

ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
Учебно-методическое пособие

Введение

Произвольное движение свободного твердого тела может быть представлено как совокупность поступательного движения со скоростью выбранного полюса и вращательного движения тела вокруг полюса O как вокруг неподвижной точки. Если, например, за полюс взят центр масс тела M , то уравнения движения тела можно представить в виде

$$m\overline{W}_M = \overline{R}^{\text{внешн}}, \quad (1^\circ)$$

$$\frac{d\overline{K}_M}{dt} = \overline{M}_M^{\text{внешн}}, \quad (2^\circ)$$

где $\overline{W}_M$ – ускорение центра масс тела, m – его масса, $\overline{K}_M$ – момент импульса тела относительно его центра масс, а $\overline{R}^{\text{внешн}}$ и $\overline{M}_M^{\text{внешн}}$ – главный вектор и главный момент внешних сил относительно центра масс соответственно.

Не останавливаясь на поступательном движении, сосредоточим внимание на движении тела вокруг неподвижной точки.

§ 1. Геометрия масс тела

При решении задач динамики твердого тела часто возникает необходимость подсчета момента инерции тела относительно произвольной оси u .

По определению моментом инерции J_u тела относительно оси u называют выражение

$$J_u = \sum m_i r_i^2, \quad (1.1)$$

где m_i – масса i -й точки тела, r_i – расстояние этой точки от оси u , суммирование производится по всем точкам тела.

Момент инерции характеризует распределение массы тела относительно оси.

С помощью декартовой системы координат $OXYZ$, начало которой выбрано в точке O оси u с направляющими косинусами $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$, выражение момента инерции представляется в виде

$$\begin{aligned} J_u = & J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - \\ & - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - \\ & - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где

$$J_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad J_{xy} = \sum m_i x_i y_i,$$

$$J_y = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2), \quad J_{xz} = \sum m_i x_i z_i,$$

$$J_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2), \quad J_{yz} = \sum m_i y_i z_i$$

осевые и центробежные моменты инерции тела. Используя векторно-матричную символику для момента инерции, получим

$$\begin{aligned} J_u = & \left\| \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \right\| \begin{vmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{vmatrix} \times \\ & \times \begin{vmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{vmatrix} = \bar{e}^T J \bar{e}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\bar{e}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ – орт оси u , заданный в указанной системе координат своими направляющими косинусами, J – симметрическая матрица

$$J = \begin{vmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{vmatrix} \text{ определяет тензор второго ранга.}$$

Его называют тензором инерции тела.

Изменяя направление оси u и, следовательно, изменяя направляющие косинусы в выбранной системе координат, по известным компонентам тензора инерции J можно найти момент инерции для любой оси, проходящей через точку O .

Понятие момента инерции допускает геометрическую интерпретацию распределения моментов инерции относительно осей пучка с центром O .

Возьмем на оси u точку $M(x, y, z)$ на расстоянии, равном $K/\sqrt{J_u}$ от точки O (K – размерный коэффициент).

$$\text{Тогда} \quad x = \left(\frac{K}{\sqrt{J_u}} \right) \cos \alpha, \quad y = \left(\frac{K}{\sqrt{J_u}} \right) \cos \beta,$$

$$z = \left(\frac{K}{\sqrt{J_u}} \right) \cos \gamma. \text{ Подставляя полученные из этих равенств}$$

значения $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ в выражение (1.2), получим уравнение поверхности 2-го порядка

$$\begin{aligned} J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - \\ - 2J_{xy} xy - 2J_{xz} xz - J_{yz} yz = K^2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Эта поверхность является геометрическим местом точек M при всевозможных направлениях оси u . Поскольку момент инерции относительно произвольной оси величина, отличная от нуля, то поверхность (1.4) не имеет точек на бесконечности и, значит, является эллипсоидом. Этот

эллипсоид называют эллипсоидом инерции. Каждой точке тела соответствует свой эллипсоид инерции.

Выбор осей симметрии эллипсоида инерции в качестве координатных осей позволяет привести уравнение эллипсоида инерции (1.4) к канонической форме. Оси симметрии эллипсоида инерции, построенного в некоторой точке, называются главными осями инерции для этой точки.

В осях $O\xi\eta\zeta$, главных для точки O , выражение момента инерции J_u приобретает вид

$$J_u = J_\xi \cos^2 \alpha + J_\eta \cos^2 \beta + J_\zeta \cos^2 \gamma. \quad (1.5)$$

Центробежные моменты инерции для главных осей обращаются в нуль, т.е. если ось $O\xi$ главная, то $J_{\xi\eta} = J_{\xi\zeta} = 0$. Главные оси инерции, построенные для центра масс тела, называются главными центральными осями инерции.

Таким образом, распределение масс тела характеризуется связанными между собой понятиями тензора инерции тела и эллипсоида инерции.

В главных осях тензор инерции имеет диагональный вид.

Как же найти в конкретном случае главные оси? Так как направлениям главных осей инерции соответствуют оси симметрии эллипсоида инерции, а значит, и стационарные значения моментов инерции, то задача нахождения направлений главных осей сводится к рассмотрению необходимого условия экстремума выражения (1.2) при условии

$$\begin{aligned} f(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \\ = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 1 = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

или, что то же, к рассмотрению необходимого условия экстремума функции

$$\begin{aligned} \phi(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \\ = J_u(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) - \lambda f(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma), \end{aligned} \quad (1.7)$$

где λ – неопределенный множитель (метод Лагранжа).

Условие стационарности функции

$$\phi(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \text{ дает } \frac{\partial \phi}{\partial \chi_i} = \frac{\partial J_u}{\partial \chi_i} - \lambda \frac{\partial f}{\partial \chi_i} = 0 \quad (i = \overline{1,3}),$$

где $\chi_1 = \cos \alpha$, $\chi_2 = \cos \beta$, $\chi_3 = \cos \gamma$, или в развернутой форме

$$\begin{aligned} (J_x - \lambda) \cos \alpha - J_{xy} \cos \beta - J_{xz} \cos \gamma &= 0 \\ -J_{xy} \cos \alpha + (J_y - \lambda) \cos \beta - J_{yz} \cos \gamma &= 0 \\ -J_{xz} \cos \alpha - J_{yz} \cos \beta + (J_z - \lambda) \cos \gamma &= 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Однородная система линейных уравнений (1.8) относительно $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ имеет нетривиальное решение, если детерминант ее равен нулю:

$$\det \|J - \lambda E\| = 0. \quad (1.9)$$

Левая часть равенства (1.9) представляет собой полином третьей степени относительно λ . Этот полином имеет три действительных корня, т.к. тензор J симметрический с действительными компонентами. Кроме того, умножая каждое из равенств (1.8) соответственно на χ_1 , χ_2 , χ_3 и складывая, получим

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial J_u}{\partial \chi_i} \chi_i - 2\lambda = 0. \quad (1.10)$$

По теореме Эйлера об однородных функциях из (1.10) имеем

$$J_u - \lambda = 0,$$

т.е. значения множителя λ_i совпадают со значениями момента инерции J_i ($i = \overline{1,3}$) относительно главных осей эллипсоида инерции тела в выбранной точке.

Если корни уравнения (1.9) различны, то, подставляя значения λ в систему (1.8), найдем для каждого λ_i свой набор $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$, который определяет соответствующее направление главной оси в выбранной системе координат $OXYZ$.

Если уравнение (1.9) имеет два равных корня, то два главных момента инерции равны между собой, и эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения.

В случае равенства всех корней уравнения (1.9) эллипсоид инерции превращается в сферу.

Главные оси эллипсоида инерции могут быть найдены и из условия коллинеарности вектора нормали к эллипсоиду инерции с радиусом-вектором $\bar{R}$ точки эллипсоида, лежащей на главной оси: $\text{grad } J(x, y, z) = \lambda \bar{R}$. Вычисления в этом случае идентичны.

Легко убедиться, что наличие симметрии тела облегчает задачу подсчета момента инерции.

Если тело имеет ось материальной симметрии, то эта ось является главной центральной осью.

Если тело имеет плоскость материальной симметрии, то для любой точки этой плоскости одна из главных осей совпадает с перпендикуляром, восстановленным к плоскости симметрии в данной точке.

Задача 1.1. В системе координат $OXYZ$, оси которой параллельны главным центральным осям $M\xi\eta\zeta$, построить тензор инерции твердого тела для точки O , имеющей в системе $M\xi\eta\zeta$ координаты $\xi_0 = a, \eta_0 = b, \zeta_0 = c$. Главные центральные моменты инерции тела равны A, B, C соответственно, масса тела равна m .

Решение. Получим сначала осевые моменты, проводя вычисления, например, для момента J_x . Моменты инерции J_y и J_z получаются аналогично.

Для J_x имеем $J_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2)$, но

$$x_i = \xi_i - a, \quad y_i = \eta_i - b, \quad z_i = \zeta_i - c$$

и поэтому

$$\begin{aligned} J_x = \sum m_i (\eta_i^2 + \zeta_i^2) - 2b \sum m_i \eta_i - \\ - 2c \sum m_i \zeta_i + m(b^2 + c^2). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Так как по определению центра масс $\sum m_i (\eta_i^2 + \zeta_i^2) = A$,

$$\sum m_i \eta_i = m \eta_M = 0, \quad \sum m_i \zeta_i = m \zeta_M = 0, \quad (1.12)$$

то

$$J_x = A + m(b^2 + c^2). \quad (1.13)$$

Аналогично

$$J_y = B + m(a^2 + c^2), \quad J_z = C + m(a^2 + b^2). \quad (1.14)$$

Рассмотрим центробежные моменты инерции:

$$\begin{aligned} J_{xy} = \sum m_i x_i y_i = \sum m_i (\xi_i - a)(\eta_i - b) = \\ = \sum m_i \xi_i \eta_i - a \sum m_i \eta_i - b \sum m_i \xi_i + mab. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Так как $\sum m_i \xi_i \eta_i = J_{\xi\eta}$, а оси $M\xi\eta\zeta$ главные центральные,

то $J_{\xi\eta} = 0$. Второй и третий члены в выражении (1.15) также обращаются в нуль по (1.12). Тогда для центробежного момента J_{xy} имеем

$$J_{xy} = mab. \quad (1.16)$$

$$\text{Аналогично} \quad J_{xz} = mac, \quad J_{yz} = mbc. \quad (1.17)$$

И тензор инерции для точки O в осях $OXYZ$, параллельных главным центральным осям, приобретает вид

$$J = \begin{vmatrix} A + m(b^2 + c^2) & -mab & -mac \\ -mab & B + m(a^2 + c^2) & -mbc \\ -mac & -mbc & C + m(a^2 + b^2) \end{vmatrix}. \quad (1.18)$$

Анализ компонентов тензора инерции позволяет сделать следующие выводы:

1. Момент инерции тела относительно оси равен моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр инерции тела, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями. (Теорема Гюйгенса–Штейнера для частного случая, когда ось параллельна главной центральной оси).

2. Главная центральная ось инерции остается главной для любой своей точки.

3. Главные оси инерции для точек, лежащих на главной центральной оси, параллельны главным центральным осям инерции.

4. Ось, перпендикулярная плоскости, содержащей две главные центральные оси, является главной для точки пересечения этой оси с плоскостью.

5. Для точек пластины пренебрежимо малой толщины моменты инерции связаны равенством $J_\xi + J_\eta = J_\zeta$, если ось $O\zeta$ перпендикулярна плоскости пластины. (Для пространственной фигуры сумма момента инерции относительно двух осей инерции всегда больше момента инерции относительно третьей, т.е. $J_\xi + J_\eta > J_\zeta$).

Задача 1.2. Для твердого тела массы m известны направления главных центральных осей $M\xi\eta\zeta$ и главные

центральные моменты инерции A, B, C . Построить главные оси инерции тела для точки O с координатами $\xi_o = a, \eta_o = b, \zeta_o = 0$.

Решение. В точке O построим систему координат $OXYZ$ с осями, параллельными главным центральным осям. Так как точка O лежит в плоскости, содержащей две главные центральные оси, то по выводу 4 из задачи 1.1 ось OZ – главная для точки O . Значит нужно найти только две главные оси.

Пусть некоторая ось u лежит в плоскости OXY , проходит через точку O и образует с осью OX угол α . Тогда направляющие косинусы оси u в системе $OXYZ$ будут равны соответственно $\cos \alpha, \sin \alpha, 0$. Момент инерции тела относительно оси u приобретает вид

$$J_u = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - 2J_{xy} \sin \alpha \cos \alpha. \quad (1.19)$$

Так как в данном случае

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

независимо от значения угла α , то для отыскания направления главной оси нет необходимости рассматривать задачу на условный экстремум, и направление главной оси можно найти из условия стационарности функции J_u :

$$\frac{dJ_u}{d\alpha} = 0. \quad (1.20)$$

Что дает

$$-J_x \sin 2\alpha + J_y \sin 2\alpha - 2J_{xy} \cos 2\alpha = 0.$$

Откуда

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}.$$

Но из задачи 1.1 следует

$$J_x = A + mb^2, \quad J_y = B + ma^2, \quad J_{xy} = tab.$$

И, значит,

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2mab}{B - A + m(\alpha^2 - b^2)}. \quad (1.21)$$

Таким образом, повернув ось OX вокруг точки O на угол α , определяемый равенством (1.21), мы совместим ее с главной осью. Момент инерции относительно построенной главной оси может быть найден в результате подстановки α из равенства (1.21) в выражение (1.19).

§ 2. Подсчет основных динамических величин для твердого тела с одной неподвижной точкой

2.1. Кинетический момент. В каждый момент времени твердое тело с неподвижной точкой O имеет такое же распределение скоростей $\bar{V}_i$ точек, как при вращении вокруг неподвижной оси, т.е. $\bar{V}_i = \bar{\omega} \times \bar{r}_i$, где $\bar{\omega}$ – вектор мгновенной угловой скорости, $\bar{r}_i$ – радиус-вектор i -й точки, проведенный из неподвижной точки. Поэтому кинетический момент тела относительно точки O будет

$$\bar{K}_O = \sum m_i \bar{r}_i \times \bar{V}_i = \sum m_i \bar{r}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_i)$$

или с помощью тензора инерции J

$$\bar{K}_O = J \bar{\omega}.$$

Если тензор инерции J записан в системе осей, главных для точки O , то он имеет диагональный вид. Вектор угловой скорости в этих осях $\bar{\omega} = p\bar{i} + q\bar{j} + r\bar{k}$, и вектор кинетического момента

$$\bar{K}_O = A p \bar{i} + B q \bar{j} + C r \bar{k} \quad (2.1)$$

(A, B, C – осевые моменты инерции). Векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{K}_O$, вообще говоря, не коллинеарны. Они, очевидно, совпадают

по направлению лишь в том случае, если ось вращения совпадает с главной осью. При этом $\bar{K}_O = J\bar{\omega} = \lambda\bar{\omega}$, где λ является коэффициентом пропорциональности. И, значит, $\|J - \lambda E\|\bar{\omega} = 0$. Условие нетривиальности решения этого уравнения: $\det\|J_{ik} - \lambda\delta_{ik}\| = 0$. Отсюда следует, что собственные векторы матрицы J определяют направления главных осей инерции, а собственные значения этой матрицы – моменты инерции относительно главных осей.

2.2. Кинетическая энергия. Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i V_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i h_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} J_O^\omega \omega^2. \quad (2.2)$$

Здесь $J_O^\omega = \sum m_i h_i^2$ – момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения, h_i – расстояние i -й точки от этой оси.

По теореме Гюйгенса–Штейнера $J_O^\omega = J_M^\omega + md^2$ (d – расстояние между мгновенной осью вращения и осью, проходящей через центр масс параллельно мгновенной, J_M^ω – момент инерции тела относительно последней).

Выражение кинетической энергии можно представить в форме

$$T = \frac{1}{2} md^2 \omega^2 + \frac{1}{2} J_M^\omega \omega^2 = \frac{1}{2} m V_M^2 + \frac{1}{2} J_M^\omega \omega^2, \quad (2.2)$$

где V_M – скорость центра масс тела. Формула (2.2) представляет собой аналитическое выражение теоремы Кенига для твердого тела. Обратим внимание, что кинетическая энергия относительного движения

$T' = \frac{1}{2} J_M^\omega \omega^2$ есть кинетическая энергия вращательного

движения вокруг оси, проходящей через центр масс параллельно мгновенной.

Выражение (2.2) кинетической энергии в осях $O\xi\eta\zeta$, главных для неподвижной точки, записывается в виде

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) \quad (2.3)$$

Аналогично формула (2.2) в главных центральных осях может быть представлена так:

$$T = \frac{1}{2}mV_M^2 + \frac{1}{2}(A_M p_M^2 + B_M q_M^2 + C_M r_M^2). \quad (2.4)$$

Задача 2.1. Однородный круговой конус массы m с высотой h и углом при вершине 60° катится без проскальзывания по неподвижному конусу с углом при вершине 120° (см. рис. 2.1). Найти величину вектора кинетического момента $\bar{K}_O$ и угол β , который образует этот вектор с вектором $\bar{\omega}$. Подсчитать кинетическую энергию T конуса, если центр его основания движется с постоянной по величине скоростью V .

Решение. Величину вектора $\bar{K}_O$ найдем с помощью равенства

$$K_O = \sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2}. \quad (2.5)$$

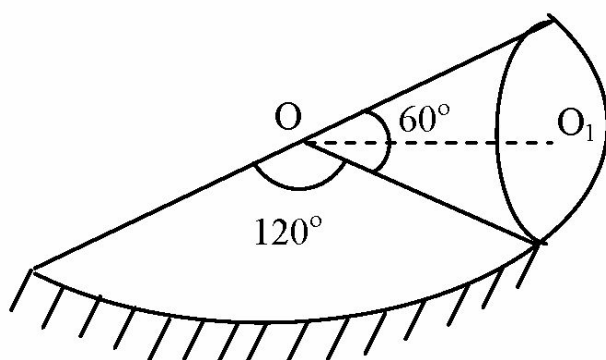


Рис. 2.1

Так как центральный эллипсоид инерции – эллипсоид вращения, а точка O лежит на главной центральной

оси, то главные оси для этой точки получаются параллельным переносом главных

центральных осей $M\xi_M\eta_M\zeta_M$. Центр масс однородного кругового конуса лежит на расстоянии $\frac{3}{4}h$ от его вершины,

т.е. $OM = \frac{3}{4}h$. Главные центральные моменты инерции конуса равны

$$A_M = B_M = \frac{3}{80}m(4R^2 + h^2), \quad C_M = \frac{3}{10}mR^2, \quad \text{где } R = \frac{h}{\sqrt{3}} -$$

радиус основания конуса. Таким образом,

$$A = B = A_M + mOM^2 = \frac{13}{20}mh^2, \quad C = C_M = \frac{1}{10}mh^2. \quad \text{Вектор}$$

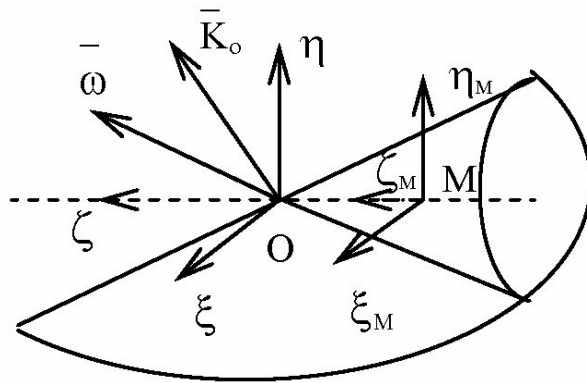


Рис. 2.2

угловой скорости $\bar{\omega}$ направлен по мгновенной оси вращения, совпадающей с линией касания подвижного и неподвижного конусов. Центр основания конуса движется со скоростью V и находится от

мгновенной оси на расстоянии $\frac{h}{2}$, поэтому угловая скорость

$$\omega = \frac{V}{h/2} = \frac{2V}{h}. \quad \text{Проекции вектора } \bar{\omega} \text{ на оси системы } O\xi\eta\zeta :$$

$$p = 0, \quad q = \frac{V}{h}, \quad r = \sqrt{3}\frac{V}{h}. \quad \text{Подставляя в (2.5) найденные}$$

значения моментов инерции и компонентов вектора угловой

скорости, получим $K_O = \frac{\sqrt{181}}{20}mVh$. Вектор $\bar{K}_O$ образует с

осью $O\xi$ угол $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{Bq}{Cr} = \operatorname{arctg} \frac{13}{2\sqrt{3}}$. Откуда

$$\beta = |30^\circ - \alpha|.$$

Для подсчета T воспользуемся формулой (2.3). Используя найденные при подсчете K_O значения A, B, C и p, q, r , получим

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{13}{20} m h^2 \frac{V^2}{h^2} + \frac{1}{10} m h^2 \frac{3V^2}{h^2} \right) = \frac{19}{40} m V^2.$$

§ 3. Уравнения движения тела с неподвижной точкой. Случай Эйлера и случай Лагранжа

3.1. Уравнения движения. Твердое тело с одной неподвижной точкой имеет три степени свободы.

Часто в качестве координат, однозначно задающих положение твердого тела с неподвижной точкой, берут углы

Эйлера: ψ – угол прецессии, θ – угол нутации, φ – угол собственного вращения (см. рис. 3.1). Эти углы и их производные связаны с проекциями вектора угловой скорости $\bar{\omega}$ на главные оси кинематическими соотношениями Эйлера:

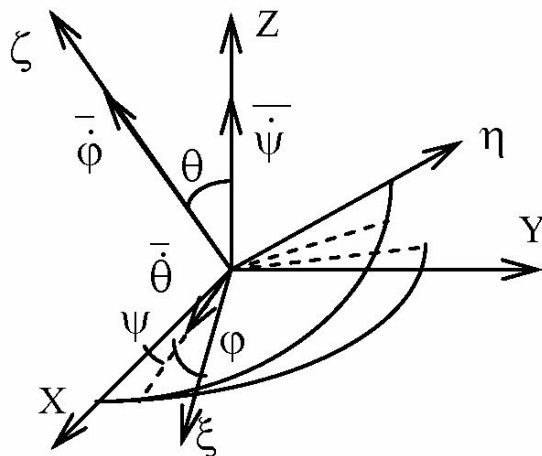


Рис. 3.1

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Уравнения динамики тела с одной неподвижной точкой получим с помощью теоремы об изменении кинетического момента

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{M}_O. \quad (3.2)$$

Запишем вектор $\bar{K}_O$ в проекциях на главные оси, построенные для неподвижной точки

$$\bar{K}_O = A p \bar{i} + B q \bar{j} + C r \bar{k}.$$

Так как система главных осей подвижная и жестко связана с телом, то $\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{i}$, $\frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{j}$, $\frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{k}$.

Обозначим $\frac{d'\bar{K}_O}{dt} = A \dot{p} \bar{i} + B \dot{q} \bar{j} + C \dot{r} \bar{k}$. Тогда теорему об изменении кинетического момента можно записать в форме

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \frac{d'\bar{K}_O}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_O = \bar{M}_O. \quad (3.3)$$

Здесь $\frac{d'\bar{K}_O}{dt}$ – изменение вектора $\bar{K}_O$ относительно выбранной подвижной системы координат (иначе относительная скорость конца вектора $\bar{K}_O$), а $\bar{\omega} \times \bar{K}_O$ – изменение вектора $\bar{K}_O$ за счет движения подвижной системы координат (переносная скорость конца вектора $\bar{K}_O$). Таким образом, движение конца вектора $\bar{K}_O$ рассматривается как сложное: вместе с подвижной системой координат, жестко связанной с телом и относительно нее.

Проецируя равенство (3.3) на главные оси, построенные для неподвижной точки, получаем динамические уравнения Эйлера:

$$A \dot{p} + (C - B)qr = M_\xi$$

$$\begin{aligned} B\dot{q} + (A - C)pr &= M_\eta \\ C\dot{r} + (B - A)qp &= M_\zeta. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Уравнения (3.4) совместно с уравнениями (3.1) описывают движение тела с неподвижной точкой и записываются в подвижных осях, жестко связанных с телом, главных для неподвижной точки.

Общее решение системы (3.4) и (3.1) позволяет в каждый момент найти значения углов Эйлера, однозначно задающих положение тела с неподвижной точкой, т.е.

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(t, C_1, \dots, C_6), \\ \theta &= \theta(t, C_1, \dots, C_6), \\ \varphi &= \varphi(t, C_1, \dots, C_6). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Известно, что лишь в трех случаях при произвольных начальных условиях интегрирование системы уравнений Эйлера может быть доведено до квадратур. Это случаи Эйлера, Лагранжа и Ковалевской. Здесь будет рассмотрено решение задач в случаях Эйлера и Лагранжа.

3.2. Случай Эйлера. Этот случай соответствует движению по инерции, когда $\overline{M}_O = 0$.

Тогда при произвольной форме тела сохраняется вектор кинетического момента $\overline{K}_O$ и кинетическая энергия T . Интегрирование системы динамических уравнений Эйлера может быть доведено до квадратур, которые получаются в виде эллиптических интегралов. При некоторых начальных условиях эти квадратуры вырождаются в обыкновенные интегралы, и тогда p, q, r являются гиперболическими функциями времени.

Задача решена до конца, если найдена зависимость эйлеровых углов от времени.

Так как $\overline{K}_O = \text{const}$, возьмем неподвижную ось OZ вдоль вектора кинетического момента. Тогда

$$\begin{aligned}
Ap &= K_o \sin \theta \sin \varphi, \\
Bq &= K_o \sin \theta \cos \varphi, \\
Cr &= K_o \cos \theta.
\end{aligned}
\tag{3.6}$$

Из (3.6) находим

$$\cos \theta = \frac{Cr(t)}{K_o}, \tag{3.7}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Ap(t)}{Bq(t)}. \tag{3.8}$$

Чтобы найти $\dot{\psi}$, умножим первое из уравнений (3.1) на $\sin \varphi$, а второе – на $\cos \varphi$ и сложим

$$p \sin \varphi + q \cos \varphi = \dot{\psi} \sin \theta.$$

Откуда

$$\dot{\psi} = \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \theta}.$$

Используя (3.7) и (3.8), найдем выражения

$$\sin \theta = \frac{1}{K_o} \sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2},$$

$$\sin \varphi = \frac{Ap}{\sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{Bq}{\sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2}}.$$

Тогда

$$\dot{\psi} = \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2 p^2 + B^2 q^2} K_o \tag{3.9}$$

и

$$\psi = \psi_o + K_o \int_0^t \frac{Ap^2(t) + Bq^2(t)}{A^2 p^2(t) + B^2 q^2(t)} dt. \tag{3.10}$$

Таким образом, углы Эйлера θ , φ и ψ могут быть найдены из равенств (3.7), (3.8) и (3.10), если определены $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$.

Задача 3.1. Однородный эллипсоид с моментами инерции $A, \frac{3}{2}A, 2A$ движется вокруг своего неподвижно закрепленного центра масс. В начальный момент эллипсоиду сообщена угловая скорость $\bar{\Omega} = \omega\sqrt{2}\bar{i} + \omega\bar{k}$, где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – единичные орты главных центральных осей инерции. Получить уравнения движения эллипсоида в квадратурах.

Решение. Динамические уравнения Эйлера в этом случае

$$\begin{aligned} 2\frac{dp}{dt} + qr &= 0, \\ 3\frac{dq}{dt} - 2pr &= 0, \\ 4\frac{dr}{dt} + qp &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Умножив первое уравнение на p , третье – на r и приравняв затем левые части этих уравнений, получим

$$p\frac{dp}{dt} = 2r\frac{dr}{dt} \rightarrow \frac{p^2 - p_o^2}{2} = r^2 - r_o^2.$$

Так как $p_o = r_o\sqrt{2}$, то $p = r\sqrt{2}$ в любой момент времени.

Разделив первое уравнение (3.11) на второе, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$4p dp = -3q dq.$$

Откуда
$$p^2 = \frac{1}{4}(4p_o^2 - 3q^2),$$

и, кроме того,
$$r^2 = \frac{1}{8}(4p_o^2 - 3q^2).$$

Связь между p, q и r можно было получить и непосредственно, используя интеграл энергии и закон сохранения кинетического момента:

$$Ap_o^2 + Bq_o^2 + Cr_o^2 = 4A\omega^2 = 2T = \text{const},$$

$$A^2p_o^2 + B^2q_o^2 + C^2r_o^2 = 6A^2\omega^2 = K_o^2 = \text{const}.$$

Подставим полученные выражения для p и r во второе уравнение (3.11):

$$3\frac{dq}{dt} - 2\frac{4p_o^2 - 3q^2}{4\sqrt{2}} = 0. \quad (3.12)$$

Проинтегрировав (3.12), найдем в зависимости от времени

$$q = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\text{th}\frac{t}{2\sqrt{2}},$$

а затем p и r :

$$p = \frac{\sqrt{2}\omega}{\text{ch}\frac{t}{2\sqrt{2}}}, \quad r = \frac{\omega}{\text{ch}\frac{t}{2\sqrt{2}}}.$$

Определим углы Эйлера и угловую скорость прецессии $\dot{\psi}$ по (3.7), (3.8) и (3.9)

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\text{ch}\frac{t}{2\sqrt{2}}}, \quad \text{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}\text{sh}\frac{t}{2\sqrt{2}}}, \quad (3.13)$$

$$\dot{\psi} = \frac{2T - Cr^2}{K_o^2 - C^2r^2}K_o = \frac{2\sqrt{6}\omega \text{ch}\frac{t}{\sqrt{2}}}{3\text{ch}\frac{t}{\sqrt{2}} - 1}.$$

Из последнего соотношения найдем

$$\psi = \psi_o + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\omega t + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\omega \int_0^t \frac{dt}{3\text{ch}\frac{t}{2\sqrt{2}} - 1}.$$

Анализ зависимости углов Эйлера от времени показывает, что углы Эйлера

$$\theta = \arccos \left[\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{t}{2\sqrt{2}}} \right],$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{sh} \frac{t}{2\sqrt{2}}},$$

и ψ (см. (3.13)) не являются периодическими функциями.

3.3. Случай Лагранжа. Это случай движения симметричного тела в поле тяжести, когда центр масс лежит на оси симметрии, не совпадая с неподвижной точкой.

При движении симметричного твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа интегрирование системы уравнений движения может быть доведено до квадратур. Однако качественное исследование этого движения может быть проведено с помощью интегралов движения. Так как движение реализуется в поле тяжести, то имеет место интеграл энергии

$$\frac{1}{2} A(p^2 + q^2) + \frac{1}{2} Cr^2 + pl \cos \theta = h_o, \quad (3.14)$$

где l – расстояние центра тяжести от неподвижной точки. Поскольку $M_z = 0$, то

$$K_z = \bar{K}_o \frac{\bar{\dot{\psi}}}{\dot{\psi}} = \text{const}. \quad (3.15)$$

Третий интеграл получается из последнего уравнения (3.4):

$$C\dot{r} = 0 \rightarrow r = \text{const}. \quad (3.16)$$

Через углы Эйлера и их производные эти первые интегралы могут быть представлены в виде

$$A(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + 2pl \cos \theta = h = \text{const},$$

$$A\dot{\psi} \sin^2 \theta + Cr \cos \theta = K_z = \text{const}, \quad (3.17)$$

$$\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} = r = \text{const}. \quad (h = h_0 - Cr^2).$$

Интегралы движения (3.15) и (3.16) легко получаются и с помощью функции Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - \Pi =$$

$$= \frac{A}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \quad (3.18)$$

$$+ \frac{C}{2}(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta.$$

В самом деле, так как координаты ψ и ϕ циклические, то

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0, \quad \text{откуда}$$

вытекают законы сохранения

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = A\dot{\psi} \sin^2 \theta + C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta = \text{const},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) = Cr = \text{const}.$$

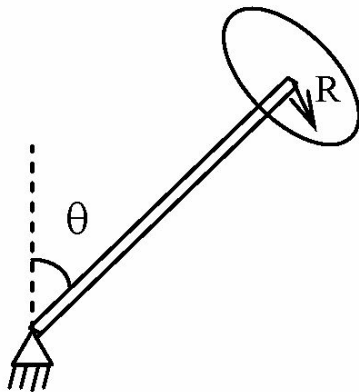


Рис. 3.2

Задача 3.2. Тонкий однородный диск веса P и радиуса R насажен жестко на невесомый стержень длины

$$l = \frac{\sqrt{3}}{2}R, \quad \text{один конец которого}$$

шарнирно закреплен. В начальный момент диску сообщают собственное вращение с угловой скоростью

$$\dot{\phi} = 4\sqrt{\frac{g}{R}} \quad \text{и отпускают ось без}$$

толчка. Найти минимальное и максимальное значения угла

нутации θ при движении диска, если в начальный момент $\theta_o = 30^\circ$, $\dot{\theta}_o = 0$, $\dot{\psi}_o = 0$. Найти также зависимость угловой скорости прецессии $\dot{\psi}$ и угловой скорости собственного вращения $\dot{\phi}$ от угла нутации θ .

Решение. Интегралы движения (3.14–3.16) в данном случае

$$mR^2(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + 2mgl \cos \theta = 2mgl \cos \theta_o, \quad (3.19)$$

$$mR^2 \dot{\psi} \sin^2 \theta + \frac{mR^2}{2} r \cos \theta = \sqrt{3gmR}^{3/2}, \quad (3.20)$$

$$\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} = 4\sqrt{\frac{g}{R}}. \quad (3.21)$$

Здесь значения $h = \frac{3mgR}{2}$, $K_z = \sqrt{3gmR}^{3/2}$, $r = 4\sqrt{\frac{g}{R}}$

получены из начальных условий, $A = \frac{mR^2}{4} + ml^2 = mR^2$,

$C = \frac{1}{2}mR^2$. Из (3.19)–(3.21) находим

$$\dot{\psi} = \sqrt{\frac{g}{R}} \frac{\sqrt{3} - 2 \cos \theta}{\sin^2 \theta}, \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 &= \frac{g}{2R} (\sqrt{3} - 2 \cos \theta) \frac{\sqrt{3} \sin^2 \theta - 2\sqrt{3} + 4 \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \\ &= f(\theta) \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{g}{R}} \frac{2 + 2 \sin^2 \theta - \sqrt{3} \cos \theta}{\sin^2 \theta}. \quad (3.24)$$

Значения $\theta_{\min}$ и $\theta_{\max}$ получим из условия $\dot{\theta} = 0$, что в данном случае приводит к равенствам

$$\sqrt{3} - 2 \cos \theta = 0,$$

$$\sqrt{3} \cos^2 \theta - 4 \cos \theta + \sqrt{3} = 0.$$

Откуда $\cos \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Исследуя знак $\ddot{\theta}$ при

$\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$, легко убедиться, что θ_1 соответствует минимальному, а θ_2 максимальному значению угла θ .

Чтобы наглядно проиллюстрировать нутационное и прецессионное движение диска, рассмотрим движение его центра масс. При движении центр масс диска, оставаясь на сфере радиуса l , будет двигаться между двумя параллелями, соответствующими $\theta_{\min}$ и $\theta_{\max}$. При этом нутационное движение носит колебательный характер, что видно из того, что $\dot{\theta} = \pm \sqrt{f(\theta)}$ (знак "+" соответствует возрастанию угла θ , знак "-" убыванию его) и

$$t_{12} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{-\sqrt{f(\theta)}} = \int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\sqrt{f(\theta)}} = t_{21},$$

т.е. время движения от одной параллели к другой остается постоянным.

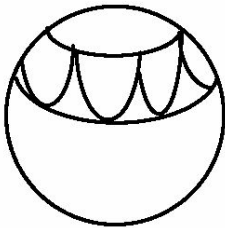


Рис. 3.3

$\theta = \theta_{\min}$, что соответствует точке возврата

на сферической траектории центра масс. Таким образом, его траектория в этом случае имеет вид сферической циклоиды, изображенной на рисунке 3.3.

§ 4. Применение динамических уравнений Эйлера для определения реакций, возникающих при вращении тела вокруг неподвижной оси

Динамические уравнения Эйлера могут быть использованы для решения первой задачи динамики, когда по заданному движению определяются силы, под действием которых это движение может происходить. Так, например, динамические уравнения Эйлера могут быть применены для определения реакций, возникающих при вращении тела вокруг неподвижной оси.

Рассмотрим уравнения движения тела в форме (1°) и (3.3). В качестве полюса О может быть взята произвольная точка на оси вращения. Внешние силы представим как совокупность активных сил и сил реакций связи: статических, возникающих в опорах покоящегося тела, и динамических, появляющихся при вращении тела вокруг неподвижной оси.

В положении равновесия система активных сил уравновешивается системой статических реакций

$$\bar{R}^a + \bar{R}^{cm} = 0, \quad \bar{M}_O^a + \bar{M}_O^{cm} = 0. \quad (4.1)$$

Пусть помимо активных сил, уравновешивающихся системой статических реакций, к телу приложен вращающий момент $\bar{M}_O^{ep}$, направленный по оси вращения. Тогда с учетом равенств (4.1) уравнения движения тела (1°) и (3.3) можно записать в виде

$$m\bar{W}_M = \bar{R}^a + \bar{R}^{cm} + \bar{R}^{\partial} = \bar{R}^{\partial}, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d'\bar{K}_O}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_O &= \bar{M}_O^a + \bar{M}_O^{cm} + \bar{M}_O^{ep} + \bar{M}_O^{\partial} = \\ &= \bar{M}_O^{ep} + \bar{M}_O^{\partial}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Для технических приложений важен вопрос, при каких условиях вращение тела вокруг оси не вызывает

добавочных давлений, т.е. когда система динамических реакций эквивалентна нулю. Найдем эти условия.

Из (4.2) следует, что $\bar{R}^\partial = 0$ только тогда, когда центр масс лежит на оси вращения. Момент $\bar{M}_O^\partial$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, т.к. силы реакции пересекают эту ось. Введем оси системы координат $OXYZ$, жестко связанной с телом, где ось OZ совпадает с осью вращения, а оси OX и OY лежат в плоскости, перпендикулярной этой оси. В осях $OXYZ$ матрица тензора инерции имеет вид

$$J = \begin{vmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{vmatrix},$$

вектор $\bar{K}_O = J\bar{\omega} = -J_{xz}\omega\bar{e}_1 - J_{yz}\omega\bar{e}_2 - J_z\omega\bar{e}_3$, и

$\frac{d'\bar{K}_O}{dt} = J\bar{\varepsilon} = -J_{xz}\varepsilon\bar{e}_1 - J_{yz}\varepsilon\bar{e}_2 + J_z\varepsilon\bar{e}_3$, где $\bar{\varepsilon}$ – вектор углового ускорения, а $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ – орты выбранной системы осей.

Спроецируем уравнение (4.3) на оси системы $OXYZ$:

$$\begin{aligned} -J_{xz}\varepsilon + J_{yz}\omega^2 &= M_{Ox}^\partial, \\ -J_{yz}\varepsilon - J_{xz}\omega^2 &= M_{Oy}^\partial, \\ J_z\varepsilon &= M_{Oz}^\partial. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Третье уравнение из (4.4) – уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси – не содержит динамических реакций. Момент динамических реакций $\bar{M}_O^\partial$ обращается в нуль, если

$$\begin{aligned} -J_{xz}\varepsilon + J_{yz}\omega^2 &= 0, \\ -J_{yz}\varepsilon - J_{xz}\omega^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Так как определитель системы (4.5) $\Delta = -(\varepsilon^2 + \omega^4) \neq 0$, то эта система имеет лишь тривиальное решение: $J_{xz} = J_{yz} = 0$, т.е. ось вращения OZ является главной осью для точки O . Таким образом, система динамических реакций эквивалентна векторному нулю (т.е. $R^0 = 0$ и $M_O^0 = 0$) в том и только в том случае, когда осью вращения является главная центральная ось. В связи с этим главную центральную ось называют осью свободного вращения.

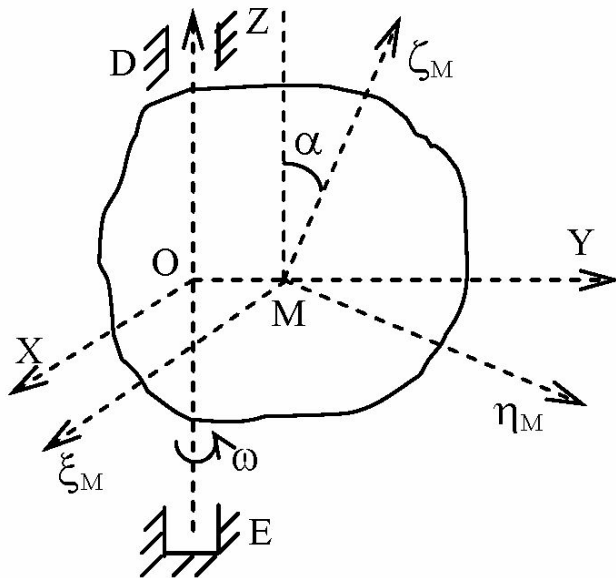


Рис. 4.1

Задача 4.1. Тонкая пластина массы m вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси OZ , лежащей в плоскости пластины. Центр масс пластины находится на расстоянии a от оси вращения, главная центральная ось ζ_M образует с осью OZ угол α . Найти статические и

динамические реакции в подшипнике D и подпятнике E , если главные центральные моменты инерции пластины $J_{\zeta_M} = A$, $J_{\eta_M} = B$, $EO = b$, $CD = c$.

Решение. Центр масс пластины движется равномерно по окружности в плоскости OXY , поэтому его уравнения движения

$$m\omega^2 a = Y_E^\partial + Y_D^\partial, \quad 0 = X_E^\partial + X_D^\partial. \quad (4.6)$$

Так как $p = 0$, $q = -\omega \sin \alpha$, $r = \omega \cos \alpha$, $\dot{p} = \dot{q} = \dot{r} = 0$, то первые два динамических уравнения Эйлера в главных центральных осях имеют вид

$$\begin{aligned} 0 &= -X_E^\partial h_1 + X_D^\partial h_2, \\ -(C - B)\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha &= Y_E^\partial b - Y_D^\partial c. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Решая совместно (4.6) и (4.7), получаем $X_E^\partial = X_D^\partial = 0$,

$$Y_E^\partial = \frac{1}{b+c} (m\omega^2 ac - (C-B)\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha),$$

$$Y_D^\partial = \frac{1}{b+c} (m\omega^2 ab + (C-B)\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha).$$

Для определения статических реакций запишем уравнения равновесия твердого тела: $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_E = 0$.

В проекциях на оси системы $OXYZ$ это дает

$$X_E^{cm} + X_D^{cm} = 0, \quad Y_E^{cm} + Y_D^{cm} = 0, \quad Z_E^{cm} = mg,$$

$$M_{xE} = -Y_D^{cm}(b+c) - mga = 0, \quad M_{yE} = X_D^{cm}(b+c) = 0.$$

$$\text{Откуда } X_E^{cm} = X_D^{cm} = 0, \quad Y_E^{cm} = \frac{mga}{(b+c)}, \quad Y_D^{cm} = -\frac{mga}{(b+c)},$$

$Z_E^{cm} = mg$. Анализ выражений Y_E^∂ и Y_D^∂ позволяет убедиться в том, что динамические реакции образуют векторный нуль при условиях:

1. $a = 0$ и $\alpha = 0$ (ось вращения совпадает с осью $M\zeta$);

2. $a = 0$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (ось вращения совпадает с осью $M\eta$).

И в том, и в другом случаях осью вращения является главная центральная ось.

§ 5. Регулярная прецессия

Регулярной прецессией называется движение твердого тела с неподвижной точкой O , когда тело вращается с постоянной по величине угловой скоростью $\dot{\varphi}$ вокруг оси $O\zeta$, жестко связанной с телом, а эта ось вращается с постоянной угловой скоростью $\dot{\psi}$ вокруг неподвижной оси OZ , составляя с ней постоянный угол θ .

Условимся называть свободной регулярной прецессией случай, когда это движение реализуется при $\overline{M}_O = 0$, и вынужденной регулярной прецессией, если при этом движении $\overline{M}_O \neq 0$.

5.1. Регулярная прецессия в случае Эйлера

Если движущееся по инерции тело симметрично, то его движение есть регулярная прецессия.¹⁾ Симметрия тела является и необходимым условием того, что в случае Эйлера реализуется регулярная прецессия. В самом деле, пусть движение тела – свободная регулярная прецессия. Тогда последнее динамическое уравнение Эйлера можно записать в виде

$$(A - B)q\dot{p} = (A - B)\dot{\psi}^2 \cos \varphi \sin^2 \theta = 0. \quad (5.1)$$

Не рассматривая случай перманентного вращения, будем считать величины $\dot{\psi} \neq 0$, $\sin \theta \neq 0$, так как в противном случае движение не является регулярной прецессией. При регулярной прецессии φ – линейная функция от времени, $\varphi = \dot{\varphi}_O t + \varphi_O$, и поэтому $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ не могут быть тождественно равны нулю. Следовательно, равенство (5.1) выполняется в любой момент времени лишь при $A = B$.

¹⁾ См. М.А. Айзерман. Классическая механика, 1980.

Если при рассмотрении регулярной прецессии ось OZ совместить с направлением вектора кинетического момента $\bar{K}_O$, то проекция вектора $\bar{K}_O$ на плоскость $O\xi\eta$ дает

$$K_{\xi\eta} = K_O \sin \theta = A \dot{\psi} \sin \theta,$$

откуда

$$K_O = A \dot{\psi}. \quad (5.2)$$

При регулярной прецессии векторы $\bar{K}_O = A \dot{\psi} \sin \theta \bar{e} + Cr \bar{k}$, $\bar{\omega} = \dot{\psi} \sin \theta \bar{e} + r \bar{k}$, $\bar{\phi} = \dot{\phi} \bar{k}$ лежат в одной плоскости Π , которая вращается вокруг вектора $\bar{K}_O$ с угловой скоростью прецессии. Причем эти векторы неподвижны в плоскости Π . Векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\phi}$ постоянны по величине и образуют постоянный угол с $\bar{K}_O$.

Кроме того, в этом случае справедливо равенство

$$C \dot{\phi} + (C - A) \dot{\psi} \cos \theta = 0, \quad (5.3)$$

которое легко следует из рассмотрения проекции

$$K_\zeta = K_O \cos \theta = A \dot{\psi} \cos \theta = Cr = C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta).$$

Из (5.3) с учетом равенства $\dot{\psi} \cos \theta = r - \dot{\phi}$ получаем

$$\dot{\phi} = \frac{A - C}{A} r.$$

Следует иметь в виду также, что в зависимости от

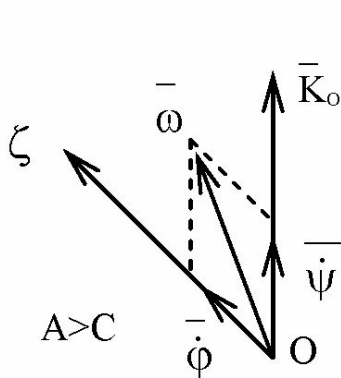


Рис. 5.1

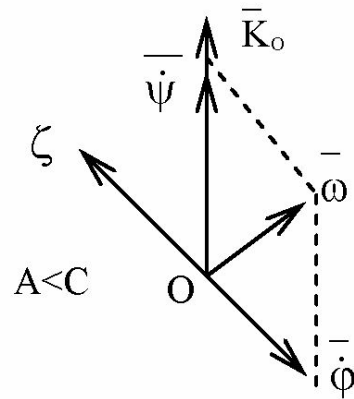


Рис. 5.2

соотношения между моментами инерции A и C взаимное расположение векторов $\bar{\omega}$, $\bar{K}_O$ и $\bar{\phi}$ может быть различным, что видно из рис. 5.1 и рис. 5.2. При $A > C$ угол между угловой скоростью собственного вращения $\bar{\phi}$ и угловой скоростью прецессии $\bar{\psi}$ острый, а при $A < C$ это угол тупой. Иногда первый случай называют прямой прецессией, а второй – обратной. (При $A = C$ перманентное вращение).

Задача 5.1. Гироскоп $\left(A = B = \frac{C}{2} \right)$ вращается по инерции вокруг центра тяжести. В начальный момент гироскопу сообщена угловая скорость $\bar{\omega}$ вокруг оси, образующей угол α с осью симметрии. Найти движение гироскопа.

Решение. Движение – регулярная прецессия, так как тело движется по инерции, и оно симметрично. В случае Эйлера регулярная прецессия совершается вокруг направления вектора кинетического момента. Так как $C > A$, то прецессия обратная (см. рис. 5.2). Определим параметры прецессии (ψ, ϕ, θ) . Для этого найдем сначала K_O :

$$K_O^2 = A^2(p^2 + q^2) + C^2r^2 = A^2\omega^2 \sin^2 \alpha + 4A^2\omega^2 \cos \alpha.$$

Тогда угловая скорость прецессии равна (см. (5.2))

$$\psi = \frac{K_O}{A} = \omega \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}.$$

Используя соотношение компонент вектора, получаем угол нутации

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{A\sqrt{p^2 + q^2}}{Cr} = \operatorname{arctg} \frac{A\omega \sin \alpha}{2A\omega \cos \alpha} = \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} \right].$$

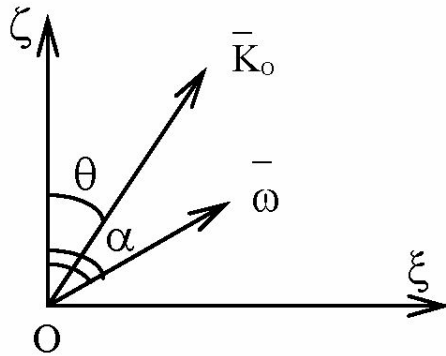


Рис. 5.3

Так как прецессия обратная, то $r = \dot{\psi} \cos \theta - \dot{\phi}$, где $\dot{\phi}$ – модуль вектора угловой скорости собственного вращения, откуда $\dot{\phi} = -\omega \cos \alpha$.

Итак, движение – регулярная прецессия с угловой скоростью прецессии $\dot{\psi} = \omega \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}$, угловой скоростью собственного

вращения $\dot{\phi} = -\omega \cos \alpha$ и углом нутации $\theta = \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} \right]$.

5.2. Вынужденная регулярная прецессия

Часто при конструировании систем необходимо решать задачу определения воздействия, обеспечивающего то или иное движение, т.е. решать обратную задачу динамики. В частности, пусть движение симметричного тела с одной неподвижной точкой есть регулярная прецессия. Какому условию удовлетворяет вынуждающее воздействие, обеспечивающее это движение? Оказывается момент, поддерживающий регулярную прецессию, удовлетворяет условию

$$\overline{M}_O = C \overline{\dot{\psi}} \times \overline{\dot{\phi}} \left[1 + \frac{C - A}{C} \frac{\dot{\psi}}{\dot{\phi}} \cos \theta \right] \quad (5.4)$$

(см. М.А. Айзерман. Классическая механика).

Это равенство называется точной формулой гироскопии. При решении задач, где требуется определить момент $\overline{M}_O$ или

параметры регулярной прецессии, целесообразно использование этой формулы.

При $\dot{\phi} \gg \dot{\psi}$ справедлива приближенная формула гироскопии

$$\overline{M}_O = C \overline{\dot{\psi}} \times \overline{\dot{\phi}}. \quad (5.5)$$

Задача 5.2. Колесный скат весом P , радиуса a движется равномерно со скоростью V по закруглению радиуса R , лежащему в

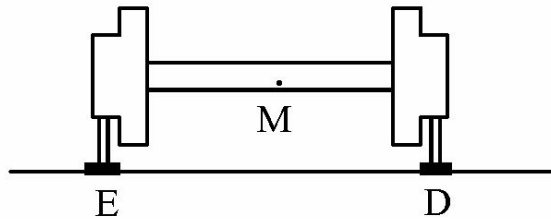


Рис. 5.4

горизонтальной плоскости. Определить давление ската на рельсы, если момент инерции ската относительно оси, проходящей через центры

колес, равен C , а расстояние между рельсами l .

Решение. Будем вести рассмотрение в неинерциальной системе координат с началом в центре масс и движущейся поступательно. Кроме активной силы P и переносной силы инерции $J = \frac{P V^2}{g R}$, следует учесть силы

реакции: горизонтальную F (действующую на одно колесо ската) и вертикальные N_1 и N_2 (см. рис. 5.5).

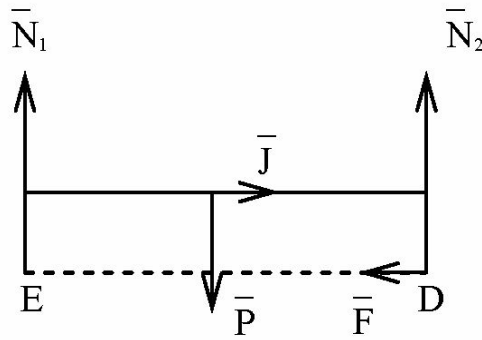


Рис. 5.5

Так как в выбранной системе координат центр масс покоится, то главный вектор сил, приложенных к скату, равен нулю, и, следовательно,

$$J - F = 0, \quad N_1 + N_2 - P = 0,$$

и, значит,

$$F = \frac{P}{g} \frac{V^2}{R}, \quad N_1 + N_2 = P. \quad (5.6)$$

Движение ската – вынужденная регулярная прецессия с угловой скоростью прецессии $\dot{\psi} = \frac{V}{R}$, угловой скоростью собственного вращения $\dot{\phi} = \frac{V}{a}$ и углом нутации

$\theta = \frac{\pi}{2}$, поэтому можно воспользоваться формулой гироскопии. (Точная и приближенная в данном случае совпадают). Имеем

$$C |\dot{\psi} \times \dot{\phi}| = C \frac{V^2}{Ra} = N_2 \frac{l}{2} - N_1 \frac{l}{2} - Fa. \quad (5.7)$$

Решая совместно (5.6) и (5.7), находим

$$N_1 = \frac{P}{2} - \frac{V^2 (C + ma^2)}{Ral},$$

$$N_2 = \frac{P}{2} + \frac{V^2(C + ma^2)}{Ral}.$$

Вместо формулы гироскопии можно было бы воспользоваться динамическими уравнениями Эйлера. При этом проекции векторов угловой скорости $\bar{\omega}$ и углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ на главные центральные оси равны соответственно

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \phi t, & \dot{p} &= \dot{\psi} \dot{\phi} \cos \phi t, \\ q &= \dot{\psi} \cos \phi t, & \dot{q} &= -\dot{\psi} \dot{\phi} \sin \phi t, \\ r &= \dot{\phi}, & \dot{r} &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение Эйлера для оси ξ_M

$$\begin{aligned} A \dot{\psi} \dot{\phi} \cos \phi t + (C - A) \dot{\psi} \dot{\phi} \cos \phi t = \\ = C \dot{\psi} \dot{\phi} \cos \phi t = M_\xi = \left(-N_1 \frac{l}{2} + N_2 \frac{l}{2} - Fa \right) \cos \phi t. \end{aligned}$$

Откуда с учетом (5.6) следует ответ.

5.3. Регулярная прецессия в случае Лагранжа

В случае Лагранжа регулярная прецессия может быть только вынужденной, и поэтому при регулярной прецессии выполняется равенство (5.4). Верно и обратное, т.е. если в случае Лагранжа при движении выполняется точная формула гироскопии и в начальный момент $\dot{\theta} = 0$ (если $\dot{\theta}_0 \neq 0$, регулярной прецессии быть не может), то движение есть регулярная прецессия. В самом деле, пусть при движении выполняется (5.4) и $\dot{\theta}_0 = 0$. Покажем справедливость утверждения с помощью уравнений Лагранжа. Функция Лагранжа для этого случая дана формулой (3.18). Так как в случае Лагранжа координаты ψ и ϕ циклические, то

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = A \dot{\psi} \sin^2 \theta + Cr \cos \theta = \text{const}, \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) = \text{const.} \quad (5.9)$$

Уравнение Лагранжа для координаты θ :

$$A\ddot{\theta} + C\dot{\psi}\dot{\phi}\sin\theta + (C - A)\dot{\psi}^2 \frac{\sin 2\theta}{2} = mgl \sin \theta.$$

В силу равенства (5.4) имеем $\ddot{\theta} = 0$, откуда $\theta = \dot{\theta}t + \theta_0$. Но по предположению $\dot{\theta}_0 = 0$ и поэтому $\theta = \theta_0$.

Из (5.8) и (5.9) следует, что тогда $\dot{\psi} = \text{const}$ и $\dot{\phi} = \text{const}$, т.е. движение – регулярная прецессия.

При решении задач в данном случае используют также формулу гироскопии и теорему о движении центра масс.

Задача 5.3. Симметричный волчок ($A = B \neq C$) массы m в начальный момент получил угловую скорость собственного вращения ω , причем его ось симметрии в этот момент образовывала с вертикалью угол θ_0 . Какой должна быть начальная угловая скорость прецессии $\dot{\psi}$, чтобы движение волчка являлось регулярной прецессией, если

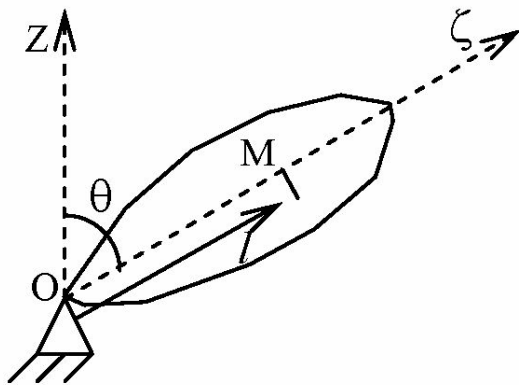


Рис. 5.6

расстояние центра масс от неподвижной точки опоры равно l ? Определить при регулярной прецессии реакцию опоры. Показать, что при $\omega \gg \dot{\psi}$ угловая скорость прецессии не зависит от угла нутации.

Решение. Угловую скорость прецессии находим из формулы гироскопии (5.4), которая в данном случае имеет вид

$$\dot{\psi}\omega \sin \theta \left(C + (C - A) \frac{\dot{\psi}}{\omega} \cos \theta \right) = mgl \sin \theta,$$

что дает

$$(C - A)\dot{\psi}^2 \cos \theta + C\omega \dot{\psi} - mgl = 0. \quad (5.10)$$

Откуда

$$\dot{\psi} = \frac{-C\omega \pm \sqrt{C^2\omega^2 + (C - A)mgl \cos \theta}}{2(C - A)\cos \theta}. \quad (5.11)$$

Из (5.11) видно, что регулярная прецессия может быть реализована только при положительном дискриминанте уравнения (5.10), т.е. при определенных соотношениях между параметрами системы. Из (5.10) заключаем, что при $\omega \gg \dot{\psi}$ первым членом можно пренебречь, тогда угловая скорость прецессии равна

$$\dot{\psi} = \frac{mgl}{C\omega}$$

и не зависит от угла нутации.

Горизонтальную составляющую F и вертикальную составляющую N реакции опоры определяем с помощью теоремы о движении центра масс:

$$\begin{aligned} m\dot{\psi}^2 l \sin \theta &= F, \\ N - mg &= 0. \end{aligned}$$

Откуда

$$R = \sqrt{F^2 + N^2} = m\sqrt{g^2 + \dot{\psi}^2 l^2 \sin^2 \theta}.$$

5.4. Элементарная теория гироскопа

Если $\dot{\phi} \gg \dot{\psi}$, то при движении тела с неподвижной точкой справедлива приближенная формула гироскопии

$$\frac{d\bar{K}_o}{dt} = C\bar{\dot{\psi}} \times \bar{\dot{\phi}} = \bar{M}_o.$$

При этом у гироскопа обнаруживается ряд эффектов, называемых гироскопическими.

При $\dot{\phi} \gg \dot{\psi}$ можно считать, что вектора $\vec{K}_O$, $\vec{\omega}$, $\vec{\dot{\phi}}$

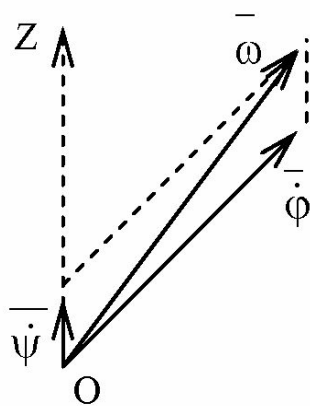


Рис. 5.7

направлены вдоль оси симметрии гироскопа и $\vec{K}_O = C\vec{\dot{\phi}}$. Это основное допущение элементарной теории гироскопа. Оно позволяет судить о поведении оси гироскопа, исходя из теоремы об изменении кинетического момента. Действительно, пусть K – точка оси, совпадающая с концом вектора $\vec{K}_O$, тогда можно записать

$$\vec{V}_K = \vec{M}_O.$$

конца вектора кинетического момента, а значит, и точка K оси гироскопа, равна по величине и направлению главному моменту внешних сил относительно неподвижной точки (теорема Резаля). Эта теорема позволяет объяснить особенности поведения оси быстро вращающегося гироскопа.

Если на ось уравновешенного гироскопа начнет действовать сила, то ось гироскопа отклонится не в направлении действия силы, а в направлении момента $\vec{M}_O$ этой силы относительно неподвижной точки. Это один из гироскопических эффектов.

Второе необычное свойство быстро вращающегося гироскопа – безынерционность движения его оси – заключается в том, что с прекращением действия силы момент $\vec{M}_O$ обращается в нуль, а значит, и $\vec{V}_K = 0$, т.е. с прекращением действия силы движение оси мгновенно прекращается. Это свойство гироскопов широко используется в технике.

Если гироскоп совершает прецессию за счет движения основания, на котором он укреплен, то момент $\overline{M}_O$ обусловлен силами давления подшипников, в которых закреплена ось гироскопа. К основанию же со стороны гироскопа будет приложена пара сил с моментом,

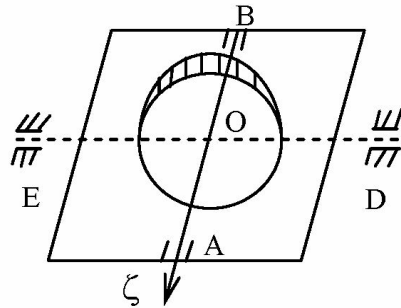


Рис. 5.8

называемым гироскопическим, равным и противоположным по направленным $\overline{M}_O$, т.е. $\overline{M}^G = -\overline{M}_O$.

Задача 5.4. Рамка уравновешенного гироскопа укреплена на неподвижном основании с помощью подшипников E и D .

Определить давление на подшипники E и D рамки, обусловленное гироскопическим моментом, если рамка поворачивается вокруг оси ED с угловой скоростью ω , ротор гироскопа совершает n оборотов в секунду вокруг оси $O\zeta$, расстояние $ED = l$. Момент инерции ротора относительно оси $O\zeta$ равен C . Массой рамки пренебречь.

Решение. Так как центр масс системы покоится, то главный вектор сил равен нулю. Воздействие на ось ротора приводится к паре сил, возникающих в точках A и B . Момент $\overline{M}_O$ этой пары направлен вертикально вниз и равен по величине $|\overline{M}_O| = C|\vec{\psi} \times \dot{\vec{\phi}}| = C2\pi n\omega$. В свою очередь со

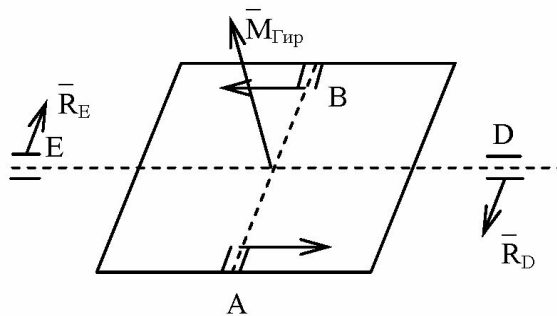


Рис. 5.9

стороны оси ротора на подшипники A и B будет действовать пара сил с гироскопическим

моментом $\overline{M}^G$. На рамку действуют пары сил в подшипниках A и B и в подшипниках E и D . Причем так как рамка поворачиваться вокруг вертикальной оси не может, то

$$\overline{M}_{AB} = \overline{M}^G = -\overline{M}_{ED} = -\overline{M}_O$$

(см. рис. 5.9). Таким образом,

$$R_E = R_D = \frac{M_{ED}}{l} = \frac{2\pi n\omega C}{l}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айзерман М.А.* Классическая механика. – М.: Наука, 1974, 1980.
2. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990.
3. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. – М.: Наука, 1966.
4. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. – М.: Наука, 1997.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
§1. Геометрия масс тела	3
§2. Подсчет основных динамических величин для твердого тела с одной неподвижной точкой . . .	12
2.1. Кинетический момент	12
2.2. Кинетическая энергия	13
§3. Уравнения движения тела с неподвижной точкой. Случай Эйлера и случай Лагранжа . . .	12
. . .	
3.1. Уравнения движения	16
3.2. Случай Эйлера	18
3.3. Случай Лагранжа	22
§4. Применение динамических уравнений Эйлера для определения реакций, возникающих при вращении тела вокруг неподвижной оси	26
§5. Регулярная прецессия	30
5.1. Регулярная прецессия в случае Эйлера	30
5.2. Вынужденная регулярная прецессия	33
5.3. Регулярная прецессия в случае Лагранжа	36
5.4. Элементарная теория гироскопа	38
Список литературы	41