ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Учебное пособие

Введение

В первой части пособия [1] рассмотрена кинематика материальной точки и системы материальных точек (твёрдого тела), то есть анализируется движение без учёта причины, вызвавшей изменение состояния движения. Выяснением причин, приводящих к изменению состояния движения тел, занимается раздел механики, который называют динамикой (от греческого *dynamis* – сила). Развитие динамики связано с именем И. Ньютона, который завершил построение классической механики и одновременно с Лейбницем положил начало анализу бесконечно малых величин. В работе «Математические начала натуральной философии», изданной в 1687 г., Ньютон представляет основные понятия и определения механики: массы, времени и пространства, силы и другие понятия, формулирует основные законы динамики, получившие название трёх законов Ньютона.

§ 1. Первый закон динамики (Ньютона)

При рассмотрении механического принципа относительности (принципа относительности Галилея) был установлен [1] смысл принципа инерции Галилея, составляющего основу первого закона Ньютона. Его можно рассматривать как определение и способ нахождения инерциальных систем отсчёта. *Система отсчёта, относительно которой тело покоится или движется прямолинейно и равномерно* $\left(\vec{\upsilon} = const\right)$ *в отсутствие воздействия на него других тел, называется <u>инерциальной</u> (или <u>галилеевой</u>) <u>системой отсчёта</u>*.

Таким образом, первый закон Ньютона является независимым и первым законом, выражающим пригодность системы отсчёта для рассмотрения движения в рамках классической механики. Первый закон Ньютона определяет условия, при которых система отсчёта является инерциальной, а законы классической механики имеют определённый смысл.

Практически инерциальной является гелиоцентрическая система отсчёта, начало координат которой находится в центре Солнца, а оси проведены в направлении звёзд, которые считаются неподвижными относительно Солнца. Любая система отсчёта, движущаяся относительно гелиоцентрической системы отсчёта с постоянной скоростью $\left(\vec{\upsilon} = const\right)$, также является инерциальной системой отсчёта. Система отсчёта, связанная с Землёй и называемая геоцентрической не является инерциальной. Это объясняется вращением Земли: а) вокруг собственной оси и б) вокруг Солнца, то есть ускоренным движением относительно гелиоцентрической системы отсчёта. Центростремительное ускорение вращательного движения Земли вокруг Солнца составляет приблизительно $6 \cdot 10^{-3}$ м/с^2, а величина центростремительного ускорения, связанного с вращением Земли вокруг собственной оси приблизительно равна $3 \cdot 10^{-2}$ м/с^2. Таким образом, центростремительное ускорение в первом случае на четыре порядка, а во втором случае на три порядка меньше ускорения свободного падения у поверхности Земли, равного 9,8 м/с^2. Следовательно, вращение Земли и вокруг собственной оси и вокруг Солнца не оказывает существенного влияния на значение силы тяжести, что позволяет рассматривать геоцентрическую систему как инерциальную при решении задач, условия которых позволяют пренебречь поправками к силе тяжести, обусловленные указанными вращениями Земли.

Свойство тел сохранять состояние покоя или прямолинейного равномерного движения называется инерцией. В классической механике Ньютона смысл термина «*инерция*» заключается не только в свойстве тел сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения тел в отсутствие воздействий со стороны других тел, а упорное стремление тел сохранять это состояние.

§ 2. Второй закон динамики (Ньютона)

В изложении Ньютона второй закон динамики имеет следующую формулировку: «*Изменение количества движения пропорционально приложенной к телу силе и происходит в том же направлении, в котором действует сила*». Таким образом, в механике вводится новая физическая величина – сила. Изменение состояния движения тела означает, что меняется его скорость, то есть тело приобретает ускорение. *Мера механического воздействия на данное тело других тел, ведущего к появлению ускорения, называется силой*. То есть силы нельзя рассматривать независимо от тел, посредством сил материальные тела воздействуют друг на друга. Таким образом, сила – это количественная мера интенсивности воздействия тел друг на друга.

Экспериментально установлено, что ускорение тела зависит от оказываемого на него воздействия: чем интенсивнее воздействие – тем большее ускорение приобретает тело. Поэтому естественным представляется вывод о том, что сила $\vec{F}$ пропорциональна ускорению $\vec{w}$ тела, то есть:

$$\vec{F} = k \cdot \vec{w}. \qquad (2.1)$$

Таким образом, сила $\vec{F}$ – векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на материальную точку или тело со стороны других тел или полей. Единицей измерения силы в СИ является Ньютон. Прямая линия, вдоль которой направлена сила, называется линией действия силы. Если тело можно рассматривать как недеформируемое, то есть абсолютно твёрдое, то силу можно считать приложенной к любой точке на линии её действия. Результат действия силы зависит от её величины, направления и точки приложения. Последнее утверждение означает, что под действием силы возможно не только перемещение тела как целого, но возможно также перемещение частей тела друг относительно друга, то есть деформация тела. Упругие деформации подчиняются закону Гука – величина деформации Δx пропорциональна деформирующей силе. Сила может быть оценена по величине деформации:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}, \tag{2.2}$$

где Δx_1 и Δx_2 – величина деформации, обусловленная действием силы соответственно F_1 и F_2. Этот факт составляет основу действия пружинных весов и динамометров.

Опыты показали, что если к различным телам приложить одну и ту же силу, то тела приобретут различные ускорения. То есть ускорение тела зависит не только от величины действующей на него силы, но определяется также некоторым собственным свойством тела. Различные силы одному и тому же телу сообщают разные ускорения, но отношение модуля силы к модулю ускорения для данного тела есть величина постоянная:

$$\frac{|\vec{F}|}{|\vec{w}|} = const = m. \tag{2.3}$$

Величина m имеет разные значения для разных тел, но для данного тела имеет определённое значение и называется массой тела. Опытным путём установлено, что всякое тело оказывает сопротивление попыткам привести его в движение или изменить величину или направление его скорости. *Свойство тел сохранять неизменным состояние своего движения по отношению по отношению к инерциальным системам отсчёта, если внешние воздействия отсутствуют или взаимно уравновешиваются, называется <u>инертностью</u>*. Количественной мерой инертности тела является его инертная масса, которую для краткости называют массой m. Единица массы в СИ – килограмм (кг). Из уравнения (2.3) следует, что чем меньшее ускорение приобретает тело под действием данной силы, тем больше масса тела:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{w_2}{w_1}. \tag{2.4}$$

Таким образом, чем больше масса тела, тем труднее изменить состояние его движения.

Свойства массы:

а) Масса тела – аддитивная величина, то есть масса системы m, состоящей из n тел (материальных точек), равна сумме масс m_i всех i-х тел, входящих в состав системы:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i;$$

б) В механике Ньютона выполняется закон сохранения массы: *«масса изолированной системы тел не изменяется при любых происходящих в ней процессах»*.

Из приведённых выше рассуждений следует количественная формулировка второго закона динамики. Сопоставляя равенства (2.1) и (2.4), можно записать:

$$m \cdot \vec{w} = k \cdot \vec{F}\,, \tag{2.5}$$

где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц. Можно подобрать единицы измерения величин, входящих в формулу (2.5) таким образом, чтобы выполнялось условие $k = 1$. Тогда формула (2.5) преобразуется к уравнению, выражающему второй закон Ньютона:

$$m \cdot \vec{w} = \vec{F}\,. \tag{2.6}$$

Второй закон Ньютона, записанный в аналитическом виде, называют «динамическим уравнением движения». Выражение (2.6) представляет интегральную форму записи второго закона Ньютона.

§ 3. Виды взаимодействий

Положение тела в произвольный момент времени может быть определено в результате решения уравнения движения (2.6). Для этого необходимо установить выражение силы $\vec{F}$, входящей в это уравнение. По современным представлениям всё многообразие явлений, наблюдаемых во Вселенной, обусловлено четырьмя видами взаимодействий: гравитационными силами, электромагнитными взаимодействиями, слабыми и сильными взаимодействиями.

а) Гравитационными называются силы, действующие между всеми телами, приводящие к взаимному притяжению тел. Гравитационные силы, действующие между двумя материальными точками массами m_1 и m_2, определяются законом всемирного тяготения:

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}\,, \tag{3.1}$$

где $\vec{F}_{12}$ – сила, действующая на материальную точку *1* со стороны материальной точки *2*, $\vec{r}_{12}$ – радиус-вектор первой точки относительно второй материальной точки (рис. 3.1), коэффициент пропорциональности γ называется гравитационной постоянной, знак минус указывает на то, что сила $\vec{F}_{12}$ направлена противоположно вектору $\vec{r}_{12}$. Гравитационное взаимодействие является самым слабым, и в микромире силы тяготения не играют практически никакой роли. Их значение возрастает

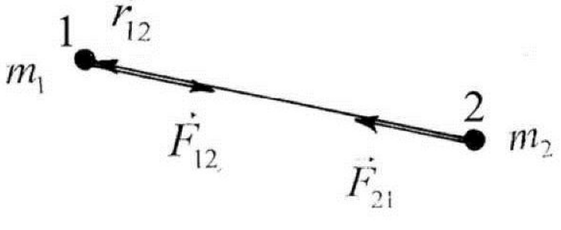


Рис. 3.1

с увеличением массы взаимодействующих тел. Эти силы способны создавать устойчивые состояния тел подобные Солнечной системе и различные звёздные скопления.

б) Слабые взаимодействия осуществляются между элементарными частицами и имеют малый радиус действия, ожидаемая величина которого составляет $2\cdot 10^{-18}$ м. Вследствие этого взаимодействие между ядрами двух соседних атомов, расстояние между которыми 10^{-10} м, ничтожно мало. В отличие от гравитационного взаимодействия слабое взаимодействие обусловливает нестабильность многих микроскопических частиц, вызывая их распад и характерно только для определённого круга квантовых процессов. Для макроскопической механики эти взаимодействия не играют никакой роли.

в) Электромагнитные взаимодействия осуществляются между телами, в состав которых входят электрически заряженные частицы. На электрический заряд q, движущийся в электрическом поле напряжённостью $\vec{E}$ и в магнитном поле индукцией $\vec{B}$ со скоростью $\vec{\upsilon}$, действует сила:

$$\vec{F} = \vec{F}_Э + \vec{F}_M = q\cdot\left(\vec{E} + \left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right]\right). \tag{3.2}$$

Электромагнитные взаимодействия обусловливают существование стабильных атомов, связывают атомы в молекулы, являются причиной взаимодействия частиц газов, жидкостей, твёрдых тел и играют основную роль во всех физико-химических и биологических процессах. Электромагнитное взаимодействие является очень интенсивным. К ним сводятся все силы не фундаментального характера.

г) Сильные взаимодействия являются наиболее мощными и действуют, в частности, между протонами и нейтронами в атомном ядре, а также осуществляются между частицами из группы так называемых мезонов (за исключением мюонов) и барионов – микрочастиц, осуществляющих процессы ядерной физики высоких энергий. Однако эти взаимодействия проявляются на расстояниях, по порядку величины не превышающих 10^{-15} м, и поэтому не учитываются в классической механике.

Теоретически все силы в классической механике имеют гравитационную или электромагнитную природу. При анализе сил, действующих между макроскопическими телами в классической механике удобно использовать приближённые законы, описывающие эти взаимодействия.

Все силы, учитываемые в классической механике, можно разделить на два класса.

1) Силы, возникающие при непосредственном соприкосновении тел. К ним относятся силы упругости и силы трения и сопротивления среды:

а) силы упругости пропорциональны величине деформации $\Delta\vec{r}$ (или Δx в скалярной форме):

$$\vec{F} = -k\cdot\Delta\vec{r}, \tag{3.3}$$

или в скалярной форме:

$$F_X = -k \cdot \Delta x. \tag{3.4}$$

Соотношения (3.3) и (3.4) выражают закон Гука;

б) силы трения и сопротивления среды зависят от скорости движения тел:

$$\vec{F} = -k' \cdot \frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon} \; - \tag{3.5}$$

сила трения скольжения и

$$\vec{F} = -k'' \cdot \vec{\upsilon} \; - \tag{3.6}$$

сила сопротивления среды (сила Стокса).

2) Ко второму классу сил можно отнести силы взаимодействия, обусловленные наличием полей: поле силы тяжести, гравитационное поле, электромагнитное поле.

Между силами, обусловленными действием полей и силами, возникающими при непосредственном соприкосновении тел нет принципиальной разницы. Силы, связанные с непосредственным взаимодействием тел, также обусловлены наличием полей, создаваемых структурными частицами (молекулами, атомами). Например, трение обусловлено взаимодействием молекул, силы сцепления которых носят, в основном, электромагнитный характер. Особенностью этих полей является их быстрое убывание по мере увеличения расстояния между молекулами. Поэтому действие этих полей проявляется на очень малом расстоянии, то есть при непосредственном соприкосновении тел. Природа сил взаимодействия является предметом изучения других разделов физики. В механике достаточно знать законы написания сил.

§ 4. Принцип независимости действия сил. Главный вектор сил, действующих на тело

Если на материальную точку (тело) одновременно действуют несколько взаимно независимых сил, то, как показывает опыт, ускорение материальной точки $\vec{w}$ равно геометрической сумме ускорений $\vec{w}_i$, которые обусловила бы каждая сила $\vec{F}_i$ отдельно в предположении отсутствия других сил:

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \vec{w}_i\,, \tag{4.1}$$

где n – число действующих сил. Таким образом, действие этих n сил $\vec{F}_i$ эквивалентно действию одной силы $\vec{F}$, являющейся равнодействующей силой или главным вектором всех действующих сил, равным векторной сумме приложенных к телу n сил:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \,. \tag{4.2}$$

Следовательно, в уравнении движения (2.6) сила $\vec{F}$ в общем случае определяется выражением (4.2). Поэтому уравнение движения следует записывать в виде:

$$m \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F} \,. \tag{4.3}$$

Несмотря на многообразие взаимодействий в природе силы обладают следующими общими свойствами.

а) Проекция главного вектора сил на оси координат выбранной системы отсчёта равна алгебраической сумме проекций всех сил, действующих на материальную точку:

$$F_X = \sum_{i=1}^{n} F_{X\,i}\,; \quad F_Y = \sum_{i=1}^{n} F_{Y\,i}\,; \quad F_Z = \sum_{i=1}^{n} F_{Z\,i}\,. \tag{4.4}$$

б) Второе свойство связано с понятием линии действия силы $\vec{F}_i$ – прямой, вдоль которой направлен вектор силы. Результат действия силы на абсолютно твёрдое тело не изменится при переносе точки приложения силы вдоль линии её действия. В этом смысле силу можно рассматривать как скользящий вектор.

в) Третье свойство связано с понятием системы сходящихся сил (пучка сил) – совокупности сил, приложенных к одному и тому же абсолютно твёрдому телу так, что линии их действии пересекаются в одной точке O, которую называют точкой приложения равнодействующей силы (рис. 4.1). Опыт показывает, что результат действия силы на материальную точку не зависит от того, двигалась ли материальная точка или покоилась.

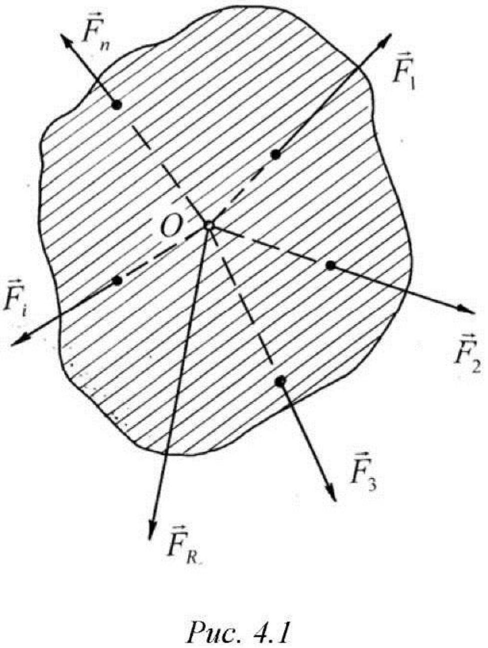


Рис. 4.1

На основании изложенного можно сформулировать одно из важнейших положений механики – принцип независимости действия сил: *результат действия силы на материальную точку (тело) не зависит от того, находится ли тело в покое или движется, а также от того, действует ли на тело одна сила или несколько сил одновременно*. Обобщение этого принципа на другие процессы носит название *принципа суперпозиции*, который справедлив для линейных процессов.

§ 5. Дифференциальное уравнение движения

5.1. Основная задача динамики

В зависимости от характера решаемой задачи, используют уравнение движения не только в интегральной форме (4.3), но и в дифференциальной форме. Уравнение движения в дифференциальной форме может быть получено подстановкой в интегральное уравнение (4.3) выражения ускорения материальной точки:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}, \tag{5.1}$$

где $\vec{\upsilon}$ – вектор скорости материальной точки. Соотношение (4.3) с учётом соотношения (5.1) преобразуется к уравнению в дифференциальной форме:

$$m \cdot \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}, \tag{5.2}$$

где $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$. Поскольку $\vec{w} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ уравнение движения можно преобразовать к общему виду:

$$m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}. \tag{5.3}$$

Если закон движения материальной точки задан в координатной форме, то есть, известны зависимости координат точки от времени: $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$, то векторное уравнение (5.3) можно заменить эквивалентной системой скалярных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m \cdot \dfrac{d\upsilon_x}{dt} = F_x; \\ m \cdot \dfrac{d\upsilon_y}{dt} = F_y; \\ m \cdot \dfrac{d\upsilon_z}{dt} = F_z; \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} m \cdot \dfrac{d^2x}{dt^2} = F_x; \\ m \cdot \dfrac{d^2y}{dt^2} = F_y; \\ m \cdot \dfrac{d^2z}{dt^2} = F_z. \end{cases} \tag{5.4}$$

При естественном способе задания движения (с помощью параметров траектории), когда известна траектория движения материальной точки, удобно вектор силы и ускорения представить в виде векторной суммы нормальной и касательной составляющей (рис. 5.1):

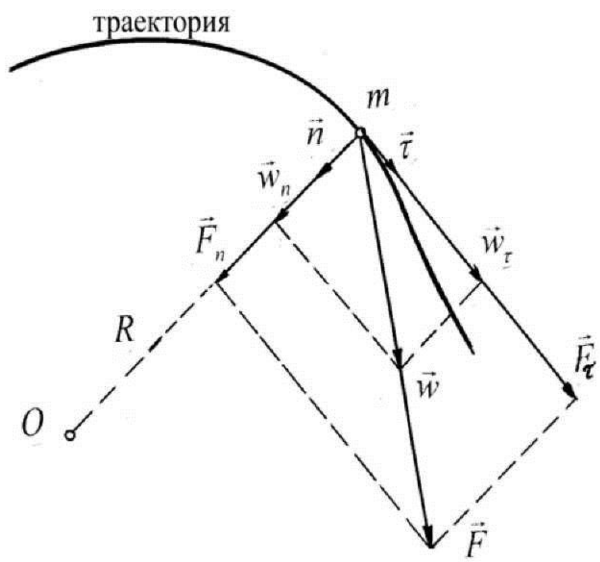


Рис. 5.1

$$\vec{w} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n = \\ = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \cdot \ \vec{\tau} + \frac{\upsilon^2}{R} \cdot \ \vec{n}; \quad (5.5)$$

$$\vec{F} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n . \quad (5.6)$$

С учётом соотношений (5.5) и (5.6) уравнение движения можно записать в виде системы двух векторных уравнений:

$$\begin{cases} m \cdot \vec{w}_\tau = m \cdot \dfrac{d\upsilon}{dt} \cdot \vec{\tau} = \vec{F}_\tau, \\ m \cdot \vec{w}_n = m \cdot \dfrac{\upsilon^2}{R} \cdot \vec{n} = \vec{F}_n. \end{cases}$$

Поскольку для данного тела $m = const$, используя уравнение (5.2) можно получить ещё одну форму записи уравнения движения:

$$m \cdot \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m \cdot \vec{\upsilon}\right) = \vec{F} . \quad (5.7)$$

Векторная величина $m \cdot \vec{\upsilon} = \vec{p}$ [кг·м/с] называется импульсом тела. Импульс является мерой механического движения, так как он зависит от скорости $\vec{\upsilon}$ тела и отражает его инертные свойства. Используя формулу импульса уравнение движения (5.7) можно преобразовать к виду:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} . \quad (5.8)$$

Уравнение (5.8) отражает <u>второй закон динамики</u>: *изменение импульса тела за единицу времени равно приложенной силе и происходит в том же направлении, в котором действует сила.*

В скалярном виде уравнение (5.8) может быть записано в виде системы трёх уравнений:

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x; \ \frac{dp_y}{dt} = F_y; \ \frac{dp_z}{dt} = F . \quad (5.9)$$

Основной задачей динамики материальной точки является решение дифференциального уравнения (5.8) (или 5.9) движения материальной точки. При этом возможны две противоположные формулировки задачи.

<u>Задача первого типа</u>. Дано: закон движения материальной точки и начальные условия в координатной форме $\left(x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)\right)$ и $\left(x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,\ z(0) = z_0\right)$ или в векторной форме $\left(\vec{r} = \vec{r}(t),\ \vec{r}(0) = \vec{r}_0\right)$, масса m материальной точки. Требуется определить силу, действующую

на материальную точку. Решение задачи сводится к определению ускорения $\vec{w} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, то есть выполняется относительно просто.

Задача второго типа, называемая основной, состоит в том, чтобы, зная силы $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$, действующие на материальную точку известной массы m, найти положение материальной точки в момент времени t, то есть найти координаты или радиус-вектор точки как функцию времени. Одна из существенных трудностей, возникающих при решении данной задачи, состоит в необходимости выявления основных взаимодействий, определяющих характер движения тела и законы действующих сил. Поскольку уравнение движения материальной точки (5.3) или (5.4) является дифференциальным уравнением второго порядка относительно координат [$\vec{r}(t)$ или $x(t),\ y(t),\ z(t)$], то решение задачи сводится к интегрированию уравнения движения. В зависимости от закона сил, действующих на тело, это дифференциальное уравнение второго порядка может быть как линейным, так и нелинейным. В общем виде интеграл (то есть решение) этого уравнения зависит от шести постоянных интегрирования, которые в конкретной задаче могут быть определены из начальных условий: $\vec{r} = \vec{r}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$. Наиболее просто эта задача решается, если $\vec{F} = const$ или $\vec{F} = \vec{F}(t)$. В этих случаях уравнение движения можно решить простым интегрированием, предварительно разделив переменные. В общем случае приходится решать дифференциальное уравнение второго порядка.

Рассмотрим пример решения одномерной задачи динамики, связанный с интегрированием дифференциального уравнения второго порядка. Под действием постоянной силы $F_x = const$ материальная точка массой m движется равноускоренно вдоль оси $OX: w_x = \frac{F_x}{m} = const = C$. Поскольку $w_x = \frac{d\upsilon_x}{dt}$, можно получить: $d\upsilon_x = w_x \cdot dt = \frac{F_x}{m} \cdot dt = C \cdot dt$. Интегрирование данного выражения даёт:

$$\upsilon_x = C \cdot \int dt = C \cdot t + C_1, \tag{5.10}$$

где C_1 — постоянная интегрирования. Поскольку $\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = C \cdot t + C_1$, можно выразить dx:

$$dx = C \cdot t \cdot dt + C_1 \cdot dt.$$

Интегрирование полученного уравнения позволяет установить вид зависимости координаты x от времени:

$$x = C \cdot \int t \cdot dt + C_1 \cdot \int dt = \frac{C \cdot t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_2, \qquad (5.11)$$

где C_2 – постоянная интегрирования.

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 необходимо задать начальные условия: при $t = 0$

$$x(0) = x_0 \qquad (5.12а)$$

и

$$\upsilon(0) = \upsilon_0 . \qquad (5.12б)$$

Подстановка условия (5.12.б) в уравнение (5.10) позволяет определить постоянную интегрирования C_1: $\upsilon_x(0) = \upsilon_0 = 0 \cdot C + C_1 = C_1$, следовательно

$$C_1 = \upsilon_0 . \qquad (5.13)$$

Подстановка условия (5.12.а) в уравнение (5.11) позволяет определить постоянную интегрирования C_2: $x(0) = x_0 = \frac{C \cdot 0}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 = C_2$, следовательно:

$$C_2 = x_0 . \qquad (5.14)$$

Решение задачи получается подстановкой выражений постоянных интегрирования (5.13) и (5.14) в уравнение (5.11):

$$x = \frac{C \cdot t^2}{2} + \upsilon_0 \cdot t + x_0 . \qquad (5.15)$$

Следовательно, путь, пройденный материальной точкой за время t, определяется выражением:

$$S = x - x_0 = \frac{C \cdot t^2}{2} + \upsilon_0 \cdot t . \qquad (5.16)$$

Выражение (5.16) является известным уравнением перемещения материальной точки при равноускоренном движении.

5.2. Третий закон динамики (Ньютона)

Содержание третьего закона Ньютона заложено во втором законе динамики материальной точки – любое действие одного тела на другое имеет характер взаимодействия.

Согласно третьему закону Ньютона *при взаимодействии двух тел каждое из тел действует на другое (в один и тот же момент времени) с одинаковыми по величине, но противоположно направленными силами* (рис. 5.2), то есть:

$$\left|\vec{F}_{12}\right| = \left|\vec{F}_{21}\right| \qquad (5.17)$$

и

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} . \qquad (5.18)$$

Это утверждение справедливо и для случая взаимодействия, осуществляемого посредством полей, например для взаимодействия между Землёй и Луной (рис. 5.3) $\vec{F}_{З-Л} = -\vec{F}_{Л-З}$.

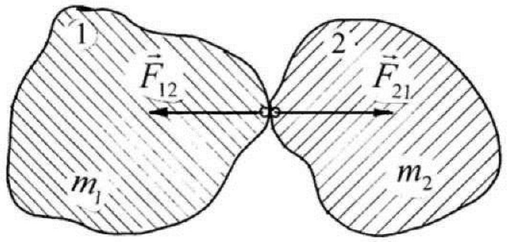


Рис. 5.2

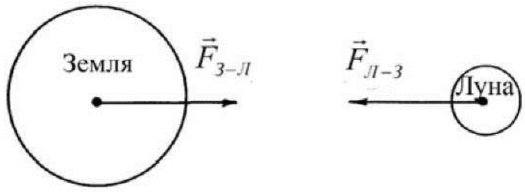


Рис. 5.3

Учитывая уравнения движения взаимодействующих тел

$$m_1 \cdot \vec{w}_1 = \vec{F}_{12} \tag{5.19}$$

и

$$m_2 \cdot \vec{w}_2 = \vec{F}_{21} \tag{5.20}$$

и уравнение (5.18) можно установить связь между ускорениями тел:

$$m_1 \cdot \vec{w}_1 = -m_2 \cdot \vec{w}_2, \text{ или } \vec{w}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \cdot \vec{w}_2. \tag{5.21}$$

Из уравнения (5.21) следует, что взаимодействующие тела движутся с ускорениями обратно пропорциональными массам тел и направленными в противоположные стороны.

Следует обратить внимание на то, что источниками «действующей» и «противодействующей» силы являются разные тела. Поэтому силы приложены к разным телам. Выбор «действующей» и «противодействующей» силы имеет субъективный характер, то есть зависит от положения наблюдателя.

Применение третьего закона Ньютона, сформулированного в указанном виде, ограничено. Это обусловлено требованием того, чтобы равенство сил выполнялось в <u>один и тот же момент времени</u>. Поскольку взаимодействия передаются с конечной скоростью, третий закон Ньютона выполняется только в случае достаточно большой продолжительности взаимодействия. Третий закон динамики не выполняется при релятивистских взаимодействиях, поскольку понятие одновременности в релятивистской физике относительно. В частности, сформулированный в указанной форме третий закон Ньютона не выполняется в случае электромагнитных взаимодействий.

5.3. Примеры применения уравнений динамики для решения задач

Пример 1. Два тела массами m_1 и m_2, связанные невесомой нерастяжимой нитью, лежат на горизонтальной плоскости (рис. 5.4). Коэффициент трения между этими телами и поверхностью равен k. Тело массой m_3 связано с телом массой m_1 нерастяжимой невесомой нитью, перекинутой через блок, который может вращаться без трения. Определите ускорение движения тел.

Для решения задачи необходимо составить скалярные уравнения движения (5.4) для каждого тела.

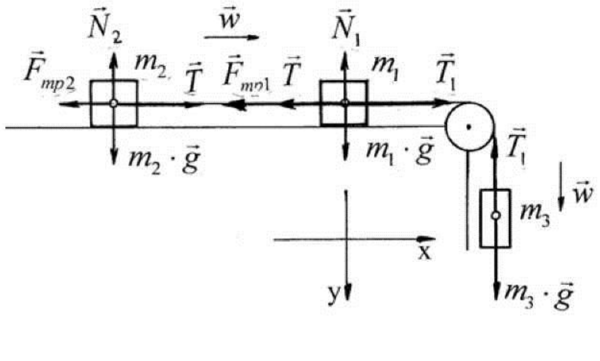


Рис. 5.4

Тело массой m_1: ось OX: $T_1 - T - F_{тр1} = m_1 \cdot w$; (5.23)

ось OY: $m_1 \cdot g - N_1 = 0$; (5.24)

тело массой m_2: ось OX: $T - F_{тр2} = 0$; (5.25)

ось OY: $m_2 \cdot g - N_2 = 0$; (5.26)

тело массой m_3: ось OY: $m_3 \cdot g - T_1 = m_3 \cdot w$. (5.27)

Учитывая, что $F_{тр} = k \cdot N$, выражая из уравнений (5.24) и (5.26) силы трения и суммируя почленно левые и правые части уравнений (5.23), (5.25) и (5.27), можно выразить ускорение системы тел:

$$w = g \cdot \frac{m_3 - k \cdot (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Пример 2. Небольшой брусок массой m скользит вниз по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом (рис. 5.5). Коэффициент трения между бруском и плоскостью равен k. Определите ускорение бруска относительно плоскости.

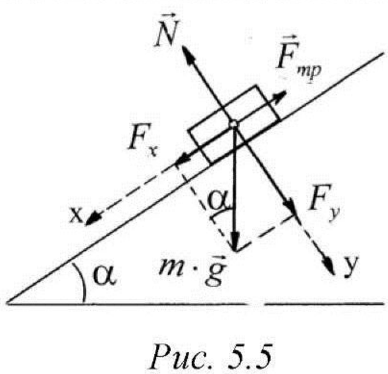


Рис. 5.5

Прежде всего надо изобразить на чертеже силы, действующие на брусок. Это сила тяжести $m \cdot \vec{g}$, нормальная сила реакции плоскости $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$, направленная в сторону, противоположную направлению движения тела.

Оси координат x и y удобно связать с наклонной плоскостью и скалярные уравнения движения записать относительно выбранной системы координат:

ось OX: $F_x - F_{тр} = m \cdot w$, или $m \cdot g \cdot \sin\alpha - k \cdot n = m \cdot v$, (5.28)

ось OY: $m \cdot g \cdot \cos\alpha - N = 0$ или $m \cdot g \cdot \cos\alpha = N$. (5.29)

Подстановка уравнения (5.29) в выражение (5.28) позволяет выразить ускорение бруска:

$$w = g \cdot (\sin\alpha - k \cdot \cos\alpha).$$

Пример 3. Небольшое тело массой m без начальной скорости соскальзывает с вершины гладкой сферы радиусом r (рис. 5.6). Определите скорость тела в момент его отрыва от плоскости.

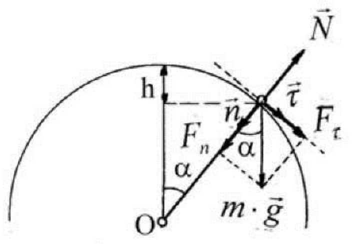


Рис. 5.6

На тело действуют сила тяжести $m \cdot \vec{g}$ и нормальная сила реакции $\vec{N}$ (рис. 5.6). Записывая уравнение движения (5.7) в проекциях на подвижные орты нормали $\vec{n}$ и касательной $\vec{\tau}$ к траектории, получим:

$$m \cdot \frac{d\upsilon}{dt} = F_\tau, \quad m \cdot \frac{\upsilon^2}{r} = F_n. \tag{5.30}$$

Для рассматриваемой задачи (рис. 5.6), уравнения (5.30) преобразуются к виду:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot g \cdot \sin\alpha \;\text{ и }\; m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot g \cdot \cos\alpha - N. \tag{5.31}$$

Преобразуем первое из уравнений (5.31) к виду, удобному для интегрирования. Воспользовавшись тем, что $dt = \frac{d\ell}{\upsilon} = \frac{r \cdot d\alpha}{\upsilon}$, где $d\ell$ — элементарный путь тела за промежуток времени dt, преобразуем первое из уравнений (5.31) к виду: $\upsilon \cdot d\upsilon = g \cdot r \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha$.

Проинтегрировав левую часть этого выражения в пределах от 0 до υ, а правую часть – в пределах от 0 до α, получим:

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos\alpha). \tag{5.32}$$

В момент отрыва тела от сферы $N = 0$, поэтому второе из уравнений (5.31) принимает вид:

$$v^2 = g \cdot r \cdot \cos\alpha, \tag{5.33}$$

где υ и α значения соответственно скорости и угла α в точке отрыва тела от сферы. Исключая $\cos\alpha$ из уравнений (5.32) и (5.33) можно выразить скорость тела в момент отрыва:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot r}{3}}.$$

§ 6. Релятивистское уравнение движения

Изменение представлений о пространстве и времени, выраженное в преобразованиях Лоренца, оказывает влияние на всю физику. Это привело, в частности, к замене требования инвариантности физических законов относительно преобразований Галилея требованием их инвариантности относительно преобразований Лоренца. Уравнение движения Ньютона

$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$, где $\vec{p}=m_0\cdot\vec{\upsilon}$, m_0 – масса тела, определяемая соотношением $m_0=\frac{|\vec{F}|}{|\vec{w}|}$ при $\frac{\upsilon}{c}\ll 1$, оказалось не инвариантным относительно преобразований Лоренца. Кроме того, закон сохранения ньютоновского импульса для взаимодействующих релятивистских частиц также не инвариантен относительно преобразований Лоренца. Существуют два пути преодоления указанных противоречий: а) отказаться от закона сохранения импульса в релятивистской механике, б) отказаться от ньютоновского определения импульса и заменить его таким выражением импульса релятивистской частицы, которое приводило бы к выполнению закона сохранения импульса и в релятивистском случае и обеспечивало бы его инвариантность относительно преобразований Лоренца. Поскольку закон сохранения импульса имеет более универсальный характер, чем уравнение движения, предпочтительным является второй способ решения сформулированной проблемы. Можно показать, что в релятивистском случае при столкновении частиц закон сохранения релятивистского импульса выполняется, если импульс зависит от скорости частицы следующим образом:

$$\vec{p}=\frac{m_0\cdot\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \quad (6.1)$$

При $\frac{\upsilon}{c}\ll 1$ уравнение (6.1) преобразуется в выражение импульса классической механики: $\vec{p}=m_0\cdot\vec{\upsilon}$. Используя выражение (6.1) для определения релятивистского импульса можно получить уравнение движения релятивистской частицы в форме, похожей на уравнение движения в ньютоновской механике:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}. \quad (6.2)$$

Уравнение (6.2) инвариантно относительно преобразований Лоренца, если импульс описывается выражением (6.1). Однако в релятивистской механике сила $\vec{F}$ не является инвариантной величиной, а преобразуется определённым образом при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой. Поэтому релятивистское уравнение движения имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\cdot\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=\vec{F}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i. \quad (6.3)$$

Иногда в релятивистской динамике удобно пользоваться ньютоновским определением импульса $\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon}$, где m – релятивистская масса, зависящая от скорости υ и определяемая выражением:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \tag{6.4}$$

При выполнении условия $\frac{\upsilon}{c} \ll 1$ релятивистская масса m приблизительно равна массе покоя m_0 $\left(m \approx m_0\right)$. Масса покоя является инвариантной величиной объективно характеризующей инертные свойства частицы. Релятивистская масса зависит от выбора системы отсчёта, то есть зависит от $\vec{\upsilon}$ (рис. 6.1) и не является инвариантной ве-личиной. Релятивистское уравнение движения можно записать в дифференциальной форме (6.2), но не может быть записано в интегральной форме поскольку направление силы и ускорения в релятивистской динамике не совпадают, то есть $m \cdot \vec{\upsilon} \neq \vec{F}$, где m – релятивистская масса, определяемая выражением (6.4). Для доказательства данного утверждения рассмотрим движение релятивистской частицы под действием силы $\vec{F}$ по заданной траектории (рис. 6.2). Разложим силу $\vec{F}$ на нормальную $\vec{F}_n$ и тангенциальную $\vec{F}_\tau$ составляющую. Тогда уравнение движения частицы можно записать в следующем виде:

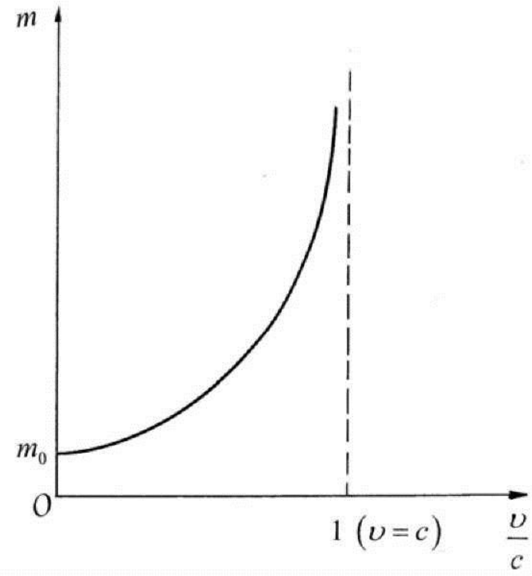


Рис. 6.1

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \cdot \upsilon \cdot \vec{\tau}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right) = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n. \tag{6.5}$$

Здесь $\vec{\upsilon} = \upsilon \cdot \vec{\tau}$, $\vec{\tau}$ – единичный вектор, направленный по касательной к траектории, υ – модуль скорости. Поскольку $m_0 = const$ массу можно вынести за знак производной, то есть:

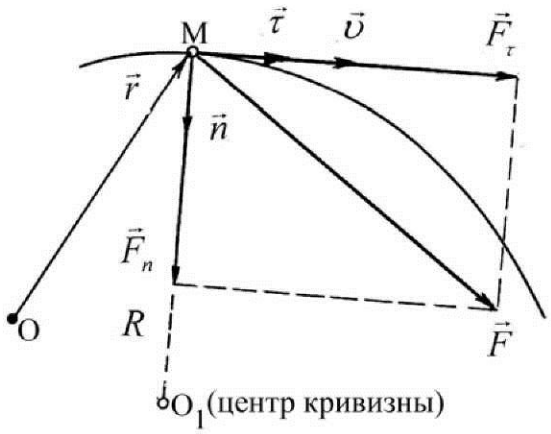


Рис. 6.2

$$m_0 \cdot \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon \cdot \vec{\tau}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \right) \right] = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n. \qquad (6.6)$$

Выражение в квадратных скобках уравнения (6.6) следует преобразовать к виду:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon \cdot \vec{\tau}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \right) \cdot \vec{\tau} + \frac{\upsilon}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \qquad (6.7)$$

Поскольку

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \cdot \frac{d\upsilon}{dt} + \frac{\upsilon \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2\cdot \upsilon}{c^2}\right) \cdot \frac{d\upsilon}{dt}}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

можно записать:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \right) = \frac{1}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{d\upsilon}{dt}. \qquad (6.8)$$

Учитывая соотношения (6.7) и (6.8) уравнение (6.6) можно записать в виде:

$$\frac{m_0}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \vec{\tau} + \frac{m_0}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \upsilon \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n. \qquad (6.9)$$

С другой стороны, ускорение можно представить в виде суммы тангенциальной и нормальной составляющей:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\upsilon \cdot \vec{\tau}\right) = \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \vec{\tau} + \upsilon \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n. \qquad (6.10)$$

Здесь

$$\vec{w}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \vec{\tau}; \quad \vec{w}_n = \upsilon \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \qquad (6.11)$$

Подстановка соотношений (6.11) в выражение (6.9) позволяет преобразовать уравнение движения к следующему виду:

$$\frac{m_0}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\vec{w}_\tau+\frac{m_0}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\vec{w}_n=\vec{F}_\tau+\vec{F}_n. \qquad (6.12)$$

Уравнение (6.12) можно представить в виде системы двух уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{m_0}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\vec{w}_\tau=\vec{F}_\tau;\\[2ex] \dfrac{m_0}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\vec{w}_n=\vec{F}_n;\end{cases}\quad \text{или} \quad \begin{cases}m_\parallel\cdot\vec{w}_\tau=\vec{F}_\tau;\\ m_\perp\cdot\vec{w}_n=\vec{F}_n.\end{cases} \qquad (6.13)$$

Здесь $\frac{m_0}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=m_\parallel$ называется продольной массой, $\frac{m_0}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}=m_\perp$ называется поперечной массой частицы.

Поскольку инертные свойства частицы в направлении движения и в направлении, перпендикулярном направлению движения, различны, легче изменить скорость по направлению, а не по величине (рис. 6.3). Поэтому в релятивистском случае ускорение и скорость неколлинеарны (рис. 6.4).

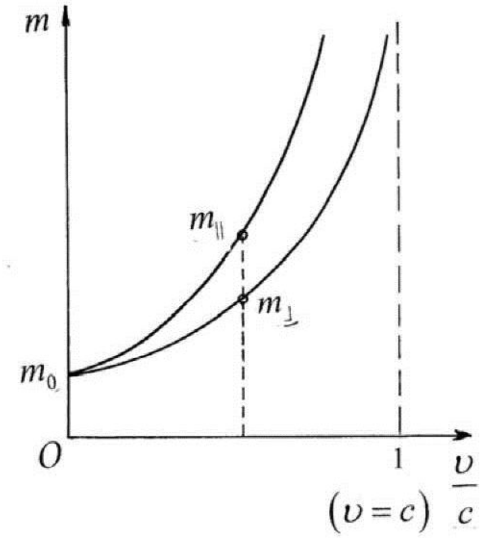


Рис. 6.3

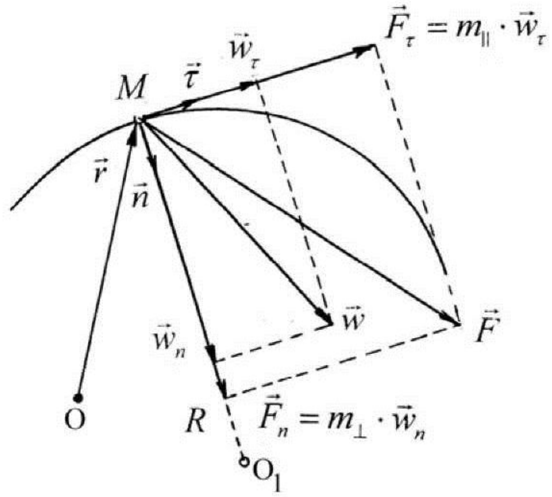


Рис. 6.4

Рассмотрим пример применения релятивистского уравнения движения для описания перемещения частицы, движущейся со скоростью, близкой к скорости света.

Релятивистский протон с импульсом $\vec{p}_0$ влетел в момент времени $t=0$ в область, где имеется поперечное движению однородное электрическое поле напряжённостью $\vec{E}$, причём $\vec{p}_0 \perp \vec{E}$. Найти зависимость от времени угла α, на который протон будет отклоняться от первоначального направления движения.

Решение следует начать с выбора системы координат: ось x направлена вдоль вектора $\vec{p}_0$, а ось y – вдоль вектора $\vec{E}$. Уравнение динамики релятивистской частицы в проекциях на эти оси имеет вид:

$$\frac{dp_x}{dt}=0, \qquad \frac{dp_y}{dt}=e\cdot E,$$

где e – заряд протона. Из этих уравнений следует, что $p_x = p_0$, $p_y = e\cdot E\cdot t$, или

$$\frac{m_0\cdot \upsilon_x}{\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}} = p_0, \quad \frac{m_0\cdot \upsilon_y}{\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}} = e\cdot E\cdot t. \tag{6.14}$$

Разделив второе уравнение (6.14) на первое, получим:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{e\cdot E\cdot t}{P_0}.$$

В отличие от нерелятивистского случая здесь υ_x уменьшается со временем. В этом можно убедиться, если возвести оба уравнения (6.14) во вторую степень, а затем сложить левые и правые части:

$$\frac{m_0^2\cdot\left(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2\right)}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = p_0^2+\left(e\cdot E\cdot t\right)^2.$$

Поскольку $\upsilon_x^2+\upsilon_y^2=\upsilon^2$, последнее уравнение можно преобразовать к виду:

$$\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2 = \left(1+\frac{m_0\cdot c^2}{p_0^2+\left(e\cdot E\cdot t\right)^2}\right)^{-1}.$$

Подставив это выражение в первое из уравнений (6.14), найдём:

$$\upsilon_x = \frac{c}{\sqrt{1+\left(\frac{m_0\cdot c}{p_0}\right)^2+\left(\frac{e\cdot E\cdot t}{p_0}\right)^2}},$$

то есть действительно, скорость υ_x уменьшается при увеличении t.

§ 7. Динамика системы материальных точек

7.1. Уравнение движения системы материальных точек

Рассмотрим задачу описания движения системы материальных точек. Входящие в систему материальные точки могут взаимодействовать друг с другом (внутренние силы), а также с материальными точками, не входящими в состав системы (внешние силы). Если внешние силы отсутствуют или взаимно скомпенсированы, система материальных точек называется замкнутой или изолированной. Сказанное справедливо и для твёрдого тела, поскольку его можно моделировать системой n материальных точек. Если тело абсолютно твёрдое его модель представляет собой неизменяемую систему материальных точек.

Рассмотрим систему n материальных точек массой m_i каждая. В общем случае на произвольную i-ю материальную точку системы действуют:

а) внутренние силы со стороны материальных точек, входящих в состав системы:

$$\vec{f}_i = \sum_{k=1}^{n} \vec{f}_{ik}, \tag{7.1}$$

где $\vec{f}_{ik}$ — сила, действующая на i-ю материальную точку со стороны k-й, причём $i \neq k$, так как материальная точка не может действовать сама на себя;

б) внешние силы, приложенные к i-й материальной точки со стороны тел, не входящих в состав системы. Обозначая символом $\vec{F}_i$ равнодействующую всех внешних сил, действующих на i-ю материальную точку, уравнение движения i-й материальной точки можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_{\substack{k=1 \\ i\neq k}}^{n} \vec{f}_{ik} . \tag{7.2}$$

Число таких уравнений равно количеству материальных точек (n), входящих в состав системы. Решение данной системы уравнений с учётом начальных условий для каждой материальной точки позволяет описать движение системы в целом. Однако такой способ описания движения системы материальных точек, связанный с описанием движения каждой точки системы, оказывается слишком громоздким.

Удобнее описывать движение системы материальных точек с помощью одного уравнения, подобного уравнению движения одной материальной точки. Для этого сложим почленно левые и правые части системы уравнений (7.2):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ i\neq k}}^{n} \vec{f}_{ik} . \tag{7.3}$$

Согласно третьему закону Ньютона $\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki}$, поэтому $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{\substack{k=1\\ i\neq k}}^{n}\vec{f}_{ik} = 0$.

Тогда уравнение (7.3) преобразуется к виду:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i. \tag{7.4}$$

Учитывая, что производная от суммы величин равна сумме производных от каждой величины, входящей в сумму, уравнение (7.4) можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i, \text{ или } \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \tag{7.5}$$

где величина $\vec{p} = \sum\limits_{i=1}^{n}\vec{p}_i$ называется импульсом системы n материальных точек, $\vec{F} = \sum\limits_{i=1}^{n}\vec{F}_i$ векторная сумма всех внешних сил, приложенных ко всем материальным точкам системы. Уравнение (7.5) формально подобно уравнению движения одной материальной точки, но имеет другое содержание. Фактически уравнение (7.5) содержит в себе n уравнений движения материальных точек системы.

7.2. Уравнение моментов материальной точки

Если в процессе движения материальной точки присутствуют элементы вращения уравнение движения удобно записывать в виде так называемого «уравнения моментов».

Рассмотрим движение материальной точки массой m с импульсом $\vec{p} = m\cdot\vec{\upsilon}$ под действием силы $\vec{F}$ (рис. 7.1). Уравнение движения материальной точки имеет вид:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \tag{7.6}$$

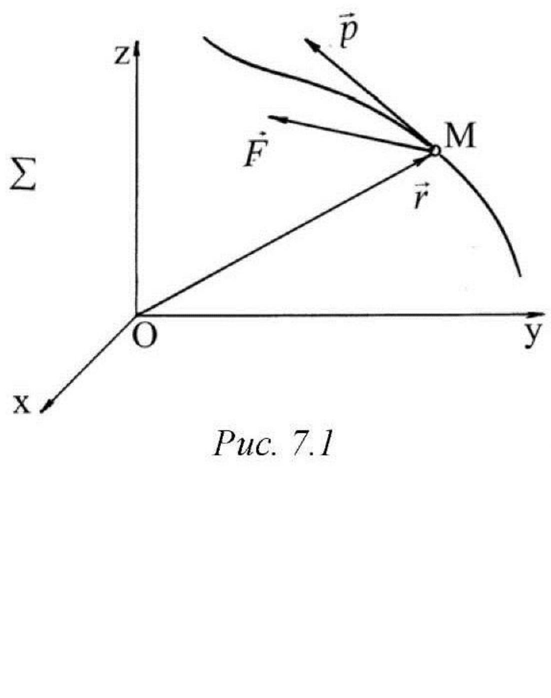


Рис. 7.1

Умножив векторно обе части уравнения (7.6) на радиус-вектор $\vec{r}$ материальной точки M, получим:

$$\left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right] = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]. \tag{7.7}$$

Преобразуем левую часть уравнения (7.7). Для этого необходимо продифференцировать по времени векторное произведение $\left[\vec{r}, \vec{p}\right]$:

$$\frac{d}{dt}[\vec{r},\vec{p}]=\left[\frac{d\vec{r}}{dt},\vec{p}\right]+\left[\vec{r},\frac{d\vec{p}}{dt}\right]=\left[\vec{r},\frac{d\vec{p}}{dt}\right], \tag{7.8}$$

поскольку $\left[\frac{d\vec{r}}{dt},\vec{p}\right]=[\vec{\upsilon},m\cdot\vec{\upsilon}]=0$. Следовательно, уравнение (7.6) движения материальной точки преобразуется к виду:

$$\frac{d}{dt}[\vec{r},\vec{p}]=[\vec{r},\vec{F}]. \tag{7.9}$$

Векторная величина $\vec{L}$, равная векторному произведению векторов радиус-вектора $\vec{r}$ и импульса $\vec{p}$:

$$\vec{L}=[\vec{r},\vec{p}], \tag{7.10}$$

называется моментом импульса материальной точки относительно точки O.

Векторы $\vec{L}$, $\vec{r}$ и $\vec{p}$ образуют правую тройку векторов (рис. 7.2).

Модуль вектора момента импульса равен: $|\vec{L}|=|\vec{r}|\cdot|\vec{p}|\cdot\sin\alpha$, где α – угол между радиус-вектором и импульсом.

Векторное произведение $\vec{M}=[\vec{r},\vec{F}]$ называется моментом $\vec{M}$ силы, действующей на частицу, относительно точки O.

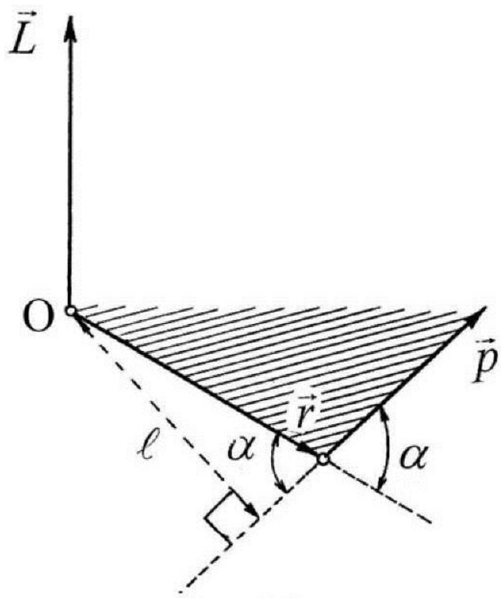


Рис. 7.2

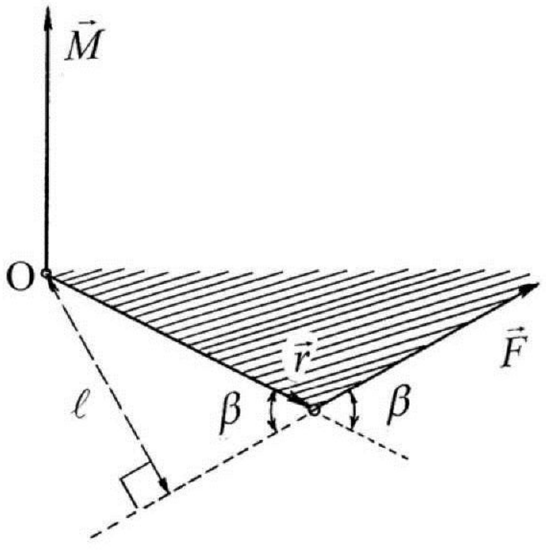


Рис. 7.3

Вектор момента силы $\vec{M}$, как и $\vec{L}$, является аксиальным (рис. 7.3). Векторы $\vec{M}$, $\vec{r}$ и $\vec{F}$ образуют правую тройку векторов. Модуль момента силы равен:

$$|\vec{M}|=|\vec{r}|\cdot|\vec{F}|\sin\beta=F\cdot\ell,$$

где β – угол между радиус-вектором и вектором силы, $\ell=|\vec{r}|\cdot\sin\beta$ – плечо силы $\vec{F}$ относительно точки O. Таким образом, *производная по времени от момента импульса частицы относительно некоторой* *точки O выбранной системы отсчёта равна моменту действующей силы относительно той же точки O:*

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}\ . \qquad (7.11)$$

Соотношение (7.11) называется *уравнением моментов*.

Уравнение движения материальной точки при равномерном перемещении со скоростью $\vec{\upsilon}$ по окружности радиусом r, можно записать в виде: $\vec{L}=[\vec{r},\vec{p}]=m\cdot[\vec{r},\vec{\upsilon}]$. Поскольку $\vec{\upsilon}=[\vec{\omega},\vec{r}]$ уравнение движения материальной точки преобразуется к виду: $\vec{L}=m\cdot[\vec{r},[\vec{\omega},\vec{r}]]=m\cdot\vec{\omega}\cdot(\vec{r},\vec{r})-m\cdot\vec{r}\cdot(\vec{r},\vec{\omega})$. Учитывая, что $(\vec{r},\vec{\omega})=0$, выражение момента импульса можно преобразовать:

$$\vec{L}=m\cdot\vec{\omega}\cdot(\vec{r},\vec{r})=m\cdot r^2\cdot\vec{\omega}=J\cdot\vec{\omega}, \qquad (7.12)$$

где величина $J=m\cdot r^2$ называется моментом инерции материальной точки относительно точки O, r – расстояние между материальной точкой и центром вращения O. Размерность момента инерции: $[J]=[m]\cdot[r]^2=кг\cdot м^2$.

Если радиус окружности, по которой движется материальная точка, не меняется, то $J=m\cdot r^2=const$.

Подстановка соотношения (7.12) в уравнение моментов (7.11) даёт:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d(J\cdot\vec{\omega})}{dt}=J\cdot\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\vec{M}\ . \qquad (7.13)$$

Здесь $\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение. С учётом последнего обозначения уравнение (7.13) преобразуется к виду:

$$J\cdot\vec{\varepsilon}=\vec{M}\ . \qquad (7.14)$$

Таким образом: $J=\frac{|\vec{M}|}{|\vec{\varepsilon}|}$, то есть момент инерции является мерой инертности материальной точки при вращательном движении.

Опыт показывает, что две разные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ вызывают одинаковое угловое ускорение, если равны их моменты, то есть $\vec{M}_1=\vec{M}_2$.

Две материальные точки с разными массами m_1 и m_2 эквивалентны в том смысле, что приобретают одинаковое угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ при одинаковом вращающем моменте сил, если равны их моменты инерции, то есть $J_1=J_2$ или $m_1\cdot r_1^2=m_2\cdot r_2^2$.

Замечание. Поскольку уравнения движения в релятивистской механике имеет вид: $\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$, а направления ньютоновского и релятивистского импульсов совпадают с направлением вектора скорости $\vec{\upsilon}$, понятия момента импульса $\vec{L}$ и момента силы $\vec{M}$ имеют смысл и релятивистском случае, а, следовательно, справедливо и уравнением моментов:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}\text{ , где } \vec{L}=\left[\vec{r},\vec{p}\right],\ \vec{p}=\frac{m_0\cdot\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

7.3. Уравнение моментов системы n материальных точек

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек, в которой на каждую i-ю материальную точку действуют внутренние силы $\vec{f}_i=\sum\limits_{\substack{k=1\\ i\neq k}}^{n}\vec{f}_{ik}$ и внешние силы, $\vec{F}_i$ – сумма внешних сил, действующих на i-ю материальную точку. Уравнение моментов для i-й материальной точки:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt}=\vec{M}_i+\vec{M}_{0i}. \tag{7.15}$$

Здесь $\vec{M}_i$ и $\vec{M}_{0i}$ момент соответственно внешних и внутренних сил, действующих на i-ю материальную точку. Динамику системы из n материальных точек описывает система n уравнений (7.15). Почленное суммирование левых и правых частей уравнений данной системы даёт:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{L}_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i+\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_{0i}\text{ , или } \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i\text{ ,}$$

так как сумма всех внутренних сил, действующих в системе, с учётом третьего закона Ньютона $\left(\vec{f}_{ik}=-\vec{f}_{ki}\right)$, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\vec{f}_{ik}=\left(\vec{f}_{12}+\vec{f}_{21}\right)+\left(\vec{f}_{13}+\vec{f}_{31}\right)+\ldots\left(\vec{f}_{1k}+\vec{f}_{k1}\right)=0.$$

Суммарный момент внутренних сил равен:

$\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}[\vec{r}_i,\vec{f}_{ik}]=\frac{1}{2}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}([\vec{r}_i,\vec{f}_{ik}]+[\vec{r}_k,\vec{f}_{ki}])=\frac{1}{2}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}[(\vec{r}_i-\vec{r}_k),\vec{f}_{ik}]$. В данном выражении силы $\vec{f}_{ik}$ коллинеарны векторам $\vec{r}_i-\vec{r}_k$. Поэтому каждое слагаемое суммы моментов сил равно нулю, а, следовательно, и вся сумма равна нулю.

Векторная величина $\vec{L}=\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{L}_i$ *называется* <u>*моментом импульса системы материальных точек.*</u> Векторная величина $\vec{M}=\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{M}_i$ есть векторная сумма моментов всех внешних сил, приложенных ко всем материальным точкам системы. Таким образом, уравнение моментов системы материальных точек подобно уравнению моментов (7.11) одной точки системы, но имеет другое физическое содержание.

7.4. Центр инерции (центр масс) системы материальных точек. Теорема о движении центра масс

Движение системы, состоящей из n материальных точек, можно описать одним уравнением, формально подобным уравнению движения одной материальной точки в том случае, если использовать понятие центра инерции или центра масс системы материальных точек.

Для того, чтобы ввести понятие центра масс, рассмотрим систему, состоящую из двух материальных точек массами m_1 и m_2 (рис. 7.4).

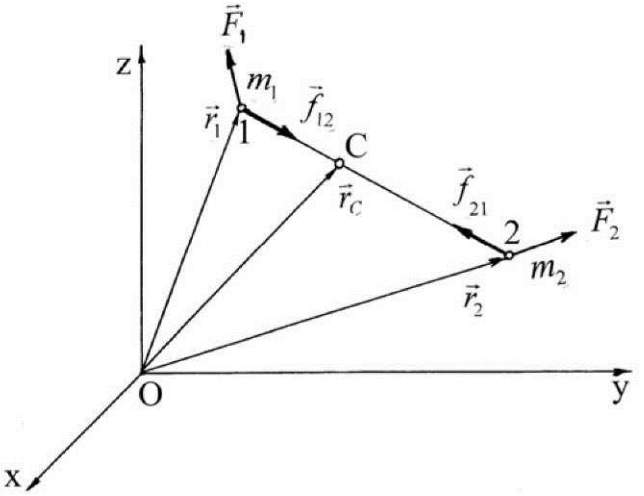


Рис. 7.4

Уравнения движения материальных точек этой системы имеют вид:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \vec{w}_1 = \vec{F}_1 + \vec{f}_{12}; \\ m_2 \cdot \vec{w}_2 = \vec{F}_2 + \vec{f}_{21}; \end{cases} \tag{7.16}$$

где $\vec{w}_1$ и $\vec{w}_2$ – ускорения материальных точек, $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ – внешние силы, действующие на материальные точки *1* и *2* соответственно, $\vec{f}_{12}$ – сила, действующая на материальную точку *1* со стороны точки *2*, $\vec{f}_{21}$ – сила, действующая на точку *2* со стороны точки *1*. Суммирование левых и правых частей уравнений системы (7.16) даёт:

$$m_1 \cdot \vec{w}_1 + m_2 \cdot \vec{w}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \tag{7.17}$$

поскольку $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$. Учитывая, что $\vec{w}_1 = \dfrac{d^2\vec{r}_1}{dt^2}$ и $\vec{w}_2 = \dfrac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}$, уравнение (7.17) можно преобразовать к виду:

$$m_1 \cdot \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \cdot \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}, \text{ или } \frac{d^2}{dt^2}\left(m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2\right) = \vec{F}. \tag{7.18}$$

Это уравнение, очевидно, совпало бы с уравнением движения одной воображаемой материальной точки C (рис. 7.4), если бы подобрать её массу так, чтобы выполнялось условие $m = m_1 + m_2$ и положение в пространстве, которое удовлетворяло бы условию: $m \cdot \vec{r}_C = m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2$. Уравнение движения точки C можно записать, исходя из аналогии с уравнением (7.18):

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(m \cdot \vec{r}_C\right) = m \cdot \frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2} = \vec{F}. \tag{7.19}$$

Уравнение (7.19) справедливо при условии, что радиус-вектор точки C определяется уравнением:

$$\vec{r}_C = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \tag{7.20}$$

то есть точка C расположена на прямой линии, соединяющей точки *1* и *2* и делит этот эту прямую на отрезки, обратно пропорциональные массам точек m_1 и m_2. *Точка C, радиус-вектор которой удовлетворяет уравнению (7.20), называется <u>центром масс</u> или <u>центром инерции</u> системы материальных точек.* Эти рассуждения можно распространить на систему, содержащую произвольное количество n материальных точек. Для этого необходимо найти центр масс системы из первых двух и третьей точки системы, и так далее. Тогда радиус-вектор центра масс системы, содержащей n материальных точек можно выразить следующим уравнением:

$$\vec{r}_C = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + \ldots + m_i \cdot \vec{r}_i + \ldots + m_n \cdot \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_i + \ldots + m_n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i, \tag{7.21}$$

где $m = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$ – масса системы материальных точек.

Из уравнения (7.21) следуют выражения координат центра масс системы:

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{1}{m} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i; \\ y_C = \dfrac{1}{m} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i; \\ z_C = \dfrac{1}{m} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i. \end{cases} \tag{7.22}$$

Скорость движения центра масс можно выразить как производную по времени от радиус-вектора центра масс системы n материальных точек:

$$\vec{\upsilon}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{\upsilon}_i. \tag{7.23}$$

Ускорение центра масс системы n материальных точек определяется как первая производная скорости движения центра масс по времени:

$$\vec{w}_C = \frac{d\vec{\upsilon}_C}{dt} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{w}_i. \tag{7.24}$$

Используя соотношение (7.24) можно выразить уравнение движения центра масс системы материальных точек:

$$m \cdot \vec{w}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{w}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}, \tag{7.25}$$

где $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – масса системы материальных точек, $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ – векторная сумма всех внешних сил, приложенных ко всем материальным точкам системы материальных точек. Выражение (7.25) отражает содержание теоремы о движении центра инерции, согласно которой *центр инерции (центр масс) системы материальных точек движется так, как двигалась бы одна материальная точка массой m, равной массе системы, под действием силы $\vec{F}$, равной сумме всех внешних сил, приложенных ко всем материальным точкам системы.*

Рассмотрим некоторые важные особенности динамики системы материальных точек.

а) Можно доказать, что в ньютоновской механике положение центра масс системы материальных точек не зависит от выбора системы отсчёта. Радиус-вектор центра масс системы n материальных точек относительно системы отсчёта Σ (рис. 7.5) с началом координат в точке O определяется соотношением (7.21), а относительно системы отсчёта Σ' с началом отсчёта в точке O' определяется выражением:

$$\vec{r}\,'_C = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}\,'_i,.$$

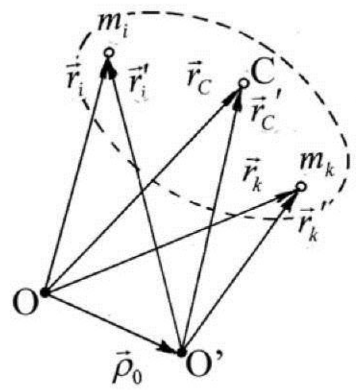


Рис. 7.5

Радиус вектор i-й точки относительно начала координат O' системы отсчёта Σ' связан с радиус-вектором этой же точки относительно точки O (рис. 7.5) связан соотношением: $\vec{r}\,'_i = \vec{r}_i - \vec{\rho}_0$. С учётом полученного соотношения радиус-вектор центра масс системы относительно точки O' можно выразить в следующем виде:

$$\vec{r}\,'_C = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i - \frac{1}{m} \cdot \vec{\rho}_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i = \vec{r}_C - \vec{\rho}_0.$$

Полученное соотношение выражает радиус-вектор $\vec{r}\,'_C$, проведённый из точки O' в центр масс системы точку C. Таким образом, центр масс инвариантен относительно преобразования системы отсчёта.

б) Импульс центра масс

$$\vec{p}_C = m \cdot \vec{\upsilon}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{\upsilon}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$$

равен векторной сумме импульсов всех материальных точек системы.

Система отсчёта, начало координат которой совпадает с центром масс системы, называется <u>системой центра масс</u> или <u>Ц-системой</u>. В системе центра масс $\vec{r}_C = 0$, поэтому $\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i = 0$; $\vec{\upsilon}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = 0$, следовательно $\vec{p}_C = m \cdot \vec{\upsilon}_C = 0$. Таким образом, векторная сумма импульсов материальных точек относительно системы центра масс равна нулю: $\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = 0$.

в) Если тело является однородным, то есть ускорение свободного падения для всех точек тела одинаково ($g = const$), то центр масс тела совпадает с центром тяжести:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i = \frac{1}{m \cdot g} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot g \cdot \vec{r}_i = \frac{1}{G} \cdot \sum_{i=1}^{n} G_i \cdot \vec{r}_i = \vec{r}_{Ц.Т.}$$

Здесь $G = m \cdot g = g \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i$.

г) Понятие «центр масс» в релятивистской механике не имеет смысла, так как при движении со скоростью, соизмеримой со скоростью света в вакууме, масса является функцией скорости, и выполненные выше преобразования не выполняются. Однако в механике специальной теории относительности используется термин «система центра масс», под которым понимают систему отсчёта, начало координат которой совпадает с точкой, относительно которой векторная сумма импульсов системы материальных точек равна нулю: $\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = 0$.

д) Момент импульса системы n материальных точек относительно начала координат (точки O, рис. 7.6) по определению равен:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i, m_i \cdot \vec{\upsilon}_i] = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot [\vec{r}_i, \vec{\upsilon}_i],$$

где $\vec{L}_i$, m_i, $\vec{r}_i$ и $\vec{\upsilon}_i$ – соответственно момент импульса, масса, радиус-вектор и скорость произвольной *i*-й точки системы n материальных точек.

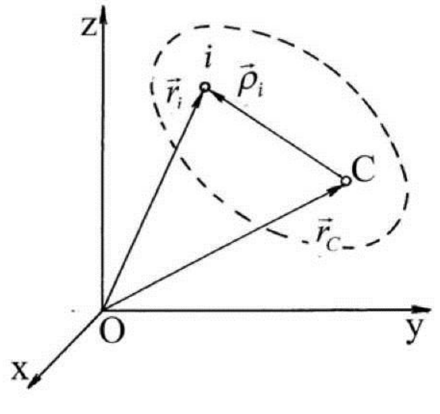


Рис. 7.6

На рис. 7.6 радиус-вектор $\vec{r}_C$ определяет положение центра масс относительно системы отсчёта Σ с началом отсчёта в точке O, радиус-вектор $\vec{\rho}_i$ характеризует положение *i*-ю точки относительно центра масс C, а $\vec{r}_i$ – положение i-й точки относительно системы отсчёта Σ (точки O). Поскольку $\vec{r}_i = (\vec{r}_i - \vec{r}_C) + \vec{r}_C$, момент импульса системы материальных точек можно выразить следующим соотношением:

$$\vec{L}=\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\left[\left(\vec{r}_i-\vec{r}_C\right),\vec{\upsilon}_i\right]+\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\left[\vec{r}_C,\vec{\upsilon}_i\right]=\vec{L}_0+\vec{L}_{Ц.М.},\qquad(7.26)$$

где

$$\vec{L}_{Ц.М.}=\sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_C,m_i\cdot\vec{\upsilon}_i]=\sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_C,\vec{p}_i]=\left[\vec{r}_C,\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\vec{\upsilon}_i\right]=\left[\vec{r}_C,\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i\right]=\left[\vec{r}_C,\vec{p}_C\right].\qquad(7.27)$$

Здесь $\vec{p}_C=\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i$, $\vec{L}_{Ц.М.}$ – момент импульса центра масс системы относительно точки O. Он зависит от выбора системы отсчёта.

Преобразуем выражение момента импульса $\vec{L}_0$ уравнения (7.26):

$$\vec{L}_0=\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot[\left(\vec{r}_i-\vec{r}_C\right),\vec{\upsilon}_i]=\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot[\vec{\rho}_i,\vec{\upsilon}_i],$$

где $\vec{\rho}_i=\vec{r}_C-\vec{r}_i$. Величина $\vec{L}_0$ не зависит от выбора системы отсчёта (точки O), поскольку положение центра масс C не зависит от выбора системы отсчёта. Параметр $\vec{L}_0$ называется *собственным моментом импульса системы материальных точек*. В классической механике понятие «собственный момент импульса» для материальной точки (частицы) нельзя ввести, но в квантовой механике понятие собственный момент импульса вводится для элементарной частицы. Его называют «спином».

§ 8. Энергия. Работа силы. Мощность

Рассмотренное ранее понятие «импульс» ($\vec{p}=m\cdot\vec{\upsilon}$) – характеризующее инертные свойства тела и являющееся некоторой мерой движения тела, не всегда пригодно для оценки изменения характера движения тела. Например, рассмотрим движение тела при наличии трения в результате действия которого тело останавливается ($\vec{p}=0$), при этом механическое движение преобразуется в тепловую форму движения (молекул) и импульс тела не может быть мерой такого движения. Следовательно, нужна другая, универсальная мера движения, позволяющая учитывать переход от одной формы движения к другой, то есть являющаяся единой количественной мерой движения во всех его формах. Такой физической величиной является энергия. *Энергия – это количественная мера движения материи во всех формах этого движения.*

В природе непрерывно протекают процессы, сопровождающиеся преобразованием одной формы движения в другую, а энергия является единой мерой, которая характеризует происходящие при этом количественные и качественные изменения движения. Эти изменения обусловлены взаимодействием тел системы, как между собой, так и с внешними телами. Поскольку движение является неотъемлемым атрибутом материи (способом её существования), всякое тело обладает некоторым запасом энергии, являющейся мерой этого движения. Таким образом, энергия – это единая количественная мера движения во всех формах его проявления и только условно для количественной оценки качественно различных форм движения вводится понятие механической, тепловой, электромагнитной и других видов энергии.

Изменение механического движения тела вызывается силами, действующими на него со стороны других тел. Поэтому для количественной оценки обмена энергией между взаимодействующими телами вводится понятие работы силы.

8.1. Работа силы

Изменение состояния движения тела, а следовательно изменение его энергии вызывается силами, действующими на тело. Под действием внешних сил перемещаются тела или части тела друг относительно друга при деформации тела. Поэтому необходимо ввести характеристику действия силы, вызывающего это перемещение.

Процесс изменения энергии тела под действием силы называется процессом совершения работы, а происходящее при этом приращение энергии тела называется работой, совершаемой действующей на тело силой. Таким образом, работа является мерой передачи энергии от одного тела к другому. Опыт показывает, что сила, приложенная к телу, совершает работу в том случае, если перемещается точка приложения силы. Поэтому работой постоянной силы $\left(\vec{F} = const\right)$ при прямолинейном поступательном движении называют величину (A) тем большую, чем больше проекция силы $\vec{F}$ на направление движения, и, чем больше перемещение точки приложения силы:

$$A = F_\tau \cdot \Delta x, \qquad (8.1)$$

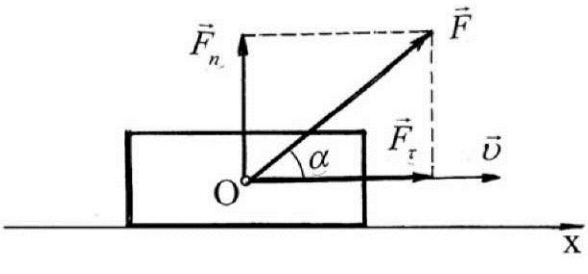


Рис. 8.1

где $\Delta x = \left|\Delta\vec{r}\right|$ – перемещение точки приложения силы $\vec{F}$ (рис. 8.1), причём $F_\tau = \left|\vec{F}_\tau\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot \cos\alpha$, где α – угол между направлением перемещения и вектором силы $\vec{F}$. Тогда соотношение (8.1) преобразуется к виду:

$$A = F_\tau \cdot \Delta x = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\Delta\vec{r}\right| \cdot \cos\alpha = \left(\vec{F}, \Delta\vec{r}\right). \qquad (8.2)$$

Если рассматривать достаточно малые перемещения $d\vec{r}$ при криволинейном движении материальной точки, то в пределах этого малого перемещения движение можно рассматривать как прямолинейное (рис. 8.2), а

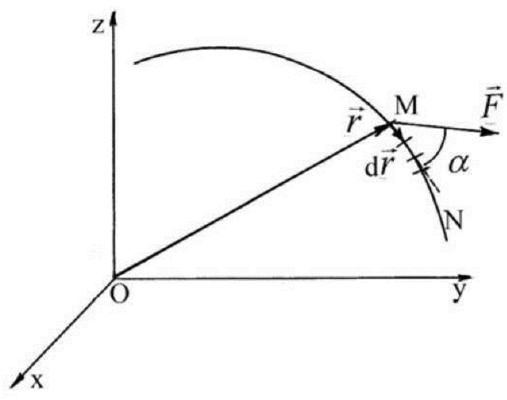


Рис. 8.2

переменную силу – постоянной. Элементарную работу ∂A при элементарном перемещении $d\vec r$ можно выразить соотношением:

$$\partial A = \left(\vec F, d\vec r\right) = \left|\vec F\right| \cdot \left|d\vec r\right| \cdot \cos\alpha . \qquad (8.3)$$

Элементарная работа обозначена символом частного дифференциала ∂A, поскольку сила $\vec F$ может быть функцией нескольких переменных: времени, скорости, координат, а проекция силы на направление движения $\vec F_\tau$ зависит и от угла α между направлением действия силы и направлением движения. Поэтому работа не является однозначной однозначной функцией координаты. Это означает, что элементарная работа не является полным дифференциалом функции координат.

8.2. Вычисление работы на конечном отрезке пути

Рассмотрим перемещение материальной точки по произвольной траектории MN (рис. 8.2) под действием переменной силы. Для расчёта работы переменной силы необходимо разбить траекторию на бесконечно малые участки $\Delta S_i = \left|\Delta \vec r_i\right|$ такие, в пределах которых перемещение можно считать прямолинейным, а силу постоянной. Элементарная работа ΔA_i на каждом из таких участков определяется соотношением:

$$\Delta A_i = F_{\tau i} \cdot \Delta S_i = F_{\tau i} \cdot \left|\Delta \vec r_i\right| . \qquad (8.4)$$

На отрезке MN работа переменной силы равна сумме элементарных работ на участках ΔS_i, причём, чем меньше размер участков ΔS_i, тем точнее можно рассчитать работу этой силы:

$$A_{MN} = \lim_{\substack{\Delta r_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} F_{\tau i} \cdot \Delta r_i .$$

Если предел этой суммы существует, то в пределе $n \to \infty$ эта сумма преобразуется в криволинейный интеграл первого рода вдоль линии MN:

$$A_{MN} = \int_{MN} F_\tau \cdot dr = \int_{MN} \left(\vec F, d\vec r\right) . \qquad (8.5)$$

Вычисление такого интеграла сводится к нахождению определённого интеграла:

$$A_{MN} = A_{1\to 2} = \int_1^2 \left(\vec F, d\vec r\right) . \qquad (8.6)$$

Размерность работы (и энергии): $[A] = [F] \cdot [L] = Н \cdot м = Дж$ *(Джоуль)*.

Работа силой не совершается, если: 1) угол α между направлением силы и перемещения равен 90° или 2) $dr = 0$.

Если $\alpha < 90^{\circ}$, то есть сила $\vec{F}_{\tau}$ совпадает с направлением скорости $\vec{\upsilon}$, то работа силы считается положительной (рис. 8.3а), при этом тело приобретает механическую энергию.

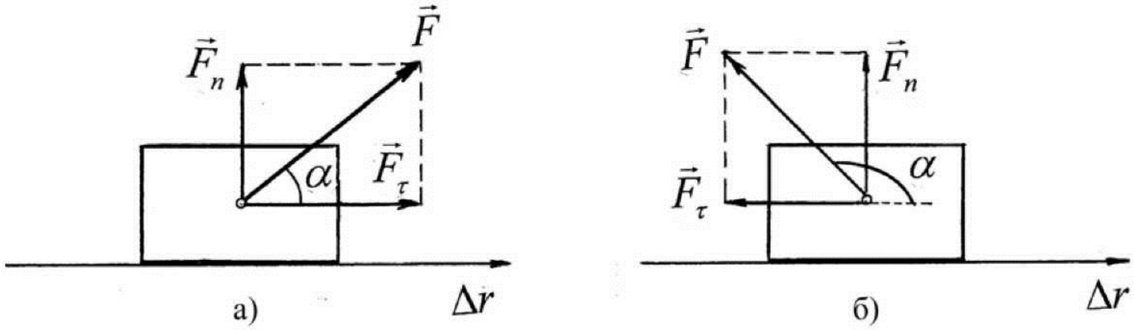


Рис. 8.3

Если $\alpha > 90^{\circ}$ (рис. 8.3б), то работа считается отрицательной, при этом тело отдаёт энергию, совершая работу против внешних сил.

Если на тело одновременно действует несколько сил, например, $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, то работа, совершаемая этими силами, описывается выражением: $\partial A = \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = \left(\vec{F}_1, d\vec{r}\right) + \left(\vec{F}_2, d\vec{r}\right) = \partial A_1 + \partial A_2$, то есть равна сумме работ, совершаемых каждой силой отдельно.

8.3. Мощность

Часто для оценки работы, произведённой данной силой $\vec{F}$, необходимо знать не только величину работы, но и время, за которое совершена эта работа. Поэтому для характеристики скорости совершения работы силой $\vec{F}$, используется физическая величина, называемая мощностью N. *Мощностью N силы $\vec{F}$ называют величину, равную работе, совершённой этой силой в единицу времени:*

$$N = \frac{\partial A}{\partial t}. \tag{8.7}$$

Размерность мощности $[N] = [A] \cdot [t]^{-1} = Дж/с = Вт\ (Ватт)$.

Поскольку $\partial A = \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|d\vec{r}\right| \cos\alpha$, работу можно описать выражением: $\partial A = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\frac{dr}{dt}\right| \cdot \cos\alpha = \left(\vec{F}, \vec{\upsilon}\right)$, где $\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ – скорость движения материальной точки.

Если $N \neq const$, то используется понятие средней мощности: $\langle N \rangle = \frac{A}{\Delta t}$, где $\Delta t = t_2 - t_1$ — время совершения работы A.

8.4. Кинетическая энергия материальной точки и системы материальных точек

При перемещении материальной точки массой m под действием силы $\vec{F}$ она совершает работу, а, следовательно, энергия движущейся точки возрастает на величину работы силы.

Различают два вида механической энергии: кинетическую и потенциальную энергию. Кинетической энергией называется механическая энергия движущегося тела, равную работе, которую необходимо совершить при торможении тела до полной остановки (или равную работе, которую необходимо совершить, чтобы вызвать данное движение тела из состояния покоя).

Рассмотрим материальную точку массой m, которая из состояния покоя под действием силы $\vec{F}$ начинает движение по произвольной криволинейной траектории (рис. 8.4). Уравнения движения материальной точки удобно записать в виде:

$$\begin{cases} m\cdot\ \vec{w}_\tau = m\cdot\ \dfrac{d\upsilon}{dt}\cdot\ \vec{\tau} = \vec{F}_\tau, \\ m\cdot\ \vec{w}_n = m\cdot\ \dfrac{d\upsilon}{dt}\cdot\ \vec{n} = \vec{F}_n. \end{cases} \qquad (8.8)$$

Поскольку нормальная составляющая $\vec{F}_n$ силы $\vec{F}$ не совершает работы, то за изменение энергии материальной точки ответственна тангенциальная составляющая силы $\vec{F}$:

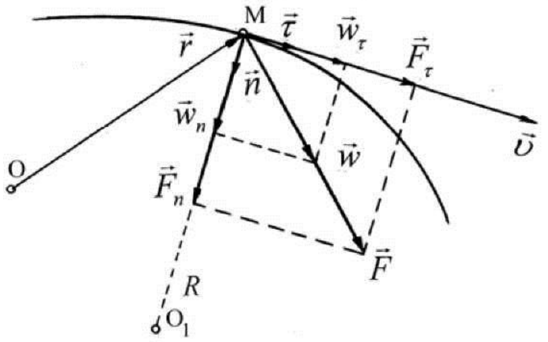


Рис. 8.4

$$m\cdot\frac{d\upsilon}{dt}\cdot\vec{\tau} = \vec{F}_\tau. \qquad (8.9)$$

Поскольку направление составляющей силы $\vec{F}_\tau$ совпадает с направлением вектора скорости, уравнение (8.9) можно записать в скалярном виде:

$$m\cdot\frac{d\upsilon}{dt} = F_\tau. \qquad (8.10)$$

Умножая обе части уравнения (8.10) на модуль перемещения dr, получим:

$$m\cdot\frac{d\upsilon}{dt}\cdot dr = F_\tau\cdot dr, \text{ или } m\cdot d\upsilon\cdot\frac{dr}{dt} = F_\tau\cdot dr.$$

Учитывая, что $\partial A = F_\tau\cdot dr$, а также $\dfrac{dr}{dt} = \upsilon$, последнее соотношение можно записать в виде:

$$\partial A = F_\tau\cdot dr = m\cdot\upsilon\cdot d\upsilon. \qquad (8.11)$$

Для того, чтобы материальную точку разогнать из состояния покоя $(\upsilon = 0)$ до скорости υ, необходимо совершить работу:

$$A = \int_0^{\upsilon} \partial A = \int_0^{\upsilon} m \cdot \upsilon \cdot d\upsilon = \frac{m \cdot \upsilon^2}{2} = E_k. \quad (8.12)$$

Величина $E_k = \frac{m \cdot \upsilon^2}{2}$ называется кинетической энергией материальной точки. Если скорость материальной точки под действием силы $\vec{F}$ изменяется от значения υ_1 до значения υ_2, работа силы определяется выражением:

$$A = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \partial A = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} m \cdot \upsilon \cdot d\upsilon = \frac{m \cdot \upsilon_2^2}{2} - \frac{m \cdot \upsilon_1^2}{2} = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k. \quad (8.13)$$

Из уравнения (8.13) следует, что работа силы $\vec{F}$ равна изменению кинетической энергии материальной точки. Кинетическая энергия может быть выражена также через массу и импульс материальной точки:

$$E_k = \frac{m \cdot \upsilon^2}{2} = \frac{m^2 \cdot \upsilon^2}{2 \cdot m} = \frac{p^2}{2 \cdot m}, \quad (8.14)$$

где $p = |\vec{p}| = m \cdot |\vec{\upsilon}| = m \cdot \upsilon$ – импульс материальной точки.

Рассмотрим систему n материальных точек. Обозначим массу i-й материальной точки символом m_i, а скорость – $\vec{\upsilon}_i$. В соответствии с уравнениями (8.13) и (8.14) сила $\vec{F}_i$, приложенная к i-й материальной точке, совершает работу A_i, равную приращению кинетической энергии материальной точки:

$$E_{ki} = A_i = \frac{m_i \cdot \upsilon_i^2}{2}. \quad (8.15)$$

Очевидно, что кинетическая энергия системы n материальных точек равна сумме работ торможения всех материальных точек, входящих в состав системы, до остановки, то есть:

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \cdot \upsilon_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} E_{ki} = E_k. \quad (8.16)$$

Если скорость i-й материальной точки изменяется от υ_{1i} до υ_{2i}, работа, совершаемая силой $\vec{F}_i$, равна приращению кинетической энергии материальной точки и определяется выражением:

$$A_i = \frac{m_i \cdot \upsilon_{2i}^2}{2} - \frac{m_i \cdot \upsilon_{1i}^2}{2} = \Delta E_k. \quad (8.17)$$

Для системы n материальных точек выражение (8.17) запишется в виде:

$$A=\sum_{i=1}^{n}A_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta E_{ki}=E_{k2}-E_{k1}. \qquad (8.18)$$

Замечания:

а) поскольку скорость материальной точки не является инвариантом ($\vec{\upsilon}\neq inv$), то есть зависит от выбора системы отсчёта, а, следовательно, и кинетическая энергия материальной точки различается в разных системах отсчёта;

б) кинетическая энергия материальной точки зависит только от её массы и скорости $\vec{\upsilon}$. При этом несущественно, каким образом материальная точка (тело) массой m приобрела эту скорость. Следовательно, кинетическая энергия является однозначной функцией состояния системы (тела), то есть её элементарное изменение можно выразить знаком полного дифференциала $\left(dE_k\right)$.

§ 9. Работа в поле консервативных сил. Потенциальная энергия

Если некоторая физическая величина в каждой точке пространства или части пространства имеет определённое значение, то существует поле этой физической величины. Поле называется скалярным, если данная физическая величина является скалярной, векторная физическая величина характеризуется векторным полем. Если в каждой точке пространства на частицу действует определённая сила, это значит, что частица находится в силовом поле. Различают два вида силовых полей: поле консервативных сил и поле неконсервативных сил. Система тел называется консервативной, если между телами системы действуют силы, зависящие только от расстояния между взаимодействующими телами, и не зависят от времени явно. Таким образом, для поля консервативных сил справедливо соотношение: $\vec{F}=\vec{F}(r)$, причём $r=r(t)$. Примером консервативной силы является сила тяготения:

$$F=\gamma\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{r^2}.$$

Для определения консервативного силового поля часто используют свойство этих сил. Сила $\vec{F}$, действующая на материальную точку, называется консервативной, если работа $A_{1\to2}$, совершаемая этой силой при перемещении материальной точки из одного положения (*1*) в другое (*2*) не зависит от того, по какой траектории происходит это перемещение (рис. 9.1), а зависит только от начального и конечного положения материальной точки, то есть $A_{1\to2}=A_{1\to C1\to2}=A_{1\to C2\to2}$. Последнее равенство можно записать в виде: $\int\limits_{\substack{1\\(C1)}}^{2}\left(\vec{F},d\vec{r}\right)=\int\limits_{\substack{1\\(C2)}}^{2}\left(\vec{F},d\vec{r}\right)$, то есть эти интегралы не зависят от пути интегрирования.

Поскольку работа определяется выражением:

$$A_{1\to2}=\int_1^2(\vec{F},d\vec{r})=\int_1^2\left|\vec{F}\right|\cdot\ \left|d\vec{r}\right|\cdot\ \cos\alpha,$$

то изменение направления движения вдоль траектории на противоположное приводит к изменению знака работы ($\cos\alpha$ меняет знак). Это означает:

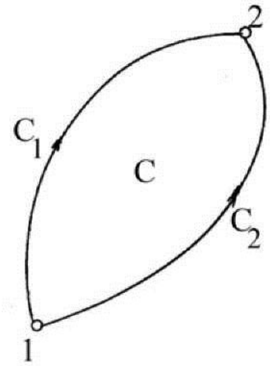


Рис. 9.1

$$\int\limits_{\substack{1\\(C1)}}^{2}\left(\vec{F},d\vec{r}\right)=\int\limits_{\substack{1\\(C2)}}^{2}\left(\vec{F},d\vec{r}\right)=-\int\limits_{\substack{2\\(C2)}}^{1}\left(\vec{F},d\vec{r}\right)$$

или

$$\int\limits_{\substack{1\\(C1)}}^{2}\left(\vec{F},d\vec{r}\right)+\int\limits_{\substack{2\\(C2)}}^{1}\left(\vec{F},d\vec{r}\right)\equiv0. \qquad (9.1)$$

Соотношение (9.1) указывает на то, что при перемещении материальной точки вдоль замкнутой кривой C (например, по пути $1\to C1\to2\to\to C2\to1$), работа консервативной силы тождественно равна нулю, то есть

$$\oint_C\left(\vec{F},d\vec{r}\right)\equiv0. \qquad (9.2)$$

Интеграл (9.2) называется циркуляцией вектора. Исходя из выражения (9.2) можно дать количественную формулировку поля консервативных сил. Если циркуляция вектора $\vec{F}$ вдоль замкнутого контура C тождественно равна нулю, то сила $\vec{F}$ называется консервативной или потенциальной.

Выражение (9.2) указывает на то, что если тело находится в потенциальном силовом поле, то работа сил поля не зависит от формы траектории, а является функцией только начального и конечного положения (координаты) тела.

Таким образом, интеграл $\int\limits_1^2\left(\vec{F},d\vec{r}\right)$ не зависит от пути интегрирования, а определяется только исходным и конечным положением тела в потенциальном силовом поле. Это означает, что работа консервативной силы является однозначной функцией координат, то есть существует такая однозначная функция координат $U(\vec{r})$, полный дифференциал которой равен подынтегральному выражению $\left(\vec{F},d\vec{r}\right)$:

$$\partial A=-dU(\vec{r}). \tag{9.3}$$

Функцию $U=U(\vec{r})$ называют потенциальной энергией. Для установления физического смысла потенциальной энергии и знака минус в выражении (9.3), рассмотрим перемещение тела массой m под действием поля потенциальных сил из бесконечности (за пределами поля) в данную точку поля $M_1(x_1,y_1,z_1)$. При этом поле совершает работу A_1, не зависящую от траектории движения тела. На такую же величину возрастает энергия тела массой m, то есть

$$A_1=-U_1(x_1,y_1,z_1). \tag{9.4}$$

Если тело той же массы m перемещается в точку $M_2(x_2,y_2,z_2)$, поле совершает работу A_2, не зависящую от формы траектории движения тела. При этом энергия тела возрастает:

$$A_2=-U_2(x_2,y_2,z_2). \tag{9.5}$$

Знак «минус» в выражениях (9.4) и (9.5) указывает на то, что, если поле совершает работу над телом, его энергия увеличивается. Если тело совершает работу против сил поля, его энергия уменьшается. Если под действием сил поля тело перемещается из точки M_1 в точку M_2, то независимо от траектории движения тела совершается работа:

$$A_{M1\to M2}=U_1-U_2=-(U_2-U_1)=-\Delta U, \tag{9.6}$$

то есть

$$dA=-dU(x,y,z). \tag{9.7}$$

Интегрирование выражения (9.7) позволяет выразить работу, совершаемую при перемещении из точки M_1 в точку M_2:

$$A_{1\to 2}=-\int_1^2 dU=U_1(x_1,y_1,z_1)-U_2(x_2,y_2,z_2). \tag{9.8}$$

Таким образом, работа, совершаемая полем консервативных сил, равна изменению потенциальной энергии. Величина потенциальной энергии в данной точке поля может быть определена с точностью до постоянной интегрирования, то есть:

$$U(x,y,z)=-\int dA+const. \tag{9.9}$$

Поэтому практический смысл имеет не значение потенциальной энергии в данной точке поля, а разность потенциальных энергий двух точек пространства.

Пользуясь произволом в выборе потенциальной энергии, можно считать её равной любому заданному значению в некоторой точке пространства. Тогда во всех остальных точках её значение будет фиксировано однозначно. Процедура придания потенциальной энергии однозначности называется нормировкой потенциальной энергии.

Потенциальная энергия – это энергия взаимодействия. Каждое из взаимодействующих тел создаёт поле. Взаимодействие происходит посредством полей.

Если потенциальное силовое поле определено, то есть известны силы, действующие на тело в каждой точке пространства, можно найти скалярное поле потенциала, то есть потенциальную энергию тела в каждой точке пространства. Из выражения (9.7) следует, что полный дифференциал dU можно представить в виде суммы частных дифференциалов по переменным x, y, z:

$$dA = -dU(x,y,z) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot dz\right). \qquad (9.10)$$

С другой стороны по определению:

$$dA = \left(\vec{F}\cdot d\vec{r}\right). \qquad (9.11)$$

Выражая силу и радиус-вектор через проекции на оси координат:

$$\vec{F} = F_x\cdot\vec{i} + F_y\cdot\vec{j} + F_z\cdot\vec{k} \qquad (9.11a)$$

и $d\vec{r} = dx\cdot\vec{i} + dy\cdot\vec{j} + dz\cdot\vec{k}$, величину dA уравнения (9.11) можно преобразовать к виду:

$$dA = F_x\cdot dx + F_y\cdot dy + F_z\cdot dz. \qquad (9.12)$$

Сравнивая выражения (9.10) и (9.12) можно выразить проекции сил на оси координат через потенциальную энергию:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x};\quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y};\quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (9.13)$$

Подстановка соотношений (9.13) в уравнение (9.11.а) позволяет выразить силу $\vec{F}$ через потенциальную энергию:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\vec{k}\right). \qquad (9.14)$$

Вектор в скобках правой части выражения (9.14) называется градиентом скалярной функции $U(x,y,z)$, то есть:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\vec{k} = gradU(x,y,z). \qquad (9.15)$$

С учётом соотношения (9.15) уравнение (9.14) можно записать в виде:

$$F = -grad\,U(x,y,z). \qquad (9.16)$$

С помощью выражения (9.16) можно определить силу в любой точке поля, если известно скалярное поле потенциала.

Поскольку потенциальная энергия является однозначной функцией координат, в пространстве, в котором действует потенциальное силовое поле, всегда можно подобрать такое геометрическое место точек, в которых потенциальная энергия имеет одинаковое значение. Поверхность, во всех точках которой потенциальная энергия имеет одно и то же значение, называется поверхностью равного потенциала или эквипотенциальной поверхностью. Каждому значению потенциальной энергии соответствует своя эквипотенциальная поверхность. Эквипотенциальные поверхности не пересекаются. Из формулы (9.14) следует, что проекция вектора $\vec{F}$ на любое направление, касательное к эквипотенциальной поверхности в данной точке равна нулю. Это значит, что вектор $\vec{F}$ направлен нормально эквипотенциальной поверхности (рис. 9.2). Следовательно, градиент потенциальной энергии есть вектор, направленный по нормали к эквипотенциальной поверхности в сторону возрастания потенциальной энергии U. На рис. 9. 2 изображено семейство эквипотенциальных поверхностей, причём $U_1 < U_2 < U_3 < U_4$, а также градиент потенциальной энергии $grad\, U$ и соответствующий вектор силы $\vec{F}$ в точке A потенциального поля.

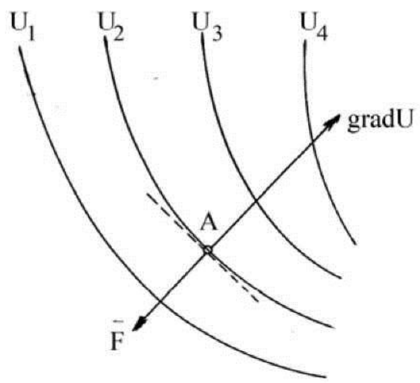


Рис. 9.2

Модуль градиента потенциальной энергии можно выразить в виде:

$$\left|grad\, U(\vec{r})\right| = \frac{U_2 - U_1}{r_2 - r_1} = \frac{\Delta U}{\Delta r}, \qquad (9.17)$$

или при бесконечно малом расстоянии между эквипотенциальными поверхностями соотношение (9.17) можно записать в виде:

$$\left|grad\, U(\vec{r})\right| = \frac{dU}{dr}, \qquad (9.17а)$$

где dU/dr называется производной по направлению $\vec{r}$.

Подстановка соотношения (9.17а) в выражение (9.16) с использованием единичного вектора $\vec{n}$, направленного нормально к эквипотенциальной поверхности в сторону увеличения потенциала, позволяет получить выражение, связывающее силу и потенциальную энергию, в виде:

$$\vec{F} = -grad\, U(\vec{r}) = -\frac{dU}{dr} \cdot \vec{n}. \qquad (9.18)$$

Рассмотрим примеры вычисления потенциальной энергии и её нормировки.

а) Потенциальная энергия в поле сил тяготения.

Рассмотрим поле тяготения, которое будем считать однородным, то есть полагаем $g = const$ (рис. 9.3). Сила тяжести частицы массой m в поле силы тяготения определяется выражением: $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$. Под действием этой силы тело перемещается в силовом поле с эквипотенциальной поверхности с потенциальной энергией U_2 (точка M_2) на эквипотенциальную поверхность с потенциальной энергий U_1 (точка M_1). Представляя силу $\vec{P}$ в виде векторной суммы составляющих $\vec{P} = m \cdot \vec{g} = P_x \cdot \vec{i} + P_y \cdot \vec{j} + P_z \cdot \vec{k}$, а также учитывая, что в рассматриваемом случае (рис. 9.3)

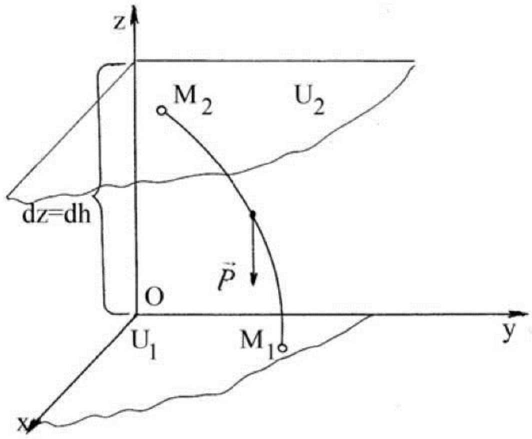


Рис. 9.3

$$P_x = 0,\ P_y = 0,\ P_z = -m \cdot \vec{g}$$

работу перемещения частицы между рассмотренными эквипотенциальными поверхностями можно выразить уравнением:

$$dA = -dU = -m \cdot g \cdot dz = -m \cdot g \cdot dh.$$

Следовательно, изменение потенциальной энергии равно:

$$dU = m \cdot g \cdot dz = m \cdot g \cdot dh.$$

Тогда изменение потенциальной энергии при переходе из точки M_2 в точку M_1 равно:

$$\Delta U = \int_1^2 m \cdot g \cdot dh = m \cdot g \cdot (h_2 - h_1). \quad (9.19)$$

Рассмотрим способы нормировки потенциальной энергии. Возможны два варианта нормировки. В первом варианте нормировки можно принять потенциальную энергию равной нулю на поверхности Земли. В этом случае в уравнении (9.19) при $h_1 = 0$ потенциальная энергия $U_1 = 0$. Тогда на произвольной высоте h над поверхностью Земли потенциальная энергия определяется выражением:

$$U = m \cdot g \cdot h. \quad (9.20)$$

При использовании другого способа нормировки полагают потенциальную энергию равной нулю в бесконечности, то есть $U_2 = 0$ при $h_2 \to \infty$. Тогда $U = -m \cdot g \cdot h$, где h – высота тела над поверхностью Земли.

б) Потенциальная энергия упругой деформации.

Под действием внешней силы $\vec{F}$ тело деформируется до тех пор, пока силы упругости не уравновесят внешнюю деформирующую силу, то есть $\vec{F} = -\vec{F}_{УПР}$. Согласно закону Гука $F_{УПР} = -k \cdot x$, где x – величина упругой деформации, k — коэффициент упругости, зависящий от свойств тела. Тогда работу упругой силы можно выразить уравнением:

$$dA = -dU(x) = F_{УПР} \cdot dx = -k \cdot x \cdot dx .$$

Тогда приращение потенциальной энергии равно: $dU(x) = k \cdot x \cdot dx$, следовательно: $\Delta U = \int_0^{x_0} dU = U(x_0) - U(0) = \int_0^{x_0} k \cdot x \cdot dx = \frac{k \cdot x_0^2}{2}$

Положим, что при $x = 0$ $U(0) = 0$. Следовательно, значение потенциальной энергии в точке с координатой x_0 равно:

$$U(x_0) = \frac{k \cdot x_0^2}{2} . \qquad (9.21)$$

Таким образом, полная механическая энергия E тела или системы тел равна сумме кинетической энергии (энергии движения E_k) и потенциальной энергии (энергии взаимодействия U): $E = E_k + U(x,y,z)$. Кинетическая и потенциальная энергия являются однозначными функциями состояния системы тел. Поэтому полная энергия E однозначно определяет состояние системы тел или тела, то есть является функцией координат и скорости. Это даёт основание изменение полной энергии обозначать символом полного дифференциала: $dE = dE_k + dU(\vec{r})$.

§ 10. Законы сохранения в механике

10.1. Введение

С помощью уравнения движения

$$m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad (10.1)$$

можно решить любую задачу механики. Соотношение (10.1) является дифференциальным уравнением второго порядка относительно координат ($\vec{r}$), а если сила зависит также и от скорости и времени, то математическое решение задачи механики может оказаться очень сложным. Кроме того, для составления уравнения движения необходимо иметь детальную информацию о характере изучаемых процессов, что позволит установить закон изменения действующих сил. Поэтому при анализе процессов, протекающих в физических системах, существенным представляется не только изучение изменения физических величин, но и выявление того общего, что не изменяется. Законы сохранения отвечают на вопрос о том, что в протекающих физических процессах, описываемых уравнениями движения, остаётся неизменным.

Законы сохранения импульса, момента импульса и механической энергии позволяют:

а) рассматривать общие закономерности движения без решения уравнения движения и детальной информации о развитии процессов, поскольку эти законы сохранения дают ответ на вопрос о том, какая фундаментальная физическая величина в последовательности физических ситуаций, описываемых уравнением движения, остаётся постоянной;

б) законы сохранения могут быть получены в результате однократного интегрирования уравнения движения, поэтому они являются первыми интегралами уравнения движения. Таким образом, применение законов сохранения приводит к решению дифференциальных уравнений первого порядка, что упрощает математические процедуры при решении задачи. Однако законы сохранения выходят за рамки механики: неизменные величины являются фундаментальными, а законы их сохранения – более фундаментальными, чем уравнение движения. Теоретическая механика доказывает, что законы сохранения импульса, момента импульса и механической энергии обусловлены не свойствами сил или уравнения движения, а свойствами пространства и времени.

Закон сохранения импульса обусловлен однородностью пространства, закон сохранения момента импульса – изотропностью пространства. Однородность времени приводит к закону сохранения механической энергии.

Поскольку однородность и изотропность пространства и однородность времени есть проявление симметрии природы, можно сделать вывод о том, что законы сохранения являются более универсальными, чем уравнение движения тела.

10.2. Закон сохранения импульса

В рамках классической механики выполняется третий закон Ньютона: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (рис. 10.1). Однако в такой простой форме он не выполняется при релятивистских взаимодействиях.

На основании третьего закона Ньютона может быть получен ещё один фундаментальный закон физики. Для этого запишем уравнения движения взаимодействующих тел (рис. 10.1):
$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12}$; $\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21}$, где $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ – импульсы взаимодействующих тел. С учётом двух последних соотношений уравнение третьего закона Ньютона (5.18) можно записать в виде:

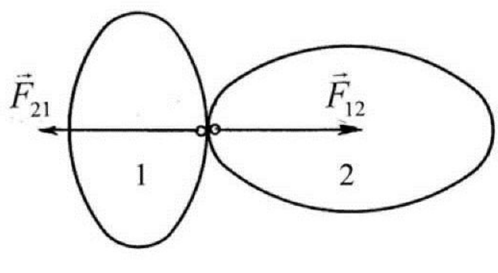


Рис. 10.1

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}, \text{ или } \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0. \qquad (10.2)$$

Обозначая импульс системы тел символом $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, выражение (10.2) можно преобразовать к виду: $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$. Интегрирование полученного выражения даёт: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const$. Данное выражение позволяет сделать следующий вывод: *векторная сумма импульсов изолированной системы двух тел <u>не изменяется</u> при любых процессах, происходящих внутри системы.* Это положение можно обобщить на любую замкнутую систему, состоящую из n тел. Уравнение движения системы n материальных точек можно записать в виде: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, где $\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$ – импульс системы, $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ – векторная сумма всех внешних сил, действующих на тела системы.

Если система изолирована, то есть $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$, то уравнение движения системы преобразуется к виду: $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$. Интегрирование этого уравнения позволяет получить закон сохранения импульса изолированной системы n материальных точек:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = const, \tag{10.3}$$

согласно которому *импульс изолированной системы материальных точек не изменяется во времени при любых процессах, происходящих внутри системы.*

Возможна ситуация, когда система материальных точек или отдельная материальная точка не изолирована, но внешние силы действуют лишь в определённых направлениях. В этом случае можно так подобрать систему координат, чтобы в направлении одной или двух координатных осей, например, вдоль оси x, суммарная внешняя сила равна нулю: $F_x = \sum_{i=1}^{n} F_{xi} = 0$.

Тогда уравнения движения в скалярной форме принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = F_x = 0, & F_x = \sum_{i=1}^{n} F_{xi} = 0, & p_x = \sum_{i=1}^{n} p_{xi}, \\ \frac{dp_y}{dt} = F_y, & F_y = \sum_{i=1}^{n} F_{yi}, & p_y = \sum_{i=1}^{n} p_{yi}, \\ \frac{dp_z}{dt} = F_z, & F_z = \sum_{i=1}^{n} F_{zi}, & p_z = \sum_{i=1}^{n} p_{zi}. \end{cases}$$

Интегрируя выражение $\frac{dp_x}{dt}=0$ данной системы, получим: $p_x=\sum_{i=1}^{n}p_{xi}=const$, то есть *если проекция главного вектора внешних сил* $\vec{F}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$ *на какое-либо направление равна нулю, то проекция импульса на это направление не изменяется во времени.*

Уравнение движения центра масс системы можно записать в виде: $\frac{d\vec{p}_c}{dt}=\vec{F}$, где $\vec{p}_c=\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i$ – импульс центра масс системы. Если система изолирована, то есть $\vec{F}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=0$, то $\frac{d\vec{p}_c}{dt}=0$, следовательно, $\vec{p}_c=\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i=const$ и $\vec{\upsilon}_c=const$. Таким образом, центр масс изолированной системы тел движется прямолинейно и равномерно.

10.3. Закон сохранения массы

При анализе свойств инертной массы, являющейся коэффициентом пропорциональности между движущей силой и ускорением $\left(m=\frac{|\vec{F}|}{|\vec{w}|}\right)$, утверждалось, что масса аддитивная величина, то есть масса системы тел равна сумме масс тел, входящих в состав системы. Докажем это утверждение на примере неупругого столкновения двух частиц массами m_1 и m_2. В результате столкновения образуется одна составная частица массой m. Примером такого процесса является образование молекулы при неупругом столкновении двух атомов. Полагая массу аддитивной величиной, можно записать: $m=m_1+m_2$. Для обоснования справедливости этой формулы обозначим скорости взаимодействующих частиц относительно инерциальной системы отсчёта Σ до столкновения символами $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$, а скорость составной частицы массой m, образовавшейся в результате столкновения – символом $\vec{u}$. Рассматривая систему взаимодействующих частиц как изолированную, закон сохранения импульса для процесса столкновения относительно системы отсчёта Σ можно записать в следующем виде:

$$m_1\cdot\vec{u}_1+m_2\cdot\vec{u}_2=m\cdot\vec{u}. \tag{10.4}$$

Согласно механическому принципу относительности в системе отсчёта Σ', движущейся относительно инерциальной системы отсчёта Σ со скоростью $\vec{\upsilon}=const$, закон сохранения импульса также выполняется:

$$m_1\cdot\vec{u}_1{}'+m_2\cdot\vec{u}_2{}'=m\cdot\vec{u}'. \tag{10.5}$$

Здесь $\vec{u}_1{}'$, $\vec{u}_2'$ и $\vec{u}'$ – скорости частиц с массами равными соответственно m_1, m_2 и m в системе отсчёта Σ'.

Из теоремы сложения скоростей следует:

$$\begin{cases} \vec{u}_1{}' = \vec{u}_1 - \vec{\upsilon}, \\ \vec{u}_2{}' = \vec{u}_2 - \vec{\upsilon}, \\ \vec{u}' = \vec{u} - \vec{\upsilon}. \end{cases} \tag{10.6}$$

Подстановка выражений (10.6) в выражение закона сохранения импульса (10.5) даёт: $m_1 \cdot (\vec{u}_1 - \vec{\upsilon}) + m_2 \cdot (\vec{u}_2 - \vec{\upsilon}) = m \cdot (\vec{u} - \vec{\upsilon})$, или

$$[m_1 \cdot \vec{u}_1 + m_2 \cdot \vec{u}_2] - (m_1 + m_2) \cdot \vec{\upsilon} = m \cdot \vec{u} - m \cdot \vec{\upsilon}. \tag{10.7}$$

Сравнивая выражение в квадратных скобках левой части и первое слагаемое правой части соотношения (10.7) с уравнением (10.4), можно получить: $(m_1 + m_2) \cdot \vec{\upsilon} = m \cdot \vec{\upsilon}$, или

$$m = m_1 + m_2. \tag{10.8}$$

Таким образом, масса составной частицы равна арифметической сумме масс составляющих её исходных частиц. Этот вывод можно обобщить на систему, содержащую произвольное количество тел, то есть *масса системы материальных тел равна арифметической сумме масс тел, входящих в состав системы*: $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$. Это утверждение отражает закон сохранения массы, указывающий на то, что масса изолированной системы тел есть величина постоянная.

10.4. Закон сохранения момента импульса

Анизотропия физического пространства, то есть симметрия относительно поворотов обусловливает закон сохранения момента импульса. Для обоснования закона сохранения момента импульса рассмотрим систему n взаимодействующих между собой нерелятивистских материальных точек (тел). Уравнение моментов для такой системы материальных точек можно записать в виде: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$, где $\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i$ – момент импульса системы материальных точек, $\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i$ – момент всех внешних сил, приложенных ко всем материальным точкам, входящим в состав системы. Если система изолирована, то есть $\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0$, то уравнение моментов преобразуется к виду: $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$. Интегрирование полученного уравнения даёт:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = const, \qquad (10.9)$$

то есть *момент импульса изолированной системы взаимодействующих точек (тел) не изменяется со временем.* В поле центральных сил даже в неизолированной системе тел момент внешней силы равен нулю: $\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right] = 0$ (рис. 10.2), поэтому $\vec{L} = const$. С учётом сделанного замечания следует изменить формулировку закона сохранения момента импульса: *если момент внешних сил, действующих на систему n материальных точек равен нулю, момент импульса системы со временем не изменяется.*

Если система материальных точек не изолирована, уравнение моментов следует записывать в скалярной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{dL_x}{dt} = M_x, \\ \dfrac{dL_y}{dt} = M_y, \\ \dfrac{dL_z}{dt} = M_z, \end{cases} \qquad (10.10)$$

где

$$L_x = \sum_{i=1}^{n} L_{xi}, \qquad M_x = \sum_{i=1}^{n} M_{xi},$$

$$L_y = \sum_{i=1}^{n} L_{yi}, \qquad M_y = \sum_{i=1}^{n} M_{yi},$$

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{zi}, \qquad M_z = \sum_{i=1}^{n} M_{zi}.$$

Если силы направлены так, что момент внешних сил, например, относительно оси OX равен нулю (система частично изолирована), то есть

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} M_{xi} = 0, \text{ то } L_x = const. \qquad (10.11)$$

Выражение (10.11) называют законом сохранения для отдельных компонент момента импульса системы материальных точек.

При рассмотрении движения отдельной материальной точки, то есть, если момент внешних сил, действующих на эту точку, равен нулю

$$\left(\vec{M} = 0\right), \text{ то } \vec{L} = J \cdot \vec{\omega} = const, \qquad (10.12)$$

где J – момент инерции материальной точки. Это означает, что изолированная материальная точка движется с постоянной угловой скоростью: $\vec{\omega} = const$.

Следует отметить, что условие $\Delta\vec{L}=0$ (то есть $\vec{L}=const$) не всегда означает, что $\vec{\omega}=const$. Если в процессе движения $J \neq const$ (то есть момент инерции изменяется), то $\Delta\vec{L}=J_2\cdot\vec{\omega}_2-J_1\cdot\vec{\omega}_1=0$, следовательно:

$$J_1\cdot\vec{\omega}_1=J_2\cdot\vec{\omega}_2. \tag{10.13}$$

10.5. Закон сохранения механической энергии

Пусть материальная точка массой m движется под действием произвольной переменной силы $\vec{F}$. Если $\vec{\upsilon}$ – скорость материальной точки, то уравнение её движения можно записать в виде:

$$m\cdot\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F}. \tag{10.14}$$

Умножим обе части уравнения (10.14) <u>скалярно</u> на вектор скорости $\vec{\upsilon}$:

$$m\cdot\left(\frac{d\vec{\upsilon}}{dt},\vec{\upsilon}\right)=\left(\vec{F},\vec{\upsilon}\right), \tag{10.15}$$

но скалярное произведение правой части уравнения представляет собой мощность (N):

$$\left(\vec{F},\vec{\upsilon}\right)=N=\frac{\partial A}{\partial t}.$$

Учитывая, что $\frac{d}{dt}(\vec{\upsilon},\vec{\upsilon})=\left(\frac{d\vec{\upsilon}}{dt},\vec{\upsilon}\right)+\left(\vec{\upsilon},\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right)=2\cdot\left(\frac{d\vec{\upsilon}}{dt},\vec{\upsilon}\right)$,

или

$$\left(\frac{d\vec{\upsilon}}{dt},\vec{\upsilon}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}(\vec{\upsilon},\vec{\upsilon})=\frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right),$$

Выражение (10.15) можно записать в виде: $\frac{d}{dt}\left(\frac{m\cdot\upsilon^2}{2}\right)=N=\frac{\partial A}{\partial t}$, или

$$\frac{d}{dt}(E_k)=\frac{\partial A}{\partial t}, \tag{10.16}$$

где $E_k=\frac{m\cdot\upsilon^2}{2}$ – кинетическая энергия материальной точки. Таким образом, из соотношения (10.16) следует, что $dE_k=\partial A$, или на конечном участке пути:

$$\int_1^2 dE_k=E_{k2}-E_{k1}=\int_1^2\partial A. \tag{10.17}$$

Выражение (10.17) отражает содержание закона сохранения энергии системы, согласно которому *изменение энергии системы материальных точек равно работе внешних сил, совершаемой над системой.* Если система изолирована, то есть $\int_1^2 \partial A = 0$, то энергия со временем не изменяется. Смысл интеграла $\int_1^2 \partial A$ не всегда можно установить в рамках механики, например, при неупругом столкновении, когда механическая энергия преобразуется в тепловую энергию. Однако, если система материальных точек находится в поле потенциальных сил, величина интеграла $\int_1^2 \partial A$ имеет определённый физический смысл. То есть, если на материальную точку действует потенциальная сила:

$$\vec{F} = -gradU(x,y,z) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\vec{k}\right),$$

то работа силы $\vec{F}$ при элементарном перемещении $d\vec{r}$: $dA = -\left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = -dU(x,y,z)$ равна изменению потенциальной энергии материальной точки. С учётом сделанного замечания уравнение (10.16) можно преобразовать к виду:

$$\frac{d}{dt}\left(E_k\right) = \frac{dA}{dt} = -\frac{dU}{dt}, \tag{10.18}$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(E_k + U(x,y,z)\right) = 0, \tag{10.19}$$

где $E = E_k + U(x,y,z)$ – полная механическая энергия материальной точки.

Интегрирование выражения (10.19) даёт:

$$E = E_k + U = const. \tag{10.20}$$

Выражение (10.20) означает, что *если на материальную точку действует только потенциальная сила (стационарная, не зависящая от времени t явно), полная механическая энергия материальной точки со временем не изменяется*. Этот вывод можно распространить на систему n материальных точек, составляющих, так называемую <u>консервативную систему тел</u>. *Система материальных точек называется <u>консервативной</u>, если все внешние и внутренние силы, действующие в этой системе, являются потенциальными и стационарными (то есть не зависят от времени).*

Рассмотрим консервативную систему n материальных точек. Для неё согласно уравнению (10.16) можно записать:

$$\Delta E_k = A = \sum_{i=1}^{n} A_i = -\Delta U, \tag{10.21}$$

где ΔE_k – суммарное изменение кинетической энергии системы n материальных точек, $A=\sum_{i=1}^{n} A_i$ – суммарная работа всех внешних и внутренних сил, $U=U_1+U_2$, где U_1 – потенциальная энергия, обусловленная действием внешних потенциальных сил, U_2 – потенциальная энергия, обусловленная действием внутренних потенциальных сил. Тогда согласно (10.21) можно записать: $\Delta E_k=-\Delta U$, или $\Delta(E_k+U)=0$, то есть

$$E=E_k+U=const. \qquad (10.22)$$

Таким образом, закон сохранения механической энергии описывает превращение кинетической энергии в потенциальную и наоборот.

а) Пример применения закона сохранения механической энергии.

Рассмотрим пример применения закона сохранения механической энергии для решения задачи. Пусть по изогнутой проволочке без трения соскальзывает нанизанный на проволочку шарик (рис. 10.2а).

Полная энергия шарика равна $E=E_k+U(x)=const$. На рис. 10.2б представлена зависимость $U(x)$ потенциальной энергии шарика от его координаты x. Найдём выражение скорости шарика в произвольный момент времени. Используя закон сохранения механической энергии $E=E_k+U(x)=const$, записанный в виде: $\frac{m\cdot \upsilon_x^2}{2}+U(x)=E$, и полагая известной полную энергию E, можно выразить проекцию скорости на ось x:

$$\upsilon_x=\frac{dx}{dt}=\sqrt{\left(E-U(x)\right)\cdot\frac{2}{m}}.$$

Разделяя переменные, получим:

$$dt=\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\cdot\left(E-U(x)\right)}}.$$

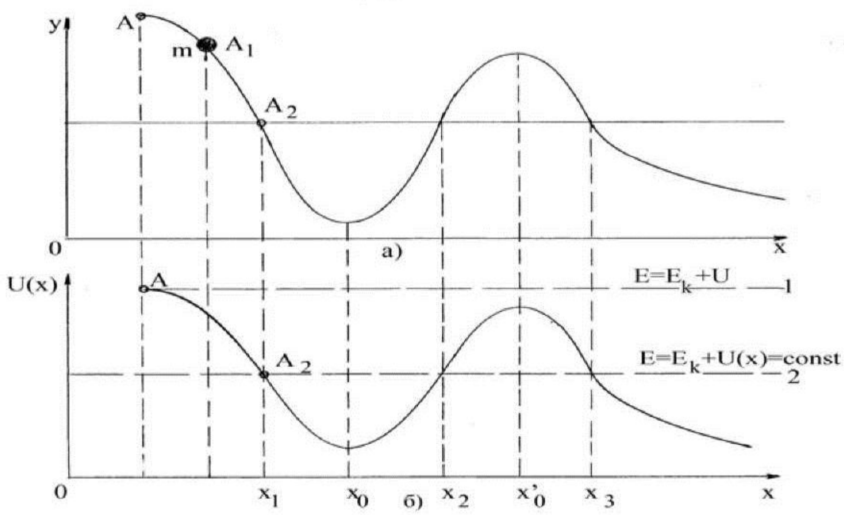


Рис. 10.2

Интегрирование данного уравнения позволяет выразить время: $\int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\cdot\left(E-U(x)\right)}} + C$. Здесь C – постоянная интегрирования.

Таким образом, закон сохранения механической энергии позволяет выполнить сравнительно простой анализ особенностей движения тела в изолированной системе без детальной информации о силах, действующих в системе. Действительно, если шарик находится в положении A_1, где $E - E_k - U$ энергии шарика окажется достаточно для прохождения всего профиля проволоки. Если шарик начинает движение из положения A_2, то в точках x_1 и x_2 $E-U(x)$. В этих точках кинетическая энергия шарика равна нулю, поскольку $\upsilon_x = \sqrt{\frac{2}{m}\cdot\left(E-U\right)} = 0$. Поэтому тело, начиная движение из точки A_2 не может выйти за пределы области $x_1 \le x \le x_2$. Эта область называется <u>потенциальной ямой</u>. Запас энергии тела, начавшего движение из точки A_2 недостаточен для перемещения тела в область $x_3 > x > x_2$, называемую <u>потенциальным барьером</u>.

В классической механике потенциальный барьер является абсолютным препятствием для частицы. В квантовой механике, при определённых условиях, частица может пройти через потенциальный барьер. Это явление называется <u>туннельным эффектом</u>.

Проанализируем условия равновесия тела учитывая, что силовое поле является потенциальным, то есть: $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$. При равновесии тела $F_x = 0$, $\upsilon_x = 0$ ($E_k = 0$) и следовательно $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$. Последнее соотношение означает, что в условиях равновесия потенциальная энергия имеет максимальное или минимальное значение. Например, в точке x_0 (рис. 10.2) потенциальная энергия минимальна и тело, оказавшееся в области $x_1 \le x \le x_2$ и не имеющее запаса энергии, достаточного для преодоления потенциального барьера, будет совершать движение около положения равновесия между точками x_1 и x_2. Такое движение, когда материальная точка не может выйти за пределы определённой области пространства, называется <u>финитным</u> движением. Если область движения тела не ограничена, движение называется <u>инфинитным</u>. Равенство $U = U_{\min}$ отражает условие устойчивого равновесия (рис. 10.2, 10.3а). Следовательно, при отклонении от положения равновесия, возникает сила $\vec{F}_\tau$,стремящаяся вернуть тело в положение равновесия.

Равенство $U = U_{max}$ (рис. 10.3б) отражает условие неустойчивого равновесия. При отклонении тела от положения равновесия возникает сила $\vec{F}_\tau$, стремящаяся увеличить это отклонение.

Если в системе действуют не потенциальные силы, то механическая энергия переходит, например, в тепловую энергию, то есть происходит диссипация (рассеяние) механической энергии. *Механические системы, полная механическая энергия которых уменьшается, переходя в другие формы энергии, называются диссипативными системами.*

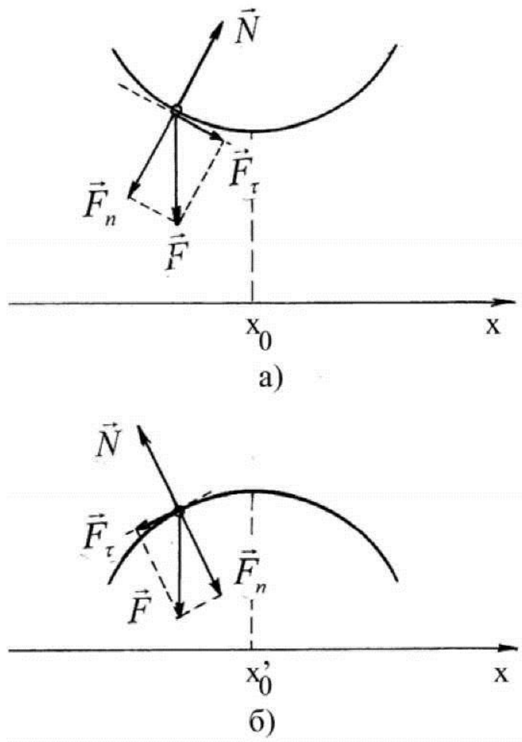


Рис. 10.3

Существует класс таких сил, для Которых $\vec{F} \perp \vec{v}$, называемых *гироскопическими силами*. Эти силы не совершают работы. Примером гироскопической силы является сила Лоренца: $\vec{F} = q \cdot \left[\vec{v}, \vec{B}\right]$.

Сделанные замечания позволяют наиболее полно сформулировать закон сохранения механической энергии: *если в системе взаимодействующих тел все внутренние и внешние силы потенциальны и стационарны, то есть не зависят от времени, и действуют гироскопические силы, то механическая энергия со временем не изменяется.*

Законы сохранения, отвечая на вопрос о том, какие величины остаются неизменными при протекании физических процессов, широко используются при решении многих физических задач.

Пример 1. На поверхности озера покоится узкий плот массой M, на котором находится человек массой m. Человек совершил перемещение $\Delta\vec{r}'$ относительно плота и затем остановился. Пренебрегая сопротивлением воды, определите перемещение плота относительно берега.

Решение. Задачу проще решить, используя понятие центра масс. Поскольку сопротивлением воды можно пренебречь, равнодействующая всех внешних сил, приложенных к системе, равна нулю. Поэтому положение центра масс системы в процессе движения человека и плота не изменится, то есть: $M \cdot \vec{r}_1 + m \cdot \vec{r}_2 = const$. Здесь $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ — радиус-векторы, характеризующие положение центров масс соответственно человека и плота относительно некоторой точки берега. Используя это равенство можно найти связь между приращениями $\Delta\vec{r}_1$ и $\Delta\vec{r}_2$ векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$: $M\cdot\Delta\vec{r}_1 + m\cdot\Delta\vec{r}_2 = 0$. Поскольку приращения $\Delta\vec{r}_1$ и $\Delta\vec{r}_2$ представляют собой перемещения соответственно плота и человека относительно берега, причём $\Delta\vec{r}_1 = \Delta\vec{r}_2 + \Delta\vec{r}'$, подстановка данного выражения в предыдущее равенство позволяет определить перемещение плота относительно берега: $\Delta\vec{r}_2 = -\dfrac{M}{M+m}\cdot\Delta\vec{r}'$.

Пример 2. Два тела массами $m_1 = m$ и $m_2 = 4\cdot m$ движутся во взаимно перпендикулярных направлениях (рис. 10.4а). После столкновения тело массой m_1 остановилось. Какая часть его механической энергии выделится в виде тепла?

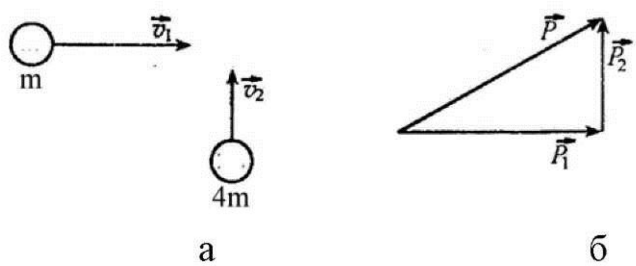


Рис. 10.4

Решение. Поскольку на систему не действуют внешние силы векторная сумма импульсов системы не изменяется. Кинетическая энергия системы до столкновения равна: $E_{0k} = \dfrac{m\cdot\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{4\cdot m\cdot\upsilon_2^2}{2}$.

Импульс системы тел до удара определяется выражением:

$$p = \sqrt{(m\cdot\upsilon_1)^2 + 4\cdot(m\cdot\upsilon_1)^2} = m\cdot\sqrt{\upsilon_1^2 + 16\cdot\upsilon_2^2}.$$

После столкновения тел кинетической энергией обладает только второе тело: $E_{2k} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p^2}{4\cdot m} = \dfrac{m\cdot\left(\upsilon_1^2 + 16\cdot\upsilon_2^2\right)}{8} = \dfrac{m\cdot\upsilon_1^2}{8} + 2\cdot m\cdot\upsilon_2^2$.

В результате удара кинетическая энергия системы уменьшилась на величину:

$$\Delta E_k = E_{0k} - E_{2k} = \frac{3}{8}\cdot m\cdot\upsilon_1^2.$$

Относительное изменение кинетической энергии равно:

$$\frac{Q}{E_{1k}} = \frac{E_{0k} - E_{2k}}{E_{1k}} = \frac{\frac{3}{8}\cdot m\cdot\upsilon_1^2}{\frac{m\cdot\upsilon_1^2}{2}} = \frac{3}{4}.$$

Пример 3. Два шарика (1 и 2) одинаковой массы m, соединённые невесомой пружиной жёсткостью k длиной ℓ, лежат на гладкой горизонтальной поверхности (рис. 10.5). Третий шарик такой же массы m движется со скоростью $\vec{\upsilon}_0$ по линии, соединяющей центры первых двух шаров, и упруго сталкивается с одним из них. Определите максимальное и минимальное расстояние между шариками, связанными пружиной, при их последующем движении.

Решение. За время соударения третьего и второго шариков перемещением второго шарика можно пренебречь. Поэтому величину упругой силы пружины можно считать бесконечно малой, следовательно, удар является абсолютно упругим. Таким образом, в момент столкновения второго и третьего шариков выполняется закон сохранения механической энергии

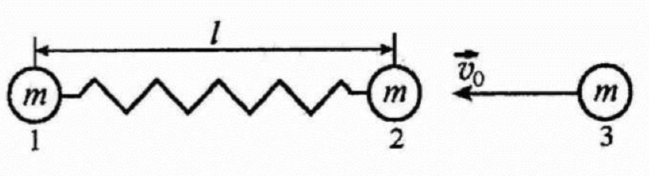


Рис. 10.5

$$\frac{m \cdot \upsilon_0^2}{2} = \frac{m \cdot u_2^2}{2} + \frac{m \cdot u_3^2}{2},$$

а также закон сохранения импульса:

$$m \cdot \upsilon_0 = m \cdot u_2 + m \cdot u_3.$$

Здесь $\vec{u}_2$ и $\vec{u}_3$ скорости соответственно второго и третьего шариков после столкновения. Представим полученную систему уравнений в следующем виде:

$$\begin{cases} (\upsilon_0 - u_3) \cdot (\upsilon_0 + u_3) = u_2^2; \\ \upsilon_0 - u_3 = u_2. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе, получим:

$$\begin{cases} \upsilon_0 + u_3 = u_2; \\ \upsilon_0 - u_3 = u_2. \end{cases}$$

Суммируя правые и левые части данной системы, получим $u_2 = \upsilon_0$. Вычитая из первого уравнения второе, находим: $u_3 = 0$. Таким образом, в результате соударения второй шарик приобретёт кинетическую энергию, равную $\frac{m \cdot \upsilon_0^2}{2}$. Пружина начнёт сжиматься, при этом скорост первого шарика будет возрастать, а второго – уменьшаться. Расстояние между шариками будет сокращаться до тех пор, пока их скорости не окажутся одинаковыми. В отсутствие внешних сил импульс системы не изменится, то есть: $m \cdot \upsilon_0 = 2 \cdot m \cdot u$, где u – скорости шариков в момент их максимального сближения. Шарики взаимодействуют друг с другом за счёт силы упругости пружины, работа которой A_y идёт на изменение кинетической энергии шариков. Эту работу удобно определить в системе отсчёта, связанной с одним из шариков, например с первым шариком. При этом второй шарик сместится относительно первого на расстояние x_1, а сила упругости, противоположная направлению смещения, совершит работу

$$A_y = -\frac{k \cdot x_1^2}{2}.$$

Закон сохранения механической энергии для процесса сжатия пружины до минимальной длины можно записать в виде:

$2\cdot\frac{m\cdot u^2}{2}-\frac{m\cdot \upsilon_0^2}{2}=-\frac{k\cdot x_1^2}{2}$. Учитывая, что $m\cdot\upsilon_0=2\cdot m\cdot u$, из последнего уравнения можно получить: $u=\frac{\upsilon_0}{2}$ и $x_1=\upsilon_0\cdot\sqrt{\frac{m}{2\cdot k}}$.

Рассматривая процесс растяжения пружины, аналогичным образом получим:

$$x_2=\upsilon_0\cdot\sqrt{\frac{m}{2\cdot k}}.$$

Минимальное расстояние между шариками равно

$$\ell_{\min}=\ell-\upsilon_0\cdot\sqrt{\frac{m}{2\cdot k}},$$

а максимальное расстояние определяется выражением:

$$\ell_{\max}=\ell+\upsilon_0\cdot\sqrt{\frac{m}{2\cdot k}}.$$

§ 11. Закон сохранения энергии в релятивистской механике. Соотношение между массой и энергией

Закон сохранения механической энергии в рамках классической механики может быть получен в результате однократного интегрирования уравнения движения. Представления о работе силы, потенциальности сил и потенциальной энергии справедливы и в релятивистской механике, если при рассмотрении закона сохранения энергии исходить из релятивистского уравнения движения:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\cdot\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=\vec{F}. \tag{11.1}$$

Умножая скалярно обе части уравнения (11.1) на вектор скорости $\vec{\upsilon}$, получим:

$$\left(\vec{\upsilon},\frac{d}{dt}\frac{m_0\cdot\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=\left(\vec{F},\vec{\upsilon}\right). \tag{11.2}$$

Правую часть уравнения (11.2) можно преобразовать к виду:

$\left(\vec{F},\vec{\upsilon}\right)=N=\frac{dA}{dt}=-\frac{dU}{dt}$, полагая силу $\vec{F}$ потенциальной, то есть удовлетворяющей уравнению $\vec{F}=-gradU(r)$, где $U=U(r)$ – потенциальная энергия частицы.

Дифференцирование левой части уравнения (11.2) даёт:

$$\left(\vec{\upsilon},\frac{d}{dt}\frac{m_0\cdot\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=m_0\cdot\left[\vec{\upsilon},\frac{1}{2}\cdot\frac{\vec{\upsilon}}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)+\frac{1}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]=$$

$$=\frac{m_0}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\upsilon^2\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)+\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\cdot\left(\vec{\upsilon},\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{m_0\cdot c^2}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\cdot c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right).$$

С учётом сделанных преобразований уравнение (11.2) можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right]=-\frac{dU(r)}{dt},\text{ или } d\left[\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right]=-dU(r). \qquad (11.3)$$

Перенося все члены данного уравнения в левую часть, получим:

$$d\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}+U(r)\right)=0. \qquad (11.4)$$

Интегрирование уравнения (11.4) даёт:

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}+U(r)=const. \qquad (11.5)$$

Уравнение (11.5) отражает закон сохранения энергии в релятивистской механике. Здесь величину $E=\dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$ называют полной релятивистской энергией (или просто релятивистской энергией). Потенциальная энергия $U=U(r)$ имеет тот же смысл, что и в классической механике (Ньютона). Таким образом, релятивистская энергия частицы определяется выражением: $E=\dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}=m\cdot c^2$, где $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$ – релятивистская масса частицы.

При $\upsilon=0$ энергия $E=E_0=m_0\cdot c^2$ называется энергией покоя.

Таким образом, релятивистская энергия частицы представляет собой сумму энергии покоя и энергии движения (кинетической энергии). Получим выражение кинетической энергии релятивистской частицы, исходя из уравнения: $E=E_0+E_k$:

$$E_k=E-E_0=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}-m_0\cdot c^2=m_0\cdot c^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}-1\right). \tag{11.6}$$

Формула (11.6) выражает кинетическую энергию релятивистской частицы. При малых скоростях $(\upsilon/c\ll 1)$ уравнение (11.6) преобразуется в выражение кинетической энергии классической механики. Действительно, поскольку при $(\upsilon/c\ll 1)$ можно записать:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}=\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\upsilon^2}{c^2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{\upsilon^4}{c^4}+\ldots,$$

то ограничиваясь первыми двумя членами ряда, кинетическую энергию в нерелятивистском случае можно выразить следующим соотношением:

$$E_k\approx m_0\cdot c^2\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\upsilon^2}{c^2}-1\right)=\frac{m_0\cdot\upsilon^2}{2}. \tag{11.7}$$

Очевидно, что соотношение Эйнштейна между массой и энергией $\left(E=m\cdot c^2\right)$ является универсальным: $E=m\cdot c^2$ и $E_0=m_0\cdot c^2$, то есть в двух последних соотношениях характер связи массы и энергии одинаков. Вид выражения (11.5) закона сохранения механической энергии в релятивистском случае приводит к выводу о справедливости соотношения Эйнштейна между массой и энергией и в случае потенциальной энергии.

Таким образом, соотношение Эйнштейна между энергией и массой является универсальным и указывает на то, что какие бы взаимные превращения энергии и массы не происходили в природе, между ними всегда существует соотношением: $E = m \cdot c^2$. Форма существования массы также может изменяться, что наглядно иллюстрируется в опытах по аннигиляции пары «электрон-позитрон» с образованием двух γ-квантов. При любых превращениях между массой и энергией выполняется соотношение Эйнштейна.

§ 12. Динамика твёрдого тела

12.1. Понятие абсолютно твёрдого тела

Моделью абсолютно твёрдого тела может служить система материальных точек, расстояние между которыми остаётся неизменным. Поэтому все утверждения и уравнения, полученные для системы материальных точек, справедливы и для абсолютно твёрдого тела:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}; & (a) \\ \dfrac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{M}'; & (б) \end{cases} \tag{12.1}$$

или в скалярном виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_x}{dt} = F_x; & \dfrac{dL'_x}{dt} = M'_x; \\ \dfrac{dp_y}{dt} = F_y; & \dfrac{dL'_y}{dt} = M'_y; \\ \dfrac{dp_z}{dt} = F_z; & \dfrac{dL'_z}{dt} = M'_z. \end{cases} \tag{12.1a}$$

Поскольку число степеней свободы абсолютно твёрдого тела равно шести $(i = 6)$, то шесть уравнений (12.1а) составляют замкнутую систему уравнений, с помощью которой без каких-либо дополнительных условий и уравнений можно описать движение твёрдого тела (если заданы начальные условия).

При рассмотрении кинематики твёрдого тела показано [1], что скорость i-й точки твёрдого тела можно представить как векторную сумму: а) скорости $\vec{\upsilon}_0 = d\vec{r}_0/dt$ поступательного движения вместе с произвольно выб-

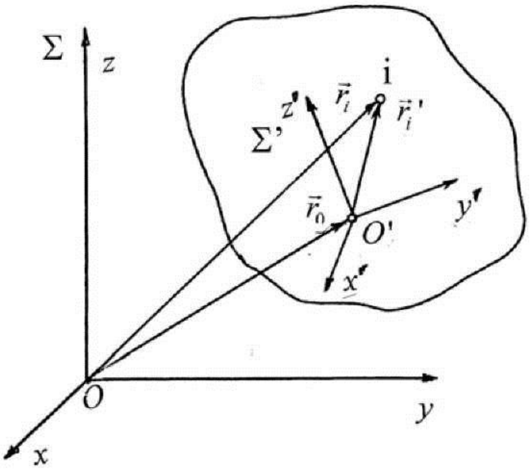


Рис. 12.1

ранной точкой O' (рис. 12.1) и б) линейной скорости вращения вокруг мгновенной оси, проходящей через эту точку O'. На рис. 12.1 система Σ' движется поступательно относительно системы отсчёта Σ. Таким образом, любое сложное движение твёрдого тела можно разложить на поступательное движение вмес-те с произвольно выбранной точкой O' и вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через эту точку:

$$\vec{\upsilon}_i = \vec{\upsilon}_0 + \vec{\upsilon}_i{}' = \vec{\upsilon}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}\,'_i]. \qquad (12.2)$$

При этом необходимо учитывать, что выбор точки O' определяет лишь скорость поступательного движения $\vec{\upsilon}_0$, а угловая скорость вращения $\vec{\omega}$ не зависит от выбора центра вращения [1]. Тогда описание динамики твёрдого тела требует решения двух задач: а) анализ поступательного движения твёрдого тела и б) описание движения тела, закреплённого в одной точке.

12.2. Поступательное движение твёрдого тела

В качестве произвольной точки O' выберем центр масс тела – точку C. Уравнение поступательного движения твёрдого тела можно записать как уравнение движения центра масс:

$$\frac{d\vec{p}_C}{dt} = \vec{F},$$

где $\vec{p}_C = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$ – импульс центра масс, $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ – векторная сумма внешних сил, приложенных к телу. В общем случае выбор точки O' произволен. Поскольку при поступательном движении абсолютно твёрдого тела все его точки имеют одинаковые скорости и ускорения, то уравнение движения i-й точки можно записать в виде:

$$m_i \cdot \vec{w}_0 = \vec{F}_i + \vec{f}_i, \qquad (12.3)$$

где $\vec{F}_i$ – сумма внешних сил, действующих на i-ю точку, $\vec{f}_i = \sum_{k=1}^{n} \vec{f}_{ik}$ – сумма внутренних сил, действующих на i-ю точку. Суммирование левых и правых частей n уравнений (12.3) позволяет получить следующее уравнение:

$$\vec{w}_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \vec{f}_{ik},$$

здесь $i \neq k$, $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – масса тела, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \vec{f}_{ik} = 0$. Окончательно уравнение движения абсолютно твёрдого тела можно записать в виде:

$$m \cdot \vec{w}_0 = \vec{F}. \qquad (12.4)$$

Таким образом, описание поступательного движения абсолютно твёрдого тела сводится к решению задачи о движении материальной точки с массой, равной массе твёрдого тела $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ под действием силы, равной векторной сумме внешних сил, действующих на тело.

12.3. Движение тела, закреплённого в одной точке

Для решения этой задачи необходимо использовать векторное

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M},$$

или скалярные уравнения моментов:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x; \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y; \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z. \qquad (12.5)$$

Совместим начало координат с точкой O закрепления тела (рис. 12.2). Уравнение моментов для этого тела можно записать в виде:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \qquad (12.6)$$

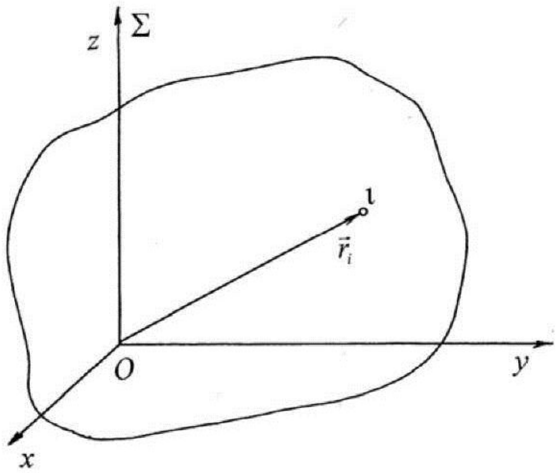


Рис. 12.2

где $\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i$ – момент импульса тела, равный векторной сумме моментов импульсов всех материальных точек тела относительно точки O, $\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i$ – момент внешних сил относительно точки O, приложенных к телу. Необходимо иметь в виду, что не все силы, действующие на абсолютно твёрдое тело можно заменить одной. Это можно сделать лишь в случае, если:

а) все действующие на тело силы имеют центр приведения, то есть их линии действия пересекаются в одной точке (рис. 12.3). Учитывая, что для абсолютно твёрдого тела сила – скользящий вектор, силы можно заменить одной равнодействующей силой;

б) линии действия сил параллельны.

Тогда, если $\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$, то $\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i$. Если линия действия силы не проходит через центр приведения $(\vec{F}_k)$, то эти утверждения теряют смысл. Однако и в этом случае можно учесть моменты всех сил, если воспользоваться понятием «пара сил». Парой сил называют две равные по величине и противоположно направленные силы линии действия которых параллельны друг другу (рис. 12.4). Момент пары сил $\vec{M}_p$ относительно точки O равен сумме:

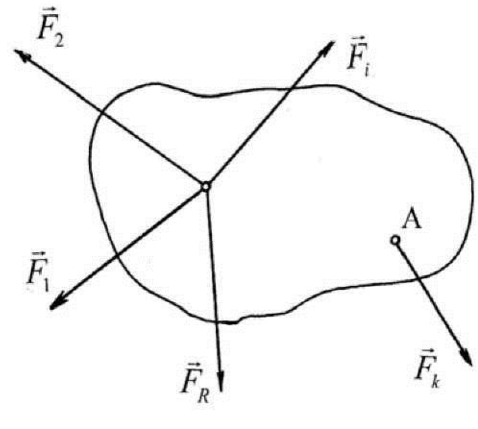


Рис. 12.3

$$\vec{M}_p = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = [\vec{r}_1, \vec{F}_1] + [\vec{r}_2, \vec{F}_2]. \qquad (12.7)$$

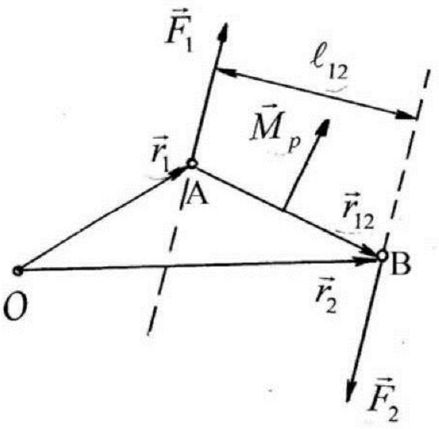


Рис. 12.4

Поскольку $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}_{12}$, соотношение (12.7) можно преобразовать к следующему виду:

$\vec{M}_p = [\vec{r}_1, \vec{F}_1] + [\vec{r}_1, \vec{F}_2] + [\vec{r}_{12}, \vec{F}_2]$. Учитывая, что $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$, причём $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, то есть эти векторы направлены противоположно, можно записать $\left[\vec{r}_1, \vec{F}_1\right] = -\left[\vec{r}_1, \vec{F}_2\right]$. Следовательно, $\vec{M}_p = \left[\vec{r}_{12}, \vec{F}_2\right]$, то есть модуль момента пары сил равен:

$$M_p = |\vec{M}_p| = |\vec{r}_{12}| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \sin\alpha .$$

В данном выражении произведение $|\vec{r}_{12}| \cdot \sin\alpha = \ell_{12}$ называется плечом пары сил. Поскольку $F = |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ момент пары сил равен произведению модуля силы на плечо пары сил: $M_p = F \cdot \ell_{12}$ (рис. 12.5).

Свойства пары сил:

а) момент пары сил $\vec{M}_p$ не зависит от выбора центра, к которому он отнесён;

б) пару сил можно повернуть на любой угол около оси моментов и передвинуть в любую точку в её плоскости, не изменяя механического действия пары сил;

в) пару сил можно перенести в любую другую плоскость, параллельную плоскости пары сил, не изменяя результата её действия;

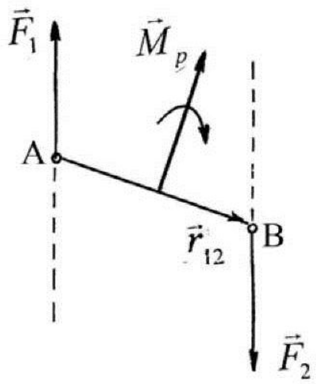


Рис. 12.5

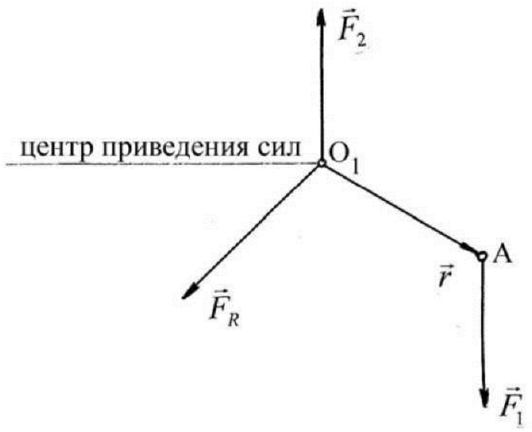


Рис. 12.6

г) всякая сила, действующая на абсолютно твёрдое тело, например, сила $\vec F_1$ на рис. 12.6, может быть заменена силой, приложенной <u>к любой точке</u> тела (в том числе и к центру приведения сил) и парой сил. Здесь $\vec F_R = \sum_{i=1}^{n} \vec F_i$ – равнодействующая сил, имеющих центр приведения O_1.

Пусть сила $\vec F_1$, линия действия которой не проходит через точку O_1 приложена к точке A (рис. 12.6).

Приложим к точке O_1 силу $\vec F_2 = -\vec F_1$. Это механически ничего не меняет. Для данной ситуации уравнение моментов можно записать в виде:

$$\frac{d\vec L}{dt} = \vec M = \sum_{i=1}^{n} \vec M_i + \vec M_p, \qquad (12.8)$$

где $\vec M_p = [\vec r, \vec F_i]$, $\vec r$ – радиус-вектор точки A относительно точки O_1.

12.4. Момент импульса и момент инерции абсолютно твёрдого тела

По определению момент импульса равен:

$\vec L = \sum_{i=1}^{n} \vec L_i = \sum_{i=1}^{n} [\vec r_i, m_i \cdot \vec \upsilon_i] = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot [\vec r_i, \vec \upsilon_i] = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot [\vec r_i [\vec \omega\ , \vec r_i]]$. Двойное векторное произведение в данном соотношении можно преобразовать с учётом следующего правила: $\left[\vec a, [\vec b, \vec c]\right] = \vec b(\vec a, \vec c) - \vec c(\vec a, \vec b)$:

$$\vec L_i = \vec \omega \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2 - \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec r_i \cdot (\vec \omega, \vec r_i). \qquad (12.9)$$

Из уравнения (12.9) следует, что вектор момента импульса твёрдого тела в общем случае не совпадает по направлению с вектором угловой скорости $\vec \omega$ в отличие от вектора момента импульса материальной точки $\vec L = J \cdot \vec \omega$. Если тело закреплено в двух точках, то есть вращается вокруг неподвижной оси, то $\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec r_i \cdot (\vec \omega\ , \vec r_i) = 0$, поскольку равно нулю скалярное произведение $(\vec \omega, \vec r_i) = 0$, так как векторы $\vec \omega$ и $\vec r_i$ взаимно перпендикулярны. Таким образом, все точки тела движутся в плоскостях, перпендикулярных вектору угловой скорости. Тогда $\vec L = \vec \omega \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2 = \vec \omega \cdot \sum_{i=1}^{n} J_i = J \cdot \vec \omega$, здесь $J = \sum_{i=1}^{n} J_i$ – момент инерции тела.

Проекции выражения (12.9) на оси прямоугольной декартовой системы координат имеют вид:

$$\begin{cases} L_x = \omega_x \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2 - \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i \cdot (\vec{\omega}\ ,\ \vec{r}_i); \\ L_y = \omega_y \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2 - \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i \cdot (\vec{\omega}\ ,\ \vec{r}_i); \\ L_z = \omega_z \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2 - \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i \cdot (\vec{\omega}\ ,\ \vec{r}_i). \end{cases} \tag{12.10}$$

Раскрывая скалярное произведение $(\vec{\omega}\ ,\ \vec{r}_i) = x_i \cdot \omega_x + y_i \cdot \omega_y + z_i \cdot \omega_z$, уравнения системы (12.10) можно преобразовать к следующему виду:

$$L_y = -\omega_x \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i \cdot x_i + \omega_y \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (r_i^2 - y_i^2) - \omega_z \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i \cdot z_i;$$

$$L_x = \omega_x \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i \cdot y_i - \omega_z \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i \cdot z_i;$$

$$L_z = -\omega_x \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i \cdot x_i - \omega_y \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i \cdot y_i + \omega_z \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (r_i^2 - z_i^2);$$

или

$$\begin{cases} L_x = J_{xx} \cdot \omega_x + J_{xy} \cdot \omega_y + J_{xz} \cdot \omega_z; \\ L_y = J_{yx} \cdot \omega_x + J_{yy} \cdot \omega_y + J_{yz} \cdot \omega_z; \\ L_z = J_{zx} \cdot \omega_x + J_{zy} \cdot \omega_y + J_{zz} \cdot \omega_z; \end{cases} \tag{12.11}$$

где коэффициенты при ω_x, ω_y, ω_z описываются выражениями:

$$J_{xx} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (r_i^2 - x_i^2); \quad J_{yy} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (r_i^2 - y_i^2); \quad J_{zz} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (r_i^2 - z_i^2);$$

$$J_{xy} = -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i \cdot y_i; \quad J_{yx} = -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i \cdot x_i; \quad J_{xz} = -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i \cdot z_i;$$

$$J_{zx} = -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i \cdot x_i; \quad J_{yz} = -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i \cdot z_i; \quad J_{zy} = -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i \cdot y_i.$$

Из выражений (12.11) следует, что каждая проекция момента импульса на прямоугольные оси координат линейно зависит от всех проекций вектора $\vec{\omega}$, и сложным образом зависит от распределения масс в твёрдом теле. Коэффициенты J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}, а также J_{xy}, J_{yx}, J_{zx}, J_{xz}, J_{yz}, J_{zy} имеют размерность момента инерции. Коэффициенты с двумя одинаковыми индексами представляют собой моменты инерции твёрдого тела относительно соответствующих осей и называются осевыми моментами инерции. Коэффициенты с разными индексами также имеют размерность момента инерции и называются произведениями инерции или центробежными моментами инерции. Эта упорядоченная совокупность девяти множителей при всех проекциях вектора $\vec{\omega}$ представляет собой тензор момента инерции точек тела с массами m_i и записывается в виде матрицы:

$$\Delta J = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}. \qquad (12.12)$$

Здесь величины J_{ij} называются компонентами тензора инерции. Компоненты тензора инерции зависят от системы отсчёта и ориентации тела (от выбора направления осей координат). Таким образом, тензор инерции является тензором второго ранга, причём симметричный, так как $J_{xy} = J_{yx}$, $J_{xz} = J_{zx}$, $J_{yz} = J_{zy}$. Следовательно, инертные свойства абсолютно твёрдого тела характеризуются тензором инерции, имеющим шесть независимых компонент.

Задача о движении тела, закреплённого в одной точке, оказывается достаточно сложной. Однако решение этой задачи можно упростить, если использовать следующие соображения. Можно показать, что для любого тела (то есть для тела произвольной формы) и любой точки закрепления O имеются по крайней мере три взаимно перпендикулярных направления, проходящих через эту точку закрепления по которым направление вектора момента импульса $\vec{L}$ совпадает с направлением вектора угловой скорости $\vec{\omega}$. Такие направления называются главными осями вращения или главными осями инерции. Если выбрать систему координат, жёстко связанную с телом, так, что её начало отсчёта совпадает с центром закрепления, а оси совпадают с главными осями инерции, то в этой системе все центробежные моменты инерции равны нулю, а диагональные компоненты тензора инерции (осевые моменты инерции) имеют определённое значение. В этом случае тензор инерции имеет следующий вид:

$$\Delta J = \begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, тензор инерции приведён к диагональному виду. Осевые моменты инерции в этом случае называются главными моментами инерции. Если главные оси инерции проходят через центр масс, то оси называются главными центральными осями инерции, а тензор инерции в этом случае называют центральным. Следовательно, нахождение главных осей вращения сводится к математической процедуре диагонализации тензора инерции. Но для симметричных однородных твёрдых тел можно найти главные центральные оси инерции из соображений симметрии. Ниже приведено несколько примеров.

1). Однородный параллелепипед – главные центральные оси инерции проходят через центр масс и центры противоположных граней (рис. 12.7а). В этом случае $J_{xx} \neq J_{yy} \neq J_{zz}$.

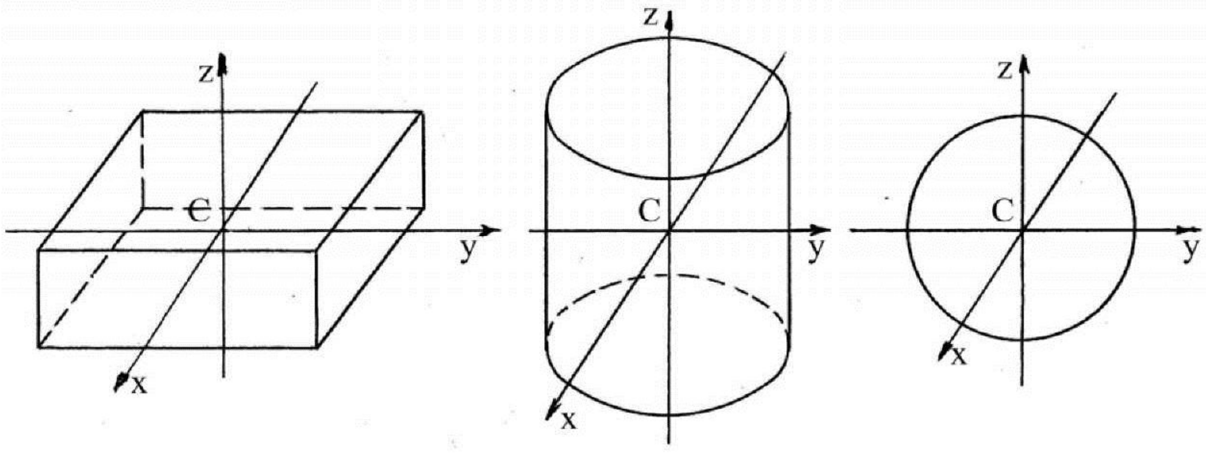
2). Тело с осевой симметрией (например, однородный сплошной цилиндр): одна ось (фиксированная) совпадает с осью симметрии, а две другие – это две взаимно перпендикулярные оси, расположенные в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра и проходящие через центр масс тела (рис. 12.7б). В этом случае $J_{xx} = J_{yy} \neq J_{zz}$.

3). Тело с центральной симметрией (шар). Главными центральными осями инерции являются любые три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс тела (рис. 12.7в). В этом случае $J_{xx} = J_{yy} = J_{zz} = J$ и

$$\vec{L} = L_x \cdot \vec{i} + L_y \cdot \vec{j} + L_z \cdot \vec{k} = J_{xx} \cdot \omega_x \cdot \vec{i} + J_{yy} \cdot \omega_y \cdot \vec{j} + J_{zz} \cdot \omega_z \cdot \vec{k} =$$

$$= J \cdot (\omega_x \cdot \vec{i} + \omega_y \cdot \vec{j} + \omega_z \cdot \vec{k}) = J \cdot \vec{\omega},$$

то есть направление момента импульса совпадает с направлением вектора угловой скорости.



а) б) в)

Рис. 12.7

Для тела произвольной формы наглядное представление о величине моментов инерции относительно любого *i*-го направления можно получить, исходя из геометрической интерпретации тензора инерции. Если попроизволь-

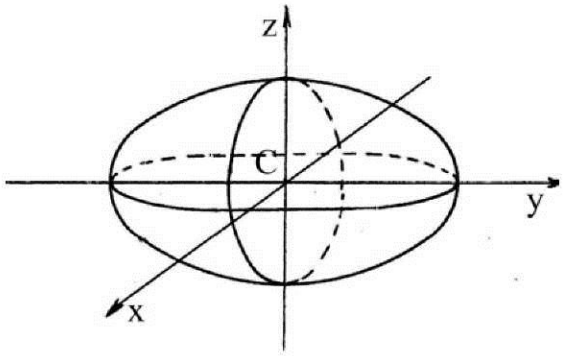


Рис. 12.8

ному i-му направлению от центра масс тела откладывать отрезки ℓ_i, определяемые равенством $\ell_i = 1 / \sqrt{J_i}$, где J_i – моменты инерции тела относительно i-й оси, то геометрическое место точек, соответствующих концам этих отрезков будет поверхность эллипсоида инерции (рис. 12.8), оси которого и являются главными центральными осями инерции. Уравнение данного эллипсоида можно записать в виде:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1,$$

где $$A = 1 / \sqrt{J_{xx}}; \quad B = 1 / \sqrt{J_{yy}}; \quad C = 1 / \sqrt{J_{zz}}.$$

Тогда уравнение эллипсоида инерции можно преобразовать к виду:

$$J_{xx} \cdot x^2 + J_{yy} \cdot y^2 + J_{zz} \cdot z^2 = 1. \qquad (12.13)$$

Таким образом, задача упрощается и сводится к описанию движения эллипсоида инерции (жёстко связанного с телом). Следовательно, для описания движения твёрдого тела особое значение приобретает задача вычисления осевых моментов инерции.

12.5. Вычисление моментов инерции твёрдого тела относительно оси

Рассмотрим твёрдое тело произвольной формы, вращающееся вокруг оси OX (рис. 12.9). Осевой момент инерции тела определяется формулой: $J_{xx} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (r_i^2 - x_i^2) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot R_i^2$, где $R_i^2 = r_i^2 - x_i^2$ – квадрат расстояния i-й точки тела и массой m_i, то есть

$$J_{xx} = \sum_{i=1}^{n} J_{xi}, \qquad (12.14)$$

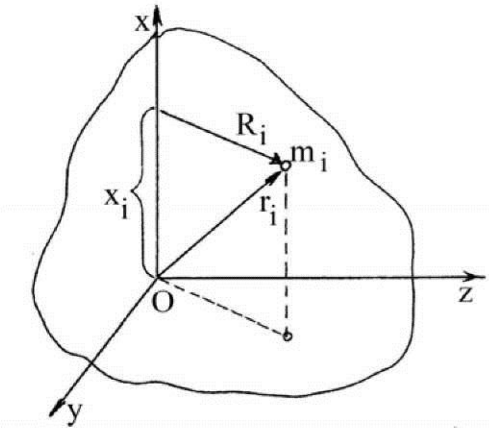


Рис. 12.9

где $J_{xi} = m_i \cdot R_i^2$ – момент инерции точки с массой m_i, то есть выражение (12.14) представляет собой сумму моментов инерции всех материальных точек тела относительно оси OX. В общем случае задача вычисления момента инерции твёрдого тела относительно оси не является простой. Момент инерции тела $J = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2$ произвольной формы зависит от распределения массы в теле. В пределах тела распределение массы можно характеризовать с помощью известной величины плотности $\rho = m/V$, где V – объём, в котором заключена масса m. Для тела с переменной плотностью вводится понятие плотности в данной точке:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}.$$

Тогда элементарную массу Δm_i $i^{ой}$ точки тела можно выразить соотношением: $\Delta m_i = \rho_i(x, y, z) \cdot \Delta V_i$. Момент инерции тела можно представить в виде суммы моментов инерции составляющих его элементарных масс:

$$J = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \rho_i(x, y, z) \cdot r_i^2 \cdot \Delta V_i .$$

Полученное соотношение является приближённым. Точное выражение момента инерции тела можно получить, заменив в пределе суммирование интегрированием:

$$J = \int_V r^2 \cdot dm = \int_V \rho \cdot r^2 \cdot dV. \qquad (12.15)$$

Таким образом, задача нахождения момента инерции сводится к интегрированию по объёму произведения $\rho \cdot r^2$. Однако, если тело однородно $(\rho = const)$ и симметрично относительно оси вращения, задача определения момента инерции упрощается. Ниже приведены примеры вычисления момента инерции однородных тел, симметричных относительно оси вращения.

<u>А. Момент инерции однородного цилиндра (диска) относительно оси симметрии</u>. Для решения задачи расчёта момента инерции сплошного однородного $(\rho = const)$ цилиндра высотой h и радиусом R выделим тонкий цилиндрический слой радиусом r толщиной dr (рис. 12.10). Масса данного слоя равна:

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \cdot dr .$$

Поскольку все точки слоя удалены от оси вращения x на одинаковые расстояния для вычисления момента инерции можно применить формулу (12.15):

$$J = \int_0^J dJ = \int_0^R 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot h \cdot r^2 \cdot dr =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot h \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2,$$

где $m = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$.

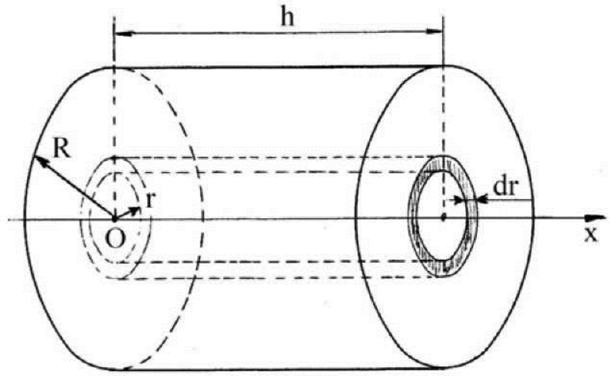


Рис. 12.10

Рассмотренной методикой можно воспользоваться и для расчёта момента инерции полого однородного цилиндра высотой h и радиусами R_1 и R_2, изменив пределы интегрирования (от 0 до R) на интервал $R_1 \ldots R_2$ (рис. 12.11):

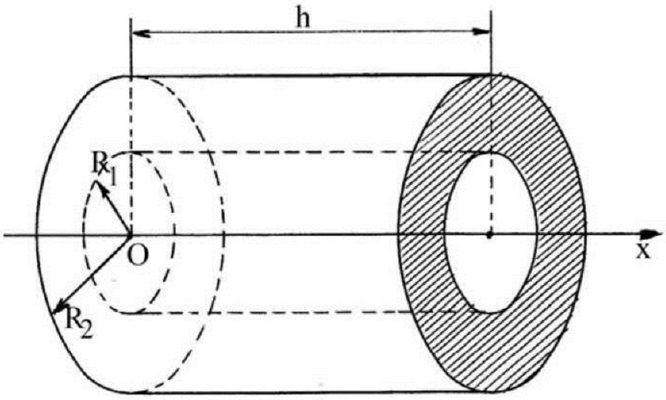


Рис. 12.11

$$J = \int_0^J dJ = \int_{R_1}^{R_2} 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot h \cdot r^2 \cdot dr =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot h \cdot \frac{1}{4} \cdot (R_2^4 - R_1^4) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(R_1^2 + R_2^2\right),$$

где $m = \rho \cdot \pi \cdot \left(R_2^2 - R_1^2\right) \cdot h$ – масса цилиндра.

Б. Момент инерции однородного тела вращения относительно оси симметрии. Для вычисления момента инерции тела вращения удобно воспользоваться формулой расчёта момента инерции однородного диска массой m радиусом R: $J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2$. С этой целью следует мысленно разделить тело вращения на множество бесконечно тонких дисков радиусами $f(h)$ толщиной $dx = dh$ (рис. 12.12). Момент инер-ции каждого такого диска относительно оси x равен $dJ = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot f^2(h)$.

Тогда момент инерции всего тела вращения получается интегрированием выражения:

$$dJ = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot dV \cdot f^2(h) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \rho \cdot f^4(h) \cdot dh,$$

где $dV = \pi \cdot f^2(h) \cdot dh$:

$$J = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \rho \cdot \int_0^H f^4(h) \cdot dh. \qquad (12.6)$$

Это выражение можно использовать для вычисления момента инерции любого однородного тела, симметричного относительно оси вращения.

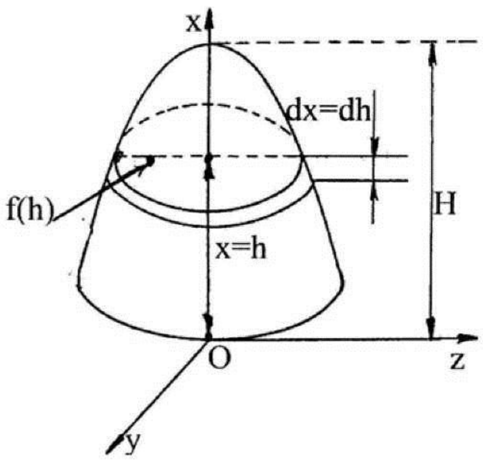


Рис. 12.12

В. Момент инерции однородного конуса может быть рассчитан с помощью уравнения (12.16), где $f(h)$ определяется из следующего соотношения (рис. 12.13):

$\frac{R}{H} = \frac{f(h)}{h}$, то есть $f(h) = h \cdot \frac{R}{H}$. Подстановка полученного соотношения в формулу (12.16) даёт:

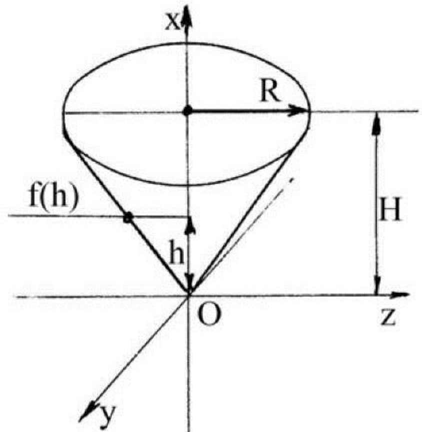


Рис. 12.13

$$J = \frac{\pi \cdot \rho}{2} \cdot \int_0^H f^4(h) \cdot dh = \frac{\pi \cdot \rho \cdot R^4}{2 \cdot H^4} \cdot \int_0^H f^4(h) \cdot dh =$$

$$= \frac{\pi \cdot \rho \cdot R^4}{2} \cdot H \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{10} \cdot m \cdot R^2, \qquad (12.17)$$

где $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$.

Г. Момент инерции однородного шара. Момент инерции шара относите-льно оси вращения, проходящей через его центр, можно вычислить, исполь-зуя формулу (12.16). При этом удобно найти момент инерции половины ша-ра, а затем удвоить полученный резу-льтат. Из рис. 12.14 очевидно, что $f^2(h) = R^2 - h^2$. Подстановка полученного соотношения в формулу (12.16) даёт:

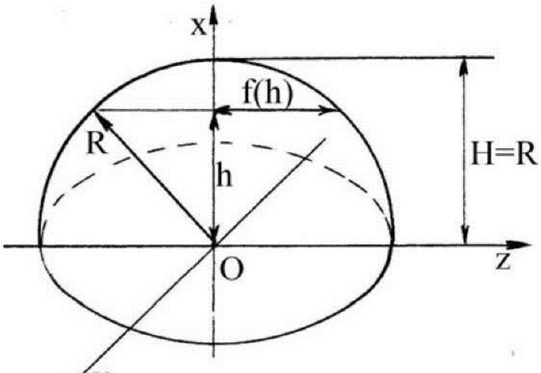


Рис. 12.14

$$J = 2 \cdot \frac{\pi \cdot \rho}{2} \cdot \int_0^H f^4(h) \cdot dh =$$

$$= \pi \cdot \rho \cdot \int_0^R (R^4 - 2 \cdot R^2 \cdot h^2 \cdot dh + h^4) \cdot dh = \frac{8}{15} \cdot \pi \cdot \rho \cdot R^5 = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2, \qquad (12.18)$$

где $m = \rho \cdot V = \frac{4}{3} \cdot \rho \cdot \pi \cdot R^3$ – масса шара.

12.6. Теорема Штейнера – Гюйгенса

Выше рассмотрены задачи вычисления моментов инерции тел относительно осей вращения, проходящих через центр масс тел, обладающих симметрией. В рассмотренных случаях ось вращения являлась одной из главных центральных осей инерции. Вычисление момента инерции тела относительно оси, не проходящей через центр масс, как правило, оказывается сложной задачей. Однако решение подобных задач существенно упрощает применение теоремы Штейнера – Гюйгенса, согласно которой *момент инерции тела относительно произвольной оси J равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс J_0 и произведения массы данного тела m на квадрат расстояния a между осями*, то есть $J = J_0 + m \cdot a^2$.

Для доказательства данной теоремы решим задачу определения момента инерции тела произвольной формы относительно произвольной оси. Начало отсчёта системы Σ совместим с центром масс C тела (рис. 12.15). Ось CZ системы отсчёта Σ параллельна оси $O'Z'$ системы отсчёта Σ'. Требуется вычислить момент инерции тела относительно оси $O'Z'$. Оси CX и $O'X'$ систем отсчёта соответственно Σ и Σ' совпадают. Обозначим символом J момент инерции тела относительно оси $O'Z'$, а символом J_0 – момент инерции тела относительно оси CZ. Координаты произвольной i-й точки тела массой Δm_i в системе отсчёта Σ и Σ' связаны соотношениями:

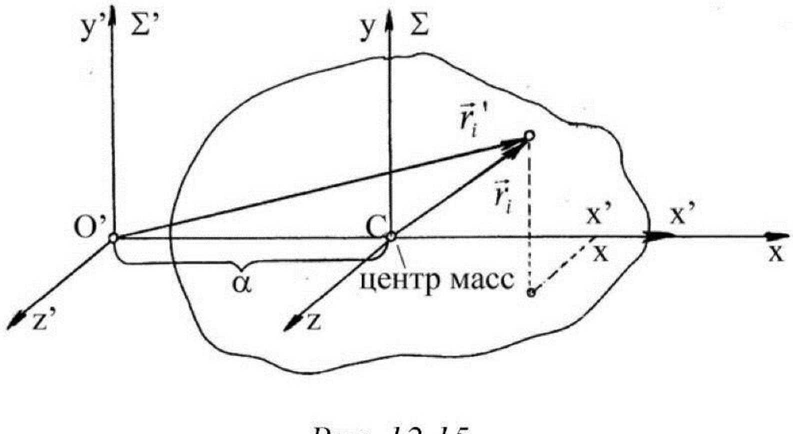


Рис. 12.15

$$\begin{cases} x_i' = x_i + a; \\ y_i' = y_i; \\ z_i' = z_i. \end{cases} \qquad (12.19)$$

Тогда расстояния i-й точки тела до осей соответственно CZ и $O'Z'$ выражаются соотношениями:

$$\rho_i^2 = x_i^2 + y_i^2$$

и

$$\rho_i'^2 = x_i'^2 + y_i'^2 = (x_i + a)^2 + \rho_i'^2 = x_i'^2 + y_i'^2 = (x_i + a)^2 + y_i^2 = \rho_i^2 + 2 \cdot a \cdot x_i + a^2.$$

С учётом полученных соотношений момент инерции тела относительно оси CZ выражается уравнением:

$$J_0 = \sum_{i=1}^{n} J_{0i} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot \rho_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2). \qquad (12.20)$$

Момент инерции J тела относительно оси $O'Z'$ описывается соотношением:

$$J = \sum_{i=1}^{n} J_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot \rho_i'^2 = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot \rho_i^2 + 2 \cdot a \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot x_i + a^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i. \qquad (12.21)$$

Здесь $J_0 = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot \rho_i^2$, масса тела равна $m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i$. Поскольку начало координат системы отсчёта Σ совпадает с центром масс, координаты центра масс тела в этой системе отсчёта равны нулю, то есть $x_C = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot x_i = 0$, или $\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot x_i = 0$. С учётом сделанных замечаний соотношение (12.21) преобразуется к выражению $J = J_0 + m \cdot a^2$, отражающему теорему Штейнера – Гюйгенса.

Рассмотрим пример применения теоремы Штейнера – Гюйгенса для определения момента инерции тела относительно произвольной оси. Для этого решим задачу определения момента инерции стержня длиной L с площадью поперечного сечения $S = a \cdot b$ относительно оси $O'X'$, проходящей через конец стержня (рис. 12.16).

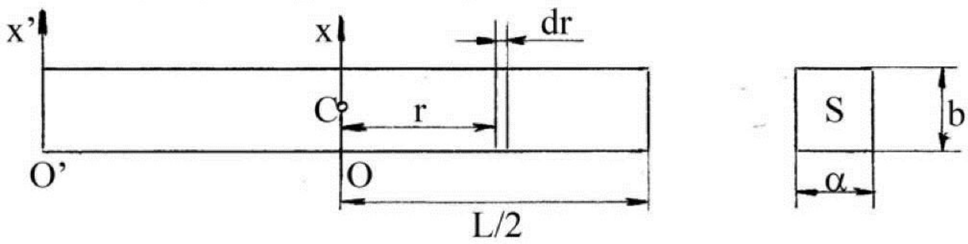


Рис. 12.16

Предварительно необходимо вычислить момент инерции стержня J_0 относительно оси OX, проходящей через центр масс C. Для этого рассмотрим элементарную массу dm геометрического множества точек, удалённых относительно оси вращения OX на одинаковое расстояние r. Толщина полученного слоя равна dr. Элементарная масса слоя определяется выражением: $dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot a \cdot b \cdot dr$, где ρ - плотность стержня. По определению момент инерции слоя массой dm относительно оси OX, проходящей через центр масс равен: $dJ_0 = dm \cdot r^2 = \rho \cdot a \cdot b \cdot dr \cdot r^2$. Интегрирование последнего выражения позволяет выразить момент инерции всего стержня относительно оси OX, проходящей через его центр масс:

$$J_0 = 2\cdot\int_0^{L/2} dJ_0 = 2\cdot\rho\cdot a\cdot b\cdot\int_0^{L/2} r^2\cdot dr = \frac{1}{12}\cdot m\cdot L^2.$$

Согласно теореме Штейнера – Гюйгенса момент инерции стержня относительно оси $O'X'$, параллельной оси OX и удалённой от неё на расстояние a, равен:

$$J = J_0 + m\cdot a^2 = \frac{1}{12}\cdot m\cdot L^2 + m\cdot\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}\cdot m\cdot L^2.$$

§ 13. Свободные оси вращения. Гироскоп

13.1. Свободные оси вращения

Рассмотрим примеры вращения абсолютно твёрдого тела относительно оси. В частном случае ось вращения может проходить и через центр масс C тела (рис. 13.1б).

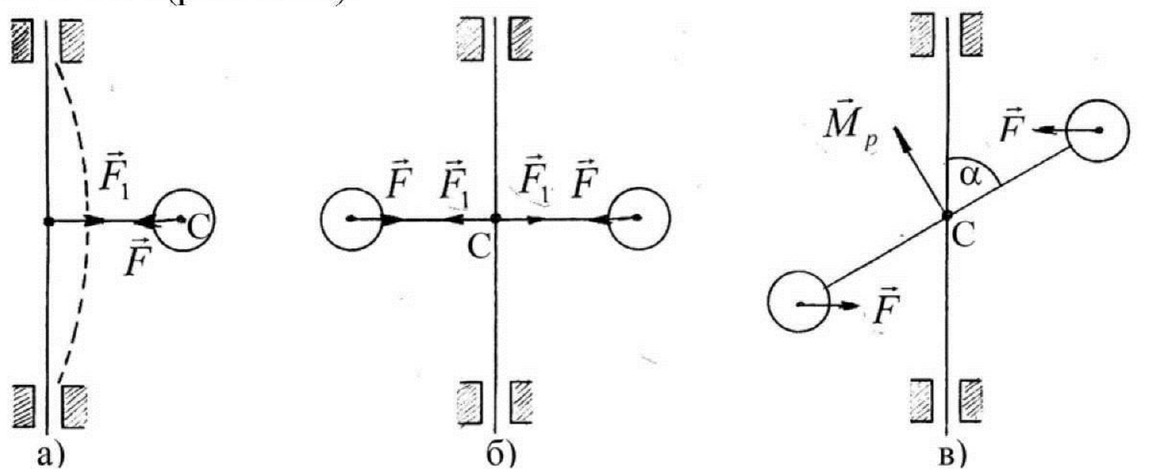


Рис. 13.1

В общем случае ось вращения не проходит через центр масс C системы (рис. 13.1а). При вращении в такой системе возникает сила $\vec{F}_1$, действующая на ось со стороны вращающегося тела и стремящаяся переместить ось вращения (или изогнуть её – пунктирная линия на рис. 13.1а).

Если ось вращения проходит через центр масс C, то действующие в системе силы уравновешены и результирующее воздействие на ось вращения этих сил равно нулю (рис. 13.1б).

Если ось вращения проходит через центр масс C, но стержень, соединяющий шары составляет некоторый угол $\alpha \neq 90^\circ$ с осью вращения, результирующий момент $\vec{M}_p$ пары сил $\vec{F}$ поворачивает ось вращения или изгибает её (рис. 13.1в).

Приведённые рассуждения справедливы для любых взаимно перпендикулярных осей вращения, проходящих через центр масс системы.

Это позволяет сделать вывод о том, что *действие вращающегося тела на ось вращения равно нулю только при условии, если ось вращения проходит через центр масс и момент сил, относительно любого направления, перпендикулярного оси и проходящего через центр масс, равен нулю.*

Ось вращения, положение которой в пространстве сохраняется в отсутствие действия на тело каких-либо внешних сил, называется свободной осью вращения. Поскольку приведённые выше рассуждения верны для любых взаимно перпендикулярных осей, проходящих через центр масс тела, можно сделать вывод о том, что свободными осями являются главные центральные оси инерции. Очевидно, что вращение тела в отсутствие внешних воздействий является устойчивым, если оно осуществляется вокруг главных центральных осей инерции, относительно которых момент инерции максимален или минимален. Такое вращение в отсутствие каких-либо внешних сил, в том числе и сил трения, может продолжаться бесконечно долго. Вращение вокруг оси, относительно которой момент инерции имеет промежуточное значение, является неустойчивым, то есть силы, возникающие в системе при малейшем отклонении оси вращения от заданного положения, действуют в таком направлении, что величина этого отклонения возрастает. При отклонении оси вращения от положения устойчивого равновесия возникают силы, возвращающие систему к вращению вокруг оси, соответствующей устойчивому равновесию. Данный вывод следует также и из анализа уравнения моментов:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} . \qquad (13.1)$$

13.2. Свободный гироскоп

Гироскопом называется однородное симметричное тело, совершающее вращение вокруг своей оси симметрии, являющейся одной из главных осей вращения, с большой угловой скоростью. Наиболее простым гироскопом является гироскоп, закреплённый в одной точке, совпадающей с его центром инерции (центром масс), называемый свободным гироскопом. Указанное закрепление можно осуществить с помощью карданова подвеса (рис. 13.2). В этом случае диск с осью симметрии AA' вращается вокруг оси симметрии, концы которой A и A' закреплены на горизонтальном кольце таким образом, что ось AA' может вращаться без трения. Горизонтальное кольцо опирается на подшипники, расположенные на вертикальном кольце и вся система может поворачиваться вокруг оси BB' и оси DD'. Таким образом, оси AA', BB' и DD'

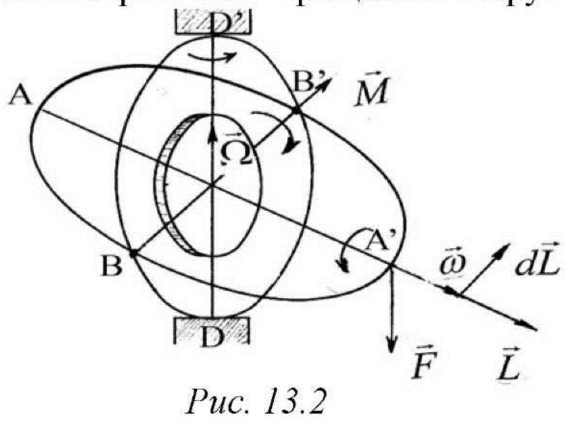


Рис. 13.2

взаимно перпендикулярны и пересе-каются в точке C центра масс. Это равносильно закреплению гироскопа в одной точке, совпадающей с центром масс C. Силу тяжести гироскопа можно считать приложенной к центру масс, совпадающему с центром закрепления. Поэтому момент силы тяжести равен нулю $\vec{M}=0$. Следовательно, в отсутствие вращения ось AA' может занимать произвольное положение в пространстве, то есть равновесие является безразличным.

Если гироскоп привести во вращение вокруг оси AA' с угловой скоростью $\vec{\omega}$ и предоставить самому себе, то уравнение моментов для свободного гироскопа запишется в виде: $\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}=0$, то есть $\frac{d\vec{L}}{dt}=0$, а следовательно $\vec{L}=J\cdot\vec{\omega}=const$, то есть ось вращения, направление которой совпадает с вектором $\vec{L}=J\cdot\vec{\omega}=const$, сохраняет своё положение в пространстве (при любых манипуляциях с подставкой гироскопа).

13.3. Движение оси гироскопа под действием внешней силы. Прецессия

Если к оси гироскопа AA' (рис. 13.2) приложить внешнюю силу $\vec{F}$, то под действием этой силы ось AA' начнёт поворачиваться относительно оси BB'. Момент этой силы описывается выражением: $\vec{M}=\left[\vec{r},\vec{F}\right]$. Поскольку векторы $d\vec{L}$ и $\vec{M}$ согласно уравнению (13.1) направлены одинаково, то ось AA' поворачивается вокруг оси DD', перпендикулярной осям AA' и BB'. Чем больше сила $\vec{F}$, тем с большей угловой скоростью $\vec{\Omega}$ происходит вращение. Поскольку $d\vec{L}=\vec{M}\cdot dt$ векторы $d\vec{L}$ и $\vec{L}$ взаимно перпендикулярны (рис. 13.3 отражает конфигурацию, рис. 13.2 – вид сверху). Из рис. 13.3. и уравнения моментов можно получить:

$$\begin{cases} dL=M\cdot dt; \\ dL=L\cdot d\alpha. \end{cases} \qquad (13.2)$$

Из уравнений системы (13.2) можно выразить угловую скорость:

$$\Omega=\frac{d\alpha}{dt}=\frac{M}{L}=\frac{M}{J\cdot\omega}. \qquad (13.3)$$

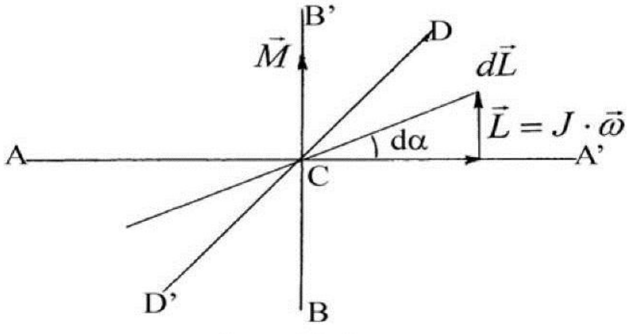


Рис. 13.3

Таким образом, ось гироскопа AA' поворачивается вокруг оси DD' с угловой скоростью $\vec{\Omega}$ (рис. 13.2). Движение оси гироскопа под действием внешней силы называется <u>регулярной</u> <u>прецессией</u>, а угловая скорость вращения $\vec{\Omega}$ называется <u>угловой</u> <u>скоростью</u> <u>прецессии</u>.

Из выражения для угловой скорости прецессии (13.3) следует, что момент сил $\vec{M}$ определяет не угловое ускорение, а угловую скорость вращения $\vec{\Omega}$, то есть прецессия не имеет инерции. Если прекратить действие внешней силы $\vec{F}$, то одновременно прекратится вращение оси AA' вокруг оси DD', то есть $\Omega = 0$.

Если внешняя сила $\vec{F}$ направлена так, что её момент $\vec{M}$ не перпендикулярен вектору момента импульса $\vec{L}$, то следует учитывать только составляющую вектора $\vec{M}$ (то сеть M_n), нормальную вектору $\vec{L}$, поскольку действие составляющей, направленной вдоль оси гироскопа уравновешено действием опоры внешнего кольца.

13.4. Волчок. Гироскопический маятник

Рассмотрим волчок – гироскоп, опирающийся одним концом на опору, то есть гироскоп, закреплённый также в одной точке, но не совпадающей с центром масс (рис. 13.4). Волчок запущен так, что его ось симметрии составляет угол α с вертикалью. На волчок действует сила тяжести $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$, образующие пару сил. Обозначим символом h расстояние OC между точкой опоры O и центром масс C. Модуль момента этой пары сил равен $M_p = P \cdot \ell = N \cdot \ell$, где $\ell = h \cdot \sin\alpha$ – плечо пары сил.

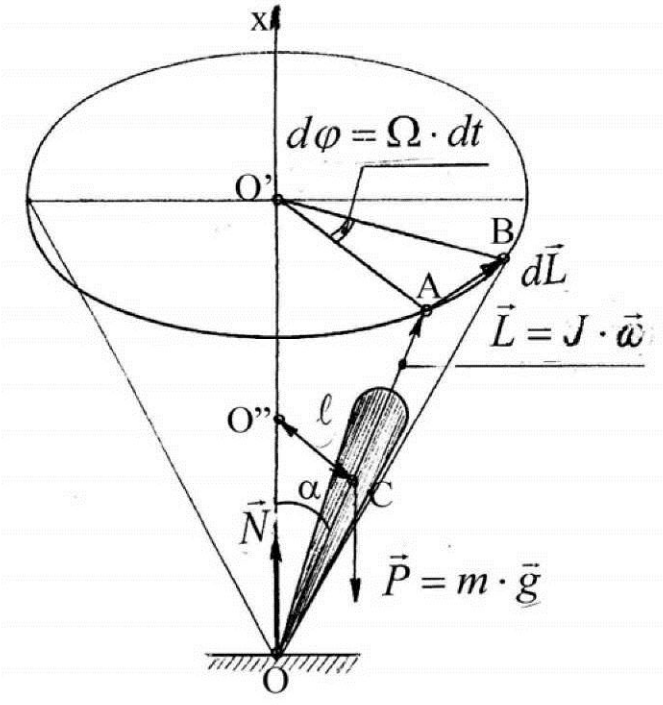


Рис. 13.4

Следовательно

$$M_p = P \cdot h \cdot \sin\alpha = N \cdot h \cdot \sin\alpha = m \cdot g \cdot h \cdot \sin\alpha . \quad (13.4)$$

Из уравнения (13.1) моментов можно записать:

$$dL = M_p \cdot dt , \qquad (13.5)$$

причём согласно рис. 13.4 $O'A = L \cdot \sin\alpha$.

С другой стороны:

$$dL = O'A \cdot d\varphi = L \cdot \Omega \cdot \sin\alpha \cdot dt . \qquad (13.6)$$

Подстановка соотношения (13.4) в выражение (13.5) даёт:

$$dL = M_p \cdot dt = m \cdot g \cdot h \cdot \sin\alpha \cdot dt.$$

Приравнивая правые части последнего соотношения и формулы (13.6), можно выразить угловую скорость прецессии:

$$m \cdot g \cdot h \cdot \sin\alpha \cdot dt = L \cdot \Omega \cdot \sin\alpha \cdot dt ,$$

следовательно

$$\Omega = \frac{m \cdot g \cdot h}{L} = \frac{m \cdot g \cdot h}{J \cdot \omega}. \qquad (13.7)$$

В действительности, направление полного момента импульса волчка $\vec{L}'$ не совпадает с направлением оси вращения волчка, то есть с вектором $\vec{L}$. Волчок участвует в двух вращательных движениях: вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг оси симметрии и прецессирует с угловой скоростью $\vec{\Omega}$. Таким образом, его угловая скорость $\vec{\omega}'$ равна:

$$\vec{\omega}' = \vec{\omega} + \vec{\Omega}. \qquad (13.8)$$

Поэтому полный момент импульса волчка равен: $\vec{L}' = J \cdot \vec{\omega}'$ (рис. 13.5). Движение оси волчка вокруг неподвижного в пространстве вектора полного момента импульса $\vec{L}'$, называется нутацией. Вектор полного момента импульса поворачивается с угловой скоростью $\vec{\Omega}$ относительно вертикали (прецессия). Сложение этих движений приводит к тому, что конец оси волчка описывает не окружность, а движется по циклоиде (рис. 13.6), то есть под действием силы тяжести $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ волчок падает, но возникающий в результате вращения момент пары сил $\vec{M}_p$ заставляет ось волчка поворачиваться (ось падает и поворачивается), то есть конец оси волчка движется по циклоиде.

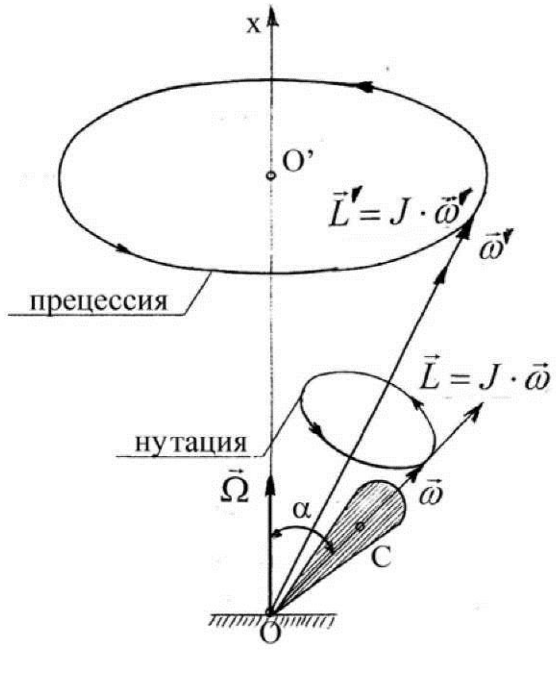


Рис. 13.5

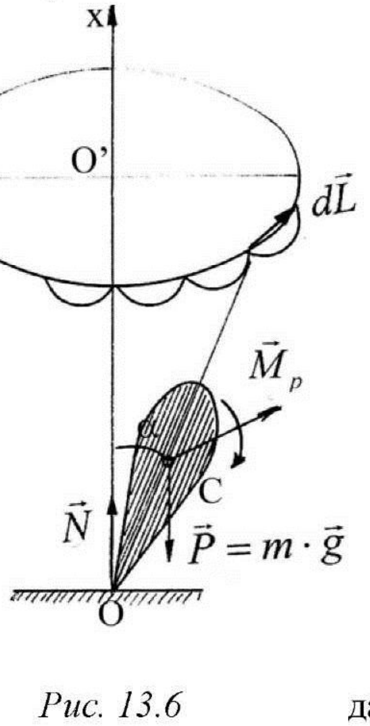


Рис. 13.6

Если ось волчка опирается на опору A, а эта опора подвешена на нити (рис. 13.7), то сделанные выше выводы применимы к описанию движения такой системы, то есть угловая скорость прецессии также не зависит от угла α: $\Omega = (m \cdot g \cdot h)/L$. Это позволяет называть данное устройство гироскопическим маятником. Используя формулу связывающую период и частоту $T = 2\pi/\Omega$, можно выразить период колебаний гироскопического маятника:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{m \cdot g \cdot h}. \tag{13.9}$$

Для гироскопического маятника мож-но ввести понятие приведённой длины, под которой понимается длина нити математического маятника, имеющего такой же пе-риод колебаний (13.9):

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \ell}{m \cdot g \cdot h}.$$

Здесь $\ell = g \cdot \left(\frac{L}{m \cdot g \cdot h} \right)^2$ – приведённая длина гироскопического маятника.

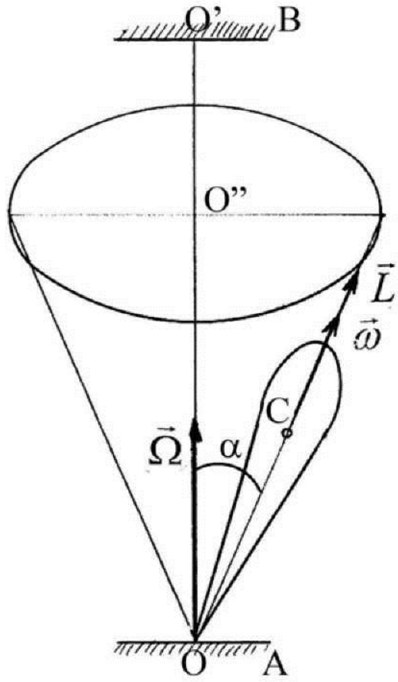


Рис. 13.7

§ 14. Работа силы при вращении тела вокруг неподвижной оси. Кинетическая энергия вращения. Теорема Кёнига

Предварительно рассмотрим движение материальной точки по окружности (рис. 14.1). Для движения материальной точки в плоскости YOZ уравнение моментов можно записать в следующем виде:

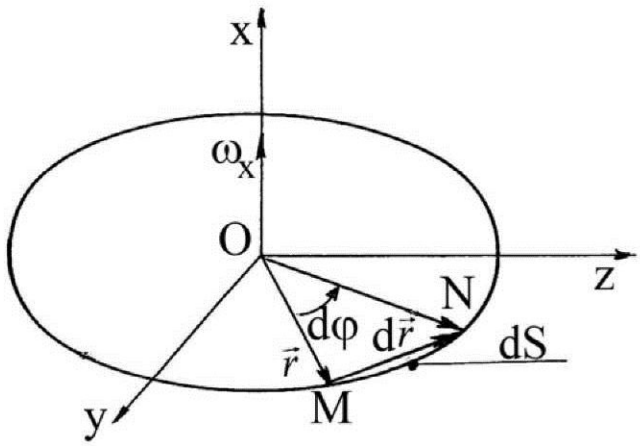


Рис.14.1.

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x;$$

где $L_x = J_x \cdot \omega_x$ — момент импульса, $J_x = m \cdot r^2$ — момент инерции точки массой m, находящейся на расстоянии r от оси вращения. Элементарная работа силы $\vec{F}$ описывается выражением:

$$\partial A = \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|d\vec{r}\right| \cdot \cos\alpha,$$

здесь α – угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$. Причём $dr = \left|d\vec{r}\right| \approx dS$, $\left|\vec{F}\right| \cdot \cos\alpha = F_\tau$ — проекция вектора силы на направление перемещения, поэтому $\partial A = F_\tau \cdot dS = F_\tau \cdot r \cdot d\varphi;$ здесь $dS = \left|\vec{r}\right| \cdot d\varphi$.

Учитывая, что $M_x = F_\tau \cdot d\varphi$ элементарную работу можно выразить соотношением: $\partial A = M_x \cdot d\varphi$. Тогда работа силы $\vec{F}$ равна:

$$A_{1-2} = \int_1^2 M_x \cdot d\varphi. \qquad (14.1)$$

Используя уравнение моментов $\frac{dL_x}{dt} = M_x$, выражение (14.1) можно преобразовать к виду: $A_{1-2} = \int_1^2 dL_x \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \int_1^2 \omega_x \cdot d(J_x \cdot \omega_x)$. Если $J_x = m \cdot r^2 = const$, то

$$A_{1-2} = J_x \cdot \int_1^2 \omega_x \cdot d\omega_x. \qquad (14.2)$$

Для вычисления кинетической энергии материальной точки E_{kx} необходимо определить работу силы, необходимую для того, чтобы изменить скорость движения материальной точки от нулевого значения до величины ω:

$$A = J_x \cdot \int_0^{\omega_x} \omega_x \cdot d\omega_x = \frac{J_x \cdot \omega_x{}^2}{2} = E_{kx}. \qquad (14.3)$$

Чтобы угловую скорость изменить от значения ω_{x1} до ω_{x2} необходимо совершить работу:

$$A = J_x \cdot \int_{\omega 1}^{\omega_{x2}} \omega_x \cdot d\omega_x = \frac{J_x \cdot \omega_{x2}{}^2}{2} - \frac{J_x \cdot \omega_{x1}{}^2}{2} = E_{kx2} - E_{kx1} = \Delta E_{kx}. \qquad (14.4)$$

Рассмотрим вращение твёрдого тела относительно оси OX (рис. 14.2). Кинетическую энергию i-й точки тела можно выразить соотношением: $E_{kxi} = J_{xi} \cdot \omega_x^2 / 2$. Поскольку все материальные точки тела имеют одинаковую угловую скорость, а момент инерции i-й точки равен $J_{xi} = m_i \cdot \rho_i^2$, то кинетическую энергию всего тела можно описать следующим выражением:

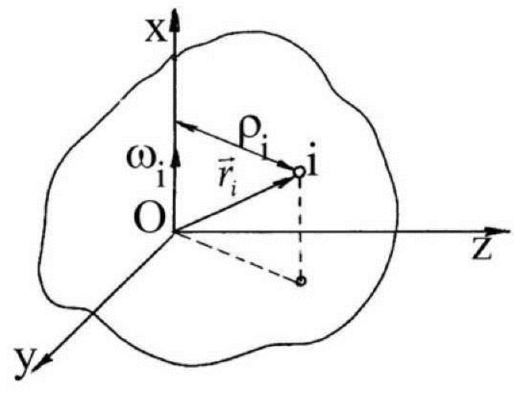


Рис. 14.2

$$E_{kx} = \sum_{i=1}^{n} E_{kxi} = \frac{\omega_x^2}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} J_{xi}. \qquad (14.5)$$

Здесь $J_x = \sum_{i=1}^{n} J_{xi}$ – момент инерции твёрдого тела относительно оси OX.

Тогда выражение (14.5) можно преобразовать к виду:

$$E_{kx} = \frac{J_x \cdot \omega_x^2}{2}. \qquad (14.6)$$

Если тело закреплено в одной точке, и оси координат, жёстко связанные с телом, направлены вдоль главных осей инерции, то все центробежные моменты инерции тела равны нулю и не равны нулю только осевые моменты инерции. Тогда кинетическая энергия тела может быть представлена следующим выражением:

$$E_k = E_{kx} + E_{ky} + E_{kz} = \frac{1}{2}\cdot\left(J_x\cdot\omega_x^{\ 2} + J_y\cdot\omega_y^{\ 2} + J_z\cdot\omega_z^{\ 2}\right). \qquad (14.7)$$

Определим кинетическую энергию твёрдого тела, совершающего произвольное движение. Как известно, сложное движение твёрдого тела, можно разложить на поступательное движение произвольно выбранной точки этого тела и вращательное движение тела, закреплённого в этой точке (рис. 14.3). В качестве центра вращения выберем точку C – центр масс тела. Совместим с точкой C начало координат системы Σ', которая движется поступательно относительно неподвижной системы отсчёта Σ. Тогда в системе отсчёта Σ скорость i-й точки тела равна:

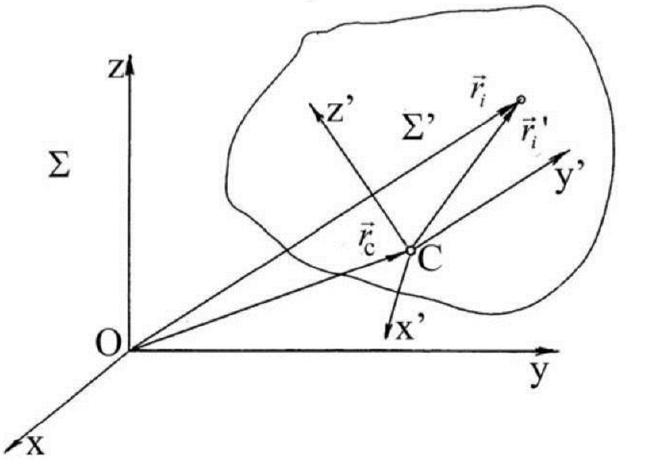


Рис. 14.3

$$\vec{\upsilon}_i = \vec{\upsilon}_C + \vec{\upsilon}_i' = \vec{\upsilon}_C + \left[\vec{\omega}, \vec{r}_i'\right], \qquad (14.8)$$

где $\vec{\upsilon}_C$ — скорость центра масс, $\vec{\upsilon}_i'$ – линейная скорость вращения i-й точки тела относительно системы отсчёта Σ'. Кинетическая энергия i-й точки тела может быть выражена следующим соотношением:

$$E_{ki} = \frac{1}{2}\cdot\Delta m_i\cdot\upsilon_i^2 = \frac{1}{2}\cdot\Delta m_i\cdot\left(\vec{\upsilon}_i, \vec{\upsilon}_i\right) = \frac{1}{2}\cdot\Delta m_i\cdot\left(\vec{\upsilon}_C + \vec{\upsilon}_i{}', \vec{\upsilon}_C + \vec{\upsilon}_i{}'\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\Delta m_i\cdot\upsilon_C^2 + \Delta m_i\cdot\left(\vec{\upsilon}_C, \vec{\upsilon}_i{}'\right) + \frac{1}{2}\cdot\Delta m_i\cdot\upsilon_i'^2. \qquad (14.9)$$

Здесь Δm_i – масса i-й точки тела. Суммируя выражение (14.9) по всем материальным точкам тела, получим:

$$E_k = \frac{1}{2}\cdot\upsilon_C^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i + \left(\vec{\upsilon}_C, \sum_{i=1}^{n}\Delta m_i\cdot\vec{\upsilon}_i'\right) + \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i\cdot\upsilon_i'^2. \qquad (14.10)$$

Поскольку начало координат системы отсчёта Σ' совпадает с центром масс твёрдого тела, то в системе Σ' $\vec{\upsilon}_C{}' = \frac{1}{m}\cdot\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i\cdot\vec{\upsilon}_i' = 0$. Поэтому уравнение (14.10) преобразуется к следующему виду:

$$E_k = \frac{1}{2}\cdot m\cdot\upsilon_C^2 + \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i\cdot\upsilon_i'^2, \qquad (14.11)$$

где $E_{kC} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_C^2$ – кинетическая энергия движения центра масс, $E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \upsilon_i'^2$ – кинетическая энергия относительного движения тела (то есть движения тела относительно системы отсчёта Σ', которая движется поступательно относительно системы отсчёта Σ). Уравнение (14.11) отражает содержание теоремы Кёнига, согласно которой *кинетическая энергия тела, совершающего сложное движение, может быть представлена как сумма кинетической энергии движения центра масс и кинетической энергии движения тела относительно системы отсчёта, движущейся поступательно вместе с центром масс.* Относительное движение тела сводится к вращению относительно мгновенной оси, проходящей через центр масс. Учитывая выражение (14.7) формулу (14.11) кинетической энергии тела, совершающего сложное движение, можно записать в виде:

$$E_k = \frac{m \cdot \upsilon_C^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(J_x' \cdot \omega_x'^2 + J_y' \cdot \omega_y'^2 + J_z' \cdot \omega_z'^2 \right).$$

Штрихи в этом выражении означают, что эти величины определяются в системе отсчёта Σ'.

Заключение. В настоящем пособии рассмотрены основные законы и задачи динамики. Предстоит рассмотреть проблемы движения тела под действием следующих сил: а) движение в поле сил тяготения; б) движение заряженных частиц в электромагнитном поле; в) движение тела под действием квазиупругих сил (колебания). Эти вопросы и законы движения в неинерциальной системе отсчёта будут рассмотрены в третьей части пособия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грибков С.П. Основы классической механики. Кинематика материальной точки и системы материальных точек / С.П. Грибков, А.Н. Ларионов. – Воронеж : ВГУ – 2008. – 88 с.

2. Сивухин Д.В. Общий курс физики : в 5 т. / Д.В. Сивухин. – М. : Наука, 2003. – Т. 1. Механика. – 576 с.

3. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности / А.Н. Матвеев. – М. : Высш. шк., 1986. – 320 с.

4. Савельев И.В. Курс общей физики : в 5 т. / И.В. Савельев. – М. : Астрель, 1998. – Т. 1. Механика. – 336 с.

5. Киттель Ч. Механика / Ч. Кител, У. Найт, М. Рудерман. – М. : Наука, 1971. – 479 с.

6. Грибков С.П. Решение задач по механике. Классическая динамика и специальная теория относительности / С.П. Грибков, В.И. Костылев. – Воронеж : ВГУ, 2003. – 47 с.

СОДЕРЖАНИЕ