec{a}_r = \vec{R} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_k. \tag{3.47}$$

Второе слагаемое в правой части уравнения (3.47) называется *силой инерции переносного движения* (переносной силой инерции) и обозначается

$$\vec{F}_e^{ин} = -m\vec{a}_e.$$

Третье слагаемое в правой части уравнения (3.47) называется *кориолисовой силой инерции* и обозначается

$$\vec{F}_k^{ин} = -m\vec{a}_k.$$

Таким образом, уравнение (3.47) можно записать в виде

$$m\vec{a}_r = \vec{R} + \vec{F}_e^{ин} + \vec{F}_k^{ин}. \tag{3.48}$$

Векторное уравнение (3.48) называется *основным уравнением динамики относительного движения.*

Проектируя уравнение (3.48) па оси подвижной системы отсчета и учитывая, что

$$a_{rx1} = \ddot{x}_1,\ a_{ry1} = \ddot{y}_1,\ a_{rz1} = \ddot{z}_1,$$

получаем

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = X_1 + F_{ex}^{ин} + F_{kx}^{ин}; \\ m\ddot{y}_1 = Y_1 + F_{ey}^{ин} + F_{ky}^{ин}; \\ m\ddot{z}_1 = Z_1 + F_{ez}^{ин} + F_{kz}^{ин}. \end{cases} \quad (3.49)$$

Уравнения (3.49) представляют собой *дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки.*

Сопоставляя уравнения (3.49) с (3.9), можно заметить, что дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки принципиально отличаются от дифференциальных уравнении абсолютного движения последней. Это различие состоит в том, что правые части уравнений (3.9) содержат лишь проекции равнодействующей сил, приложенных к точке, а правые части уравнений (3.49), кроме того, содержат еще проекции сил инерции (переносной и кориолисовой). Упомянутые силы инерции направлены против соответствующих ускорений $\vec{a}_e$ и $\vec{a}_k$ и приложены к телам, сообщающим точке эти ускорения.

Из рассмотрения выражений (3.49) следует, что материальная точка движется относительно подвижной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$ так же, как она двигалась бы относительно инерциальной системы отсчета $Oxyz$ при условии, что к ней были бы приложены не только силы, на нее действующие, но также переносная и кориолисова силы инерции. Таким образом, при наличии ускорений переносного и Кориолиса (или хотя бы одного из них) движение в системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$ происходит по иным законам, чем в системе $Oxyz$.

Частные случаи

1. Переносное движение поступательное. В данном случае система отсчета $O_1x_1y_1z_1$ движется относительно основной системы $Oxyz$ так, что $\vec{a}_k = 0$. При этом $\vec{F}_k^{ин} = 0$.

Следовательно, уравнение (3.48) принимает вид

$$m\vec{a}_r = \vec{R} + \vec{F}_e^{ин}.$$

Соответственно изменяются уравнения (3.49): в их правые части не будут входить проекции силы инерции Кориолиса.

2. Переносное движение равномерное прямолинейное поступательное. В данном случае система отсчета $O_1x_1y_1z_1$ движется относительно основной системы $Oxyz$ так, что одновременно выполняются два условия: $\vec{a}_e = 0$ и $\vec{a}_k = 0$. При этом $\vec{F}_e^{ин} = \vec{F}_k^{ин} = 0$. Следовательно, уравнение (3.48) принимает вид

$$m\vec{a}_r = \vec{R}.$$

Соответственно изменяются уравнения (3.49): в их правые части совсем не будут входить проекции сил инерции.

Таким образом, при равномерном прямолинейном поступательном переносном движении дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки не отличаются от дифференциальных уравнений абсолютного движения последней. Это означает, что ускорение материальной точки в подвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$ такое же, как и в инерциальной системе $Oxyz$. Следовательно, система отсчета, движущаяся поступательно, равномерно и прямолинейно относительно инерциальной системы, тоже является инерциальной.

3.6.2. Относительное равновесие

Относительное равновесие имеет место, когда $\vec{a}_r = 0$. При этом возможны два случая:

1) материальная точка не изменяет своего положения относительно подвижной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$ (относительный покой);

2) материальная точка движется равномерно и прямолинейно относительно подвижной системы отсчета.

В первом случае $\vec{V}_r = \vec{a}_r = 0$. Поэтому $\vec{a}_k = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r = 0$ и $\vec{F}_k^{ин} = -m\vec{a}_k = 0$. Следовательно, при относительном покое

$$\vec{R} + \vec{F}_e^{ин} = 0. \tag{3.50}$$

Векторному уравнению (3.50) соответствуют три скалярные уравнения

$$\begin{aligned} X_1 + F_{ex_1}^{ин} &= 0; \\ Y_1 + F_{ey_1}^{ин} &= 0; \\ Z_1 + F_{ez_1}^{ин} &= 0. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Согласно уравнению (3.50), при относительном покое силы, приложенные к материальной точке, уравновешиваются переносной силой инерции.

Во втором случае

$$\vec{R} + \vec{F}_e^{ин} + \vec{F}_k^{ин} = 0. \tag{3.52}$$

Векторному уравнению (3.52) соответствуют три скалярных уравнения

$$\begin{aligned} &X_1 + F_{ex_1}^{ин} + F_{kx_1}^{ин} = 0;\\ &Y_1 + F_{ey_1}^{ин} + F_{ky_1}^{ин} = 0;\\ &Z_1 + F_{ez_1}^{ин} + F_{kz_1}^{ин} = 0. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Согласно уравнению (3.52), при равномерном и прямолинейном относительном движении силы, приложенные к материальной точке, уравновешиваются переносной и кориолисовой силами инерции.

3.7. Введение в динамику механической системы

3.7.1. Основные понятия и определения

Механической системой материальных точек или механической системой называется совокупность материальных точек, движение каждой из которых зависит от движения остальных. Примеры механических систем: твердое или упругое тело; гибкая нить; механизм или машина, представляющие собой сочетание твердых, упругих, гибких или жидких тел; солнечная система.

По характеру абсолютного движения отдельных точек механические системы разделяются на два вида:

1) системы, состоящие из свободных материальных точек, каждая которых может перемещаться в произвольном направлении в пространстве (например, солнечная система);

2) системы, состоящие из несвободных материальных точек, движение которых ограничено связями.

По характеру относительного движения точек механические системы разделяются на три вида:

1) системы, относительное движение точек которых может изменяться (например, упругие или жидкие тела, гибкие нити);

2) системы, относительное движение точек которых может происходить лишь по заранее установленным законам (например, механизмы и машины);

3) неизменяемые системы, расстояния между всеми точками которых при движении системы не изменяются (например, абсолютно твердые тела).

Определить движение системы значит указать положение каждой из точек системы в любой наперед заданный момент времени.

Для определения положения в пространстве n свободных точек требуется $3n$ координат. Если движение системы ограничено S связями, то произвольное значение могут принимать только $(3n \quad S)$ координат. Такое количество произвольно выбранных координат можно считать независимыми переменными. Остальные координаты будут функциями выбранных.

При определении положения системы часто пользуются так называемыми обобщенными координатами. Обобщенными координатами системы называются независимые параметры, достаточные для определения положения данной системы. Через обобщенные координаты выражаются координаты всех точек системы.

Число обобщенных координат соответствует числу степеней свободы системы.

Согласно сказанному выше, при наложении на систему из n свободных точек S связей образуется система с $(3n - S)$ степенями свободы.

3.7.2. Классификация сил, действующих на систему

Силы, действующие на материальные точки, образующие механическую систему, классифицируют двумя способами:

1. *Силы взаимодействия точек, принадлежащих к данной системе,* называются *внутренними силами*, а *силы взаимодействия точек системы с материальными телами, не входящими в системы*, называются *внешними силами.*

2. Все силы, приложенные к точкам системы, разделяются на активные силы и реакции связей.

Внутренние силы в дальнейшем будем обозначать индексом i, и внешние – индексом e.

Отметим важное свойство внутренних сил: *для каждой данной внутренней силы* $\vec{F}^i$ *имеется другая внутренняя сила, равная и противоположная первой* $\left(-\vec{F}^i\right)$. Это свойство вытекает из третьего закона динамики. Из отмеченного свойства следует, что главный вектор, а также главный момент внутренних сил относительно любого центра или оси равны нулю

$$\vec{R}^i = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^i = 0; \qquad M_x^i = \sum_{k=1}^{n} M_x(\vec{F}_k^i) = 0;$$

$$\vec{M}_0^i = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{F}_k^i) = 0; \quad M_y^i = \sum_{k=1}^{n} M_y(\vec{F}_k^i) = 0;$$

$$M_z^i = \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k^i) = 0.$$

Следует подчеркнуть, что попарно равные внутренние силы не уравновешивают друг друга, так как они приложены к различным материальным точкам (или телам).

Нужно иметь в виду, что силы внутренние по отношению ко всей механической системе могут быть внешними по отношению к части последней.

3.7.3. Возможные перемещения

Возможным перемещением несвободной материальной точки называется любое бесконечно малое перемещение, допускаемое связью.

Возможным перемещением механической системы называется совокупность возможных перемещений всех точек системы, получаемая в результате бесконечно малого изменения какой-нибудь одной обобщенной координаты.

Если система имеет m степеней свободы, которым соответствуют обобщенные координаты: $q_1, q_2, ..., q_m$, то декартовы координаты любой из n точек системы являются функциями m переменных:

$$x_k = x_k(q_1, q_2, ..., q_m);$$

$$y_k = y_k(q_1, q_2, ..., q_m);$$

$$z_k = z_k(q_1, q_2, ..., q_m),$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$.

Взаимно независимые бесконечно малые изменения (так называемые вариации) обобщенных координат обозначают $\delta q_1,\ \delta q_2,\ ...,\ \delta q_m$. Соответствующие бесконечно малые изменения (вариации) декартовых координат точек системы выражаются как дифференциалы функций m переменных:

$$\delta x_k = \frac{\partial x_k}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \frac{\partial x_k}{\partial q_2} \cdot \delta q_2 + \ldots + \frac{\partial x_k}{\partial q_m} \cdot \delta q_m;$$

$$\delta y_k = \frac{\partial y_k}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \frac{\partial y_k}{\partial q_2} \cdot \delta q_2 + \ldots + \frac{\partial y_k}{\partial q_m} \cdot \delta q_m;$$

$$\delta z_k = \frac{\partial z_k}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \frac{\partial z_k}{\partial q_2} \cdot \delta q_2 + \ldots + \frac{\partial z_k}{\partial q_m} \cdot \delta q_m,$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$.

В частном случае для систем с одной степенью свободы, имеющих одну обобщенную координату q:

$$\delta x_k = \frac{dx_k}{dq} \cdot \delta q;$$
$$\delta y_k = \frac{dy_k}{dq} \cdot \delta q;$$
$$\delta z_k = \frac{dz_k}{dq} \cdot \delta q,$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$.

Величины $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$ представляют собой проекции вектора возможного перемещения k-той точки системы $\delta \vec{S}_k$:

$$\delta \vec{S}_k = \delta x_k \cdot \vec{i} + \delta y_k \cdot \vec{j} + \delta z_k \cdot \vec{k} .$$

Вектор возможного перемещения точки равен вариации радиус-вектора данной точки

$$\delta \vec{S}_k = \delta \vec{r}_k .$$

3.7.4. Принцип возможных перемещений

Принцип возможных перемещений определяет условие равновесия механической системы с идеальными связями. Он был впервые сформулирован Стивином (1586 г.), обобщен Лагранжем (1788 г.) и распространен на системы с неудерживающими связями М.В. Остроградским (1842 г.).

Принцип возможных перемещений заключается в следующем.

Для равновесия системы с идеальными удерживающими связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил, приложенных к системе, при любом возможном перемещении последней равнялась нулю.

Уравнение, выражающее принцип возможных перемещений

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_{Fk} = 0, \tag{3.54}$$

носит название общего уравнения статики. Оно позволяет решать задачи о равновесии механических систем с идеальными удерживающими связями.

Общее уравнение статики можно записать несколькими способами:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \delta\vec{S}_k = 0;$$
$$\sum_{k=1}^{n} (X_k \cdot \delta x_k + Y_k \cdot \delta y_k + Z_k \cdot \delta z_k) = 0. \tag{3.55}$$

В уравнениях (3.55) $\vec{F}_k$ – вектор равнодействующей внешних активных сил, приложенных к k-той точке системы, а X_k, Y_k, Z_k – проекции упомянутого вектора.

Для системы, обладающей m степенями свободы, можно составить m общих уравнений статики – для каждого из возможных перемещений системы. При этом вариации координат точек системы необходимые для подстановки в уравнения (3.55) следует определять каждый раз, считая, что все вариации обобщенных координат, кроме одной, равны нулю.

Если механическая система содержит твердые тела (звенья), возможные перемещения которых представляют собой повороты вокруг неподвижных или мгновенных осей, то элементарные работы активных сил, приложенных к этим телам, можно выразить произведениями главных моментов активных сил относительно упомянутых осей на бесконечно малые углы поворота вокруг последних. Элементарную работу активных сил, приложенных к j-тому звену, с неподвижной (или мгновенной) осью вращения z_j можно вычислить по формуле

$$\delta A_j = M_{zj} \cdot \delta\varphi_j,$$

где M_{zj} – алгебраическая сумма моментов активных сил, приложенных к данному звену, относительно оси вращения;

$\delta\varphi_j$ – бесконечно малый угол поворота звена при возможном перемещении системы.

При решении задачи о равновесии системы, состоящей из нескольких звеньев, методами статики приходится расчленять систему и рассматривать условия равновесия каждого звена в отдельности. При этом, если все силы действуют в одной плоскости необходимо решать $3n$ уравнений равновесия (n – число звеньев), в которые требуется вводить силы взаимодействия звеньев. Принцип возможных перемещений позволяет решать задачу о равновесии всей системы с помощью одного уравнения (общего уравнения статики), в которое силы взаимодействия звеньев не входят.

Принцип возможных перемещений возможно также применять при расчете ферм для определения опорных реакций и усилий в стержнях.

3.8. Общие теоремы динамики системы

3.8.1. Дифференциальные уравнения движения системы

Все силы, приложенные к любой из материальных точек, образующих систему, можно представить в виде геометрической суммы двух сил $\vec{F}_k^e$ и $\vec{F}_k^i$, где $\vec{F}_k^e$ – равнодействующая всех внешних сил, приложенных к данной (k-той) точке; $\vec{F}_k^i$ – равнодействующая всех внутренних сил, приложенных к этой же точке. При этом, согласно второму закону динамики,

$$m_k \cdot \vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i, \qquad (3.56)$$

где m_k – масса k-той точки;

$\vec{a}_k$ – вектор ускорения k-той точки.

Проектируя векторное уравнение (3.56) на оси инерциальной системы отсчета получаем три дифференциальных уравнения:

$$\begin{cases} m_k \cdot \ddot{x}_k = X_k^e + X_k^i; \\ m_k \cdot \ddot{y}_k = Y_k^e + Y_k^i; \\ m_k \cdot \ddot{z}_k = Z_k^e + Z_k^i. \end{cases} \qquad (3.57)$$

Уравнения (3.57) описывают движение одной (k-той) точки системы. Для описания движения всей системы, состоящей из n точек требуется $3n$ уравнений данного вида. Уравнения (3.57) называются дифференциальными уравнениями движения системы, при условии, что $k = 1, 2, \ldots, n$.

3.8.2. Теорема о движении центра масс системы

Центром масс (или центром инерции) системы называется геометрическая точка пространства с координатами:

$$x_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k x_k}{M}; \quad y_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k y_k}{M}; \quad z_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k z_k}{M}, \qquad (3.58)$$

где $M = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k$ – алгебраическая сумма масс всех точек, входящих в систему.

Величина M называется *массой системы*.

Положение центра масс можно также определить радиус-вектором по формуле

$$\vec{r}_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k}{M}, \qquad (3.59)$$

где $\vec{r}_k$ – радиус-вектор k-той точки системы.

Выражения (3.58) получаются путем проектирования выражения (3.59) на оси координат.

Если почленно сложить n уравнений (3.56), то получится следующее выражение

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{a}_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^i .$$

Векторные суммы в правой части представляют собой главные векторы внешних и внутренних сил системы соответственно. Главный вектор внутренних сил равен нулю.

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{a}_k = \vec{R}^e . \qquad (3.60)$$

Из выражения (3.59) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \vec{r}_k = M \cdot \vec{r}_C . \qquad (3.61)$$

Дважды дифференцируя выражение (3.61) по времени, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{a}_k = M \vec{\omega}_C . \qquad (3.62)$$

Левые части выражений (3.60) и (3.62) одинаковы. Следовательно, должны быть равны и правые части этих выражений. Приравнивая правые части выражений (3.60) и (3.62), получаем векторное уравнение

$$M \cdot \vec{a}_C = \vec{R}^e , \qquad (3.63)$$

эквивалентное трем скалярным уравнениям:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= X^e; \\ M\ddot{y}_C &= Y^e; \\ M\ddot{z}_C &= Z^e. \end{aligned} \qquad (3.64)$$

Таким образом, доказана теорема о движении центра масс:

Центр масс системы движется так же, как двигалась бы материальная точка, обладающая массой всей системы, под действием силы, равной главному вектору внешних сил.

Важнейший практический вывод из теоремы: *внутренние силы не могут влиять на движение центра масс.*

Частные случаи

1. $\vec{R}^e = 0$. При этом, согласно уравнению (3.63), $\vec{a}_C = 0$. Следовательно, в данном случае центр масс не имеет ускорения, то есть остается в покое или движется равномерно и прямолинейно ($\vec{V}_C = \overrightarrow{const}$). В этом выражается так называемый *закон сохранения движения центра масс.*

2. $X^e = 0$. При этом, согласно уравнению (3.64), $\ddot{x}_C = 0$, что соответствует $\dot{x}_C = const$. Следовательно, в данном случае проекция центра масс на ось Ox остается неизменной $V_{cx} = V_{cx0}$. Если к тому же $V_{cx0} = 0$, то $V_{cx} = 0$ все время движения.

3.8.3. Теорема об изменении количества движения системы

Количеством движения механической системы называется главный вектор количеств движения материальных точек, образующих систему. Согласно определению, количество движения системы находится по формуле

$$\vec{K} = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{V}_k . \tag{3.65}$$

Однако в ряде случаев $\vec{K}$ удобнее определять по другой формуле, полученной следующим путем.

Дифференцируя выражение (3.61) по времени, получаем

$$M \cdot \vec{V}_C = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \vec{V}_k . \tag{3.66}$$

Правые части выражений (3.65) и (3.66) одинаковы, следовательно, равны и их левые части. Это означает, что вектор количества движения системы равен массе системы, умноженной на вектор скорости центра масс

$$\vec{K} = M \cdot \vec{V}_C . \tag{3.67}$$

Согласно теореме о движении центра масс,

$$m\vec{a}_C = \vec{R}^e. \tag{3.68}$$

Левую часть этого векторного уравнения можно рассматривать как производную по времени от количества движения системы

$$\vec{a}_C = \frac{d\vec{V}_C}{dt} \quad \text{и} \quad m\vec{a}_C = m\cdot\frac{d\vec{V}_C}{dt} = \frac{d}{dt}\cdot\left(m\vec{V}_C\right) = \frac{d\vec{K}}{dt}.$$

На основании сказанного, уравнение (3.68) преобразуется к виду

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{R}^e,$$

откуда

$$d\vec{K} = \vec{R}^e dt. \tag{3.69}$$

Произведение, стоящее в правой части уравнения (3.69), представляет собой элементарный импульс главного вектора внешних сил, равный геометрической сумме элементарных импульсов внешних сил

$$d\vec{S} = \vec{R}^e dt = \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^e dt = \sum_{k=1}^{n} d\vec{S}_k.$$

Поэтому

$$d\vec{K} = \sum_{k=1}^{n} d\vec{S}_k. \tag{3.70}$$

Дифференциальное уравнение (3.70) выражает теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной форме:

Изменение количества движения системы за бесконечно малый промежуток времени равно геометрической сумме элементарных импульсов внешних сил.

Изменение вектора количества движения системы за конечный промежуток времени Δt находится интегрированием уравнения (3.70)

$$\int_0^t d\vec{K} = \sum_{k=1}^{n}\int_0^t d\vec{S}_k,$$

то есть $\vec{K} - \vec{K}_0 = \vec{S}$, или

$$m\vec{V}_C - m\vec{V}_{C0} = \vec{S}, \tag{3.71}$$

где $\vec{S}$ – импульс главного вектора внешних сил,

$$\vec{S}=\int_0^t \vec{R}^e dt=\sum_{k=1}^{n}\int_0^t \vec{F}_k^e dt=\sum_{k=1}^{n}\vec{S}_k .$$

Векторные уравнения (3.71) выражают теорему об изменении количества движения системы в конечной форме:

Изменение количества движения системы за конечный промежуток времени равно геометрической сумме импульсов внешних сил за данный промежуток времени.

Проектируя уравнения (3.71) на оси координат, получаем соответственно

$$\begin{cases} K_x-K_{x0}=S_x; \\ K_y-K_{y0}=S_y; \\ K_z-K_{z0}=S_z. \end{cases} \tag{3.72}$$

$$\begin{aligned} mV_{Cx}-mV_{Cx0}&=S_x; \\ mV_{Cy}-mV_{Cy0}&=S_y; \\ mV_{Cz}-mV_{Cz0}&=S_z. \end{aligned}$$

Проекции импульса главного вектора внешних сил, стоящие в правых частях уравнений (3.72), находятся по формулам

$$\begin{aligned} S_x&=\int_0^t X^e dt=\sum_{k=1}^{n}\int_0^t X_k^e dt=\sum_{k=1}^{n}S_{kx}; \\ S_y&=\int_0^t Y^e dt=\sum_{k=1}^{n}\int_0^t Y_k^e dt=\sum_{k=1}^{n}S_{ky}; \\ S_z&=\int Z^e dt=\sum_{k=1}^{n}\int_0^t Z_k^e dt=\sum_{k=1}^{n}S_{kz}. \end{aligned}$$

Частные случаи

1. $\vec{R}^e=0$. В данном случае $\vec{S}=0$ и $\vec{K}=\vec{K}_0=\overrightarrow{const}$.

2. $\sum_{k=1}^{n}X_k^e=0$. В данном случае $S_x=0$ и $K_x=K_{x0}$.

В рассмотренных частных случаях проявляется так называемый закон сохранения количества движения системы.

Теоремой об изменении количества движения системы удобно пользоваться при исследовании движения жидких тел. Она широко применяется в теории удара и динамике тел переменной массы.

3.8.4. Теорема о кинетическом моменте системы

Кинетическим моментом системы относительно некоторого центра называется главный момент количеств движения материальных точек, образующих систему, взятый относительно данного центра.

По определению кинетический момент системы относительно неподвижного центра O

$$\vec{L}_0 = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0(m_k \vec{V}_k), \tag{3.73}$$

где $\vec{M}_0(m_k \vec{V}_k)$ – момент количества движения k-той точки относительно заданного центра.

Проверяя теорему о моменте количества движения материальной точки к k-той точке системы, будем иметь

$$\frac{d}{dt}\vec{M}_0(m_k \vec{V}_k) = \vec{M}_0(\vec{F}_k^e) + \vec{M}_0(\vec{F}_k^i). \tag{3.74}$$

Записав аналогичные уравнения для остальных точек системы и сложив все n уравнений почленно, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt}\vec{M}_0(m_k \vec{V}_k) = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{F}_k^e) + \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{F}_k^i). \tag{3.75}$$

Сумма производных в левой части уравнения (3.75) может быть преобразована в производную суммы

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt}\vec{M}_0(m_k \vec{V}_k) = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0(m_k \vec{V}_k).$$

Полученная производная есть $\dfrac{d\vec{L}_0}{dt}$.

Первая сумма в правой части выражения (3.75) равна главному моменту внешних сил относительно центра O

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{F}_k^e) = \vec{M}_0^e.$$

Вторая сумма в правой части выражения (3.75) равна главному моменту внутренних сил относительно центра O. Этот главный момент равен нулю. Таким образом, векторное уравнение (3.75) может быть переписано следующим образом

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0^e. \tag{3.76}$$

Векторное уравнение (3.76) выражает теорему о кинетическом моменте системы:

Производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижного центра равна главному моменту внешних сил относительно данного центра.

Проектирую последнее уравнение на неподвижные оси координат, получаем три скалярных уравнения:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^e; \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y^e; \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z^e. \tag{3.77}$$

Величины L_x, L_y, L_z, равные проекциям $\vec{L}_0$, называются кинетическими моментами системы относительно осей Ox, Oy и Oz соответственно.

Каждое из уравнении (3.77) читается так: *производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижной оси равна главному моменту внешних сил относительно данной оси.*

Наиболее важный практический вывод из доказанной теоремы внутренние силы не могут изменить кинетический момент системы.

Частные случаи

1. $\vec{M}_0^e = 0$. В этом случае $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = 0$. Следовательно, $\vec{L}_0 = \overrightarrow{const}$.

2. $M_x^e = 0$. В этом случае $\frac{dL_x}{dt} = 0$. Следовательно, $L_x = const$.

В рассмотренных частных случаях проявляется, так называемый, закон сохранения кинетического момента системы.

3.8.5. Разновидности моментов инерции

Момент инерции материальной точки и механической системы можно определять относительно центра (полюса), плоскостей осей, например, относительно начала координат – точки O, координатных плоскостей xOy, yOz, zOx и координатных осей Ox, Oy, Oz. В любом из перечисленных случаев *момент инерции материальной точки выражается произведением массы точки на квадрат расстояния до центра (полюса), плоскости или оси соответственно*. Момент инерции системы равен сумме моментов инерции всех точек, образующих систему.

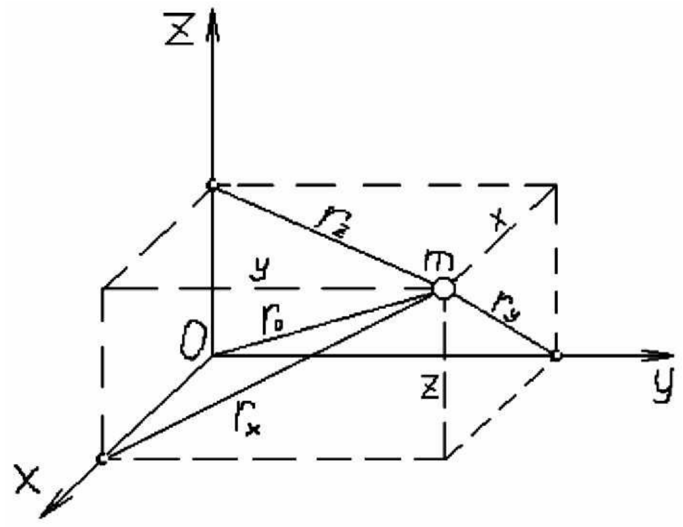


Рис. 3.4. К определению моментов инерции материальной точки

Для материальной точки с массой m и координатами x, y, z, изображенной на рис. 3.4, моменты инерции относительно координатных плоскостей

$$J_{y0z} = mx^2,$$
$$J_{z0x} = my^2,$$
$$J_{x0y} = mz^2.$$

Моменты инерции точки относительно координатных осей:

$$J_x = mr_x^{\ 2} = m\,(y^2 + z^2);$$
$$J_y = mr_y^{\ 2} = m\,(z^2 + x^2);$$
$$J_z = mr_z^{\ 2} = m\,(x^2 + y^2).$$

Момент инерции точки относительно начала координат:

$$J_0 = mr_0^{\ 2} = m\,(x^2 + y^2 + z^2) = J_{x0y} + J_{y0z} + J_{z0x} = \frac{J_x + J_y + J_z}{2}.$$

Из записанных выражений следует, что ***момент инерции материальной точки относительно координатной плоскости*** *равен произведению массы точки на квадрат координаты, не входящей в обозначение плоскости.* ***Момент инерции точки относительно оси*** *равен сумме моментов инерции этой точки относительно плоскостей, в пересечении которых лежит данная ось.* ***Момент инерции точки относительно начала координат*** *равен сумме моментов инерции этой точки относительно всех трех координатных плоскостей (в пересечении которых лежит начало координат) или полусумме моментов инерции относительно всех трех координатных осей.*

Помимо рассмотренных моментов инерции, в динамике применяются так называемые *центробежные моменты инерции*, определяемые для материальной точки по формулам:

$$J_{xy} = mxy;$$
$$J_{yz} = myz;$$
$$J_{zx} = mzx.$$

В отличие от ранее рассмотренных моментов инерции, представляющих собой положительные величины, центробежные моменты инерции могут быть и меньше нуля.

Соответствующие моменты инерции механической системы, состоящей из n материальных точек, получаются алгебраическим суммированием величин, найденных для каждой из точек.

Так, например, момент инерции системы, состоящей из n точек, относительно плоскости xOy выражается формулой

$$J_{xoy} = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2$$

и т. д.

При определении моментов инерции сплошных (например, однородных твердых) тел суммирование заменяется интегрированием.

Размерность любого из рассмотренных моментов инерции

$$[J] = [m][r^2] = \text{кг·м}^2.$$

3.8.6. Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей

Рассмотрим систему материальных точек, одна из которых изображена на рис. 3.5. Начало координат совместим с центром масс (точкой C). Параллельно оси Cz через точку O_1 на оси Cy проведем O_1z_1. Найдем зависимость между моментами инерции системы относительно осей Cz и O_1z_1.

Согласно рисунку 3.5,

$$J_z = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2;$$
$$J_{z1} = \sum_{k=1}^{n} m_k r_{1k}^2,$$

где $r_k^2 = x_k^2 + y_k^2$,

$$r_k^2 = x_k^2 + (y_k - d)^2 = x_k^2 + y_k^2 - 2dy_k + d^2,$$

где d – расстояние между осями Cz и O_1z_1.

Следовательно:

$$J_{z1} = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2) - 2d \sum_{k=1}^{n} m_k y_k + d^2 \sum_{k=1}^{n} m_k .$$

Первое слагаемое в правой части полученного выражения есть J_z. Сумма, входящая сомножителем во второе слагаемое, есть статический момент системы относительно плоскости xCz. Известно, что статический момент системы относительно любой плоскости равен произведению массы системы на расстояние центра масс до данной плоскости.

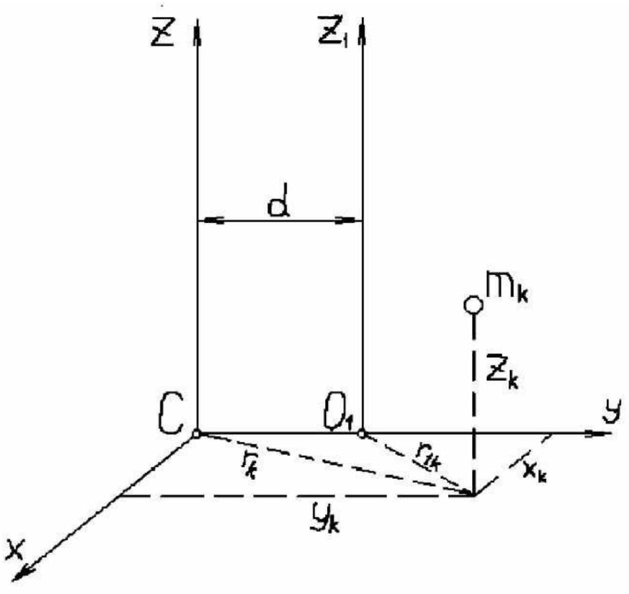


Рис. 3.5. К выводу формулы (3.78)

В рассматриваемом случае плоскость (xCz) проходит через центр масс. Поэтому статический момент, а с ним и второе слагаемое обращаются в нуль. Сумма, входящая сомножителем в третье слагаемое, есть масса системы (M). Следовательно:

$$J_{z1} = J_z + Md^2. \qquad (3.78)$$

Тем самым доказана теорема Гюйгенса – Штейнера:

Момент инерции системы относительно данной оси равен моменту инерции относительно параллельной оси, проведенной через центр масс, плюс произведение массы системы на квадрат расстояния между осями.

Следствие из доказанной теоремы: *из всех моментов инерции относительно осей данного направления наименьшее значение имеет момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс.*

3.8.7. Определение кинетической энергии системы

Кинетической энергией системы называется алгебраическая сумма кинетических энергий материальных точек, образующих данную систему

$$T = \sum_{j=1}^{n} T_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j V_j^2}{2}, \qquad (3.79)$$

где m_j – масса j-той точки; V_j – скорость j-той точки.

Если система состоит из нескольких частей (звеньев), как, например, механизм, то ее кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий всех звеньев, независимо от характера движения каждого звена.

Кинетическая энергия системы может обратиться в нуль лишь в том случае, если скорости всех точек системы станут равными нулю.

Как и для материальной точки, кинетическая энергия системы характеризует мгновенное состояние последней и служит мерой механического движения при исследовании перехода его в другие формы движения материи.

Найдем величину кинетической энергии при различных видах движения неизменяемой системы (например, твердого тела).

В случае поступательного движения системы скорости всех ее точек одинаковы, поэтому,

$$T = \frac{V_j^2}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j = \frac{MV_j^2}{2}, \qquad (3.80)$$

где m – масса системы; V_j – скорость любой точки системы.

В качестве V_j в формуле (3.80) можно брать скорость центра масс. При этом кинетическая энергия поступательно движущейся системы выражается формулой

$$T = \frac{MV_C^2}{2}.$$

При вращении системы вокруг неподвижной оси величина скорости любой точки находится по формуле

$$V_j = |\omega| r_j ,$$

где $|\omega|$ – величина угловой скорости системы;

r_j – расстояние j-той точки до оси вращения.

Поэтому $T = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j \omega^2 r_j}{2} = \frac{\omega^2}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j r_j^2 = \frac{\omega^2}{2} J_u .$

Следовательно, кинетическая энергия системы вращающейся вокруг неподвижной оси, определяется по формуле

$$T = \frac{J_u \omega^2}{2}, \qquad (3.81)$$

где J_u – момент инерции системы относительно оси вращения.

При плоскопараллельном движении система в каждый данный момент времени вращается вокруг соответствующей мгновенной оси. Поэтому ее кинетическую энергию можно определять по формуле

$$T = \frac{J_l \omega^2}{2}, \tag{3.82}$$

где J_l – момент инерции системы относительно мгновенной оси вращения.

По теореме Гюйгенса-Штейнера

$$J_l = J_c + Md^2,$$

где J_c – момент инерции системы относительно оси C_ζ, проходящей через центр масс параллельно мгновенной оси;

d – расстояние от центра масс до мгновенной оси (рис. 3.6).

Подставляя значение J_l в формулу (3.82), будем иметь

$$T = \frac{J_c \omega^2}{2} + \frac{M\omega^2 d^2}{2}.$$

Так как $\omega \cdot d = V_c$ есть скорость центра масс, окончательно получим

$$T = \frac{MV_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2}. \tag{3.83}$$

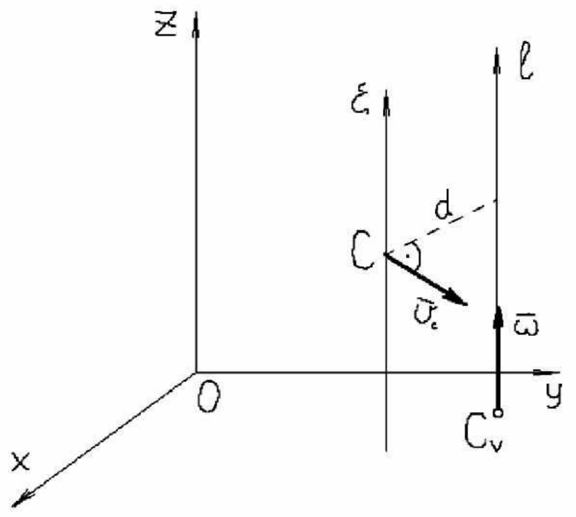


Рис. 3.6. К выводу формулы (3.83)

Тем самым для случая плоскопараллельного движения системы доказана теорема Кёнига:

Кинетическая энергия системы может быть представлена в виде суммы двух слагаемых, первое из которых есть кинетическая энергия данной системы при ее поступательном движении со скоростью центра масс, а второе – кинетическая энергия данной системы при ее движении относительно центра масс.

В случае плоскопараллельного движения системы движение последней относительно центра масс выражается во вращении вокруг оси C_ζ с угловой скоростью ω.

Можно доказать, что теорема Кёнига справедлива для всех видов движения любых механических систем. Однако следует подчеркнуть, что кинетическую энергию системы нельзя получать суммированием кинетических энергий, соответствующих поступательному переносному движению вместе с произвольно выбранным полюсом и относительному движению вокруг этого произвольно выбранного полюса. Теорема Кёнига требует, чтобы за полюс был выбран обязательно центр масс системы.

Неизменяемая система, имеющая неподвижный центр, в каждый данный момент вращается вокруг мгновенной оси, проходящей через этот центр. Следовательно, кинетическую энергию системы можно определять по формуле (3.82).

3.8.8. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Согласно теореме об изменении кинетической энергии материальной точки, для j-той точки системы имеем

$$d\left(\frac{m_j V_j^2}{2}\right) = dA_j, \tag{3.84}$$

где dA_j – элементарная работа равнодействующей $\overrightarrow{R_j}$, всех сил, приложенных к данной точке.

Равнодействующую можно представить в виде суммы двух сил

$$\vec{R}_j = \vec{R}_j^e + \vec{R}_j^i,$$

где $\vec{R}_j^e, \vec{R}_j^i$ – равнодействующие внешних и внутренних сил, приложенных к j-той точке.

Найдем величину dA_j

$$dA_j = (\vec{R}_j^e + \vec{R}_j^i) \cdot d\vec{r}_j = \vec{R}_j^e \cdot d\vec{r}_j + \vec{R}_j^i \cdot d\vec{r}_j,$$

где $d\vec{r}_j$ – вектор элементарного перемещения j-той точки.

Поэтому

$$dA_j = dA_{Fj},$$

где dA_{Fj} – элементарная работа внешних и внутренних сил, приложенных к j-той точке.

Подставляя найденное значение в формулу (3.84), получаем

$$d\left(\frac{m_j V_j^2}{2}\right) = dA_{Fj}. \tag{3.85}$$

Составляя выражения (3.85) для каждой точки системы и суммируя их почленно, находим

$$\sum_{j=1}^{n} d\left(\frac{m_j V_j^2}{2}\right) = \sum_{j=1}^{n} dA_{Fj} .$$

Преобразуя сумму дифференциалов в дифференциал суммы, будем иметь

$$\sum_{j=1}^{n} d\left(\frac{m_j V_j^2}{2}\right) = d\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{m_j V_j^2}{2}\right) = dT ,$$

где dT – дифференциал кинетической энергии системы.

Таким образом мы пришли к уравнению

$$dT = \sum_{j=1}^{n} dA_{Fj} , \tag{3.86}$$

выражающему теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме:

Изменение кинетической энергии системы на бесконечно малом перемещении последней равно сумме элементарных работ внешних и внутренних сил.

Интегрируя дифференциальное уравнение (3.86), получаем

$$T - T_0 = \sum_{j=1}^{n} A_{Fj} . \tag{3.87}$$

Уравнение (3.87) выражает теорему об изменении кинетической энергии системы в конечной форме:

Изменение кинетической энергии системы при конечном перемещении последней равно сумме работ внешних и внутренних сил на этом перемещении.

Следует отметить, что в уравнения, выражающие все предыдущие теоремы динамики системы (о движении центра масс, об изменении количества движения системы, о кинетическом моменте), внутренние силы не входят, а в уравнения, выражающие теорему об изменении кинетической энергии системы, внутренние силы входят.

3.9. Принцип Д'Аламбера для механической системы

3.9.1. Применение принципа Д'Аламбера к механической системе

Принцип Д'Аламбера, сформулированный для несвободной материальной точки, можно распространить на механическую систему.

Сила инерции каждой из n материальных точек, образующих систему, должна уравновешивать силы, приложенные к этой точке. Поэтому для любой точки системы можно составить векторное уравнение

$$\vec{F}_k + \vec{R}_k + \vec{F}_k^{ин} = 0, \tag{3.88}$$

где $\vec{F}_k$ – равнодействующая внешних и внутренних сил, приложенных к k-той точке;

$\vec{R}_k$ – равнодействующая реакций связи, действующих на k-тую точку;

$\vec{F}_k^{ин}$ – сила инерции k-той точки.

Таким образом, принцип Д'Аламбера для системы может быть выражен векторными уравнениями (3.88) при условии, что $k = 1, 2, \ldots, n$.

Аналогично тому, как это делалось для одной несвободной материальной точки, задачу динамики системы можно приводить к статической задаче при условии, что к каждой из точек системы будет добавлена соответствующая сила инерции.

Решение задач динамики системы с помощью принципа Д'Аламбера (по методу кинетостатики) нужно производить в такой последовательности:

– мысленно остановить движение системы;

– каждой точке системы приложить соответствующую силу инерции;

– составить статические уравнения равновесия;

– решить составленные уравнения равновесия относительно искомых величин.

После мысленного прекращения движения система становится неизменяемой. Поэтому при составлении уравнений динамического равновесия всю систему или любую ее часть можно считать твердым телом. При произвольном расположении в пространстве сил, вводимых в уравнения динамического равновесия, для системы в целом и каждой ее части можно составить по 6 таких уравнений. При расположении всех упомянутых сил в одной плоскости число соответствующих уравнений динамического равновесия сокращается до трех и т. д.

В уравнения динамического равновесия, составленные для системы в целом, внутренние силы не входят. Это объясняется равенством нулю главного вектора и главного момента всех внутренних сил, проекции которых должны были бы войти в эти уравнения. В уравнения динамического равновесия части системы войдут только те внутренние силы, которые являются внешними для выделенной части.

В уравнения динамического равновесия должны входить проекции главного вектора ($\vec{R}^{ин}$)и главного момента ($\vec{M}_0^{ин}$) сил инерции системы (или выделенной части последней).

На основании сказанного, векторные уравнения динамического равновесия всей системы в целом имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\vec{R}^e + \vec{R}^{ин} = 0; \\ &\vec{M}_0^e + \vec{M}_0^{ин} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.89}$$

Векторные уравнения (3.89) в общем случае эквивалентны шести скалярным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} &X^e + X^{ин} = 0; \\ &Y^e + Y^{ин} = 0; \\ &Z^e + Z^{ин} = 0; \\ &M_x^e + M_x^{ин} = 0; \\ &M_y^e + M_y^{ин} = 0; \\ &M_z^e + M_z^{ин} = 0; \end{aligned}\right\} \tag{3.90}$$

В уравнениях (3.90) $X^{ин}$, $Y^{ин}$, $Z^{ин}$ представляют собой проекции главного вектора сил инерции системы, равные алгебраическим суммам соответствующих проекций сил инерции всех точек, а $M_x^{ин}$, $M_y^{ин}$, $M_z^{ин}$ – главные моменты сил инерции системы относительно осей координат, равные алгебраическим суммам соответствующих моментов сил инерции всех точек.

3.9.2. Определение главного вектора сил инерции системы

Найдем выражение для главного вектора сил инерции системы в общем случае.

По определению главный вектор сил инерции системы представляет собой геометрическую сумму векторов сил инерции всех точек системы

$$\vec{R}^{ин} = \sum_{k=1}^{n} (-m_k \vec{a}_k).$$

Согласно формуле (3.63)

$$\sum_{k=1}^{n} \left(-m_k \vec{a}_k\right) = -M\vec{a}_c,$$

где $\vec{W}_c$ – вектор ускорения центра масс.

Таким образом главный вектор сил инерции системы во всех случаях можно определять по формуле

$$\vec{R}^{ин} = -M\vec{a}_c \tag{3.91}$$

При криволинейном движении центра масс

$$\vec{a}_c = \vec{a}_c^{\tau} + \vec{a}_c^{n}.$$

Следовательно,

$$\vec{R}^{ин} = \vec{R}_{\tau}^{ин} + \vec{R}_{n}^{ин},$$

где $\vec{R}_{\tau}^{ин} = -M\vec{a}_c^{\tau}$ – касательная составляющая главного вектора сил инерции;

$\vec{R}_{n}^{ин} = -M\vec{a}_c^{n}$ – нормальная составляющая главного вектора сил инерции.

3.9.3. Определение главного момента сил инерции неизменяемой системы

Главный момент сил инерции любой системы относительно произвольно выбранной точки O

$$\vec{M}_0^{ин} = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times (-m_k\vec{a}_k), \tag{3.92}$$

где $\vec{r}_k$ – радиус-вектор k-той точки, имеющий начало в выбранном центре O.

Главные моменты сил инерции относительно осей, проходящих через точку O, равны проекциям вектора $\vec{M}_0^{ин}$ на эти оси.

При поступательном движении системы ускорения всех ее точек одинаковы и равны ускорению центра масс ($\vec{a}_k = \vec{a}_c$).

При этом правая часть выражения (3.92) примет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times (-m_k\vec{a}_k) = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times (-m_k\vec{a}_c) = (\sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k m_k) \times (-\vec{a}_c).$$

Согласно уравнению (3.59),

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k m_k = M\vec{r}_c.$$

Следовательно, при поступательном движении системы

$$\vec{M}_o^{ин} = M\vec{r}_c \times (-\vec{a}_c) = \vec{r}_c \times (-M\vec{a}_c) = \vec{r}_c \times \vec{R}^{ин}.$$

Главные моменты сил инерции поступательно движущейся системы относительно осей координат можно определять по формулам:

$$M_x^{ин} = y_c\, Z^{ин} - z_c\, Y^{ин};$$

$$M_y^{ин} = z_c\, X^{ин} - x_c\, Z^{ин};$$

$$M_z^{ин} = x_c\, Y^{ин} - y_c\, X^{ин},$$

где x_c, y_c, z_c – координаты центра масс;

$X^{ин}$, $Y^{ин}$, $Z^{ин}$ – проекции главного вектора сил инерции.

Если за центр приведения взять центр масс, то $\vec{r}_c = 0$.

Поэтому главный момент сил инерции поступательно движущейся системы относительно центра масс данной системы равен нулю

$$\vec{M}_c^{ин} = 0 .$$

В этом случае равны нулю и главные моменты сил инерции относительно любых осей, проходящих через центр масс, например, осей C_x, C_y, C_z:

$$M_x^{ин} = M_y^{ин} = M_z^{ин} = 0.$$

При вращении системы вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью ω и угловым ускорением ε сила инерции каждой точки системы имеет касательную и нормальную составляющую. Линии действия всех нормальных составляющих (центробежных сил) пересекают ось вращения. Поэтому главный момент сил инерции относительно оси вращения равен сумме моментов одних касательных составляющих этих сил:

$$M_z^{ин} = \sum_{k=1}^{n} r_k(-m_k \varepsilon r_k) = -\varepsilon \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 ,$$

где r_k – расстояние k-той точки до оси вращения.

Сумма в правой части последнего выражения представляет собой момент инерции системы относительно оси вращения J_z. Следовательно, главный момент сил инерции системы относительно оси вращения определяется по формуле

$$M_z^{ин} = -J_z\varepsilon. \qquad (3.93)$$

Знак минус в правой части выражения (3.93) указывает, что $M_z^{ин}$ направлен против углового ускорения системы.

Плоскопараллельное движение системы можно рассматривать как составное движение, слагающееся из переносного поступательного движения вместе с центром масс и вращательного вокруг оси $C\xi$, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения. При этом ускорение каждой точки системы следует считать равным сумме двух ускорении

$$\vec{a}_k = \vec{a}_c + \vec{a}_{rk},$$

где $\vec{a}_{rk}$ – ускорение k-той точки во вращательном движении вокруг оси $C\xi$.

Сила инерции каждой точки будет иметь две составляющие

$$\vec{F}_k^{ин} = \vec{F}_{ek}^{ин} + \vec{F}_{rk}^{ин},$$

где $\vec{F}_{ek}^{ин} = -m_k\vec{a}_c$ – сила инерции переносного движения;

$\vec{F}_{rk}^{ин} = -m_k\vec{a}_{kr}$ – сила инерции относительного движения.

Главный момент всех сил инерции относительно центральной оси $C\xi$, получим, складывая два момента, один из которых есть главный момент сил инерции переносного движения, а второй – главный момент сил инерции относительного движения.

Первый из упомянутых главных моментов равен нулю, а второй, согласно формуле (3.93), равен

$$M\xi^{ин} = -J\xi\varepsilon. \tag{3.94}$$

3.10. Общее уравнение динамики. Принцип Д`Аламбера – Лагранжа

При движении механической системы силы инерции уравновешивают силы, приложенные к точкам системы.

После того, как движущаяся система мысленно остановлена (ко всем ее точкам приложены соответствующие силы инерции), условия динамического равновесия можно выразить с помощью принципа возможных перемещений. Для равновесия мысленно остановленной системы необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил и сил инерции при любом возможном перемещении системы из данного ее положения равнялась нулю.

Применение принципа возможных перемещений в этом случае дает

$$\sum_{k=1}^{n}(\delta A_{F_k} + \delta A_{F_k^{ин}}) = 0. \tag{3.95}$$

Уравнение (3.95), одновременно выражающее принцип Д'Аламбера и принцип возможных перемещений, называется общим уравнением динамики.

Как и общее уравнение статики, общее уравнение динамики можно записать несколькими способами:

$$\sum_{k=1}^{n}(\vec{F}_k + \vec{F}_k^{ин}) \cdot \delta\ \vec{r}_k = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n}(\vec{F}_k + \vec{F}_k^{ин}) \cdot \delta\ \vec{s}_k = 0, \tag{3.96}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\left(X_k + X_k^{ин}\right)\delta\ x_k + \left(Y_k + Y_k^{ин}\right)\delta\ y_k + \left(Z_k + Z_k^{ин}\right)\delta\ z_k\right] = 0.$$

Поскольку проекции силы инерции k-той точки равны

$$X_k^{ин} = -m_k\ddot{x}_k,$$
$$Y_k^{ин} = -m_k\ddot{y}_k,$$
$$Z_k^{ин} = -m_k\ddot{z}_k,$$

то третье уравнение (3.96) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\left(X_k - m_k\ddot{x}_k\right)\delta\ x_k + \left(Y_k - m_k\ddot{y}_k\right)\delta\ y_k + \left(Z_k - m_k\ddot{z}_k\right)\delta\ z_k\right] = 0,$$

где X_k, Y_k, Z_k – проекции равнодействующей активных сил, приложенных к k-той точке;

$\delta\ x_k$, $\delta\ y_k$, $\delta\ z_k$ – проекции возможного перемещения k-той точки.

Количество общих уравнений динамики, которые можно составить для механической системы, равно числу степеней свободы последней.

3.11. Уравнение Лагранжа (второго рода)

Рассмотрим систему материальных точек. Если система несвободна, то наложенные на нее связи предполагаются удерживающими и идеальными. Пусть $\delta\vec{r}_k$ – возможное перемещение k-той точки, m_k – ее масса, $\vec{a}_k$ – ускорение в инерциальной системе отсчета, а $\vec{F}_k$ – равнодействующая всех активных сил, приложенных к k-ой точке. Тогда имеет место общее уравнение динамики

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{F}_k - m_k\vec{a}_k\right) \cdot \delta\vec{r}_k = 0. \tag{3.97}$$

Запишем уравнение (3.97) в обобщенных координатах. Для элементарной работы активных сил имеем выражение

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k = \sum_{j=1}^{m} Q_j \delta q_j, \tag{3.98}$$

где Q_j – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_j. Она в общем случае является функцией q, $\dot{q}$ и t.

Выражение для элементарной работы сил инерции записывается в виде

$$-\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{a}_k \cdot \delta\vec{r}_k = -\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \tag{3.99}$$

Подставим теперь выражения (3.98) и (3.99) в соотношение (3.97) и умножим обе части получившегося равенства на –1. В результате имеем *общее уравнение динамики в обобщенных координатах*

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0. \tag{3.100}$$

Величины δq_j (j = 1, 2, …, m) независимы и число обобщенных координат равно числу степеней свободы системы. В силу независимости величин δq_j последнее уравнение удовлетворяется тогда и только тогда, когда равны нулю коэффициенты при всех δq_j. Поэтому (3.100) эквивалентно следующей системе m уравнений:

$$\frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \ (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{3.101}$$

Уравнения (3.101) называются *уравнениями Лагранжа второго рода.* Они образуют систему m дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций $q_j(t)$. Порядок этой системы равен $2m$. Заметим, что это наименьший возможный порядок дифференциальных уравнений движения рассматриваемой системы, так как начальные значения величин q_j, $\dot{q}_j$, (j = 1, 2, …, m), могут быть произвольными.

Для получения уравнений Лагранжа надо выразить кинетическую энергию T системы через обобщенные координаты и скорости, найти обобщенные силы и произвести указанные в выражениях (3.101) дифференцирования функции T (q_j, $\dot{q}_j$, t) по обобщенным координатам, обобщенным скоростям и времени. Заметим, что форма уравнений щенным скоростям и времени. Заметим, что форма уравнений Лагранжа не зависит от выбора обобщенных координат q_1, q_2, …, q_m. При другом их выборе изменились бы только функции T и Q_j, а сама форма уравнений (3.101) осталась бы той же.

В уравнениях Лагранжа не содержатся реакции идеальных связей. Если же нужно найти реакции связей, то надо после интегрирования уравнений Лагранжа определить $\vec{r}_k$, и тогда равнодействующая $\vec{R}_k$ реакции связей, приложенных к k-той точке, найдется из соотношения

$$\vec{R}_k = m_k \ddot{\vec{r}}_k - \vec{F}_k(\vec{r}_k, \dot{\vec{r}}_k, t).$$

3.12. Динамика абсолютно твердого тела

3.12.1. Вращение абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси

Определим закон вращения $\varphi = \varphi(t)$ твердого тела вокруг неподвижной оси Oz под действием внешних сил, главный момент которых относительно заданной оси (M_z^e) известен (рис. 3.7).

Момент количества движения относительно оси Oz произвольной частицы тела, имеющей массу dm и находящейся на расстоянии r от оси вращения, равен

$$dL_z = (dm)Vr.$$

Поскольку скорость частицы $V = \omega \cdot r$, где $\omega = \dot{\varphi}$ – угловая скорость тела (φ – угол поворота тела), получим

$$dL_z = \omega r^2 dm.$$

Кинетический момент тела относительно оси Oz

$$L_z = \omega \cdot \int\limits_{(V)} r^2 dm. \qquad (3.102)$$

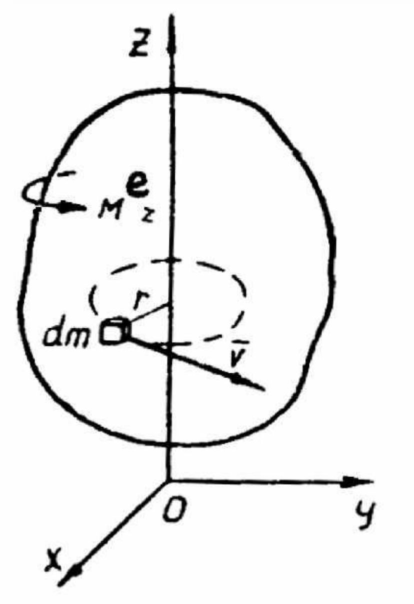


Рис. 3.7. К вопросу вращения тела вокруг оси OZ

Интеграл в правой части последнего выражения, который берется по всему объему V тела, называется моментом инерции тела относительно оси Oz

$$J_z = \int\limits_{(V)} r^2 dm. \qquad (3.103)$$

Момент инерции тела характеризует распределение массы в теле. Он зависит от формы, размеров и материала тела.

Подставляя значение J_z, найденное по формуле (3.103), в формулу (3.102), получаем

$$L_z = J_z \cdot \omega .$$

Применяя теорему о кинетическом моменте системы, находим, что

$$J_z \cdot \frac{d\omega}{dt} = M_z^e . \tag{3.104}$$

Производная угловой скорости по времени есть угловое ускорение, поэтому выражение (3.104) можно записать следующим образом

$$J_z \cdot \varepsilon = M_z^e$$

или

$$J_z \cdot \ddot{\varphi} = M_z^e . \tag{3.105}$$

Выражения (3.104) и (3.105) представляют собой различные формы дифференциального уравнения вращения твердого тела относительно неподвижной оси.

Закон вращательного движения тела находится путем двукратного интегрирования этого дифференциального уравнения.

При определении главного момента внешних сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, следует учитывать, что нормальные опорные реакции пересекают ось вращения и поэтому не дают момента относительно последней. Если в опорах (подшипниках) есть трение, моменты сил трения следует добавлять к моментам других внешних сил, приложенных к телу.

При $M_z^e = 0$ получаем $J_z \cdot \varepsilon = 0$, то есть $J_z\omega = \text{const}$.

Таким образом, если главный момент внешних сил относительно неподвижной оси вращения системы равен нулю, то произведение момента инерции системы относительно этой оси на угловую скорость есть величина постоянная. Если система неизменяемая (твердое тело), то для нее $J_z = \text{const}$. При этом должно быть и $\omega = \text{const}$. Если система изменяется, так что $J_z \neq \text{const}$, то $\omega \neq \text{const}$.

Изменение J_z может быть произведено внутренними силами – за счет перемещения отдельных точек системы относительно оси вращения. Поэтому внутренние силы могут изменить угловую скорость системы.

Влияние изменения момента инерции на угловую скорость системы имеет место при наматывании (и сматывании) лент и нитей на катушки, при заполнении расплавленным металлом вращающихся форм (при так называемом центробежном литье), при выполнении спортсменами поворотов в воздухе, при совершении танцорами пируэтов (быстрых вращении) и т. п.

3.12.2. Плоскопараллельное движение твердого тела

На рис. 3.8 изображено твердое тело, движущееся параллельно плоскости Oxy. Как известно из кинематики, закон плоскопараллельного движения выражается тремя уравнениями. Два из этих уравнений определяют текущие координаты полюса, произвольно выбранного в любом сечении S тела, параллельном плоскости движения, а третье – угол φ поворота плоского сечения вокруг полюса.

Примем за полюс центр масс тела точку C. Тогда закон движения тела будет выражаться тремя кинематическими уравнениями:

$$x_C = x_C(t);$$
$$y_C = y_C(t);$$
$$\varphi = \varphi(t).$$

Угол φ представляет собой угол поворота подвижной системы отсчета $Cx_1y_1z_1$, жестко скрепленной с телом, относительно системы отсчета $C\xi\eta\zeta$, движущейся поступательно вместе с полюсом C.

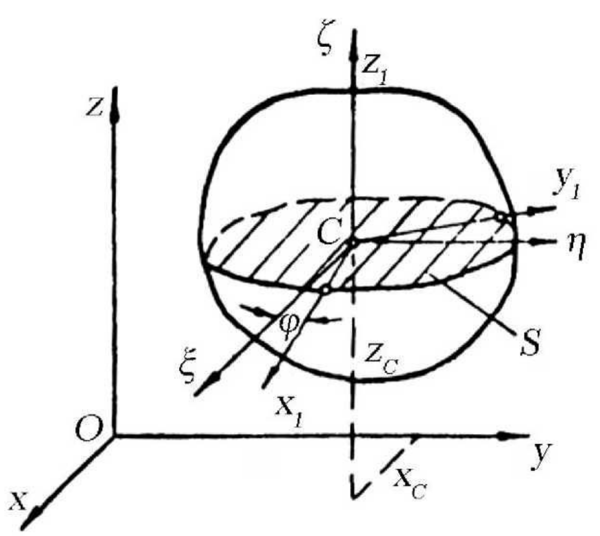


Рис. 3.8. К вопросу о плоскопараллельном движении тела

Выведем дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела. Два уравнения получаются непосредственно на основании теоремы о движении центра масс:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= X^e, \\ M\ddot{y}_C &= Y^e, \end{aligned} \tag{3.106}$$

где M – масса тела;

X^e, Y^e – проекции главного вектора внешних сил, приложенных к телу.

Для получения третьего дифференциального уравнения применим принцип Д'Аламбера. Мысленно остановим тело и приложим ко всем его точкам силы инерции. В качестве уравнения динамического равновесия возьмем уравнение моментов относительно центральной оси $C\zeta$, перпендикулярной плоскости движения. Это уравнение имеет вид

$$M_{\zeta}^{e}+M_{\zeta}^{ин}=0,$$

где M_{ζ}^{e} – главный момент внешних сил относительно оси $C\zeta$;

$M_{\zeta}^{ин}$ – главный момент сил инерции относительно той же оси.

Ранее было найдено, что

$$M_{\zeta}^{ин}=-J_{\zeta}\varepsilon,$$

где ε – угловое ускорение тела.

Подставляя значение главного момента сил инерции в уравнение динамического равновесия, получаем

$$J_{\zeta}\varepsilon=M_{\zeta}^{e}. \tag{3.107}$$

Три уравнения (3.106) и (3.107) образуют систему дифференциальных уравнений, описывающих плоскопараллельное движение твердого тела. Кинематические уравнения плоскопараллельного движения тела могут быть получены двукратным интегрированием этих уравнений.

3.13. ТЕОРИЯ УДАРА

3.13.1. Явление удара

Ударом называется такое взаимодействие материальных тел, в результате которого скорости их точек изменяются на значительную величину в течение весьма малого промежутка времени. Обычная длительность процесса удара (время удара) составляет лишь несколько тысячных или даже миллионных долей секунды. Значительное изменение скоростей точек соударяющихся тел за такой малый промежуток времени достигается за счет того, что силы взаимодействия этих тел при ударе (так называемые ударные или мгновенные силы) достигают очень большой величины. Ударные силы обычно во много раз превосходят вес соударяющихся тел. Это свойство удара используют в технике для совершения таких действий, которые трудно выполнить при статическом приложении нагрузки. Примеры полезного использования удара: ковка, забивка свай и гвоздей, штамповка, обрубка, дробление и т. п.

В ряде случаев удар оказывается явлением вредным, и тогда приходится принимать специальные меры для его предотвращения. Так, например, удары зубьев ведомого и ведущего колеса весьма вредно отражаются на качестве работы и долговечности зубчатой передачи; толчки, вызванные неровностями дороги, очень вредны для автомобиля и его пассажиров и т. п. В первом случае возможность ударов устраняют тщательным конструированием и изготовлением зубчатых колес. Во втором – смягчают удары при помощи пневматических шин и рессор.

В процессе удара кинетическая энергия относительного движения соударяющихся тел в основном расходуется на деформирование последних. Часть кинетической энергии превращается в другие формы энергии: в тепловую и химическую энергию, энергию звуковых и электромагнитных колебаний и т. д.

3.13.2. Действие удара на материальную точку

Действие ударной силы $\vec{F}$ на материальную точку выражается импульсом данной силы за время удара τ. Этот импульс называется ударным импульсом и определяется по формуле

$$\vec{S} = \int_0^{\tau} \vec{F} dt .$$

Ударный импульс $\vec{S}$ имеет конечную величину. Импульсы за время удара всех других (не ударных) сил, действующих на ту же материальную точку, пренебрежимо малы по сравнению с ударным импульсом и поэтому в теории удара не рассматриваются.

Количество движения материальной точки, воспринявшей ударный импульс $\vec{S}$, за время удара изменится согласно уравнению

$$m\vec{U} - m\vec{V} = \vec{S}, \qquad (3.108)$$

где m – масса данной материальной точки;

$\vec{V}$ – скорость точки в момент начала удара;

$\vec{U}$ – скорость точки в момент окончания удара.

Векторному уравнению (3.108) соответствуют три скалярных

$$\begin{aligned} mU_x - mV_x &= S_x; \\ mU_y - mV_y &= S_y; \\ mU_z - mV_z &= S_z. \end{aligned} \qquad (3.109)$$

Скорость материальной точки за время удара изменяется с $\vec{v}$ на $\vec{u}$, но остается величиной конечной. Поэтому координаты и радиус-вектор этой точки за время удара успевают измениться весьма мало. Можно считать, что координаты x, y, z и радиус-вектор $\vec{r}$ точки за время удара не изменятся.

Момент количества движения точки относительно некоторого центра O за время удара изменится с величины

$$\vec{L}_0' = \vec{M}_0(m\vec{V}) = \vec{r} \times m\vec{V}$$

до величины

$$\vec{L}_0'' = \vec{M}_0(m\vec{U}) = \vec{r} \times m\vec{U}.$$

Изменение момента количества движения за время удара

$$\vec{L}_0'' - \vec{L}_0' = \vec{r} \times (m\vec{U} - m\vec{V}).$$

Учитывая формулу (3.108), заключаем, что

$$\vec{L}_0'' - \vec{L}_0' = \vec{r} \times \vec{S} = \vec{M}_0(\vec{S}). \qquad (3.110)$$

Таким образом, изменение момента количества движения точки относительно некоторого центра за время удара равно моменту ударного импульса относительно того же центра.

Векторному уравнению (3.110) соответствуют три скалярных:

$$\begin{aligned} L_x'' - L_x' &= M_x(\vec{S}); \\ L_y'' - L_y' &= M_y(\vec{S}); \\ L_z'' - L_z' &= M_z(\vec{S}). \end{aligned} \qquad (3.111)$$

Если на точку при ударе действует не одна ударная сила, а несколько, то в полученных формулах, под $\vec{F}$, следует понимать равнодействующую всех этих сил.

Отметим, что изменение скорости материальной точки в результате удара вызывает соответствующее изменение ее кинетической энергии.

3.13.3. Удар материальной точки о неподвижную гладкую поверхность

Будем считать, что материальная точка (например, небольшой шар) массы m в некоторый момент времени, ударяется о неподвижную гладкую поверхность (рис. 3.9). *Нормаль* $\vec{n}$ к поверхности в точке соприкосновения при ударе называется *линией удара*.

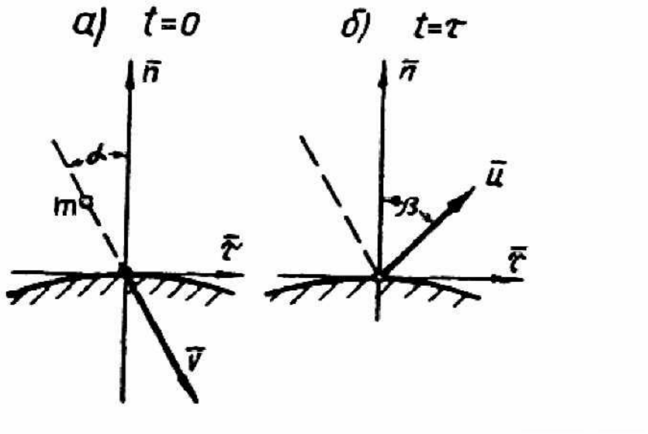


Рис. 3.9. К понятию удара материальной точки

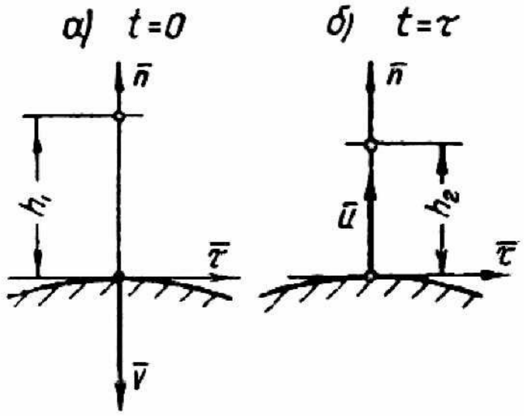


Рис. 3.10. К понятию прямого удара

Угол между вектором скорости точки в момент начала удара $\vec{v}$ *и линией* удара называется углом падения (угол α на рис. 3.9).

Угол между вектором скорости точки в момент окончания удара $\vec{u}$ *и линией удара называется углом отражения* (угол β на рис. 3.10). При $\alpha = 0$ *удар* называется *прямым*. В случае прямого удара угол отражения β тоже равен нулю.

При $\alpha \neq 0$ *удар* называется *косым*. В случае косого удара $\beta \neq 0$.

Рассмотрим прямой удар (рис. 3.10). Опыты показывают, что скорость после прямого удара меньше скорости до удара.

Отношение $k = \dfrac{U}{V}$ называется коэффициентом восстановления скорости при ударе (или просто коэффициентом восстановления). Для реальных тел $0 < k < 1$.

Коэффициент восстановления определяется экспериментальным путем.

Примерные значения коэффициента восстановления: для стали – 0,55; для дерева – 0,5; для стекла – 0,93.

Предельный случай, когда $k = 1$, называется *вполне упругим ударом*. Второй предельный случай, когда $k = 0$, называется *неупругим ударом*. При обычных значениях $0 < k < 1$ удар называется *не вполне упругим*.

Не вполне упругий удар имеет две фазы. Первая фаза продолжается от момента соприкосновения тел до момента их максимального деформирования. Длительность первой фазы удара будем означать τ_1. Вторая фаза продолжается от момента максимального деформирования до момента разъединения соударяющихся тел. Длительность второй фазы удара будем обозначать τ_2. Следовательно:

$$\tau_1 + \tau_2 = \tau.$$

При прямом ударе материальной точки о неподвижную поверхность на точку действует ударная реакция поверхности $\vec{N}$, направленная по нормали к последней.

Найдем изменение количества движения точки за первую фазу удара. В конце этой фазы скорость точки обращается в нуль. Поэтому, считая направление скорости $\vec{v}$ отрицательным, будем иметь:

$$0-(-mV)=S_1=\int_0^{\tau_1} Ndt. \tag{3.112}$$

Изменение количества движения точки за вторую фазу удара

$$mU-0=S_2=\int_{\tau_1}^{\tau_2} Ndt. \tag{3.113}$$

Суммируя изменения количества движения, получаем

$$m(V+U)=S=\int_0^{\tau} Ndt \quad ,$$

где $S = S_1 + S_2$ – суммарный ударный импульс за обе фазы удара.

Учитывая, что $U=kV$, придем к выражению

$$S=(1+k)\ mV=\int_0^{\tau} Ndt.$$

По известному свойству определенного интеграла

$$\int_0^{\tau} Ndt = N_{cp}\tau,$$

где N_{cp} – среднее значение ударной реакции.

Тогда

$$N_{cp}=\frac{(1+k)mV}{\tau}.$$

Разделим выражение (3.113) на (3.112), получим

$$\frac{mU}{mV}=\frac{S_2}{S_1},$$

откуда отношение величин ударных импульсов равно

$$\frac{S_2}{S_1}=k. \tag{4.114}$$

3.13.4. Действие удара на механическую систему

Механическую систему можно подвергнуть действию внешних ударных сил. При этом возникнут ударные реакции связей, наложенных на систему, и скорости отдельных точек системы изменятся на конечную величину в течение весьма малого промежутка времени. Изменение количества движения системы за время удара будет равно геометрической сумме внешних импульсов. За время удара конечной величины достигают лишь ударные импульсы.

Поэтому

$$\vec{K}'' - \vec{K}' = \sum_{k=1}^{n} \vec{S}_k^e , \tag{3.115}$$

где $\vec{K}' = M\vec{V}_c$ – вектор количества движения системы в момент начала удара; $\vec{K}'' = M\vec{U}_c$ – вектор количества движения системы в момент окончания удара; M – масса системы; $\vec{V}_c$ и $\vec{U}_c$ – векторы скорости центра масс до и после удара соответственно; $\vec{S}_k^e$ – внешний ударный импульс, приложенный к k-той точке

Векторному уравнению (3.115) можно придать следующий вид

$$M(\vec{U}_c - \vec{V}_c) = \sum_{k=1}^{n} \vec{S}_k^e ,$$

или в проекциях:

$$M(U_{cx} - V_{cx}) = \sum_{k=1}^{n} S_{kx}^e ;$$

$$M(U_{cy} - V_{cy}) = \sum_{k=1}^{n} S_{ky}^e ; \tag{3.116}$$

$$M(U_{cz} - V_{cz}) = \sum_{k=1}^{n} S_{kz}^e ;$$

Поскольку за время удара координаты отдельных точек системы не успевают измениться заметным образом, координаты и радиус-вектор центра масс также не изменяются за время удара.

Найдем изменение кинетического момента системы за время удара, суммируя изменения векторов моментов количеств движения всех точек. Для k-той точки, на основании уравнения (3.110),

$$\vec{M}_0(m_k\vec{U}_k) - \vec{M}_0(m_k\vec{V}_k) = \vec{M}_0(\vec{S}_k) .$$

Результирующий ударный импульс $\vec{S}_k$, действующий на k-тую точку системы, слагается из внешнего и внутреннего ударных импульсов

$$\vec{S}_k = \vec{S}_k^e + \vec{S}_k^i.$$

Согласно теореме Вариньона

$$\vec{M}_0(\vec{S}_k) = \vec{M}_0(\vec{S}_k^e) + \vec{M}_0(\vec{S}_k^i).$$

Поэтому изменение момента количества движения k-той точки за время удара равно

$$\vec{M}_0(m_k\vec{U}_k) - \vec{M}_0(m_k\vec{V}_k) = \vec{M}_0(\vec{S}_k^e) + \vec{M}_0(\vec{S}_k^i). \qquad (3.117)$$

Составляя уравнения (3.117) для всех точек системы и суммируя их почленно, будем иметь

$$\vec{L}_o'' - \vec{L}_o' = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_o(\vec{S}_k^e), \qquad (3.118)$$

где $\vec{L}_o'$ и $\vec{L}_o''$ – кинетический момент системы до и после удара соответственно; $\sum\limits_{k=1}^{n} \vec{M}_o(\vec{S}_k^i) = 0$ – по известному свойству внутренних сил.

Векторному уравнению (3.118) соответствуют три скалярных:

$$\vec{L}_x'' - \vec{L}_x' = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_x(\vec{S}_k^e);$$

$$L_y'' - L_y' = \sum_{k=1}^{n} M_y(\vec{S}_k^e); \qquad (3.119)$$

$$L_z'' - L_z' = \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{S}_k^e);$$

Из рассмотрения полученных результатов, следует, что внутренние ударные импульсы не могут изменить за время удара не только количество движения системы, но и ее кинетический момент.

3.13.5. Прямой центральный удар двух тел

Удар двух тел называется центральным, если линия удара проходит через центры тяжести этих тел.

Определим изменение скоростей двух тел при прямом центральном ударе (рис. 3.11). Скорость первого тела будем обозначать индексом 1, а скорость второго – индексом 2. Допустим, что до удара скорости ($\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$) направлены в одну сторону. В ту же сторону направим линию удара.

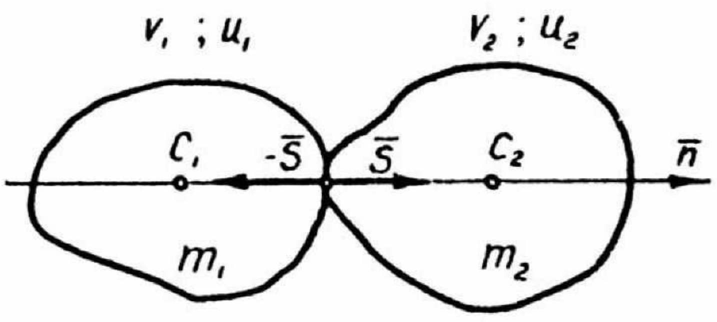


Рис. 3.11. К понятию центрального удара двух тел

При ударе первое из соударяющихся тел воспримет ударный импульс $-\vec{S}$, а второе – ударный импульс $\vec{S}$. Количество движения тел за все время удара изменятся следующим образом

$$\begin{aligned} m_1(U_1 - V_1) &= -S; \\ m_2(U_2 - V_2) &= S \end{aligned}; \tag{3.120}$$

Почленно складывая эти уравнения, получаем

$$m_1V_1 + m_2V_2 = m_1U_1 + m_2U_2 . \tag{3.121}$$

Скорости после удара найдем для двух случаев.

Неупругий удар

В этом случае оба тела после удара должны иметь одинаковую скорость, так как при неупругой деформации соприкосновение тел после удара не прекратится

$$U_1 = U_2 = U .$$

Подставляя это значение в выражение (3.121), получаем

$$U = U_1 = U_2 = \frac{m_1V_1 + m_2V_2}{m_1 + m_2} . \tag{3.122}$$

Ударный импульс найдем из второго уравнения (3.120)

$$S = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2) . \tag{3.123}$$

Не вполне упругий удар

В этом случае будут две фазы удара. В конце первой фазы, в момент максимального деформирования соударяющихся тел, скорости последних будут одинаковы. Поэтому для первой фазы не вполне упругого удара используется формула (3.122), выведенная для неупругого удара.

Количества движения тел за первую фазу удара изменятся следующим образом

$$\left.\begin{aligned} m_1(U - V_1) = -S_1 \\ m_2(U - V_2) = S_1 \end{aligned}\right\}, \tag{3.124}$$

где S_1 можно найти по формуле (3.123).

Изменение количества движения тел за вторую фазу удара

$$\left.\begin{aligned} m_1(U_1 - U) = -S_2 \\ m_2(U_2 - U) = S_2 \end{aligned}\right\} \tag{3.125}$$

Так как

$$\frac{S_2}{S_1} = k\,,$$

то уравнение (3.125) можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} m_1(U_1 - U) = -kS_1 \\ m_2(U_2 - U) = kS_1 \end{aligned}\right\} \tag{3.126}$$

Разделив первое (второе) уравнение (3.126) на первое (второе) уравнение (3.124), получаем соответственно

$$\frac{U_1 - U}{U - V_1} = k\,;\ \ \frac{U_2 - U}{U - V_2} = k\,. \tag{3.127}$$

Тогда $U_1 = (1+k)U - kV_1$; $U_2 = (1+k)U - kV_2$.

Далее, подставляя значение u, выраженное формулой (3.122) находим скорости после удара:

$$U_1 = (1+k)\frac{m_1V_1 + m_2V_2}{m_1 + m_2} - kV_1\,;\ \ U_2 = (1+k)\frac{m_1V_1 + m_2V_2}{m_1 + m_2} - kV_2\,. \tag{3.128}$$

Если в формуле (3.128) положить $k = 0$, придем к ранее полученной формуле (3.122).

Модуль ударного импульса за обе фазы

$$S = S_1 + S_2 = (1+k)S_1 = (1+k)\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2)\,. \tag{3.129}$$

Разность скоростей тел после удара, согласно уравнению (3.128) равна

$$U_1 - U_2 = -k(V_1 - V_2)\,. \tag{3.130}$$

3.13.6. Потеря кинетической энергии при неупругом прямом центральном ударе (теорема Карно)

Сумма кинетических энергий соударяющихся тел до удара

$$T' = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2}.$$

Сумма кинетических энергий тех же тел после неупругого удара

$$T'' = \frac{(m_1 + m_2)U^2}{2},$$

где u – определяется по формуле (3.122).

Потеря кинетической энергии при ударе

$$T - T = \frac{1}{2}[m_1(V_1^2 - U^2) + m_2(V_2^2 - U^2)]. \qquad (3.131)$$

Сумму, стоящую в квадратных скобках, преобразуем следующим образом

$$m_1(V_1^2 - U^2) + m_2(V_2^2 - U^2) =$$

$$= m_1(V_1^2 + U^2) + m_2(V_2^2 + U^2) - 2m_1V_1U - 2m_2V_2U =$$

$$= m_1(V_1 - U)^2 + m_2(V_2 - U)^2.$$

Тогда получаем

$$T' - T'' = \frac{m_1(V_1 - U)^2}{2} + \frac{m_2(V_2 - U)^2}{2}. \qquad (3.132)$$

Формула (3.132) выражает теорему Карно:

Потеря кинетической энергии при неупругом ударе равна кинетической энергии, соответствующей потерянным скоростям.

Потерянными скоростями называются разности скоростей $(v_1 - u)$ и $(v_2 - u)$.

Можно также получить выражение (3.132), не содержащее u:

$$T' - T'' = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{(V_1 - V_2)^2}{2}. \qquad (3.133)$$

3.13.7. Потеря кинетической энергии при не вполне упругом прямом центральном ударе

Сумма кинетических энергии соударяющихся тел до удара

$$T' = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2}$$

Сумма кинетических энергий тех же тел после не вполне упругого удара

$$T'' = \frac{m_1 U_1^2}{2} + \frac{m_2 U_2^2}{2}$$

Потеря кинетической энергии за время удара

$$T' - T'' = \frac{1}{2}\left[m_1 (V_1^2 - U_1^2) + m_2 (V_2^2 - U_2^2) \right]. \qquad (3.134)$$

Подставляя значения u_1 и u_2, выраженные формулами (3.128), получаем

$$T' - T'' = (1 - k^2) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{(V_1 - V_2)^2}{2}. \qquad (3.135)$$

При неупругом ударе, когда $k = 0$, формула (3.135) переходит в формулу (3.133).

3.14. Вопросы для самоконтроля

1. Что является предметом динамики?
2. В чем заключаются пространственно-временные представления И. Ньютона, положенные им в основу классической механики?
3. Что называется массой точки? Какие свойства тела выражает понятие массы?
4. Сформулируйте аксиомы или основные законы классической механики.
5. Какая система отсчета называется инерциальной?
6. Выведите дифференциальное уравнение движения свободной материальной точки при трех способах задания движения материальной точки.
7. Сформулируйте две основные задачи динамики свободной материальной точки. Посредством каких математических операций они решаются и как именно?
8. Сколько постоянных интегрирования войдет в общее решение дифференциальных уравнений движения материальной точки, если она движется в пространстве, на плоскости, вдоль прямой, соответственно.

9. Что такое начальные условия движения материальной точки и как они записываются при трех способах задания движения?

10. Под действием какой силы совершаются свободные колебания материальной точки?

11. Напишите дифференциальное уравнение свободных колебаний материальной точки.

12. Напишите формулы, выражающие частоту, период, амплитуду и начальную фазу свободных колебаний материальной точки.

13. Под действием каких сил совершаются затухающие колебания материальной точки?

14. Напишите дифференциальное уравнение затухающих колебаний.

15. Напишите решение дифференциального уравнения затухающих колебаний. От чего зависит вид решения?

16. Что называется декрементом колебаний? Логарифмическим декрементом?

17. В каких случаях движение материальной точки будет апериодическим?

18. Под действием каких сил совершаются вынужденные колебания материальной точки?

19. Напишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний.

20. Напишите общее решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний.

21. Каковы частота и период вынужденных колебаний материальной точки?

22. От каких факторов зависит амплитуда вынужденных колебаний материальной точки?

23. При каких условиях возникает явление резонанса и каковы уравнение и график вынужденных колебаний материальной точки при резонансе?

24. Как влияет сопротивление, пропорциональное скорости, на амплитуду, фазу, частоту и период вынужденных колебаний?

25. Как используется в технике явление резонанса? Всегда ли является резонанс полезным эффектом?

26. В каких случаях материальную точку называют несвободной?

27. Дайте определение стационарных и нестационарных, удерживающих и неудерживающих, голономных и неголономных связей.

28. Как записываются уравнения связей для различных видов связей?

29. Сформулируйте и разъясните принцип освобождаемости от связей.

30. Сделайте вывод основного уравнения динамики относительного движения материальной точки.

31. Какой модуль и какое направление имеют переносная и кориолисова силы инерции?

32. В чем заключается различие между дифференциальными уравнениями относительного и абсолютного движений материальной точки?

33. Как вычисляются переносная и кориолисова силы инерции в различных случаях переносного движения?

34. Какие системы отсчета называются инерциальными? Неинерциальными?

35. Напишите условия относительного покоя материальной точки.

36. Почему падающие тела отклоняются к востоку?

37. Почему сила тяжести на полюсах земли имеет наибольшее значение, а на экваторе – наименьшее?

38. Какие явления на земле объясняются действием кориолисовой силы инерции?

39. Что называется системой материальных точек или механической системой?

40. Что такое масса системы?

41. Что называют центром масс системы? Напишите формулы для определения координат центра масс системы.

42. Дайте определение внешним и внутренним силам, действующим на систему.

43. Какими свойствами обладают внутренние силы?

44. Что называют моментом инерции тела относительно плоскости, оси и полюса? Напишите их выражения.

45. Что называют центробежным моментом инерции тела? Напишите их выражения.

46. Что такое радиус инерции?

47. Сформулируйте теорему о моментах инерции тела относительно параллельных осей.

48. Моменты инерции каких тел вы знаете? Напишите формулы для их вычисления.

49. Что называют количеством движения материальной точки?

50. Сформулируйте теорему об изменении количества движения точки в дифференцильной и конечной формах.

51. Что такое элементарный импульс и импульс силы за конечный промежуток времени?

52. Сформулируйте закон сохранения количества движения точки.

53. Что такое главный вектор количеств движения системы или количество движения механической системы?

54. Напишите дифференциальное уравнение движения механической системы.

55. Сформулируйте теорему об изменении количества движения системы в дифференцильной форме.

56. В каком случае сохраняется количество движения системы?

57. Как выражаются количество движения системы через массу системы и скорость центра масс?

58. Сформулируйте теорему о движении центра масс механической системы.

59. Сформулируйте закон сохранения центра масс механической системы.

60. Что называют моментом количества движения точки относительно центра и оси?

61. Сформулируйте теорему об изменении момента количества движения точки.

62. Что называют центральной силой?

63. В каком случае сохраняется момент количества движения точки относительно центра?

64. Что называют главным моментом количеств движения или кинетическим моментом механической системы относительно центра и оси?

65. Сформулируйте теорему об изменении кинетического момента системы.

66. Сформулируйте закон сохранения кинетического момента системы.

67. Как вычисляется кинетический момент тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?

68. Напишите дифференциальное уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси.

69. Что называют кинетической энергией материальной точки?

70. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной и конечной формах.

71. Что называют элементарной работой силы и как она вычисляется?

72. Как вычисляется работа силы на конечном пути?

73. Как вычисляется работа силы тяжести, силы упругости? Напишите соответствующие формулы.

74. Что называют кинетической энергией механической системы?

75. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии системы.

76. Прочитайте теорему Кенига о кинетической энергии системы в общем случае ее движения.

77. Как вычисляют кинетическую энергию тела при поступательном движении? При вращении вокруг неподвижной оси?

78. Как вычисляют кинетическую энергию тела при плоскопараллельном движении?

79. Каким образом можно ввести понятие о силе инерции? Напишите формулу, выражающую силу инерции материальной точки.

80. Сформулируйте принцип Д'Аламбера для материальной точки.

81. Как выражается сила инерции точки при различных способах ее движения?

82. Как направлена сила инерции?

83. Сформулируйте принцип Д'Аламбера для несвободной механической системы.

84. Как вычисляется главный вектор и главный момент сил инерции тела при различных случаях его движения?

85. Как определяются динамические реакции опор на ось быстро вращающегося тела?

86. При соблюдении каких условий динамические реакции опор на ось быстро вращающегося тела не отличаются от статических реакций?

87. Какие связи называются стационарными и нестационарными? Напишите уравнения этих связей.

88. Какие связи называются удерживающими и неудерживающими? Напишите уравнения этих связей.

89. Какие связи называются голономными и неголономными? Напишите уравнения этих связей.

90. Что называют возможным перемещением несвободной материальной точки и механической системы?

91. Какие связи называются идеальными? Приведите примеры идеальных связей.

92. Сформулируйте принцип возможных перемещений.

93. Приведите примеры применения принципа возможных перемещений к определению связей и к простейшим машинам (рычаг, наклонная плоскость и т.д.).

94. Сформулируйте общее уравнение динамики.

95. Соединением каких принципов является общее уравнение динамики.

96. Какие координаты называются обобщенными? Приведите пример.

97. Какая связь между числом степеней свободы механической системы и числом ее обобщенных координат?

98. Что называют обобщенной силой?

99. Какие способы вычисления обобщенных сил вы знаете?

100. Как вычисляются обобщенные силы в случае сил, имеющих потенциал?

101. На основании какого уравнения выводятся уравнения Лагранжа 2-го рода?

102. Какой вид имеет уравнение Лагранжа 2-го рода? Чему равно число этих уравнений для каждой механической системы?

103. Какое явление называется ударом?

104. Чем характеризуется ударная сила?

105. Охарактеризуйте действие ударной силы на материальную точку.

106. Сформулируйте теорему об изменении количества движения при ударе в векторной форме и в проекциях на оси координат.

107. Что называют коэффициентом восстановления при ударе и как он определяется опытным путем?

108. Чем характеризуются первая и вторая фазы упругого удара? В чем состоит особенность абсолютно упругого удара?

109. Как определяются скорости двух шаров в конце каждой фазы прямого центрального удара (неупругого, упругого, абсолютно упругого)?

110. Какова зависимость между ударными импульсами второй и первой фаз при абсолютно упругом ударе?

111. Какова потеря кинетической энергии двух соударяющихся тел при неупругом, упругом и абсолютно упругом ударах?

112. Как формулируется теорема Карно?

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ, РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Качество и глубина усвоения студентами курса теоретической механики в значительной степени зависит от их систематической работы по изучению теоретического материала и от полученных ими навыков в решении практических задач. Поэтому в самостоятельную работу студентов должны входить изучение теоретического материала курса по рекомендуемым учебникам, ознакомление с методиками и особенностями решения примеров и задач, приведенных в учебниках и учебных пособиях, а также выполнение индивидуальных заданий (курсовой и расчетно-графических работ). Контрольные работы проводятся по наиболее важным разделам теоретического курса и их содержание определяется кафедрой.

Правильная организация самостоятельной работы компенсирует дефицит времени аудиторных занятий, прививает вкус к решению творческих технических задач, закладывает основы современных инженерных знаний.

1. ЗАДАНИЯ, МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Тема курсовой работы: Определение кинематических и динамических характеристик механической системы.

Структура и содержание расчетно-пояснительной записки:

- задание на курсовую работу;
- введение;
- построение положения исследуемого механизма;
- определение линейных скоростей всех точек механизма и угловых скоростей звеньев:
  - а) при помощи МЦС,
  - б) методом планов скоростей;
- определение линейных ускорений точек и угловых ускорений звеньев механизма:
  - а) графоаналитическим способом,
  - б) методом построения плана ускорений;
- вычисление кинетической энергии механизма;

- вычисление линейных (угловых) скоростей и ускорений, используя теорему об изменении кинетической энергии, общее уравнение динамики и уравнения Лагранжа 2-го рода.

Методические указания
по оформлению расчетно-пояснительной записки

Расчетно-пояснительная записка должна быть краткой и не превышать 20 страниц. Пояснительная записка начинается титульным листом, который является первым листом текстового документа. На следующем листе помещают задание на курсовое проектирование, подписанное студентом и руководителем проектирования и утвержденное заведующим кафедрой.

Расчетно-пояснительная записка (в соответствие с ГОСТ 2.105-96 ЕСКД. Общие требования к текстовым документам.) должна состоять из следующих разделов:

- введение,
- расчеты,
- заключение,
- список использованных источников.

Введение должно содержать основные и исходные данные для выполнения курсовой работы и показать связь с другими общетехническими и специальными дисциплинами.

Порядок изложения расчетов определяется характером рассчитываемых величин. *Расчет* должен содержать:

- наименование расчета,
- цель расчета,
- расчетную схему,
- исходные данные для расчета,
- расчеты,
- вывод по результатам расчета.

Заключение должно содержать краткие выводы по результатам выполненной работы и оценку полноты решений поставленных задач.

Список использованных источников должен содержать сведения о литературных источниках (учебниках, учебных пособиях, справочниках, методических разработках и рекомендациях, материалах научных статей и др.), использованных при выполнении курсовой работы в соответствии с требованиями ГОСТ 7.1-84 ССИБИД. Библиографическое описание документа. Общие требования и правила составления.

Текст расчетно-пояснительной записки записывают **черной** пастой (тушью, чернилами) на листах белой бумаги формата А4 **чертежным шрифтом** с высотой букв и цифр не менее 2,5 мм. Возможно выполнение расчетно-пояснительной записки машинописным способом или на персональном компьютере (размер шрифта рекомендуется 14 пт, но не менее 12 пт). Все уравнения и формулы, используемые при расчетах, записываются в буквенных выражениях, а затем в них подставляются числовые значения.

Плакат (плакаты) является частью иллюстративного материала, который служит для пояснения содержания работы при ее *защите. Плакат сопровождается заголовком*. Если на плакате помещены два и более материала, кроме общего заголовка, каждый их них должен иметь собственный подзаголовок. В правом нижнем углу плаката помещается основная надпись (форма 1 ГОСТ 2.104-68 ЕСКД. Основные надписи.).

Выполненная курсовая работа *защищается перед специальной комиссии*, созданной распоряжением заведующего кафедрой.

Пример выполнения курсовой работы

Определить кинематические и динамические характеристики механической системы (рис. 1).

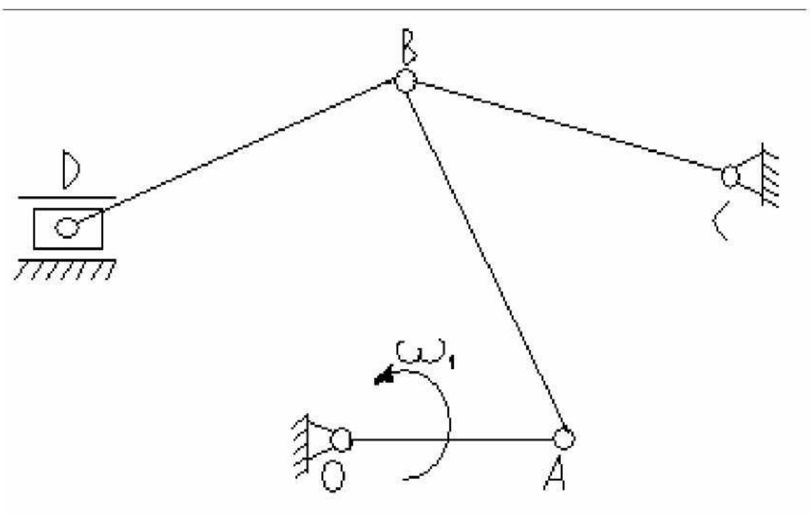


Рис. 1. Исходное положение механизма

Исходные данные:

$\varphi = 90^0$, $n_1 = 140$ мин$^{-1}$,

$l_{OA} = 0{,}08$ м, $l_{AB} = 0{,}17$ м, $l_{BC} = l_{BD} = 0{,}22$ м,

$m_1 = 65$ кг, $m_2 = 75$ кг, $m_3 = m_4 = 80$ кг, $m_5 = 340$ кг.

Центры масс звеньев 2, 4 лежат посередине звена. Центры масс звеньев 1, 3 – в точках O, C.

Построение положения механизма

Строим план положения механизма.

Задаемся длинной отрезка OA = 80 мм, вычисляем масштаб схемы механизма

$$\mu_l = l_{OA} / OA = 0{,}08 / 80 = 0{,}001 \text{ м/мм}.$$

Остальные размеры на чертеже будут:

$$AB = l_{AB} / \mu_l = 0{,}17 / 0{,}001 = 170 \text{ мм};$$

$$BC = l_{BC} / \mu_l = 0{,}22 / 0{,}001 = 220 \text{ мм};$$

$$BD = l_{BD} / \mu_l = 0{,}22 / 0{,}001 = 220 \text{ мм}.$$

Вычертив элементы неподвижного звена-стойки методом засечек, строим заданное положение механизма.

Определение линейных скоростей всех точек механизма и угловых скоростей звеньев

Линейные скорости точек и угловые скорости звеньев необходимы для вычисления кинетической энергии механизма, определения его инертных свойств.

- *При помощи МЦС*

Определяем угловую скорость вращения кривошипа

$$\omega_{OA} = \omega_1 = \pi n_1 / 30 = 3{,}14 \cdot 140 / 30 = 14{,}65 \text{ рад/с}.$$

Определяем линейную скорость точки А

$$V_A = \omega_1 \cdot l_{OA} = 14{,}65 \cdot 0{,}08 = 1{,}172 \text{ м/с}.$$

Вектор $\overline{V}_A$ направлен перпендикулярно звену OA по направлению ω_1.

Звено BC совершает вращательное движение, значит скорость точки B направлена перпендикулярно звену BC. Для звена AB, совершающего плоскопараллельное движение, находим МЦС. Для этого восстанавливаем перпендикуляры к направлениям скоростей $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$. Их пересечение является МЦС звена BA (P_2). На звене отмечаем середину – точку S_2 – и соединяем с полюсом P_2. Угловая скорость звена 2 будет описываться соотношением

$$\omega_2 = V_A / AP_2 = V_{S2} / P_2S_2 = V_B / BP_2,$$

где $AP_2 = 436$ мм (замеряем на чертеже); $BP_2 = 530$ мм, $P_2S_2 = 477$ мм.

Учитывая масштаб построения, имеем

$$\omega_2 = V_A / AP_2 = 1{,}172 / 436 \cdot 0{,}001 = 2{,}69 \text{ рад/с}.$$

Определяем скорости:

$$V_B = \omega_2 \cdot BP_2 = 2{,}69 \cdot 0{,}53 = 1{,}43 \text{ м/с}.$$

$$V_{S2} = \omega_2 \cdot P_2S_2 = 2{,}69 \cdot 0{,}477 = 1{,}28 \text{ м/с}.$$

Угловая скорость звена BC

$$\omega_3 = \omega_{BC} = V_B / l_{BC} = 1{,}43 / 0{,}22 = 6{,}5 \text{ рад/с}.$$

Далее определяем МЦС для звена 4. Учитывая, что ползун 5 движется только горизонтально, восстанавливаем перпендикуляры к направлениям скоростей $\overline{V}_D$ и $\overline{V}_B$, и получаем точку P_4. Из чертежа имеем:

$$BP_4 = 220 \text{ мм}, \quad DP_4 = 128 \text{ мм}, \quad S_4P_4 = 143 \text{ мм}.$$

Учитывая масштаб построения, получаем:

– угловая скорость

$$\omega_4 = V_B / BP_4 = 1{,}43 / 0{,}22 = 6{,}5 \text{ рад/с};$$

– линейные скорости:

$$V_D = \omega_4 \cdot DP_4 = 6{,}5 \cdot 0{,}128 = 0{,}83 \text{ м/с};$$

$$V_{S4} = \omega_4 \cdot S_4P_4 = 6{,}5 \cdot 0{,}143 = 0{,}93 \text{ м/с}.$$

Для определения направления скоростей $\overline{V}_{S2}$ и $\overline{V}_{S4}$ соединяем точки S_2 и S_4 с МЦС P_2 и P_4 прямыми.

Восстанавливаем перпендикуляры в точках S_2 и S_4 к прямым.

- *Метод планов скоростей*

Определяем скорость точки A

$$V_A = \omega_1 \cdot l_{OA} = 14{,}65 \cdot 0{,}08 = 1{,}172 \text{ м/с}.$$

Вычисляем масштаб плана скоростей

$$\mu_V = V_A / pa = 1{,}172 / 117{,}2 = 0{,}01 \ ^{\text{м/с}}/\text{мм}.$$

Выбираем на чертеже полюс p плана скоростей и изображаем скорость $\overline{V}_A$ отрезком $pa = 117{,}2$ мм. Скорость перпендикулярна звену OA и направлена по ω_1.

Точка B принадлежит одновременно звеньям AB и BC. Определение скорости точки B проводим по следующим векторным формулам:

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA} \text{ (перпендикулярна } BA\text{);}$$

$$V_B = \overline{V}_C + \overline{V}_{BC} \text{ (перпендикулярна } BC\text{).}$$

На плане скоростей через точку a проводим прямую, перпендикулярную звену AB, а из полюса p (так как точка C неподвижна) – прямую перпендикулярную BC. На пересечении этих прямых получаем точку *в*. На середине отрезка *ав* отмечаем точку S_2 и соединяем ее с полюсом p. Скорость точки D находим по векторному уравнению

$$\overline{V}_D - \overline{V}_B - \overline{V}_{BD} \text{ (перпендикулярна } BD\text{) и } V_D \text{ параллельна } X\text{-}X.$$

Решаем уравнение графически. Через точку *в* проводим прямую, перпендикулярную BD, а через полюс p – прямую, параллельную X-X. Точка пересечения этих прямых и будет d. На середине *вd* имеем точку S_4, соединив которую с полюсом p, получим план скоростей. Из плана скоростей имеем линейные скорости:

$$V_B = p\textit{в} \cdot \mu_V = 142 \cdot 0{,}01 = 1{,}42 \text{ м/с},$$

$$V_{S2} = ps_2 \cdot \mu_V = 128 \cdot 0{,}01 = 1{,}28 \text{ м/с},$$

$$V_D = pd \cdot \mu_V = 82 \cdot 0{,}01 = 0{,}82 \text{ м/с},$$

$$V_{S4} = ps_4 \cdot \mu_V = 92 \cdot 0{,}01 = 0{,}92 \text{ м/с},$$

$$V_{AB} = a\textit{в} \cdot \mu_V = 46 \cdot 0{,}01 = 0{,}46 \text{ м/с},$$

$$V_{BD} = \textit{в}d \cdot \mu_V = 142 \cdot 0{,}01 = 1{,}42 \text{ м/с}.$$

Угловые скорости звеньев:

$$\omega_2 = V_{AB} / l_{AB} = 0{,}46 / 0{,}17 = 2{,}7 \text{ рад/с},$$

$$\omega_4 = V_{BD} / l_{BD} = 1{,}42 / 0{,}22 = 6{,}5 \text{ рад/с},$$

$$\omega_3 = V_{BC} / l_{BC} = V_B / l_{BC} = 1{,}42 / 0{,}22 = 6{,}5 \text{ рад/с}.$$

Направление ω_2 можно определить переносом вектора $\overline{a\textit{в}}$ в точку B и рассмотреть вращение точки B относительно точки A. Аналогично можно определить направление угловых скоростей ω_3 и ω_4.

Итак, скорость V_D, определенная по методу МЦС, равна 0,83 м/с, а по планам скоростей – 0,82 м/с.

Расхождение результатов

$$\Delta = (0{,}83 - 0{,}82) \cdot 100\ \% / 0{,}82 = 1{,}22\ \%.$$

Определение линейных ускорений точек и угловых ускорений механизма

Ускорения точек и их звеньев определяют при вычислении сил инерции:

а) *графоаналитический способ:*

Ускорение точки A складывается из касательного и нормального ускорений:

$$\bar{a}_A = \bar{a}^n_A + \bar{a}^\tau_A$$

$$a^n_A = \omega^2{}_1 \cdot l_{OA} = 14{,}65^2 \cdot 0{,}08 = 17{,}17 \text{ м/с}^2$$

$$a^\tau_A = \varepsilon_1 \cdot l_{OA} = 0, \ (\varepsilon_1 = 0)$$

$$a_A = a^n_A = 17{,}17 \text{ м/с}^2.$$

Согласно теореме об ускорениях точек плоской фигуры:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^\tau_{BA}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{a}^n_{BC} + \bar{a}^\tau_{BC}$$

Ускорение точки $C = 0$. Приравниваем правые части равенств

$$\bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^\tau_{BA} = \bar{a}^n_{BC} + \bar{a}^\tau_{BC}. \qquad (*)$$

Определяем нормальные ускорения:

$$a^n_{BA} = \omega^2{}_2 \cdot l_{BA} = 2{,}69^2 \cdot 0{,}17 = 1{,}23 \text{ м/с}^2;$$

$$a^n_{BC} = \omega^2{}_3 \cdot l_{BC} = 6{,}5^2 \cdot 0{,}22 = 9{,}3 \text{ м/с}^2.$$

Для определения касательных ускорений спроектируем векторное равенство (*) на оси BX и BY, измерив соответствующие значения углов на чертеже. Обозначим $\angle OAB = \alpha = 66°$, $\angle ABC = \beta = 49°$.

$$BX: \quad a_A \cos 66° + a^n_{BA} = a^n_{BC} \cos 49° - a^\tau_{BC} \cos (90° - 49°),$$

$$BY: \quad a_A \sin 66° + a^\tau_{BA} = a^n_{BC} \sin 49° - a^\tau_{BC} \sin (90° - 49°),$$

$$-17{,}17 \cdot 0{,}406 + 1{,}23 = 9{,}3 \cdot 0{,}656 - a^\tau_{BC} \cdot 0{,}7547,$$

$$-17{,}17 \cdot 0{,}9135 + a^\tau_{BA} = 9{,}3 \cdot 0{,}754 - a^\tau_{BC} \cdot 0{,}656,$$

$$-6{,}97 + 1{,}23 = 6{,}1 - a^\tau_{BC} \cdot 0{,}7547,$$

$$-15{,}685 + a^\tau_{BA} = 7{,}01 + a^\tau_{BC} \cdot 0{,}656,$$

$$a^\tau_{BC} = 11{,}84 \ / \ 0{,}754 = 15{,}71 \text{ м/с}^2$$

$$a^\tau_{BA} = 7{,}01 + 15{,}71 \cdot 0{,}656 + 15{,}685 = 7{,}02 + 10{,}395 + 15{,}685 = 33{,}01 \text{ м/с}^2.$$

Определяем ускорение точки B:

$$a_B = \sqrt{\left(a^n_{BC}\right)^2 + \left(a^\tau_{BC}\right)^2}$$

$$a_B = \sqrt{9{,}3^2 + 15{,}71^2} = 18{,}26 \text{ м/с}^2.$$

Определение ускорения центра масс a_{S2}

$$\bar a_{S2} = \bar a_A + \bar a^n{}_{S2A} + \bar a^\tau{}_{S2A}.$$

Нормальное ускорение определится через угловую скорость звена 2

$$a^n{}_{S2A} = \omega^2{}_2 \cdot l_{S2A} = \omega^2{}_2 \cdot l_{AB} / 2 = 2{,}69^2 \cdot 0{,}17 / 2 = 0{,}62 \text{ м/с}^2.$$

Касательное ускорение определим

$$a^\tau{}_{S2A} = \varepsilon_2 \cdot l_{S2A},$$

где $\varepsilon_2 = a^\tau{}_{BA} / AB = 33{,}09 / 0{,}17 = 194{,}64 \text{ с}^{-2}$;

$$a^\tau{}_{S2A} = 194{,}64 \cdot 0{,}17 / 2 = 16{,}54 \text{ м/с}^2.$$

Проектируем векторное равенство на оси BX и BY.

BX: $a_{S2X} = -\,a_A \cos 66° + a^n{}_{S2A} = -17{,}17 \cdot 0{,}406 + 0{,}62 = -6{,}36 \text{ м/с}^2$,

BY: $a_{S2Y} = -\,a_A \sin 66° + a^\tau{}_{S2A} = -17{,}17 \cdot 0{,}9135 + 16{,}54 = 0{,}85 \text{ м/с}^2$.

Ускорение $\bar a_{S2}$ определится

$$a_{S2} = \sqrt{a^2_{S2X} + a^2_{S2Y}} = \sqrt{(-6{,}36)^2 + (0{,}85)^2} = 6{,}42 \text{ м/с}^2.$$

Угловое ускорение

$$\varepsilon_3 = a^\tau{}_{BC} / l_{BC} = 15{,}71 / 0{,}22 = 71{,}41 \text{ с}^{-2}.$$

б) *метод плана ускорений:*

Определяем полное ускорение a_A

$$\bar a_A = \bar a^n{}_A + \bar a^\tau{}_A$$

$$a^\tau{}_A = 0, \text{ так как } \omega_{OA} = \text{const},$$

$$a_A = a^n{}_A = \omega^2{}_1 \cdot l_{OA} = 14{,}65^2 \cdot 0{,}08 = 17{,}17 \text{ м/с}^2.$$

Вектор нормального ускорения $\bar a^n{}_A$ направлен к центру вращения, то есть от точки A к точке O.

Точка B принадлежит одновременно звеньям AB и BC. Рассматривая движение точки B по отношению к центрам A и C, запишем:

$$\bar a_B = \bar a_A + \bar a^n{}_{BA} + \bar a^\tau{}_{BA} \quad \text{(перпендикулярно } BA\text{)},$$

$$\bar a_B = \bar a_C + \bar a^n{}_{BC} + \bar a^\tau{}_{BC} \quad \text{(перпендикулярно } BC\text{)}.$$

Вычисляем нормальные составляющие:

$$a^n_{BA} = \omega^2_2 \cdot l_{BA} = 2{,}7^2 \cdot 0{,}17 = 1{,}239 \text{ м/с}^2,$$

$$a^n_{BC} = \omega^2_3 \cdot l_{BC} = 6{,}5^2 \cdot 0{,}22 = 9{,}3 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение $\overline{a}^n_A$ изобразим отрезком πn_1 = 171,7 мм. Тогда масштаб определится

$$\mu_a = a^n_A / \pi n_1 = 17{,}17 / 171{,}7 = 0{,}1 \text{ м/с}^2/_{\text{мм}}.$$

Вектор $\overline{a}^n_{BA}$ направлен параллельно AB от B к A. Вектор $\overline{a}^n_{BC}$ направлен параллельно BC от B к C. Направления тангенциальных ускорений указаны в скобках.

Теперь векторное уравнение можно решить графически. В соответствии с первым уравнением из n_1 в направлении от B к A откладываем отрезок

$$an_2 = a^n_{BA} / \mu_a = 1{,}239 / 0{,}1 = 12{,}39 \text{ мм}.$$

Через точку n_2 проводим прямую, перпендикулярную AB (направление $\overline{a}^\tau_{BA}$). В соответствии со вторым векторным уравнением из точки π (так как $\overline{a}_C = 0$) параллельно BC в направлении от B к C откладываем отрезок

$$\pi n_3 = a^n_{BC} / \mu_a = 9{,}3 / 0{,}1 = 93 \text{ мм}.$$

Через точку n_3 проводим прямую, перпендикулярную BC (направление a^τ_{BC}). Отрезок πb изображает ускорение точки B. Точка S_2 находится на середине отрезка ab.

Ускорение точки D определится

$$\overline{a}_D = \overline{a}_B + \overline{a}^n_{DB} + \overline{a}^\tau_{DB}.$$

Определим

$$a^n_{DB} = \omega^2_{DB} \cdot l_{DB} = \omega^2_4 \cdot l_{DB} = 6{,}5^2 \cdot 0{,}22 = 9{,}3 \text{ м/с}^2.$$

На плане ускорений

$$bn_4 = a^n_{DB} / \mu_a = 9{,}3 / 0{,}1 = 93 \text{ мм}.$$

Графически решаем записанные выше уравнения. Из точки B откладываем отрезок bn_4 параллельно BD от D к B. Через точку n_4 проводим прямую, перпендикулярную BD, до пересечения с горизонталью. Точку S_4 находим по методу подобия. Она лежит на середине отрезка *вd*.

Из плана ускорений имеем:

$$a_B = \pi b \cdot \mu_a = 182 \cdot 0{,}1 = 18{,}2 \text{ м/с}^2$$

$$a^\tau_{BA} = n_2 b \cdot \mu_a = 330 \cdot 0{,}1 = 33 \text{ м/с}^2$$

$$a^\tau_{BC} = n_3 b \cdot \mu_a = 157 \cdot 0{,}1 = 15{,}7 \text{ м/с}^2$$

$$a_{S2} = \pi s_2 \cdot \mu_a = 64 \cdot 0{,}1 = 6{,}4 \text{ м/с}^2$$

$$a_D = \pi d \cdot \mu_a = 268 \cdot 0{,}1 = 26{,}8 \text{ м/с}^2$$

$$a^{\tau}_{DB} = n_4 d \cdot \mu_a = 157 \cdot 0{,}1 = 15{,}7 \text{ м/с}^2$$

$$a_{S4} = \pi s_4 \cdot \mu_a = 211 \cdot 0{,}1 = 21{,}1 \text{ м/с}^2.$$

Угловые ускорения звеньев определим:

$$\varepsilon_2 = a^{\tau}_{BA} / l_{BA} = 194{,}11 \text{ с}^{-2},$$

$$\varepsilon_3 = a^{\tau}_{BC} / l_{BC} = 15{,}7 / 0{,}22 = 71{,}36 \text{ с}^{-2},$$

$$\varepsilon_4 = a^{\tau}_{BD} / l_{BD} = 15{,}7 / 0{,}22 = 71{,}36 \text{ с}^{-2}.$$

Перенося вектор $n_{2в}$ в точку B звена 2, определим направление ε_2. Аналогично для остальных звеньев.

Расхождение результатов:

- по графическому способу $\varepsilon_3 = 71{,}41 \text{ с}^{-2}$;
- по плану ускорений $\varepsilon_3 = 71{,}36 \text{ с}^{-2}$.

$$\Delta = (71{,}41 - 71{,}36) \times 100\ \% / 71{,}36 = 0{,}07\ \%.$$

Вычисление кинетической энергии механизма

Кинетическая энергия важнейшая динамическая характеристика, определяющая состояние системы.

Кинетическая энергия механизма состоит

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5.$$

Звено 1 совершает вращательное движение

$$T_1 = ½ \cdot I_{S1}\omega_1^2.$$

Звено 2 – плоскопараллельное движение

$$T_2 = ½\, I_{S2}\omega_2^2 + ½\, m_2 V_{S2}^2.$$

Звено 3 – вращательное движение

$$T_3 = ½\, I_{S3}\omega_3^2\ .$$

Звено 4 – плоскопараллельное движение

$$T_4 = ½\, I_{S4}\omega_4^2 + ½\, m_4 V_{S4}^2.$$

Звено 5 – поступательное движение

$$T_5 = ½\, m_5 V_D^2.$$

Определим моменты инерции:

$$I_{S1} = m_1 \cdot l_{OA}^2 / 3 = 65 \cdot 0{,}08^2 / 3 = 0{,}139 \text{ кг·м}^2,$$

$$I_{S2} = m_2 \cdot l_{AB}^2 / 12 = 75 \cdot 0{,}17^2 / 12 = 0{,}181 \text{ кг·м}^2,$$

$$I_{S3} = m_3 \cdot l_{BC}^2 / 3 = 80 \cdot 0{,}22^2 / 3 = 1{,}291 \text{ кг·м}^2,$$

$$I_{S4} = m_4 \cdot l_{BD}^2 / 12 = 80 \cdot 0{,}22^2 / 12 = 0{,}323 \text{ кг·м}^2.$$

Определим кинетическую энергию звеньев

$$T_1 = 1/2\cdot 0{,}139\cdot 14{,}65^2 = 14{,}92 \text{ Дж},$$

$$T_2 = 1/2\cdot 0{,}181\cdot 2{,}69^2 + 1/2\cdot 75\cdot 1{,}28^2 = 69{,}09 \text{ Дж},$$

$$T_3 = 1/2\cdot 1{,}291\cdot 6{,}5^2 = 27{,}27 \text{ Дж},$$

$$T_4 = 1/2\cdot 0{,}323\cdot 6{,}5^2 + 1/2\cdot 80\cdot 0{,}93^2 = 41{,}42 \text{ Дж},$$

$$T_5 = 1/2\cdot 340\cdot 0{,}83^2 = 117{,}11 \text{ Дж}.$$

Кинетическая энергия механизма:

$$T = 14{,}92 + 69{,}09 + 27{,}27 + 41{,}42 + 117{,}11 = 262{,}81 \text{ Дж}.$$

Вычисление инерционных нагрузок

Силы инерции определяются в зависимости от вида движения звеньев. Если звено совершает поступательное движение, то сила инерции выражается вектором $\overline{\Phi} = -m\ \overline{a}_c$; для звена, вращающегося вокруг неподвижной оси – моментом $M^{\Phi} = I_S\cdot\varepsilon$, для звена, совершающего плоскопараллельное движение – вектором $\overline{\Phi} = m\ \overline{a}_c$, моментом $M^{\Phi} = -I_S\cdot\varepsilon$.

Определим силы инерции:

$$\Phi_1 = m_1\cdot a_0 = 0 \text{ (звено уравновешено)},$$

$$\Phi_2 = m_2\cdot a_{S2} = 75\cdot 6{,}41 = 480{,}75 \text{ Н},$$

$$\Phi_3 = m_3\cdot a_{S3} = 0 \text{ (звено уравновешено)},$$

$$\Phi_4 = m_4\cdot a_{S4} = 80\cdot 21{,}1 = 168{,}8 \text{ Н},$$

$$\Phi_5 = m_5\cdot a_D = 340\cdot 26{,}8 = 9112 \text{ Н}.$$

Направлены силы инерции в сторону, обратную соответствующему ускорению. Определим моменты

$$M_1^{\Phi} = I_{S1}\cdot\varepsilon_1 = 0 \ \ (\varepsilon_1 = 0),$$

$$M_2^{\Phi} = I_{S2}\cdot\varepsilon_2 = 0{,}181\cdot 194{,}18 = 35{,}15 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

$$M_3^{\Phi} = I_{S3}\cdot\varepsilon_3 = 1{,}291\cdot 71{,}41 = 92{,}19 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

$$M_4^{\Phi} = I_{S4}\cdot\varepsilon_4 = 0{,}323\cdot 71{,}36 = 23{,}05 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Моменты инерции направлены в сторону, обратную соответствующему угловому ускорению.

Применение теоремы об изменении кинетической энергии механической системы

Система, состоящая из трех тел, приходит в движение из состояния покоя под действием груза 1 массой m. Учитывая сопротивление качению тела 3, катящегося без скольжения, и пренебрегая другими силами сопротивления и массами нитей, предполагаемых нерастяжимыми, определить угловое ускорение тела (рис. 2).

Дано:

$m_1 = 3m;\ m_2 = m;\ m_3 = 5m;$

$r_2 = r;\ R_2 = 1{,}5r;\ r_3 = r;\ R_3 = 3r;$

$i_{2x} = r\sqrt{2}$; $i_{3x} = r\sqrt{3}$; $f_k = 0{,}02r$; $\alpha = 30^0$; $\beta = 60^0$. Принять $r = 30$ см.

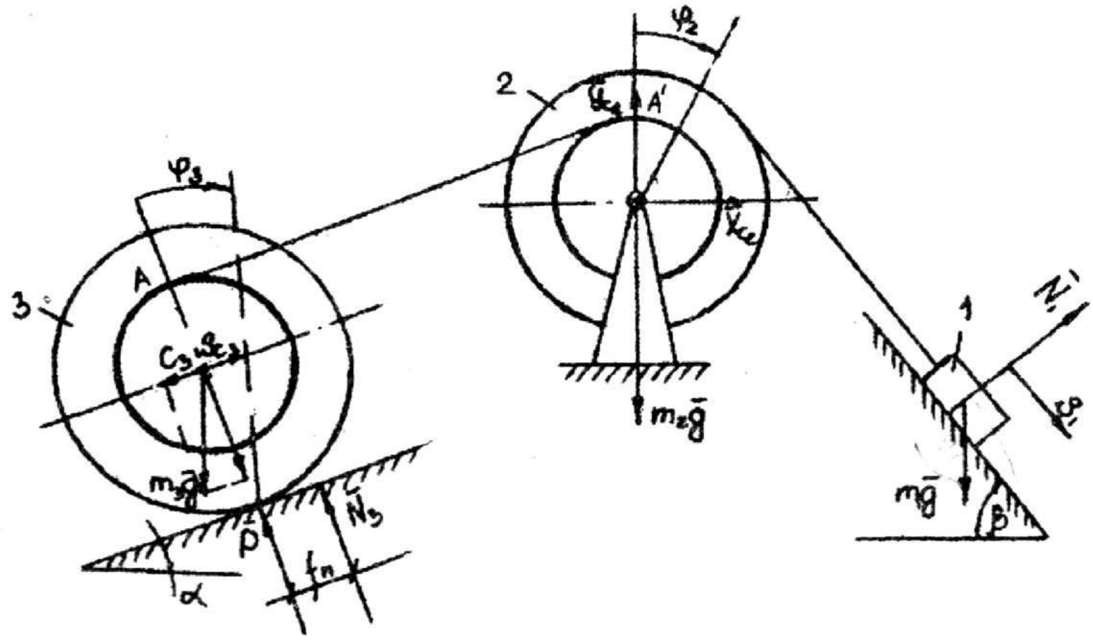


Рис. 2. К применению теоремы об изменении кинетической энергии механической системы

Поскольку требуется найти ускорение, для решения задачи применим теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме

$$\frac{dT}{dt} = \sum N_k^e + \sum N_k^i$$

Изобразим систему вместе с действующими на нее внешними силами: активными ($m_1\bar{g}$; $m_2\bar{g}$; $m_3\bar{g}$) и реакциями связей ($\bar{N}_1$; $\bar{x}_{C2}$; $\bar{y}_{C2}$; $\bar{N}_3$; $\bar{F}_{тр}$).

Внутренние силы не показываем, так как система состоит из твердых тел, соединенных идеальной связью (гибкой нерастяжимой нитью) и поэтому $\sum N_k^i = 0$.

Определим кинетическую энергию системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Тело 1 совершает поступательное движение, тело 2 – вращательное, тело 3 – плоскопараллельное движение.

Запишем выражение кинетической энергии для каждого тела системы:

$$T_1 = \frac{m_1 \cdot V_1^2}{2}; \ T_2 = \frac{I_2 \cdot \omega_2^2}{2};$$

$$T_3 = \frac{m_3 \cdot V_{C3}^2}{2} + \frac{I_3 \cdot \omega_3^2}{2}$$

Выразим все кинематические характеристики, входящие в эти формулы через ω_3.

Учтем, что МЦС третьего тела находится в точке P:

$$V_{C3} = \omega_3 R_3 = 3\omega_3 r,$$

$$V_A = V_A; \text{ то есть } \ \omega_3(R_3 + r_3) = \omega_2 \ r_2,$$

$$\omega_2 = \omega_3 \frac{R_3 + r_3}{r_2} = 4\omega_3$$

$$V_1 = \omega_2 R_2 = 4\omega_3 \cdot 1{,}5r = 6\omega_3 r.$$

Запишем выражения кинетической энергии для каждого тела системы через угловую скорость ω_3 и массу m

$$T_1 = \frac{3m_1 36\omega_3^2 r^2}{2} = \frac{108mr^2\omega_3^2}{2} = 54mr^2\omega_3^2.$$

Учитывая, что $I_2 = m_2 \cdot i_{2x}^2 = 2mr^2$; $I_3 = m_3 \cdot i_{3x}^2 = 15mr^2$;

$$T_2 = \frac{2mr^2 \cdot 16\omega_3^2}{2} = 16mr^2\omega_3^2,$$

$$T_3 = \frac{5m9r^2\omega_3^2}{2} + \frac{15mr^2 \cdot \omega_3^2}{2} = \frac{60mr^2 \cdot \omega_3^2}{2} = 30mr^2\omega_3^2.$$

Таким образом, кинетическая энергия всей системы равна

$$T = 100mr^2\omega_3^2.$$

Определим мощность внешних сил, приложенных к системе

$$\sum N_k^e = N_{m1g} + N_{m3g} + N_{Mc} = m_1 g \sin\beta \cdot v_1 - m_3 g \sin\alpha \cdot v_{c3} - m_3 g \cos\alpha \cdot f_k \omega_3.$$

Мощность остальных сил равны нулю, так как силы либо приложены к неподвижным точкам, либо перпендикулярны к перемещениям тел, либо приложены к точкам, совпадающим с МЦС.

Выразим мощность внешних сил, приложенных к системе через ω_3 и m

$$\sum N_k^e = 3mg\sin\beta \cdot 6r\omega_3 - 5mg\sin\alpha 3r\omega_3 - 5mg\cos\alpha \cdot f_k\omega_3 =$$

$$= mgr\omega_3\left(18 \cdot 0{,}866 - 15 \cdot 0{,}5 - 5 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}02\right) = 8mgr\omega_3.$$

Подставим полученные значения кинетической энергии и мощности в формулу теоремы и определим искомое угловое ускорение

$$\frac{d}{dt}(100\,mr^2\omega_3^2) = 8\mathrm{mgr}\,\omega_3.$$

Вынесем постоянные величины за знак дифференциала и продифференцируем левую часть равенства

$$100mr^2 \cdot 2\omega_3 \ \frac{d\omega_3}{dt} = 8mgr\omega_3\,.$$

Сократив на $\mathrm{mg}\omega_3$, получим

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{8 \cdot 9{,}8}{200 \cdot 0{,}3} = 1{,}3\frac{\text{рад}}{c^2}.$$

Применение общего уравнения динамики (принцип Д'Аламбера – Лагранжа)

Дано:

$m_1 = 3m;\ \ m_2 = m;\ \ m_3 = 5m;$

$r_2 = r;\ \ R_2 = 1{,}5r;\ \ r_3 = r;\ \ R_3 = 3r;\ \ i_{2x} = r\sqrt{3}\,;$

$\beta = 60^0;\ \ \alpha = 30^0;\ \ f_k = 0{,}02r;\ \ \varepsilon_3 - ?$

Система имеет одну степень свободы (рис. 3). Для определения ε_3 применим общее уравнение динамики

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^{ин} = 0\,,$$

где $\sum \delta A_k^a$ – сумма элементарных работ активных сил;

$\sum \delta A_\kappa^{ин}$ – сумма элементарных работ сил инерции.

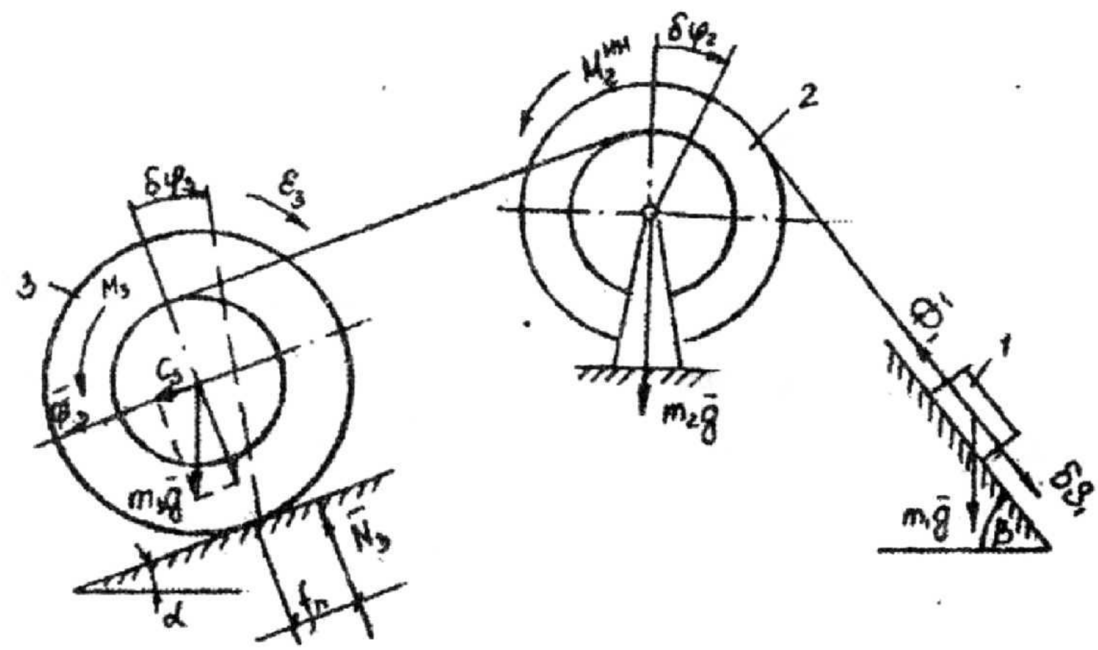


Рис. 3. К применению общего уравнения динамики
(принцип Д'Аламбера – Лагранжа)

Изображаем на чертеже активные силы $m_1 \bar{g}$; $m_2 \bar{g}$; $m_3 \bar{g}$ и пару сил, образующую момент сопротивления качению M_C. Задавшись направлением ускорения ε_3, изображаем на чертеже силы инерции $\bar{\Phi}_1$; $\bar{\Phi}_3$ и моменты инерции M_2; M_3, величины которых равны:

$$\Phi_1 = m_1 \cdot a_1;\ \ M_2^{ин} = I_{2x} \cdot \varepsilon_2;\ \ I_{2x} = m_2 \cdot i_{2x}^2;$$

$$\Phi_3 = m_3 \cdot a_{C3};\ \ M_3^{ин} = I_{3x} \cdot \varepsilon_3;\ \ I_{3x} = m_3 \cdot i_{3x}^2.$$

Сообщим системе возможное перемещение, повернув тело 3 на угол $\delta\varphi_3$, тогда тело 2 повернется на угол $\delta\varphi_2$, а тело 1 переместится на δS_1. Составим общее уравнение динамики

$$m_1 \cdot g \cdot \sin\beta \cdot \delta S_1 - m_1 \cdot a_1 \cdot \delta S_1 - M_2^{ин} \cdot \delta\varphi_2 - m_3 \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot \delta s_{c3} -$$

$$-m_3 \cdot a_{c3} \cdot \delta S_{c3} - M_3^{ин} \cdot \delta\varphi_3 - m_3 \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot f_k \cdot \delta\varphi_3 = 0.$$

Учитывая зависимости между угловыми скоростями тел и скоростями центров масс тел

$$V_{C3} = 3r\omega_3;\quad \omega_2 = 4\omega_3;\quad V_1 = 6\omega_3 \cdot r,$$

запишем такие же зависимости и между возможными перемещениями

$$\delta S_{c3} = 3r \cdot \delta\phi_3; \delta\varphi_2 = 4\delta\varphi_3; \delta S_1 = 6r \cdot \delta\varphi_3$$

и соответственно между ускорениями

$$a_{C3} = 3r \cdot \varepsilon_3; \quad \varepsilon_2 = 4\varepsilon_3; \quad a_1 = 6r \cdot \varepsilon_3.$$

Учитывая эти соотношения, распишем общее уравнение динамики:

$$3m \cdot g \cdot 0{,}866 \cdot 6r \cdot \delta\varphi_3 - 5m_3 \cdot g \cdot 0{,}5 \cdot 3r \cdot \delta\varphi_3 - 5m \cdot g \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}02r \cdot \delta\varphi_3 =$$

$$= 3m \cdot 6r \cdot \varepsilon_3 \cdot 6r \cdot \delta\varphi_3 + m \cdot 2r^2 \cdot 4\varepsilon_3 \cdot 4\delta\varphi_3 + 5m \cdot 3r \cdot \varepsilon_3 \cdot \delta\varphi_3 + 5m \cdot 3r^2 \cdot \varepsilon_3 \cdot \delta\varphi_3;$$

$$8m \cdot g \cdot r \cdot \delta\varphi_3 = m \cdot \varepsilon_3 \cdot \delta\varphi_3 \cdot r^2 \cdot (108 + 32 + 45 + 15);$$

$$\varepsilon_3 = \frac{8g}{200 \cdot 0{,}3} = 1{,}3 \text{ рад./с}^2$$

Применение уравнения Лагранжа 2-го рода

Дано:

$m_1 = 3m$; $m_2 = m$; $m_3 = 5m$; $r_2 = r$; $R_2 = 1{,}5r$; $r_3 = r$; $R_3 = 3r$;

$i_{2x} = r\sqrt{3}$; $\beta = 60^0$; $\alpha = 30^0$; $f_k = 0{,}02r$; $\varepsilon_3 - ?$

Принять $r = 30$ см (рис. 4).

Система имеет одну степень свободы, следовательно, ее положение определяется одной обобщенной координатой, и для нее должно быть составлено одно уравнение. За обобщенную координату следует принять угол поворота того тела, для которого требуется найти угловое ускорение, то есть φ_3.

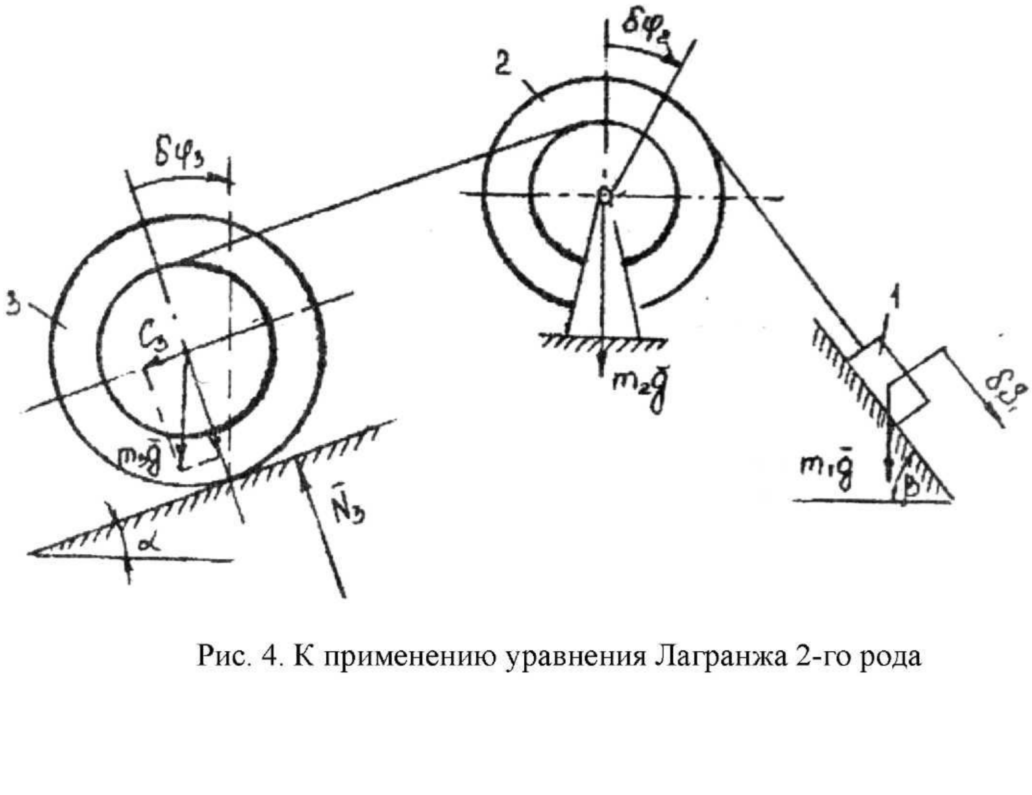


Рис. 4. К применению уравнения Лагранжа 2-го рода

Составим уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi_3}=Q_{\varphi 3},$$

где T – кинетическая энергия системы; $\dot{\varphi}_3$ – обобщенная скорость.

Тогда кинетическую энергию через обобщенную скорость выразим

$T = 100m \cdot r^2 \cdot \dot{\varphi}_3^2$ (см. 1-й способ решения задачи).

Определяем обобщенную силу. Для этого нужно сообщить системе возможное (бесконечно малое) перемещение, при котором координата φ3 получает положительное приращение $\delta\varphi_3$, и вычислить сумму элементарных работ всех действующих сил на этом перемещении. В полученном равенстве выразить перемещение всех точек, где приложены силы, через $\delta\varphi_3$, и вынести $\delta\varphi_3$, за скобки. Коэффициент при $\delta\varphi_3$ и будет обобщенной силой $Q_{\varphi 3}$.

$$\delta A = m_1 \cdot g \cdot \sin\beta \cdot \delta S_1 - m_3 \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot \delta S_{c3} - m_3 \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot f_k \cdot \delta\varphi_3, \qquad (**)$$

где $\delta S_1 = 6r \cdot \delta\varphi_3$; $\delta S_{c3} = 3r \cdot \delta\varphi_3$.

Тогда уравнение (**) запишется в виде

$$\delta A = 8m \cdot g \cdot r \cdot \delta\varphi_3; Q_{\varphi 3} = 8m \cdot g \cdot r.$$

Найдем производные от кинетической энергии

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_3}=0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3}=200 \cdot m \cdot r^2 \cdot \dot{\varphi}_3;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3}\right)=200 \cdot m \cdot r^2 \cdot \ddot{\varphi}_3.$$

Итак. Уравнение Лагранжа II-го рода принимает вид

$$200 \cdot m \cdot r^2 \cdot \ddot{\varphi}_3 = 8 \cdot m \cdot g \cdot r.$$

Откуда получаем угловое ускорение тела 3

$$\varepsilon_3 = \ddot{\varphi}_3 = \frac{8g}{200r} = \frac{78{,}4}{60} = 1{,}3 \text{ рад/с}^2.$$

Пример оформления плаката к курсовой работе приведен на рис. 5.

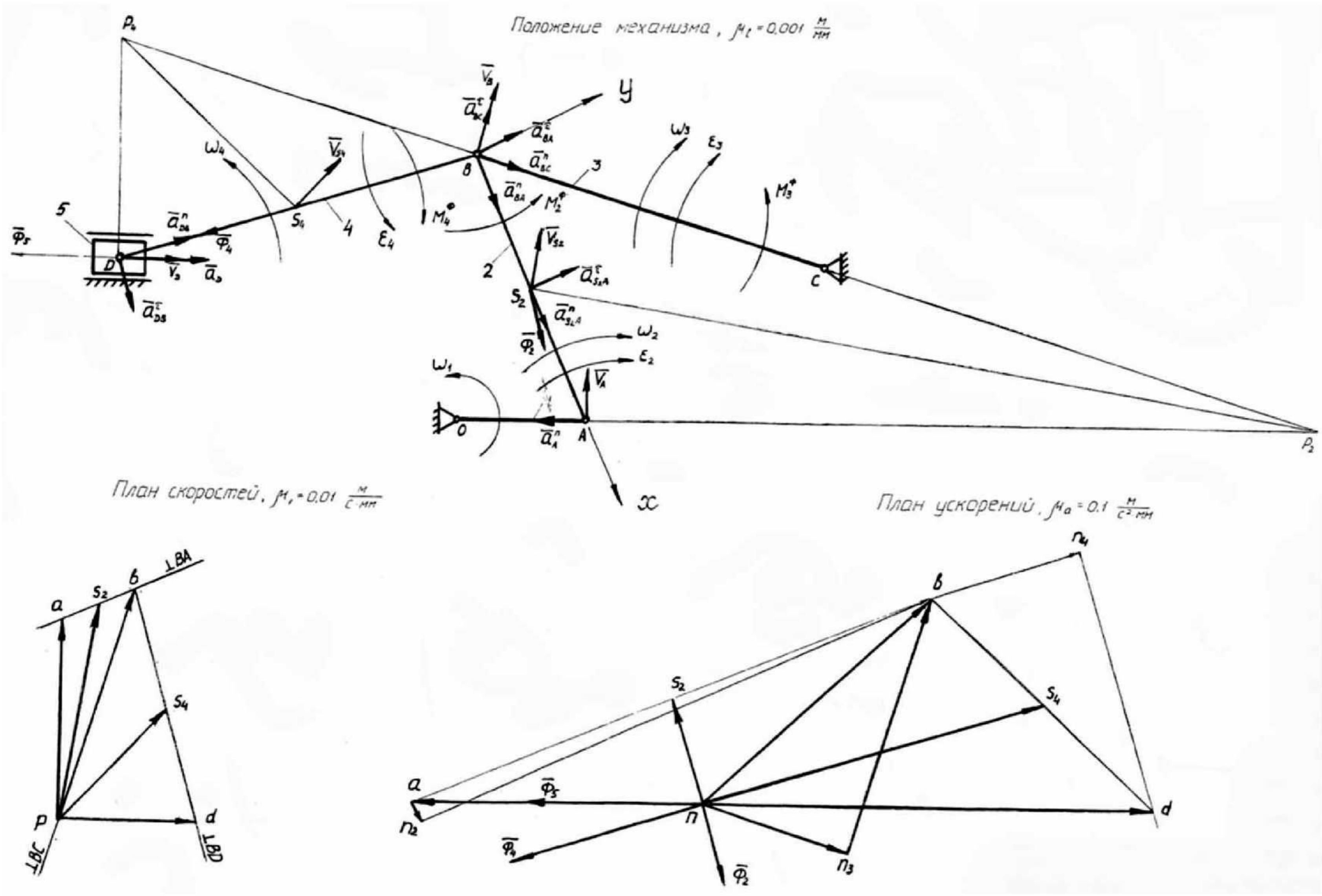


Рис. 5. Пример выполнения построений для оформления плаката

2. ЗАДАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Расчетно-графическая работа включает следующие задачи:

1. *Равновесие плоской системы сил.* Определение реакций опор составной конструкции (система двух тел, рис. 6).

При решении задачи можно или рассмотреть равновесие всей системы в целом, а затем равновесие каждого из тел системы, изобразив его отдельно, или же сразу расчленить систему и рассмотреть равновесие каждого из тел в отдельности, учитывая при этом аксиому статики о равенстве действия и противодействия.

Порядок выполнения:

1. Выделить твердое тело, равновесие которого надо рассмотреть.
2. Изобразить задаваемые силы.
3. Освободить тело от связей, изобразив соответствующие реакции связей.
4. Выбрать систему осей декартовых координат.
5. Составить уравнения равновесия.
6. Решить систему всех уравнений равновесия и определить неизвестные величины.

2. *Равновесие пространственной системы сил* (рис. 7).

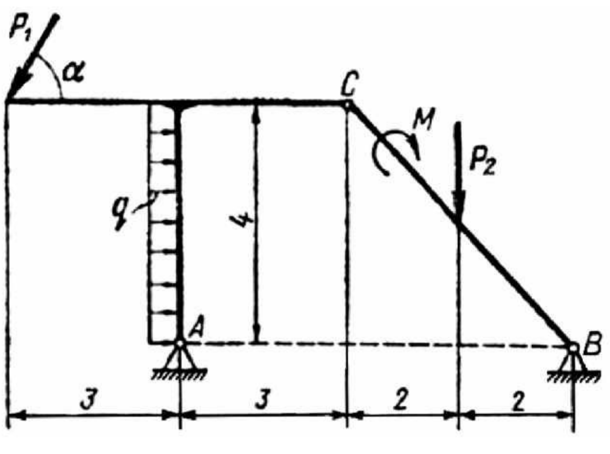


Рис. 6. К определению реакций опор составной конструкции

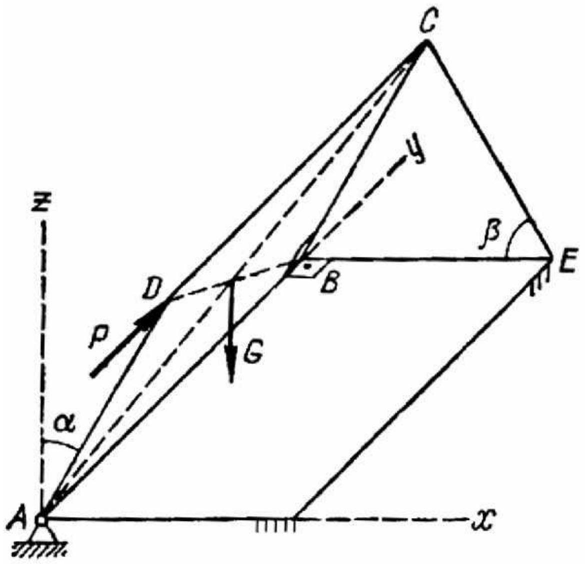


Рис. 7. К определению равновесия пространственной системы сил

При определении реакций опор произвольной пространственной конструкции необходимо учесть, что реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие (по всем трем координатным осям), а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости перпендикулярной оси шарнира (подшипника).

Порядок выполнения:

1. Выделить твердое тело, равновесие которого следует рассмотреть.
2. Изобразить активные (заданные) силы.
3. Освободить тело от связей, заменив их реакциями связей. Число неизвестных не должно быть более **шести** – иначе система статически неопределима.
4. Выбрать систему осей декартовых координат.
5. Составить уравнения равновесия.
6. Решить полученные уравнения относительно неизвестных.

3. *Плоское движение твердого тела.* Определить линейные скорости и ускорения точек механизма, а также угловые скорости и ускорения звеньев (рис. 8).

Для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя их к каждому звену механизма в отдельности. При определении ускорений точек механизма необходимо воспользоваться равенством

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n},$$

где A – точка, ускорение $\bar{a}_A$ которой задано или определяется по условию задачи.

Порядок выполнения:

1. Вычертить схему механизма в соответствии с заданным условием.
2. Определить линейные скорости точек. При определении скоростей рассматривают последовательное движение отдельных звеньев механизма, начиная с того звена, движение которого задано, и при переходе от одного звена к другому определяют скорости тех точек, которые являются общими для двух звеньев механизма.
3. Определить угловые скорости звеньев механизма.
4. Определить линейные ускорения точек механизма, при этом за полюс принимается точка, ускорение которой известно или определяется по условию задачи.
5. Определить угловые ускорения звеньев.

4. *Сложное движение точки* (рис. 9).

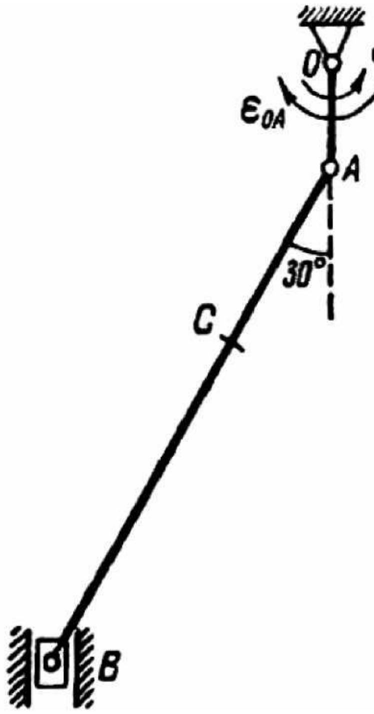


Рис. 8. К расчету плоского движения твердого тела

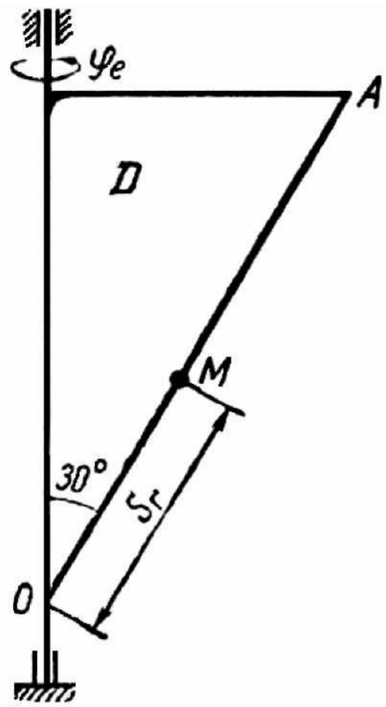


Рис. 9. К расчету сложного движения точки

Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки.

Для решения задачи необходимо воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений.

Порядок выполнения:

1. Изобразить схему механизма и определить положение точки на схеме.

2. Определить, какое движение является абсолютным, какое относительным и какое переносным.

3. Рассмотреть заданное положение точки и определить скорости в относительном и переносном движениях.

4. Определить абсолютную скорость.

5. Определить численные значения всех составляющих ускорений в относительном и переносном движениях. Если переносное движение вращательное, то определить ускорение Кориолиса.

6. Определить абсолютное ускорение точки.

3. ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Студенты выполняют одну контрольную работу на тему «*Плоское движение твердого тела*» (рис. 10):

1. Для заданного механизма определить скорости точек и угловые скорости всех звеньев.

2. Найти линейные ускорения заданных точек и угловые ускорения звеньев.

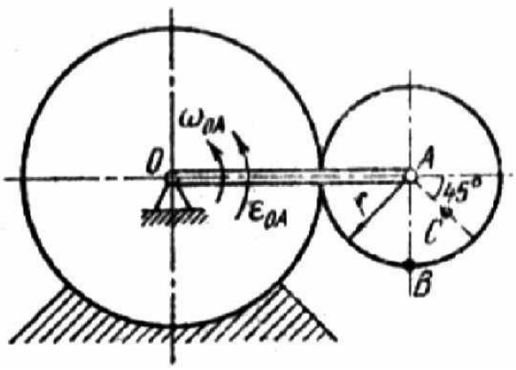


Рис. 10. К расчету плоского движения твердого тела

Методические указания. При решении задачи для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему (или понятие) к каждому звену механизма в отдельности. Решение начинаем с определения скорости той точки, для которой это можно сделать по условию задачи, сравнивая затем со скоростью другой точки. Сравнивать можно только скорости точек одного и того же звена. При определении ускорений точек механизма надо исходить из равенства

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^{\tau} + \overline{a}_{BA.}^{n},$$

где A – точка, ускорение $\overline{a}_A$ которой задано, или непосредственно определяется по условиям задачи.

Порядок выполнения:

1. Изобразить схему механизма в соответствии с заданными условиями.
2. Определить линейные скорости точек.
3. Определить угловые скорости звеньев механизма.
4. Определить линейные ускорения точек механизма.
5. Определить угловые ускорения звеньев.

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ

Количество контрольных работ для различных специальностей устанавливается в соответствии с учебными планами. Контрольные работы могут включать следующие задания.

Контрольная работа 1

С1. – Равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил.

С2. – Равновесие систем тел, находящихся под действием плоской системы сил.

С3. – Равновесие системы сходящихся сил.

С4. – Равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил.

Литература

1. Теоретическая механика: Методические указания и контрольные задания. / Под ред. проф. С.М. Тарга. – М.: Высш. шк., 1989. – С. 14 – 29.

Контрольная работа 2

К1. – Кинематика точки.

К2. – Исследование вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

К3. – Исследование плоскопараллельного движения твердого тела.

К4. – Сложное движение точки.

Литература

1. Теоретическая механика: Методические указания и контрольные задания. / Под ред. проф. С.М. Тарга. – М.: Высш. шк., 1989. – С. 29 – 50.

Контрольная работа 3

Д1. – Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки.

Д3. – Применение теоремы о движении центра масс системы.

Д4. – Применение теоремы об изменении количества движения системы.

Литература

1. Теоретическая механика: Методические указания и контрольные задания. / Под ред. проф. С.М. Тарга. – М.: Высш. шк., 1989. – С. 50 – 66.

Контрольная работа 4

Д5. – Применение теоремы об изменении кинетического момента системы.

Д6. – Применение теоремы об изменении кинетической энергии системы.

Д7. – Применение дифференциальных уравнений плоскопараллельного движения твердого тела.

Д8. – Применение принципа Д'Аламбера к изучению движения системы.

Литература

1. Теоретическая механика: Методические указания и контрольные задания. / Под ред. проф. С.М. Тарга. – М.: Высш. шк., 1989. – С. 67 – 86.

Контрольная работа 5

Д9. – Определение условий равновесия механической системы с помощью принципа возможных перемещений.

Д10. – Применение к изучению движения механической системы общего уравнения динамики (принципа Д'Аламбера – Лагранжа).

Литература

1. Теоретическая механика: Методические указания и контрольные задания. / Под ред. проф. С.М. Тарга. – М.: Высш. шк., 1989. – С. 86 – 94.

Методические рекомендации. Каждое задание выполняется в отдельной тетради. Решение каждой задачи обязательно начинается на развороте тетради и сопровождается чертежом, который должен быть аккуратным и наглядным, и выполненным с учетом условия решаемого варианта задачи. Каждое решение сопровождается пояснениями и подробным изложением всего хода расчетов. Выполненные контрольные работы студенты обязаны защищать. Контрольные работы защищаются после проверки. Незачтенная работа возвращается для переработки, которая выполняется в той же тетради с отметкой «*Работа над ошибками*». К работе, высылаемой на повторную проверку, должна прилагаться незачтенная работа.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Теоретическая механика относится к числу фундаментальных дисциплин. Она является одной из научных основ современной техники. Изучение теоретической механики имеет определяющее значение, так как приучает делать обобщенные выводы, без которых немыслим высококвалифицированный специалист. Следует отметить также, что теоретическая механика играет большую роль в воспитании у студентов творческого мировоззрения, так как ее законы рассматриваются в свете диалектического материализма.

Учебный процесс по теоретической механике построен следующим образом:

- читаются лекции;
- проводятся практические занятия;
- проводятся контрольные работы;
- выполняются расчетно-графические или курсовые работы;
- проводятся консультации;
- дважды в семестре проводится аттестация студентов;
- проводится университетский тур олимпиады;
- итогом контроля знаний является экзамен, либо зачет;
- наиболее успевающие студенты вовлекаются в работу студенческих научно-технических кружков, СНО; готовят рефераты и доклады на СНТК.

Построение всего курса теоретической механики соответствует типовой программе Министерства образования Республики Беларусь (регистрационный № ТД-224/тип от 11 июля 2002 г.)

1. О МЕТОДИКЕ ЧТЕНИЯ ЛЕКЦИЙ

Основным звеном учебного процесса по теоретической механике являются лекции, на которые отводится не менее 50 % времени, предусмотренного учебным планом.

Лекции предназначены для того, чтобы заложить основы научных знаний, определяя направления, основное содержание и характер всех видов учебных занятий и самостоятельной работы по изучению курса.

Лекция является одним из основных источников знаний по предмету, так как она содержит в себе информацию в обобщенном и законченном виде, и в этом заключается ее познавательное значение.

Лекция должна удовлетворять следующим основным требованиям:

– лектор должен глубоко и всесторонне знать предмет и систематически готовиться к лекциям;

– лекции должны соответствовать программе курса.

Содержание лекций должно быть отражено либо в конспекте лекций, либо в учебном пособии или учебнике, созданном лектором:

– лекции должны быть прочитаны на высоком научно-методическом и методологическом уровне. Все основные позиции и закономерности в теоретической механике должны быть освещены с позиций современных знаний;

– лекция должна иметь соответствующее внешнее оформление (хорошая дикция лектора, литературная и механически правильная речь, нужный темп и достаточная громкость речи, аккуратный внешний вид лектора;

– графический материал, выполняемый на доске, должен быть четким;

– лекция должна, по возможности, сопровождаться техническими средствами обучения (демонстрирование кино- и видеоматериалов, моделей, плакатов, диаграмм, таблиц, диапозитивов, слайдов и т.д.);

– лектор обязан иметь тесный контакт с аудиторией во время чтения лекций и всегда заботиться об обратной связи с аудиторией; нужно чувствовать и знать, насколько доходчиво излагается материал лекции;

– следует категорически избегать сплошной диктовки излагаемого материала;

– начинать лекцию нужно с сообщения ее плана, чтобы студенты понимали, о чем будет идти речь на лекции. На протяжении всей лекции нужно выделять и подчеркивать главное, пользуясь различными способами (интонация, подчеркивание на доске соответствующих записей или заключение основных формул и выводов в рамки, замедлять темпы лекции и делать небольшие паузы, позволяющие студентам конспектировать основной материал лекции).

Первые принципиальные установки студенты получают на первой вступительной лекции. Поэтому, качество вступительной лекции имеет большое значение. Важными условиями успеха вступительной лекции являются:

– умение лектора выделить, охарактеризовать и показать студентам место и специфику теоретической механики в системе знаний;

– осветить вопрос о ее связи и взаимодействии с другими отраслями знаний и с техникой.

Освещение вопросов истории развития механики должно быть не только на вступительной лекции, но и в процессе изложения всего курса. Необходимо освещать и пропагандировать роль отечественных ученых, и в частности белорусских, в развитии механики. Материал, излагаемый на лекциях, следует представлять так, чтобы он позволял студентам создать представление о взаимосвязи теоретической механики с техникой и другими смежными науками. Кроме того, необходимо показать тесную связь развития теоретической механики с запросами практики. Желательно, изложенный теоретический материал иллюстрировать на лекции решением примера, с отражением краткой методики этого решения.

Лекция должна носить творческий характер. Для этого лектор должен неустанно заботиться об усовершенствовании методики чтения лекций и активно вовлекать студентов в обсуждение различных вопросов курса, предлагая им для самостоятельного решения отдельные вопросы и доказательства различных теорем механики другими способами, снабдив при этом их соответствующими литературными источниками. Лекция приводит знания по данной дисциплине в стройную систему, помогает усвоить трудный материал. Хорошо прочитанная лекция всегда должна вызвать у студентов потребность в книге, необходимость углубленной самостоятельной работы. Следует подчеркивать связь лекции с учебником, чтобы студент уже с первых занятий изучал курс по учебнику, при этом, необходимо ряд вопросов программы выносить на самостоятельную проработку. Уместно отметить, что рекомендованный для самостоятельного изучения материал войдет в экзаменационные билеты.

Конспектирование лекций активизирует мыслительный процесс, но при этом нельзя ориентировать студентов на изучение курса по конспекту, который не может заменить собой учебник.

Чтобы сохранить высокий научно-методический уровень лекций, лектор должен непрерывно пополнять свои лекции, учитывая достижения современной науки и техники, которые опираются на основные законы механики.

Лектор обязан выделять главное при изложении материала, и в то же время, следует обращать внимание на тонкости, которые могут ускользнуть от студента при чтении учебника.

В повышении качества лекции большую роль играет обмен опытом лучших лекторов не только своего университета, но и других вузов. В этом отношении важны научно-методические семинары различного уровня, где обсуждаются вопросы методики и практики изложения фундаментальных положений теоретической механики. Прохождение преподавателями стажировок и курсов повышения квалификации в других вузах повышает их педагогическое мастерство, улучшает качество читаемых лекций.

Лектор должен всегда помнить об обратной связи, о том, как усваивают материал слушатели. В ходе лекции следует периодически обращаться к студентам с вопросами, активизируя их восприятие, прививая навыки творческого мышления. Такая форма чтения оживляет лекцию, привлекает внимание студентов к ней и приближает ее к беседе, дает студентам небольшой отдых, тем самым, не теряя интереса к лекции в целом.

В ходе лекции преподаватель выполняет на доске различные математические выкладки и рисунки, которые должны быть четкими и аккуратными. Небезразлична и форма записи информации на доске. Нельзя разбрасывать беспорядочно записи выводов формул на доске, так как это вносит некоторый хаос в изложение и затрудняет усвоение материала студентами в процессе лекции. Ведение студентами конспекта зачастую приводит к тому, что, стремясь быстрее записать предложенную информацию, они не вникают в сущность полученных лектором зависимостей. Поэтому лектор, закончив доказательство и получив соответствующие зависимости или расчетные формулы, должен кратко повторить ход выводов для того, чтобы он стал понятным всем студентам. Использование плакатов, слайдов, мультимедийной техники оживляет ход лекции, однако необходимо всегда помнить, что выполнение рисунка на доске лектором в процессе изложения материала позволяет студентам участвовать в самом процессе познания и вникать в ход рассуждений.

Лектор должен быть и воспитателем, и психологом, поддерживая непрерывный контакт с аудиторией, следить за степенью усвояемости материала, накоплением усталости и утомляемостью аудитории и вносить небольшую разрядку в форме обозрения кратких исторических сведений, примеров из повседневной практики, забавных эпизодов из жизни выдающихся деятелей науки. Это снижает усталость, вызывает оживление в аудитории, что положительно сказывается на дальнейшем усвоении материала лекции. Лектор должен своим темпераментом и активной формой изложения зажечь аудиторию слушателей и вызвать в них интерес к предмету. В то же время, лектор – как воспитатель, должен следить за дисциплиной в аудитории, не впускать опоздавших после звонка, следить за внешним видом студентов (верхняя одежда, опрятность), не оставлять без внимания случаи нарушения учебной дисциплины. На лекции преподаватель должен прививать студентам бережное отношение к собственности университета, правильное отношение к учебе и труду, своим внешним видом и поведением повышать культурный уровень общения и др.

2. О МЕТОДИКЕ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

На практические занятия отводится 50 % всех часов по курсу теоретической механики. На факультетах с малым объемом часов отводится 30 % всех запланированных часов.

Целью практических занятий является привитие студентам навыков самостоятельной работы путем решения большого количества задач. Задачи берутся из различных областей техники. Эти задачи концентрируются в различных сборниках задач по теоретической механике, среди которых лучшим является задачник И.В. Мещерского. Однако, по нашему мнению, руководители практических занятий должны проявить самостоятельную работу, собрав специализированные задачи, соответствующие профилю специальности тех групп и факультетов, на которых они ведут практические занятия. Перед кафедрой в целом возникает необходимость в издании небольших сборников указанных специализированных задач, хотя бы на первых порах для внутреннего пользования. Такое мероприятие повысит интерес у студентов к изучению теоретической механики, так как каждый из них будет видеть, где ему понадобятся в дальнейшем его знания по теоретической механике. На первом же практическом занятии преподаватель должен сообщить студентам литературу по методике решения задач. Например, следующие книги: М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон «Теоретическая механика в примерах и задачах»; Т. Айзенберг, И.М. Воронков, В.М. Осецкий «Руководство к решению задач по теоретической механике». Для выполнения студентами курсовых работ следует рекомендовать «Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике» под редакцией А.А. Яблонского. Это поможет студентам быстрее приобрести навыки в решении задач, а следовательно, в выполнении домашних заданий. Безусловным является тот факт, что развитие навыков самостоятельной работы на практических занятиях всецело зависят от методики их проведения и от активности студентов.

Руководитель практических занятий должен уметь решать задачи всеми возможными способами и должен систематически готовиться к проведению практических занятий в аудитории. Входя в аудиторию, после приветствия группы, преподаватель должен сделать перекличку присутствующих студентов. Затем по теме проводимого занятия сделать краткий опрос по теоретическому материалу. В начале занятия преподаватель должен изложить на примере методику решения задач, относящихся к рассматриваемой теме. Затем один из студентов вызывается к доске, а остальные решают задачу на месте. Прочитав условие задачи и записав на доске, что дано, и что требуется определить, студент, анализируя условие задачи, намечает метод ее решения. По нашему мнению, хотя бы по одной из задач проводится анализ решения и делаются необходимые выводы. Затем всей группе предлагается на месте, самостоятельно решить задачу или задачи в зависимости от их трудности. В этот момент преподаватель проверяет выполнение домашнего задания и ход решения данной задачи, направляя в случае затруднений студентов по нужному пути решения задачи. В конце решенной задачи преподаватель делает краткие обобщающие выводы. Таким образом, при указанной методике проведения занятий превалирует активный метод их проведения. Однако в группах факультетов с малым числом часов такой активный метод не представляется возможным применить и приходится ограничиваться решением задач (студентами) у доски с обобщающими выводами преподавателя в конце проведенного решения.

Недопустимым и даже вредным следует признать метод, при котором студенты решают задачи под диктовку преподавателя. Не следует гоняться за большим количеством решенных задач. Можно на одной-двух задачах разобрать методику решения задач, но с глубоким анализом. Необходимо по возможности решать задачу несколькими способами. Получив на практических занятиях навыки самостоятельной работы по соответствующему разделу курса, студенты могут без особых трудностей выполнить домашние задания, затратив на это значительно меньше времени.

Конечно, здесь идет речь о студентах, которые посещают лекции, а поэтому лучше ориентируются в теоретических вопросах, а также о студентах, систематически посещающих занятия, на которых приобретают практические навыки. В приобретении практических навыков в решении задач помогают также примеры, приводимые в учебниках.

Необходимо установить такой порядок, чтобы на каждом практическом занятии студенты имели бы задачники. Следует рекомендовать студентам в тетрадках для практических занятий отмечать темы занятий и номера задач. Студенты, пропустившие отдельные практические занятия, должны решить задачи, номера которых относятся к пропущенным дням. В конце каждого практического занятия преподаватель должен указать студентам тему следующего занятия и номера задач, которые будут решаться в следующий раз. Для более глубокого усвоения материала рекомендуется на практических занятиях демонстрировать модели, приборы, плакаты и диаграммы.

Особо следует обратить внимание на методику приема расчетно-графических и курсовых работ. В соответствии с программой курса по каждому разделу выдается индивидуальное расчетно-графическое задание по статике и кинематике, а по динамике – возможно и комплексное задание.

Расчетно-графическое задание по статике выдается на определение реакций опор твердого тела. По кинематике выдается задание на определение скоростей и ускорений точки при сложном движении. Кроме того, по кинематике могут выдаваться индивидуальные задания, содержащие одну задачу, которую нужно решить всеми возможными способами. В этих задачах требуется определить не только скорости, но и ускорения точек тела. Комплексное задание по динамике состоит из одной задачи, которую нужно решить, применив не только общие теоремы динамики, но и уравнения Лагранжа 2-го рода. С выяснением неясных вопросов, связанных с выполнением указанных задач, студент должен обращаться к преподавателю в часы его консультаций.

Каждую из указанных работ, которые в программе по теоретической механике называются курсовыми работами, студенты должны защищать во время приема работ преподавателем. Студент должен разъяснить решение задачи, сформулировав при этом все теоретические положения, связанные с выполнением задания. При защите указанных курсовых работ, выполненных на отдельных листах или в тетради, студенты должны показать преподавателю тетради практических занятий с решением всех задач, предусмотренных календарным планом, как аудиторных, так и домашних. В соответствии с календарным планом в семестре предусматриваются контрольные работы в аудитории.

Если студент выполняет все требования, предъявляемые преподавателем на практических занятиях, и выполняет в установленные сроки домашние задания, то это позволяет положительно аттестовывать студентов за работу в каждом семестре. Причем, если по итогам аттестации студент имеет положительные оценки, то он механически получает зачет по практическим занятиям, если такой зачет предусмотрен учебным планом. Активизации работы студентов на практических занятиях способствуют также методы поощрения. Например, можно освобождать от контрольных работ наиболее успевающих студентов. Студентов, имеющих отличные оценки по итогам аттестации, следует освобождать от решения задач на экзаменах. Тех же отлично успевающих студентов при наличии серьезной работы над теоретическим материалом курсов, активно участвующих в научно-технических студенческих кружках, выступающих с докладами, пишущих рефераты, участвующих в олимпиадах по теоретической механике, в порядке поощрения следует освобождать от экзаменов.

Чтобы хорошо и методически продуманно вести практические занятия, преподаватель должен к ним тщательно готовиться.

Прежде всего, преподаватель должен просмотреть накануне практического занятия литературу, рекомендованную студентам, а также составить план проведения проверки знаний студентов по теме занятия и по ознакомлению их с решением указанных им типовых задач из учебника.

Наметив типовую задачу по теме предстоящего занятия, преподаватель должен продумать методику решения этой задачи. Ели есть достаточные сведения у студентов из лекционного материала, показать решение намеченной задачи несколькими способами.

Подобрать задачи, которые студенты должны решать самостоятельно, а также перечень наводящих вопросов, которые следует привести при решении каждой задачи. При этом следует учитывать время, которое потребуется студентам для решения задач.

Обратить внимание студентов на специфику метода решения каждой из намеченной для домашнего выполнения задачи. Продумать, какие наглядные пособия (модели, диаграммы, плакаты, схемы) необходимо использовать на практических занятиях. Преподаватель должен учитывать, сколько времени нужно затратить на решение каждой из рекомендованных задач слабыми и сильными студентами. Фактор времени должен быть в поле зрения преподавателя неотрывно.

По нашему мнению, в число домашних заданий нужно включать 2-3 задачи, но решать их, умея проводить соответствующий анализ. Следует в группах одного потока делать разные домашние задания, чтобы не сводить все к сплошному списыванию. От таких заданий мало толку.

3. ДОМАШНЯЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ В ТЕЧЕНИЕ СЕМЕСТРА

Нет сомнения в том, что глубина и качество усвоения студентами курса теоретической механики полностью зависит от их самостоятельной работы в семестре по изучению теоретического материала и от приобретенных навыков в решении задач.

Поэтому домашняя работа студентов состоит из изучения теоретического материала по учебнику, составления конспекта по теоретическому материалу, ознакомления с методикой решения примеров, приведенных в учебниках, а также решения задач, заданных преподавателем на дом. Кроме того, в соответствии с программой курса теоретической механики студенты должны выполнять индивидуальные расчетно-графические работы с последующей их защитой.

Преподаватели, ведущие практические занятия, должны в конце каждого занятия указать студентам тему следующего занятия, параграфы и примеры из учебника, с которыми студенты должны познакомиться к следующему занятию. Указываются также номера задач (2-х или 3-х в зависимости от степени их трудности) по сборнику задач И.В. Мещерского или др. Параллельно с этим рекомендуется литература по методике решения задач, которая облегчит студентам выполнение домашних заданий. В начале каждого занятия следует проверить: как студенты к этому занятию подготовились. Это приучит студентов регулярно обращаться к учебной литературе. Таким образом, учебник становится их настоящим помощником в учебе.

Индивидуальные расчетно-графические и курсовые работы должны быть выданы сразу, после того как лектор прочитает соответствующий теоретический материал, а на практических занятиях будут рассмотрены образцы подобных заданий.

4. О МЕТОДИКЕ ПРОВЕДЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

С целью проверки полученных студентами навыков решения задач по отдельным разделам курса проводятся письменные контрольные работы. Контрольная работа выполняется на одном из практических занятий. Работа должна содержать решение одной задачи по соответствующему разделу курса.

Задачи, предлагаемые студентам на контрольных работах, должны содержать материал, охватывающий соответствующий раздел курса и позволяющий преподавателю убедиться в том, что студент овладел методикой решения задач по данному разделу. Для объективной оценки знаний студентов всей группы задачи на контрольной работе должны быть одинаковой трудности. В качестве методических пожеланий следует высказать то, что на контрольных работах рационально давать общие для всех групп задания. Такие задания составляются на основе задач для контрольных работ всех преподавателей кафедры. Это, несомненно, повлечет за собой единое требование всех преподавателей кафедры к знаниям студентов.

Контрольные работы можно проводить также с помощью специальных карточек безмашинного программированного (тестового) контроля, а также с помощью ЭВМ.

В случае если контрольная работа написана неудовлетворительно, то следует рекомендовать такой порядок переписывания контрольных работ.

1. Первый раз имеют право переписывать все, получившие неудовлетворительные оценки.

2. Вторично переписывание контрольной работы можно допустить только через неделю после первого переписывания.

Для выяснения систематической работы студентов по теоретическому материалу можно рекомендовать проведение раз в семестр контрольной работы в потоке.

В группах с малым количеством часов, отводимых на курс теоретической механики, можно рекомендовать проведение коллоквиума вместо контрольной работы. Коллоквиумы следует проводить в специально отведенные на консультации часы.

Осуществлению контроля знаний студентов содействуют проводимые аттестации студентов.

5. ОБ АТТЕСТАЦИИ СТУДЕНТОВ

Целью проведения аттестации студентов является установление систематического контроля за самостоятельной работой студентов, а также достижение более глубоких и твердых знаний основных положений одной из фундаментальных наук – теоретической механики, приобретение практических навыков в статическом, кинематическом и динамическом расчетах различных механических систем.

Достигнуть осуществления поставленной цели можно только в результате систематической, самостоятельной работы студентов в течение каждого семестра. Поэтому вся работа по аттестации студентов направлена к достижению указанной цели. Отсюда возникают конкретные задачи, стоящие перед преподавателями теоретической механики при осуществлении аттестации студентов.

Следует помнить, что материалом для аттестации являются все виды самостоятельных работ студентов, выполняемых ими в аудиториях и дома.

К числу этих работ относятся изучение материала лекций, материала, запланированного для самостоятельной работы, курсовой работы, домашнего задания (ДЗ), расчетно-графической работы (РГР), а также результатов контрольных работ (КР) и проводимых при необходимости коллоквиумов.

Оценить степень усвоения теоретического материала курса позволяют систематические опросы студентов на лекциях и практических занятиях, а также прием расчетно-графических работ и защита курсовой работы.

Нельзя подменять аттестацию требованиями экзаменационного характера. Аттестация помогает преподавателю установить, работает ли студент в течение семестра самостоятельно над курсом теоретической механики и выполняет ли задания по курсу в срок.

Преподаватель должен следить за посещением студентами занятий. Отсутствующих на занятиях студентов следует вызывать на консультации, а также сообщать о неявке в деканат. В случае частых прогулов некоторых студентов необходимо вызывать на заседание кафедры с целью проведения учебно-воспитательной работы. Следует также установить контакт с кураторами групп.

Основные критерии оценок при аттестации студентов должны быть следующие:

а) если в период аттестации по календарному плану требуется выполнить и сдать преподавателю расчетно-графическую работу или курсовую работу, то критерием является оценка по этой работе.

Прием расчетно-графической работы у студентов должен обязательно проводиться путем опроса студентов по выполненной работе. Этот опрос должен выявить приобретенные студентами навыки по методам проведенного расчета и анализа основных теоретических положений, примененных в работе;

б) в те периоды аттестации, когда расчетно-графические работы по календарному плану отсутствуют, критерием оценки являются знания, которые студент показал на практических занятиях, контрольных работах и выполненных домашних заданиях.

Следует рекомендовать проведение контрольных работ не в последние сроки аттестации, официально установленной приказом по университету. Так как скопление контрольных работ по всем предметам, изучаемым студентами, в один срок снижает результаты аттестации.

Преподаватели практических занятий передают при необходимости полученные студентами оценки лектору, читающему теоретический курс. При этом существенно учитывается также и качество критерия оценки выполнения всех заданий в установленные календарным планом сроки, наличие или отсутствие пропусков занятий без уважительных причин.

При аттестации студентов учитываются также результаты опроса и контрольных работ, в том числе безмашинного программированного (тестового) контроля. Однако при этом ведущую роль играет оценка, полученная студентом на практических занятиях.

Неаттестованными могут быть студенты, пропустившие по уважительным причинам от трех до пяти практических занятий (из пяти по плану) или 2-3 занятия (из 3-х по плану). Уважительной причиной является болезнь.

Все неаттестованные студенты и получившие неудовлетворительные оценки должны в течение 2-х недель на консультациях преподавателей отчитаться по изученному разделу курса, сдать домашние задания, расчетно-графические работы и получить положительную оценку по прошедшей аттестации.

С целью систематического и наибольшего охвата студентов контролем можно рекомендовать преподавателям на практических занятиях к решению одной задачи привлекать нескольких студентов, вызывая их к доске. В период проведения вычислений студентами на доске рекомендовать преподавателям производить беглый опрос студентов на местах. Это позволит преподавателю за одно занятия «аттестовать» ряд студентов группы.

6. О МЕТОДИКЕ ПРОВЕДЕНИЯ ЭКЗАМЕНОВ И ЗАЧЕТОВ

Лекторы всех потоков должны ознакомить студентов с содержанием рабочей программы, составленной для данной специальности на основе программы курса теоретической механики для машиностроительных специальностей высших учебных заведений.

Перечень вопросов в этой программе целесообразно представить в той же редакции, в какой они будут включены в экзаменационные билеты. Несомненно, это позволит студентам при подготовке к экзамену по теоретической механике продумать содержание каждого вопроса программы. Особенно важно студентам детально изучить по учебнику вопросы курса, вынесенные на самостоятельную проработку.

При подготовке к экзаменам следует рекомендовать студентам, кроме конспекта лекций, пользоваться учебниками и учебно-методическим комплексом. Экзаменационные билеты, составленные экзаменаторами, утверждаются на заседании кафедры не позднее, чем за неделю до начала экзаменационной сессии.

На кафедре составляется расписание консультаций членов кафедры на весь период экзаменов. Кроме того, составляется расписание предэкзаменационных консультаций экзаменаторов. На этих консультациях преподаватель отвечает на вопросы, поставленные студентами. Кроме того, можно рекомендовать преподавателям обращать внимание студентов на наиболее трудные вопросы программы, на методику доказательства более сложных теорем и др. Эти мероприятия позволят студентам выяснить все неясные вопросы и лучше подготовиться к экзаменам. Следует помнить также о том, что к экзаменам не допускаются студенты, имеющие задолженность по курсовым работам, расчетно-графическим и контрольным заданиям. Защита этих работ в период экзаменационной сессии производится руководителем практических занятий по особому расписанию.

При составлении экзаменационных билетов нужно руководствоваться следующим:

– если экзамен протекает по одному разделу курса, то в билет включаются два теоретических вопроса и одна задача;

– если на экзамен выносятся два раздела курса, то в экзаменационный билет включаются два теоретических вопроса (по одному по каждому разделу) и задача. При этом следует рекомендовать задачи в каждый билет включать отличные от теоретических вопросов, содержащихся в билете. Это позволит осуществить более глубокую проверку знаний студентов.

В экзаменационных билетах теоретические вопросы могут начинаться словами: «вывести», «изложить». Экзаменационные билеты могут содержать также вопросы, отражающие историю развития теоретической механики.

Начало экзамена и экзаменационная аудитория должна строго соответствовать указанным в расписании экзаменов. Экзамены проводятся при наличии у экзаменатора экзаменационных билетов, экзаменационной ведомости и у студента – зачетной книжки.

Экзамены принимаются по ведомости, подписанной деканом или его заместителем, в дни, предусмотренные расписанием. Явившись на экзамен, студент должен предъявить экзаменатору свою зачетную книжку; без зачетной книжки студент может быть допущен к экзамену лишь по направлению декана. Получив зачетную книжку, экзаменатор по ведомости проверяет, допущен ли студент к экзамену, после чего выдает ему задание и отмечает время выдачи. При наличии в ведомости пометки «не допущен» экзаменатор обязан вернуть студенту зачетную книжку и направить его в деканат. Студентам, не явившимся на экзамен, в ведомости проставляется «не явился».

В экзаменационной аудитории целесообразно находиться одновременно не более 8 студентов. При подготовке к ответу студенту разрешается пользоваться счетными устройствами, математическими справочниками и не разрешается пользоваться конспектами, учебниками и прочими пособиями.

Экзаменационную ведомость экзаменатор должен сдать в деканат в день приема экзамена.

В экзаменационной аудитории студенту целесообразно находиться не более 2,5 часов.

Экзамен может протекать в устной и письменной формах. Предпочтительной является комбинированная форма, так как в беседе со студентами экзаменатор может всесторонне проверить знания студентов.

После опроса студента следует рекомендовать экзаменатору сначала поставить оценку в ведомости, а затем в зачетной книжке. Это убедит студента в объективности оценки по данному предмету, так как экзаменатор не подглядывает в зачетную книжку и не находятся под влиянием оценок, полученных по другим дисциплинам.

Оценка знаний на экзаменах производится по десятибальной системе, критерии которой утверждены приказом по университету № 45 от 11 февраля 2004 г. Баллами **1 – 3** оцениваются *неудовлетворительные знания* студентом предмета; **4** балла соответствует оценке *удовлетворительно*; **5 7** баллов – оценке *хорошо*; **8, 9** баллов – *отлично* и **10** баллов – *превосходно*.

Результаты сдачи зачетов оцениваются отметкой «зачтено». Прием зачетов производится по ведомости, подписанной деканом или его заместителем, как правило, в дни и часы, отведенные расписанием для данного предмета. Если зачет у группы по каким-либо причинам не может быть принят в дни и часы занятий, то время сдачи зачета согласовывается заранее преподавателем с группой и деканатом. До начала экзаменационной сессии зачет у студентов принимает только преподаватель, ведущий занятия. В исключительных случаях (болезнь и т. д.) кафедра выделяет другого преподавателя, который принимает зачеты в удобное для студента время. Ведомости приема зачетов, подписанные преподавателем, возвращаются в деканат до начала экзаменационной сессии. Прием зачетов во время экзаменационной сессии может проводиться лишь по направлениям деканатов, которые обязательны для кафедры, в срок, указанный в направлении.

Дифференцированный зачет по курсовой работе выставляется на основе защиты студентами курсовых работ перед специальной комиссией, создаваемой распоряжением заведующего кафедрой, с участием непосредственного руководителя работы.

СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ

Механическое движение *Mechanical motion; motion*	Изменение с течением времени взаимного положения в пространстве материальных тел или взаимного положения частей данного тела.
Механическое действие *Mechanical mutual action*	Действие на данное материальное тело со стороны других материальных тел, которое приводит к изменению скоростей точек этого тела или следствием которого является изменение взаимного положения частей данного тела.
Механика *Mechanics*	Наука о механическом движении и механическом взаимодействии материальных тел.
Сила *Force*	Векторная величина, являющаяся мерой механического действия одного материального тела на другое.
Инертность *Inertia*	Свойство материального тела, проявляющееся в сохранении движения, совершаемого им при отсутствии действующих сил, и в постепенном изменении этого движения с течением времени, когда на тело начинают действовать силы.
Масса *Mass*	Одна из основных характеристик любого материального объекта, определяющая его инертные и гравитационные свойства.
Материальная точка *Particle*	Точка, имеющая массу.
Механическая система Система *System*	Любая совокупность материальных точек.
Масса механической системы *Mass of system*	Сумма масс материальных точек, образующих систему
Абсолютно твердое тело Твердое тело *Rigid body*	Материальное тело, в котором расстояние между двумя любыми точками всегда остаются неизменным
Свободное твердое тело	Твердое тело, на перемещения которого не наложено никаких ограничений.

Несвободное твердое тело	Твердое тело, на перемещения которого наложены ограничения.
Система отсчета *Frame of reference*	Твердое тело, по отношению к которому с помощью какой-нибудь системы координат определяется положение других тел (или механических систем) в разные моменты времени.
Инерциальная система отсчета *Inertial reference frame*	Система отсчета, по отношению к которой изолированная материальная точка находится в покое или движется прямолинейно и равномерно.
Равновесие механической системы *Equilibrium of system*	Состояние механической системы, при котором все ее точки под действием приложенных сил остаются в покое по отношению к рассматриваемой системе отсчета.
Теоретическая механика Общая механика *Classical mechanics*	Раздел механики, в котором изучаются законы движения механических систем и общие свойства этих движений.
Кинематика *Kinematics*	Раздел механики, в котором изучаются движения материальных тел без учета их масс и действующих на них сил.
Основная система отсчета *Fixed frame of reference; fixed-axes system*	При рассмотрении движения тел одновременно по отношению к нескольким системам отсчета, - та из этих систем, относительно которой определяется движение всех остальных.
Подвижная система отсчета *Moving frame of reference*	Система отсчета, движущаяся по отношению к основной системе отсчета.
Элементарное перемещение точки *Elementary displacement of particle*	Перемещение точки из данного положения в положение, бесконечно близкое к нему
Траектория точки *Trajectory of particle*	Геометрическое место положений движущейся точки в рассматриваемой системе отсчета
Путь точки	Расстояние, пройденное точкой за рассматриваемый промежуток времени, измеряемое вдоль траектории в направлении движения точки

Скорость точки *Velocity of particle*	Кинематическая мера движения точки, равная производной по времени от радиус-вектора этой точки в рассматриваемой системе отсчета
Ускорение точки *Acceleration of particle*	Мера изменения скорости точки, равная производной по времени от скорости этой точки в рассматриваемой системе отсчета.
Естественные оси *Axes of a natural trihedron*	Прямоугольная система осей с началом в движущейся точке, направленных соответственно по касательной, главной нормали и бинормали к траектории этой точки.
Касательное ускорение точки *Tangential acceleration of particle*	Составляющая ускорения точки вдоль касательной к траектории при разложении ускорения по естественным осям.
Нормальное ускорение точки *Normal acceleration of particle*	Составляющая ускорения точки вдоль главной нормали к траектории при разложении ускорения по естественным осям.
Сложное движение точки или тела *Compound motion of particle or body*	Движение точки или тела, исследуемое одновременно в основной и подвижной (подвижных) системах отсчета.
Относительное движение точки или тела *Relative motion of particle or body*	Движение точки или тела по отношению к подвижной системе отсчета.
Абсолютное движение точки или тела *Absolute motion of particle or body*	Движение точки или тела по отношению к основной системе отсчета.
Переносное движение *Bulk motion*	Движение подвижной системы отсчета по отношению к основной системе отсчета.
Абсолютная скорость точки *Absolute velocity of particle*	Скорость точки в абсолютном движении.
Относительная скорость точки *Relative velocity of particle*	Скорость точки в относительном движении.

Переносная скорость точки *Bulk velocity; reference-frame velocity of moving spare*	При сложном движении точки – скорость той, неизменно связанной с подвижной системой отсчета точки пространства, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка.
Абсолютное ускорение точки *Absolute acceleration of particle*	Ускорение точки в абсолютном движении.
Относительное ускорение точки *Relative acceleration of particle*	Ускорение точки в относительном движении.
Переносное ускорение точки *Bulk acceleration; reference frame acceleration; acceleration of moving space*	При сложном движении точки – ускорение той, неизменно связанной с подвижной системой отсчета точки пространства, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка.
Кориолисово ускорение точки *Koriolis acceleration; complementary acceleration*	При сложном движении точки – составляющая его абсолютного ускорения, равная удвоенному векторному произведению угловой скорости (55) переносного движения на относительную скорость точки.
Поступательное движение твердого тела Поступательное движение *Translatory motion of rigid body*	Движение тела, при котором прямая, соединяющая две любые точки этого тела, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению.
Вращательное движение твердого тела *Motion of rigid body about fixed axis*	Движение тела, при котором все точки, лежащие на некоторой прямой, неизменно связанной с телом, остаются неподвижными в рассматриваемой системе отсчета.
Угол поворота твердого тела *Угол поворота* *Angle of rotation of rigid body; angle of rotation*	Угол между двумя последовательными положениями полуплоскости, неизменно связанной с телом и проходящей через его ось вращения.
Плоскопараллельное движение твердого тела Плоское движение твердого тела *Two-dimensional motion of rigid body*	Движение тела, при котором все его точки движутся в плоскостях, параллельных некоторой плоскости, неподвижной в рассматриваемой системе отсчета.

Центр конечного поворота *Centre of finite rotation*	Точка, поворотом вокруг которой плоскую фигуру можно переместить в ее плоскости из одного положения в другое.
Мгновенный центр скоростей *Instantaneous centre of zero velocity*	Точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.
Мгновенный центр вращения *Instantaneous centre of rotation*	Точка неподвижной плоскости, поворотом вокруг которой плоская фигура перемещается из данного положения в положение, бесконечно близкое к данному.
Мгновенный центр ускорений	Точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент времени равна нулю.
Движение твердого тела вокруг неподвижной точки *Motion of rigid body about fixed point; motion of body about fixed point*	Движение тела, при котором одна из его точек остается все время неподвижной в рассматриваемой системе отсчета.
Ось конечного поворота твердого тела *Axis of finite rotation of rigid body*	Прямая, поворотом вокруг которой тело, имеющее неподвижную точку, можно переместить из одного положения в другое.
Мгновенная ось вращения *Instantaneous axis of rotation*	Прямая, поворотом вокруг которой тело, имеющее неподвижную точку, перемещается из данного положения в положение, бесконечно близкое к данному.
Угловая скорость *Angular velocity*	Кинематическая мера вращательного движения тела, выражаемая вектором, равным по модулю отношению элементарного угла поворота тела к элементарному промежутку времени, на который совершается этот поворот, и направленным вдоль мгновенной оси вращения в ту сторону, откуда элементарный поворот тела виден происходящим против хода часовой стрелки.
Угловое ускорение *Angular acceleration*	Мера изменения угловой скорости тела, равная производной от угловой скорости по времени.
Линия действия силы *Line of action*	Прямая, вдоль которой направлен вектор, изображающий силу.

Система сил *System of forces*	Любая совокупность сил, действующих на механическую систему.
Система сходящихся сил *System of forces, whose fines of action intersect at point*	Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.
Система параллельных сил	Система сил, линии действия которых параллельны.
Плоская система сил *Plane system of forces*	Система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости.
Пространственная система сил	Система сил, линии действия которых могут быть расположены как угодно в пространстве.
Плечо, силы *Moment arm*	Расстояние от данной точки до линии действия силы.
Момент силы относительно точки *Moment of force about point*	Величина, равная векторному произведению радиуса-вектора, проведенного из данной точки в точку приложения силы, на эту силу.
Момент силы относительно оси *Moment of force about*	Величина, равная проекции на эту ось момента силы, взятого относительно любой точки.
Главный вектор системы сил *Resultant of system of forces*	Величина, равная сумме всех сил системы.
Главный момент системы сил относительно центра *Moment of system of forces about point*	Величина, равная сумме моментов всех сил системы относительно данного центра.
Внешняя сила *External force*	Сила, действующая на какую-либо материальную точку механической системы со стороны тел, не принадлежащих рассматриваемой механической системе.
Внутренняя сила *Internal force*	Сила, действующая на какую-либо материальную точку механической системы со стороны других материальных точек, принадлежащих рассматриваемой механической системе.
Поверхностные силы *Surface forces*	Силы, действующие на точки поверхности материального тела.

Массовые силы *Body forces; bulk forces*	Силы, действующие на каждую частицу материального тела и пропорциональные массам этих частиц.
Пара сил *Couple*	Система двух параллельных сил, равных по модулю и направленных в противоположные стороны.
Плечо пары *Arm of the couple*	Расстояние между линиями действия сил пары.
Момент пары *Moment of couple; torque of couple*	Мера механического действия пары, равная моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы.
Связи *Constraints*	Ограничения, налагаемые из положения и скорости точек механической системы, которые должны выполняться при любых, действующих на систему силах.
Реакции связей *Reaction; constraint force*	Силы, действующие на материальные точки механической системы со стороны материальных тел, осуществляющих связи, наложенные на эту систему.
Статика *Statics*	Раздел механики, в котором изучаются условия равновесия механических систем под действием сил.
Статически определимая механическая система	Механическая система, у которой реакции всех наложенных связей могут быть определены из условий равновесия, получаемых в статике.
Уравновешенная система сил *Balanced system of force*	Система сил, которая будучи приложенной к свободному твердому телу, находящемуся в равновесии, не выводит его из этого состояния.
Уравновешивающая система сил *Balancing force; equilibrant force*	Система сил, которая вместе с заданной другой системой сил составляет уравновешенную систему сил.
Эквивалентные системы сил *Equivalent system of forces*	Две или несколько систем сил, имеющие одну и ту же уравновешивающую систему сил.
Равнодействующая системы сил Равнодействующая *Resultant of system of forces*	Сила, эквивалентная данной системе сил

Динамический винт *Wrench*	Совокупность силы и пары сил, лежащие в плоскости перпендикулярной к этой силе.
Инварианты системы сил	Величины, остающиеся неизменными при преобразовании данной системы сил в любую ей эквивалентную, равную главному вектору этой системы сил и проекции ее главного момента относительно любого центра на направление главного вектора.
Центр параллельных сил *Centre of system of parallel forces*	Геометрическая точка, через которую проходит линия действия равнодействующей системы параллельных сил при любом повороте этих сил вокруг точек их приложения, оставляющем силы параллельными друг другу и сохраняющем взаимную ориентацию их направлений.
Центр тяжести твердого тела Центр тяжести *Centre of gravity*	Центр параллельных сил тяжести, действующих на все частицы тела.
Динамика *Dynamics*	Раздел механики, в котором рассматриваются движения механических систем под действием сил.
Центр масс механической системы *Centre of mass; mass centre*	Геометрическая точка, для которой сумма произведений масс всех материальных точек, образующих механическую систему, на их радиус-векторы, проведенные из этой точки, равна нулю.
Момент инерции механической системы относительно оси Осевой момент инерции. *Moment of inertia of system about axis; moment of inertia of system about line*	Величина, равная сумме произведений масс всех материальных точек, образующих механическую систему, на квадраты их расстояний от данной оси.
Радиус инерции системы относительно оси *Radius of gyration of system about axis; radius of gyration of system about line*	Величина, квадрат которой равен отношению момента инерции механической системы относительно данной оси и к массе этой системы.

Центробежный момент инерции *Product of inertia*	Величина, равная сумме произведений масс всех материальных точек, образующих механическую систему, на две их координаты в данной прямоугольной системе координат.
Количество движения точки. Импульс *Momentum of particle*	Векторная мера механического движения, равная произведению массы материальной точки на ее скорость
Количество движения системы *Momentum of system*	Величина, равная сумме количества движения всех материальных точек, образующих механическую систему.
Момент количества движения точки относительно центра Кинетический момент точки относительно центра. *Angular momentum of particle about point; momentum of particle about point*	Величина, равная векторному произведению радиус-вектора материальной точки, проведенного из этого центра, на количество движения.
Момент количества движения точки относительно оси *Moment of momentum of particle about line; moment of moment of particle about axis; angular momentum of particle about axis*	Величина, равная проекции на эту ось момента количества движения точки относительно любого выбранного из данной оси центра
Главный момент количества движения системы относительно центра Кинетический момент системы относительно центра. *Moment of momentum of system about point; angular momentum of system about point*	Величина, равная сумме моментов количеств движения всех точек механической системы относительно этого центра.
Главный момент количеств движения системы относительно оси Кинетический момент системы относительно оси. *Moment of momentum of system about line; moment of momentum of system about axis; angular momentum of system about axis*	Величина, равная сумме моментов количеств движения всех точек механической системы относительно этой оси.

Кинетическая энергия точки *Kinetic energy of particle*	Скалярная мера механического движения, равная половине произведения массы материальной точки на квадрат ее скорости.
Кинетическая энергия системы *Kinetic energy of system*	Величина, равная сумме кинетических энергий всех точек механической системы.
Элементарный импульс силы	Векторная мера действия силы, равная произведению силы на элементарный промежуток времени ее действия.
Импульс силы за конечный промежуток времени *Whole force*	Величина, равная определенному интегралу от элементарного импульса силы, где пределами интеграла являются моменты начала и конца данного промежутка времени.
Элементарная работа силы *Elementary work of force*	Скалярная мера действия силы, равная скалярному произведению силы на элементарное перемещение точки ее приложения.
Работа силы на конечном перемещении *Work of force*	Величина, равная криволинейному интегралу от элементарной работы силы, действующей на данную материальную точку, взятому вдоль дуги кривой, описанной точкой при этом перемещении.
Мощность силы. Мощность. *Power of force; activity of force*	Величина, равная скалярному произведению силы на скорость точки ее приложения
Сила тяжести *Gravity force*	Сила, действующая на материальную точку, находящуюся вблизи земной поверхности, равная произведению массы этой точки на ускорение ее свободного падения в вакууме.
Вес тела *Weight of body*	Сумма модулей сил тяжести, действующих на частицы этого тела.
Потенциальная энергия точки *Potential energy of particle*	Величина, равная работе, которую произведет сила, действующая на материальную точку, находящуюся в потенциальном силовом поле, при перемещении этой точки из данного положения в положение, для которого значение потенциальной энергии условно считается равным нулю.

Потенциальная энергия системы *Potential energy of system*	Величина, равная сумме потенциальных энергий всех точек механической системы.
Полная механическая энергия точки. *Total energy of particle*	Величина, равная сумме кинетической и потенциальной энергий материальной точки.
Полная механическая энергия системы *Total energy of system*	Величина, равная сумме кинетической и потенциальной энергий механической системы.
Сила инерции *Inertia force*	Величина, равная произведению массы материальной точки на ее ускорение и направленная противоположно этому ускорению.
Переносная сила инерции *Force of moving space*	При рассмотрении движения материальной точки и инерциальной системе отсчета – величина, равная произведению массы точки на ее переносное ускорение и направленная противоположно ускорению.
Кориолисова сила инерции *Compound centrifugal force; Coriolis force*	При рассмотрении движения материальной точки в неинерциальной системе отсчета – величина, равная произведению массы точки на ее кориолисово ускорение и направленная противоположно этому ускорению.
Уравнения связей	Уравнения, которым в силу наложенных связей должны удовлетворять координаты точек механической системы и их скорости (первые производные от координат по времени).
Геометрические связи *Geometric constraints*	Связи, уравнения которых содержат только координаты точек механической системы (и, может быть, время).
Дифференциальные связи	Связи, уравнения которых, кроме координат точек механической системы, содержат еще первые производные от этих координат по времени (и, может быть, время).
Голономные связи *Holonomic constraints*	Геометрические связи и дифференциальные связи, уравнения которых могут быть проинтегрированы.

Голономная система *Holonomic system*	Механическая система, на которую наложены только голономные связи.
Стационарные связи *Scleronomic constraints*	Связи, в уравнения которых время явно не входит.
Нестационарные связи *Rheonomic constraints*	Связи, в уравнения которых время входит явно.
Возможное перемещение точки Виртуальное перемещение точки *Virtual displacement of particle*	Любое допускаемое наложенными связями перемещения материальной точки из положения, занимаемого ею в данный момент времени в бесконечно близкое положение, которое она может занимать в тот же момент времени, выражаемое изохронной вариацией радиус-вектора этой точки.
Возможное перемещение системы *Virtual displacement of system*	Любая совокупность возможных перемещений точек данной механической системы, допускаемая всеми наложенными на нее связями.
Удерживающие связи	Связи, при наличии которых для любого возможного перемещения точки механической системы противоположное ему перемещение также является возможным.
Неудерживающие связи	Связи, при которых точки механической системы имеют возможные перемещения, противоположные которым не являются возможными.
Идеальные связи *Ideal constraints*	Связи, для которых сумма элементарных работ их реакций равна нулю на любом возможном перемещении механической системы (при удерживающих связях) или на любом возможном перемещении, противоположное которому тоже является возможным (при неудерживающих связях).
Число степеней свободы *Number of degrees of freedom*	Число независимых между собой возможных перемещений механической системы.
Обобщенные координаты *Lagrangian coordinates; generalized coordinates*	Независимые между собой параметры, однозначно определяющие положение механической системы.

Обобщенная скорость *Generalized velocity*	Производная по времени от обобщенной координаты.
Возможная работа *Virtual work*	Работа силы на возможном перемещении точки ее приложения.
Обобщенная сила *Generalized force*	Величина, равная коэффициенту при вариации данной обобщенной координаты в выражении возможной работы сил, действующих на механическую систему.
Удар *Impact*	Механическое взаимодействие материальных тел, приводящее к конечному изменению скоростей их точек на бесконечно малый промежуток времени.
Ударная сила *Impulsive force*	Сила, импульс которой за время удара является конечной величиной.
Ударный импульс *Impulse*	Импульс ударной силы за время удара.
Центральный удар *Centrical impact*	Удар, при котором линия действия ударного импульса, приложенного к ударяемому телу, проходит через его центр масс.
Коэффициент восстановления при ударе *Coefficient of restitution; coefficient of elasticity*	При ударе материальной точки о неподвижную плоскость – величина, равная модулю отношения проекций на нормаль к плоскости скорости точки в конце и начале удара.
Абсолютно упругий удар *Impact of inelastic body*	Удар, при котором коэффициент восстановления равен единице.
Абсолютно неупругий удар *Impact of inelastic body*	Удар, при котором коэффициент восстановления равен нулю.
Центр удара *Centro of percussion*	Точка абсолютно твердого тела, имеющего неподвижную ось вращения, обладающая тем свойством, что приложенный к телу ударный импульс, линия действия которого проходит через эту точку и который направлен перпендикулярно к плоскости, проведенной через ось вращения и центр масс тела, не вызывает ударных реакций в точке закрепления оси.

ЛИТЕРАТУРА

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

1. Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников А.Л. Курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1983. – 575 с.
2. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 1984. – Ч. 1: Статика. Кинематика. – 343 с.
3. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 1984. – Ч. 2: Динамика. – 423 с.
4. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 2002. – 416 с.

ПРАКТИЧЕСКИЕ И ДОМАШНИЕ ЗАНЯТИЯ

5. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1986. – 447 с.
6. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1984. – Т. 1: Статика и кинематика. – 512 с.
7. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1985. Т. 2: Динамика. – 559 с.
8. Сборник задач по теоретической механике с решениями: Статика. Кинематика. В 2-х ч. / А. Акимов, О.Н. Скляр, А.А. Федута, А.В. Чигарев. – Мн.: УП «Технопринт», 2001. – Ч. 1. – 364 с.
9. Сборник задач по теоретической механике с решениями: Статика. Кинематика. В 2-х ч. / В.А. Акимов, О.Н. Скляр, А.А. Федута, А.В. Чигарев. – Мн.: УП «Технопринт», – 2001. Ч. 2. – 575 с.
10. Локтионов А.В., Крыгина Л.Г. Теоретическая механика. Динамика. – Витебск: ВГТУ, 2004. – 170 с.

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

11. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / А.А. Яблонский, С.С. Норейко, С.А. Вольфсон и др. – М.: Высш. шк., 1985. – 367 с.

Контрольные работы студентов-заочников

12. Теоретическая механика: Методические указания и контрольные задания. / Под ред. С.М. Тарга. – М.: Высш. шк., 1989. – 111с.

КУРСОВАЯ РАБОТА

13. Теоретическая механика. Задания и методические указания к выполнению курсовой работы. / Л.Н. Пантелеенко, Л.Н. Макаренко. – Новополоцк: УО «ПГУ», 2001. – 74 с.