

ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ
Методическое пособие

Основные законы динамики материальной точки. Дифференциальные уравнения движения.

Динамика изучает движение материальной точки в зависимости от приложенных к ней сил. Основные законы динамики материальной точки сформулированы Ньютоном.

Материальная точка - это модель материального тела любой формы, размерами которого в конкретной задаче можно пренебречь.

Первый закон динамики (закон инерции): материальная точка при отсутствии внешних воздействий сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные к ней силы не изменят этого состояния.

Движение, совершаемое точкой при отсутствии сил, называется движением по инерции. Свойство тел сохранять свою скорость неизменной называется **свойством инертности**. Количественной мерой инертности материальной точки является ее **масса**.

Инерциальной называется система отсчета, в которой справедлив закон инерции.

Реально система отсчета будет считаться инерциальной в результате опытной проверки выполнения в ней закона инерции. При решении большинства технических задач за инерциальную можно принять систему отсчета, связанную с Землей.

Второй закон динамики (основной закон): в инерциальной системе отсчета произведение массы материальной точки на вектор ее ускорения равен вектору действующей на точку силы.

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad (1)$$

Если на точку одновременно действует несколько сил, то они будут эквивалентны равнодействующей, равной геометрической сумме приложенных сил, тогда

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k.$$

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси координат:

$$ma_x = \sum F_{kx}, \quad ma_y = \sum F_{ky}, \quad ma_z = \sum F_{kz}. \quad (2)$$

Положение точки в декартовой прямоугольной системе координат определяется уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Проекции ускорения точки на оси координат равны

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Подставим в уравнения (2) значения проекций ускорения точки на оси координат и получим **дифференциальные уравнения движения точки**:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz}, \quad (3)$$

где x, y, z – координаты движущейся материальной точки, F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции приложенных к этой точке сил на оси координат.

Задачи динамики точки

С помощью дифференциальных уравнений движения материальной точки решаются две задачи динамики.

В первой задаче по заданным массе точки и ее уравнениям движения требуется найти действующие на нее силы.

Вторая (основная) задача динамики заключается в том, чтобы, зная массу материальной точки и действующие на нее силы, определить движение этой точки.

Для решения первой задачи динамики по заданным уравнениям движения точки $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ определяют проекции ускорения на соответствующие оси координат, а затем по уравнениям (1.3) находят проекции равнодействующей сил, приложенных к материальной точке.

Решение основной задачи динамики точки.

Определим движение точки по действующим на нее силам.

Запишем дифференциальные уравнения движения точки

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz}.$$

Если принять обозначения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}, \quad V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z},$$

то дифференциальные уравнения принимают вид

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z.$$

В общем случае правая часть каждого дифференциального уравнения представляет собой функцию нескольких переменных, так как действующие на точку силы могут зависеть от положения точки (координат x, y, z), ее скорости, определяемой проекциями на оси координат $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, и времени t , т.е.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t); \\ m\ddot{y} &= F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t); \\ m\ddot{z} &= F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t). \end{aligned} \quad (4)$$

Неизвестные в этих уравнениях - координаты движущейся материальной точки, являющиеся функциями времени: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Для их определения необходимо проинтегрировать систему полученных трех дифференциальных уравнений второго порядка, что представляет подчас значительные трудности и не всегда может быть выполнено в квадратурах. В таких случаях задача решается численными методами, которые лежат в основе имеющихся компьютерных программ.

Так как система состоит из трех дифференциальных уравнений второго порядка, то решение этих уравнений будет содержать шесть произвольных постоянных интегрирования:

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \\ y &= y(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \\ z &= z(t, C_1, C_2, \dots, C_6). \end{aligned} \quad (5)$$

Найдем проекции скорости точки на оси координат, продифференцировав уравнения (5):

$$\begin{aligned} V_x &= \dot{x} = \dot{x}(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \\ V_y &= \dot{y} = \dot{y}(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \\ V_z &= \dot{z} = \dot{z}(t, C_1, C_2, \dots, C_6). \end{aligned} \quad (6)$$

Для определения постоянных интегрирования необходимо задать **начальные условия движения точки, т.е. для момента времени $t = 0$ следует указать начальное положение точки, определяемое тремя координатами, и скорость точки – тремя ее проекциями на оси координат.**

Начальные условия:

$$\begin{aligned} t &= 0, \quad x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \\ V_x &= \dot{x}_0, \quad V_y = \dot{y}_0, \quad V_z = \dot{z}_0. \end{aligned}$$

Подставив в уравнения (5) и (6) начальные условия, получим систему шести алгебраических уравнений, неизвестными в которых являются постоянные $C_1, C_2, \dots, C_6$:

$$\begin{aligned}x_0 &= x(0, C_1, C_2, \dots, C_6), \\y_0 &= y(0, C_1, C_2, \dots, C_6), \\z_0 &= z(0, C_1, C_2, \dots, C_6).\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}V_{x0} &= \dot{x}_0 = \dot{x}(0, C_1, C_2, \dots, C_6), \\V_{y0} &= \dot{y}_0 = \dot{y}(0, C_1, C_2, \dots, C_6), \\V_{z0} &= \dot{z}_0 = \dot{z}(0, C_1, C_2, \dots, C_6).\end{aligned}\tag{8}$$

Решив систему алгебраических уравнений (7) и (8), определим постоянные интегрирования, найденные значения постоянных $C_1, C_2, \dots, C_6$ подставим в выражения (5) и (6) и получим уравнения движения точки, соответствующие начальным условиям задачи, и проекции скорости точки на оси координат в зависимости от времени:

$$\begin{aligned}x &= x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \\V_x &= V_x(t), \quad V_y = V_y(t), \quad V_z = V_z(t).\end{aligned}$$

Рекомендации по решению задач

1. Установить, какие силы действуют на материальную точку, и представить каждую силу в векторной форме.
2. Выбрать систему координат, начало которой следует совместить с известным по условиям задачи положением точки, которое она занимала в определенный момент времени. Оси координат следует выбирать так, чтобы было удобно проектировать на них векторы сил, скоростей и ускорений.
3. Записать в выбранной системе координат начальные условия движения точки.
4. Изобразить движущуюся точку в произвольном положении так, чтобы ее координаты были положительными.
5. Изобразить все приложенные к точке активные силы и реакции связей.
6. Составить дифференциальные уравнения движения материальной точки.
7. Проинтегрировать дифференциальные уравнения.
8. Определить по начальным условиям движения постоянные интегрирования.

Составление дифференциальных уравнений

Левая часть каждого дифференциального уравнения независимо от выбранной системы координат и действующих на материальную точку сил представляет собой произведение массы точки на вторую производную по времени от соответствующей координаты. Правая часть каждого уравнения является суммой проекций всех сил, приложенных к точке, на соответствующую координатную ось.

Составление дифференциальных уравнений сводится к определению проекций всех приложенных к точке сил на выбранные оси координат.

Сила является векторной функцией, модуль и направление которой могут меняться в зависимости от времени, положения точки и ее скорости. В общем случае, модуль и направление силы зависят от семи скалярных переменных: времени t , координат точки x, y, z и их производных по времени $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

Можно указать три простейших типа переменных сил:

- а) постоянные силы и силы, зависящие от времени;*
- б) силы, зависящие от скорости материальной точки;*
- в) силы, зависящие от положения материальной точки.*

Чаще всего на материальную точку действуют одновременно несколько различных сил.

Примеры составления дифференциальных уравнений

1. Пусть действующая на материальную точку M сила (рис.1.1) задана формулой: $\vec{F} = 2t\vec{i} - 4\vec{j} - 8t^2\vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы выбранных координатных осей.

Так как в общем случае $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$, то проекции силы на оси координат будут равны

$$F_x = 2t, \quad F_y = -4, \quad F_z = -8t^2.$$

Дифференциальные уравнения точки в данном случае принимают вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 2t,$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -4,$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -8t^2.$$

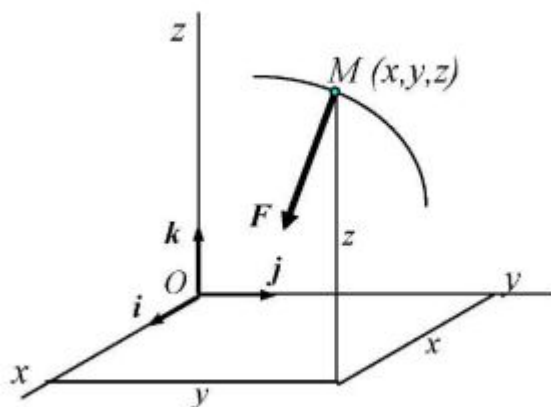


Рис.1

2. Пусть на точку действует сила сопротивления $\bar{R}$, пропорциональная скорости точки и направленная противоположно вектору скорости (рис.2). Такая сила может быть представлена в виде векторной формулы $\bar{R} = -k\bar{V}$, где k -коэффициент пропорциональности, $\bar{V}$ - вектор скорости точки.

Найдем проекции этого векторного равенства на оси координат:

$$R_x = -kV_x = -k \frac{dx}{dt}, \quad R_y = -kV_y = -k \frac{dy}{dt}, \quad R_z = -kV_z = -k \frac{dz}{dt}.$$

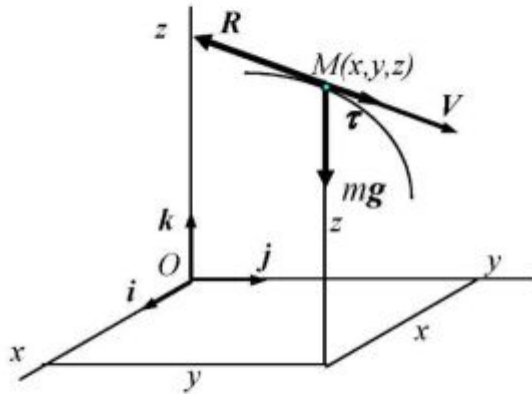


Рис.2

Если на точку, кроме силы $\bar{R}$, действует сила тяжести $m\bar{g}$, то уравнения движения запишутся в виде

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -k \frac{dx}{dt}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= -k \frac{dy}{dt}, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= -mg - k \frac{dz}{dt}. \end{aligned}$$

3. Пусть сила сопротивления (рис.2), действующая на точку, пропорциональна квадрату скорости точки $R = kV^2$ и направлена в сторону, противоположную вектору скорости: $\bar{R} \updownarrow \bar{V}$. Векторы $\bar{R}$ и $\bar{V}$ направлены по касательной к траектории точки, следовательно, $R\bar{\tau} = -kV^2\bar{\tau}$, где $\bar{\tau}$ - единичный вектор касательной в данной точке.

Сила тяжести вертикальна и равна $\bar{G} = -mg\bar{k}$.

Заменим $R\bar{\tau} = \bar{R}$, $V\bar{\tau} = \bar{V}$, тогда $-kV^2\bar{\tau} = -kV\bar{V}\bar{\tau} = -kV\bar{V}$.

Следовательно, $\bar{R} = -kV\bar{V}$.

Проекции этого векторного равенства на оси координат будут равны

$$\begin{aligned} R_x &= -kVV_x, \\ R_y &= -kVV_y, \\ R_z &= -kVV_z. \end{aligned}$$

Модуль вектора скорости $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$, проекции скорости на оси координат

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Тогда, проекции силы сопротивления на оси координат будут равны:

$$\begin{aligned} R_x &= -k \sqrt{\dot{z}^2 + \dot{y}^2 + \dot{x}^2} \dot{x}, \\ R_y &= -k \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \dot{y}, \\ R_z &= -k \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \dot{z}. \end{aligned}$$

Следовательно, дифференциальные уравнения с учетом силы тяжести будут записаны в виде

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k \sqrt{\dot{z}^2 + \dot{y}^2 + \dot{x}^2} \dot{x}, \\ m\ddot{y} &= -k \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \dot{y}, \\ m\ddot{z} &= -k \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \dot{z} - mg. \end{aligned}$$

В том случае, когда начальная скорость точки направлена вертикально, движение точки окажется прямолинейным, т.е. $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$. Такому движению будет соответствовать одно дифференциальное уравнение:

$$m\ddot{z} = -k\dot{z}^2 - mg.$$

4. Пусть на точку (рис.1.3) действует центральная сила $\bar{Q}$, обратно пропорциональная расстоянию до центра O , и направленная к этому центру, т.е. $Q = \frac{f}{r^2}$, $\bar{Q} \uparrow \downarrow \bar{r}$, где $\bar{r}$ - радиус-вектор, соединяющий точку M с центром O , f - коэффициент пропорциональности.

Представим силу $\bar{Q}$ векторной формулой

$$\bar{Q} = -\frac{f}{r^2} \bar{e},$$

Где $\bar{e}$ - единичный вектор вектора $\bar{r}$.

Умножим и разделим левую часть этого равенства на r , получим

$$\bar{Q} = -\frac{f}{r^3} r\bar{e}.$$

Заменим $r\bar{e} = \bar{r}$, тогда
$$\bar{Q} = -\frac{f}{r^3} \bar{r}.$$

Проекция этого векторного равенства на оси координат

$$Q_x = -\frac{f}{r^3} r_x = -\frac{f}{r^3} x,$$

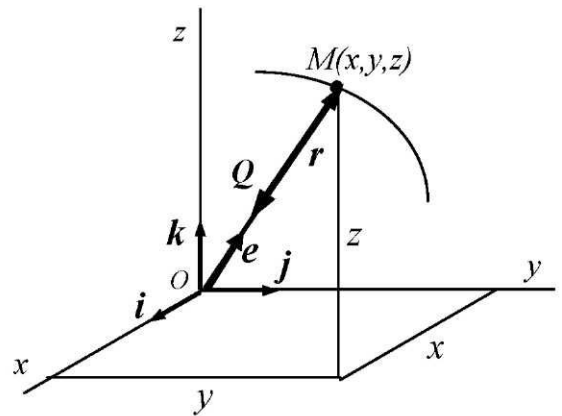


Рис.3

$$Q_y = -\frac{f}{r^3} r_y = -\frac{f}{r^3} y,$$

$$Q_z = -\frac{f}{r^3} r_z = -\frac{f}{r^3} z.$$

Модуль радиуса - вектора $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

Тогда проекции силы $\bar{Q}$ на оси координат будут равны

$$Q_x = -\frac{fx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad Q_y = -\frac{fy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad Q_z = -\frac{fz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Дифференциальные уравнения движения точки записываются в виде

$$m\ddot{x} = -\frac{fx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad m\ddot{y} = -\frac{fy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad m\ddot{z} = -\frac{fz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Прямолинейное движение материальной точки

Прямолинейное движение свободной материальной точки возможно в случае, когда равнодействующая приложенных к точке сил и ее начальная скорость лежат на одной прямой.

Прямолинейное движение несвободной материальной точки обусловлено наложенными на нее связями.

Прямолинейное движение под действием постоянной силы

Выберем прямую, по которой движется точка, за ось x . Равнодействующую всех приложенных к точке сил обозначим F . Дифференциальное уравнение движение точки будет иметь вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F = \text{const},$$

Заменяем $\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dV_x}{dt}$, получим уравнение первого порядка

$$m \frac{dV_x}{dt} = F.$$

Умножим обе части этого уравнения на dt , т.е. разделим переменные

$$m dV_x = F dt.$$

После интегрирования получим

$$mV_x = Ft + C_1.$$

Подставим в это уравнение начальные условия $t = 0$, $V_x = V_0$, тогда $C_1 = mV_0$.
Следовательно,

$$mV_x = Ft + mV_0.$$

После замены $V_x = \frac{dx}{dt}$, получим

$$m \frac{dx}{dt} = Ft + mV_0.$$

Разделим переменные, умножив полученное уравнение на dt :

$$mdx = Ft + mV_0 dt.$$

Проинтегрируем

$$mx = F \frac{t^2}{2} + mV_0 t + C_1.$$

Подставим в это уравнение начальные условия: $t = 0$, $x = x_0$, найдем $C_2 = mx_0$.

Окончательно, уравнение прямолинейного движения точки имеет вид

$$x = x_0 + V_0 t + \frac{Ft^2}{2m}.$$

Следовательно, прямолинейное движение материальной точки в данном случае является равнопеременным.

Прямолинейное движение по наклонной плоскости.

Груз скользит (рис.4) по наклонной плоскости под действием силы тяжести, коэффициент трения скольжения равен f , масса груза m , начальная скорость груза равна V_0 . Определить движение груза по наклонной плоскости.

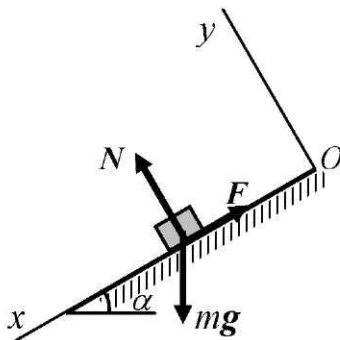


Рис.4

Выберем начальное положение груза на начало отсчета оси x , которую направим вниз по наклонной плоскости. Начальная координата $x_0 = 0$.

На груз действуют сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная реакция $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}$.

Дифференциальное уравнение движения груза

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg \sin \alpha - F.$$

Сила трения равна $F = fN$, нормальная реакция $N = mg \cos \alpha$, тогда $F = fmg \cos \alpha$.

Дифференциальное уравнение после сокращения на m принимает вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g \sin \alpha - fg \cos \alpha.$$

Заменяем $\frac{d^2 x}{dt^2}$ на $\frac{dV_x}{dt}$, получим

$$\frac{dV_x}{dt} = g \sin \alpha - fg \cos \alpha.$$

Разделим переменные, умножив обе части уравнения на dt :

$$dV_x = (g \sin \alpha - fg \cos \alpha) dt$$

Проинтегрировав, найдем

$$V_x = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t + C_1.$$

Подставив в это уравнение начальные значения $t = 0$, $V_x = V_0$, получим $C_1 = V_0$.

Следовательно,

$$V_x = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t + V_0.$$

Заменяем $V_x = \frac{dx}{dt}$, получим

$$\frac{dx}{dt} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t + V_0.$$

Для разделения переменных умножим обе части этого уравнения на dt :

$$dx = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)tdt + V_0 dt.$$

После интегрирования

$$x = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)\frac{t^2}{2} + V_0 t + C_2.$$

Подставив в это уравнение значения $t = 0$, $x_0 = 0$, найдем $C_2 = 0$.
Окончательно,

$$x = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)\frac{t^2}{2} + V_0 t.$$

Движение под действием силы, зависящей от времени.

Пусть на материальную точку действует сила $\vec{F} = \vec{F}(t)$, параллельная начальной скорости точки $\vec{V}_0$. Движение точки будет прямолинейным.

Дифференциальное уравнение движения груза имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x(t)$$

Решение этого уравнения выполним в два этапа. Сначала сделаем замену $\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dV_x}{dt}$ и получим дифференциальное уравнение первого порядка, в котором неизвестной функцией будет проекция скорости V_x на ось x :

$$m \frac{dV_x}{dt} = F_x(t).$$

Умножив обе части уравнения на dt , разделим переменные:

$$mdV_x = F_x(t) dt.$$

После интегрирования получим

$$V_x = \frac{1}{m} \int F_x(t) dt + C_1.$$

На втором этапе заменим $V_x = \frac{dx}{dt}$ и снова получим дифференциальное уравнение первого порядка теперь уже относительно координаты x .

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m} \Phi + C_1,$$

где $\Phi = \int F_x(t) dt_1$.

Снова разделим переменные:

$$dx = \left(\frac{1}{m} \Phi + C_1 \right) dt,$$

Проинтегрируем обе части этого уравнения и получим зависимость координаты x от времени

$$x = \frac{1}{m} \int \Phi dt + C_1 t + C_2.$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 подставим в уравнения для x и V_x начальные условия движения точки.

Движение под действием силы тяжести и силы сопротивления

Сила сопротивления пропорциональна скорости.

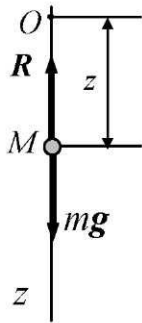


Рис.5

Пусть точка из состояния покоя движется вертикально вниз под действием силы тяжести $m\bar{g}$ (рис. 1.5) и силы сопротивления $\bar{R} = -k\bar{V}$.

За начало оси z , направленной вертикально вниз, выберем начальное положение точки, тогда при $t = 0$, $z_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$.

Составим дифференциальное уравнение движения точки

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = mg - kV_z.$$

Заменяем $\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{dV_z}{dt}$, сократим на m и, обозначив $k/m = n$, получим

$$\frac{dV_z}{dt} = g - nV_z.$$

Для того, чтобы разделить переменные в этом уравнении, умножим обе части уравнения на dt и разделим на множитель $(g - nV_z)$, после чего получим

$$\frac{dV_z}{g - nV_z} = dt.$$

$$\int \frac{dV_z}{gn - V_z} = \int dt + C_1.$$

После интегрирования $-\frac{1}{n} \ln(g - nV_z) = t + C_1$.

Подставим начальные условия: $t = 0$, $V_z = 0$, получим, $C_1 = -\frac{1}{n} \ln g$.

Тогда $-\frac{1}{n} \ln(g - nV_z) = t - \frac{1}{k} \ln g$.

Преобразуем полученное уравнение:

$$(\ln(g - nV_z) - \ln g = -nt, \quad \ln \frac{g - nV_z}{g} = -nt, \quad \text{откуда} \quad \frac{g - nV_z}{g} = e^{-nt}.$$

Следовательно, скорость точки

$$V_z = \frac{g}{n}(1 - e^{-nt}).$$

Как следует из полученной формулы, скорость падения убывает и при $t \rightarrow \infty$ принимает максимальное значение $V_z = g/n = mg/k$.

Для того, чтобы найти уравнение движения точки, заменим $V_z = \frac{dz}{dt}$, получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно переменной координаты z :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{g}{n}(1 - e^{-nt}).$$

Для разделения переменных умножим обе части этого уравнения на dt , получим

$$dz = \frac{g}{n}(1 - e^{-nt})dt, \\ \int dz = \int \frac{g}{n}(1 - e^{-nt})dt + C_2.$$

Откуда
$$z = \frac{g}{n}\left(t + \frac{e^{-nt}}{n}\right) + C_2.$$

Подставим начальные значения $t=0$, $z=0$ и определим $C_2 = -\frac{g}{n^2}$.

Окончательно уравнение движения материальной точки принимает вид

$$z = \frac{g}{n}\left(t + \frac{1}{n}(e^{-kt/m} - 1)\right).$$

Сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости

Материальная точка под действием силы тяжести падает вниз. На нее действуют (рис. 1.5) силы: $m\vec{g}$ и $\vec{R} = -kV\vec{V}$, где k – постоянный коэффициент. Пусть в начальный момент скорость точки $V_0 = 0$, ось z направим вертикально вниз, начало отсчета выберем в начальном положении точки, $z_0 = 0$. Найдем скорость точки.

Дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось z

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = mg - k V_z^2.$$

Так как $\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{dV_z}{dt}$, то $m \frac{dV_z}{dt} = mg - k V_z^2$.

Сократим уравнение на m и преобразуем левую его часть, умножив и разделив ее на dz :

$$\frac{dV_z dz}{dt dz} = \frac{V_z dV_z}{dz}, \text{ заменим } V_z = \frac{dz}{dt}, \text{ получим } \frac{V_z dV_z}{dz} = g - \frac{k}{m} V_z^2,$$

Разделим переменные, умножив обе части этого уравнения на dz и разделив их на $(g - nV_z^2)$, обозначим $n = \frac{k}{m}$:

$$\frac{V_z dV_z}{g - nV_z^2} = dz.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{V_z dV_z}{g - nV_z^2} = \int dz + C_1; \quad -\frac{1}{n} \ln(g - nV_z^2) = z + C_1.$$

Подставим в это уравнение начальные значения $z = 0$, $V_z = 0$, получим $C_1 = -\frac{1}{n} \ln g$.

Тогда $\frac{1}{n} \ln \frac{g}{g - nV_z^2} = z$, откуда $V_z = \sqrt{\frac{g}{n} (1 - e^{-nz})}$.

Полученное уравнение определяет проекцию скорости материальной точки в зависимости от ее положения. С возрастанием z величина e^{-nz} убывает, стремясь к нулю при $z \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что скорость падения с возрастанием z возрастает, стремясь к постоянной величине. Эта величина называется предельной скоростью падения $V_{np} = \sqrt{\frac{g}{n}} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$.

Движение под действием силы, зависящей от положения точки.

Пусть на материальную точку M , находящуюся на горизонтальной плоскости (рис.6), действует сила $\vec{P}$, пропорциональная расстоянию от не-

подвижного центра O , коэффициент пропорциональности зависит от массы точки, поэтому силу $\overline{P}$ можно представить векторной формулой:

$$\overline{P} = k^2 m \overline{OM}.$$

Проекция этой силы на ось x равна $P_x = k^2 m x$.

В начальный момент точка находилась в покое на расстоянии a от начала отсчета, т.е. при $t=0$, $x_0=a$, $V_x = 0$.

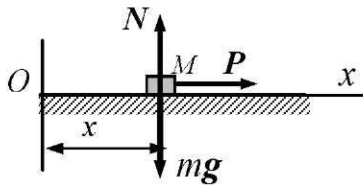


Рис.6

На точку, кроме силы отталкивания, действуют сила тяжести $m\overline{g}$ и нормальная реакция $\overline{N}$, проекции которых на ось x равны нулю.

Составим дифференциальное уравнение:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = k^2 m x.$$

Сократим на m :

$$\ddot{x} - k^2 x = 0$$

Полученное уравнение является однородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Составим соответствующее характеристическое уравнение:

$$r^2 - k^2 = 0.$$

Откуда $r_{1,2} = \pm k$.

Учитывая, что корни характеристического уравнения являются действительными, решение дифференциального уравнения запишется в виде

$$x = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}. \quad (a)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 нужно иметь два уравнения. Дифференцируя по времени выражение (a), получим:

$$\dot{x} = C_1 k e^{kt} - C_2 k e^{-kt}. \quad (б)$$

Подставим в (a) и (б) начальные условия $t=0$, $x_0=a$, $\dot{x}_0=0$ и получим

$$a = C_1 + C_2, \quad 0 = C_1 - C_2.$$

Откуда $C_1 = C_2 = \frac{a}{2}.$

После подстановки C_1 и C_2 в уравнения (a) и (б) получим уравнение движения материальной точки и зависимость скорости точки от времени:

$$x = \frac{a}{2}(e^{kt} + e^{-kt}), \quad V_x = \dot{x} = \frac{ak}{2}(e^{kt} - e^{-kt}).$$

Учет силы трения.

Решим предыдущую задачу, учитывая силу трения $F = -fN$, где f коэффициент трения, N - нормальная реакция.

Дифференциальное уравнение движения точки в этом случае имеет вид

$$m\ddot{x} = mk^2x - fN.$$

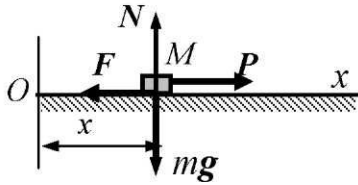


Рис.7

Нормальная реакция $N = fmg$ (рис.7), тогда

$$m\ddot{x} = mk^2x - fmg.$$

После сокращения на m получим

$$\ddot{x} + k^2x = fg. \quad (a)$$

Общее решение этого неоднородного линейного дифференциального уравнения равно сумме общего решения x_1 соответствующего однородного уравнения $\ddot{x} + k^2x = 0$ и частного решения x_2 уравнения (a), т.е. $x = x_1 + x_2$.

$$x_1 = C_1e^{kt} + C_2e^{-kt}.$$

Частное решение x_2 ищем в форме правой части уравнения (a), т.е. в виде постоянного: $x_2 = A$, тогда $\ddot{x}_2 = 0$. Подставим x_2 в уравнения (a), получим

$$0 + k^2A = fg, \quad \text{тогда} \quad A = \frac{fg}{k^2}$$

$$\text{Окончательно} \quad x = C_1e^{kt} + C_2e^{-kt} + \frac{fg}{k^2}. \quad (б)$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 находим

$$\dot{x} = C_1ke^{kt} - C_2ke^{-kt}. \quad (в)$$

Подставив в (б) и (в) начальные условия $t=0$, $x_0 = a$, $\dot{x}_0 = 0$, получим

$$a = C_1 + C_2 + \frac{fg}{k^2}, \quad 0 = C_1k - C_2k.$$

$$\text{Откуда} \quad C_1 = C_2 = \frac{1}{2}\left(a - \frac{fg}{k^2}\right).$$

Внесем значения C_1 и C_2 в уравнения (б) и (в) и получим уравнение движения точки и проекцию ее скорости на ось x в зависимости от времени

$$x = \frac{1}{2}\left(a - \frac{fg}{k^2}\right)(e^{kt} + e^{-kt}) + \frac{fg}{k^2}, \quad V_x = \dot{x} = \frac{k}{2}\left(a - \frac{fg}{k^2}\right)(e^{kt} - e^{-kt}).$$

Криволинейное движение материальной точки

Пусть равнодействующая всех приложенных к материальной точке сил и начальная скорость точки лежат в одной плоскости.

Выберем эту плоскость за плоскость движения с системой координат Oxy , тогда $\sum F_{kz} = 0$, $z = 0$, $\dot{z}_0 = 0$. Переменными координатами являются x и y . В начальный момент при $t = 0$, $x = x_0$, $y = y_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, $\dot{y} = \dot{y}_0$.

Движение точки в этом случае определяется двумя дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= \sum F_{kx}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= \sum F_{ky}. \end{aligned} \quad (9)$$

Проинтегрировав эти уравнения, находят координаты x и y движущейся точки, как функции времени, т.е. определяют уравнения движения. Полученные решения содержат четыре постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3 и C_4 , значения которых определяются начальными условиями. Окончательно, решение дифференциальных уравнений представляют собой уравнения движения точки $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Уравнения движения позволяют определить все кинематические характеристики движения точки: траекторию, скорость, полное, касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.

Движение точки, брошенной под углом к горизонту.

Пусть материальная точка массой m получила начальную скорость $\vec{V}_0$, направленную под углом α к горизонтальной плоскости, при этом сопротивление воздуха во внимание не принимаем.

Поместим начало координат O в начальном положении точки, ось Oy направим вертикально, ось Ox расположим горизонтально в плоскости, проходящей через ось Oy и начальную скорость $\vec{V}_0$ (рис.8).

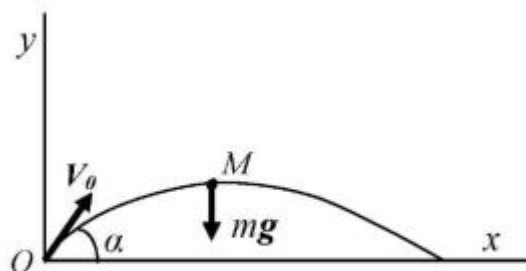


Рис.8

На материальную точку M действует сила тяжести $m\vec{g}$.

Дифференциальные уравнения движения точки имеют вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg.$$

Сделаем замену: $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV_x}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dV_y}{dt}.$

После сокращения на m , получим

$$\frac{dV_x}{dt} = 0, \quad \frac{dV_y}{dt} = -g.$$

Умножая обе части этих уравнений на dt и интегрируя, находим

$$V_x = C_1, \quad V_y = -gt + C_2. \quad (a)$$

Эти уравнения справедливы при любом значении t .

При $t = 0, x_0 = 0, V_x = V_0 \cos \alpha, V_y = V_0 \sin \alpha$.

Следовательно, $C_1 = V_0 \cos \alpha, C_2 = V_0 \sin \alpha$.

Подставим эти значения в (a), и заменяя $V_x = \frac{dx}{dt}, V_y = \frac{dy}{dt}$ получим

$$\frac{dx}{dt} = V_0 \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = V_0 \sin \alpha - gt. \quad (b)$$

Полученные уравнения определяют проекции скорости на оси координат:

$$V_x = V_0 \cos \alpha, \quad V_y = V_0 \sin \alpha - gt.$$

Модуль скорости

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V_0^2 \cos^2 \alpha + (V_0 \sin \alpha - gt)^2}. \quad (c)$$

Интегрируя уравнения (b), получим

$$x = V_0 t \cos \alpha + C_3, \quad y = V_0 t \sin \alpha - 0,5 gt^2 + C_4.$$

Поставим в эти уравнения начальные условия $x_0 = 0, y_0 = 0$, найдем, что $C_3 = C_4 = 0$. Тогда окончательно определяем уравнения движения точки M :

$$x = V_0 t \cos \alpha, \quad y = V_0 t \sin \alpha - 0,5 gt^2.$$

Методами кинематики определим все характеристики этого движения.

1. Траектория точки. Исключим из уравнений (б) время t , для этого выразим t из первого уравнения и подставим во второе:

$$t = \frac{x}{V_0 \cos \alpha}, \quad y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2. \quad (2)$$

Уравнение (2) является уравнением параболы.

2. Дальность полета точки. Определим дальность полета точки, положив в этом уравнении $y = 0$.

$$x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 = 0, \text{ отсюда } x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{2V_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \operatorname{tg} \alpha.$$

Значение x_1 дает точку O , значение x_2 определяет еще одну точку C пересечения параболы с осью Ox , расстояние $OC = L$ определяет дальность полета точки

$$L = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

При заданной начальной скорости максимальная дальность получается, если $\sin 2\alpha = 1$, т.е. при угле $\alpha = 45^\circ$.

3. Высоту полета определим, подставив в уравнение траектории движения точки значение $x = L/2 = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$:

$$H = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

4. Время полета. Подставим вместо x значение L дальности полета в уравнение $x = V_0 t \cos \alpha$, и найдем время полета

$$T = \frac{2V_0 \sin \alpha}{g}.$$

5. Скорость полета определяется формулой (б). После подстановки в нее время полета, получим, что скорость, в момент приземления по модулю будет равна начальной скорости.

В частности, если $\alpha = 45^\circ$, $V_0 = 28,3$ м/с, то $L \approx 81,6$ м; $H \approx 20,4$ м; $T \approx 4$ с. Траектория движения точки для этого случая построена с помощью программы Microsoft Excel (рис.9).

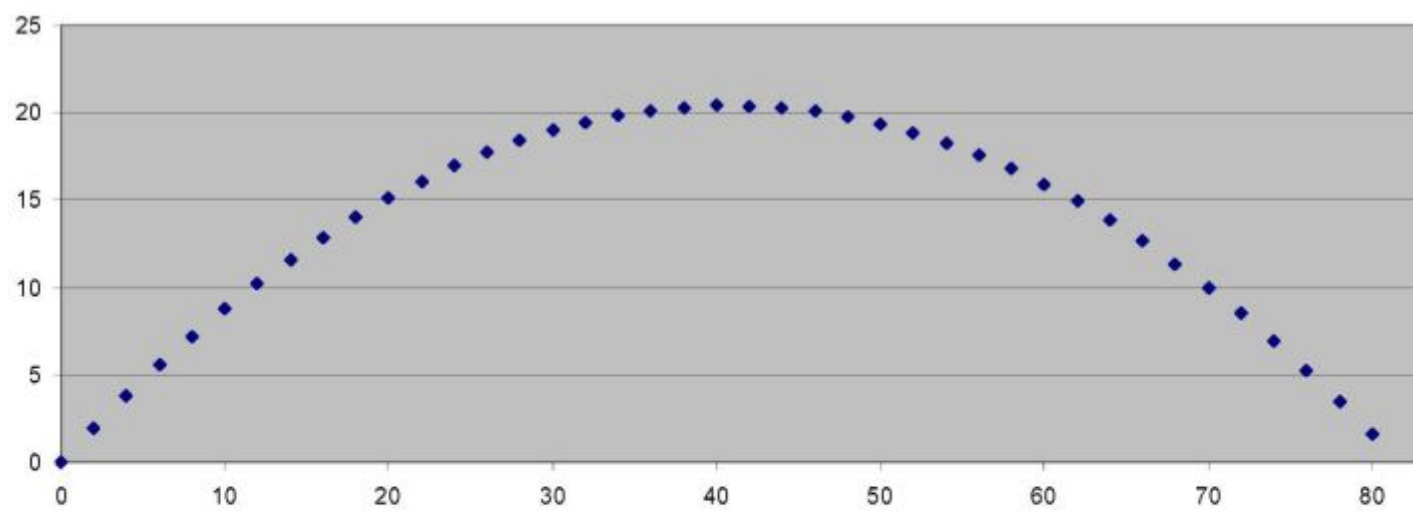


Рис. 9

Движение точки, брошенной под углом к горизонту с учетом силы сопротивления

Материальной точке массой 2 кг сообщили начальную скорость $V_0 = 8,3 \text{ м/с}$ под углом 45° к горизонту. Во время движения на точку кроме силы тяжести действует сила сопротивления, пропорциональная первой степени скорости, коэффициент пропорциональности $\mu = 0,5$.

Определить, уравнения движения точки и все ее основные кинематические характеристики,

Поместим, как и в предыдущей задаче, начало координат O в начальном положении точки, ось Oy направим вертикально, ось Ox расположим горизонтально в плоскости, проходящей через ось Oy и начальную скорость $\vec{V}_0$ (рис.1.10).

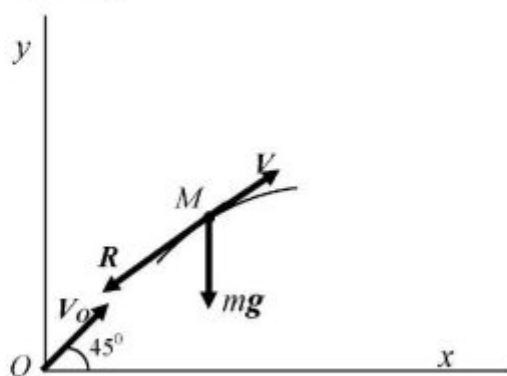


Рис. 1.10

Определим начальные условия движения точки. Так как начало координат выбрано в начальном положении точки, то при $t = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Проекции начальной скорости на оси координат равны

$$V_{0x} = \dot{x}_0 = V_0 \cos 45^\circ = 8,3 \cdot 0,707 \approx 5,87 \text{ м/с};$$

$$V_{0y} = \dot{y}_0 = V_0 \sin 45^\circ = 8,3 \cdot 0,707 \approx 5,87 \text{ м/с}.$$

$$\text{При } t = 0, \quad \dot{x}_0 = 5,87 \text{ м/с}, \quad \dot{y}_0 = 5,87 \text{ м/с}.$$

Проведем анализ действующих сил. Силу сопротивления представим векторной форме

$$\bar{R} = -\mu \bar{V},$$

где μ коэффициент пропорциональности.

Проекция силы сопротивления на оси координат равны

$$R_x = -\mu V_x = -\mu \frac{dx}{dt},$$

$$R_y = -\mu V_y = -\mu \frac{dy}{dt}.$$

Сила тяжести mg направлена вертикально и проецируется только на ось y .

Составим дифференциальные уравнения движения точки

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\mu \frac{dx}{dt}; \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\mu \frac{dy}{dt} - mg. \end{aligned}$$

После подстановки численных значений и элементарных преобразований получим:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 0,25 \frac{dx}{dt} = 0; \quad (a)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 0,25 \frac{dy}{dt} = -9,8 \quad (b)$$

Для решения первого уравнения составим характеристическое уравнение $r^2 + 0,25r = 0$.

Корни этого уравнения равны

$$r_1 = 0, \quad r_2 = -0,25.$$

Решение уравнения (a):

$$x = C_1 + C_2 e^{-0,25t}, \quad (в)$$

Тогда

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -0,25 C_2 e^{-0,25t}. \quad (г)$$

Для определения постоянных интегрирования подставим в уравнения (в) и (г) начальные условия: $t = 0, \quad x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 20$.

Из уравнения (в): $C_1 = -C_2$.

Из уравнения (г): $20 = -0,25 C_2$, откуда $C_2 = -80, C_1 = 80$.

Окончательно,

$$x = 80(1 - e^{-0,25t}).$$

$$V_x = 0,25 e^{-0,25t}.$$

Решение дифференциального уравнения (б) $y = y_1 + y_2$,
где y_1 - решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (б),
 y_2 - частное решение уравнения (б).

Однородное уравнение

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 0,25 \frac{dy}{dt} = 0. \quad (\partial)$$

Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 0,25\lambda = 0$. Корни этого уравнения равны: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -0,25$.

Решение уравнения (∂) совпадает с решением (в):

$$y = C_3 + C_4 e^{-0,25t},$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = 0,25 C_4 e^{-0,25t}.$$

Частное решение уравнения (б):

$$y_2 = At + B.$$

$$\frac{dy_2}{dt} = A, \quad \frac{d^2 y_2}{dt^2} = 0$$

После подстановки в уравнение (б) получим

$$0,25 A = -9,8.$$

Следовательно, $A = -39,2$.

Окончательно решение уравнения (б) принимает вид

$$y = C_3 + C_4 e^{-0,25t} - 39,2t.$$

Проекция скорости на ось y равна

$$V_y = \frac{dy}{dt} = -0,25 C_4 e^{-0,25t} - 39,2.$$

Подставим в эти уравнения начальные условия $t = 0, \quad y_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = 20$

$$0 = C_3 + C_4,$$

$$20 = -0,25 C_4 - 39,2.$$

Отсюда получаем:

$$C_4 = 236,8; C_3 = -236,8.$$

Тогда

$$y = 236,8(1 - e^{-0,25t}) - 39,2t,$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = -59,2 e^{-0,25t} - 39,2$$

Итак, движение точки в этом случае описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= 80(1 - e^{-0,25t}), \\ y &= 236,8(1 - e^{-0,25t}) - 39,2t. \end{aligned}$$

Скорость точки определяется ее проекциями на оси координат

$$\begin{aligned} V_x &= 0,25 e^{-0,25t} \\ V_y &= \frac{dy}{dt} = -59,2 e^{-0,25t} - 39,2 \end{aligned}$$

Построим по уравнениям движения траекторию точки и с помощью полученного графика определим основные характеристики движения точки: дальность и высоту полета. График построен с помощью программы Microsoft Excel (рис.11). Как следует из графика высота и дальность полета при наличии силы сопротивления меньше, чем при движении под действием только силы тяжести.

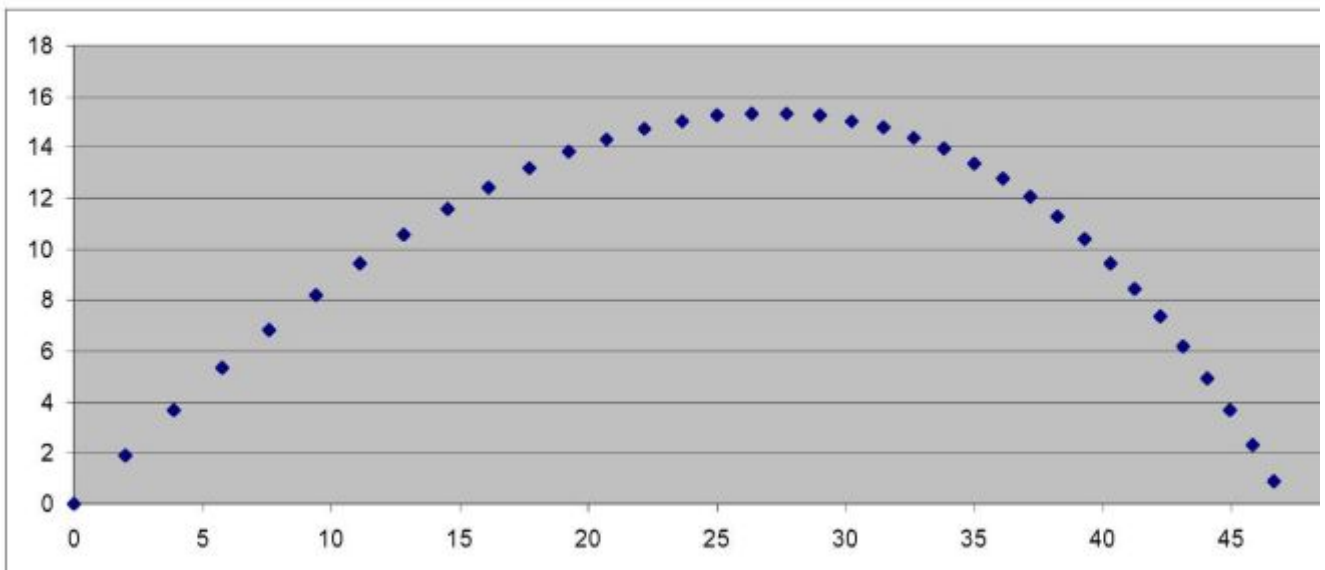


Рис. 11

Контрольные вопросы

1. Напишите дифференциальные уравнения движения материальной точки.
2. Как составить дифференциальные уравнения?
3. Сколько необходимо составить дифференциальных уравнений для описания движения точки в пространстве? На плоскости?
4. Записать дифференциальные уравнения точки, на которую действует сила $\vec{F} = 10t\vec{i} + 12\vec{j}$ и сила тяжести.
5. Что называется начальными условиями движения точки?
6. Какому условию должны удовлетворять действующие на точку силы и при каких начальных условиях движение точки будет прямолинейным?
7. Записать дифференциальное уравнение и его решение для прямолинейного движения точки под действием постоянной силы.
8. Записать решение дифференциального уравнения $m\frac{d^2x}{dt^2} = kx$.
9. Составить дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки под действием силы, зависящей только от скорости точки $\vec{F} = -\mu\vec{V}$ и получить его решение.
10. Составить дифференциальные уравнения прямолинейного движения точки под действием силы $F = 12t$ получить его решение.
11. Как определяются постоянные интегрирования при решении дифференциальных уравнений?

Библиографический список

1. Бутенин Н.В и др. Курс теоретической механики. Лань, 2002.- 736 стр.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Высшая школа, 2004. – 416 стр.
3. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Интеграл-Пресс, 2004. – 608 стр.
4. Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Интеграл-Пресс, 2004. – 384 стр.