ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ДИНАМИКА

Учебно-методическое пособие для студентов
заочной формы обучения строительных специальностей

Курс теоретической механики разбит на две самостоятельные части, что в основном соответствует распределению материала по семестрам и содержит необходимый минимум для сдачи экзамена. Наглядность и удачно подобранные примеры позволяют в кратчайшие сроки самостоятельно усвоить и повторить программу курса. Первая часть учебно-методического пособия посвящена разделам «Статика» и «Кинематика». Вторая часть этого пособия рассматривает раздел «Динамика» изучаемого студентами курса теоретической механики.

Предназначено для студентов заочной и дистанционной форм обучения при подготовке дипломированного специалиста по направлению 653500 «СТРОИТЕЛЬСТВО» (специальности 290300 – «Промышленное и гражданское строительство»; 290400 – «Гидротехническое строительство»; 290500 – «Городское строительство и хозяйство»; 290600 – «Производство строительных материалов, изделий и конструкций»; 290700 – «Теплогазоснабжение и вентиляция»; 290800 – «Водоснабжение и водоотведение»; 291300 – «Механизация и автоматизация строительства»; 171600 – «Механическое оборудование и технологические комплексы предприятий строительных материалов, изделий и конструкций»; 291500 – «Экспертиза и управление недвижимостью»; 291400 – «Проектирование зданий»).

ВВЕДЕНИЕ

Развитие современной техники ставит перед ее разработчиками разнообразные задачи, связанные с проектированием объектов: строительных конструкций и сооружений, машин различного функционального назначения и т. д. Несмотря на разнообразие, решения поставленных задач основываются на общих принципах и имеют общую научную базу. Объясняется это тем, что в большинстве задач значительное место занимают вопросы, требующие изучения законов движения или равновесия тел.

Теоретическая механика представляет собой одну из научных основ современных технических дисциплин, таких как теория механизмов и машин, сопротивление материалов, детали машин и т. д. Теоретическая механика является одним из разделов механики.

***Механика** – наука о механическом движении и механическом взаимодействии материальных тел.*

***Теоретическая механика** – раздел механики, в котором изучаются законы движения механических систем и общие свойства этих движений.*

Курс теоретической механики состоит из трех разделов: статика, кинематика, динамика.

Настоящее учебно-методическое пособие по разделу «Динамика» теоретической механики предназначено для студентов заочной и дистанционной форм обучения.

Необходимость создания учебно-методического пособия вызвана тем, что студенты дистанционной и заочной форм обучения не всегда имеют свободный доступ к учебной литературе и консультациям преподавателя. Эта проблема особенно актуальна для студентов, проживающих в глубинных сельских районах и на Крайнем Севере.

Следует также отметить, что опубликованные ранее вузовские учебники по теоретической механике очень объемны. Как правило, в рабочих программах этой дисциплины при подготовке дипломированного специалиста по направлению 653500 «СТРОИТЕЛЬСТВО» (специальности 290300 – «Промышленное и гражданское строительство»; 290400 – «Гидротехническое строительство»; 290500 – «Городское строительство и хозяйство»; 290600 – «Производство строительных материалов, изделий и конструкций»; 290700 – «Теплогазоснабжение и вентиляция»; 290800 – «Водоснабжение и водоотведение»; 291300 – «Механизация и автоматизация строительства»; 171600 – «Механическое оборудование и технологические комплексы предприятий строительных материалов, изделий и конструкций»; 291500 – «Экспертиза и управление недвижимостью»; 291400 – «Проектирование зданий») в настоящее время используется не более 50 % информации, приведенной в рекомендуемой для высшего профессионального образования учебной литературе. Студентам дистанционной и заочной форм обучения, самостоятельно изучающим учебный материал, достаточно сложно ориентироваться в обширном списке рекомендуемой литературы при поиске теоретических положений, необходимых для выполнения контрольных работ.

Кроме этого, имеется еще один существенный недостаток известных учебных пособий, заключающийся в следующем. Для одних и тех же специальностей дневной и заочной форм обучения используются различные задания. Парадокс в том, что для студентов-заочников эти задания гораздо труднее, чем для студентов дневной формы обучения.

Содержание данного курса соответствует программе и требованиям государственного образовательного стандарта ГОС ВПО РФ по дисциплине «Теоретическая механика» (раздел «Динамика») при подготовке дипломированного специалиста по направлению 653500 «СТРОИТЕЛЬСТВО».

Отличительные особенности данного учебно-методического пособия от многих известных учебников по теоретической механике следующие:

1. Краткость изложения теоретического материала. Громоздкие выводы и доказательства в нем не приведены, но вместе с тем уделено большое внимание четкости формулировок определений основных понятий, теорем и принципов. Это позволяет глубже уяснить физический смысл формул и математических выражений, описывающих изучаемые механические процессы. В книге приведено достаточное количество рисунков, наглядно иллюстрирующих теоретический материал.

2. Сформирован подробный словарь терминов и определений, используемых в изучаемых разделах теоретической механики. Это позволяет студенту выработать четкие навыки владения грамотной инженерно-технической лексикой.

3. Теория, примеры решения задач, варианты курсовых заданий, алгоритмы решения и примеры их выполнения сведены в одну книгу. Это существенно повышает удобства при изучении теоретического курса.

4. К каждой изучаемой теме занятий приведены вопросы для самоконтроля. Такие же вопросы сформулированы и для изучаемо-

го в соответствующем семестре учебного материала. По этим вопросам студент имеет возможность самостоятельно проверить качество усвоения теоретического материала по всему комплексу вопросов, изучаемых в теоретической механике. По результатам самостоятельно проведенного тестирования студент выявляет те вопросы, которые изучены недостаточно хорошо, и принимает решение о целесообразности коррекции своих знаний по изучаемому предмету.

5. Для студентов дистанционной формы обучения приведены экзаменационные билеты, содержащие теоретические и практические задания. Ответы на теоретические задания приведены в учебно-методическом пособии. Практическая часть экзаменационного билета содержит пять заданий. В эти задания входят вопросы, решаемые студентами при выполнении расчетно-графических работ. Экзаменационный билет, который студент выбирает самостоятельно по соответствующей методике, позволяет произвести объективную оценку теоретических знаний и практических навыков применения этих знаний при решении инженерных задач.

6. В качестве контрольных работ использованы задания, аналогичные заданиям, приведенным в «Сборнике заданий для курсовых работ по теоретической механике»: Учеб. пособие для техн. вузов/ А. А. Яблонский, С. С. Норейко, С. А. Вольфсон и др.; Под ред. А. А. Яблонского. – 4–е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1985. – 367 с., ил. Это учебное пособие применяется практически во всех высших учебных заведениях Российской Федерации.

Такой подход к выбору вариантов заданий позволяет обеспечить единство требований государственных образовательных стандартов РФ к качеству высшего образования и поднять качество дистанционного и заочного образования до уровня очного образования.

Перечисленные особенности делают данный курс легко доступным для хорошего понимания и усвоения студентами изучаемого материала, позволяют в короткие сроки подготовиться к экзаменам и зачетам.

ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»
(раздел «Динамика»)

Программа дисциплины «Теоретическая механика» (раздел «Динамика») составлена согласно требованиям государственного образовательного стандарта ГОС ВПО РФ по дисциплине «Теоретическая механика» при подготовке дипломированных специалистов по направлению 653500 «СТРОИТЕЛЬСТВО».

Выдержка из ГОС ВПО РФ по дисциплине
«Теоретическая механика»

Требования
к обязательному минимуму содержания основной образовательной программы при подготовке дипломированных специалистов по направлению 653500 «СТРОИТЕЛЬСТВО».

Индекс	Наименование дисциплин и их основные разделы	Всего часов
1	2	3
ЕН.Ф.06	Теоретическая механика *Статика:* реакция связей, условия равновесия плоской и пространственной систем сил, теория пар сил *Кинематика:* кинематические характеристики точки, сложное движение точки, частные и общий случай движения твердого тела *Динамика:* дифференциальные уравнения движения точки в инерциальной и неинерциальной системах отсчета, общие теоремы динамики, аналитическая динамика, теория удара	210

Цели и задачи дисциплины

Целью дисциплины является формирование у студентов знаний в области теоретической механики – фундаментальной дисциплины физико-математического цикла, которая является базой для изучения как общепрофессиональных, так и специальных дисциплин при подготовке дипломированных специалистов по направлению 653500 «СТРОИТЕЛЬСТВО».

Задачей изучения дисциплины является получение студентами практических навыков в области теоретической механики, приобретение ими умения самостоятельно строить и исследовать математические модели технических систем, квалифицированно применяя при этом основные алгоритмы высшей математики и используя возможности современных компьютеров и информационных технологий.

Изучение студентами теоретической механики основывается на предварительной подготовке по элементарной и высшей математике, а также по основам механики, изучаемым в курсе физики. Основное применение положений теоретической механики в последующем учебном процессе происходит при изучении студентами курсов сопротивления материалов, деталей машин и других технических дисциплин, относящихся к специальностям: 290300 – «Промышленное и гражданское строительство»; 290400 – «Гидротехническое строительство»; 290500 – «Городское строительство и хозяйство»; 290600 – «Производство строительных материалов, изделий и конструкций»; 290700 – «Теплогазоснабжение и вентиляция»; 290800 – «Водоснабжение и водоотведение»; 291300 – «Механизация и автоматизация строительства»; 171600 – «Механическое оборудование и технологические комплексы предприятий строительных материалов, изделий и конструкций»; 291500 – «Экспертиза и управление недвижимостью»; 291400 – «Проектирование зданий».

Знания, полученные студентами при изучении теоретической механики и последующих общетехнических дисциплин, применяются при изучении специальных дисциплин и выполнении курсовых и дипломных проектов.

Требования к уровню освоения содержания дисциплины

Студент должен знать:

– понятийный аппарат теоретической механики;

– навыки составления математических моделей практических задач, в которых приходится иметь дело с равновесием или движением твердых тел;

– технику составления уравнений равновесия или движения различных механических систем;

– основные приемы аналитического и численного исследований уравнений равновесия и движения.

Студент должен знать и уметь использовать:

– основные законы механики и важнейшие следствия из них;

– основные модели механики (модель материальной точки, системы материальных точек, абсолютно твердого тела, системы взаимосвязанных твердых тел);

– основные аналитические и численные методы исследования механических систем.

Студент должен иметь опыт решения типовых задач по статике и кинематике механических систем.

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В полном курсе теоретической механики студенты изучают три ее раздела: статику, кинематику и динамику.

Назначение изучаемого предмета – дать будущим специалистам основные сведения о законах равновесия и движения механических систем под действием приложенных к ним сил и методах расчета их динамических характеристик. Все знания и навыки, полученные при изучении теоретической механики, необходимы для освоения специальных и профилирующих предметов и потребуются в практической работе на производстве.

Рекомендуется такая последовательность изучения материала:

1. Ознакомиться с содержанием программы предмета к каждому заданию.

2. Изучить теоретический материал, относящийся к контрольному заданию. При изучении теоретического материала необходимо прежде всего уяснить сущность каждого излагаемого вопроса. Главное – это понять теоретический материал, а не «заучить». Изучать материал рекомендуется по темам. Сначала следует прочитать весь изучаемый материал темы лекции, особенно не задерживаясь на том, что показалось не совсем понятным; часто это становится понятным из последующего материала. Затем надо вернуться к местам, вызвавшим затруднения, и внимательно разобраться в том, что неясно. Особое внимание при повторном чтении обратите на формулировки соответствующих определений, понятий и теорем (они набраны курсивом). В точных формулировках, как правило, бывает существенным каждое слово и очень полезно понять, почему данное определение сформулировано именно так. Для удобства изучения словарь терминов, определений и понятий, применяющихся в изучаемом разделе теоретической механики, вынесен в отдельное приложение.

3. Дать ответы на вопросы и задания для самоконтроля. При затруднениях необходимо вновь вернуться к теретическому материалу и разобраться в соответствующем вопросе.

4. Закрепить изученный материал путем разбора решенных задач, приведенных в настоящем пособии. Особое внимание следует обратить на методические указания. При затруднениях в понимании какого-либо вопроса необходимо обратиться за разъяснением к преподавателю.

5. Приступить к решению задач контрольной работы. Задачи контрольной работы даны в последовательности тем программы и поэтому должны решаться постепенно, по мере изучения материала.

Каждый студент-заочник должен выполнить контрольную работу, содержащую восемь заданий. Варианты заданий приведены в данном учебно-методическом пособии.

Номер варианта задания в контрольной работе студент выбирает самостоятельно по двум последним цифрам номера своей зачетной книжки, используя следующую формулу:

$$b = c - 30 \cdot i,$$

где b – номер варианта задания; c – две последние цифры номера зачетной книжки студента; 30 – число вариантов заданий; i – целое число, изменяющееся от 0 до 3.

Примеры определения номера варианта задания:

$c = 06,\; b = 06 - 30 \cdot 0 = 6.$ Вариант №6.

$c = 32,\; b = 32 - 30 \cdot 1 = 2.$ Вариант №2.

$c = 77,\; b = 77 - 30 \cdot 2 = 17.$ Вариант №17.

$c = 93,\; b = 93 - 30 \cdot 3 = 3.$ Вариант №3.

При выполнении контрольных работ необходимо соблюдать следующие требования.

1. Контрольная работа выполняется в отдельной тетради, на титульном листе которой указывают: фамилию, имя, отчество студента, наименование предмета, номер варианта, дату отправления работы и точный почтовый адрес студента.

2. Контрольные работы выполняются чернилами, а рисунки и схемы – карандашом четко и аккуратно, соблюдая требования единой конструкторской документации (ЕСКД).

Рекомендуется следующий порядок решения контрольных работ

1. Полностью записать текст условия задания и пояснить его чертежом или схемой. Выписать из условия задания исходные данные и составить план решения. Решение задания выполнять по этапам, поясняя их подзаголовки с указанием, что определяется или

что рассматривается, ссылками на теоремы, законы, правила и методы.

2. Задания решают в общем виде (в буквенных обозначениях), а затем, подставляя численные значения, вычисляют результат с точностью до трех значащих цифр.

3. Перед тем как переписать решенное задание в тетрадь начисто, следует тщательно проверить все действия, правильность подстановки числовых значений величин, соблюдение однородности единиц, а также правдоподобность полученных результатов.

4. Если возможно, следует проверить правильность ответа, решив задание вторично каким-либо иным путем.

Выполненная студентом контрольная работа высылается по электронной или обычной почте в учебное заведение для проверки. Незачтенная работа по указанию преподавателя выполняется вновь или переделывается частично. Контрольные работы обязательно предъявляются преподавателю при сдаче зачета или экзамена.

ПРОГРАММА РАЗДЕЛА «ДИНАМИКА»

Введение в динамику. Предмет динамики. Основные понятия и определения: масса, материальная точка, сила и др. Законы механики, задачи динамики.

Динамика точки. Решение первой и второй задач динамики. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых и естественных координатах. Две основные задачи динамики материальной точки.

Алгоритм решения первой задачи динамики точки. Алгоритм решения второй задачи динамики точки. Начальные условия движения. Постоянные интегрирования и их определение по начальным условиям. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки на примере курсового задания Д 1.

Прямолинейные колебания точки. Свободные колебания точки под действием восстанавливающей силы. Амплитуда, фаза, начальная фаза, циклическая частота и период колебаний.

Затухающие колебания точки под действием восстанавливающей силы и силы сопротивления движению, пропорциональной первой степени скорости. Амплитуда, фаза, начальная фаза, циклическая частота, период и декремент этих колебаний.

Апериодическое движение. Вынужденные колебания точки под действием восстанавливающей силы, силы сопротивления движению, пропорциональной первой степени скорости, и возмущающей силы, изменяющейся по гармоническому закону. Амплитуда вынужденных колебаний, сдвиг фаз, коэффициент динамичности, явление резонанса.

Динамика относительного движения точки. Дифференциальные уравнения относительного движения точки. Переносная и кориолисова силы инерции. Принцип относительности классической механики. Интегрирование дифференциальных уравнений относительного движения точки на примере курсового задания Д 2.

Введение в динамику механической системы. Классификация сил, действующих на механическую систему: силы активные (задаваемые) и реакции связей; силы внешние и внутренние. Свойства внутренних сил. Масса системы. Центр масс; радиус-вектор и координаты центра масс. Момент инерции твердого тела относительно оси вращения. Радиус инерции. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей.

Общие теоремы динамики. Динамика твердого тела. Дифференциальные уравнения поступательного, вращательного и плоскопараллельного движений твердого тела.

Теорема о движении центра масс. Теорема о движении центра масс механической системы. Закон сохранения движения центра масс.

Теорема об изменении количества движения. Количество движения материальной точки. Элементарный импульс силы. Количество движения механической системы; его выражение через массу системы и скорость движения центра масс. Теорема об изменении количества движения механической системы. Закон сохранения количества движения механической системы.

Теорема об изменении момента количества движения. Момент количества движения материальной точки относительно центра и оси. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки. Центральная сила.

Кинетический момент механической системы относительно центра и оси. Кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения. Теорема об изменении кинетического момента механической системы. Закон сохранения кинетического момента механической системы. Пример выполнения курсового задания Д 3.

Теорема об изменении кинетической энергии. Кинетическая энергия материальной точки. Элементарная работа силы. Работа силы на конечном перемещении точки ее приложения. Работа силы тяжести, силы упругости. Мощность. Кинетическая энергия твердого тела при поступательном, вращательном и плоскопараллельном движениях. Работа и мощность сил, приложенных к твердому телу. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы. Пример выполнения курсового задания Д 4.

Принцип Даламбера. Сила инерции материальной точки. Приведение сил инерции точек движущегося твердого тела к центру. Главный вектор и главный момент сил инерции. Принцип Даламбера. Определение реакций внешних связей для движущейся механической системы на примере курсового задания Д 5.

Принцип возможных перемещений. Связи, налагаемые на механическую систему. Возможные перемещения точек механической системы. Число степеней свободы системы. Идеальные связи. Принцип возможных перемещений. Определение реакций внешних связей механической системы на примерах курсовых заданий Д 6, Д 7.

Общее уравнение динамики. Формализованный подход к составлению дифференциальных уравнений движения механических систем на основе общего уравнения динамики. Пример выполнения курсового задания Д 8.

Уравнения движения механической системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа). Обобщенные координаты. Обобщенные скорости. Обобщенные силы. Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа 2-го рода.

Примечания:

1. По решению кафедры в рабочую программу могут включаться дополнительные вопросы, перечень которых должен быть сообщен студентам.
2. При обучении студентов другим специальностям решением кафедры или деканата из рабочей программы могут быть исключены некоторые вопросы.

При написании данного учебно-методического пособия использованы следующие литературные источники информации:

1. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 2002. – 416 с.: ил.

2. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики: Учебник. – 9-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2002. – 768 с. – (Учебник для вузов. Специальная литература).

3. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие/ Под ред. Н. В. Бутенина, А. И. Лурье, Д. Р. Меркина. – М.: Наука, 1986. – 448 с. (и последующие издания).

4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособие для техн. вузов/ А. А. Яблонский, С. С. Норейко, С. А. Вольфсон, и др.; Под ред. А. А. Яблонского. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1985. – 367 с., ил.

5. Горбач Н. И. Теоретическая механика: Динамика: Учеб. пособие. – Мн.: Книжный Дом, 2004. – 192 с. – (Экспресс-курс).

6. Тульев В. Д. Теоретическая механика: Статика. Кинематика: Учеб. пособие. – Мн.: Книжный Дом, 2004. – 152 с. – (Экспресс-курс).

7. Лукин А. М., Лукин Д. А. Теоретическая механика. Часть 1. Статика: Учебно-методическое пособие для студентов заочной формы обучения специальности 271200. – Омск: Изд-во «Прогресс» Омского института предпринимательства и права. 2004. – 88 с.

8. Лукин А. М., Лукин Д. А. Теоретическая механика: Часть 2. Кинематика. Учебно-методическое пособие для студентов заочной формы обучения специальности 271200. – Омск: Изд-во «Прогресс» Омского института предпринимательства и права. – 76 с.

9. Лукин А. М., Лукин Д. А. Теоретическая механика: Часть 3. Динамика. Учебно-методическое пособие для студентов заочной формы обучения специальности 271200. – Омск: Изд-во «Прогресс» Омского института предпринимательства и права. – 246 с.

10. Лукин А. М., Лукин Д. А., Квалдыков В. В. Теоретическая механика (разделы «Статика», «Кинематика»): Учебно-методическое пособие для суденстов заочной и дистанционной форм обучения при подготовке дипломированного специалиста по направлению 653500 «СТРОИТЕЛЬСТВО». – Омск: Изд-во СибАДИ, 2007. – 287 с.

11. Теоретическая механика. Терминология/ Отв. ред. А. Ю. Ишлинский.– М., 1977. – Вып. 90. – 88 с.

1. ДИНАМИКА ТОЧКИ

1.1. Введение в динамику точки

Теоретическая механика представляет собой одну из научных основ таких технических дисциплин, как теория механизмов и машин, сопротивление материалов и пр. В свою очередь теоретическая механика является одним из разделов механики.

Механика *– наука о механическом движении и механическом взаимодействии материальных тел.*

Теоретическая механика *– раздел механики, в котором изучаются законы движения механических систем и общие свойства этих движений.*

Курс теоретической механики состоит из трех разделов: статика; кинематика; динамика.

Статика *– раздел механики, в котором изучаются условия равновесия механических систем под действием сил.*

Кинематика *– раздел механики, в котором изучаются движения материальных тел без учета их масс и действующих на них сил.*

Динамика *– раздел механики, в котором изучаются движения механических систем под действием сил.*

Для успешного изучения динамики студентам следует предварительно освоить статику и кинематику. Эти разделы теоретической механики подробно изложены в работе «Теоретическая механика (разделы «Статика», «Кинематика»): Учебно-методическое пособие для студентов заочной и дистанционной форм обучения при подготовке дипломированного специалиста по направлению 653500 СТРОИТЕЛЬСТВО» /А. М. Лукин, Д. А. Лукин, В. В. Квалдыков. – Омск: Изд-во СибАДИ, 2007.

В основу каждого раздела теоретической механики положен ряд понятий и определений, принята система аксиом, т. е. важнейших положений, многократно подтвержденных практикой. Приступая к изучению динамики, следует напомнить уже известные понятия и определения, применяемые в этом разделе теоретической механики.

1.2. Основные понятия и определения

Масса *– одна из основных характеристик любого материального объекта, определяющая его инертные и гравитационные свойства.*

Масса является мерой инертности точки и мерой инертности тела при его поступательном движении. Масса измеряется в килограммах [кг].

Инертность *– свойство материального тела, проявляющееся в сохранении движения, совершаемого им при отсутствии действующих сил, и в постепенном изменении этого движения с течением времени, когда на тело начинают действовать силы.*

Материальная точка *– точка, имеющая массу.*

Материальная точка не имеет размеров и обладает способностью взаимодействовать с другими материальными точками.

Абсолютно твердое тело *– материальное тело, в котором расстояние между двумя любыми точками остается неизменным.*

Механическая система *– любая совокупность материальных точек.*

Движения материальных точек в механической системе взаимозависимы. В механике тело рассматривают как механическую систему, образованную непрерывной совокупностью материальных точек. Тела могут механически взаимодействовать друг с другом.

Механическое действие *– действие на данное тело со стороны других тел, которое приводит к изменению скоростей точек этого тела или следствием которого является изменение взаимного положения точек данного тела.*

Другими словами, при механическом действии тело приобретает механическое движение.

Механическое движение *– изменение с течением времени взаимного положения в пространстве материальных тел или взаимного положения частей данного тела.*

Свободное твердое тело *– тело, на перемещения которого не наложено никаких ограничений.*

Система отсчета *– система координат, связанная с телом, по отношению к которому определяется положение других тел (механических систем) в разные моменты времени.*

Сила *– векторная величина, являющаяся мерой механического действия одного тела на другое.*

Сила тяжести *– сила, действующая на точку вблизи земной поверхности, равная произведению массы m этой точки на ускорение **g** свободного падения в вакууме.*

$$\mathbf{G} = m\mathbf{g}.$$

Вес тела *– сумма модулей сил тяжести, действующих на частицы этого тела.*

Вес тела находят по формуле G = mg. Модуль силы тяжести измеряют в ньютонах [Н].

Внешняя сила *– сила, действующая на какую-либо точку механической системы со стороны тел, не принадлежащих рассматриваемой механической системе.*

Внутренние силы *– силы, действующие на какие-либо точки механической системы со стороны других точек, принадлежащих рассматриваемой механической системе.*

Система сил *– любая совокупность сил, действующих на механическую систему.*

Сосредоточенная сила *– сила, приложенная к телу в какой-либо одной его точке.*

Распределенные силы *– силы, действующие на все точки некоторой части линии, поверхности или объема.*

Связи *– материальные тела, накладывающие ограничения на положения и скорости точек механической системы, которые должны выполняться при любых силах, действующих на систему.*

Реакции связей *– силы, действующие на точки механической системы со стороны материальных тел, осуществляющих связи, наложенные на эту систему.*

Толкования новых понятий и определений будут выделены курсивом в тексте данного учебно-методического пособия перед началом их использования.

1.3. Основные законы механики

В основе динамики лежат законы, впервые сформулированные Ньютоном. Законы классической механики многократно подтверждены опытами и наблюдениями и являются объективными законами природы.

1. Закон инерции*. Материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действие других сил не изменит это состояние.*

Закон инерции характеризует стремление тела сохранить неизменной скорость своего движения или, иначе говоря, сохранить приобретенное им ранее механическое движение. Это свойство называют его ***инертностью***. Для поступательно движущегося твердого тела мерой его инертности является масса m, измеряемая в кг. В классической механике масса движущегося тела принимается равной массе покоящегося тела, т. е. она рассматривается как постоянная величина. При вращательном движении твердого тела мерой его инертности является момент инерции относительно оси вращения, измеряемый в кг·м^2.

2. Закон пропорциональности силы и ускорения*. Ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет одинаковое с ней направление.*

Закон пропорциональности силы **P** и ускорения $\boldsymbol{a}$ устанавливает в векторной форме зависимость, характеризующую изменение скорости **V** движения материальной точки под действием силы. Этот закон выражается формулой

$$m\boldsymbol{a} = \mathbf{P}.$$

Из курса статики известно, что, если на точку действуют несколько сил, то их можно заменить равнодействующей **P**, равной сумме сил (рис. 1.1).

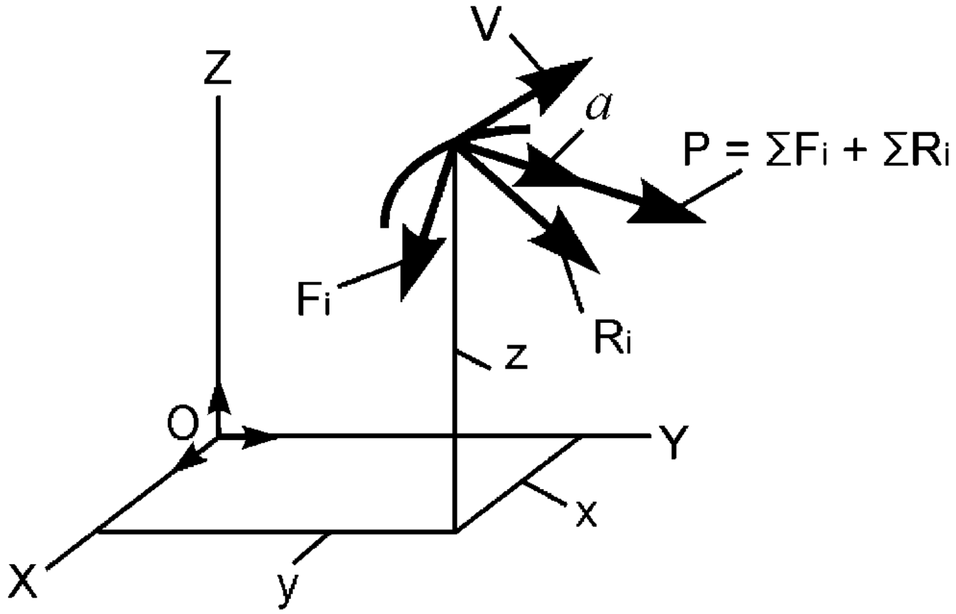


Рис. 1.1

На рис. 1.1 использованы обозначения: $\mathbf{F}_i$ – i -я активная сила; $\mathbf{R}_i$ – i -я реакция внешней связи.

С учетом изложенного выше второй закон динамики описан формулой

$$m\boldsymbol{a} = \mathbf{P} = \Sigma\mathbf{F}_i + \Sigma\mathbf{R}_i.$$

В общем случае для несвободной материальной точки второй закон динамики может быть изложен в следующей редакции.

Вектор ma, определяемый произведением массы m точки на ее ускорение $\boldsymbol{a}$*, равен геометрической сумме активных сил* $\boldsymbol{F}_i$ *и реакций* $\boldsymbol{R}_i$ *внешних связей, приложенных к точке.*

Если рассматривается движение свободной материальной точки, то последнее выражение приобретает следующий вид:

$$m\boldsymbol{a} = \mathbf{P} = \Sigma\mathbf{F}_i.$$

Вектор ma, определяемый произведением массы m точки на ее ускорение $\boldsymbol{a}$*, равен геометрической сумме активных сил* $\boldsymbol{F}_i$*.*

Второй закон динамики часто называют ***основным уравнением динамики.***

Из второго закона динамики следует, что, если геометрическая сумма активных сил и реакций внешних связей, действующих на точку, равна нулю ($\Sigma \mathbf{F}_i + \Sigma \mathbf{R}_i = 0$), то ускорение точки равно нулю ($\boldsymbol{a} = 0$), т. е. (точка или тело) движется прямолинейно и равномерно или находится в состоянии покоя.

Систему отсчета, в которой проявляются первый и второй законы динамики, называют ***инерциальной системой отсчета***.

> ***Инерциальная система отсчета*** – *система отсчета, по отношению к которой изолированная материальная точка находится в покое или движется равномерно и прямолинейно.*

Система отсчета, не обладающая этим свойством, называется ***неинерциальной системой отсчета***.

Для большинства задач за инерциальную систему отсчета принимают систему координатных осей, связанных с Землей.

> *3*. ***Закон равенства действия и противодействия***. *Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.*

Третий закон отражает двусторонность механических процессов природы. Он устанавливает, что при взаимодействии двух тел силы, приложенные к каждому из них, равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны. *Будучи приложенными к разным телам, эти силы не уравновешиваются*. При рассмотрении движения материальной точки этот закон механики справедлив не только в инерциальной, но и в неинерциальной системах отсчета.

> ***4*. *Закон независимости действия сил***. *Несколько одновременно действующих на материальную точку сил сообщают точке такое ускорение, которое сообщила бы ей одна сила, равная их геометрической сумме.*

Этот закон утверждает, что ускорение $\boldsymbol{a}$, получаемое материальной точкой от одновременно действующей на нее системы сил, равно геометрической сумме ускорений $\boldsymbol{a}_i$, сообщаемых этой точке каждой из сил в отдельности.

Необходимо еще раз подчеркнуть, что законы классической механики многократно подтверждены опытами и наблюдениями. На этих законах базируются многие технические дисциплины: теория механизмов и машин; сопротивление материалов; детали машин и т. д., изучаемые в высших учебных заведениях.

1.4. Дифференциальные уравнения движения несвободной материальной точки в декартовой системе отсчета

Рассмотрим движение несвободной материальной точки под действием активных сил $\mathbf{F}_i$ и реакций $\mathbf{R}_i$ внешних связей в инерциальной системе отсчета OXYZ (рис. 1.2).

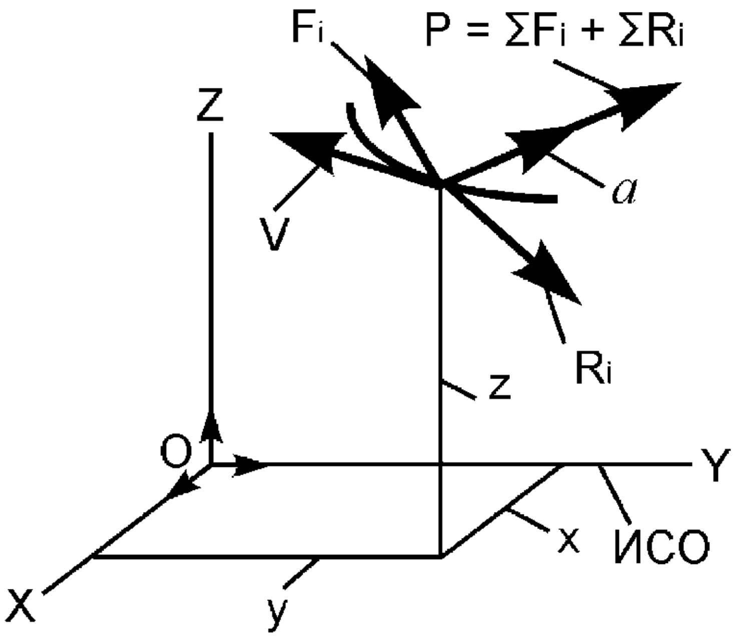


Рис. 1.2

Для обозначения инерциальной системы отсчета использована аббревиатура ИСО.

Три уравнения: $x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$; $z = f_3(t)$ являются ***уравнениями движения точки*** в ИСО. Для рассматриваемой точки основное уравнение динамики имеет вид

$$m\boldsymbol{a} = \mathbf{P} = \Sigma\mathbf{F}_i + \Sigma\mathbf{R}_i.$$

Спроецируем обе части последнего векторного равенства на координатные оси ИСО:

$$m\ddot{x} = \Sigma F_{iox} + \Sigma R_{iox};\ m\ddot{y} = \Sigma F_{ioy} + \Sigma R_{ioy};\ m\ddot{z} = \Sigma F_{ioz} + \Sigma R_{ioz},$$

где $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ – проекции ускорения $\boldsymbol{a}$ на координатные оси; ΣF_{iox}, ΣF_{ioy}, ΣF_{ioz} – суммы проекций активных сил $\mathbf{F}_i$ на соответствующие координатные оси ИСО; ΣR_{iox}, ΣR_{ioy}, ΣR_{ioz} – суммы проекций реакций $\mathbf{R}_i$ внешних связей на оси ИСО.

Произведение массы m точки и проекции ее ускорения $\boldsymbol{a}$ *на координатную ось инерциальной системы отсчета OXYZ равно сумме проекций активных сил* $\boldsymbol{F}_i$ *и реакций* $\boldsymbol{R}_i$ *внешних связей на ту же ось.*

Последние уравнения называют ***дифференциальными уравнениями движения*** несвободной материальной точки в декартовой инерциальной системе отсчета.

1.5. Дифференциальные уравнения движения несвободной материальной точки в естественных координатных осях

Естественные координатные оси – *прямоугольная система осей с началом в движущейся точке, направленных соответственно по касательной, главной нормали и бинормали к траектории этой точки.*

Из известного студентам курса кинематики уравнение движения точки в естественных координатных осях имеет вид s = f(t), где s – дуговая координата.

Рассмотрим движение несвободной материальной точки под действием активных сил $\mathbf{F}_i$ и реакций $\mathbf{R}_i$ внешних связей в естественных координатных осях (касательная, главная нормаль, бинормаль). Для понимания излагаемого материала напомним некоторые положения, относящиеся к этому движению.

Как это отмечалось ранее, естественными координатными осями называют три взаимно-перпендикулярные оси: касательная (единичный вектор $\boldsymbol{\tau}$ всегда направлен в сторону возрастания дуговой координаты s); главная нормаль (единичный вектор $\mathbf{n}$ направлен к центру кривизны траектории движения); бинормаль (единичный вектор $\mathbf{b}$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ и направлен так же, как и вектор $\mathbf{k}$ по отношению к векторам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ в правой декартовой системе отсчета OXYZ) (рис. 1.3).

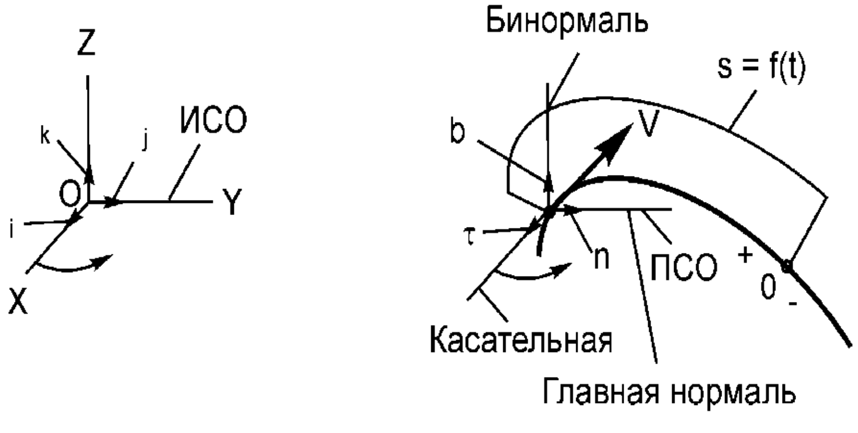


Рис. 1.3

Начало естественных координатных осей всегда располагается на траектории в месте положения точки и, следовательно, перемещается вместе с точкой.

Таким образом, естественные координатные оси образуют ***подвижную систему отсчета*** (ПСО).

Итак, рассматривается движение точки массой m в ПСО под действием активных сил и реакций внешних связей (рис. 1.4). Уравнение движения точки s = f(t) задано.

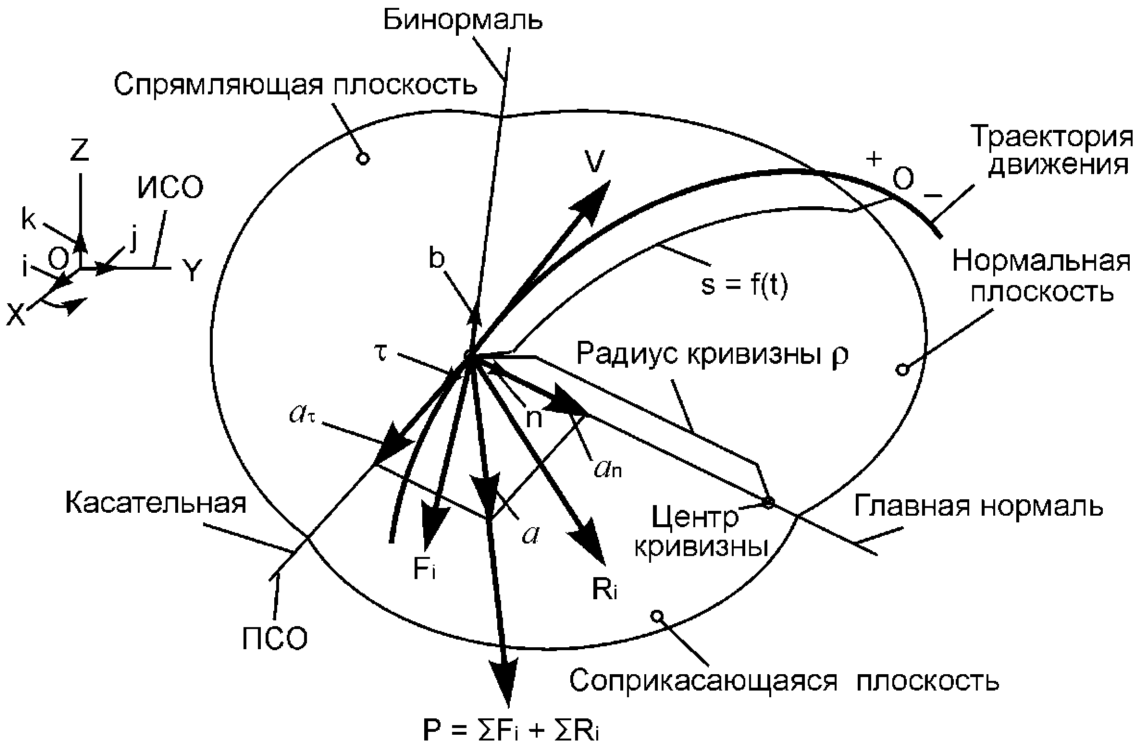


Рис. 1.4

Из курса кинематики известно векторное выражение

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_n,$$

где $\boldsymbol{a}$ – вектор ускорения точки; $\boldsymbol{a}_\tau$ – вектор касательного ускорения; $\boldsymbol{a}_n$ – вектор нормального ускорения.

Спроецируем основное уравнение динамики $m\boldsymbol{a} = \Sigma\mathbf{F}_i + \Sigma\mathbf{R}_i$ на координатные оси подвижной системы отсчета:

$$ma_\tau = \Sigma F_{i\tau} + \Sigma R_{i\tau}; \quad ma_n = \Sigma F_{in} + \Sigma R_{in}; \quad ma_b = \Sigma F_{ib} + \Sigma R_{ib},$$

где a_τ, a_n, a_b – проекции ускорения $\boldsymbol{a}$ соответственно на касательную, главную нормаль и бинормаль; $\Sigma F_{i\tau}$, F_{in}, ΣF_{ib} – суммы проекций активных сил на оси ПСО; $\Sigma R_{i\tau}$, ΣR_{in}, ΣR_{ib} – суммы проекций реакций внешних связей на оси ПСО.

Известно также, что $a_\tau = d_2s/dt^2 = \ddot{s}$; $a_n = (\dot{s})^2/\rho = V^2/\rho$, где ρ – радиус кривизны траектории точки. При этом $a_b = 0$, так как вектор ускорения $\boldsymbol{a}$ лежит в соприкасающейся плоскости и на бинормаль не проецируется. С учетом изложенного выше последние математические выражения приобретают вид:

$$m\ddot{s} = \Sigma F_{i\tau} + \Sigma R_{i\tau}; \quad m(\dot{s})^2/\rho = \Sigma F_{in} + \Sigma R_{in}; \quad \Sigma F_{ib} + \Sigma R_{ib} = 0.$$

Произведения массы m точки и проекций ее ускорения $\boldsymbol{a}$ *на координатные оси ПСО равны сумме проекций активных сил* $\boldsymbol{F}_i$ *и реакций* $\boldsymbol{R}_i$ *внешних связей на те же оси ПСО.*

Последние математические выражения называют *дифференциальными уравнениями движения несвободной материальной точки в естественных координатных осях.*

ПРИМЕЧАНИЕ. Дифференциальными уравнениями движения в естественных координатных осях удобно пользоваться тогда, когда точно известен вид траектории движения. В этом случае решение задачи существенно упрощается.

1.6. Задачи динамики точки

В общем случае все задачи динамики точки подразделяют на ***прямые (первые) и обратные (вторые)***.

Суть ***первой задачи динамики*** точки заключается в следующем: известна масса m точки и ее уравнения движения, требуется определить модуль и направление равнодействующей активных сил и реакций внешних связей, действующих на точку.

Вторая задача динамики заключается в следующем: зная силы, действующие на точку, ее массу, а также начальное положение точки и ее начальную скорость, требуется определить уравнения движения точки.

Первая и вторая задачи динамики решаются по соответствующим алгоритмам.

1.7. Алгоритм решения первых задач динамики точки в декартовой системе отсчета

В первой задаче динамики известны уравнения движения точки: $x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$; $z = f_3(t)$ и начальные условия этого движения. К начальным условиям движения точки отнесены: положение точки, характеризуемое координатами x_0, y_0, z_0 в момент времени $t_0 = 0$; проекции $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ начальной скорости V_0 при $t_0 = 0$.

Алгоритм решения первых задач динамики предписывает четко определенную последовательность действий исполнителя, которая приведена ниже.

1. Выбирают инерциальную систему отсчета OXYZ.
2. В системе отсчета OXYZ точку изображают в произвольный момент времени. При этом точка должна иметь координаты, значения которых больше нуля. Предполагают также, что точка движется в сторону возрастания координат ускоренно.
3. По исходным данным задачи определяют и изображают на рисунке начальные условия движения (x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$).
4. К точке прикладывают активные силы $\mathbf{F}_i$ и реакции $\mathbf{R}_i$ внешних связей.
5. Записывают соответствующие выбранной системе отсчета OXYZ дифференциальные уравнения движения:

$$m\ddot{x} = \Sigma F_{iox} + \Sigma R_{iox};$$
$$m\ddot{y} = \Sigma F_{ioy} + \Sigma R_{ioy};$$
$$m\ddot{z} = \Sigma F_{ioz} + \Sigma R_{ioz},$$

где $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ – проекции ускорения $\boldsymbol{a}$ на координатные оси; ΣF_{iox}, ΣF_{ioy}, ΣF_{ioz} – суммы проекций активных сил $\mathbf{F}_i$ на соответствующие координатные оси ИСО; ΣR_{iox}, ΣR_{ioy}, ΣR_{ioz} – суммы проекций реакций $\mathbf{R}_i$ внешних связей на оси ИСО.

6. По заданным уравнениям движения $x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$; $z = f_3(t)$ определяют проекции $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ ускорения $\boldsymbol{a}$ точки на координатные оси.
7. Найденные проекции $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ ускорения подставляют в дифференциальные уравнения движения точки.
8. Определяют проекции P_{ox}, P_{oy}, P_{oz} равнодействующей активных сил $\mathbf{F}_i$ и реакций $\mathbf{R}_i$ внешних связей на координатные оси:

$$P_{ox} = m\ddot{x} = \Sigma F_{iox} + \Sigma R_{iox};$$
$$P_{oy} = m\ddot{y} = \Sigma F_{ioy} + \Sigma R_{ioy};$$
$$P_{oz} = m\ddot{z} = \Sigma F_{ioz} + \Sigma R_{ioz}.$$

9. Определяют модуль P равнодействующей активных сил $\mathbf{F}_i$ и реакций $\mathbf{R}_i$ внешних связей, действующих на точку:

$$P = \sqrt{(P_{ox})^2 + (P_{oy})^2 + (P_{oz})^2}.$$

10. Для ориентации вектора **P** равнодействующей активных сил и реакций внешних связей в пространстве определяют направляющие косинусы:

$$\cos(\mathbf{P}, \mathbf{i}) = P_{ox}/P;\ \cos(\mathbf{P}, \mathbf{j}) = P_{oy}/P;\ \cos(\mathbf{P}, \mathbf{k}) = P_{oz}/P.$$

11. По величине значений направляющих косинусов находят величины углов, составленных направлениями координатных осей системы отсчета и направлением силы **P**.

12. Равнодействующую **P** активных сил $\mathbf{F}_i$ и реакций $\mathbf{R}_i$ внешних связей, действующих на точку, изображают на чертеже. Необходимо еще раз отметить, что ускорение a точки направлено так же, как и сила **P**.

1.8. Пример решения первой задачи динамики точки в декартовой системе отсчета

Условие задачи.

Под действием горизонтальной силы F_1 движение материальной точки массой m = 8 кг происходит по гладкой горизонтальной плоскости OXY согласно уравнениям $x = 0{,}05t^3$, $y = 0{,}3t^2$. Определить модуль равнодействующей приложенных к точке сил в момент времени t_1 = 4 с.

Решение.

1. Выбираем систему отсчета OXY (рис. 1.5).

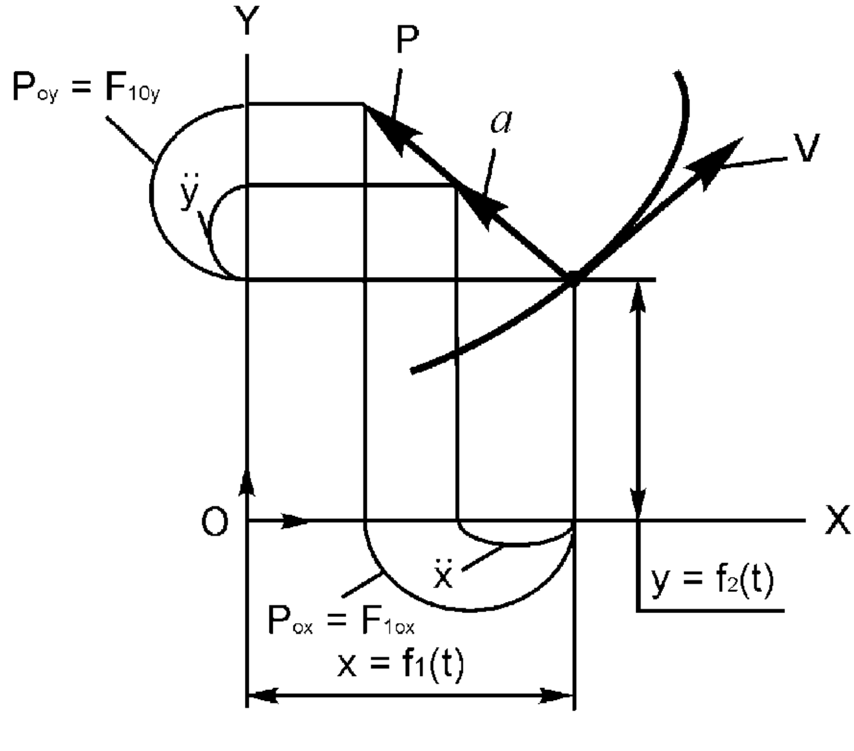


Рис. 1.5

2. Изобразим точку на траектории ее движения в произвольный момент времени. Согласно известным положениям кинематики скорость **V** точки направлена по касательной к траектории движения, а ее ускорение $\boldsymbol{a}$ направлено в сторону вогнутости траектории движения.

3. Так как начальные условия движения точки не заданы, то на рис. 1.5 они не показаны.

4. Согласно условию задачи к точке приложены активные силы $\mathbf{F}_1$ и **G**. Так как поверхность, по которой перемещается точка, гладкая, на точку действует только нормальная реакция **N**. Основное уравнение динамики для рассматриваемой задачи имеет вид $m\boldsymbol{a} = \Sigma\mathbf{F}_i + \Sigma\mathbf{R}_i = \mathbf{G} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{N}$. Поскольку рис. 1.5 приведен в ортогональной проекции, то сила тяжести **G** и нормальная реакция **N** не показаны.

5. Запишем дифференциальные уравнения движения точки.

$$m\ddot{x} = \Sigma F_{iox} + \Sigma R_{iox} = F_{1ox} = P_{ox}; \qquad (1)$$

$$m\ddot{y} = \Sigma F_{ioy} + \Sigma R_{ioy} = F_{1oy} = P_{oy}; \qquad (2)$$

$$m\ddot{z} = \Sigma F_{ioz} + \Sigma R_{ioz} = F_{1oz} = P_{oz}. \qquad (3)$$

6. По заданным уравнениям движения $x = 0{,}05t^3$, $y = 0{,}3t^2$ определим проекции $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ ускорения точки на координатные оси: $\ddot{x} = 0{,}3t$; $\ddot{y} = 0{,}6$ м/с^2; $\ddot{z} = 0$.

7. Найденные значения $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ подставим в уравнения (1),(2), (3).

$$m(0{,}3t) = F_{1ox} = P_{ox}; \qquad (1^1)$$

$$m(0{,}6) = F_{1oy} = P_{oy}; \qquad (2^1)$$

$$m(0) = F_{1oz} = P_{oz} = 0. \qquad (3^1)$$

8. Определим модуль P равнодействующей активных сил и реакций внешних связей.

$$P = \sqrt{(F_{1ox})^2 + (F_{1oy})^2} = \sqrt{(0{,}3mt)^2 + (0{,}6m)^2}.$$

9. Вычислим значения F_{1ox}, F_{1oy}, P для момента времени $t_1 = 4$ с.

$$F_{1ox} = 0{,}3mt_1 = 0{,}3 \cdot 8 \cdot 4 = 9{,}6 \text{ Н};$$

$$F_{1oy} = 0{,}6m = 0{,}6 \cdot 8 = 4{,}8 \text{ Н};$$

$$P = \sqrt{(9{,}6)^2 + (4{,}8)^2} = 10{,}733 \text{ Н}.$$

10. Определим направляющие косинусы и углы, составленные направлениями координатных осей и силой.

$$\cos(\mathbf{P}, \mathbf{i}) = F_{1ox}/P = 9{,}6/10{,}733 = 0{,}894;\ \alpha = 26{,}563^\circ;$$

$$\cos(\mathbf{P}, \mathbf{j}) = F_{1oy}/P = 4{,}8/10{,}733 = 0{,}447;\ \beta = 63{,}434^\circ.$$

11. Определим координаты точки на траектории ее движения в момент времени t_1, и полученную информацию отобразим на рис. 1.6: $x(t_1) = 0{,}05 \cdot 4^3 = 3{,}2$ м; $y(t_1) = 0{,}3 \cdot 4^2 = 2{,}4$ м.

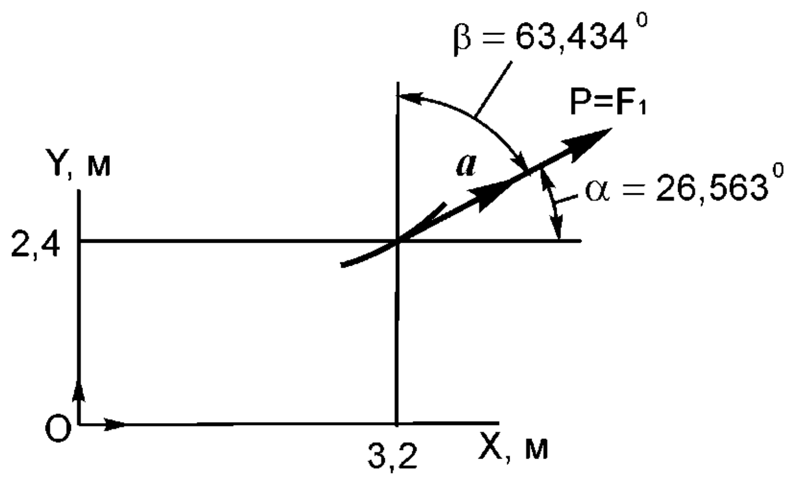


Рис. 1.6

Таким образом, задача решена, ответы на поставленные вопросы получены.

1.9. Алгоритм решения первых задач динамики точки в естественных координатных осях

В первой задаче динамики точки известно уравнение s = f(t) движения точки в естественных координатных осях. Могут быть заданы начальные условия движения, к которым относятся дуговая координата s_0 и скорость V_0 в момент времени $t_0 = 0$. При естественном способе задания движения точки известно следующее: вид траектории движения; начало отсчета дуговой координаты s; положительное (+) и отрицательное (–) направления отсчета дуговой координаты.

Алгоритм решения первых задач динамики в естественных координатных осях представляет собой следующую совокупность действий исполнителя.

1. Изображается известная траектория движения точки. На этой траектории наносятся начало отсчета (O), положительное (+) и отрицательное (–) направления отсчета дуговой координаты s.
2. Точка изображается на траектории движения в произвольный момент времени. При этом точка имеет координату $s > 0$ и движется в сторону ее увеличения ускоренно.

3. В эту точку помещается начало координат ПСО, которая представляет собой совокупность трех взаимно перпендикулярных осей: касательная, главная нормаль, бинормаль. При этом единичный вектор $\boldsymbol{\tau}$ всегда направлен в сторону увеличения дуговой координаты s. Единичный вектор **n** направлен к центру кривизны траектории движения точки.

4. По данным задачи определяют и изображают на рисунке начальные условия движения (s_0, V_0).

5. К точке прикладывают активные силы $\mathbf{F}_i$ и реакции $\mathbf{R}_i$ внешних связей.

6. Записывают дифференциальные уравнения движения точки, которые имеют следующий вид:

$$m\ddot{s} = \Sigma F_{i\tau} + \Sigma R_{i\tau};\quad m(\dot{s})^2/\rho = \Sigma F_{in} + \Sigma R_{in};\quad \Sigma F_{ib} + \Sigma R_{ib} = 0.$$

7. По заданному уравнению движения $s = f(t)$ определяют проекцию $\dot{s}$ скорости и проекцию $\ddot{s}$ ускорения точки на касательную.

8. Определенные проекции $\dot{s}$, $\ddot{s}$ подставляют в дифференциальные уравнения движения точки.

9. Определяют проекции P_τ, P_n равнодействующей активных сил $\mathbf{F}_i$ и реакций $\mathbf{R}_i$ внешних связей на координатные оси ПСО. Для этого необходимо решить следующие уравнения:

$$P_\tau = m\ddot{s} = \Sigma F_{i\tau} + \Sigma R_{i\tau}; \tag{1}$$

$$P_n = m(\dot{s})^2/\rho = \Sigma F_{in} + \Sigma R_{in}; \tag{2}$$

$$\Sigma F_{ib} + \Sigma R_{ib} = 0. \tag{3}$$

10. Определяют модуль P равнодействующей активных сил $\mathbf{F}_i$ и реакций $\mathbf{R}_i$ внешних связей, действующих на точку.

$$P = \sqrt{(P_\tau)^2 + (P_n)^2}.$$

11. Для ориентации вектора **P** в пространстве определяют направляющие косинусы.

$$\cos(\mathbf{P}, \boldsymbol{\tau}) = P_\tau/P;\quad \cos(\mathbf{P}, \mathbf{n}) = P_n/P.$$

12. По величине значений направляющих косинусов находят значения углов, составленных направлениями координатных осей ПСО и силой **P**.

13. Равнодействующую **P** активных сил $\mathbf{F}_i$ и реакций $\mathbf{R}_i$ внешних связей изображают на рисунке, иллюстрирующем результаты расчетов. Необходимо отметить, что сила **P** лежит в соприкасающейся плоскости так же, как и ускорение $\boldsymbol{a}$ точки.

1.10. Пример решения первой задачи динамики точки в естественных координатных осях

Условие задачи.

Материальная точка массой m = 1,2 кг движется по окружности радиуса r = 1 м на гладкой горизонтальной поверхности согласно уравнению $s = 2{,}4t^2$ (рис. 1.7). Заданы начальные условия движения: $s_0 = 0$; $V_0 = 0$. Определить модуль равнодействующей сил, приложенных к материальной точке в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение.

1. На рис. 1.7 изобразим материальную точку в произвольный момент времени.

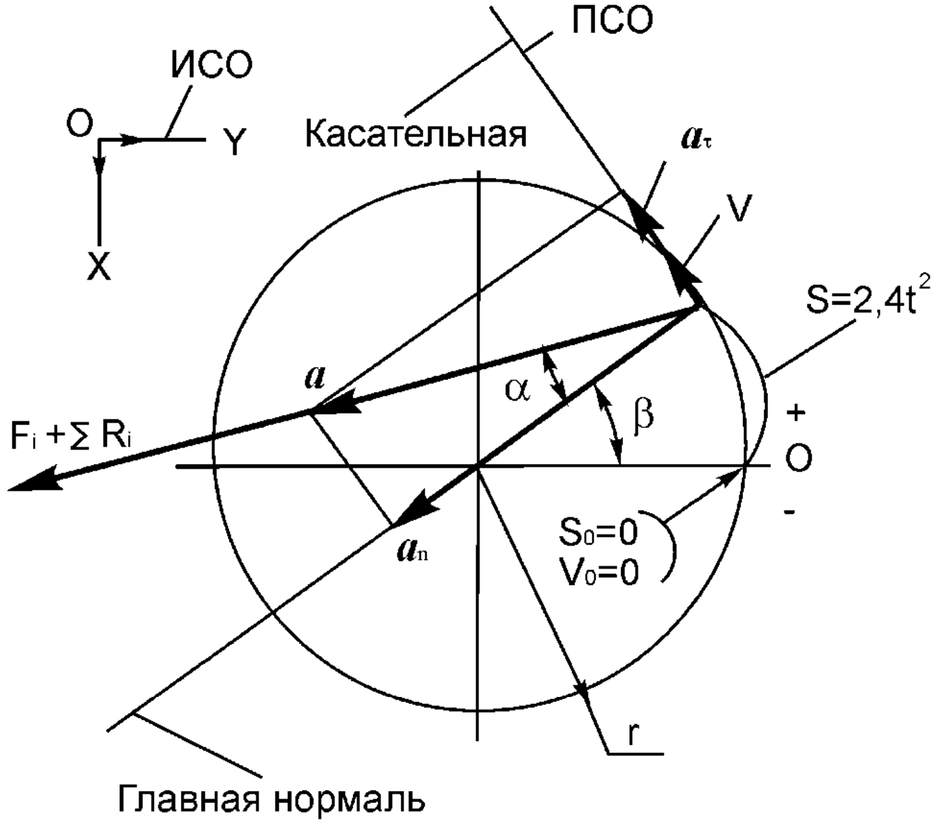


Рис. 1.7

2. В эту точку поместим начало координат ПСО.

3. Орт **τ** направлен в сторону возрастания дуговой координаты s, а орт **n** направлен к центру кривизны траектории движения. Этим центром является центр окружности. Радиус ρ кривизны траектории движения точки равен радиусу окружности ρ = r.

4. Покажем на рис. 1.7 начальные условия движения. По условиям задачи $s_0 = 0$; $V_0=0$.

5. Согласно условию задачи к точке приложены активные силы **G** и $\mathbf{F}_1$ и реакция **N** гладкой поверхности. Поскольку рис. 1.7

изображен в ортогональных проекциях, то силы **G** и **N** перпендикулярны опорной поверхности точки и, следовательно, на рисунке не видны. Основное уравнение динамики для решаемой задачи имеет вид

$$m\boldsymbol{a} = \Sigma \mathbf{F}_i + \Sigma \mathbf{R}_i = \mathbf{G} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{N}.$$

6. Запишем дифференциальные уравнения движения точки в естественных координатных осях.

$$m\ddot{s} = \Sigma F_{i\tau} + \Sigma R_{i\tau} = F_1 \sin\alpha; \qquad (1)$$

$$m(\dot{s})^2/\rho = \Sigma F_{in} + \Sigma R_{in} = F_1 \cos\alpha; \qquad (2)$$

$$\Sigma F_{ib} + \Sigma R_{ib} = 0 = -G + N. \qquad (3)$$

Из уравнения (3) имеем $N = G = mg = 1,2 \cdot 9,81 = 11,772$ Н.

7. По заданному уравнению $s = 2,4t^2$ определим проекцию $\dot{s}$ скорости V и проекцию $\ddot{s}$ ускорения точки на касательную.

$$\dot{s} = 4,8t; \ \ddot{s} = 4,8 \text{ м/с}^2.$$

8. Найденные проекции $\dot{s}$, $\ddot{s}$ подставим в уравнения (1), (2). Получим:

$$m(4,8) = F_1 \sin\alpha; \qquad (1^1)$$

$$m(4,8t)^2/r = F_1 \cos\alpha. \qquad (2^1)$$

9. Согласно уравнениям (1^1), (2^1) имеем:

$$P_\tau = F_1 \sin\alpha; \ P_n = F_1 \cos\alpha,$$

где P_τ, P_n – проекции равнодействующей **P** = **G** + $\mathbf{F}_1$ + **N** активных сил и реакций внешних связей, приложенных к точке, на координатные оси ПСО. Тогда:

$$P_\tau = m(4,8); \qquad (1^{11})$$

$$P_n = m(4,8t)/r. \qquad (2^{11})$$

Определим значения P_τ и P_n в момент времени t_1.

$$P_\tau(t_1) = 1,2 \cdot 4,8 = 5,76 \text{ Н};$$

$$P_n(t_1) = m(4,8t_1) = 1,2 \cdot 4,8 \cdot 1 = 5,76 \text{ Н}.$$

10. Определим модуль P равнодействующей в момент времени t_1.

$$P = \sqrt{(P_\tau)^2 + (P_n)^2} = \sqrt{(5,76)^2 + (5,76)^2} = 8,145 \text{ Н}.$$

11. Для ориентации вектора **P** в пространстве определим направляющие косинусы и величину угла α, составленного направлением равнодействующей силы **P** и ортом $\boldsymbol{\tau}$.

$$\cos(\mathbf{P}, \boldsymbol{\tau}) = P_\tau/P = 5,76/8,145 = 0,707.$$

$$\alpha = \arccos(0,707) = 45°.$$

12. Определим положение точки на траектории ее движения в момент времени t_1 и зафиксируем это положение центральным углом β.

$$s(t_1) = 2,4(t_1)^2 = 2,4 \cdot 1^2 = 2,4 \text{ м};$$

$$\beta = s(t_1)/r = 2,4/1 = 2,4 \text{ рад}.$$

В градусной мере $\beta = (2,4/3,14)180^{\circ} = 137,579^{\circ}$.

Полученные результаты расчетов проиллюстрируем рис. 1.8.

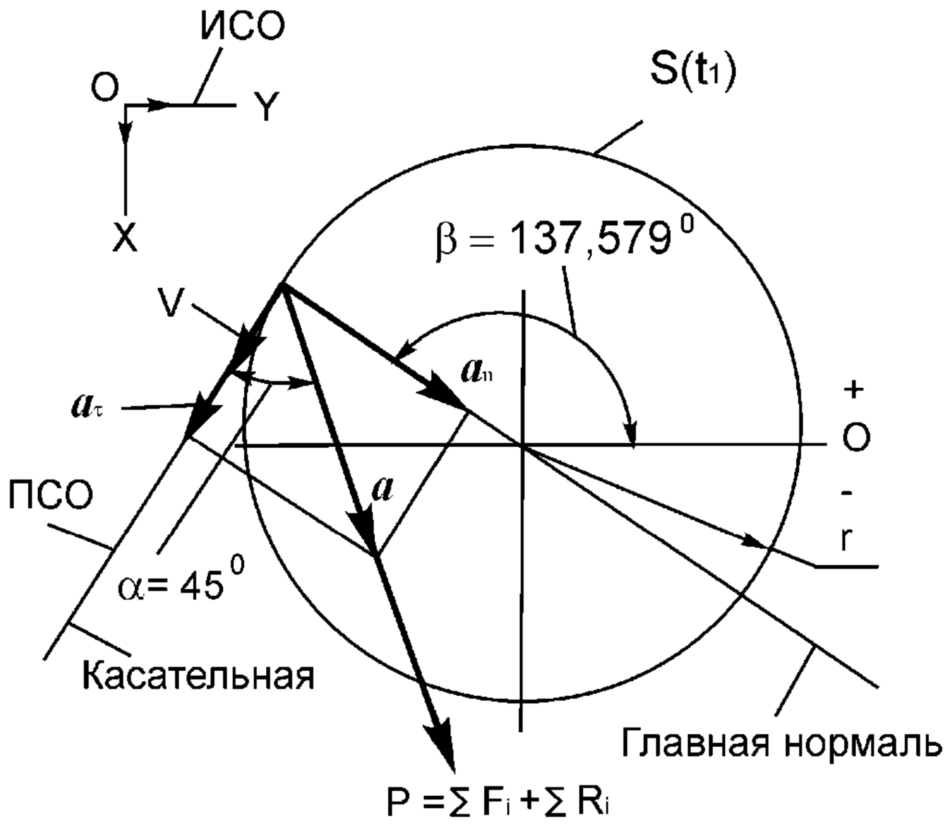


Рис. 1.8

Таким образом, задача решена. Ответы на вопросы получены.

1.11. Алгоритм решения вторых задач динамики точки в декартовой системе отсчета

Во второй (обратной) задаче динамики по известным силам, действующим на материальную точку, и начальным условиям ее движения требуется определить уравнения движения точки: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, а также ее положение, скорость и ускорение в момент времени t_1. Эта задача имеет большое практическое значение и в общем случае является более сложной по сравнению с первой задачей динамики.

Алгоритм решения второй задачи динамики содержит следующие действия.

1. В механической системе выделяют материальную точку, движение которой рассматривают.

2. Выбирают инерциальную систему отсчета OXYZ. Начало системы отсчета располагают в точке тела, по отношению к которому рассматривают движение выделенной из механической системы материальной точки.

3. В системе отсчета OXYZ точку изображают в произвольный момент времени таким образом, чтобы она имела положительные координаты и двигалась в сторону их увеличения ускоренно.

4. По исходным данным задачи определяют и изображают на рисунке начальные условия движения (x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$).

5. К точке прикладывают активные (задаваемые) силы $\mathbf{F}_i$.

6. Согласно аксиоме связей эти связи отбрасывают и их действие заменяют соответствующими реакциями $\mathbf{R}_i$.

7. Записывают дифференциальные уравнения движения точки:

$$m\ddot{x} = \Sigma F_{iox} + \Sigma R_{iox};$$
$$m\ddot{y} = \Sigma F_{ioy} + \Sigma R_{ioy};$$
$$m\ddot{z} = \Sigma F_{ioz} + \Sigma R_{ioz}\ ,$$

где $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ – проекции ускорения $\boldsymbol{a}$ на координатные оси; ΣF_{iox}, ΣF_{ioy}, ΣF_{ioz} – суммы проекций активных сил $\mathbf{F}_i$ на соответствующие координатные оси ИСО; ΣR_{iox}, ΣR_{ioy}, ΣR_{ioz} – суммы проекций реакций $\mathbf{R}_i$ внешних связей на оси ИСО.

8. Дифференциальные уравнения движения точки дважды интегрируют. При интегрировании каждого дифференциального уравнения появляются две постоянные и, следовательно, при интегрировании трех дифференциальных уравнений будем иметь шесть постоянных: C_1 – C_6.

9. Определяют значения постоянных C_i интегрирования по начальным условиям движения: значения трех координат точки и проекции ее скорости на три оси в некоторый момент времени, обычно (но не обязательно) в начальный момент времени ($t_0 = 0$). Как правило, в условиях задачи задают следующие начальные условия движения: x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$. Эти данные подставляют в уравнения, представляющие общие решения дифференциальных уравнений движения точки, и определяют постоянные интегрирования C_i.

10. Подставляя найденные значения постоянных интегрирования C_i в общие решения дифференциальных уравнений движения точки, получают уравнения ее движения в виде:

$$x = f_1(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);$$

$$y = f_2(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);$$

$$z = f_3(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0).$$

Анализ последних уравнений показывает, что под действием одной и той же системы сил, приложенных к точке, она может совершать целый класс движений, зависящих от начальных условий.

При составлении дифференциальных уравнений движения материальной точки за расчетный начальный момент времени ($t_0 = 0$) обычно принимают момент начала движения точки под действием заданных сил, для которого известны как положение точки, так и ее скорость.

Введением начальной скорости точки учитывают влияние на ее движение сил, действующих на точку до того момента времени, который принят за начальный момент.

Дифференциальные уравнения движения точки описывают ее движение до тех пор, пока на точку действует заданная система сил.

Если в какой-то момент времени система сил, действующих на точку, изменится, то для описания последующего движения точки составляют новые дифференциальные уравнения. Начальными условиями нового движения точки будут ее положение и скорость в конце предшествующего движения.

11. По уравнениям движения точки $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$ определяют ее кинематические характеристики для заданного момента времени t_1. Как правило, результаты расчетов сводят в таблицу и при необходимости иллюстрируют рисунками.

Алгоритм решения вторых задач динамики в естественных координатных осях по существу не отличается от вышеприведенного алгоритма. Здесь он не рассмотрен, так как студенты заочной и дистанционной форм обучения не выполняют курсовых заданий на эту тему.

Для закрепления изложенного теоретического материала рекомендуется выполнить курсовое задание Д 1.

1.12. Варианты курсового задания Д 1 «Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянных сил»

Варианты 1 – 5 (рис 1.9)

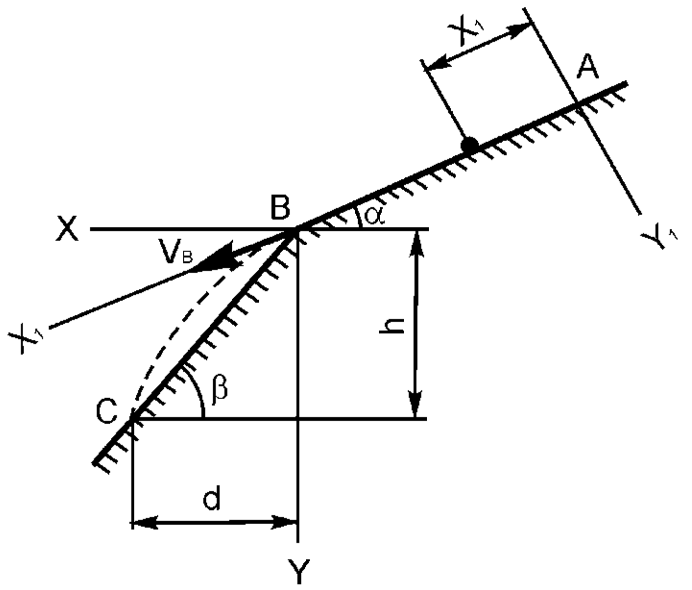


Рис. 1.9

Тело совершает поступательное движение из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, в течение τ секунд. Его начальная скорость V_A. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f.

В точке B тело покидает плоскость со скоростью V_B и попадает со скоростью V_C в точку C плоскости BD, наклоненной под углом β к горизонту, находясь в воздухе T секунд.

При решении задачи тело принять за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 1. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $V_A = 0$; $f = 0{,}2$; $l = 10$ м; $\beta = 60^\circ$. Определить τ и h.

Вариант 2. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $V_A = 2$ м/с; $f = 0{,}2$; $h = 4$ м; $\beta = 45^\circ$. Определить l и уравнение траектории точки на участке BC.

Вариант 3. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $V_A = 2{,}5$ м/с; $f \neq 0$; ; $l = 8$ м; $d = 10$ м; $\beta = 60^\circ$. Определить V_B и τ.

Вариант 4. Дано: $V_A = 0$ м/с; $\tau = 2$ с; $l = 9{,}8$ м; $\beta = 60^\circ$; $f = 0$. Определить α и T.

Вариант 5. Дано: $\alpha = 30°$; $V_A = 0$ м/с; $\tau = 3$ с; $l = 9{,}8$ м; $\beta = 45°$. Определить f и V_C.

Варианты 6 – 10 (рис. 1.10)

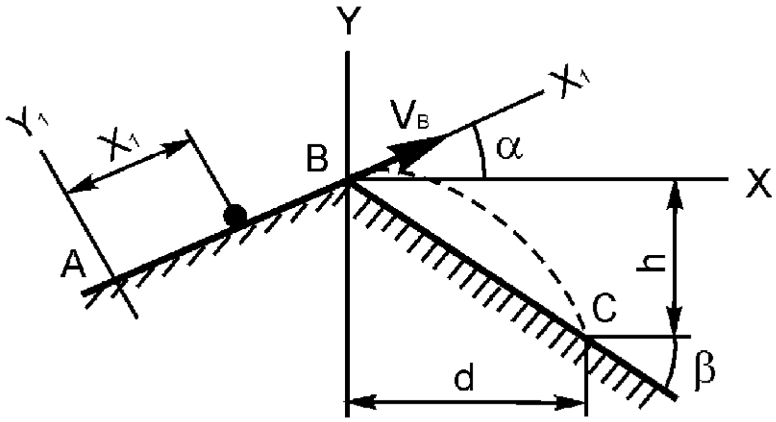


Рис. 1.10

Тело совершает поступательное движение и подходит к точке A участка AB, наклоненного под углом α к горизонту и имеющего длину l со скоростью V_A. Коэффициент трения скольжения на участке AB равен f. Тело от A до B движется τ секунд; в точке B со скоростью V_B оно покидает участок AB. Через T секунд тело приземляется со скоростью V_C в точке C участка BC, составляющем угол β с горизонтом.

При решении задачи тело принять за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

Вариант 6. Дано: $\alpha = 20°$; $f = 0{,}1$; $\tau = 0{,}2$ с; $h = 40$ м; $\beta = 30°$. Определить l и V_C.

Вариант 7. Дано: $\alpha = 15°$; $f = 0{,}1$; $V_A = 16$ м/с; $l = 5$ м; $\beta = 45°$. Определить V_B и T.

Вариант 8. Дано: $V_A = 21$ м/с; $f = 0$; $\tau = 0{,}3$ с; $V_B = 20$ м/с; $\beta = 60°$. Определить α и d.

Вариант 9. Дано: $\alpha = 15°$; $\tau = 0{,}3$ с; $f = 0{,}1$; $h = 30\sqrt{2}$ м; $\beta = 45°$. Определить V_B и V_A.

Вариант 10. Дано: $\alpha = 15°$; $f = 0$; $V_A = 12$ м/с; $d = 50$ м; $\beta = 60°$. Определить τ и уравнение траектории тела в системе отсчета XBY.

Варианты 11 – 15 (рис. 1.11)

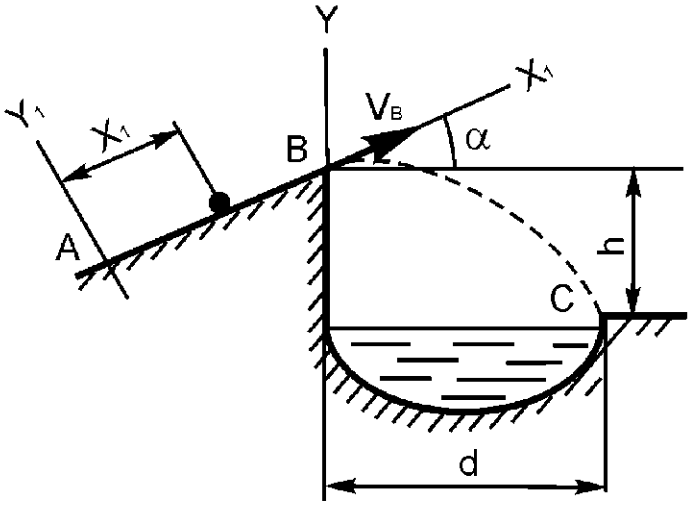


Рис. 1.11

Имея в точке А скорость V_A, тело поднимается τ с по участку АВ длиной l, составляющему с горизонтом угол α. При постоянной на всем участке АВ движущей силе Р тело в точке В приобретает скорость V_B и перелетает через ров шириной d, находясь в воздухе T секунд и приземляясь в точке С со скоростью V_C. Масса тела равна m.

При решении задачи считать тело материальной точкой и не учитывать силы сопротивления движению.

Вариант 11. Дано: $\alpha = 30°$; $P \neq 0$; $l = 40$ м; $V_A = 0$; $V_B = 4{,}5$ м/с; d = 3 м. Определить τ и h.

Вариант 12. Дано: $\alpha = 30°$; P = 0; $l = 40$ м; $V_B = 4{,}5$ м/с; h = 1,5 м. Определить V_A и d.

Вариант 13. Дано: $\alpha = 30°$; m = 400 кг; $V_A = 0$; $\tau = 20$ с; d = 3 м; h = 1,5 м. Определить Р и l.

Вариант 14. Дано: $\alpha = 30°$; m = 400 кг; P = 2,2 кН; $V_A = 0$; $l = 40$ м; d = 5 м. Определить V_B и V_C.

Вариант 15. Дано: $\alpha = 30^{\circ}$; $V_A = 0$; $P = 2$ кН; $l = 50$ м; $h = 2$м; $d = 4$ м. Определить T и m.

Варианты 16 – 20 (рис. 1.12)

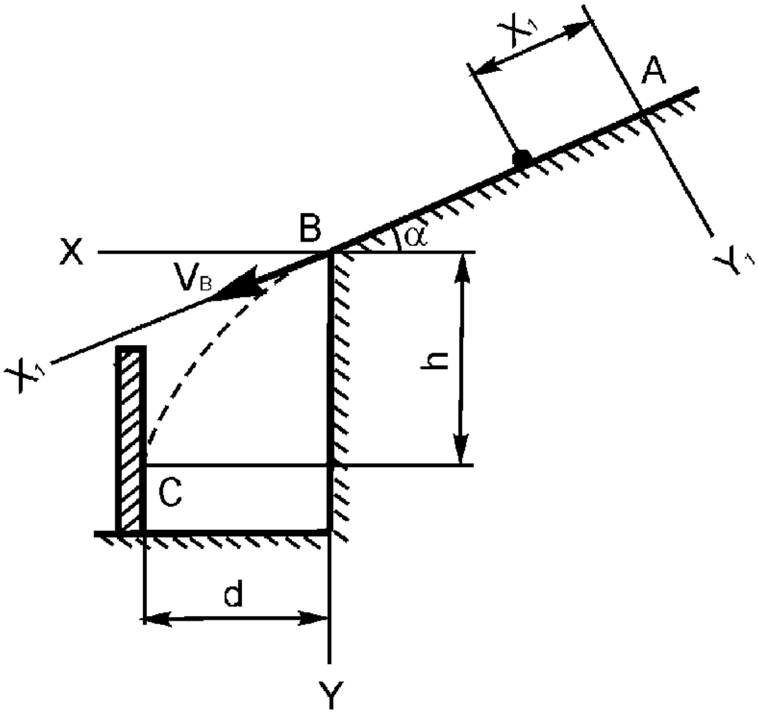


Рис. 1.12

Тело скользит в течение τ с по участку AB откоса, составляющему угол α с горизонтом и имеющему длину l. Его начальная скорость V_A. Коэффициент трения скольжения тела по откосу равен f. Имея в точке B скорость V_B , тело через T секунд ударяется в точке C о защитную стену.

При решении задачи принять тело за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 16. Дано: $\alpha = 30^{\circ}$; $V_A = 1$ м/с; $l = 3$ м; $f = 0{,}2$; $d = 2{,}5$ м. Определить T и h.

Вариант 17. Дано: $\alpha = 45^{\circ}$; $l = 6$ м; $V_B = 2V_A$; $\tau = 1$ с; $h = 6$ м. Определить d и f.

Вариант 18. Дано: $\alpha = 30^{\circ}$; $l = 2$ м; $V_A = 0$; $f = 0{,}1$; $d = 3$ м. Определить h и τ.

Вариант 19. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $l = 3$ м; $V_B = 3$ м/с; $f \neq 0$; $\tau = 1{,}5$ с; $d = 2$ м. Определить V_A и h.

Вариант 20. Дано: $\alpha = 45^\circ$; $V_A = 0$; $f = 0{,}3$; $d = 2$ м; $h = 4$м. Определить l и τ.

Варианты 21 – 25 (рис. 1.13)

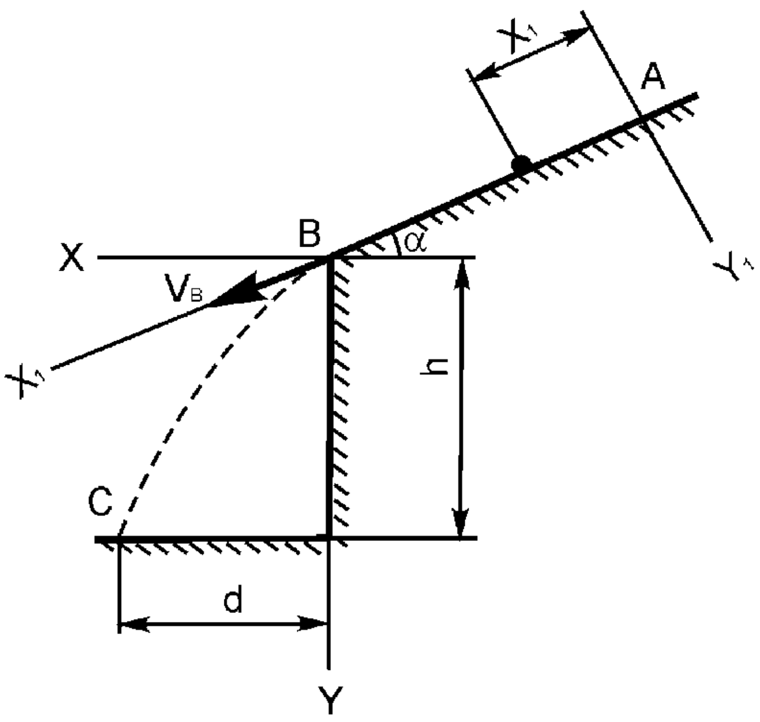


Рис. 1.13

Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Его начальная скорость V_A. Коэффициент трения скольжения равен f. Через τ секунд тело в точке B со скоростью V_B покидает наклонную плоскость и падает на горизонтальную плоскость в точку C со скоростью V_C; при этом оно находится в воздухе T секунд.

При решении задачи принять тело за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

Вариант 21. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $f = 0{,}1$; $V_A = 1$ м/с; $\tau = 1{,}5$ с; $h = 10$ м. Определить V_B и d.

Вариант 22. Дано: $V_A = 0$; $\alpha = 45^\circ$; $l = 10$ м; $\tau = 2$ с. Определить f и уравнение траектории на участке BC в системе отсчета XBY.

Вариант 23. Дано: $f = 0$; $V_A = 0$; $l = 9{,}81$ м; $\tau = 2$ с; $h = 20$ м. Определить α и T.

Вариант 24. Дано: $V_A = 0$; $\alpha = 30^\circ$; $f = 0{,}2$; $l = 10$ м; $d = 12$ м. Определить τ и h.

Вариант 25. Дано: $V_A = 0$; $\alpha = 30^\circ$; $f = 0{,}2$; $l = 6$ м; $h = 4{,}5$ м. Определить V_C и τ.

Варианты 26 – 30 (рис. 1.14)

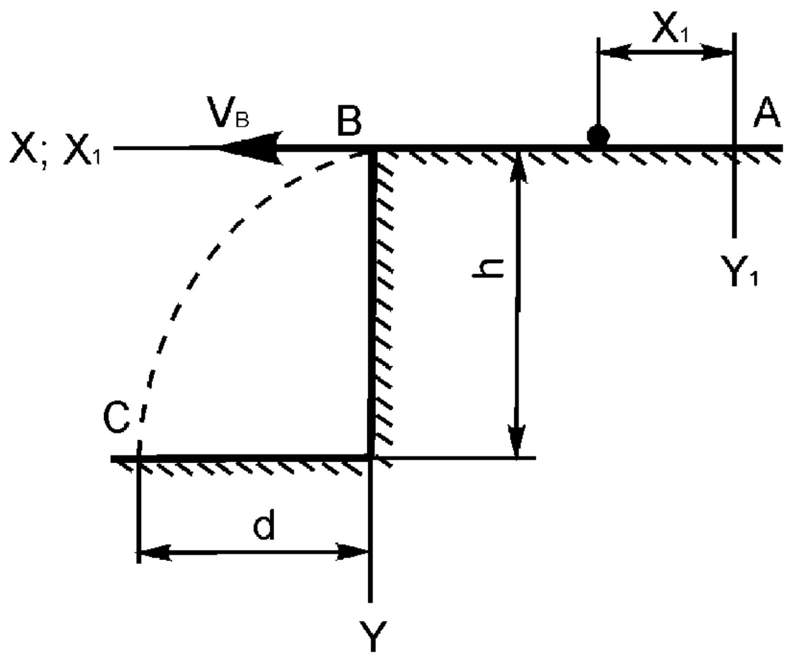


Рис. 1.14

Имея в точке A скорость V_A, тело движется по горизонтальному участку AB длиной l в течение τ секунд. Коэффициент трения скольжения по плоскости равен f. Со скоростью V_B тело в точке B покидает плоскость и попадает в точку C со скоростью V_C, находясь в воздухе T секунд.

При решении задачи принять тело за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 26. Дано: $V_A = 7$ м/с; $f = 0{,}2$; $l = 8$ м; $h = 20$ м. Определить V_C и d.

Вариант 27. Дано: $V_A = 4$ м/с; $f = 0{,}1$; $\tau = 2$ с; $d = 2$ м. Определить V_B и h.

Вариант 28. Дано: V_B = 3 м/с; f = 0,3; l = 3 м; h = 5 м. Определить V_A и T.

Вариант 29. Дано: V_A = 3 м/с; V_B = 1 м/с; l = 2,5 м; h = 20 м. Определить f и d.

Вариант 30. Дано: f = 0,25; l = 4 м; d = 3 м; h = 5 м. Определить V_A и τ.

1.13. Пример выполнения курсового задания Д 1

В общем случае система сил, действующая на материальную точку, может быть постоянной или зависеть от времени t, положения в пространстве, скорости и т. д. В связи с этим интегрирование дифференциальных уравнений движения точки имеет свою специфику. В курсовом задании Д 1 система сил, действующая на точку, постоянна. Рассмотрим пример выполнения этого задания.

Условие задания.

Тело движется из точки А по участку АВ (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Его начальная скорость V_A. Коэффициент трения скольжения равен f. Через τ секунд тело в точке В со скоростью V_B покидает наклонную плоскость и падает на горизонтальную плоскость в точку С со скоростью V_C; при этом оно находится в воздухе Т секунд (рис. 1.15).

При решении задачи принять тело за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

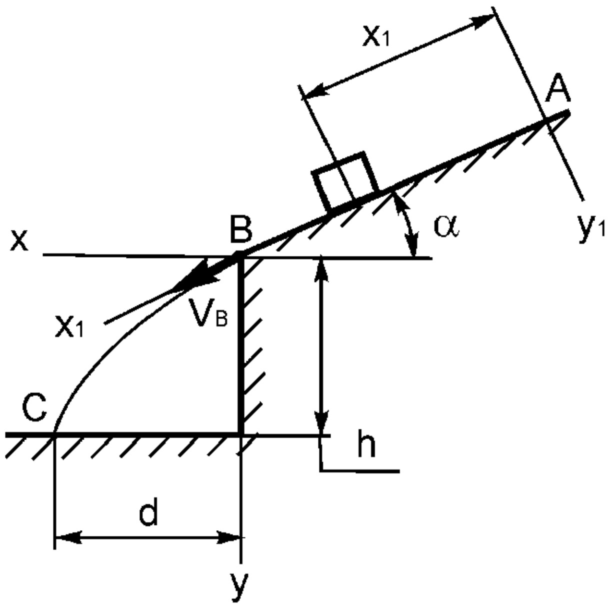


Рис. 1.15

Дано: V_A = 1 м/с; α = 30°; f = 0,2; l = 6 м; h = 4,5 м. Определить V_C и τ.

Решение.

1. Рассмотрим движение тела на участке AB в заданной системе отсчета AX_1Y_1, приняв его за материальную точку (рис. 1.16).

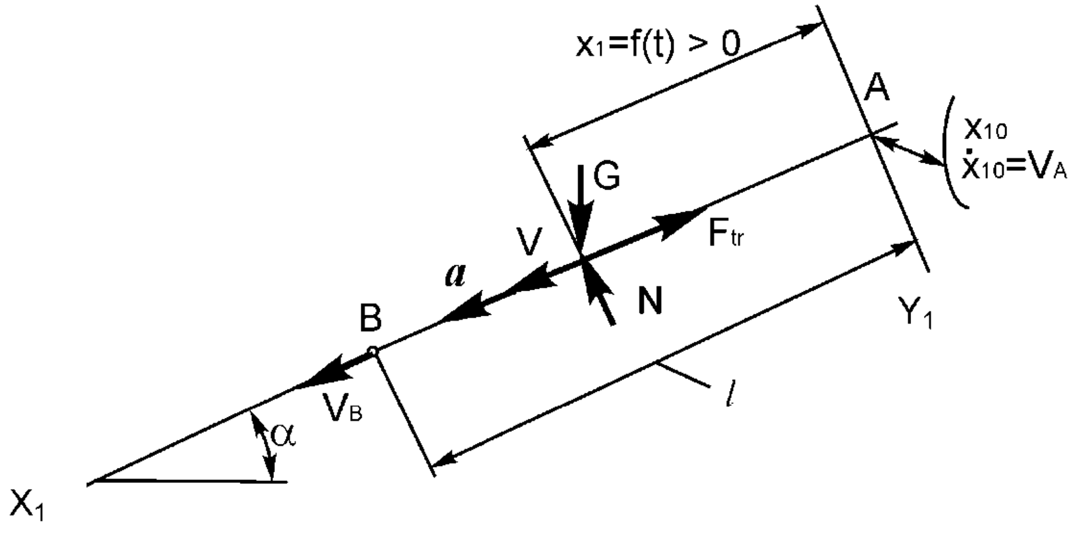


Рис. 1.16

Такое допущение обосновано тем, что тело совершает поступательное движение и, следовательно, уравнения его движения такие же, как и у точки.

2. Изобразим точку в системе отсчета AX_1Y_1 в произвольный момент времени t. При этом ее координата $x_1 = f(t) > 0$ и точка движется в сторону возрастания этой координаты ускоренно. Следовательно, ускорение $\boldsymbol{a}$ имеет такое же направление, как и скорость **V**.

3. Согласно условию задачи при $t_0 = 0$ начальная координата $x_{10} = x_{1A} = 0$ и проекция начальной скорости $\dot{x}_{10} = V_A$.

4. К точке приложим активную силу **G** – силу тяжести. Так как опорная поверхность точки шероховатая, то имеем две реакции: **N** – нормальная реакция; $\mathbf{F}_{tr}$ – сила трения скольжения. Силу $\mathbf{F}_{tr}$ направляют в сторону, противоположную направлению скорости **V**. Из курса статики известно, что силу трения и нормальную реакцию связывает соотношение $F_{tr} = f \cdot N$.

5. Запишем основное уравнение динамики точки.

$$m\boldsymbol{a} = \Sigma\mathbf{F}_i + \Sigma\mathbf{R}_i = \mathbf{G} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{tr}.$$

Спроецировав это векторное выражение на координатные оси системы отсчета AX_1Y_1, получим дифференциальные уравнения движения точки:

$$m\ddot{x}_1 = G\sin\alpha - F_{tr}; \qquad (1)$$

$$m\ddot{y}_1 = G\cos\alpha - N, \qquad (2)$$

где $\ddot{x}_1$, $\ddot{y}_1$ – проекции ускорения $\boldsymbol{a}$ на координатные оси.

Поскольку вектор $\boldsymbol{a}$ на ось AY_1 не проецируется, то из уравнения (2) имеем $N = G\cos\alpha = mg\cos\alpha$. Отсюда $F_{tr} = f \cdot N = fmg\cos\alpha$. Анализируя последнее равенство, сделаем вывод о том, что реакции N и F_{tr} не зависят от того, в каком ***кинематическом состоянии*** (покоя или движения) находится точка.

С учетом изложенного уравнение (1) приводится к виду

$$m\ddot{x}_1 = G\sin\alpha - F_{tr} = G\sin\alpha - fN\cos\alpha =$$
$$= mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha). \qquad (1^1)$$

Упростим последнее выражение.

$$\ddot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha). \qquad (1^{11})$$

6. Дважды проинтегрируем последнее уравнение.

$$\dot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t + C_1;$$

$$x_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t^2/2 + C_1t + C_2,$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

7. Определим постоянные C_1, C_2 подстановкой в последние уравнения начальных условий движения. При $t_0 = 0$ имеем:

$$\dot{x}_{10} = V_A = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t_0 + C_1;$$

$$x_{10} = X_{1A} = 0 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)(t_0)^2/2 + C_1 t_0 + C_2.$$

Отсюда $C_1 = V_A$; $C_2 = 0$. Окончательно имеем:

$$\dot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t + V_A;$$

$$x_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t^2/2 + V_A t,$$

где x_1, $\dot{x}_1$ – соответственно текущие координата точки и проекция ее скорости на координатную ось AX_1.

Последние выражения справедливы для любого значения времени, пока точка движется по участку АВ. В момент времени τ движущееся тело находится в точке В участка АВ. Исходя из этого, получим систему двух уравнений.

$$V_B = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\tau + V_A;$$

$$l = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\tau^2/2 + V_A \tau.$$

Эта система уравнений содержит неизвестные τ и V_B. Поскольку число уравнений равно числу неизвестных величин, то такую систему уравнений решают стандартными приемами и определяют V_B и τ. После определения V_B и τ рассматривают движение материальной точки на участке ВС ее траектории в системе отсчета BXY (см. рис. 1.15).

Если последнюю систему уравнений решить нельзя (число неизвестных превышает число уравнений равновесия), то так же переходят к рассмотрению движения точки на участке ВС в системе отсчета BXY.

8. Рассмотрим движение точки на участке ВС в заданной системе отсчета BXY.

9. Изобразим точку на траектории ее движения в произвольный момент времени (рис. 1.17).

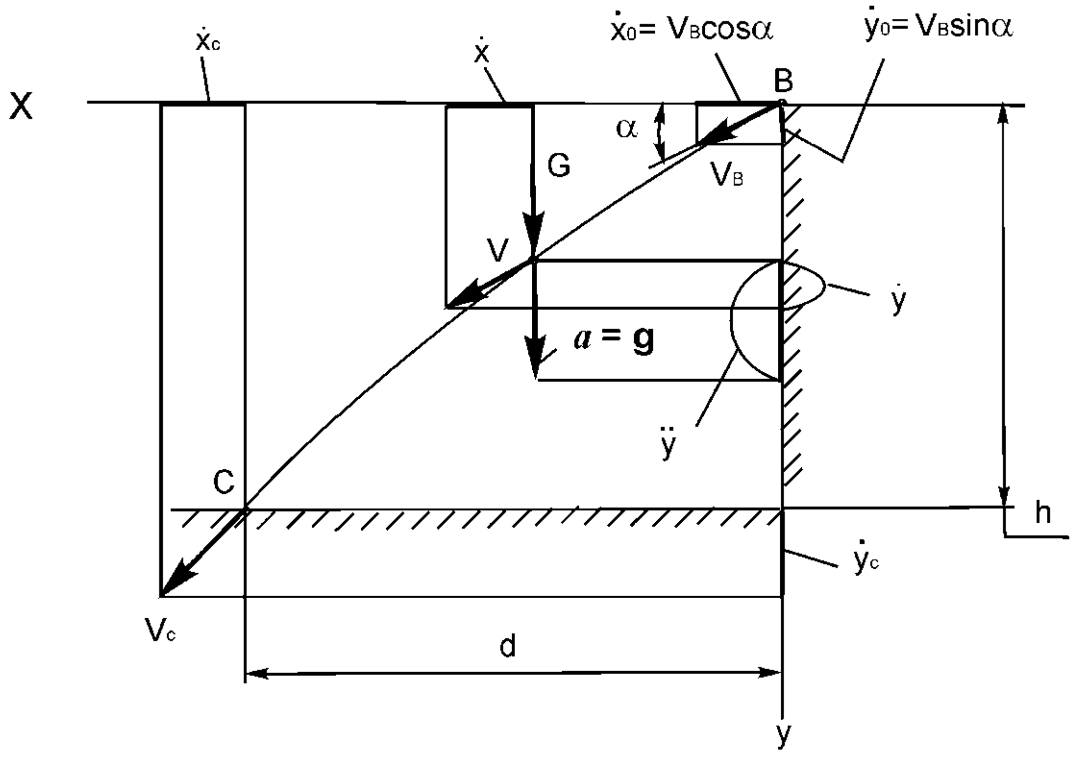


Рис. 1.17

10. Определим начальные условия движения точки на участке ВС. Согласно рис. 1.17 имеем: $x_0 = 0$; $\dot{x}_0 = V_B\cos\alpha$; $y_0 = 0$; $\dot{y}_0 = V_B\sin\alpha$.

11. На точку действует только одна активная сила **G** – сила тяжести. Реакций связей нет, поскольку сопротивление воздуха не учитывается.

12. Основное уравнение динамики для точки имеет вид

$$m\boldsymbol{a} = \Sigma\mathbf{F}_i + \Sigma\mathbf{R}_i = \mathbf{G}.$$

Запишем дифференциальные уравнения движения точки.

$$m\ddot{x} = \Sigma F_{iox} + \Sigma R_{iox} = 0; \qquad (3)$$

$$m\ddot{y} = \Sigma F_{ioy} + \Sigma R_{ioy} = G = mg. \qquad (4)$$

13. Проинтегрируем последние уравнения. Так как масса точки $m \neq 0$, то из уравнения (3) имеем $\ddot{x} = 0$. Отсюда следует, что $\dot{x} = dx/dt = C_3 = \text{const}$, где $\dot{x}$ – проекция скорости на координатную ось ВХ; C_3 – постоянная интегрирования. Определим C_3 по начальным условиям движения. При $t_0 = 0$ имеем $\dot{x}_0 = V_B\cos\alpha = C_3$. Так как $\dot{x} = \text{const}$, то окончательно получим выражение $\dot{x} = V_B\cos\alpha$. Другими словами, в любой момент времени проекци Y рости на координатную ось ВХ постоянна, т. е. не зависит от времени.

Проинтегрировав последнее выражение, получим

$$x = V_B\cos\alpha \cdot t + C_4,$$

где C_4 – постоянная интегрирования.

Определим эту постоянную по начальным условиям движения. При $t_0 = 0$ имеем $x_0 = 0 = V_B\cos\alpha \cdot t_0 + C_4$. Отсюда получим $C_4 = 0$. Окончательно текущее значение координаты x точки находят по формуле

$$x = V_B\cos\alpha \cdot t.$$

Дифференциальное уравнение (4) движения точки приведем к виду $\ddot{y} = g$. Проинтегрируем это выражение и получим

$$\dot{y} = gt + C_5,$$

где $\dot{y}$ – текущее значение проекции скорости на координатную ось BY; C_5 – постоянная интегрирования.

По начальным условиям движения имеем

$$\dot{y}_0 = V_B\sin\alpha = gt_0 + C_5.$$

Отсюда $C_5 = V_B\sin\alpha$. Тогда $\dot{y} = gt + V_B\sin\alpha$.

Проведем интегрирование последнего выражения.

$$y = gt^2/2 + V_B\sin\alpha \cdot t + C_6.$$

Определим постоянную интегрирования C_6. При $t_0 = 0$ имеем

$$y_0 = 0 = g(t_0)^2/2 + V_B\sin\alpha \cdot t_0 + C_6.$$

Тогда $C_6 = 0$.

Текущее значение координаты y находят по формуле

$$y = gt^2/2 + V_B\sin\alpha \cdot t.$$

Таким образом, получаем выражения для определения текущих значений координат x, y и проекций $\dot{x}$, $\dot{y}$ скорости точки при ее движении по траектории BC. В момент времени T, когда тело находится в точке C траектории его движения (см. рис. 1.17), эти выражения приобретают следующий вид:

$$\dot{x}_c = V_B\cos\alpha; \quad \dot{y}_c = gT + V_B\sin\alpha;$$

$$d = V_B\cos\alpha \cdot T; \quad h = gT^2/2 + V_B\sin\alpha \cdot T,$$

где $\dot{x}_c$, $\dot{y}_c$ – проекции скорости V_C на координатные оси; d, h – координаты точки C в системе отсчета BXY.

По условию задачи требуется определить модуль скорости тела в точке C траектории его движения. Для этого используется формула $V_c = \sqrt{(\dot{x}_c)^2 + (\dot{y}_c)^2}$.

Таким образом, для определения неизвестных величин необходимо совместно решить следующую систему уравнений:

$$V_B = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\tau + V_A;$$

$$l = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\tau^2/2 + V_A\,\tau;$$

$$\dot{x}_c = V_B\cos\alpha;$$

$$\dot{y}_c = gT + V_B\sin\alpha;$$

$$d = V_B\cos\alpha \cdot T;$$

$$h = gT^2/2 + V_B\sin\alpha \cdot T;$$

$$V_c = \sqrt{(\dot{x}_c)^2 + (\dot{y}_c)^2}.$$

В этой системе уравнений неизвестными величинами являются: V_B, τ, d, T, $\dot{x}_c$, $\dot{y}_c$, V_C.

Таким образом, имеем семь уравнений, содержащих семь неизвестных.

Для координации вектора $\mathbf{V}_C$ скорости тела в точке C пространства рекомендуется определить величину угла β, составленного направлением этой скорости с положительным направлением отсчета координаты x по формулам:

$$\cos(\mathbf{V}_C, \mathbf{i}) = \dot{x}_c/V_C; \quad \beta = \arccos(\dot{x}_c/V_C).$$

Результаты проведенных расчетов сводят в таблицу.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулировать ***первый закон динамики*** (закон инерции).
2. Сформулировать ***второй закон динамики*** (закон пропорциональности силы и ускорения).
3. Сформулировать ***третий закон динамики*** (закон равенства действия и противодействия).

4. Сформулировать ***четвертый закон динамики*** (закон независимости действия сил).
5. Сформулировать определение понятия «***инерциальная система отсчета***».
6. Записать ***основное уравнение динамики*** несвободной материальной точки.
7. Записать ***дифференциальные уравнения движения*** несвободной материальной точки в декартовой системе отсчета.
8. Записать ***дифференциальные уравнения движения*** несвободной материальной точки в естественных координатных осях.
9. Сформулировать суть ***первой задачи динамики***.
10. Сформулировать суть ***второй задачи динамики***.
11. Как определяются ***постоянные интегрирования*** при решении второй задачи динамики?

2. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ И ТЕЛА

2.1. Виды колебательных движений материальной точки

Колебательное движение материального тела происходит при условии, когда на него действует сила, стремящаяся вернуть его в положение статического равновесия. Такую силу называют восстанавливающей.

Восстанавливающая сила – *сила, стремящаяся вернуть тело или точку в положение статического равновесия.*

Примером такой силы является сила упругости $F_{уп}$ пружины (рис. 2.1).

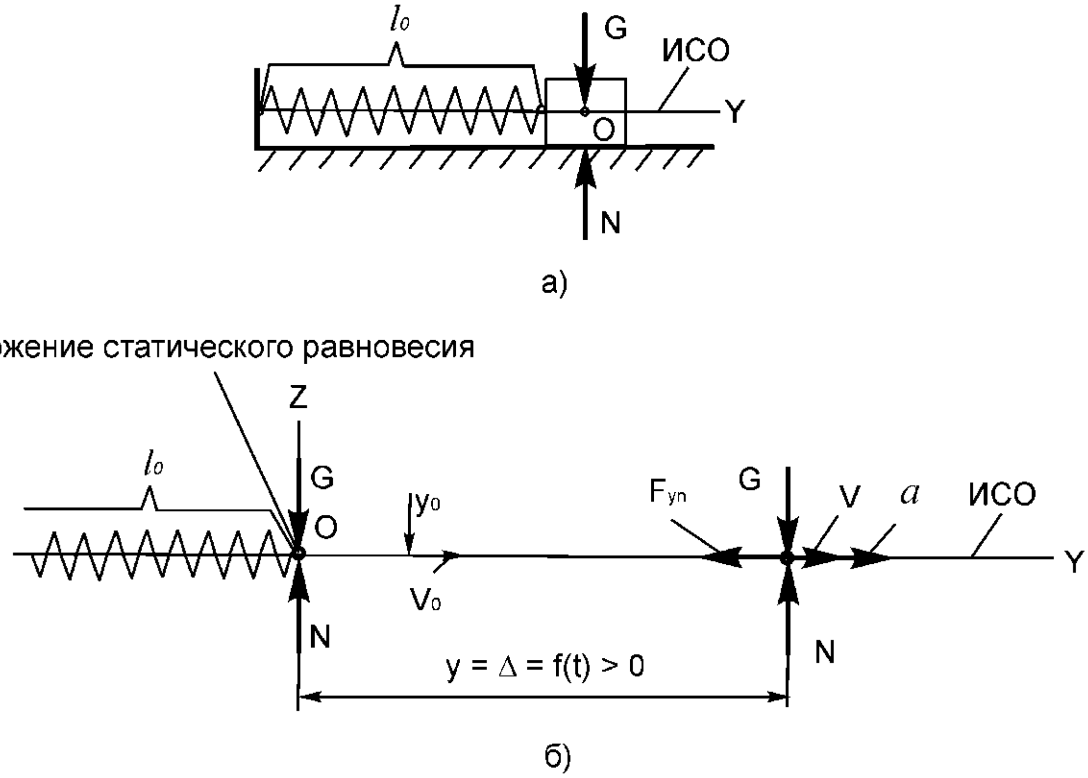


Рис. 2.1

Рассмотрим движение тела весом G по гладкой горизонтальной поверхности в инерциальной системе отсчета OYZ. Начало системы отсчета поместим в положение статического равновесия тела. В этом случае пружина не деформирована и имеет размер l_0. В положении статического равновесия (см. рис. 2.1,а) на тело действуют активная сила **G** (сила тяжести) и реакция **N** гладкой поверхности.

Если из исходного положения равновесия тело переместить на расстояние y_0 и сообщить ему начальную скорость $\mathbf{V}_0$, то оно будет совершать поступательное движение.

Из курса кинематики известно, что уравнения поступательного движения тела такие же, как и уравнения движения точки. На основании изложенного движение этого тела можно рассматривать как движение материальной точки массой m = G/g, на которую действуют активная сила **G** (сила тяжести) и реакции **N**, $\mathbf{F}_{уп}$ внешних связей (рис. 2.1,б). В рассматриваемом случае основное уравнение динамики имеет вид

$$m\boldsymbol{a} = \Sigma\mathbf{F}_i + \Sigma\mathbf{R}_i = \mathbf{G} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{уп}.$$

Сила $\mathbf{F}_{уп}$ является реакцией деформированной пружины. Сила $\mathbf{F}_{уп}$ всегда направлена к положению статического равновесия точки. Из рис. 2.1 видно, что деформация Δ пружины является переменной величиной и равна модулю координаты «у» точки в системе отсчета OYZ.

Модуль силы упругости пропорционален ее деформации:

$$F_{уп} = c \cdot \Delta = c \cdot y,$$

где с – ***коэффициент жесткости*** пружины, численно равный силе упругости при ее деформации Δ = 1 м.

Коэффициент жесткости является конструктивной характеристикой пружины. Этот коэффициент имеет размерность [Н/м].

Таким образом, сила $\mathbf{F}_{уп}$ упругости деформированной пружины всегда направлена к началу системы отсчета (положению статического равновесия точки) и пропорциональна величине отклонения точки от этого положения. Другими словами, сила упругости относится к разряду восстанавливающих сил, зависящих от положения точки.

Колебания могут происходить и под действием восстанавливающих сил, изменяющихся по другим законам.

В инженерных расчетах широкое применение получили четыре основных случая колебательного движения материальной точки:

1) свободные колебания, вызванные постоянной системой сил и восстанавливающей силой;

2) колебания, совершаемые под действием постоянной системы сил, восстанавливающей силы и силы сопротивления движению, пропорциональной первой степени скорости;

3) вынужденные колебания, осуществляющиеся под действием постоянной системы сил, восстанавливающей силы и возмущающей силы, изменяющейся по периодическому закону;

4) вынужденные колебания, происходящие под действием постоянной системы сил, восстанавливающей силы, силы сопротивления движению, пропорциональной первой степени скорости, и возмущающей силы, изменяющейся по периодическому закону.

Рассмотрим последовательно эти колебания.

2.2. Свободные колебания материальной точки

Свободные колебания происходят под действием постоянной системы сил и восстанавливающей силы.

Для получения дифференциальных уравнений колебательного движения точки воспользуемся расчетной схемой, приведенной на рис. 2.1,б.

Согласно рис. 2.1,б на точку действует постоянная система сил (**G**, **N**) и восстанавливающая сила $\mathbf{F}_{уп}$. Дифференциальные уравнения движения точки имеют вид:

$$m\ddot{y} = \Sigma F_{ioy} + \Sigma R_{ioy} = - F_{уп} = - c\Delta = - cy;$$
$$m\ddot{z} = \Sigma F_{ioz} + \Sigma R_{ioz} = - G + N.$$

В этих уравнениях $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ – проекции ускорения a соответственно на координатные оси OY и OZ. Поскольку $\ddot{z} = 0$, то имеем $N = G = mg$. Таким образом, силы **G** и **N** образуют уравновешенную систему сил и, следовательно, эта система сил не влияет на параметры движения точки. Исходя из этого, расчетная схема для определения дифференциального уравнения движения точки упрощается (рис. 2.2).

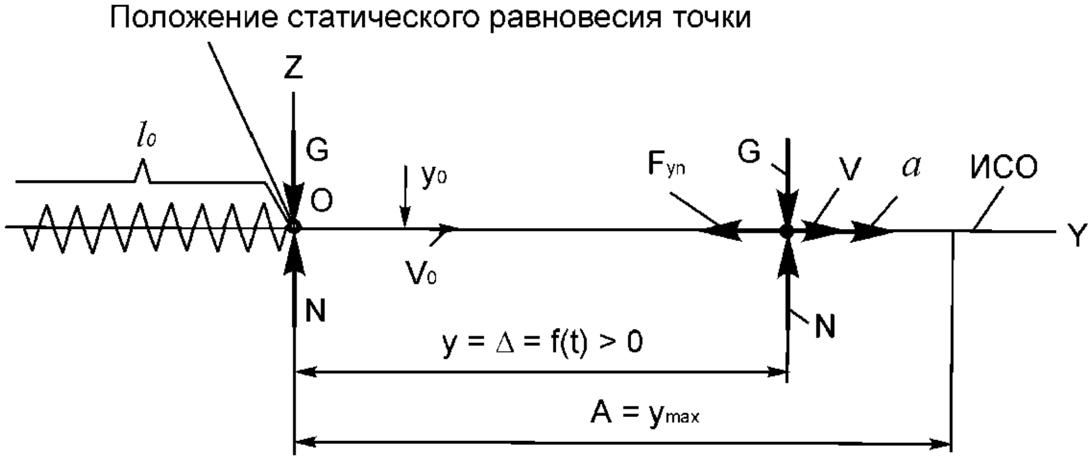


Рис. 2.2

Дифференциальное уравнение горизонтального движения точки представим в виде

$$\ddot{y} + (c/m)y = 0.$$

Введем постоянный коэффициент $k^2 = c/m$ или $k = \sqrt{c/m}$. Тогда имеем

$$\ddot{y} + k^2 y = 0.$$

Это выражение называют ***дифференциальным уравнением свободных колебаний*** материальной точки.

Коэффициент k называют ***циклической частотой*** свободных колебаний, который измеряют в рад/с или в $с^{-1}$. Физический смысл коэффициента k – число полных колебаний за время $t = 2\pi = 6{,}28$ с.

Общее решение этого дифференциального уравнения имеет два вида.

Первый вид:

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования, определяемые по начальным условиям движения.

Пусть при $t_0 = 0$ точка имеет координату y_0 и проекцию $\dot{y}_0$ скорости V_0 на ось OY. Тогда уравнение свободных колебаний точки получит вид

$$y = y_0 \cos kt + (\dot{y}_0/k)\sin kt.$$

Второй вид:

$$y = A\sin(kt + \beta),$$

где A и β – ***постоянные интегрирования***; A – ***амплитуда свободных колебаний***; (kt + β) – ***фаза колебаний***; β – ***начальная фаза колебаний***.

По заданным начальным условиям движения точки (y_0, $\dot{y}_0$) постоянные интегрирования определяют по следующей совокупности формул:

$$A = \sqrt{(y_0)^2 + (\dot{y}_0/k)^2}\,;\ \sin\beta = y_0/A;\ \cos\beta = \dot{y}_0/(Ak);\ \mathrm{tg}\beta = ky_0/\dot{y}_0.$$

На рис. 2.3 представлен общий вид графика свободных колебаний точки.

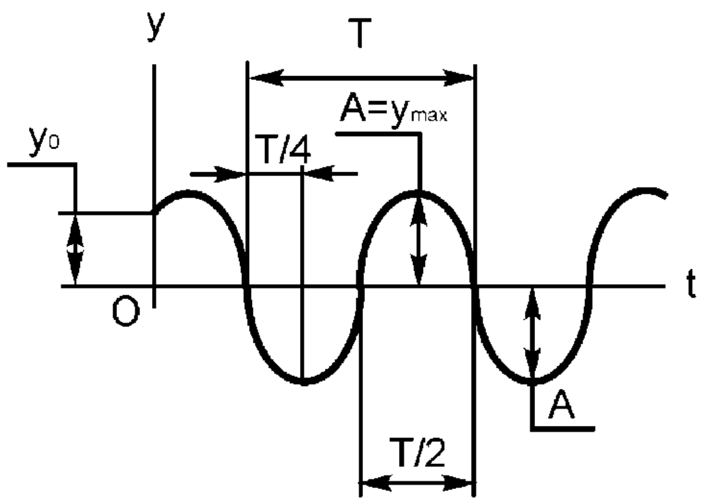


Рис. 2.3

При изучении свободных (гармонических) колебаний широко используют понятия ***«амплитуда А»***, ***«период Т свободных колебаний»***.

Амплитуда свободных колебаний – *величина наибольшего отклонения точки от положения статического равновесия.*

Период свободных колебаний – *отрезок времени, за который точка проходит положение статического равновесия в одном и том же направлении.*

Период свободных колебаний определяют по формуле

$$T = 2\pi/k = 2\pi/\sqrt{c/m}.$$

Анализ формулы показывает, что период свободных колебаний T является постоянной величиной. С возрастанием массы m точки период T увеличивается и соответственно уменьшается при увеличении коэффициента «с» жесткости пружины.

Следует отметить, что свободные колебания не затухают.

Для практических расчетов рекомендуется использовать формулу

$$y = A\sin(kt + \beta).$$

В инженерной практике довольно часто рассматривают колебательное движение тела, подвешенного на пружинах или установленного на них. Если начало системы отсчета поместить в положение статического равновесия груза, то эти колебания также сводятся к свободным колебаниям точки, дифференциальное уравнение движения которой имеет стандартный вид $\ddot{y} + k^2y = 0$ и, следовательно, стандартное решение.

2.3. Дифференциальное уравнение движения точки под действием постоянной системы сил, восстанавливающей силы и силы сопротивления движению

Рассмотрим движение материальной точки по гладкой горизонтальной поверхности, происходящее под действием постоянной системы сил, восстанавливающей силы и силы сопротивления движению, пропорциональной первой степени скорости (рис. 2.4).

Как и ранее, начало системы отсчета поместим в положение статического равновесия точки. В этом положении пружина не деформирована, т. е. имеет длину l_0. При оформлении рис. 2.4 используются рекомендации, приведенные в алгоритме решения вторых задач динамики точки.

Основное уравнение динамики в рассматриваемом случае имеет вид

$$m\boldsymbol{a} = \Sigma\mathbf{F}_i + \Sigma\mathbf{R}_i = \mathbf{G} + \mathbf{N} + \mathbf{R}_c + \mathbf{F}_{уп},$$

где **G** – сила тяжести; **N** – нормальная реакция; $\mathbf{R}_c$ – сила сопротивления движению точки; $\mathbf{F}_{уп}$ – сила упругости пружины.

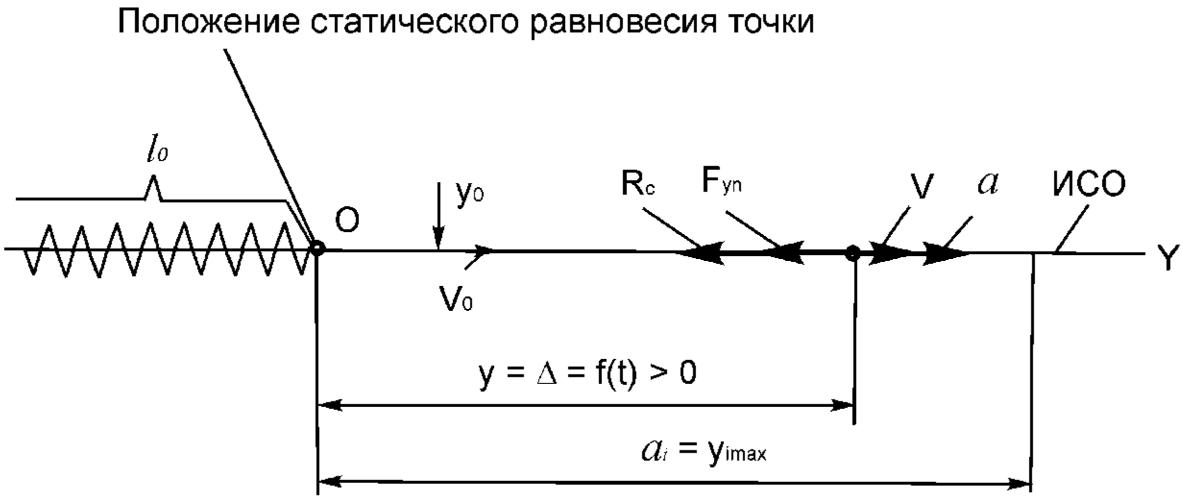


Рис. 2.4

Так как силы **G** и **N** на кинематические параметры точки не влияют, то они на рис. 2.4 не показаны.

Сила $\mathbf{R}_c$ сопротивления движению точки зависит от внешней среды, в которой эта точка перемещается.

Рассмотрим вариант, при котором сила $\mathbf{R}_c$ пропорциональна первой степени скорости **V** точки. Примером такой силы является сопротивление воздуха при движении тела. В этом случае силу $\mathbf{R}_c$ определяют по формуле $\mathbf{R}_c = -\alpha\mathbf{V}$, где α – постоянный коэффициент пропорциональности, имеющий размерность [Н/(м/с)]. Коэффициент α численно равен силе сопротивления при скорости движения точки, равной 1 м/с. Сила сопротивления $\mathbf{R}_c$ всегда направлена в сторону, противоположную направлению скорости **V**.

Запишем дифференциальное уравнение горизонтального движения точки:

$$m\ddot{y} = \Sigma F_{ioy} + \Sigma R_{ioy} = -\alpha\dot{y} - cy.$$

Это уравнение приведем к виду

$$\ddot{y} + (\alpha/m)\dot{y} + (c/m)y = 0.$$

Введем условные обозначения: $\alpha/m = 2n$; $c/m = k^2$. С учетом коэффициентов n, k дифференциальное уравнение движения приводится к стандартному виду:

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2 y = 0,$$

где n – коэффициент, характеризующий сопротивление среды и имеющий размерность [рад/с] или [c^{-1}].

В зависимости от соотношения величин n и k материальная точка может совершать или колебательное, или апериодическое (неколебательное) движение.

2.4. Затухающие колебания материальной точки

Рассмотрим первый вариант движения точки, при котором $n < k$. В этом варианте общее решение дифференциального уравнения имеет два вида:

$$y = e^{-nt}(C_1\cos((\sqrt{k^2 - n^2})t) + C_2\sin((\sqrt{k^2 - n^2})t));$$

$$y = a e^{-nt}\sin((\sqrt{k^2 - n^2})t + \beta),$$

где C_1, C_2, a, β – постоянные интегрирования, определяемые по начальным условиям движения.

Эти выражения называют ***уравнениями затухающих колебаний*** материальной точки.

Пусть начальными условиями движения являются: $t_0 = 0$; y_0; $\dot{y}_0$. В этих условиях первый вид решения дифференциального уравнения $\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2y = 0$ выражается формулой

$$y = e^{-nt}(y_0\cos((\sqrt{k^2 - n^2})t) + ((\dot{y}_0 + ny_0)/\sqrt{k^2 - n^2})\sin((\sqrt{k^2 - n^2})t)).$$

Постоянную величину $\sqrt{k^2 - n^2}$ называют ***циклической частотой затухающих колебаний*** $\boldsymbol{k^*}$, которую определяют по формуле

$$k^* = \sqrt{k^2 - n^2}.$$

Величина k^* определяет число полных колебаний за промежуток времени, равный $2\pi = 6{,}28$ с. Тогда имеем

$$y = e^{-nt}(y_0\cos(k^*t) + ((\dot{y}_0 + ny_0)/k^*)\sin(k^*t)).$$

Как правило, для практических расчетов используют второй вид общего решения дифференциального уравнения движения точки.

$$y = a e^{-nt}\sin(k^*t + \beta),$$

где $(k^*t + \beta)$ – фаза затухающих колебаний; β – начальная фаза; a – постоянная интегрирования.

Для определения постоянных интегрирования a и β используют следующую совокупность формул:

$$a = \sqrt{(y_0)^2 + ((\dot{y}_0 + ny_0)/k^*)^2};$$

$$\mathrm{tg}\beta = y_0k^*/(\dot{y}_0 + ny_0);$$

$$\sin\beta = y_0/a;$$

$$\cos\beta = (\dot{y}_0 + ny_0)/(ak^*).$$

Для характеристики затухающих колебаний используют понятие «***период затухающих колебаний*** $\boldsymbol{T^*}$».

***Период затухающих колебаний** – промежуток времени между двумя последовательными прохождениями точки в одном направлении через положение покоя.*

Период затухающих колебаний ($T^* = 2\pi/\sqrt{k^2 - n^2} = 2\pi/k^*$) больше периода свободных колебаний ($T = 2\pi/k$) точки.

На рис. 2.5 приведен общий вид графика затухающих колебаний.

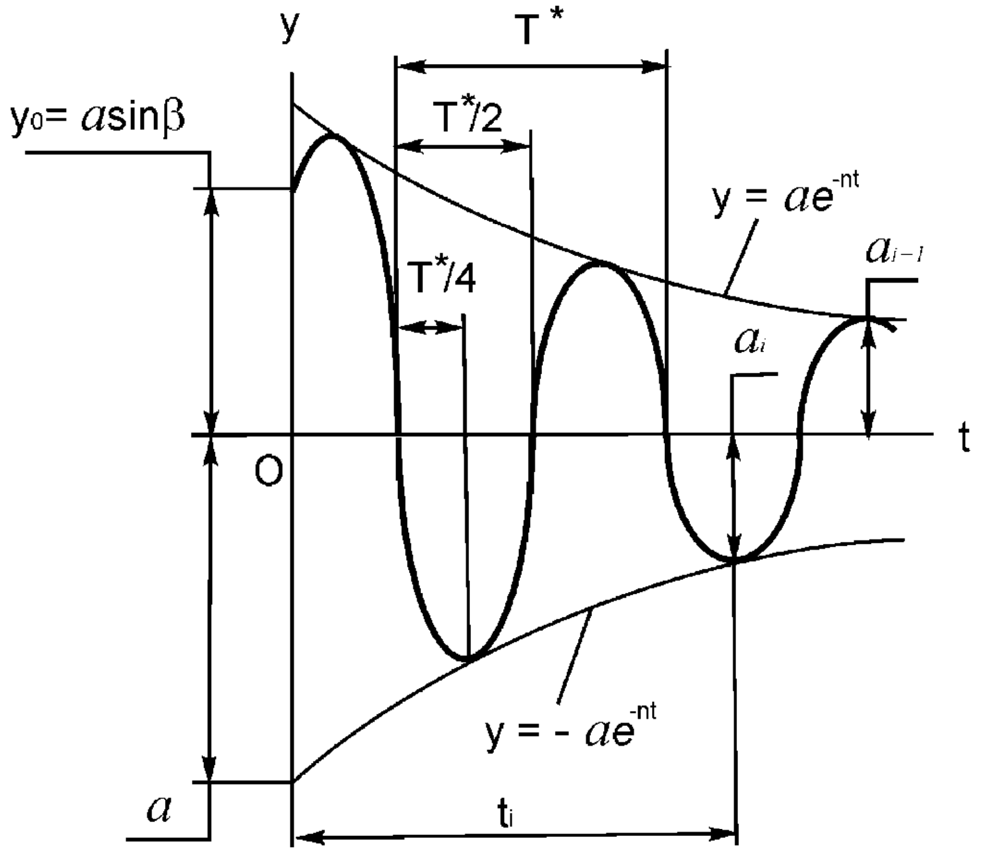


Рис. 2.5

На рис. 2.5 использованы начальные условия движения точки, приведенные на рис. 2.4. График затухающих колебаний располагается в зоне, ограниченной двумя кривыми линиями, описываемыми математическими выражениями: $y = ae^{-nt}$; $y = -ae^{-nt}$.

Для характеристики затухающих колебаний используют также понятие «***амплитуда** a_i **затухающих колебаний***».

***Амплитуда затухающих колебаний** – величина наибольшего отклонения точки в ту или другую сторону от поло-*

жения статического равновесия в течение каждого колебания.

Из рис. 2.5 видно, что амплитуда затухающих колебаний переменна. При этом последующая амплитуда a_{i+1} меньше предыдущей амплитуды a_i. Это уменьшение характеризуется отношением

$$a_{i+1}/\,a_i = e^{-\,nT^*/2} = \text{const}.$$

Число $e^{-\,nT^*/2}$ называют ***декрементом колебаний***; натуральный логарифм, т. е. величину $nT^*/2$, называют ***логарифмическим декрементом***.

Зная предыдущее значение a_i амплитуды, последующее значение a_{i+1} находят по формуле

$$a_{i+1} = a_i\, e^{-\,nT^*/2}.$$

Следует отметить, что в некоторых учебниках коэффициент n сопротивления среды называют ***коэффициентом затухания***.

Практика показывает, что затухание колебаний происходит очень быстро даже при малом сопротивлении. Так, например, при $n = 0{,}05k$ имеем $T^* = 1{,}00125T$, $e^{-nT^*} = 0{,}7301$, т. е. период T^* затухающих колебаний отличается от периода T свободных колебаний лишь на 0,125 %, а амплитуда a_i за время одного полного колебания уменьшается на 0,27 своей величины, и после 10 полных колебаний становится равной 0,043 своего первоначального значения.

Таким образом, основное влияние сопротивления на свободные колебания материальной точки выражается в уменьшении амплитуды колебаний с течением времени, т. е. в затухании колебаний.

Затухающие колебания называют также ***колебаниями с малым сопротивлением внешней среды.***

2.5. Апериодическое движение точки

Рассмотрим второй вариант движения точки, при котором $n = k$. В этом варианте движение точки теряет колебательный характер и становится апериодическим. В этом случае общее решение дифференциального уравнения

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2 y = 0$$

имеет вид

$$y = e^{-nt}(C_1 t + C_2),$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования, которые находятся по начальным условиям движения точки. Пусть при $t_0 = 0$ точка имеет координату y_0 и проекцию $\dot{y}_0$ скорости $\mathbf{V}_0$ на ось OY. С использование начальных условий уравнение апериодического движения точки имеет вид

$$y = e^{-nt}(y_0+(\dot{y}_0 + ny_0)t).$$

В зависимости от начальных условий материальная точка может совершать одно из движений, графики которых показаны на рис. 2.6 – 2.8. Эти графики соответствуют начальному отклонению точки от положения статического равновесия на величину $y_0 > 0$.

На рис. 2.6 показан график движения точки с начальной скоростью $\mathbf{V}_0$, имеющей направление, совпадающее с направлением положительного отсчета координаты y. Начальные условия этого движения изображены на рис. 2.4.

Рис. 2.6

Так как проекция $\dot{y}_0 > 0$, то точка сначала удаляется от положения статического равновесия, а затем под действием восстанавливающей силы постепенно приближается к этому положению.

Графики (см. рис. 2.7 и 2.8) соответствуют движению точки с начальной скоростью $\mathbf{V}_0$, направленной противоположно направлению отсчета координаты y ($y_0 > 0$; $\dot{y}_0 < 0$).

Рис. 2.8

При достаточно большой начальной скорости точка может совершить один переход через положение статического равновесия и затем при обратном движении приближаться к этому положению (см. рис. 2.7).

При начальных условиях ($y_0 > 0$; $\dot{y}_0 = 0$) график функции $y = f(t)$ имеет вид, приведенный на рис. 2.8.

Рассмотрим вариант движения точки, при котором $n > k$. При таком варианте точка совершает апериодическое движение, описываемое уравнением

$$y = e^{-nt}(C_1 e^{(\sqrt{n^2-k^2})t} + C_2 e^{-(\sqrt{n^2-k^2})t}),$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования, определяемые по начальным условиям движения.

Графики движения точки в этом случае по существу не отличаются от графиков, приведенных на рис. 2.6 – 2.8.

Таким образом, если $n = k$ или $n > k$, то точка совершает апериодическое движение. Такое движение называют также ***движением точки с большим сопротивлением внешней среды***.

2.6. Вынужденные колебания материальной точки под действием постоянной системы сил, восстанавливающей силы и возмущающей силы

Практически наиболее важным является случай, при котором возмущающая сила Q изменяется по гармоническому закону, т. е. проекцию Q_{OY} этой силы на ось OY определяют по закону

$$Q_{OY} = H\sin(pt + \delta),$$

где H – максимальный модуль, или ***амплитуда возмущающей силы***; p – ***частота возмущающей силы***, равная числу полных циклов изменения возмущающей силы за промежуток времени, равный $2\pi = 6{,}28$ с; $pt + \delta$ – ***фаза возмущающей силы***; δ – ***начальная фаза возмущающей силы***.

Период τ изменения возмущающей силы определяют по его частоте:

$$\tau = 2\pi/p.$$

Рассмотрим движение материальной точки на гладкой горизонтальной поверхности, происходящее под действием постоянной системы сил, восстанавливающей силы и возмущающей силы, изменяющейся по периодическому закону (рис. 2.9).

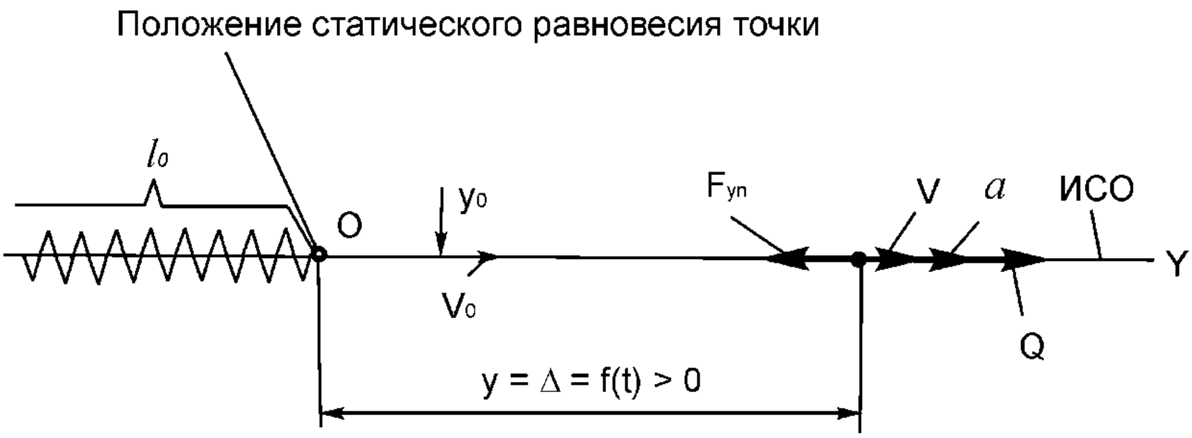


Рис. 2.9

Начало системы отсчета OY поместим в положение статического равновесия материальной точки, соответствующее недеформированной пружине.

Основное уравнение динамики точки для рассматриваемого положения имеет вид

$$m\boldsymbol{a} = \Sigma\mathbf{F}_i + \Sigma\mathbf{R}_i = \mathbf{G} + \mathbf{Q} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{уп},$$

где **G** – сила тяжести; **Q** – возмущающая сила; **N**, $\mathbf{F}_{уп}$ – соответственно реакция гладкой поверхности и реакция растянутой пружины.

Следует отметить, что силы **G** и **Q** относятся к разряду активных сил, а силы **N** и $\mathbf{F}_{уп}$ отнесены к реакциям связей. Так как силы **G** и **N** не влияют на горизонтальное движение точки, то они на рис. 2.9 не показаны.

Запишем дифференциальное уравнение горизонтального движения точки:

$$m\ddot{y} = \Sigma F_{ioy} + \Sigma R_{ioy} = H\sin(pt + \delta) - cy.$$

Это уравнение приведем к виду

$$\ddot{y} + (c/m)y = (H/m)\sin(pt + \delta),$$

где $c/m = k^2$ – квадрат частоты свободных колебаний.

Введем условное обозначение $h = H/m$ [м/с^2]. Тогда

$$\ddot{y} + k^2y = h\sin(pt + \delta).$$

Последнее выражение представляет собой дифференциальное уравнение вынужденных колебаний точки под действием постоянной системы сил, восстанавливающей силы и возмущающей силы, изменяющейся по периодическому закону.

Общее решение этого уравнения складывается из общего решения y^* дифференциального уравнения $\ddot{y} + k^2y = 0$ и частного решения y^{**} дифференциального уравнения $\ddot{y} + k^2y = h\sin(pt + \delta)$.

$$y = y^* + y^{**};$$
$$y^* = C_1\cos kt + C_2\sin kt = A\sin(kt + \beta);$$
$$y^{**} = (h/(k^2 - p^2))\sin(pt + \delta).$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний материальной точки приводится к виду
$$y = C_1\cos kt + C_2\sin kt + (h/(k^2 - p^2))\sin(pt + \delta)$$
или к виду
$$y = A\sin(kt + \beta) + (h/(k^2 - p^2))\sin(pt + \delta),$$
где C_1, C_2, A, β – постоянные интегрирования, определяемые по начальным условиям движения точки.

Последнее уравнение показывает, что точка совершает ***сложное колебательное движение***, складывающееся из двух гармонических колебаний. Первый член этого уравнения определяет свободные колебания, а второй – вынужденные колебания точки.

Таким образом, при одновременном действии восстанавливающей и возмущающих сил материальная точка совершает сложное колебательное движение, представляющее собой результат наложения свободных и вынужденных колебаний.

Следует отметить, что y^{**} не содержит постоянных интегрирования и, следовательно, вынужденные колебания не зависят от начальных условий движения.

Вынужденные колебания, частота p которых меньше частоты k свободных колебаний ($p < k$), называют ***вынужденными колебаниями малой частоты***.

Если $p > k$, то эти колебания называют ***вынужденными колебаниями большой частоты***.

При вынужденных колебаниях малой частоты ($p < k$) эти колебания выражаются зависимостью
$$y^{**} = (h/(k^2 - p^2))\sin(pt + \delta).$$

В этом случае фаза колебаний ($pt + \delta$) совпадает с фазой возмущающей силы и, следовательно, материальная точка всегда отклонена от положения статического равновесия в ту сторону, в которую направлена в данный момент возмущающая сила Q (рис. 2.10).

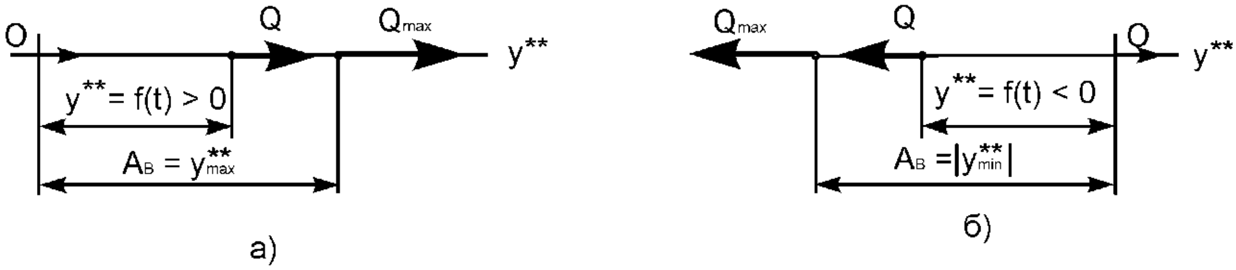


Рис. 2.10

Амплитуду $A_в$ вынужденных колебаний определяют по формуле

$$A_в = h/(k^2 - p^2).$$

При вынужденных колебаниях большой частоты ($p > k$) эти колебания выражаются зависимостью

$$y^{**} = (h/(p^2 - k^2))\sin(pt + \delta - \pi).$$

В этом случае амплитуду $A_в$ вынужденных колебаний находят по формуле

$$A_в = h/(p^2 - k^2).$$

Фаза вынужденных колебаний большой частоты ($pt + \delta - \pi$) отличается от фазы возмущающей силы ($pt + \delta$) на величину π, т. е. фазы вынужденных колебаний и возмущающей силы противоположны. Это означает, что отклонение точки от начала координат O всегда противоположно направлению возмущающей силы Q в данный момент (рис. 2.11).

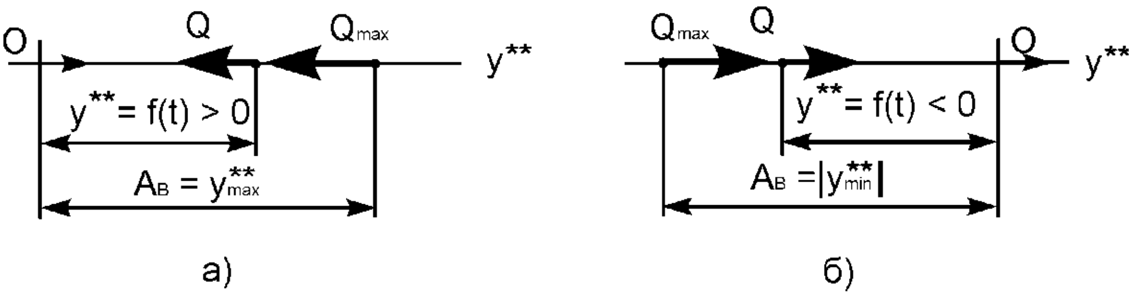


Рис. 2.11

Необходимо отметить, что при вынужденных колебаниях и малой ($p < k$) и большой частотах ($p > k$) максимальное отклонение точки от начала координат происходит в момент времени, когда модуль возмущающей силы Q достигает максимального значения H ($Q_{max} = H$).

В общем случае уравнения движения точки под действием постоянной системы сил, восстанавливающей и возмущающей сил записывают в следующем виде:

если $p < k$, то $y = A\sin(kt + \beta) + (h/(k^2 - p^2))\sin(pt + \delta)$;

если $p > k$, то $y = A\sin(kt + \beta) + (h/(p^2 - k^2))\sin(pt + \delta - \pi)$.

На рис. 2.12 приведены общие виды графиков зависимостей $y^* = f_1(t)$, $y^{**} = f_2(t)$, $y = f_3(t)$ для случая, когда $p > k$, и начальных условий $y_0 > 0$; $\dot{y}_0 > 0$.

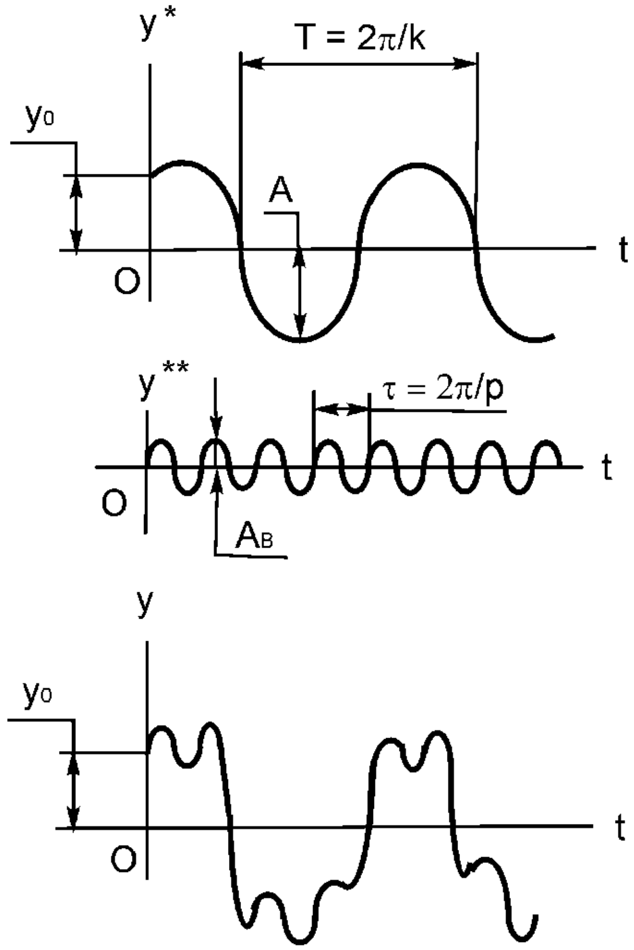


Рис. 2.12

При определении величины амплитуды вынужденных колебаний $A_в$ зачастую используют коэффициент динамичности η. Для этого вводят статическое отклонение Δ_0 точки от положения статического равновесия (рис. 2.13) под действием постоянной силы H, равной амплитуде возмущающей силы:

$$Q = H\sin(pt + \delta).$$

Модуль силы $F_{уп}$ пружины при действии на последнюю постоянной силы H определяют по формуле

$$F_{уп} = c \cdot \Delta_0,$$

де Δ_0 – деформация пружины.

Из условия равенства сил $F_{уп}$ и H имеем:

$$H = F_{уп} = c \cdot \Delta_0.$$

Из последнего выражения определим деформацию пружины:

$$\Delta_0 = H/c = (H/m)/(c/m) = h/k^2.$$

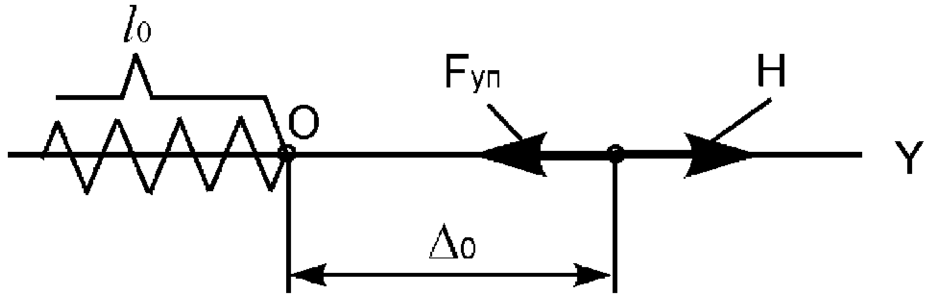


Рис. 2.13

Отношение амплитуды вынужденных колебаний $A_в$ к величине Δ_0 деформации пружины при действии на нее постоянной силы H называют ***коэффициентом динамичности η***.

$$\text{При } p < k \quad \eta = A_в/\,\Delta_0 = 1/(1 - p^2/k^2).$$

$$\text{При } p > k \quad \eta = A_в/\,\Delta_0 = 1/(p^2/k^2 - 1).$$

Зная величину коэффициента динамичности η и деформацию пружины Δ_0, нетрудно определить амплитуду вынужденных колебаний:

$$A_в = \eta\Delta_0.$$

На рис. 2.14 приведен график зависимости $\eta = f(p/k)$.

Анализ этого графика показывает, что при увеличении частоты возмущающей силы от $p = 0$ до $p = k$ коэффициент динамичности η возрастает от единицы до бесконечности, а при дальнейшем увеличении коэффициент динамичности убывает от бесконечности до нуля.

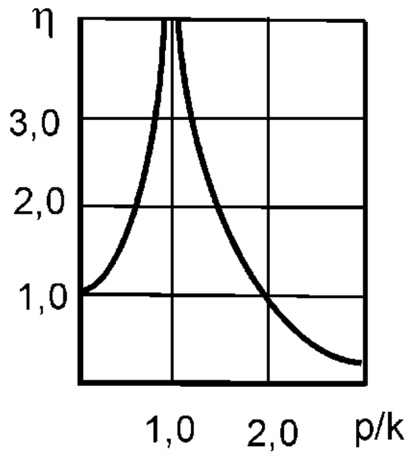


Рис. 2.14

При $p = k$ коэффициент динамичности η равен бесконечности. Этот случай вынужденных колебаний называют ***явлением резонанса***.

Общее решение дифференциального уравнения $\ddot{y} + k^2y = h\sin(pt + \delta)$ в условиях резонанса имеет вид:

$$y = y^* + y^{**} = A\sin(kt + \beta) + (h/2k)t\cdot\sin(kt + \delta - \pi/2).$$

При частоте возмущающей силы, близкой к частоте свободных колебаний точки ($p \approx k$), наступает явление, называемое ***биениями***. Уравнение биений имеет следующий вид:

$$y = (2h/(k^2 - p^2))(\sin((p - k)/2)t)\cos(pt + \delta).$$

Поскольку студенты не выполняют курсовых заданий на резонанс и биения, то эти явления подробно в данном учебно-методическом пособии не излагаются. Они даны для общего ознакомления.

2.7. Влияние сопротивлений движению на вынужденные колебания материальной точки

Рассмотрим движение материальной точки на гладкой горизонтальной поверхности, происходящее под действием постоянной системы сил, восстанавливающей силы, силы сопротивления движению, пропорциональной первой степени скорости, и возмущающей силы, изменяющейся по периодическому закону (рис. 2.15).

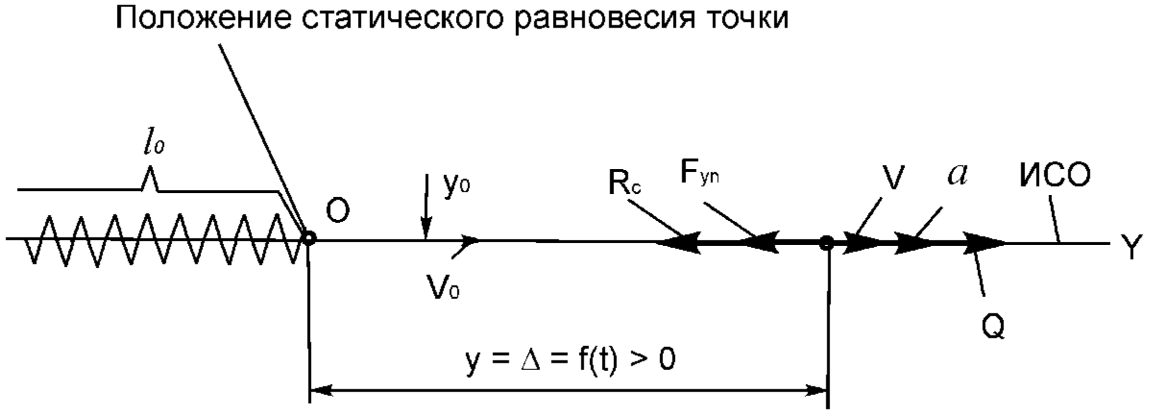


Рис. 2.15

Начало системы отсчета OY поместим в положение статического равновесия материальной точки, при котором пружина не деформирована.

Основное уравнение динамики точки для рассматриваемого случая имеет вид

$$m\boldsymbol{a} = \Sigma\mathbf{F}_i + \Sigma\mathbf{R}_i = \mathbf{G} + \mathbf{Q} + \mathbf{R}_c + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{уп}.$$

Необходимо отметить, что силы **G**, **Q** являются активными силами, а силы $\mathbf{R}_c$, **N**, $\mathbf{F}_{уп}$ отнесены к разряду реакций связей. Так как силы **G** и **N** не влияют на горизонтальное движение точки, то они на рис. 2.15 не показаны.

Из предыдущего материала, изложенного в данном разделе учебно-методического пособия, известно:

$$\mathbf{R}_c = -\alpha\mathbf{V};\ F_{уп} = c\cdot\Delta;\ Q = H\sin(pt + \delta).$$

С учетом этого дифференциальное уравнение горизонтального движения точки описывается равенством

$$m\ddot{y} = \Sigma F_{ioy} + \Sigma R_{ioy} = H\sin(pt + \delta) - \alpha\dot{y} - cy.$$

Перенеся члены $\alpha\dot{y}$, cy в левую часть равенства и разделив обе его части на массу m, получим

$$\ddot{y} + (\alpha/m)\dot{y} + (c/m)y = (H/m)\sin(pt + \delta),$$

где $c/m = k^2$ – квадрат циклической частоты свободных колебаний; $\alpha/2m = n$ – коэффициент затухания; $H/m = h$ – отношение амплитуды возмущающей силы к массе точки.

При этих обозначениях дифференциальное уравнение движения точки имеет вид

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2y = h\sin(pt + \delta).$$

Последнее уравнение представляет собой дифференциальное уравнение вынужденных колебаний точки при наличии сопротивления движению, пропорционального скорости.

Общее решение этого уравнения состоит из общего решения y^* дифференциального уравнения $\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2y = 0$ и частного решения y^{**}.

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения $\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2y = h\sin(pt + \delta)$ имеет вид $y = y^* + y^{**}$.

Частное решение y^{**} выражается формулой

$$y^{**} = A_c\sin(pt + \delta - \varepsilon),$$

где A_c, ε – постоянные величины, не зависящие от начальных условий движения точки.

Эти постоянные называют: A_c – ***амплитуда вынужденных колебаний при наличии сопротивления движению***; ε – ***сдвиг фазы***.

Значения A_c и ε определяют по следующей совокупности формул:

$$A_c = h/(\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}); \quad \mathrm{tg}\varepsilon = 2np/(k^2 - p^2);$$

$$\sin\varepsilon = 2npA_c/h; \quad \cos\varepsilon = A_c(k^2 - p^2)/h.$$

Общее решение дифференциального уравнения $\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2y = h\sin(pt + \delta)$ в зависимости от соотношения величин k и n имеет вид:

$$\text{при } n < k \quad y = ae^{-nt}\sin(k^*t + \beta) + A_c\sin(pt + \delta - \varepsilon);$$

$$\text{при } n = k \quad y = e^{-nt}(C_1t + C_2) + A_c\sin(pt + \delta - \varepsilon);$$

$$\text{при } n > k \quad y = e^{-nt}(C_1e^{(\sqrt{n^2-k^2})t} + C_2e^{-(\sqrt{n^2-k^2})t}) + A_c\sin(pt + \delta - \varepsilon),$$

где α, β, C_1, C_2 – постоянные интегрирования, определяемые по начальным условиям движения точки.

На рис. 2.16 приведены графики зависимостей: $y^* = f_1(t)$; $y^{**} = f_2(t)$; $y = f_3(t)$ для случая, когда $n < k$; $p > k$, и начальных условий $y_0 > 0$, $\dot{y}_0 > 0$.

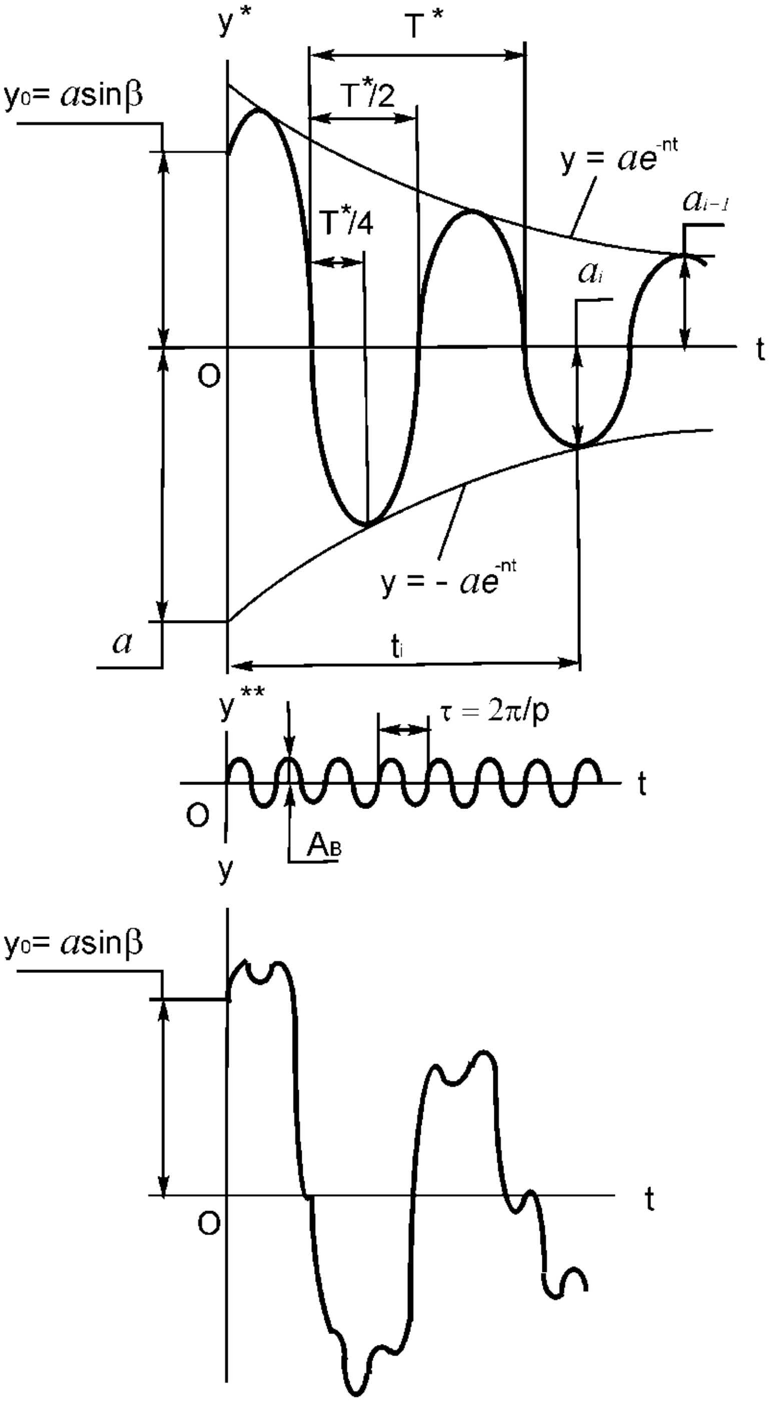


Рис. 2.16

На рис. 2.17 приведены графики зависимостей $y^* = f_1(t)$, $y^{**} = f_2(t)$, $y = f_3(t)$ для случая, когда $n = k$; $p > k$, и начальных условий $y_0 > 0$; $\dot{y}_0 > 0$.

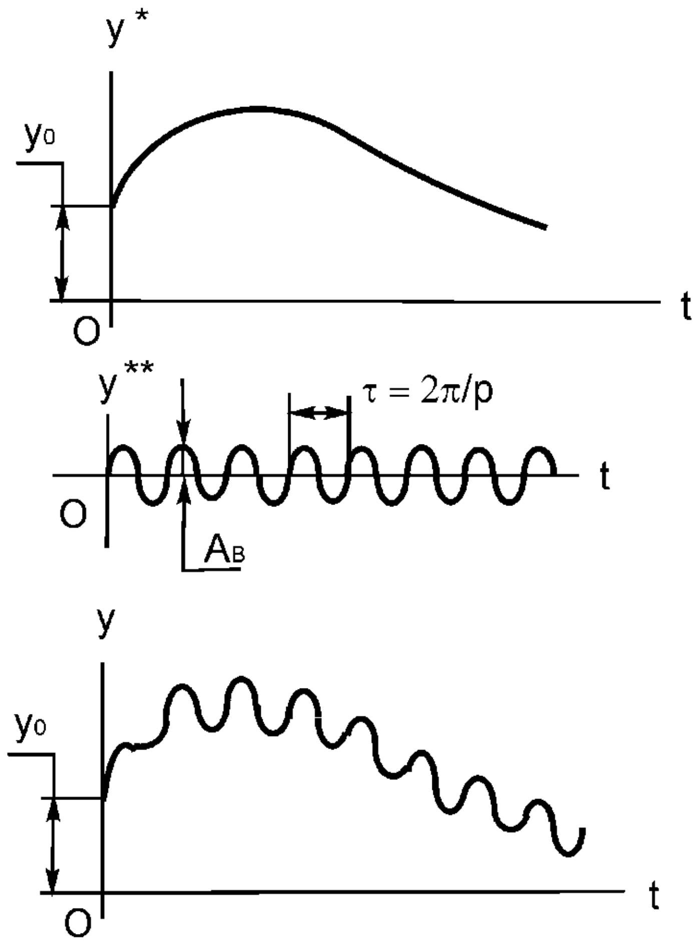


Рис. 2.17

Таким образом, графики зависимостей $y = f_3(t)$ на рис. 2.16, 2.17 при $p > k$ представляют собой наложение высокочастотных вынужденных колебаний $y^{**} = f_2(t)$ соответственно на затухающие колебания (см. рис. 2.16) или апериодическое движение (см. рис. 2.17).

2.8. Алгоритм решения задач на колебания материальной точки

Алгоритм решения задач динамики несвободной материальной точки при ее колебательном движении содержит следующие действия.

1. В механической системе выделяют материальную точку, движение которой рассматривают.

2. Выбирают инерциальную систему отсчета, начало которой помещают в положение статического равновесия материальной точки.

3. В выбранной системе отсчета точку изображают в произвольный момент времени таким образом, чтобы она имела положительную координату и двигалась в сторону ее увеличения ускоренно.

4. По исходным данным задачи определяют и изображают на рисунке начальные условия движения: y_0; $\dot{y}_0$.

5. К точке прикладывают активные (задаваемые) силы $\mathbf{F}_i$.

6. Согласно аксиоме связей эти связи отбрасывают и действие их заменяют соответствующими реакциями $\mathbf{R}_i$.

ПРИМЕЧАНИЕ.

Если точка движется не по горизонтали, то рассматривают равновесие материальной точки. Из условия равновесия ($\Sigma\mathbf{F}_i + \Sigma\mathbf{R}_i = 0$) определяют деформацию пружины при действии на нее постоянной системы активных сил $\mathbf{F}_i$.

7. Записывают дифференциальные уравнения движения точки, приводят их к стандартному виду и записывают решения:

а) $\ddot{y} + k^2y = 0$; $y = A\sin(kt + \beta)$ – свободные колебания;

б) $\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2y = 0$;

если $n < k$, то $y = ae^{-nt}\sin(k^*t + \beta)$ – затухающие колебания;

если $n = k$, то $y = e^{-nt}(C_1t + C_2)$ – апериодическое движение;

если $n > k$, то $y = e^{-nt}(C_1e^{(\sqrt{n^2-k^2})t} + C_2e^{-(\sqrt{n^2-k^2})t})$ – апериодическое движение;

в) $\ddot{y} + k^2y = h\sin(pt + \delta)$;

если $p < k$, то $y = A\sin(kt + \beta) + (h/(k^2 - p^2))\sin(pt + \delta)$;

если $p > k$, то $y = A\sin(kt + \beta) + (h/(p^2 - k^2))\sin(pt + \delta - \pi)$ – вынужденные колебания соответственно малой и большой частоты под действием восстанавливающей и возмущающей сил;

г) $\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2y = h\sin(pt + \delta)$;

если $n < k$, то $y = ae^{-nt}\sin(k^*t + \beta) + A_c\sin(pt + \delta - \varepsilon)$;

если $n = k$, то $y = e^{-nt}(C_1t + C_2) + A_c\sin(pt + \delta - \varepsilon)$;

если $n > k$, то $y = e^{-nt}(C_1e^{(\sqrt{n^2-k^2})t} + C_2e^{-(\sqrt{n^2-k^2})t}) + A_c\sin(pt + \delta - \varepsilon)$.

8. По начальным условиям движения точки определяют постоянные интегрирования по формулам, приведенным в разделе 2 данного учебно-методического пособия.

9. Полученное решение $y = f(t)$ иллюстрируется соответствующими графиками.

2.9. Пример решения задачи на свободные колебания груза по гладкой наклонной поверхности

Условие задачи.

Найти уравнение движения груза D массой m по гладкой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α, с момента соприкосновения груза с системой пружин, предполагая, что при дальнейшем движении груз от пружины не отделяется (рис. 2.18).

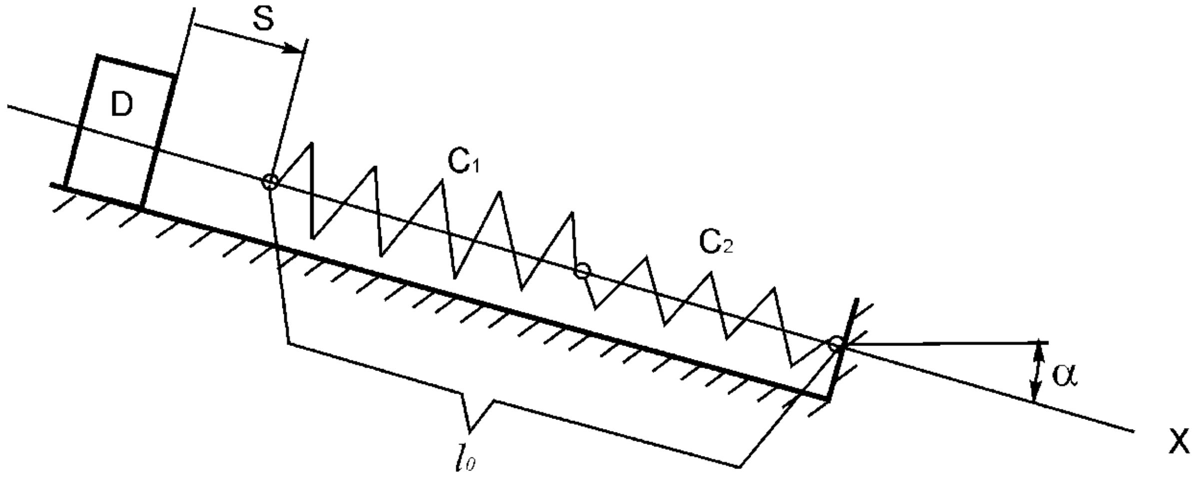


Рис. 2.18

Пройдя без начальной скорости по наклонной плоскости ($\alpha = 30^o$) расстояние s = 0,1 м, груз D (m = 4 кг) ударяется о недеформированные последовательно соединенные пружины, имеющие коэффициенты жесткости c_1 = 48 Н/см и c_2 = 24 Н/см.

Движение груза отнести к оси OX, наклоненной к горизонтальной поверхности под углом α, приняв за начало отсчета положение покоя груза (при статической деформации пружин).

Решение.

Так как груз будет совершать поступательное движение, то этот груз можно рассматривать как материальную точку, совершающую колебания в заданной системе отсчета OX, начало которой находится в положении статического равновесия груза (рис. 2.19).

На рис. 2.19 использованы следующие условные обозначения: l_0 – длина недеформированной пружины с эквивалентной жесткостью «с»; $f_{ст}$ – деформация пружины в положении статического равновесия материальной точки; **G** – сила тяжести; **N** – нормальная реакция гладкой поверхности; $\mathbf{F}_{упст}$ – сила упругости пружины в положении статического равновесия материальной точки; x_0 – начальная координата точки; $\mathbf{V}_0$ – начальная скорость точки; x = f(t) – текущее значение координаты точки; **V**, ***a*** – текущие значения скорости и ускорения точки; $\mathbf{F}_{уп}$ – текущее значение силы упругости эквивалентной пружины; Δ – текущее значение деформации эквивалентной пружины.

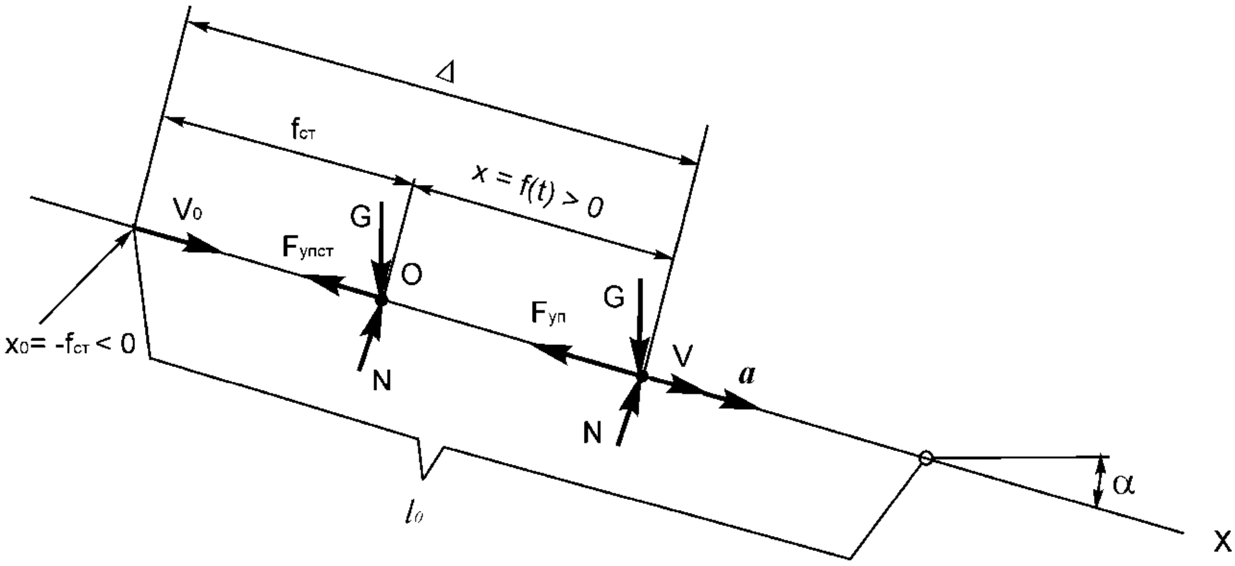


Рис. 2.19

Так как жесткость пружины имеет размерность [Н/м], то: c_1 = 48 Н/см = 4800 Н/м; c_2 = 24 Н/см = 2400 Н/м. Заменим последовательно соединенные пружины с жесткостями c_1, c_2 одной эквивалентной пружиной с жесткостью «с».

$$c = (c_1c_2)/(c_1 + c_2) = (4800\cdot2400)/(4800 + 2400) = 1600 \text{ Н/м}.$$

ПРИМЕЧАНИЕ.

При параллельном соединении пружин жесткость эквивалентной пружины определяют по формуле $c = c_1 + c_2$.

Для определения величины $f_{ст}$ рассмотрим равновесие материальной точки. Геометрическое условие равновесия точки имеет вид $\Sigma\mathbf{F}_i + \Sigma\mathbf{R}_i = \mathbf{G} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{упст} = 0$. Спроецируем это векторное равенство на ось OX.

$$\Sigma F_{iox} + \Sigma R_{iox} = 0 = G\sin\alpha - F_{упст} = mg\sin\alpha - cf_{ст} = 0.$$

Отсюда имеем

$$f_{ст} = mg\sin\alpha/c = (4\cdot9{,}81\cdot0{,}5)/1600 = 0{,}012 \text{ м}.$$

В момент соприкосновения груза с пружиной начальная координата $x_0 = -f_{ст} = -0{,}012$ м.

Для определения начальной скорости V_0 рассмотрим движение груза, приняв его за материальную точку, в системе отсчета O_1X_1 (рис. 2.20).

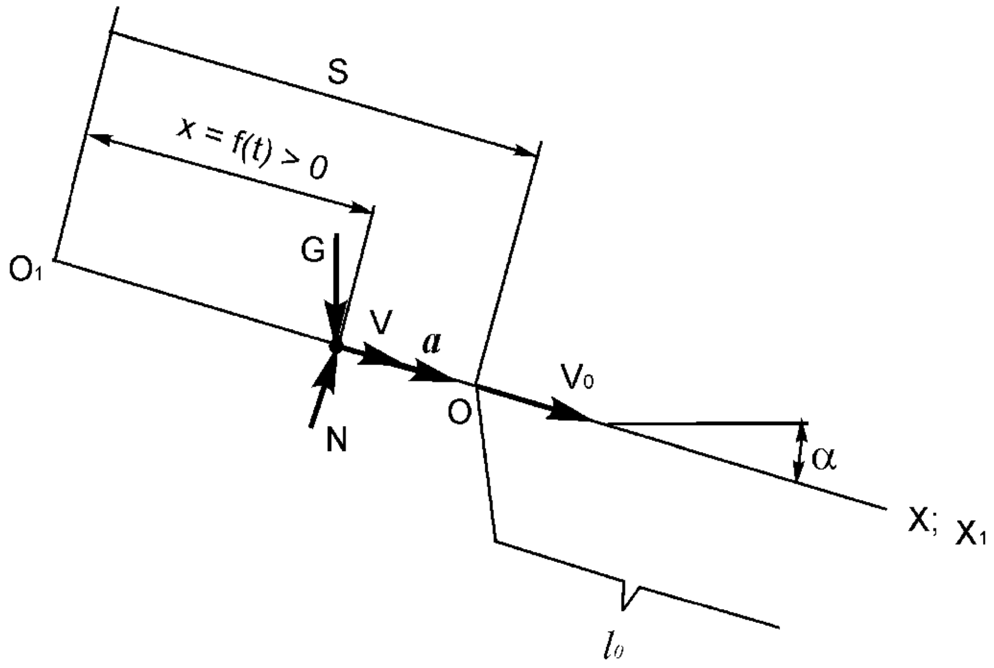


Рис. 2.20

Согласно задаче начальные условия движения груза имеют вид: $x_{10} = 0$; $\dot{x}_{10} = 0$.

Запишем дифференциальные уравнения движения груза и дважды проинтегрируем его:

$$m\ddot{x}_1 = G\sin\alpha = mg\sin\alpha;$$

$$\dot{x}_1 = g\sin\alpha \cdot t + C_1;$$

$$x_1 = g\sin\alpha \cdot (t^2/2) + C_1 t + C_2.$$

Определим постоянные интегрирования. Поскольку $x_{10} = 0$ и $\dot{x}_{10} = 0$, то имеем $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$. Тогда: $\dot{x}_1 = g\sin\alpha \cdot t$; $x_1 = g\sin\alpha \cdot (t^2/2)$.

За время t_s груз проходит расстояние s и соприкасается с пружиной. Исходя из этого, получим

$$V_0 = g\sin\alpha \cdot t_s \,; \; s = g\sin\alpha \cdot ((t_s)^2/2).$$

Решая эти уравнения, получим

$$t_s = \sqrt{2s/(g\sin\alpha)} = \sqrt{2 \bullet 0{,}1/(9{,}81 \bullet 0{,}5)} = 0{,}201 \text{ с}.$$

$$V_0 = 9{,}81 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}201 = 0{,}990 \text{ м/с}.$$

Таким образом, начальные условия движения точки при ее контакте с пружиной определены: $x_0 = -0{,}012$ м; $\dot{x}_0 = 0{,}990$ м/с.

Рассмотрим движение материальной точки в системе отсчета OX в произвольный момент времени (см. рис. 2.19). На точку действуют следующие силы: **G**, **N**, $\mathbf{F}_{уп}$. Необходимо отметить, что модуль силы $F_{уп} = c \cdot \Delta$ является переменной величиной, так как деформация Δ пружины зависит от координаты точки $x = f(t)$, которая является функцией от времени.

$$F_{уп} = c\cdot\Delta = c(f_{ст} + x).$$

Основное уравнение динамики для точки имеет вид

$$m\boldsymbol{a} = \Sigma\mathbf{F}_i + \Sigma\mathbf{R}_i = \mathbf{G} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{уп}.$$

Запишем дифференциальное уравнение движения точки:

$$m\ddot{x} = G\sin\alpha - F_{уп} = mg\sin\alpha - c(f_{ст} + x) = mg\sin\alpha - cf_{ст} - cx.$$

Из условия равновесия точки было получено равенство

$$mg\sin\alpha - cf_{ст} = 0.$$

Используя это равенство, получим

$$m\ddot{x} + cx = 0 \text{ или } \ddot{x} + (c/m)x = 0.$$

Последнее выражение приведем к стандартному виду:

$$\ddot{x} + k^2x = 0,$$

где $k = \sqrt{c/m}$ – циклическая частота свободных колебаний.

$$k = \sqrt{c/m} = \sqrt{1600/4} = 20 \text{ с}^{-1}.$$

Таким образом, материальная точка совершает свободные колебания около положения своего статического равновесия. Уравнение этого движения имеет вид

$$x = A\sin(kt + \beta),$$

где A – амплитуда свободных колебаний; β – начальная фаза.

$$A = \sqrt{(x_0)^2 + (\dot{x}_0/k)^2} = \sqrt{(\ 0{,}012)^2 + (0{,}990/20)^2} = 0{,}050 \text{ м};$$

$$\sin\beta = x_0/A = -0{,}012/0{,}050 = -0{,}239;$$

$$\cos\beta = \dot{x}_0/Ak = 0{,}990/(0{,}050\cdot 20) = 0{,}972.$$

Поскольку $\sin\beta < 0$, а $\cos\beta > 0$, то величину угла β можно определить по формуле

$$\beta = \pi - \alpha,$$

где $\alpha = \arcsin(0{,}239) = 0{,}237$ рад или $\alpha = \arccos(0{,}972) = 0{,}237$ рад.

При этом значении величины угла α начальная фаза β имеет значение

$$\beta = 3{,}14 - 0{,}237 = 2{,}903 \text{ рад}.$$

Уравнение колебательного движения груза имеет вид

$$x = 0{,}05\sin(20t + 2{,}903).$$

График движения этого груза приведен на рис. 2.21.

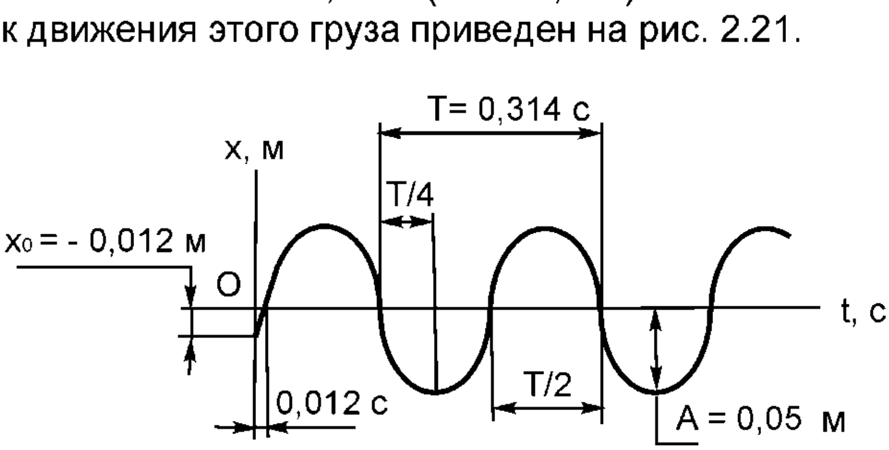


Рис. 2.21

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Записать формулу для определения модуля ***силы упругости*** пружины.
2. Записать ***дифференциальное уравнение свободных колебаний*** точки.
3. Записать ***уравнения свободных колебаний*** точки.
4. Сформулировать определение понятия «***амплитуда свободных колебаний точки»***.
5. Сформулировать определение понятия «***период свободных колебаний точки»***.
6. Сформулировать определение понятия «***циклическая частота свободных колебаний точки»***.
7. Записать ***дифференциальное уравнение затухающих колебаний точки***.
8. Записать ***уравнения затухающих колебаний точки***.
9. Сформулировать определение понятия «***период затухающих колебаний точки»***.
10. Сформулировать определение понятия «***амплитуда затухающих колебаний точки»***.
11. Какие колебания называют ***колебаниями с малым сопротивлением внешней среды***?
12. Записать ***уравнения апериодического движения точки***.
13. Под действием каких сил происходят ***вынужденные колебания*** материальной точки?
14. Записать формулу для определения ***периода возмущающей силы.***
15. Записать ***дифференциальное уравнение движения точки*** под действием восстанавливающей и возмущающей сил.
16. Записать ***уравнение вынужденных колебаний малой частоты***.
17. Записать уравнение ***вынужденных колебаний большой частоты***.
18. Записать условие, при котором происходит ***явление резонанса***.
19. Записать дифференциальное уравнение движения точки, происходящее под действием восстанавливающей силы, возмущающей силы, изменяющейся по периодическому закону, и силы сопротивления движению, пропорциональной первой степени скорости.

3. ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

3.1. Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки. Переносная и кориолисова силы инерции

Два первых закона классической механики и полученные на их основе уравнения справедливы при движении точки в инерциальной системе отсчета (ИСО). Существует ряд технических задач, в которых рассматривают движение материальной точки в подвижной системе отсчета (ПСО), которая в общем случае не является инерциальной.

Инерциальная система отсчета *– система отсчета, по отношению к которой изолированная материальная точка находится в покое или движется равномерно и прямолинейно.*

Система отсчета, не обладающая этим свойством, называется ***неинерциальной системой отсчета***

Рассмотрим движение материальной точки под действием активных сил $\mathbf{F}_i$ и реакций $\mathbf{R}_i$ относительно неинерциальной системы отсчета (рис. 3.1).

Напомним некоторые понятия кинематики, используемые в данном разделе динамики точки.

Движение точки по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$ называется ***абсолютным*** и характеризуется ***абсолютной скоростью*** $\mathbf{V}$ и ***абсолютным ускорением*** $\boldsymbol{a}$. Положение точки на траектории абсолютного движения определяется тремя зависящими от времени координатами, которые называются ***уравнениями абсолютного движения***:

$$x_1 = f_1(t); \quad y_1 = f_2(t); \quad z_1 = f_3(t).$$

Неподвижная система отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$ является инерциальной. В этой системе отсчета основное уравнение динамики имеет вид

$$m\boldsymbol{a} = \Sigma\mathbf{F}_i + \Sigma\mathbf{R}_i,$$

где $\mathbf{F}_i$ – активная сила; $\mathbf{R}_i$ – реакция внешней связи.

Движение точки по отношению к подвижной системе отсчета OXYZ называется ***относительным*** и характеризуется ***относительной скоростью*** $\boldsymbol{V}_r$ и ***относительным ускорением*** $\boldsymbol{a}_r$. Положение точки на траектории относительного движения определяется тремя зависящими от времени координатами, которые называются ***уравнениями относительного движения***:

$$x = f_4(t); \quad y = f_5(t); \quad z = f_6(t).$$

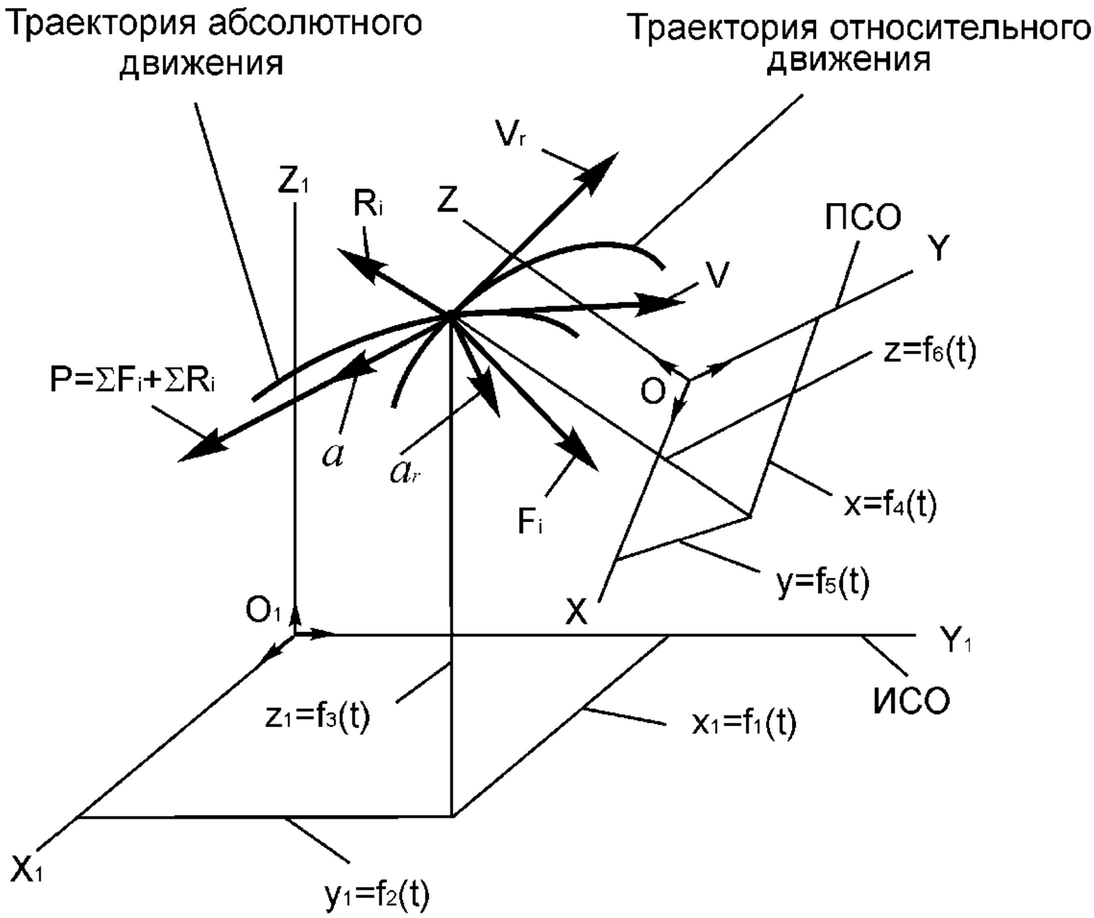


Рис. 3.1

Подвижная система отсчета OXYZ не является инерциальной. Применение в чистом виде первого и второго законов классической механики в ИСО неправомерно.

Рассмотрим переносное движение точки (рис. 3.2) и напомним суть некоторых понятий кинематики, используемых в этом разделе динамики.

Если координаты точки в ПСО постоянны ($x = C_1 = \text{const}$; $y = C_2 = \text{const}$; $z = C_3 = \text{const}$), то движение этой точки вместе с ПСО по отношению к неподвижной системе отсчета называют ***переносным*** движением. Это движение характеризуется ***переносной скоростью*** V_e и ***переносным ускорением*** a_e. Положение точки на траектории переносного движения определяется тремя зависящими от времени координатами, которые называют ***уравнениями переносного движения***:

$$x_1^1 = f_7(t); \quad y_1^1 = f_8(t); \quad z_1^1 = f_9(t).$$

Из курса кинематики известно, что абсолютное ускорение $\boldsymbol{a}$ точки определяют по формуле

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_c,$$

где $\boldsymbol{a}_r$ – ***относительное ускорение***; $\boldsymbol{a}_e$ – ***переносное ускорение***; $\boldsymbol{a}_c$ – ***ускорение Кориолиса***.

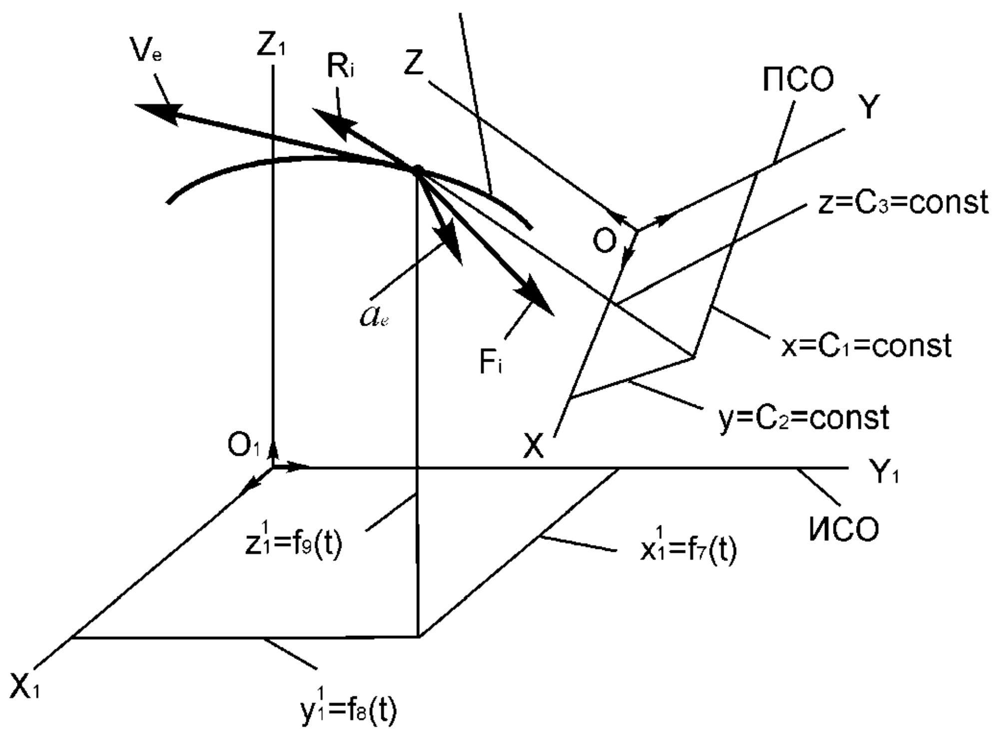


Рис. 3.2

Ускорение Кориолиса определяют по формуле

$$\boldsymbol{a}_c = 2(\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{V}_r),$$

где $\boldsymbol{\omega}_e$ – ***вектор угловой скорости переносного вращения***.

Модуль кориолисова ускорения находят по формуле

$$a_c = 2\omega_e \cdot V_r \cdot \sin(\boldsymbol{\omega}_e, \mathbf{V}_r).$$

Кориолисово ускорение равно нулю в трех случаях:

1) если $\omega_e = 0$, т. е. в случае поступательного переносного движения или в момент обращения в нуль угловой скорости непоступательного переносного движения;
2) если $V_r = 0$, т. е. в случае относительного покоя точки или в момент равенства нулю относительной скорости движущейся точки;
3) если $\sin(\boldsymbol{\omega}_e, \mathbf{V}_r) = 0$, т. е. в случае, когда вектор относительной скорости $\mathbf{V}_r$ и вектор переносной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_e$ параллельны.

Направление кориолисова ускорения определяется по правилу векторного произведения. Согласно этому правилу вектор $\boldsymbol{a}_c$ одновременно перпендикулярен векторам $\boldsymbol{\omega}_e$ и $\mathbf{V}_r$. При этом a_c направлено в сторону, откуда поворот вектора $\boldsymbol{\omega}_e$ к вектору $\mathbf{V}_r$ для совмещения их направлений виден происходящим против хода часовой стрелки. Поворот осуществляется на угол меньше 180°.

Для определения направления ускорения Кориолиса используют также **правило Жуковского**: *для определения направления ускорения Кориолиса необходимо относительную скорость* $\mathbf{V}_r$ *точки спроецировать на плоскость, перпендикулярную оси вращения, и повернуть эту проекцию в той же плоскости на угол 90° в сторону переносного вращения.*

Если подставим абсолютное ускорение $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_c$ в основное уравнение динамики точки $m\boldsymbol{a} = \Sigma\mathbf{F}_i + \Sigma\mathbf{R}_i$, то получим

$$m(\boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_c) = \Sigma\mathbf{F}_i + \Sigma\mathbf{R}_i.$$

Разрешим это уравнение относительно $m\boldsymbol{a}_r$:

$$m\boldsymbol{a}_r = \Sigma\mathbf{F}_i + \Sigma\mathbf{R}_i - m\boldsymbol{a}_e - m\boldsymbol{a}_c.$$

Введем два вектора: $\boldsymbol{\Phi}_e = -m\boldsymbol{a}_e$; $\boldsymbol{\Phi}_c = -m\boldsymbol{a}_c$. Эти векторы назовем ***переносной*** и ***кориолисовой силами инерции***.

При исследовании движения механических систем в теоретической механике используют следующие понятия.

Сила инерции *– величина, равная произведению массы материальной точки на ее ускорение и направленная противоположно этому ускорению.*

Переносная сила инерции *при рассмотрении движения материальной точки в неинерциальной системе отсчета – величина, равная произведению массы точки на ее переносное ускорение и направленная противоположно этому ускорению.*

Кориолисова сила инерции *при рассмотрении движения точки в неинерциальной системе отсчета – величина, равная произведению массы точки на ее кориолисово ускорение и направленная противоположно этому ускорению.*

Используя понятия переносной и кориолисовой сил инерции, получим

$$m\boldsymbol{a}_r = \Sigma\mathbf{F}_i + \Sigma\mathbf{R}_i + \boldsymbol{\Phi}_e + \boldsymbol{\Phi}_c.$$

Последнее выражение называют дифференциальным уравнением относительного движения точки в векторной форме или ***основным уравнением динамики относительного движения***.

Произведение массы m точки на ее относительное ускорение $\boldsymbol{a}_r$ равно геометрической сумме активных сил $\boldsymbol{F}_i$, реакций внешних связей $\boldsymbol{R}_i$, переносной силы инерции $\boldsymbol{\Phi}_e$ и кориолисовой силы инерции $\boldsymbol{\Phi}_c$.

Проецируя последнее векторное равенство на координатные оси ПСО, получим ***дифференциальные уравнения относительного движения точки***:

$$m\ddot{x} = \Sigma F_{iox} + \Sigma R_{iox} + \Phi_{eox} + \Phi_{cox};$$
$$m\ddot{y} = \Sigma F_{ioy} + \Sigma R_{ioy} + \Phi_{eoy} + \Phi_{coy};$$
$$m\ddot{z} = \Sigma F_{ioz} + \Sigma R_{ioz} + \Phi_{eoz} + \Phi_{coz}.$$

Произведение массы точки на проекцию ее относительного ускорения на координатную ось ПСО равно сумме проекций активных сил, реакций внешних связей и переносной и кориолисовой сил инерции на ту же ось.

Силы инерции $\boldsymbol{\Phi}_e$, $\boldsymbol{\Phi}_c$ направлены противоположно ускорениям a_e, a_c (рис. 3.3).

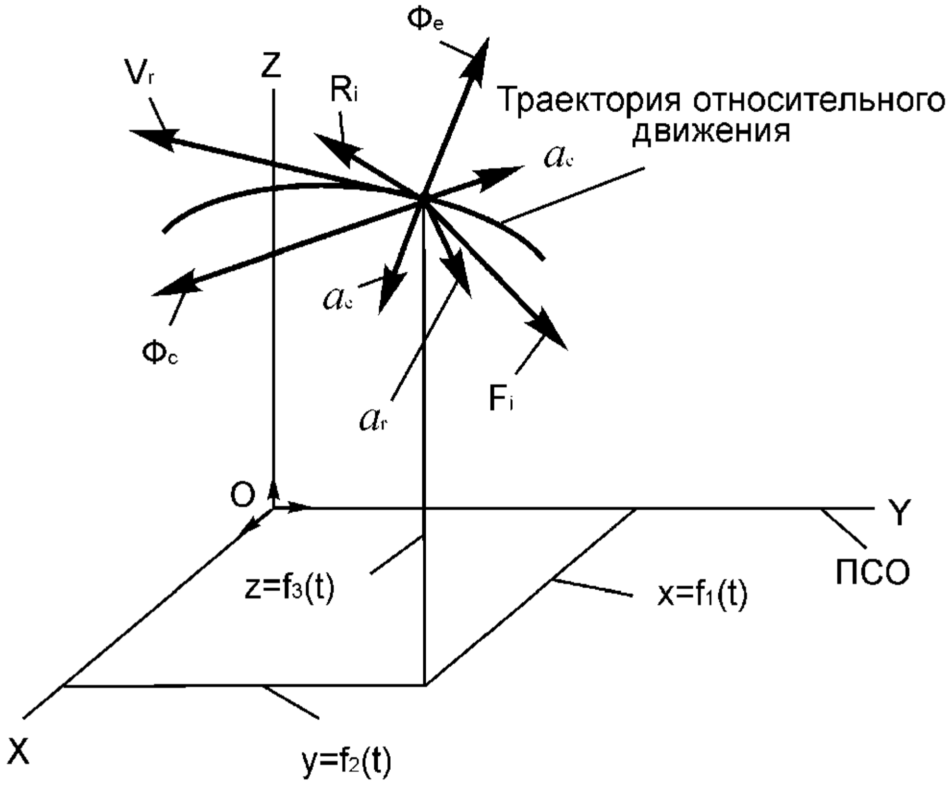


Рис. 3.3

Дифференциальные уравнения относительного движения точки ($m\ddot{x} = \Sigma F_{iox} + \Sigma R_{iox} + \Phi_{eox} + \Phi_{cox}$; $m\ddot{y} = \Sigma F_{ioy} + \Sigma R_{ioy} + \Phi_{eoy} + \Phi_{coy}$; $m\ddot{z} = \Sigma F_{ioz} + \Sigma R_{ioz} + \Phi_{eoz} + \Phi_{coz}$) отличаются от дифференциальных уравнений движения точки в инерциальной системе отсчета ($m\ddot{x} = \Sigma F_{iox} + \Sigma R_{iox}$; $m\ddot{y} = \Sigma F_{ioy} + \Sigma R_{ioy}$; $m\ddot{z} = \Sigma F_{ioz} + \Sigma R_{ioz}$) наличием в правой части этих уравнений проекций на соответствующие координатные оси переносной и кориолисовой сил инерции.

3.2. Частные случаи относительного движения материальной точки

Случай 1.

Переносное движение – неравномерное вращение тела вокруг неподвижной оси, относительное движение – прямолинейное (рис. 3.4).

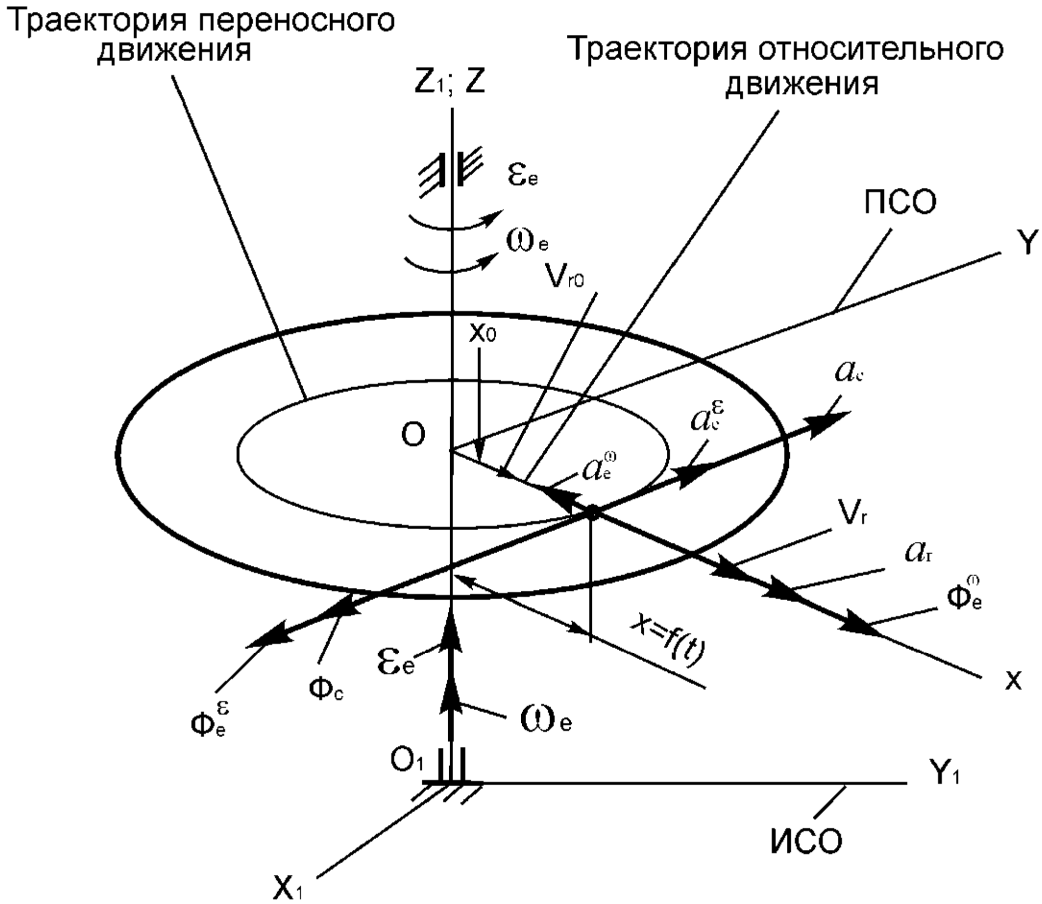


Рис. 3.4

В этом случае переносное ускорение a_e равно геометрической сумме центростремительного и вращательного ускорений:

$$a_e = a_e^{\omega} + a_e^{\varepsilon},$$

где a_e^{ω}, a_e^{ε} – соответственно ***центростремительное*** и ***вращательное переносные ускорения***.

В соответствии с этим имеем

$$\boldsymbol{\Phi}_e = -m\boldsymbol{a}_e = -m(\boldsymbol{a}_e^{\omega} + \boldsymbol{a}_e^{\varepsilon}) = -m\boldsymbol{a}_e^{\omega} - m\boldsymbol{a}_e^{\varepsilon} = \boldsymbol{\Phi}_e^{\omega} + \boldsymbol{\Phi}_e^{\varepsilon},$$

где $\boldsymbol{\Phi}_e^{\omega} = -m\boldsymbol{a}_e^{\omega}$ – ***центробежная переносная сила инерции***; $\boldsymbol{\Phi}_e^{\varepsilon} = -m\boldsymbol{a}_e^{\varepsilon}$ – ***вращательная переносная сила инерции***.

Для рассматриваемого случая модули переносных центробежной и вращательной сил инерции находят по формулам:

$$\Phi_e^{\omega} = m(\omega_e)^2 x; \quad \Phi_e^{\varepsilon} = m\varepsilon x.$$

Основное уравнение динамики и дифференциальные уравнения относительного движения точки в этом случае описываются следующими выражениями:

$$m\boldsymbol{a}_r = \Sigma\mathbf{F}_i + \Sigma\mathbf{R}_i + \boldsymbol{\Phi}_e^{\omega} + \boldsymbol{\Phi}_e^{\varepsilon} + \boldsymbol{\Phi}_c;$$

$$m\ddot{x} = \Sigma F_{iox} + \Sigma R_{iox} + \Phi_{eox}^{\omega} + \Phi_{eox}^{\varepsilon} + \Phi_{cox};$$

$$m\ddot{y} = \Sigma F_{ioy} + \Sigma R_{ioy} + \Phi_{eoy}^{\omega} + \Phi_{eoy}^{\varepsilon} + \Phi_{coy};$$

$$m\ddot{z} = \Sigma F_{ioz} + \Sigma R_{ioz} + \Phi_{eoz}^{\omega} + \Phi_{eoz}^{\varepsilon} + \Phi_{coz}.$$

Случай 2.

Переносное движение – равномерное вращение (ω_e = const) вокруг неподвижной оси, относительное движение – прямолинейное (рис. 3.5).

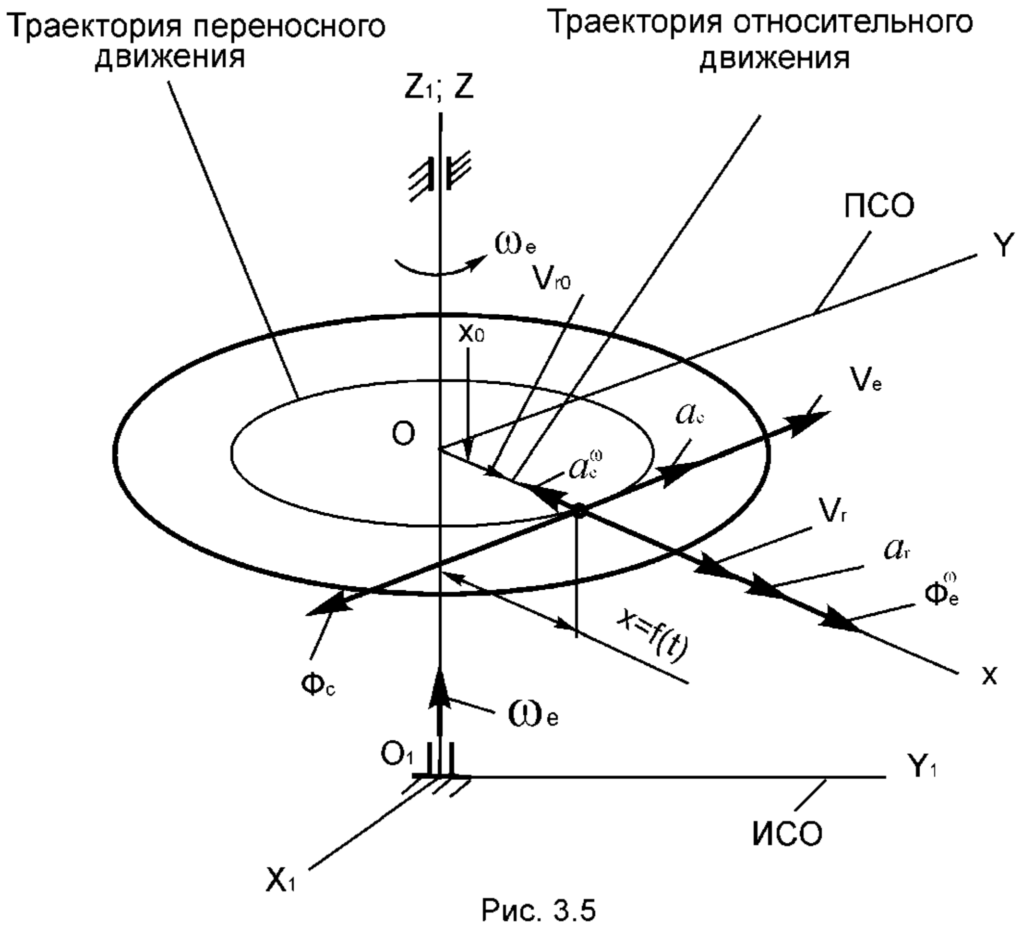


Рис. 3.5

В этом случае угловое ускорение переносного вращения $\varepsilon_e = 0$ и, следовательно, переносная вращательная сила инерции $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{e}}^{\varepsilon} = 0$. Тогда основное уравнение динамики и дифференциальные уравнения относительного движения точки описываются выражениями:

$$m\boldsymbol{a}_r = \Sigma \mathbf{F}_i + \Sigma \mathbf{R}_i + \mathbf{\Phi}_e^{\omega} + \mathbf{\Phi}_c;$$

$$m\ddot{x} = \Sigma F_{iox} + \Sigma R_{iox} + \Phi_{eox}^{\omega} + \Phi_{cox};$$

$$m\ddot{y} = \Sigma F_{ioy} + \Sigma R_{ioy} + \Phi_{eoy}^{\omega} + \Phi_{coy};$$

$$m\ddot{z} = \Sigma F_{ioz} + \Sigma R_{ioz} + \Phi_{eoz}^{\omega} + \Phi_{coz}.$$

Случай 3.

Переносное движение – поступательное неравномерное криволинейное движение, относительное движение – прямолинейное (рис. 3.6).

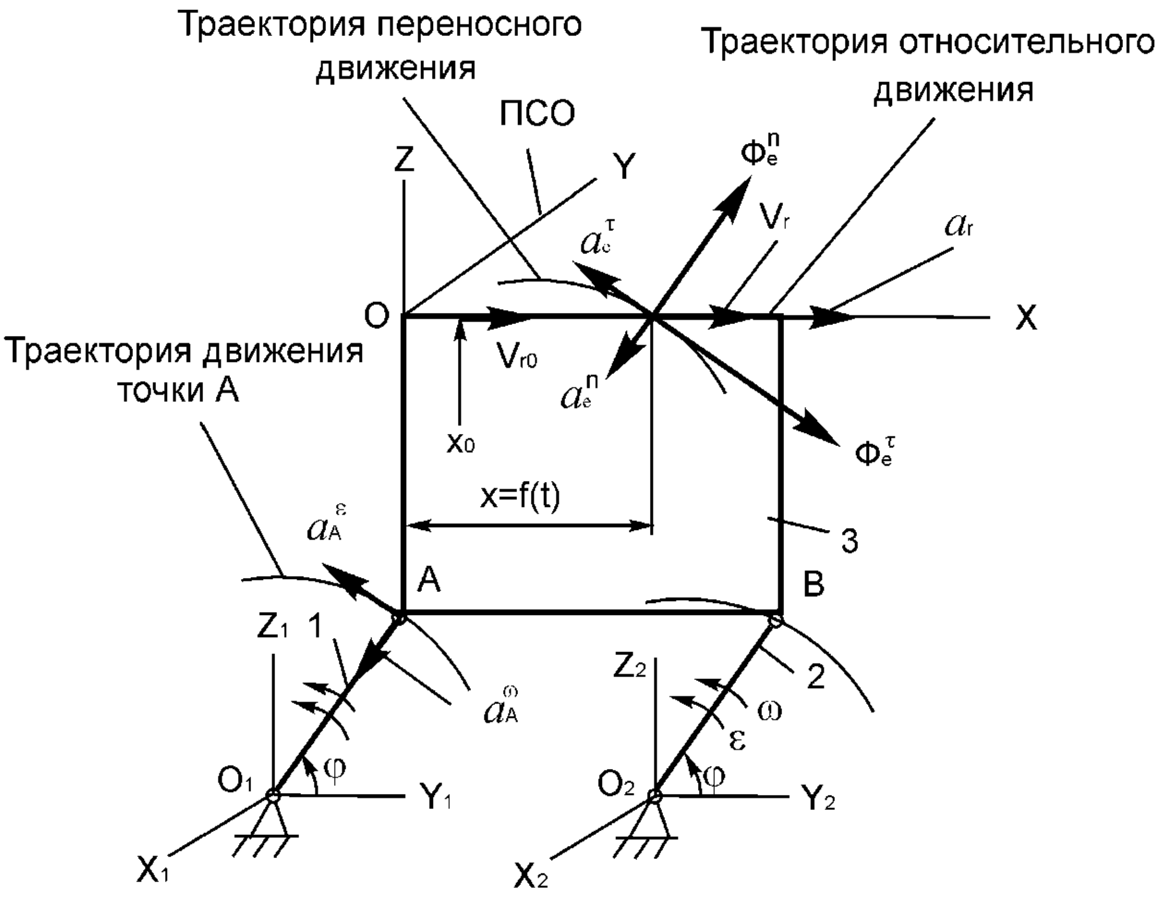


Рис. 3.6

Согласно рис. 3.6 механизм содержит кривошипы 1, 2 и прямоугольную пластину 3, по которой перемещается материальная точка по закону x = f(t). Кривошипы 1, 2 совершают вращательные движения, а пластина 3 – поступательное движение.

В рассматриваемом случае имеем $\omega_e = 0$ и $\mathbf{\Phi}_c = 0$, поэтому основное уравнение динамики относительного движения принимает вид

$$m\boldsymbol{a}_r = \Sigma\mathbf{F}_i + \Sigma\mathbf{R}_i + \mathbf{\Phi}_e,$$

где $\mathbf{\Phi}_e = - m\boldsymbol{a}_e$ – переносная сила инерции.

Так как переносное движение является поступательным, то его ускорение $\boldsymbol{a}_e$ равно ускорению точки A тела D. С другой стороны, точка A принадлежит кривошипу O_1A, совершающему вращательное неравномерное движение ($\omega_e \neq 0$; $\varepsilon_e \neq 0$). Тогда

$$\boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_A^{\omega} + \boldsymbol{a}_A^{\varepsilon} = \boldsymbol{a}_e^{n} + \boldsymbol{a}_e^{\tau},$$

где $\boldsymbol{a}_A^{\omega}$, $\boldsymbol{a}_A^{\varepsilon}$ – соответственно центростремительное и вращательное ускорения точки A кривошипа O_1A; $\boldsymbol{a}_e^{n}$, $\boldsymbol{a}_e^{\tau}$ – соответственно нормальное и касательное переносные ускорения.

Отсюда вытекает очевидные равенства:

$$a_e^{n} = a_A^{\omega} = \omega^2 \cdot r; \quad a_e^{\tau} = a_A^{\varepsilon} = \varepsilon \cdot r;$$

$$\mathbf{\Phi}_e^{n} = - m\boldsymbol{a}_e^{n}; \quad \mathbf{\Phi}_e^{\tau} = - m\boldsymbol{a}_e^{\tau},$$

где $\mathbf{\Phi}_c^{n}$, $\mathbf{\Phi}_e^{\tau}$ – переносные ***нормальная*** и ***касательная силы инерции***.

С учетом того, что $\mathbf{\Phi}_e = \mathbf{\Phi}_e^{n} + \mathbf{\Phi}_e^{\tau}$, имеем:

$$m\boldsymbol{a}_r = \Sigma\mathbf{F}_i + \Sigma\mathbf{R}_i + \mathbf{\Phi}_e^{n} + \mathbf{\Phi}_e^{\tau};$$

$$m\ddot{x} = \Sigma F_{iox} + \Sigma R_{iox} + \Phi_{eox}^{n} + \Phi_{eox}^{\tau};$$

$$m\ddot{y} = \Sigma F_{ioy} + \Sigma R_{ioy} + \Phi_{eoy}^{n} + \Phi_{eoy}^{\tau};$$

$$m\ddot{z} = \Sigma F_{ioz} + \Sigma R_{ioz} + \Phi_{eoz}^{n} + \Phi_{eoz}^{\tau}.$$

Случай 4.

Переносное движение – поступательное прямолинейное и равномерное. В этом случае имеем: $\omega_e = 0$; $a_e = 0$ и, следовательно, $\Phi_c = 0$, $\Phi_e = 0$. Тогда основное уравнение динамики относительного движения принимает вид

$$m\boldsymbol{a}_r = \Sigma\mathbf{F}_i + \Sigma\mathbf{R}_i.$$

Это уравнение не отличается от основного уравнения динамики материальной точки в инерциальной системе отсчета, которое имеет вид

$$m\boldsymbol{a} = \Sigma\mathbf{F}_i + \Sigma\mathbf{R}_i.$$

3.3. Принцип относительности классической механики. Инерциальные системы отсчета

Сопоставление основного уравнения динамики относительного движения точки ($m\boldsymbol{a}_r = \Sigma \mathbf{F}_i + \Sigma \mathbf{R}_i$) с основным уравнением динамики абсолютного движения ($m\boldsymbol{a} = \Sigma \mathbf{F}_i + \Sigma \mathbf{R}_i$) показывает, что при равномерном прямолинейном поступательном переносном движении относительное движение с динамической точки зрения не отличается от абсолютного движения.

Таким образом, относительное движение материальной точки по отношению к подвижной системе отсчета, движущейся поступательно, прямолинейно и равномерно, происходит так же, как и по отношению к неподвижной системе отсчета. Все такие подвижные системы являются инерциальными системами отсчета, и, следовательно, движение материальной точки относительно любой из этих систем можно рассматривать как абсолютное движение. Это положение называют ***принципом относительности классической механики***, которое формулируется следующим образом: ***никакие механические явления, происходящие в среде, не могут обнаружить ее прямолинейного и равномерного поступательного движения***.

3.4. Алгоритм решения задач на динамику относительного движения материальной точки

Задачи динамики относительного движения материальной точки рекомендуется решать по следующему алгоритму.

1. Разложить абсолютное движение материальной точки на относительное и переносное движения.
2. Выбрать неподвижную инерциальную систему отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$.
3. Выбрать подвижную неинерциальную систему отсчета OXYZ, связав ее с телом, по которому точка совершает относительное движение.
4. Показать на рисунке траекторию относительного движения.
5. Материальную точку изобразить на траектории относительного движения в произвольный момент времени, предположив, что точка имеет положительные координаты и движется в сторону увеличения этих координат ускоренно. Показать на рисунке относительную скорость $\mathbf{V}_r$ и относительное ускорение $\boldsymbol{a}_r$.
6. Определить начальные условия относительного движения точки (x_0, $\mathbf{V}_{r0}$) и показать их на рисунке.

7. Определить траекторию переносного движения и показать ее на рисунке.

8. Показать на рисунке переносную скорость $\mathbf{V}_e$ и переносное ускорение a_e в предположении, что точка имеет положительные координаты и движется в сторону увеличения этих координат ускоренно.

9. Записать основное уравнение динамики относительного движения точки в общем виде: $ma_r = \Sigma \mathbf{F}_i + \Sigma \mathbf{R}_i + \mathbf{\Phi}_e + \mathbf{\Phi}_c$.

10. Определить ускорение Кориолиса a_c и показать его на рисунке.

11. Определить кориолисову силу инерции $\mathbf{\Phi}_c$ и отобразить ее на рисунке.

12. Определить переносное ускорение a_e и переносную силу инерции $\mathbf{\Phi}_e$. Показать эти векторы на рисунке;

13. Приложить к материальной точке активные силы $\mathbf{F}_i$ и реакции внешних связей $\mathbf{R}_i$.

14. Составить дифференциальные уравнения движения относительного движения точки, спроецировав векторное равенство $ma_r = \Sigma \mathbf{F}_i + \Sigma \mathbf{R}_i + \mathbf{\Phi}_e + \mathbf{\Phi}_c$ на координатные оси подвижной системы отсчета.

15. Проинтегрировать составленные дифференциальные уравнения, определив постоянные интегрирования с помощью начальных условий движения.

16. Определить искомые величины.

ПРИМЕЧАНИЕ.

При относительном криволинейном движении материальной точки удобно пользоваться дифференциальными уравнениями движения в проекциях на оси натурального триэдра.

3.5. Варианты курсового задания Д 2 «Исследование относительного движения материальной точки»

Шарик M, рассматриваемый как материальная точка, перемещается по цилиндрическому каналу движущегося тела A (табл. 3.1).

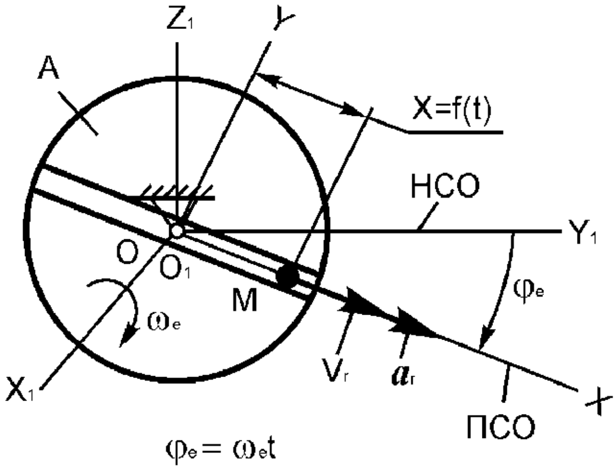
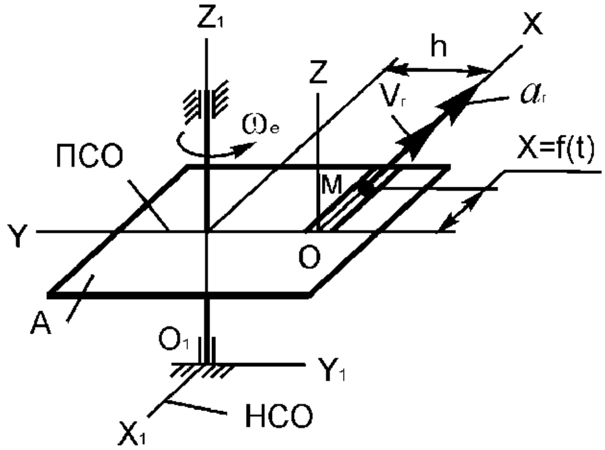
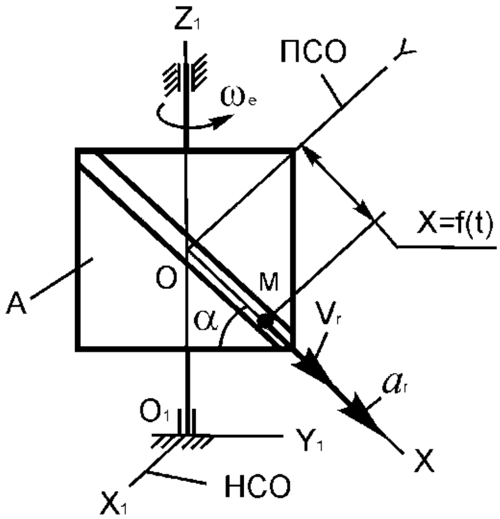
Тело A равномерно вращается вокруг неподвижной оси (в вариантах 2, 3, 4, 7, 10, 11, 14, 20, 23, 26 и 30 ось вращения O_1Z_1 вертикальна, в вариантах 1, 12, 15 и 25 ось вращения O_1X_1 горизонтальна). В вариантах 5, 6, 8, 9, 13, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 24, 27, 28 и 29 тело A движется поступательно, параллельно вертикальной плоскости $O_1Y_1Z_1$.

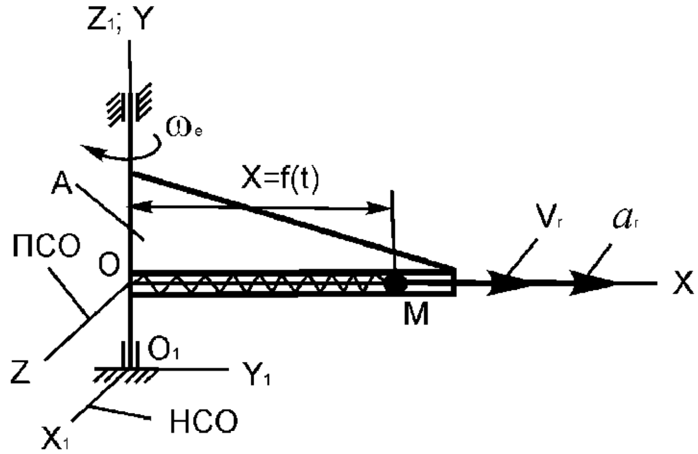
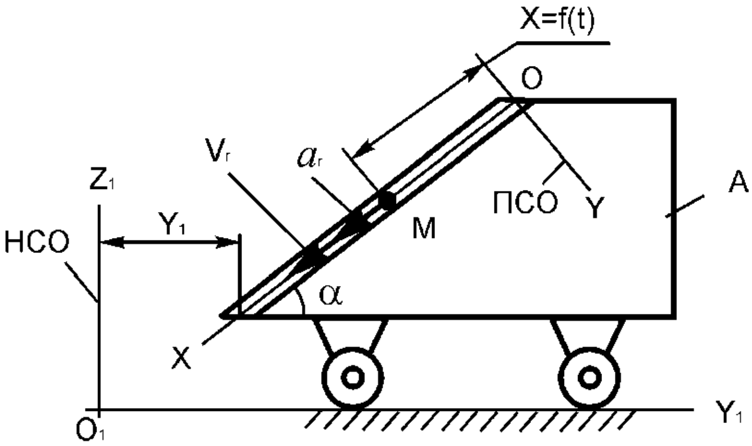
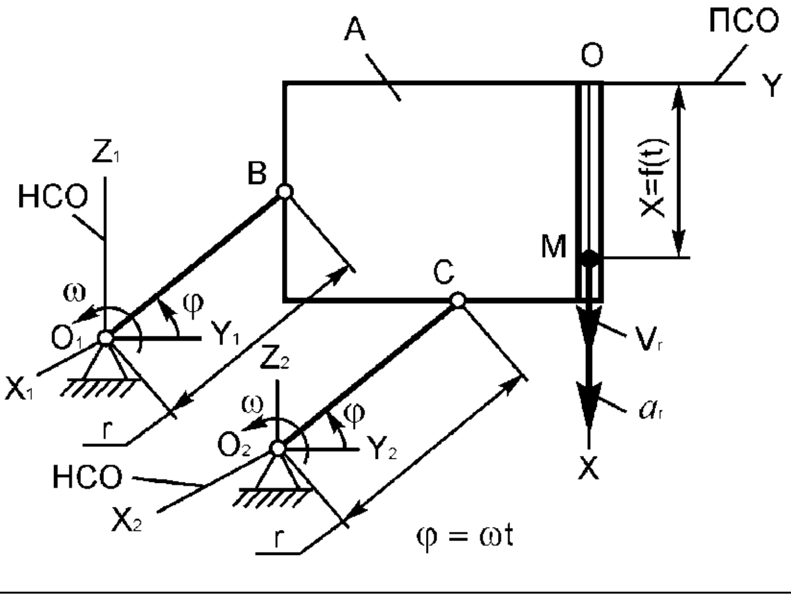
В задании приняты следующие обозначения: m – масса шарика M; ω_e – постоянная переносная угловая скорость тела A (в вариантах 1 – 4, 7, 10 – 12, 14, 15, 20, 23, 25, 26, 30); ω – постоянная угловая скорость кривошипов O_1B и O_2C (в вариантах 6, 17, 22); c – коэффициент жесткости пружины, к которой прикреплен шарик M; l_0 – длина недеформированной пружины; f – коэффициент трения скольжения шарика по стенке канала; x_0, $\dot{x}_0$ – начальная координата и проекция начальной скорости на ось OX.

Найти уравнение относительного движения этого шарика (x = f(t) = ?), приняв за начало отсчета точку O.

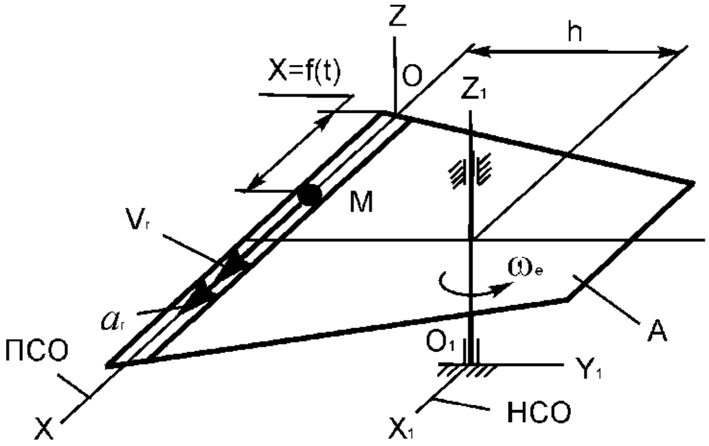
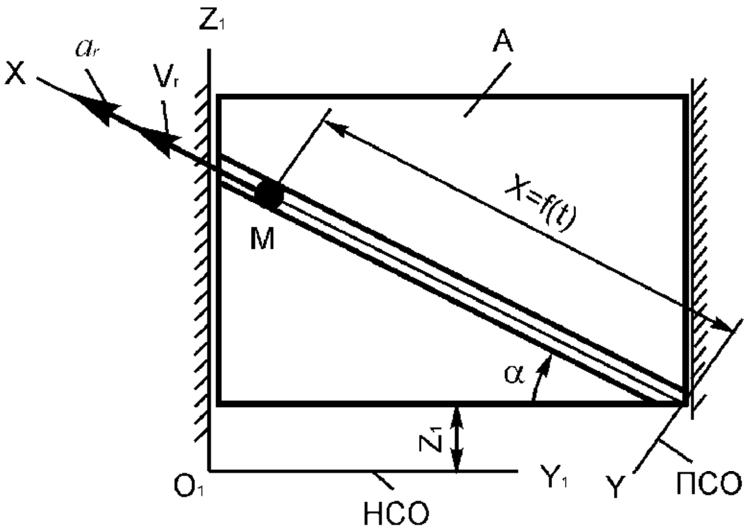
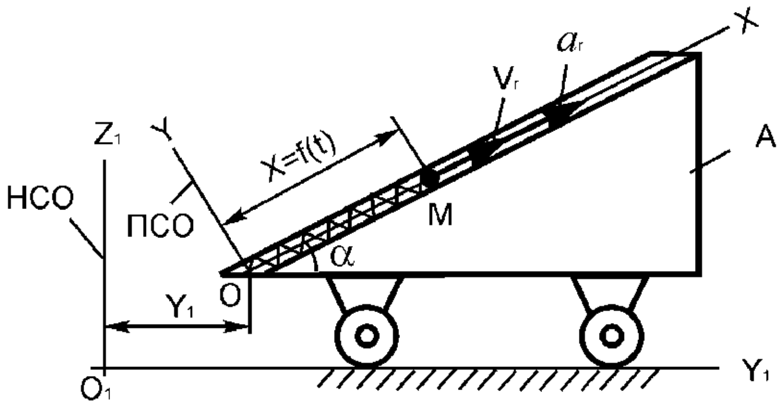
Найти также координату $x(t_1)$ и давление шарика на стенку канала $N(t_1)$ при заданном значении времени t_1. Расчетные схемы рассматриваемых механизмов и данные, необходимые для решения задания, приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

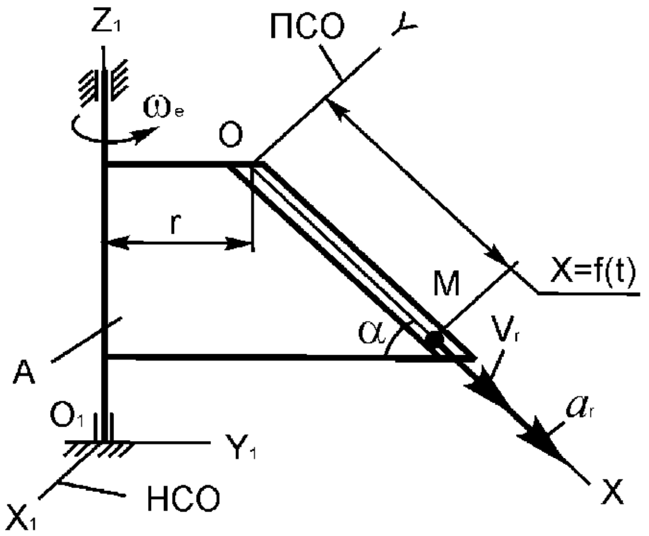
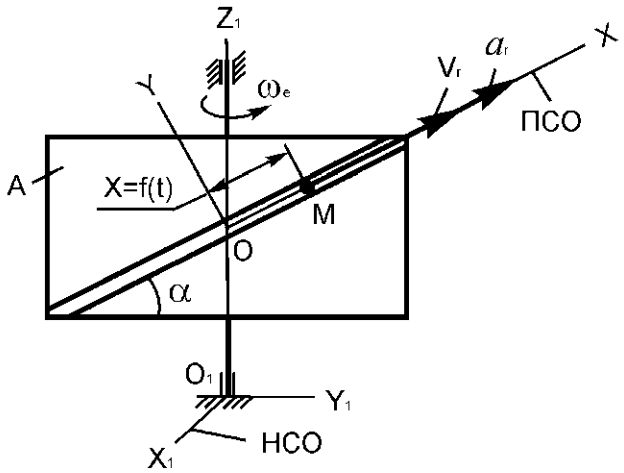
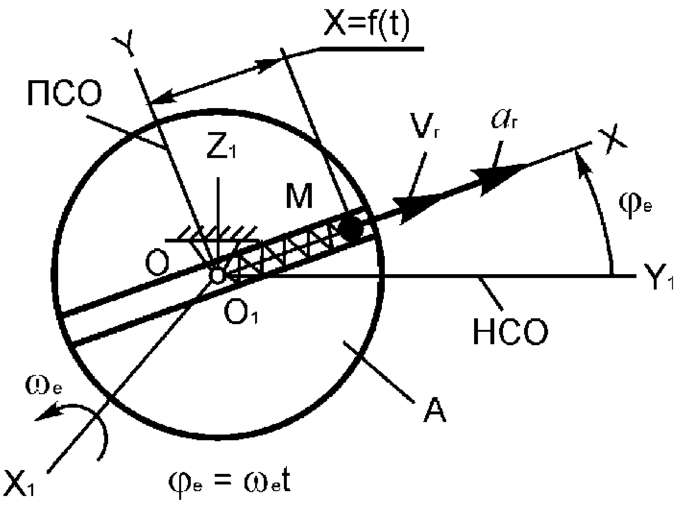
Номер варианта	Расчетная схема механизма	Исходные данные
1	2	3
1		$m = 0{,}02$ кг; $\omega_e = \pi$ рад/с; $x_0 = 0$ м; $\dot{x}_0 = 0{,}4$, м/с; $t_1 = 0{,}5$ с; $f = 0$
2		$m = 0{,}02$ кг; $\omega_e = \pi$ рад/с; $x_0 = 0$ м; $\dot{x}_0 = 0{,}2$ м/с; $t_1 = 0{,}4$ с; $r = 0{,}15$ м; $f = 0$
3		$\alpha = 45°$; $m = 0{,}03$ кг; $\omega_e = 2\pi$ рад/с; $x_0 = 0{,}5$ м; $\dot{x}_0 = 0$ м/с; $t_1 = 0{,}2$ с; $f = 0$

1	2	3
4		$m = 0{,}09$ кг; $\omega_e = 4\pi$ рад/с; $x_0 = 0{,}2$ м; $\dot{x}_0 = -0{,}4$ м/с; $t_1 = 0{,}1$ с; $c = 0{,}36$ Н/м; $l_0 = 0{,}15$ м; $f = 0$
5		$\alpha = 60^\circ$; $m = 0{,}02$ кг; $x_0 = 0{,}6$ м; $\dot{x}_0 = 0$ м/с; $t_1 = 0{,}2$ с; $y_1 = 0{,}6 - 2t^3$ м; $f = 0$
6		$m = 0{,}01$ кг; $\omega = 10\pi$ рад/с; $x_0 = 0{,}5$ м; $\dot{x}_0 = 0$ м/с; $t_1 = 0{,}2$ с; $r = 0{,}10$ м; $f = 0$

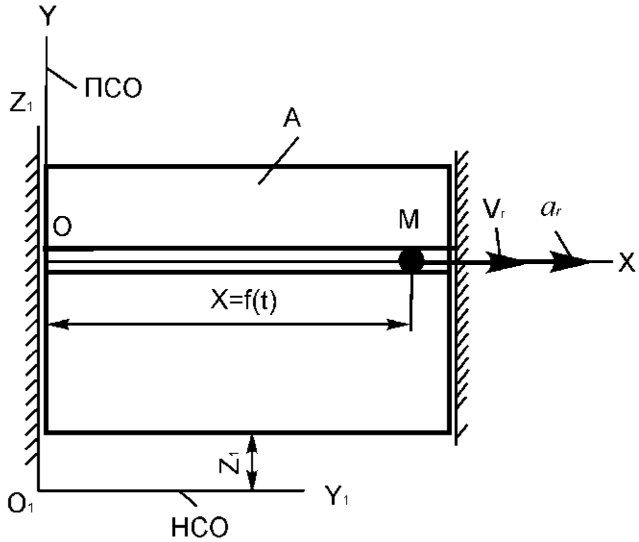
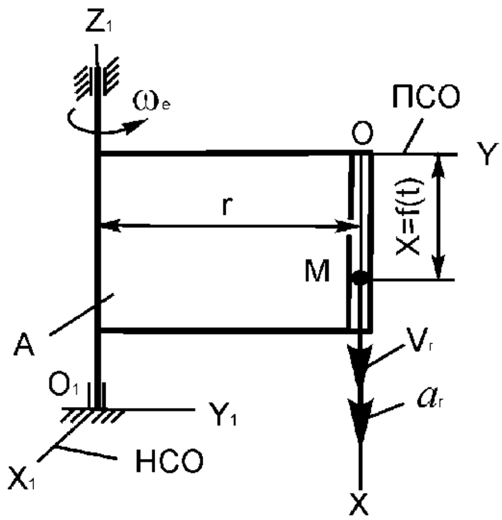
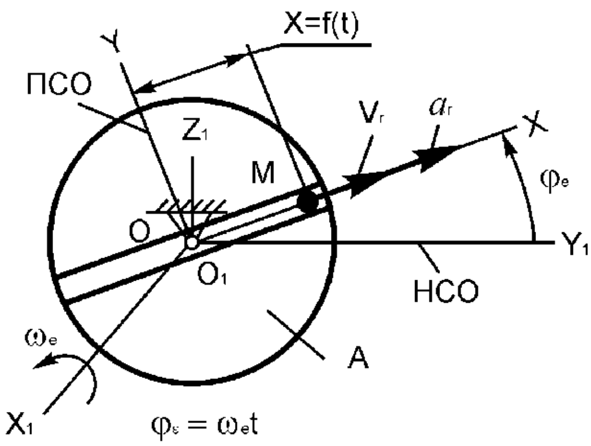
Продолжение табл. 3.1

1	2	3
7		$m = 0{,}03$ кг; $\omega_e = 2\pi$ рад/с; $x_0 = 0{,}3$ м; $\dot{x}_0 = 0$ м/с; $t_1 = 0{,}2$ с; $r = 0{,}20$ м; $f = 0$
8		$\alpha = 30^o$; $m = 0{,}03$ кг; $x_0 = 0{,}8$ м; $\dot{x}_0 = 0$ м/с; $t_1 = 0{,}1$ с; $z_1 = 0{,}1\cos 2\pi t$ м; $f = 0$
9		$\alpha = 30^o$; $m = 0{,}02$ кг; $x_0 = 0{,}4$ м; $\dot{x}_0 = 0$ м/с; $c = 0{,}20$ Н/м; $l_0 = 0{,}20$ м; $t_1 = 0{,}1$ с; $y_1 = 4t^3$ м; $f = 0$

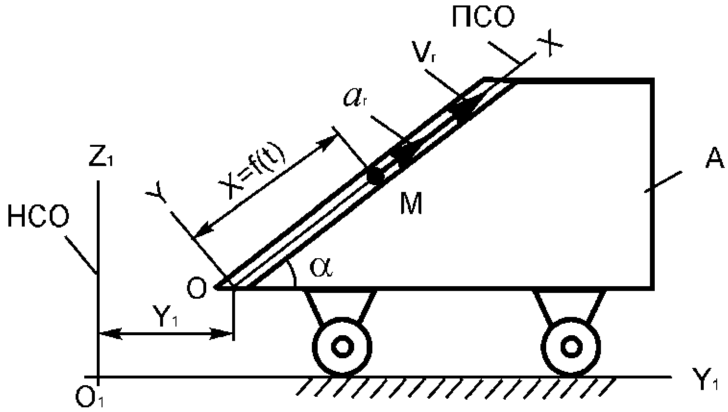
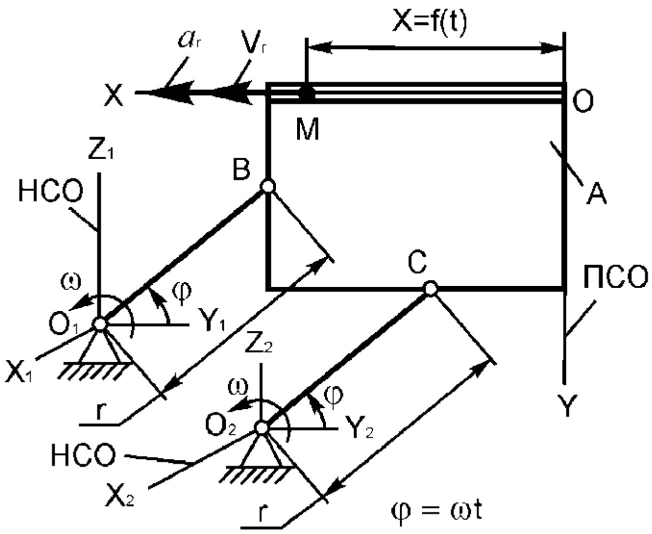
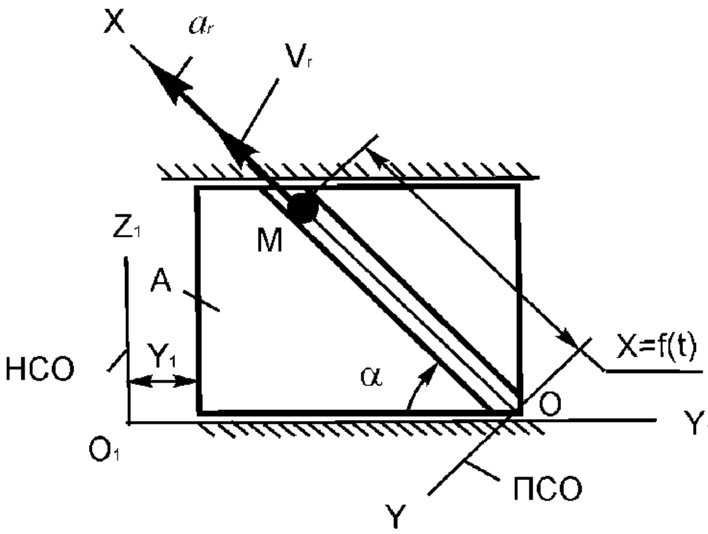
Продолжение табл. 3.1

1	2	3
10		$\alpha = 60^o$; $m = 0{,}05$ кг; $\omega_e = 6\pi$ рад/с; $x_0 = 0{,}4$ м; $\dot{x}_0 = 0$ м/с; $t_1 = 0{,}1$ с; $r = 0{,}20$ м; $f = 0$
11		$\alpha = 30^o$; $m = 0{,}05$ кг; $\omega_e = \pi$ рад/с; $x_0 = 0$ м; $\dot{x}_0 = 0$ м/с; $t_1 = 0{,}4$ с; $f = 0$
12		$m = 0{,}08$ кг; $\omega_e = 6\pi$ рад/с; $x_0 = 0{,}05$ м; $\dot{x}_0 = 0$ м/с; $t_1 = 0{,}1$ с; $c = 0{,}20$ Н/м; $l_0 = 0{,}10$ м; $f = 0$

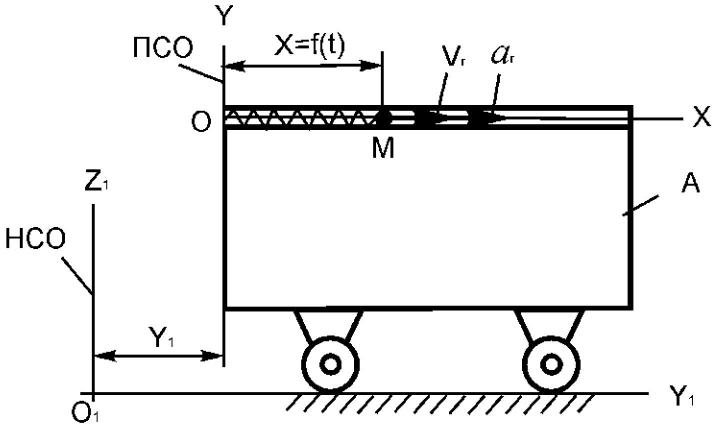
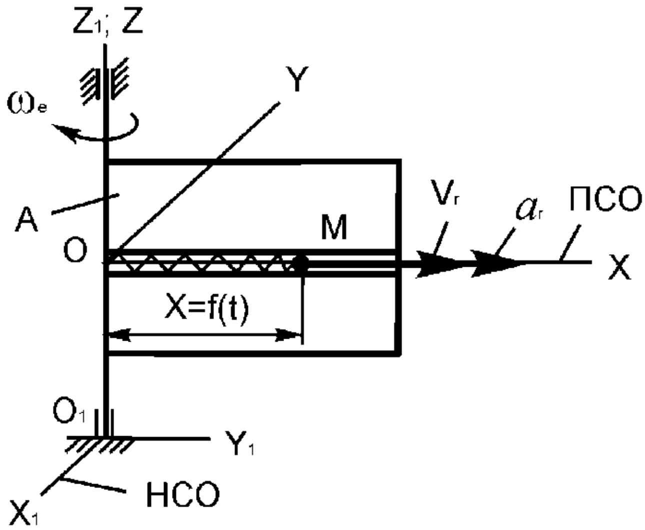
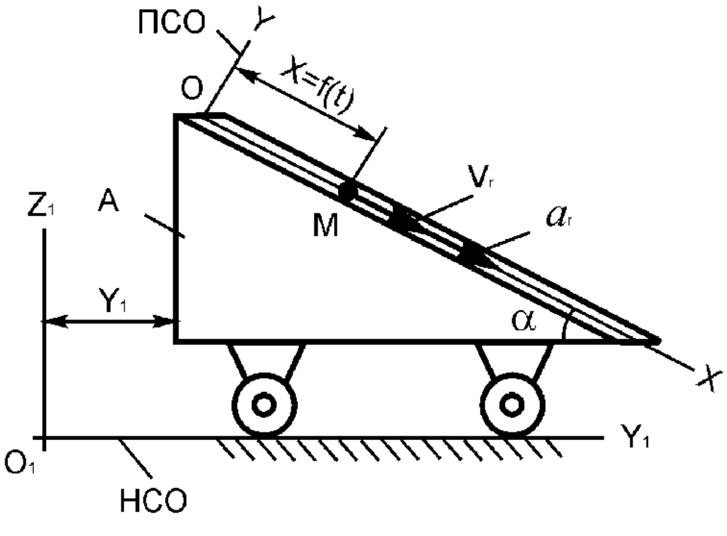
Продолжение табл. 3.1

1	2	3
13		$m = 0{,}01$ кг; $x_0 = 0$ м; $\dot{x}_0 = 0{,}5$ м/с; $t_1 = 0{,}2$ с; $z_1 = 5–10t^2$ м; $f = 0{,}1$
14		$m = 0{,}05$ кг; $\omega_e = 4\pi$ рад/с; $x_0 = 0{,}5$ м; $\dot{x}_0 = 0$ м/с; $t_1 = 0{,}1$ с; $r = 0{,}20$ м; $f = 0{,}2$
15		$m = 0{,}01$ кг; $\omega_e = \pi$ рад/с; $x_0 = 0{,}5$ м; $\dot{x}_0 = 0$ м/с; $t_1 = 1{,}0$ с; $f = 0$

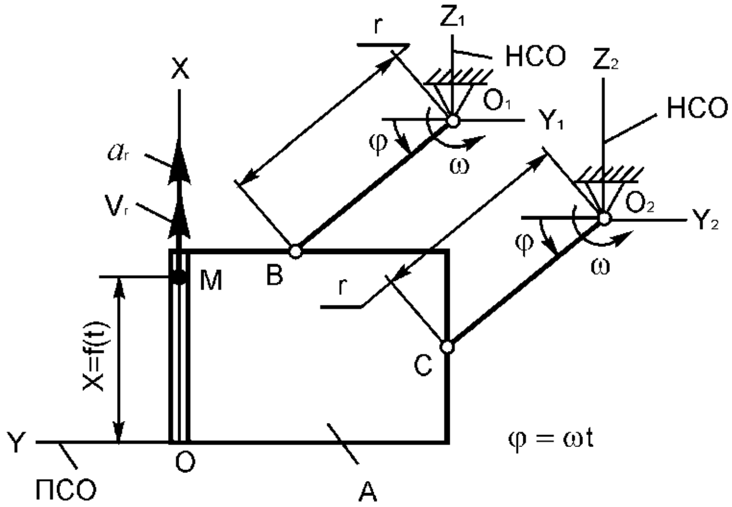
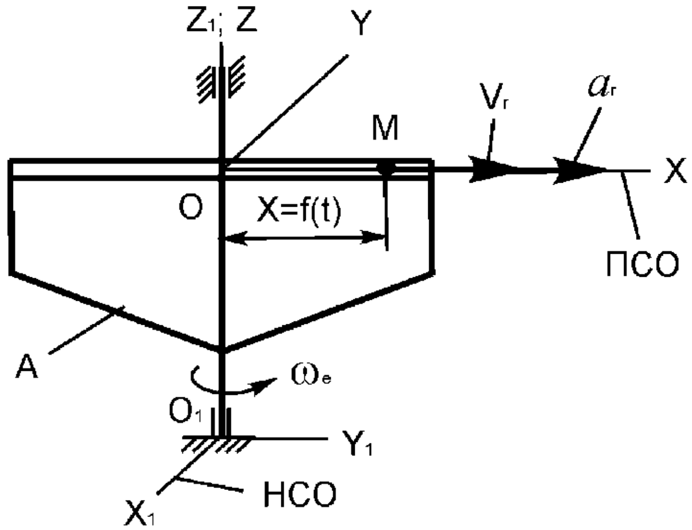
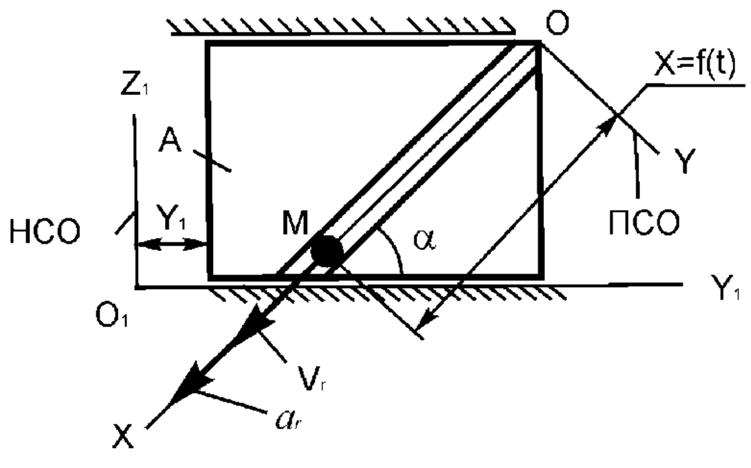
Продолжение табл. 3.1

1	2	3
16		$\alpha = 45^\circ$; $m = 0{,}02$ кг; $x_0 = 1{,}0$ м; $\dot{x}_0 = 2{,}0$ м/с; $t_1 = 0{,}1$ с; $y_1 = 0{,}06t^3$ м; $f = 0$
17		$m = 0{,}01$ кг; $\omega = 6\pi$ рад/с; $x_0 = 0$ м; $\dot{x}_0 = 4{,}0$ м/с; $t_1 = 0{,}2$ с; $r = 0{,}20$ м; $f = 0$
18		$\alpha = 40^\circ$; $m = 0{,}02$ кг; $x_0 = 0{,}6$ м; $\dot{x}_0 = 0$ м/с; $t_1 = 0{,}1$ с; $y_1 = 0{,}1\sin\pi t$ м; $f = 0$

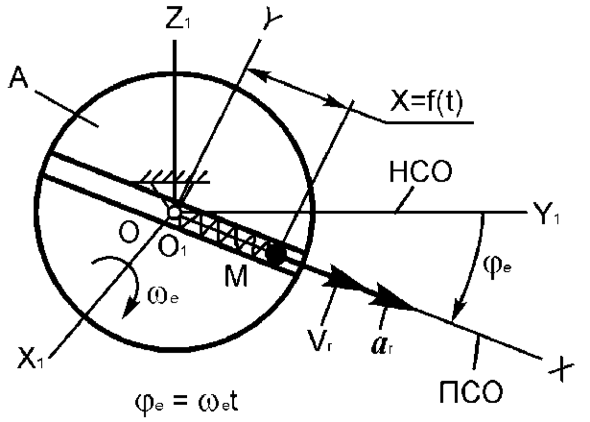
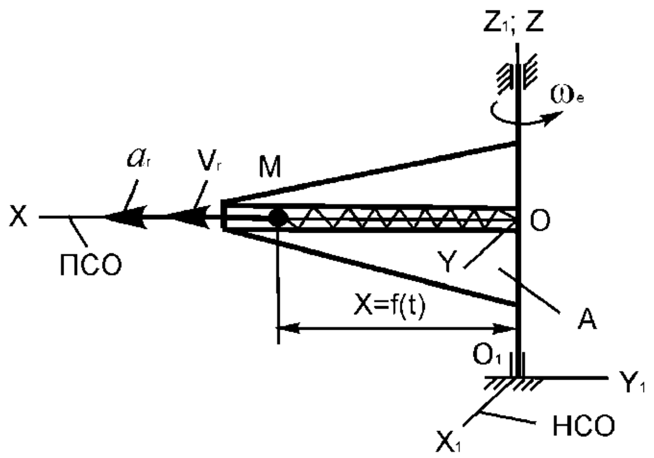
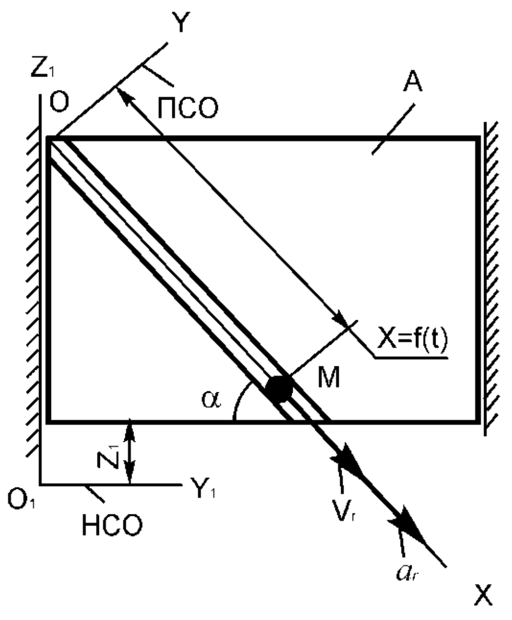
Продолжение табл. 3.1

1	2	3
19		$m = 0{,}08$ кг; $x_0 = 0{,}4$ м; $\dot{x}_0 = -0{,}8$ м/с; $t_1 = 0{,}1$ с; $c = 0{,}40$ Н/м; $l_0 = 0{,}20$ м; $y_1 = 8t - t^3$ м; $f = 0$
20		$m = 0{,}01$ кг; $\omega_e = 10\pi$ рад/с; $x_0 = 0{,}1$ м; $\dot{x}_0 = 0$ м/с; $t_1 = 0{,}2$ с; $c = 0{,}20$ Н/м; $l_0 = 0{,}10$ м; $f = 0$
21		$\alpha = 30°$; $m = 0{,}05$ кг; $x_0 = 0{,}5$ м; $\dot{x}_0 = 0{,}1$ м/с; $t_1 = 0{,}1$ с; $y_1 = 2 + t^2$ м; $f = 0$

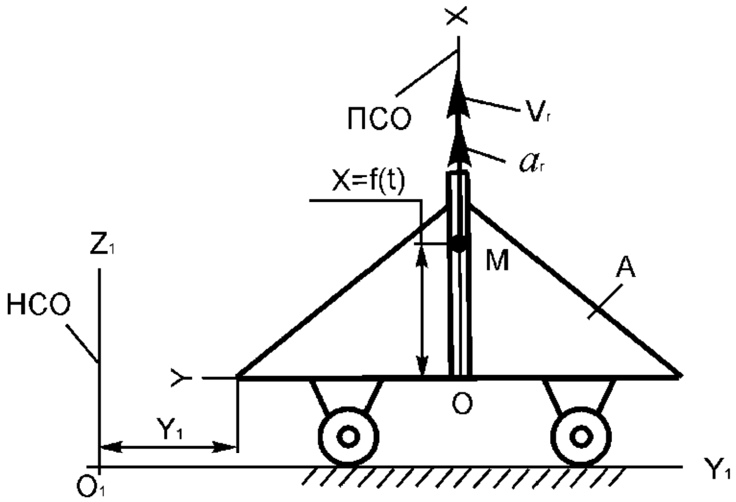
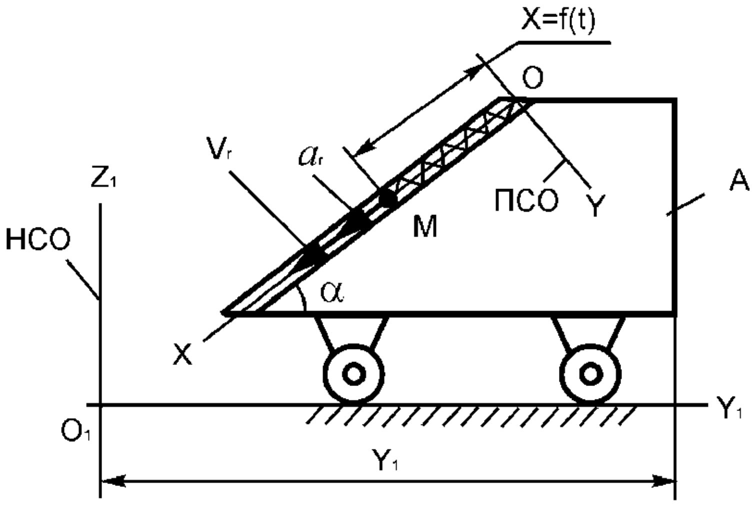
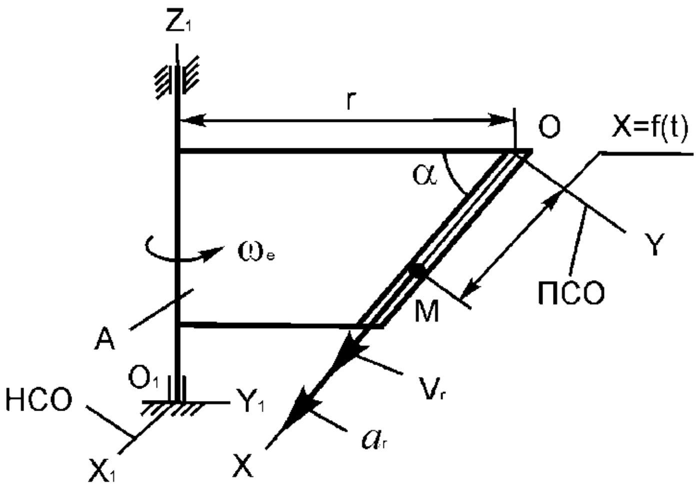
Продолжение табл. 3.1

1	2	3
22		m = 0,03 кг; ω = 4π рад/с; x_0 = 0,1 м; $\dot{x}_0$ = 3,0 м/с; t_1 = 0,1 с; r = 0,10 м; f = 0
23		m = 0,01 кг; ω_e = π рад/с; x_0 = – 0,5 м; $\dot{x}_0$ = – 0,1 м/с; t_1 = 0,2 с; f = 0
24		α = 60°; m = 0,01 кг; x_0 = 0 м; $\dot{x}_0$ = 0,2 м/с; t_1 = 0,2 с; y_1 = 0,1cos1,5πt м; f = 0

Продолжение табл. 3.1

1	2	3
25		m = 0,05 кг; $\omega_e = 2\pi$ рад/с; x_0 = 0,1 м; $\dot{x}_0$ = – 0,4 м/с; t_1 = 0,1 с; c = 0,20 Н/м; l_0 = 0,20 м; f = 0
26		m = 0,09 кг; $\omega_e = \pi$ рад/с; x_0 = 0,2 м; $\dot{x}_0$ = 0,3 м/с; t_1 = 0,1 с; c = 0,20 Н/м; l_0 = 0,10 м; f = 0
27		α = 75°; m = 0,02 кг; x_0 = 1,0 м; $\dot{x}_0$ = 0,6 м/с; t_1 = 0,3 с; $z_1 = 0{,}1\sin 0{,}5\pi t$ м; f = 0

Окончание табл. 3.1

1	2	3
28		$m = 0{,}03$ кг; $x_0 = 0{,}8$ м; $\dot{x}_0 = 0$ м/с; $t_1 = 0{,}3$ с; $y_1 = 8 - 5t^3$ м; $f = 0{,}1$
29		$\alpha = 60°$; $m = 0{,}10$ кг; $x_0 = 0{,}4$ м; $\dot{x}_0 = 1{,}0$ м/с; $c = 0{,}20$ Н/м; $l_0 = 0{,}20$ м; $t_1 = 0{,}1$ с; $y_1 = 8 + t^3$ м; $f = 0$
30		$\alpha = 50°$; $m = 0{,}02$ кг; $\omega_e = \pi/2$ рад/с; $x_0 = 0$ м; $\dot{x}_0 = 0{,}5$ м/с; $t_1 = 0{,}2$ с; $r = 0{,}50$ м; $f = 0$

3.6. Пример выполнения курсового задания Д 2

Рассмотрим подробно пример выполнения этого задания.

Условие задания.

Шарик М, рассматриваемый как материальная точка, перемещается по прямолинейному цилиндрическому каналу движущегося тела А (рис. 3.7).

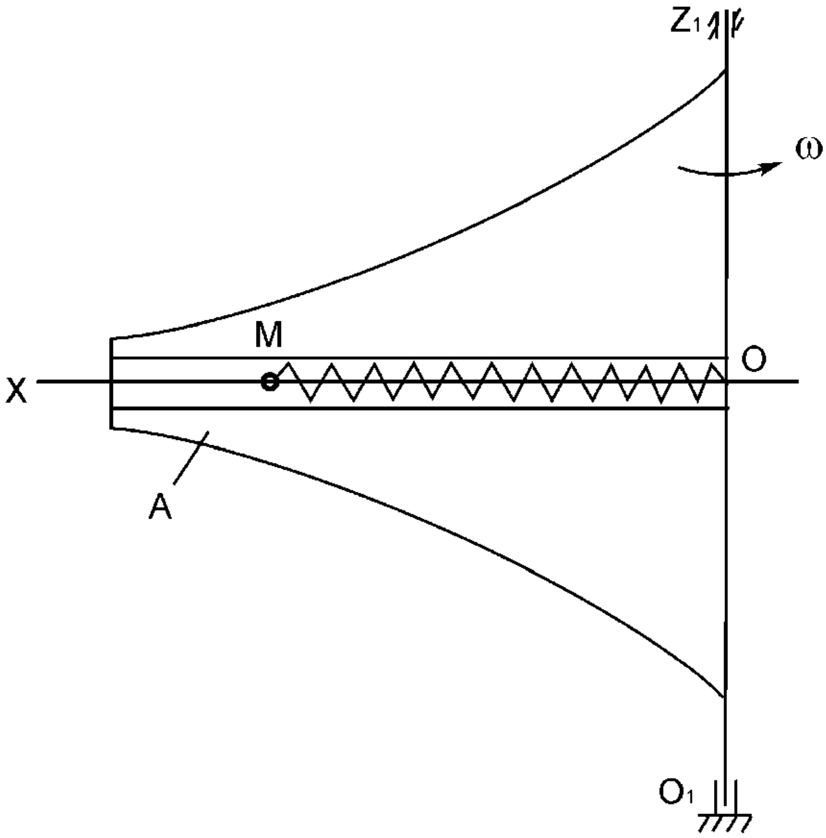


Рис. 3.7

Найти уравнение относительного движения шарика x = f(t), приняв за начало координат точку О. Тело А равномерно вращается вокруг вертикальной неподвижной оси O_1Z_1.

Найти также координату $x(t_1)$ и давление $N(t_1)$ шарика на стенку канала при заданном значении времени t_1.

Дано: масса шарика m = 0,09 кг; угловая скорость вращения тела $\omega = \pi$ рад/с; начальная координата x_0 = 0, 2 м; проекция начальной относительной скорости $\mathbf{V}_{r0}$ на координатную ось ОХ подвижной системы отсчета $\dot{x}_0$ = 0,3 м/с; значение времени, для которого определяются искомые величины t_1 = 0,1 с; коэффициент жесткости пружины с = 0,20 Н/см = 20 Н/м; длина свободной недеформированной пружины l_0 = 0,1 м; коэффициент трения скольжения шарика о стенки канала f = 0.

Решение.

Шарик в канале совершает сложное движение, поэтому необходимо рассматривать его движение как сумму относительного и переносного движений. Введем подвижную (ПСО) и неподвижную (ИСО) системы отсчета (рис. 3.8).

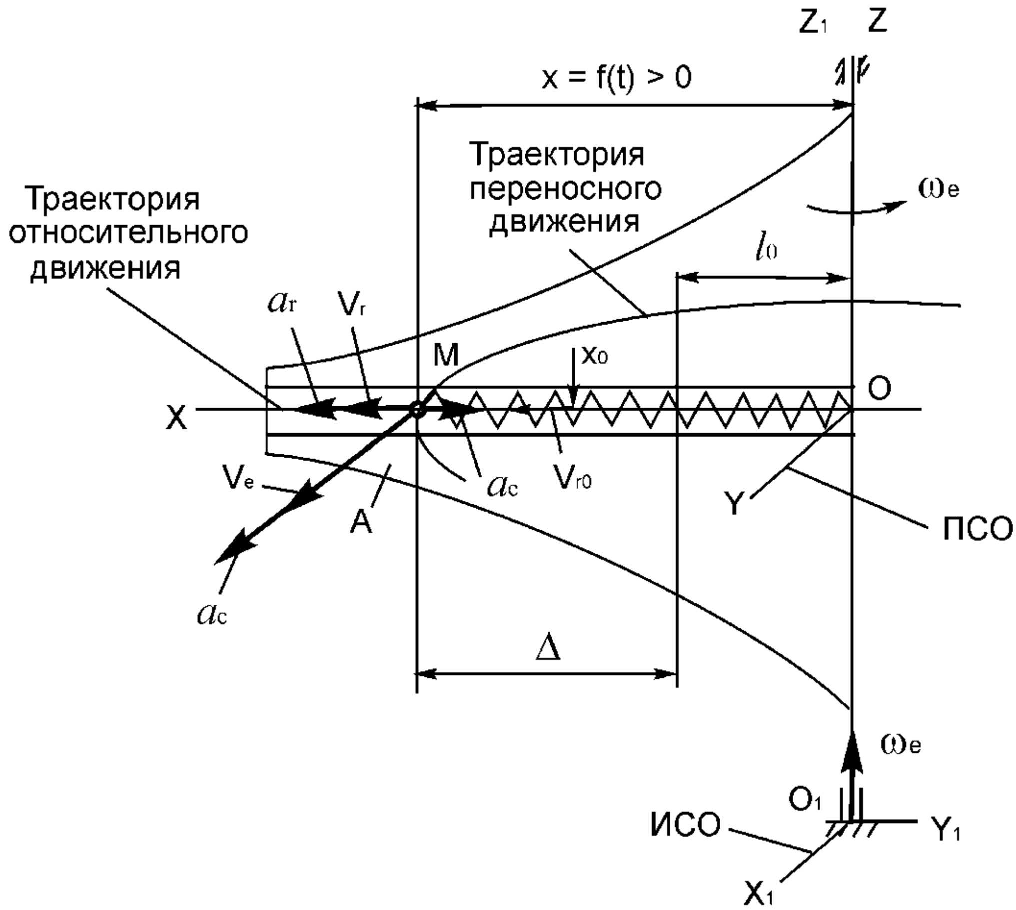


Рис. 3.8

ИСО выбираем так, чтобы ось O_1Z_1 являлась осью вращения тела А. ПСО закрепляем на теле А таким образом, чтобы ось ОХ совпадала с траекторией относительного движения точки. ПСО вместе с телом А совершает вращательное движение с переносной угловой скоростью $\omega_e = \omega$, вектор которой расположен на оси O_1Z_1 и направлен вверх.

Изобразим точку М на траектории относительного движения в произвольный момент времени ($x = f(t) > 0$). При этом текущие значения относительной скорости $\mathbf{V}_r$ и относительного ускорения $\boldsymbol{a}_r$ направлены в сторону возрастания координаты x. Изобразим на рис. 3.8 начальную координату x_0 и начальную относительную скорость $\mathbf{V}_{r0}$. Так как по условию задания $\dot{x}_0 > 0$, то вектор $\mathbf{V}_{r0}$ направлен в сторону возрастания координаты x.

Траекторией переносного движения является окружность с центром O на оси O_1Z_1 вращения и радиусом r = OM = x = f(t). Переносная скорость $\mathbf{V}_e$ направлена так, как это показано на рис. 3.8 – параллельна координатной оси OY подвижной системы отсчета. Поскольку переносное вращение является равномерным (ω_e = const), то переносное ускорение

$$\boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{a}_M^{\omega},$$

где $\boldsymbol{a}_M^{\omega}$ – центростремительное ускорение точки M тела A.

$$a_M^{\omega} = (\omega_e)^2 OM = (\omega_e)^2 x.$$

Согласно правилу векторного произведения (или правилу Жуковского) ускорение Кориолиса ($\boldsymbol{a}_c = 2\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{V}_r$) направлено так же, как и вектор $\mathbf{V}_e$ переносной скорости. Модуль ускорения Кориолиса равен

$$a_c = 2\omega_e \cdot V_r \cdot \sin(\boldsymbol{\omega}_e, \mathbf{V}_r) = 2\omega_e \cdot V_r \cdot \sin 90^0 = 2\omega_e \cdot V_r.$$

Деформация Δ пружины в произвольный момент времени определяется формулой

$$\Delta = x - l_0.$$

На рис. 3.8 приведены только кинематические характеристики точки M при ее относительном движении.

Запишем основное уравнение динамики относительного движения.

$$m\boldsymbol{a}_r = \Sigma\mathbf{F}_i + \Sigma\mathbf{R}_i + \boldsymbol{\Phi}_e + \boldsymbol{\Phi}_c.$$

Определим силы, действующие на материальную точку, и покажем их на рис. 3.9.

Кориолисова сила инерции $\boldsymbol{\Phi}_c$ направлена противоположно переносному ускорению $\boldsymbol{a}_c$, а модуль равен

$$\Phi_c = m\, a_c = m(2\omega_e \cdot V_r).$$

Переносная сила инерции $\boldsymbol{\Phi}_e$ направлена противоположно переносному ускорению $\boldsymbol{a}_e$, а модуль равен

$$\Phi_e = m\, a_e = m(\omega_e)^2 x.$$

К реакциям внешних связей $\mathbf{R}_i$ относятся силы: $\mathbf{F}_{уп}$ – сила упругости пружины; $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ – реакции гладкой поверхности канала, по которому перемещается точка M.

$$F_{уп} = c \cdot \Delta = c(x - l_0).$$

Реакция $\mathbf{N}_1$ направлена вертикально вверх (навстречу вектору $\mathbf{G}$ силы тяжести точки). Реакция $\mathbf{N}_2$ расположена в горизонтальной плоскости OXY и направлена противоположно вектору $\boldsymbol{\Phi}_c$ кориолисовой силы инерции.

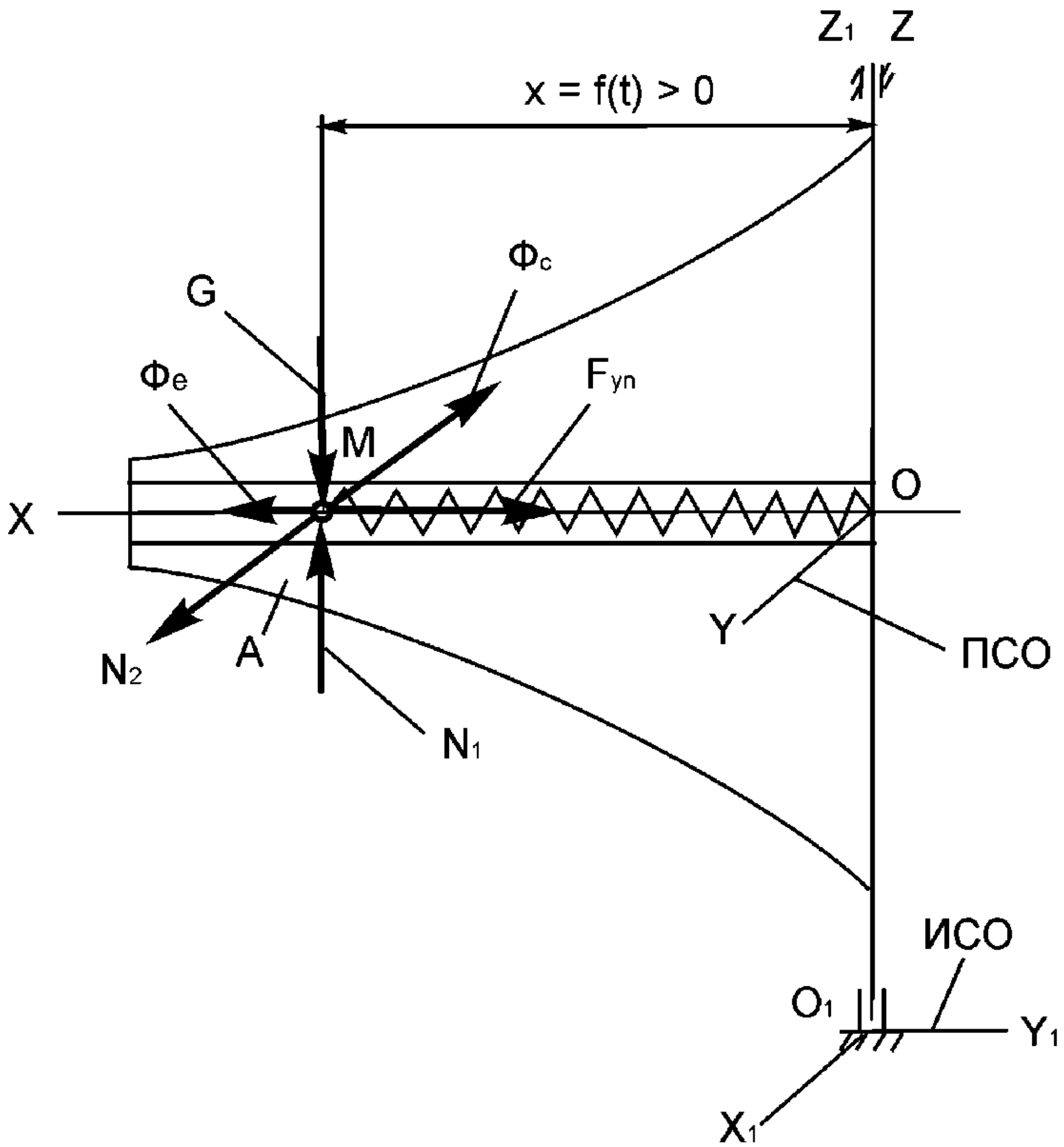


Рис. 3.9

С учетом изложенного основное уравнение динамики относительного движения принимает вид

$$m\boldsymbol{a}_r = \mathbf{G} + \mathbf{F}_{уп} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \mathbf{\Phi}_e + \mathbf{\Phi}_c.$$

Запишем дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки. Для этого последнее векторное выражение спроецируем на координатные оси ПСО:

$$m\ddot{x} = -F_{уп} + \Phi_e = -c\Delta + m(\omega_e)^2x = -c(x - l_0) + m(\omega_e)^2x =$$

$$= -cx + cl_0 + m(\omega_e)^2x; \qquad (1)$$

$$m\ddot{y} = N_2 - \Phi_c = N_2 - m(2\omega_e \cdot \dot{x});$$

(2)

$$m\ddot{z} = -G + N_1. \qquad (3)$$

Поскольку относительное ускорение a_r на координатные оси OY, OZ не проецируется ($\ddot{y} = 0$; $\ddot{z} = 0$), то с учетом исходных данных курсового задания уравнения (2), (3) принимают вид:

$$N_2 = m(2\omega_e \cdot \dot{x}); \qquad (2^1)$$

$$N_1 = mg. \qquad (3^1)$$

Дифференциальное уравнение (1) приведем к виду

$$\ddot{x} + (c/m - (\omega_e)^2)x = cl_0/m. \qquad (1^1)$$

Поскольку $c/m - (\omega_e)^2 = k^2$ и $cl_0/m = b = const$, то уравнение (1^1) принимает вид

$$\ddot{x} + k^2x = b. \qquad (1^{11})$$

Согласно положениям высшей математики общее решение дифференциального уравнения (1^{11}) будем искать по формуле

$$x = x^* + x^{**},$$

где x^* – общее решение дифференциального уравнения вида $\ddot{x} + k^2x = 0$; x^{**} – частное решение дифференциального уравнения (1^{11}).

Приступаем к определению общего решения x^* дифференциального уравнения вида $\ddot{x} + k^2x = 0$. Это решение зависит от знака величины $c/m - (\omega_e)^2 = k^2$. Если $k^2 > 0$, то $x^* = A\sin(kt + \beta)$. Если $k^2 < 0$, то $x^* = C_1e^{kt} + C_2e^{-kt}$. Определим значения k^2 и k:

$$k^2 = c/m = 20/0{,}09 - (3{,}14)^2 = 22{,}540\ c^{-2} > 0;\ k = 4{,}747\ c^{-1}.$$

Поскольку $k^2 > 0$, то $x^* = A\sin(4{,}747t + \beta)$.

Частное решение x^{**} дифференциального уравнения (1^{11}) зависит от вида его правой части. Поскольку его правая часть постоянна ($b = cl_0/m = const$), то его частное решение будем искать в виде $x^{**} = B = const$.

При частном решении уравнение (1^{11}) принимает вид

$$\ddot{x}^{**} + k^2x^{**} = b.$$

Так как $\ddot{x}^{**} = (\ddot{B}) = 0$, то имеем $k^2B = cl_0/m$. Отсюда получим

$$B = (cl_0/m)/k^2 = (20 \cdot 0{,}1/0{,}09)/22{,}54 = 0{,}985\ м.$$

Итак, общее решение дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$x = x^* + x^{**} = A\sin(4{,}747t + \beta) + 0{,}985,$$

где A и β – постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий относительного движения.

В нашем случае: $x_0 = 0{,}2$ м; $\dot{x}_0 = 0{,}3$ м/с. Для определения постоянных интегрирования A и β определим проекцию относительной скорости V_r на ось OX.

$$\dot{x} = dx/dt = A\cos(4{,}747t + \beta) \cdot 4{,}747.$$

При $t_0 = 0$ имеем:

$$x_0 = 0{,}2 = A\sin\beta + 0{,}985;$$
$$\dot{x}_0 = 0{,}3 = A\cos\beta \cdot 4{,}747.$$

Преобразуем эту систему уравнений к виду:

$$0{,}2 - 0{,}985 = A\sin\beta = -0{,}785;$$
$$0{,}3/4{,}747 = A\cos\beta = 0{,}063.$$

Возведя в квадратную степень левые и правые части уравнений и сложив их, получим:

$$A = \sqrt{(-0{,}785)^2 + (0{,}063)^2} = 0{,}787 \text{ м};$$
$$\sin\beta = -0{,}785/A = -0{,}785/0{,}787 = -0{,}997;$$
$$\cos\beta = 0{,}063/0{,}787 = 0{,}080.$$

Поскольку $\sin\beta < 0$, а $\cos\beta > 0$, то величину угла β определим по формуле $\beta = 2\pi - \alpha$, где $\alpha = \arcsin(0{,}987) = 1{,}482$ рад или $\alpha = \arccos(0{,}080) = 1{,}482$ рад. Тогда

$$\beta = 2\pi - \alpha = 2 \cdot 3{,}14 - 1{,}482 = 4{,}798 \text{ рад}.$$

В окончательном виде имеем:

$$x = 0{,}787\sin(4{,}747t + 4{,}798);$$
$$\dot{x} = 3{,}776\cos(4{,}747t + 4{,}798).$$

По условиям задания кроме значения координаты $x(t_1)$ необходимо определить нормальную реакцию $N(t_1)$ в момент времени t_1.

$$N(t_1) = \sqrt{(N_1)^2 + (N_2)^2}.$$

С учетом выражений (2^1), (3^1) имеем

$$N(t_1) = \sqrt{(mg)^2 + (m(\omega_e)^2\dot{x}(t_1))^2}.$$

По результатам решения желательно построить графики зависимостей $x = f_1(t)$, $N = f_2(t)$.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Записать ***основное уравнение динамики относительного движения***.
2. Записать формулу для определения ***переносной силы инерции***.
3. Записать формулу для определения ***кориолисовой силы инерции***.
4. Записать ***основное уравнение динамики относительного движения*** точки для случая, когда переносное движение есть неравномерное вращение относительно неподвижной оси, а относительное движение прямолинейное.
5. Записать ***основное уравнение динамики относительного движения*** точки для случая, когда переносное движение есть равномерное вращение относительно неподвижной оси, а относительное движение прямолинейное.
6. Записать ***основное уравнение динамики относительного движения*** точки для случая, когда переносное движение есть поступательное неравномерное криволинейное движение, а относительное движение прямолинейное.
7. Записать ***основное уравнение динамики относительного движения*** точки для случая, когда переносное движение есть прямолинейное и равномерное движение, а относительное движение прямолинейное.
8. Сформулировать ***принцип относительности классической механики***.

4. ГЕОМЕТРИЯ МАСС МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

4.1. Центр масс механической системы

Напомним некоторые понятия, которые широко применяются в этом учебно-методическом пособии.

Механической системой называют такую совокупность материальных точек, в которой положение или движение каждой точки зависит от положения и движения всех остальных.

Механическую систему, движение которой не ограничено связями, а определяется только действующими на нее силами, называют ***свободной механической системой***.

Механическая система, движение которой ограничивается наложенными на ее точки внешними связями, называется ***несвободной механической системой***.

Все силы, действующие на точки механической системы, делят на ***внешние и внутренние силы***.

Внешними называют силы, действующие на точки данной механической системы со стороны материальных тел, не входящих в данную механическую систему.

К внешним силам относятся ***активные*** (задаваемые) силы и ***реакции внешних связей***. Активные силы условимся обозначать $\mathbf{F}_i^E$, реакции внешних связей – $\mathbf{R}_i^E$.

Внутренними силами называют силы взаимодействия между точками данной механической системы. Внутренние силы условимся обозначать $\mathbf{R}_i^J$.

Неизменяемая механическая система – механическая система, в которой материальные точки имеют постоянные массы, а связи между точками не деформируются.

Следует отметить, что в данном учебно-методическом пособии рассматриваются только неизменяемые механические системы.

Движение точек механической системы зависит от активных сил $\mathbf{F}_i^E$, реакций внешних связей $\mathbf{R}_i^E$ и внутренних сил $\mathbf{R}_i^J$.

Рассмотрим движение несвободной механической системы в инерциальной системе отсчета OXYZ (рис. 4.1).

На рис. 4.1 использованы следующие обозначения: $\mathbf{V}_i$, $\boldsymbol{a}_i$ – скорость и ускорение центра c_i тяжести i-й точки механической системы; $\mathbf{F}_i^E$, $\mathbf{R}_i^E$, $\mathbf{R}_i^J$ – соответственно активная сила, реакция внешней связи, внутренняя сила, приложенные к i-й точке механической системы; x_{ci}, y_{ci}, z_{ci} – координаты конца радиус-вектора $\mathbf{r}_{ci}$ центра тяжести i-й точки механической системы; $\mathbf{V}_C$, a_C – скорость, ускорение центра масс механической системы; $\mathbf{F}^E = \Sigma \mathbf{F}_i^E$, $\mathbf{R}^E = \Sigma \mathbf{R}_i^E$, $\mathbf{R}^J = \Sigma \mathbf{R}_i^J$ – соответственно главные векторы активных сил, реакций внешних связей, внутренних сил; x_C, y_C, z_C – координаты конца радиус-вектора

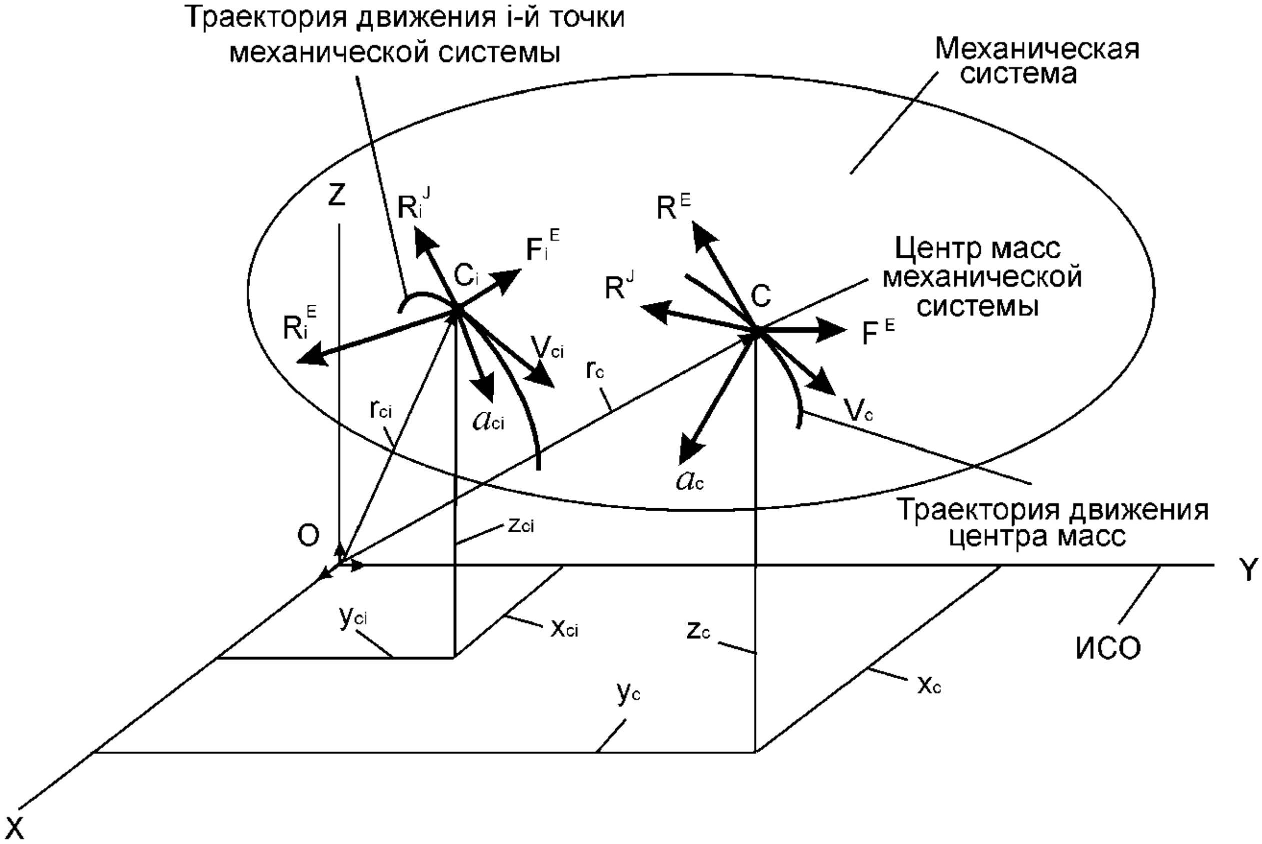


Рис. 4.1

$\mathbf{r}_C$ центра масс механической системы.

Необходимо отметить, что для неизменяемых механических систем главный вектор внутренних сил $\mathbf{R}^J = \Sigma \mathbf{R}_i^J$ всегда равен нулю ($\mathbf{R}^J = 0$).

Каждая i-я точка механической системы имеет определенную массу m_i, а ее положение в системе отсчета OXYZ в любой момент времени определяется радиус-вектором $\mathbf{r}_{Ci}$ или тремя координатами: x_{Ci}, y_{Ci}, z_{Ci}.

За ***центр масс механической системы*** принимают геометрическую точку C, радиус-вектор которой равен

$$\mathbf{r}_C = \Sigma m_i \mathbf{r}_{Ci} / m,$$

где m – масса механической системы.

Центр масс механической системы – *геометрическая точка, для которой сумма произведений масс всех матери-*

альных точек, образующих механическую систему, на их радиус-векторы, проведенные из этой точки, равна нулю.

Проецируя последнее векторное равенство на координатные оси системы отсчета OXYZ, получим формулы, определяющие ***координаты центра масс механической системы***:

$$x_c = \Sigma m_i x_{ci}/m; \quad y_c = \Sigma m_i y_{ci}/m; \quad z_c = \Sigma m_i z_{ci}/m.$$

Эти формулы называют ***уравнениями движения центра масс механической системы***.

Как видно из последних формул, положение центра масс механической системы в любой момент времени зависит только от положения и массы каждой точки этой системы.

Центр тяжести системы тел совпадает с их центром масс. Понятие «***центр масс механической системы***» более широкое по сравнению с понятием «***центр тяжести***», так как последнее понятие применяется только для твердого тела или системы твердых тел, находящихся в однородном поле сил тяжести.

Дифференцируя по времени векторное равенство $\mathbf{r}_c=\Sigma m_i \mathbf{r}_{ci}/m$, несложно определить векторы скорости $\mathbf{V}_c$ и ускорения $\boldsymbol{a}_c$ центра масс механической системы, их проекции на координатные оси, модули и направляющие косинусы:

$$\mathbf{V}_c = d\mathbf{r}_c/dt = \Sigma m_i \mathbf{V}_{ci}/m;$$
$$\boldsymbol{a}_c = d_2\mathbf{r}_c/dt^2 = \Sigma m_i \boldsymbol{a}_{ci}/m;$$
$$x_c = \Sigma m_i x_{ci}/m;$$
$$y_c = \Sigma m_i y_{ci}/m;$$
$$z_c = \Sigma m_i z_{ci}/m;$$
$$\dot{x}_c = \Sigma m_i \dot{x}_{ci}/m;$$
$$\dot{y}_c = \Sigma m_i \dot{y}_{ci}/m;$$
$$\dot{z}_c = \Sigma m_i \dot{z}_{ci}/m;$$
$$\ddot{x}_c = \Sigma m_i \ddot{x}_{ci}/m;$$
$$\ddot{y}_c = \Sigma m_i \ddot{y}_{ci}/m;$$
$$\ddot{z}_c = \Sigma m_i \ddot{z}_{ci}/m;$$
$$V_c = \sqrt{(\dot{x}_c)^2 + (\dot{y}_c)^2 + (\dot{z}_c)^2};$$
$$a_c = \sqrt{(\ddot{x}_c)^2 + (\ddot{y}_c)^2 + (\ddot{z}_c)^2};$$
$$\cos(\mathbf{V}_c, \mathbf{i}) = \dot{x}_c / V_c;$$
$$\cos(\mathbf{V}_c, \mathbf{j}) = \dot{y}_c / V_c;$$
$$\cos(\mathbf{V}_c, \mathbf{k}) = \dot{z}_c / V_c;$$
$$\cos(\boldsymbol{a}_c, \mathbf{i}) = \ddot{x}_c / a_c;$$

$$\cos(a_c, \mathbf{j}) = \ddot{y}_c / a_c;$$

$$\cos(a_c, \mathbf{k}) = \ddot{z}_c / a_c.$$

4.2. Алгоритм определения кинематических характеристик центра масс механической системы

Решение задач, в которых требуется определить уравнение траектории движения центра масс, его скорость и ускорение, проводят по алгоритму, представляющему собой заданную последовательность действий исполнителя.

1. Выбрать систему отсчета.
2. Определить массу механической системы по формуле $m = \Sigma m_i$.
3. Записать координаты центров тяжестей каждого из тел механической системы, выразив их в функции времени: $x_{ci} = x_{ci}(t)$; $y_{ci} = y_{ci}(t)$; $z_{ci} = z_{ci}(t)$.
4. Определить координаты центра масс механической системы по формулам: $x_c = \Sigma m_i x_{ci}/m$; $y_c = \Sigma m_i y_{ci}/m$; $z_c = \Sigma m_i z_{ci}/m$. Полученные координаты x_c, y_c, z_c окажутся функциями времени, т. е. эти координаты окажутся параметрическими уравнениями движения центра масс.
5. Для нахождения явных ***уравнений траектории движения центра масс системы*** материальных точек надо из последних уравнений исключить время t.
6. Определить проекции $\dot{x}_c$, $\dot{y}_c$, $\dot{z}_c$ скорости центра масс и модуль этой скорости по формулам: $\dot{x}_c = \Sigma m_i \dot{x}_{ci}/m$; $\dot{y}_c = \Sigma m_i \dot{y}_{ci}/m$; $\dot{z}_c = \Sigma m_i \dot{z}_{ci}/m$; $V_c = \sqrt{(\dot{x}_c)^2 + (\dot{y}_c)^2 + (\dot{z}_c)^2}$.
7. Для ориентации вектора скорости $\mathbf{V}_c$ центра масс в пространстве определить направляющие косинусы по формулам: $\cos(\mathbf{V}_c, \mathbf{i}) = \dot{x}_c / V_c$; $\cos(\mathbf{V}_c, \mathbf{j}) = \dot{y}_c / V_c$; $\cos(\mathbf{V}_c, \mathbf{k}) = \dot{z}_c / V_c$.
8. Определить проекции $\ddot{x}_c$, $\ddot{y}_c$, $\ddot{z}_c$ ускорения центра масс и модуль этого ускорения по формулам: $\ddot{x}_c = \Sigma m_i \ddot{x}_{ci}/m$; $\ddot{y}_c = \Sigma m_i \ddot{y}_{ci}/m$; $\ddot{z}_c = \Sigma m_i \ddot{z}_{ci}/m$; $a_c = \sqrt{(\ddot{x}_c)^2 + (\ddot{y}_c)^2 + (\ddot{z}_c)^2}$.
9. Определить направляющие косинусы по формулам: $\cos(\mathbf{V}_c, \mathbf{i}) = \dot{x}_c / V_c$; $\cos(\mathbf{V}_c, \mathbf{j}) = \dot{y}_c / V_c$; $\cos(\mathbf{V}_c, \mathbf{k}) = \dot{z}_c / V_c$; $\cos(a_c, \mathbf{i}) = \ddot{x}_c / a_c$; $\cos(a_c, \mathbf{j}) = \ddot{y}_c / a_c$; $\cos(a_c, \mathbf{k}) = \ddot{z}_c / a_c$.
10. Для момента времени t_1 определить ***кинематические характеристики центра масс***. Результаты вычислений свести в таблицу и при необходимости проиллюстрировать рисунком.

4.3. Моменты инерции твердого тела. Радиус инерции

При поступательном движении твердого тела, так же как и при движении материальной точки, ***мерой инертности*** является ***масса***. При вращательном движении твердого тела мерой его инертности является ***момент инерции относительно оси вращения***.

Напомним, что в теоретической механике твердое тело рассматривается как механическая система, образованная непрерывной совокупностью взаимосвязанных материальных точек.

> ***Момент инерции механической системы относительно оси*** *– величина, равная сумме произведений масс всех материальных точек, образующих механическую систему, на квадраты их расстояний от данной оси.*

Рассмотрим твердое тело как множество материальных точек M_i с координатами x_i, y_i, z_i (рис. 4.2).

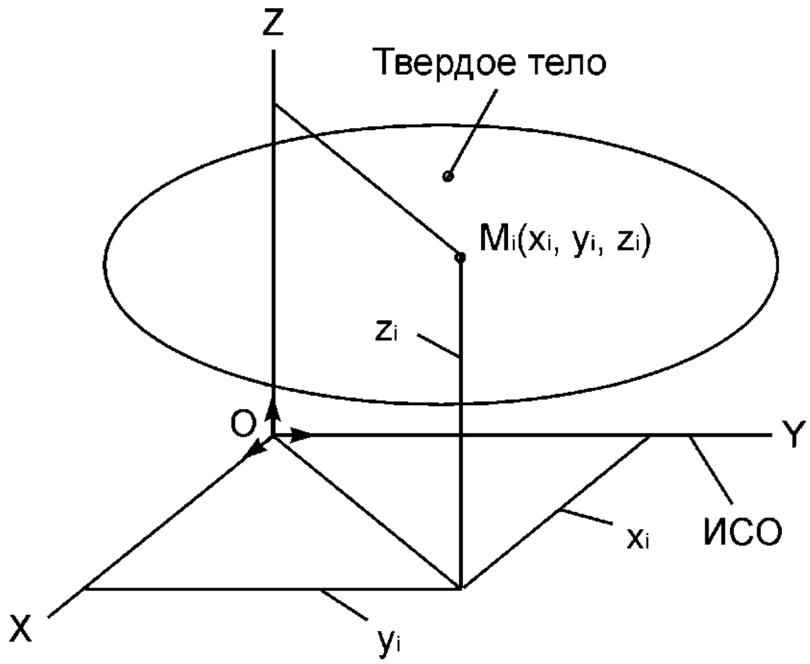


Рис. 4.2

Согласно определению моменты инерции J_{ox}, J_{oy}, J_{oz} относительно соответствующих координатных осей OX, OY, OZ вычисляют по формулам:

$$J_{ox} = \Sigma m_i((y_i)^2+(z_i)^2);\quad J_{oy} = \Sigma m_i((x_i)^2 + (z_i)^2);\quad J_{oz} = \Sigma m_i((x_i)^2+(y_i)^2).$$

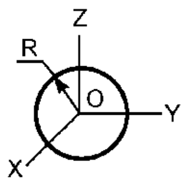
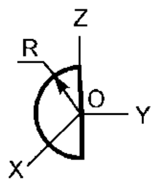
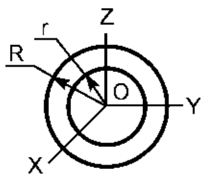
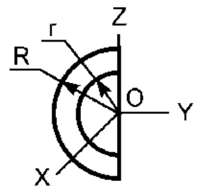
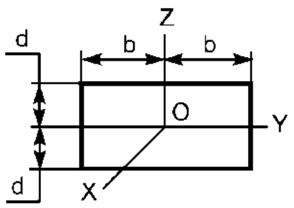
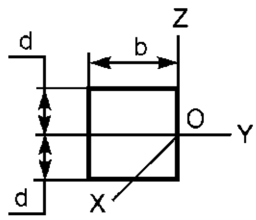
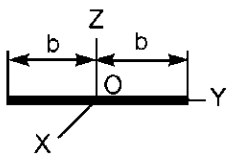
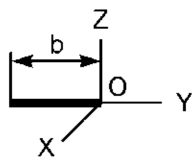
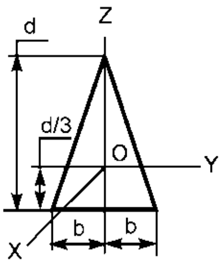
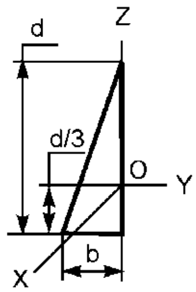
Момент инерции относительно оси ***характеризует распределение масс материальных точек относительно*** этой ***оси***. Момент инерции всегда положителен и имеет размерность кг/м^2.

Момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через его центр масс, всегда имеет минимальное значение.

Формулы для определения моментов инерции некоторых однородных твердых тел приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Осевые моменты инерции однородных пластинок

Форма тела	J_{OX}	J_{OY}	J_{OZ}	Форма тела
	$mR^2/2$	$mR^2/4$	$mR^2/4$	
	$m(R^2+r^2)/2$	$m(R^2+r^2)/4$	$m(R^2+r^2)/4$	
	$m(b^2+d^2)/3$	$md^2/3$	$mb^2/3$	
	$mb^2/3$	0	$mb^2/3$	
	$m(3b^2+d^2)/18$	$md^2/18$	$mb^2/6$	

При выполнении курсовых заданий довольно часто требуется определить момент инерции относительно оси, которая через центр масс тела не проходит. Для этой цели используют ***теорему Штейнера*** о зависимости между моментом инерции твердого тела относительно параллельных осей.

Момент инерции твердого тела относительно оси *равен сумме его момента относительно параллельной оси, проходящей через центр масс С, и произведения массы твердого тела на квадрат расстояния между параллельными осями.*

Согласно этой теореме определим момент инерции круглой однородной пластины относительно оси ОХ (рис. 4.3).

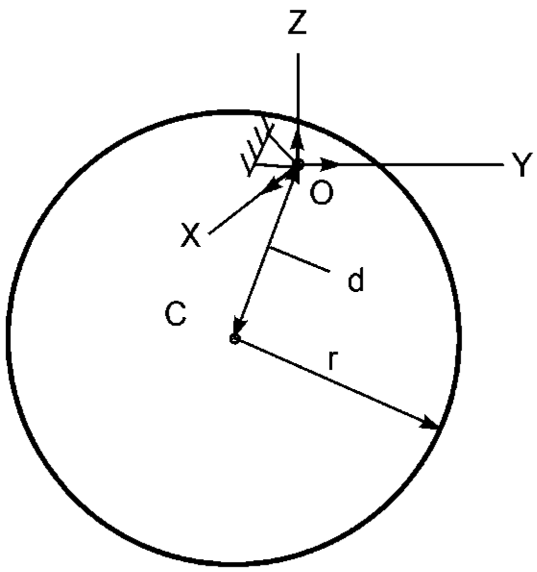


Рис. 4.3

$$J_{ox} = J_{cx} + m(OC)^2 = J_{cx} + md^2 = mR^2/2 + md^2.$$

Для твердого тела в случае неоднородного распределения масс в его поперечном сечении, перпендикулярном оси вращения, момент инерции вычисляют по формуле

$$J_{ox} = m(i_{ox})^2,$$

где i_{ox} – радиус инерции тела относительно оси вращения ОХ, м.

Радиус инерции твердого тела относительно оси вращения *– величина, произведение квадрата которой на массу тела равно моменту инерции тела относительно этой оси.*

Таким образом, если поперечное сечение твердого тела по отношению к оси его вращения имеет сложную конфигурацию, то массу тела располагают равномерно на окружности, радиус которой равен радиусу инерции i.

Радиус инерции определяют экспериментальным путем по специальной методике.

Если надо вычислить ***момент инерции механической системы***, состоящей из нескольких твердых тел, причем момент инерции каждого из порознь взятых твердых тел известен, то момент инерции системы определяют как сумму моментов инерции всех твердых тел, входящих в систему, относительно той же оси.

$$J_{ox} = \Sigma J_{iox},$$

где J_{iox} – момент инерции i-го тела механической системы относительно оси вращения OX.

Для механических систем в теоретической механике используют понятие «***радиус инерции механической системы относительно оси вращения***».

Радиус инерции механической системы относительно оси вращения *– величина, квадрат которой равен отношению момента инерции механической системы относительно данной оси к массе этой системы.*

$$i_{ox} = \sqrt{J_{ox}/m}.$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулировать определение понятия «***механическая система***».
2. Сформулировать определение понятия «***свободная механическая система***».
3. Сформулировать определение понятия «***несвободная механическая система***».
4. Сформулировать определение понятия «***внешние силы***».
5. Сформулировать определение понятия «***внутренние силы***».
6. Сформулировать определение понятия «***неизменяемая механическая система***».
7. Сформулировать определение понятия «***центр масс механической системы***».
8. Записать формулу для определения ***радиус-вектора центра масс механической системы***.
9. Записать формулу для определения ***главного вектора активных сил***.
10. Записать формулу для определения ***главного вектора реакций внешних связей***.
11. Записать формулу для определения ***главного вектора реакций внутренних связей***.

12. Записать формулу для определения вектора ***скорости центра масс механической системы***.
13. Записать формулу для определения вектора ***ускорения центра масс механической системы***.
14. Записать формулы для определения ***проекций*** вектора ***скорости центра масс механической системы на координатные оси***.
15. Записать формулы для определения ***проекций*** вектора ***ускорения центра масс механической системы на координатные оси***.
16. Записать формулу для определения модуля ***скорости центра масс механической системы***.
17. Записать формулу для определения модуля ***ускорения центра масс механической системы***.
18. Что является ***мерой инертности*** при поступательном движении твердого тела?
19. Что является ***мерой инертности*** при вращательном движении твердого тела?
20. Сформулировать определение понятия «***момент инерции тела относительно оси вращения***».
21. Что характеризует ***момент инерции тела относительно оси вращения***?
22. Сформулировать ***теорему Штейнера***.
23. Записать формулу для определения ***момента инерции тела относительно вертикальной оси вращения***.
24. Сформулировать определение «***радиус инерции твердого тела относительно оси вращения***».
25. Записать формулу для определения ***момента инерции механической системы***.

5. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

5.1. Теорема о движении центра масс механической системы

Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, находящейся под действием активных сил $\mathbf{F}_i^E$, реакций $\mathbf{R}_i^E$ внешних связей и внутренних сил $\mathbf{R}_i^J$ в инерциальной системе отсчета OXYZ (рис. 5.1).

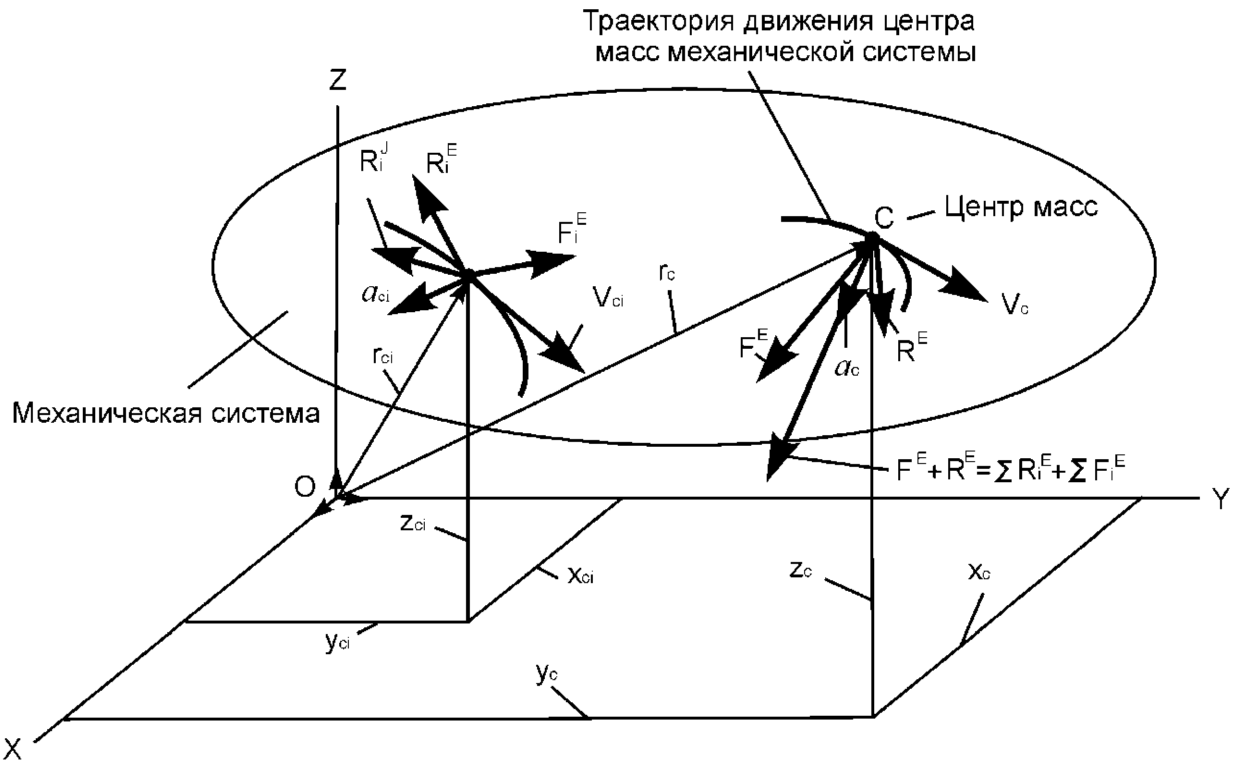


Рис. 5.1

Поскольку главный вектор внутренних сил $\mathbf{R}^J = \Sigma \mathbf{R}_i^J = 0$, то ***теорема о движении центра масс неизменяемой механической системы*** выражается векторным равенством:

$$m\boldsymbol{a}_c = \Sigma \mathbf{F}_i^E + \Sigma \mathbf{R}_i^E = \mathbf{F}^E + \mathbf{R}^E,$$

где $\mathbf{F}^E = \Sigma \mathbf{F}_i^E$ – главный вектор активных сил; $\mathbf{R}^E = \Sigma \mathbf{R}_i^E$ – главный вектор реакций внешних связей.

Произведение массы механической системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме приложенных к ней активных сил и реакций внешних связей.

Таким образом, центр масс механической системы движется как материальная точка массой, равной массе всей системы, к которой приложены внешние силы (активные силы и реакции внешних связей).

Проецированием последнего векторного равенства на координатные оси системы отсчета OXYZ получим ***дифференциальные уравнения движения центра масс механической системы***:

$$m\ddot{x}_c = \Sigma F^E_{iox} + \Sigma R^E_{iox};$$

$$m\ddot{y}_c = \Sigma F^E_{ioy} + \Sigma R^E_{ioy};$$

$$m\ddot{z}_c = \Sigma F^E_{ioz} + \Sigma R^E_{ioz},$$

где ΣF^E_{iox}, ΣF^E_{ioy}, ΣF^E_{ioz}, ΣR^E_{iox}, ΣR^E_{ioy}, ΣR^E_{ioz} – суммы проекций соответственно активных сил и реакций внешних связей на координатные оси инерциальной системы отсчета.

Из последних уравнений следует, что внутренние силы не влияют на движение центра масс неизменяемой механической системы.

Следствия из теоремы о движении центра масс

1. Если геометрическая сумма активных сил и реакций внешних связей постоянно равна нулю ($\Sigma \mathbf{F}^E_i + \Sigma \mathbf{R}^E_i = 0$), то центр масс механической системы находится в покое или движется равномерно и прямолинейно.

Таким образом, если $\Sigma \mathbf{F}^E_i + \Sigma \mathbf{R}^E_i = 0$, то $\boldsymbol{a}_c = 0$, т. е. $\mathbf{V}_c = \text{const}$. Если начальная скорость $\mathbf{V}_{c0}$ центра масс равна нулю, то центр масс находится в покое. Если же $\mathbf{V}_{c0} \neq 0$, то центр масс движется прямолинейно и равномерно с этой скоростью.

2. Если суммы проекций активных сил и реакций внешних связей на какую-либо ось остаются все время равными нулю, то проекция центра масс механической системы на эту ось неподвижна или движется равномерно.

Действительно, если $\Sigma F^E_{iox} + \Sigma R^E_{iox} = 0$, то $\ddot{x}_c = 0$, т. е. $\dot{x}_c = \text{const}$. Если при этом в начальный момент времени $\dot{x}_{c0} = 0$, то $\dot{x}_c = 0$, $x_c = \text{const}$, т. е. координата x_c центра масс остается постоянной.

Следствия из теоремы о движении центра масс выражают ***закон сохранения движения центра масс механической системы***.

С помощью теоремы о движении центра масс механической системы решают задачи, в которых рассматривается только поступательная часть движения тел, образующих механическую систему.

Рекомендуется следующий алгоритм решения задач.

1. Выбирается система отсчета.
2. К механической системе прикладываются все активные силы и реакции внешних связей.
3. Записывается теорема о движении центра масс ($m\boldsymbol{a}_c = \Sigma\mathbf{F}_i^E + \Sigma\mathbf{R}_i^E$) в проекциях на оси системы отсчета: $m\ddot{x}_c = \Sigma F_{iox}^E + \Sigma R_{iox}^E$; $m\ddot{y}_c = \Sigma F_{ioy}^E + \Sigma R_{ioy}^E$; $m\ddot{z}_c = \Sigma F_{ioz}^E + \Sigma R_{ioz}^E$.
4. Вычисляются суммы проекций активных сил и реакций внешних связей на оси системы отсчета и подставляются в последние выражения.
5. В зависимости от условий решается прямая либо обратная задача динамики.

Поскольку для заочной формы обучения курсовых заданий на использование теоремы о движении центра масс механической системы не предусмотрено, то примеры решения таких задач в данном учебно-методическом пособии не приведены.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулировать ***теорему о движении центра масс механической системы***.
2. Записать векторную формулу, выражающую ***теорему о движении центра масс механической системы***.
3. Записать ***дифференциальные уравнения движения центра масс механической системы*** в декартовой системе отсчета.
4. Сформулировать первое следствие из ***теоремы о движении центра масс механической системы***.
5. Сформулировать второе следствие из ***теоремы о движении центра масс механической системы***.

5.2. Теоремы об изменении количества движения материальной точки и количества движения механической системы

5.2.1. Теорема об изменении количества движения материальной точки

В этой теореме используются понятия «***количество движения***» и «***импульс силы***». Введем эти понятия.

Количество движения материальной точки – *векторная мера механического движения, равная произведению массы точки на ее скорость.*

Рассмотрим движение материальной точки массой m в инерциальной системе отсчета OXYZ (рис. 5.2).

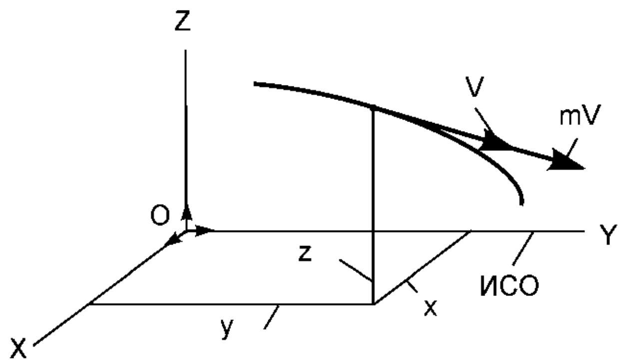


Рис. 5.2

Согласно определению вектор количества движения m**V** имеет такое же направление, как и вектор скорости **V** точки. Количество движения m**V** является векторной мерой механического движения. Количество движения имеет размерность [кг·м/с].

Рассмотрим движение материальной точки под действием силы $\mathbf{P}_i$ в инерциальной системе отсчета OXYZ (рис. 5.3).

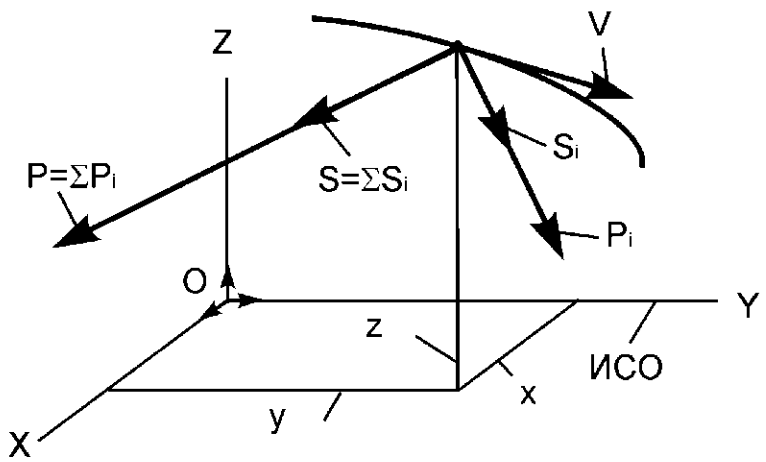


Рис. 5.3

В теоретической механике используют понятие «***элементарный импульс силы***».

Элементарный импульс силы *– векторная мера действия силы, равная произведению силы на элементарный промежуток времени ее действия.*

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{P}_i \cdot \Delta t,$$

где $\mathbf{S}_i$ – элементарный импульс силы; $\mathbf{P}_i$ – сила; Δt – элементарный промежуток времени.

Равнодействующая системы сил, действующих на точку, определяется по формуле $\mathbf{P} = \Sigma \mathbf{P}_i$.

Если постоянная по модулю и направлению сила $\mathbf{P}_i$ действует на точку в течение промежутка времени $\Delta t = t_2 - t_1$, то ***элементарным импульсом силы за конечный промежуток времени*** является вектор

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{P}_i \cdot \Delta t = \mathbf{P}_i \cdot (t_2 - t_1).$$

Направление этого вектора совпадает с направлением силы, а его модуль равен произведению модуля силы на время ее действия:

$$S_i = P_i \cdot (t_2 - t_1).$$

В общем случае импульс $\mathbf{S}_i$ силы $\mathbf{P}_i$ за промежуток времени $\Delta t = (t_2 - t_1)$ определяется векторным интегралом от вектора $\mathbf{P}_i$ по скалярному аргументу t:

$$\mathbf{S}_i = \int \mathbf{P}_i dt.$$

Импульс силы за конечный промежуток времени *– величина, равная определенному интегралу от элементарного импульса силы, где пределами интеграла являются моменты начала и конца данного промежутка времени.*

Импульс равнодействующей P *нескольких сил* $\boldsymbol{P}_i$ *за некоторый промежуток времени равен геометрической сумме импульсов соответствующих сил за этот же промежуток времени.*

$$\mathbf{S} = \Sigma \mathbf{S}_i.$$

В проекциях на координатные оси имеем:

$$S_{ox} = \Sigma S_{iox}; \quad S_{oy} = \Sigma S_{ioy}; \quad S_{oz} = \Sigma S_{ioz}.$$

Проекция импульса равнодействующей на ось системы отсчета равна алгебраической сумме проекций импульсов составляющих сил на ту же ось.

Теорема об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной форме выражается формулой

$$d(m\mathbf{V})/dt = \mathbf{P}.$$

Производная по времени от количества движения материальной точки геометрически равна равнодействующей сил, приложенных к этой точке.

Теорема об изменении количества движения материальной точки в интегральной (конечной) форме приобретает вид

$$m\mathbf{V}_2 - m\mathbf{V}_1 = \Sigma\mathbf{S}_i.$$

Изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов сил, приложенных к точке за тот же промежуток времени.

Эту теорему называют также ***теоремой импульсов***.

Последнему векторному равенству соответствуют три уравнения в проекциях на оси системы отсчета OXYZ:

$$mV_{2ox} - mV_{1ox} = \Sigma S_{iox};\ mV_{2oy} - mV_{1oy} = \Sigma S_{ioy};\ mV_{2oz} - mV_{1oz} = \Sigma S_{ioz}.$$

Изменение проекции количества движения материальной точки на координатную ось за некоторый промежуток времени равно сумме проекций на ту же ось импульсов, приложенных к точке сил за тот же промежуток времени.

Большинство практических задач решается по уравнениям в проекциях на оси координат.

5.2.2. Теорема об изменении количества движения механической системы

Рассмотрим движение неизменяемой механической системы под действием активных сил $\mathbf{F}_i^E$, реакций $\mathbf{R}_i^E$ внешних связей и внутренних сил $\mathbf{R}_i^J$ в инерциальной системе отсчета OXYZ (рис. 5.4).

Количество движения механической системы *– величина, равная сумме количеств движения всех материальных точек, образующих механическую систему.*

Количество движения **K** механической системы определяют по формуле

$$\mathbf{K} = \Sigma m_i\mathbf{V}_{ci} = m\mathbf{V}_c.$$

Это выражение показывает, что вектор количества движения механической системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс.

Проецируя последнее векторное равенство на координатные оси, получим:

$$K_{ox} = mV_{cox};\quad K_{oy} = mV_{coy};\quad K_{oz} = mV_{coz},$$

где V_{cox}, V_{coy}, V_{coz} – проекции скорости центра масс механической системы на координатные оси.

Проекция количества движения механической системы на каждую координатную ось равна произведению массы системы на проекцию скорости центра масс на эту же ось.

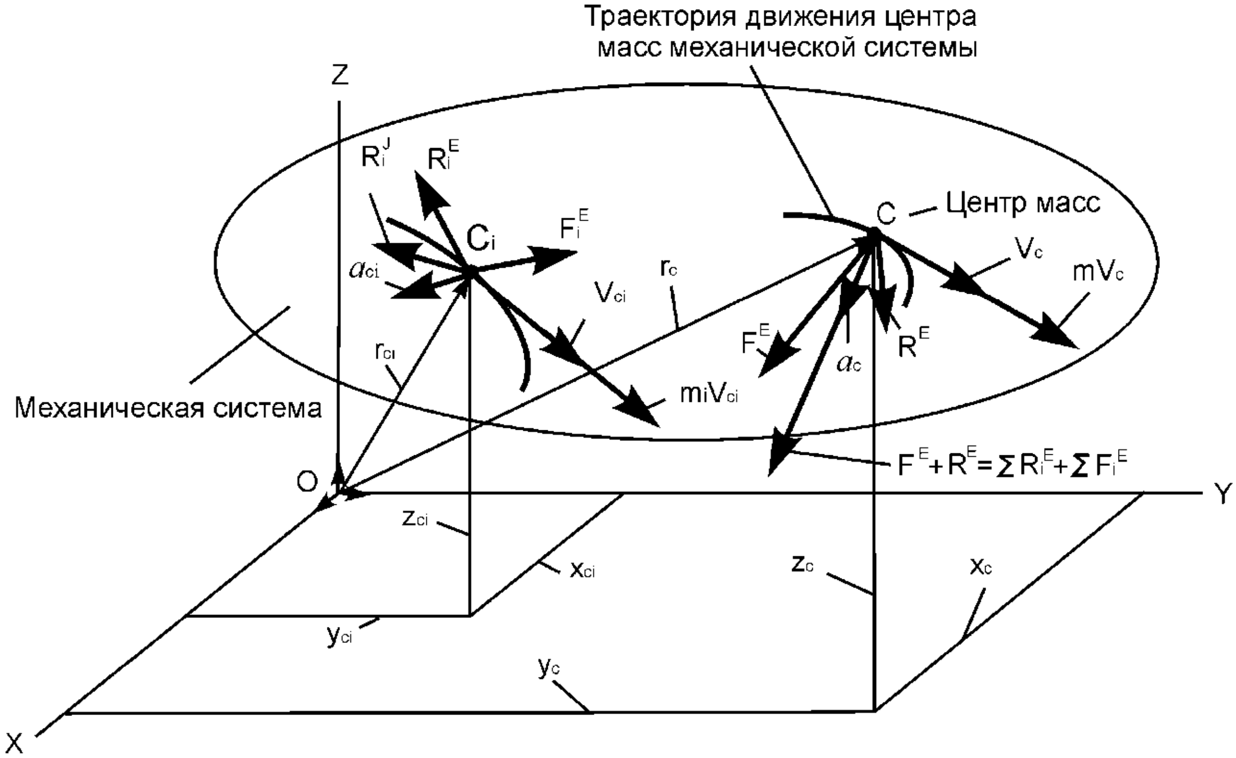


Рис. 5.4

Теорема об изменении количества движения механической системы выражается векторным равенством

$$d\mathbf{K}/dt = \Sigma \mathbf{F}_i^E + \Sigma \mathbf{R}_i^E.$$

Производная по времени от количества движения механической системы равна геометрической сумме активных сил и реакций внешних связей.

Последнему векторному равенству соответствует три уравнения в проекциях на координатные оси:

$$dK_{ox}/dt = \Sigma F_{iox}^E + \Sigma R_{iox}^E; \quad dK_{oy}/dt = \Sigma F_{ioy}^E + \Sigma R_{ioy}^E;$$

$$dK_{oz}/dt = \Sigma F_{ioz}^E + \Sigma R_{ioz}^E.$$

Производная по времени от проекции количества движения механической системы на координатную ось равна сумме проекций активных сил и реакций внешних связей.

Необходимо отметить, что изменение количества движения механической системы вызывается только внешними силами, к которым относятся активные силы и реакции внешних связей.

Следствия из теоремы

1. Если геометрическая сумма внешних сил, приложенных к механической системе за рассматриваемый промежуток времени, равна нулю ($\Sigma \mathbf{F}_i^E + \Sigma \mathbf{R}_i^E = 0$), то количество движения механической системы постоянно: ***K = const***.

Действительно, если $\Sigma \mathbf{F}_i^E + \Sigma \mathbf{R}_i^E = 0$, то $d\mathbf{K}/dt = 0$ и, следовательно, $\mathbf{K} = m\mathbf{V}_c = \mathbf{const}$.

2. Если сумма проекций активных сил и реакций внешних связей на координатную ось за рассматриваемый промежуток времени равна нулю, то проекция количества движения механической системы на эту ось постоянна.

Так, например, если $\Sigma F_{iox}^E + \Sigma R_{iox}^E = 0$, то $dK_{ox}/dt = 0$ и, таким образом, $K_{ox} = mV_{cox} = const$.

Следствия из теоремы об изменении количества движения механической системы выражают ***закон сохранения количества движения системы***.

Так как для заочной формы обучения курсовых заданий на использование теоремы об изменении количества движения механической системы не предусмотрено, то и примеры решения таких задач в данном учебно-методическом пособии не приведены.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулировать определение понятия «***количество движения материальной точки***».
2. Сформулировать определение понятия «***импульс силы за промежуток времени***».
3. Записать формулу для определения ***импульса силы за промежуток времени***.
4. Записать формулу для определения ***импульса равнодействующей нескольких сил***, действующих на точку.
5. Записать ***теорему импульсов*** в векторной форме.
6. Записать ***теорему импульсов*** в скалярной форме.
7. Сформулировать определение понятия «***количество движения механической системы***».
8. Записать ***теорему об изменении количества движения механической системы*** в векторной форме.

9. Записать ***теорему об изменении количества движения механической системы*** в скалярной форме.
10. Сформулировать следствия из ***теоремы об изменении количества движения механической системы***.

5.3. Теоремы об изменении момента количества движения материальной точки и об изменении кинетического момента механической системы

5.3.1. Моменты количества движения материальной точки относительно центра и оси

Рассмотрим движение материальной точки в горизонтальной плоскости OXY (рис. 5.5).

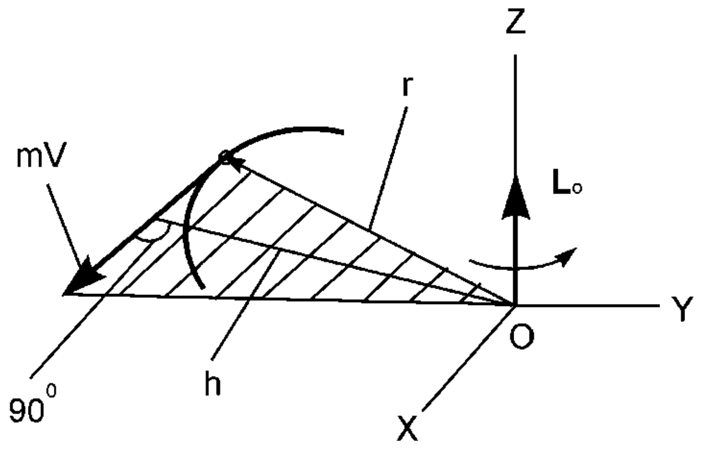


Рис. 5.5

Момент количества движения mV точки M относительно центра O представляет собой вектор $\mathbf{L}_0$, направленный перпендикулярно к плоскости, проходящей через вектор m**V** и центр O в ту сторону, откуда видно, что вектор m**V** поворачивает горизонтальную плоскость относительно оси, проходящей через центр O, против хода часовой стрелки.

Момент количества движения материальной точки относительно центра – *величина, равная векторному произведению радиус-вектора материальной точки, проведенного из этого центра, на количество движения.*

Согласно рис. 5.5 момент количества движения $\mathbf{L}_0$ можно определить векторным произведением радиус-вектора **r**, проведенного из точки O в точку M, на вектор количества движения m**V**:

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{r} \times m\mathbf{V}.$$

Модуль L_0 вектора $\mathbf{L}_0$ равен произведению величины mV на плечо h вектора m**V** относительно центра O:

$$L_0 = mVh.$$

***Плечо** h **вектора** mV **количества движения точки относительно центра** – кратчайшее расстояние от точки O до линии действия вектора m**V**.*

Момент $\mathbf{L}_0$ количества движения m**V** относительно точки O равен нулю в том случае, когда линия действия вектора m**V** проходит через точку O, так как тогда плечо h = 0.

Рассмотрим случай движения точки в пространстве (рис. 5.6).

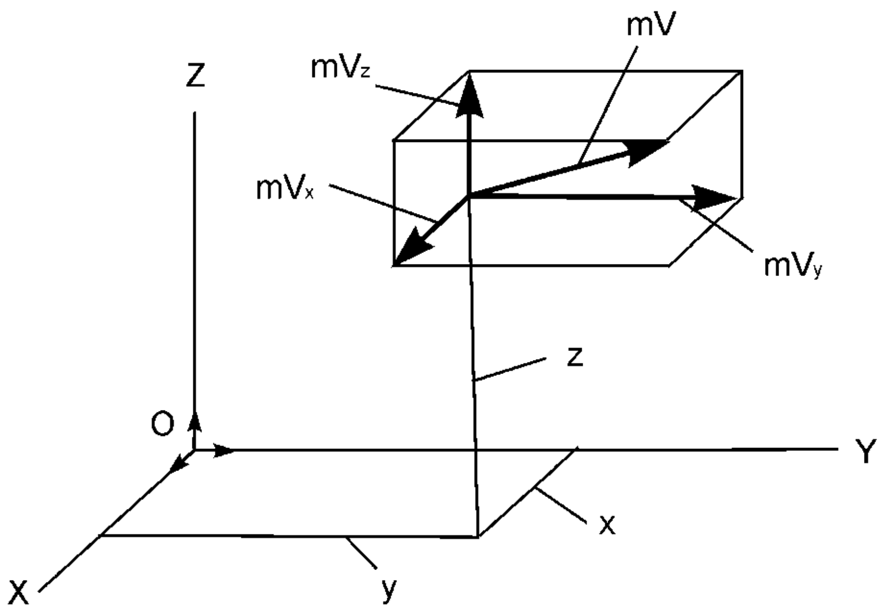


Рис. 5.6

Дадим определение понятия «***момент количества движения точки относительно оси***».

***Момент количества движения точки относительно оси** – величина, равная проекции на ось момента количества движения точки относительно любого выбранного на данной оси центра.*

Согласно определению имеем

$$L_{ox} = L_0\cos(\mathbf{L}_0, \mathbf{i}),$$

где L_{ox} – проекция вектора $\mathbf{L}_0$ на ось OX.

При решении практических задач пользоваться этой формулой неудобно. Поэтому поступают следующим образом.

Вектор mV количества движения разлагают на компоненты $m\mathbf{V}_x$, $m\mathbf{V}_y$, $m\mathbf{V}_z$ по соответствующим координатным осям.

Момент количества движения ***mV*** ***точки относительно оси*** *– величина, равная алгебраической сумме моментов компонентов* $m\mathbf{V}_x$*,* $m\mathbf{V}_y$*,* $m\mathbf{V}_z$ *вектора* ***mV*** *относительно этой оси.*

Если компонент вектора mV вызывает вращение тела против хода часовой стрелки, то момент количества движения этого компонента относительно оси положителен, и отрицателен при противоположном условии. При этом на тело необходимо смотреть с положительного направления отсчета соответствующей координаты.

Аналитические выражения для определения моментов L_{ox}, L_{oy}, L_{oz} количества движения относительно соответствующих координатных осей OX, OY, OZ имеют вид:

$$L_{ox} = m\dot{z}\cdot y - m\dot{y}\cdot z; \quad L_{oy} = m\dot{x}\cdot z - m\dot{z}\cdot x; \quad L_{oz} = m\dot{y}\cdot x - m\dot{x}\cdot y,$$

где x, y, z – координаты движущейся точки; $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ – проекции скорости точки на оси координат.

5.3.2. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки

Рассмотрим движение материальной точки M, входящей в механическую систему, в инерциальной системе отсчета (рис. 5.7).

Пусть точка движется в горизонтальной плоскости XOY под действием активных сил $\mathbf{F}_i^E$, реакций $\mathbf{R}_i^E$ внешних связей и внутренних сил $\mathbf{R}_i^J$.

Равнодействующую **P** этих сил определяют по формуле

$$\mathbf{P} = \Sigma\mathbf{F}_i^E + \Sigma\mathbf{R}_i^E + \Sigma\mathbf{R}_i^J.$$

Теорему об изменении момента количества движения материальной точки механической системы выражают векторным равенством:

$$d\mathbf{L}_0/dt = \Sigma\mathbf{M}_0(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma\mathbf{M}_0(\mathbf{R}_i^E) + \Sigma\mathbf{M}_0(\mathbf{R}_i^J).$$

Производная по времени от момента количества движения материальной точки механической системы относительно некоторого неподвижного центра равна геометрической сумме моментов сил, действующих на точку, относительно того же центра.

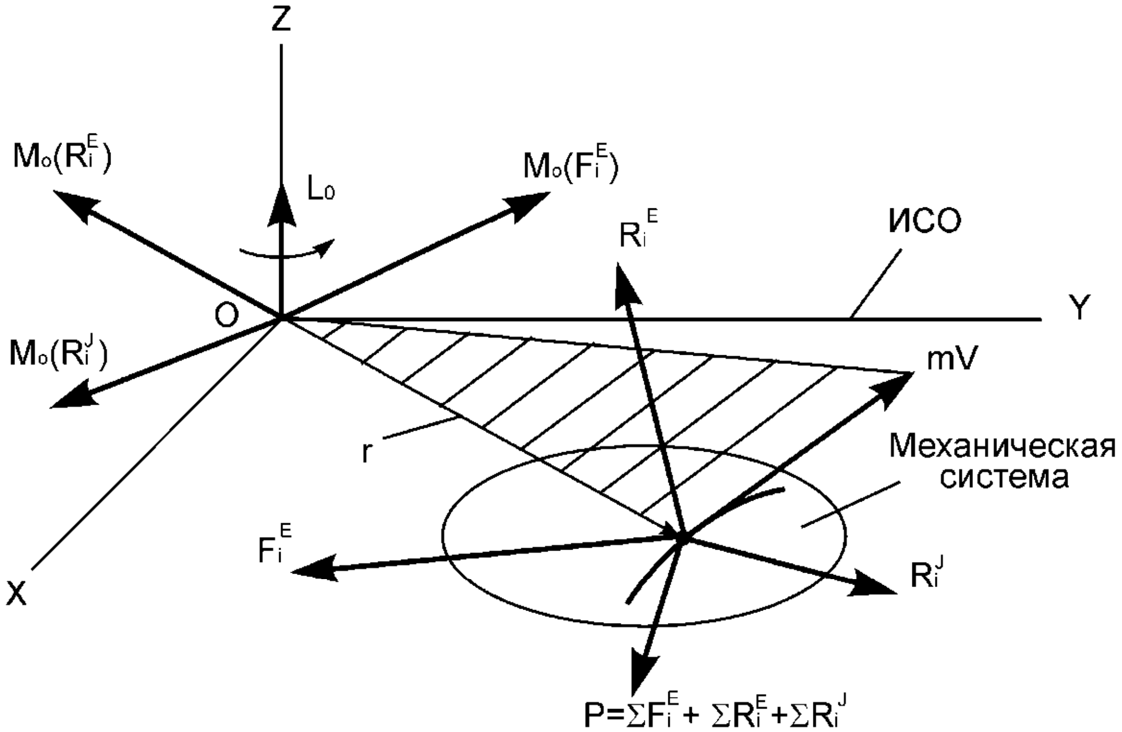


Рис. 5.7

Так как проекция векторной производной на любую ось равна производной от ее проекции, то, проецируя последнее векторное равенство на координатные оси системы отсчета OXYZ, получим:

$$dL_{ox}/dt = \Sigma M_{ox}(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_{ox}(\mathbf{R}_i^E) + \Sigma M_{ox}(\mathbf{R}_i^J);$$
$$dL_{oy}/dt = \Sigma M_{oy}(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_{oy}(\mathbf{R}_i^E) + \Sigma M_{oy}(\mathbf{R}_i^J);$$
$$dL_{oz}/dt = \Sigma M_{oz}(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_{oz}(\mathbf{R}_i^E) + \Sigma M_{oz}(\mathbf{R}_i^J).$$

Производная по времени от момента количества движения материальной точки механической системы относительно некоторой неподвижной оси равна алгебраической сумме моментов сил, действующих на точку, относительно этой же оси.

Следствия из теоремы

1. Если линия действия равнодействующей ($\mathbf{P}=\Sigma\mathbf{F}_i^E+\Sigma\mathbf{R}_i^E+\Sigma\mathbf{R}_i^J$) *приложенных к материальной точке сил все время проходит через некоторый неподвижный центр, то момент количества движения материальной точки относительно этого центра остается постоянным.*

Действительно, если $\Sigma \mathbf{M}_0(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma \mathbf{M}_0(\mathbf{R}_i^E) + \Sigma \mathbf{M}_0(\mathbf{R}_i^J) = 0$, то $d\mathbf{L}_0/dt = 0$ и, следовательно, $\mathbf{L}_0 = \mathbf{const}$.

Примером, иллюстрирующим это следствие, может служить движение материальной точки под действием центральной силы (рис. 5.8).

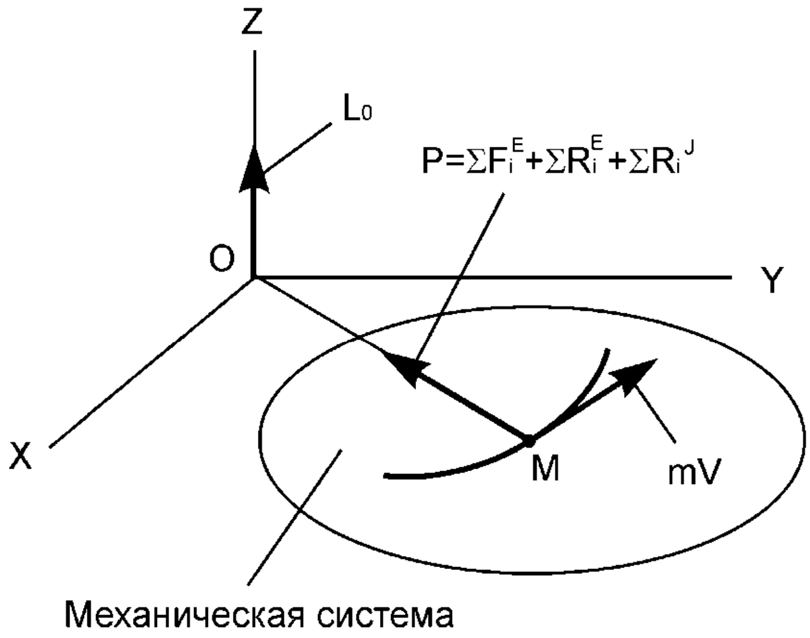


Рис. 5.8

***Центральная сила** – сила, линия действия которой постоянно проходит через некоторую точку, неподвижную в данной системе отсчета и называемую **центром силы**.*

Покажем, что линия действия равнодействующей силы **P** постоянно проходит через центр O. Тогда главный момент $\mathbf{M}_0$ активных сил $\mathbf{F}_i^E$, реакций $\mathbf{R}_i^E$ внешних связей и внутренних сил $\mathbf{R}_i^J$ равен нулю:

$$\mathbf{M}_0 = \Sigma \mathbf{M}_0(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma \mathbf{M}_0(\mathbf{R}_i^E) + \Sigma \mathbf{M}_0(\mathbf{R}_i^J) = 0.$$

Отсюда следует, что $\mathbf{L}_0 = \mathbf{const}$.

Из следствия 1 вытекает, что плоскость, в которой находятся вектор $m\mathbf{V}$ количества движения точки и центр O, не изменяет своего положения, т. е. траектория лежит в одной плоскости.

2. *Если момент равнодействующей приложенных к материальной точке активных сил, реакций внешних связей и внутренних сил относительно некоторой оси все время равняется нулю, то момент количества движения материальной точки относительно этой оси остается постоянным.*

Если, например, $M_{ox}(\mathbf{P}) = \Sigma M_{ox}(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_{ox}(\mathbf{R}_i^E) + \Sigma M_{ox}(\mathbf{R}_i^J) = 0$, то $dL_{ox}/dt = 0$ и, следовательно, $L_{ox} = \text{const}$.

5.3.3. Кинетический момент механической системы относительно центра и оси

***Кинетический момент или главный момент количеств движения механической системы относительно данного центра** – величина, равная сумме моментов количеств движения всех точек механической системы относительно этого центра.*

Момент количества движения каждой материальной точки системы (рис. 5.9) относительно центра О определяется по формуле

$$\mathbf{L}_{io} = \Sigma \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{V}_i.$$

Кинетический момент механической системы относительно центра О равен геометрической сумме моментов количеств движения материальных точек системы:

$$\mathbf{L}_o = \Sigma \mathbf{L}_{io}.$$

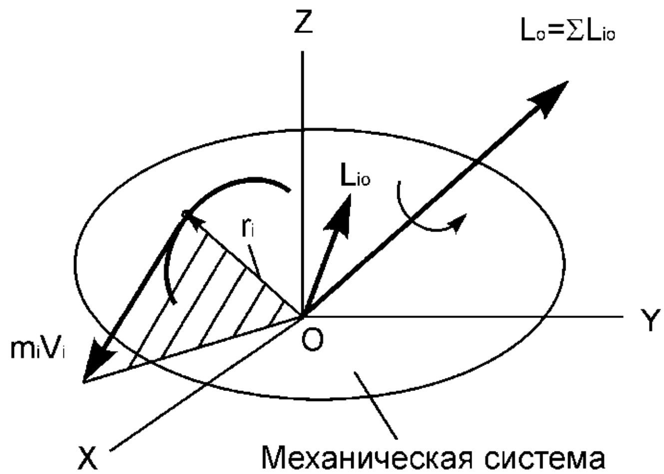


Рис. 5.9

***Кинетический момент или главный момент количеств движения механической системы относительно оси** – величина, равная сумме моментов количеств движения всех точек механической системы относительно этой оси.*

Определим кинетический момент механической системы относительно оси OZ (рис. 5.10).

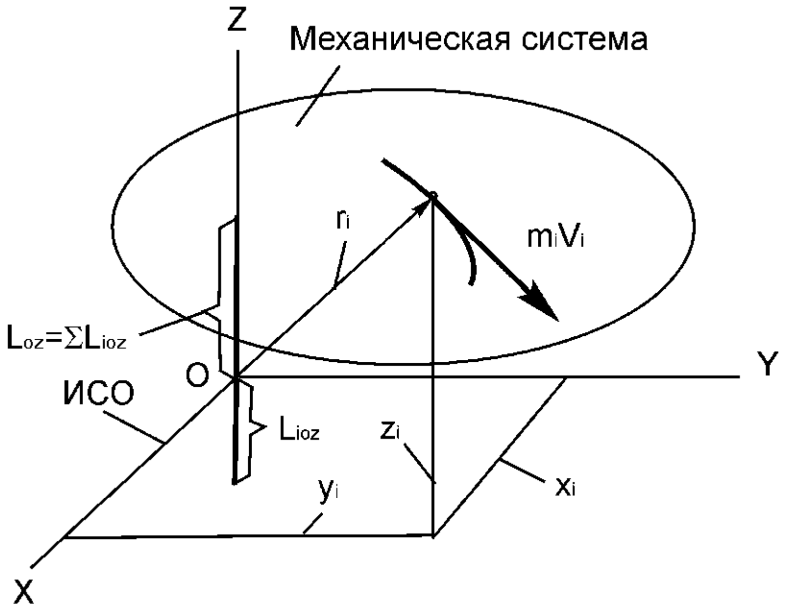


Рис. 5.10

Момент количества движения L_{ioz} каждой точки системы относительно оси вращения OZ определяется по формуле

$$L_{ioz} = m_i \dot{y}_i \cdot x_i - m_i \dot{x}_i \cdot y_i.$$

Кинетический момент механической системы относительно оси OZ вращения равен

$$L_{oz} = \Sigma L_{ioz}.$$

Аналогичным образом определяются кинетические моменты механической системы относительно осей вращения OX, OY.

5.3.4. Теорема об изменении кинетического момента механической системы

Рассмотрим движение неизменяемой механической системы под действием активных сил $\mathbf{F}_i^E$, реакций $\mathbf{R}_i^E$ внешних связей и внутренних сил $\mathbf{R}_i^J$ (рис. 5.11).

Выберем некоторый неподвижный центр O и определим изменение момента количества движения i-й точки относительно этого центра:

$$d\mathbf{L}_{io}/dt = \Sigma \mathbf{M}_o(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma \mathbf{M}_o(\mathbf{R}_i^E) + \Sigma \mathbf{M}_o(\mathbf{R}_i^J),$$

где i изменяется от 1 до n.

Просуммируем полученные n уравнений.

$$\Sigma d\mathbf{L}_{io}/dt = d\mathbf{L}_o/dt = \Sigma\mathbf{M}_o(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma\mathbf{M}_o(\mathbf{R}_i^E) + \Sigma\mathbf{M}_o(\mathbf{R}_i^J),$$

где $\mathbf{L}_o$ – вектор кинетического момента механической системы относительно центра O.

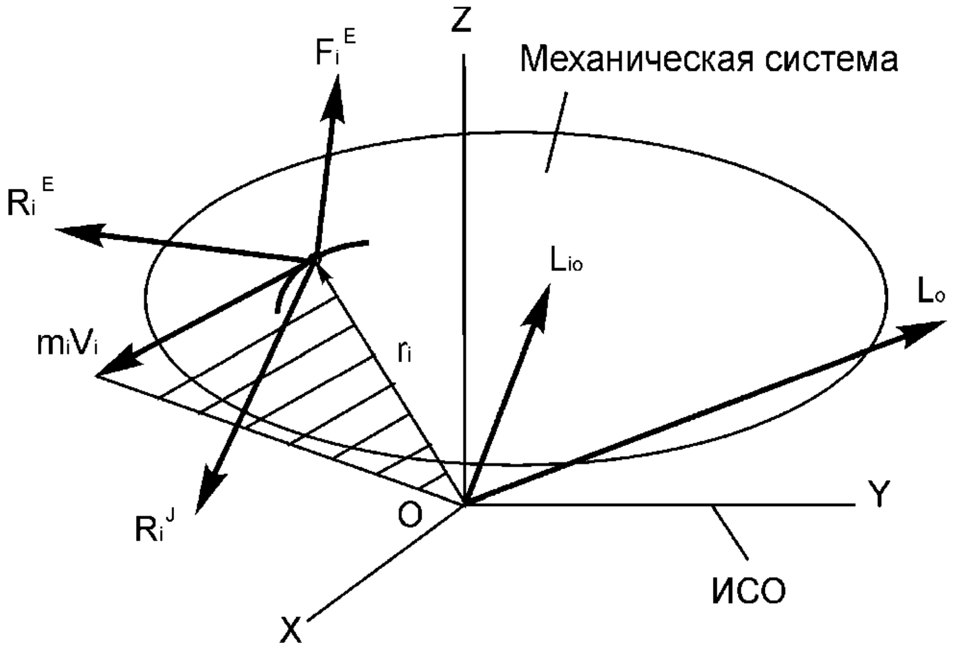


Рис. 5.11

Как известно, для неизменяемой механической системы геометрическая сумма внутренних сил равна нулю ($\Sigma\mathbf{R}_i^J = 0$). Отсюда следует, что и геометрическая сумма моментов этих сил относительно любого центра равна нулю. Приняв за такой центр точку O, имеем $\Sigma\mathbf{M}_0(\mathbf{R}_i^J) = 0$. Тогда получим

$$d\mathbf{L}_0/dt = \Sigma\mathbf{M}_0(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma\mathbf{M}_0(\mathbf{R}_i^E).$$

Это равенство выражает ***теорему об изменении кинетического момента механической системы***.

Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторого неподвижного центра равна геометрической сумме моментов приложенных к системе активных сил и реакций внешних связей относительно того же центра.

Последнему векторному равенству соответствуют три равенства в проекциях на оси координат:

$$dL_{ox}/dt = \Sigma M_{ox}(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_{ox}(\mathbf{R}_i^E);$$

$$dL_{oy}/dt = \Sigma M_{oy}(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_{oy}(\mathbf{R}_i^E);$$
$$dL_{oz}/dt = \Sigma M_{oz}(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_{oz}(\mathbf{R}_i^E),$$

где L_{ox}, L_{oy}, L_{oz} – кинетические моменты механической системы относительно координатных осей; $\Sigma M_{ox}(\mathbf{F}_i^E)$, $\Sigma M_{oy}(\mathbf{F}_i^E)$, $\Sigma M_{oz}(\mathbf{F}_i^E)$ – суммы моментов активных сил относительно координатных осей; $\Sigma M_{ox}(\mathbf{R}_i^E)$, $\Sigma M_{oy}(\mathbf{R}_i^E)$, $\Sigma M_{oz}(\mathbf{R}_i^E)$ – суммы моментов реакций внешних связей относительно координатных осей.

Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторой оси равна сумме моментов приложенных к системе активных сил и реакций внешних связей относительно той же оси.

Следствия из теоремы

1. Если геометрическая сумма моментов, приложенных к системе активных сил и реакций внешних связей относительно некоторого неподвижного центра, остается все время равной нулю, то кинетический момент механической системы относительно этого центра остается постоянным.

Если $\Sigma \mathbf{M}_0(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma \mathbf{M}_0(\mathbf{R}_i^E) = 0$, то $d\mathbf{L}_0/dt = 0$ и, следовательно, $\mathbf{L}_0 = \mathbf{const}$.

2. Если алгебраическая сумма моментов, приложенных к механической системе активных сил и реакций внешних связей относительно некоторой оси, остается все время равной нулю, то кинетический момент механической системы относительно этой же оси остается постоянным.

Действительно, например, если $\Sigma M_{ox}(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_{ox}(\mathbf{R}_i^E) = 0$, то $dL_{ox}/dt = 0$ и, отсюда следует, что $L_{ox} = \text{const}$.

Следствия из теоремы об изменении кинетического момента механической системы выражают ***закон сохранения кинетического момента механической системы***.

5.3.5. Варианты курсового задания Д 3 «Применение теоремы об изменении кинетического момента к определению угловой скорости твердого тела»

Тело Н (тело 1) массой m_1 вращается вокруг вертикальной оси O_1Z_1 с постоянной угловой скоростью ω_0; при этом в точке О желоба АВ тела 1 на расстоянии АО от точки А, отсчитываемом вдоль желоба, находится материальная точка К массой m_2. В некоторый момент времени ($t_0 = 0$) на систему начинает действовать пара сил с моментом $M_z = M_z(t)$. При $t = \tau$ действие пары сил прекращается.

Определить угловую скорость ω_τ тела 1 в момент $t = \tau$.

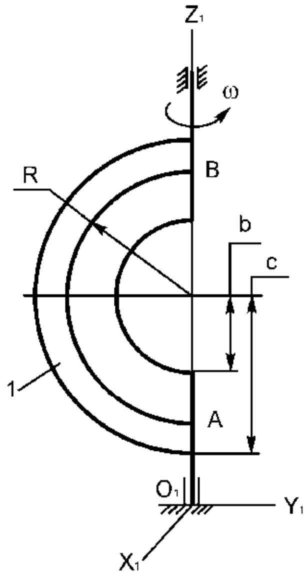
Тело 1 вращается по инерции с угловой скоростью ω_τ.

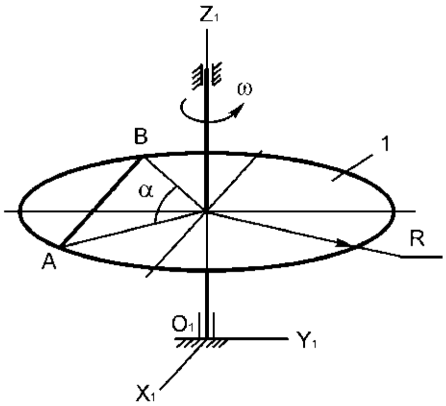
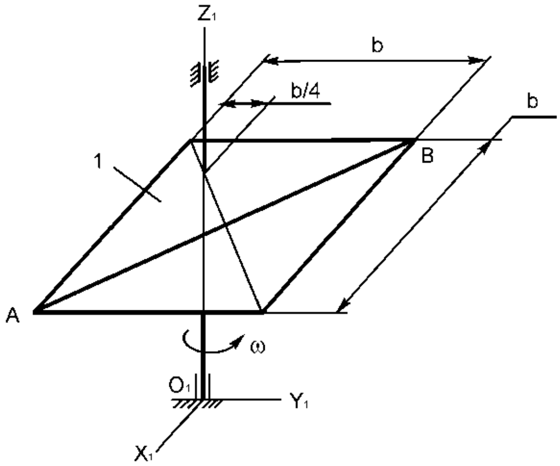
В некоторый момент времени $t_1 = 0$ (t_1 – новое начало отсчета времени) точка К (самоходный механизм) начинает относительное движение из точки О вдоль желоба АВ (в направлении от А к В) по закону $OK = s = s(t_1)$.

Определить угловую скорость ω_τ тела 1 при $t_1 = T$.

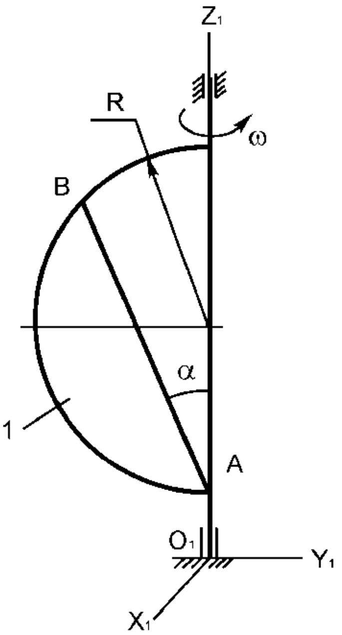
Тело 1 рассматривать как однородную пластинку. Расчетные схемы механизмов и необходимые для решения данные приведены в табл. 5.1.

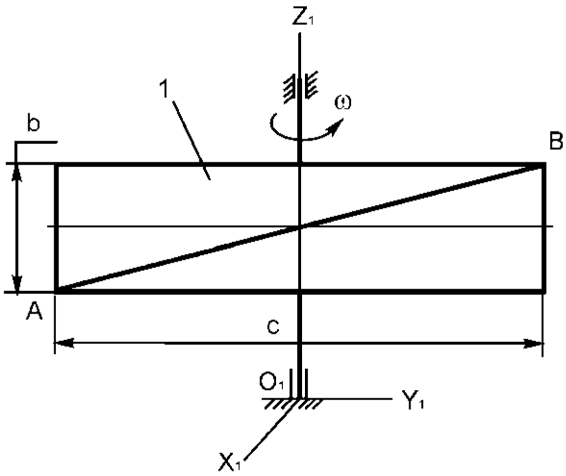
Номер вари-анта	Расчетная схема механизма	Исходные данные
1	2	3

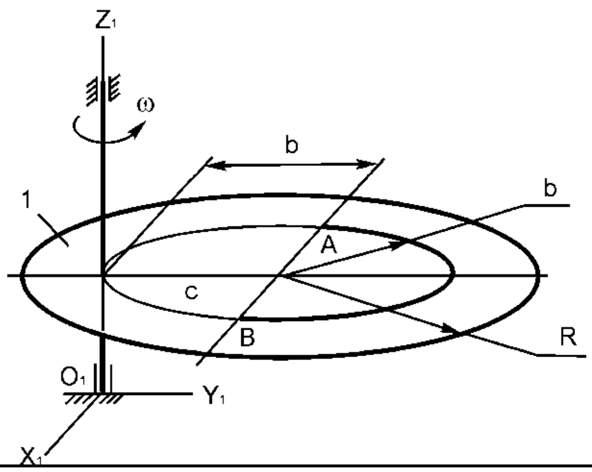
1		m_1 = 32 кг;
		m_2 = 10 кг;
		ω_0 = – 1 рад/с;
		b = 1, м;
		c = 1, 5 м;
		R = 1, 2 м;
		AO = πR/6 м;
		$M_z = -29{,}6t^2$ Н·м;
		τ = 3 с;
		OK = $(5\pi R/12)t_1$ м;
		T = 1 с

2		m_1 = 200 кг; m_2 = 60 кг; ω_0 = – 2 рад/с; R = 2 м; $\alpha = 120^o$; AO = 0,866 м; M_z = 101 Н·м; τ = 5 с; OK = $1{,}732(t_1)^2$ м; T = 1 с
3		m_1 = 120 кг; m_2 = 40 кг; ω_0 = 0 рад/с; b = 2 м; AO = 0 м; M_z = 120t Н·м; τ = 4 с; OK=$(1{,}414/4)(t_1)^2$ м; T = 2 с

Продолжение табл..5.1

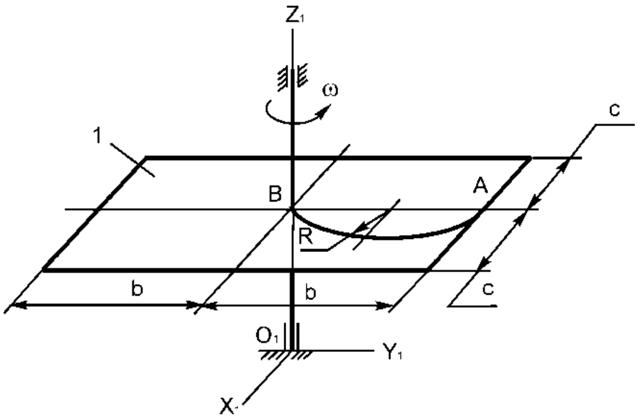
1	2	3
4		m_1 = 16 кг; m_2 = 5 кг; ω_0 = – 3 рад/с; R = 1 м; $\alpha = 30^o$; AO = 0,4 м; M_z = 21t Н·м; τ = 2 с; OK=0,6t_1 м; T = 2 с

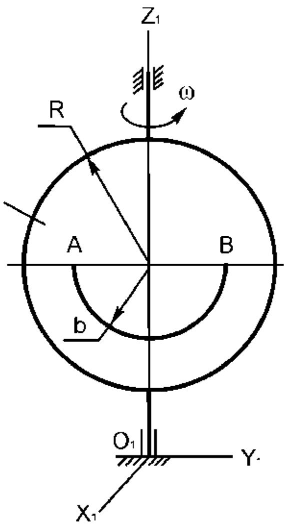
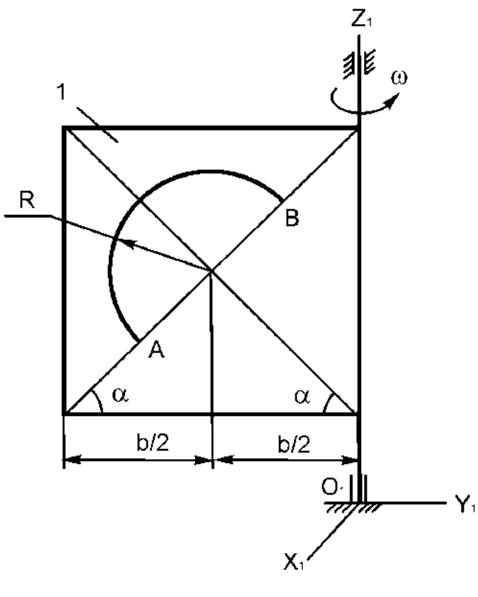
5		m_1 = 66 кг;
		m_2 = 10 кг;
		ω_0 = 1,5 рад/с;
		b = 2 м;
		c = 1,5 м;
		AO = 0 м;
		$M_z = 15t^{0,5}$ Н·м;
		τ = 4 с;
		OK=0,5t_1 м;
		T = 2,5 с

6		m_1 = 160 кг; m_2 = 80 кг; ω_0 = – 1,25 рад/с; b = 1,5 м; R = 2,5 м; $\alpha = 30^o$; AO = πb/6 м; M_z = – 700t Н·м; τ = 3 с; OK=$(5\pi b/18)(t_1)^2$ м; T = 1 с

Продолжение табл..5.1

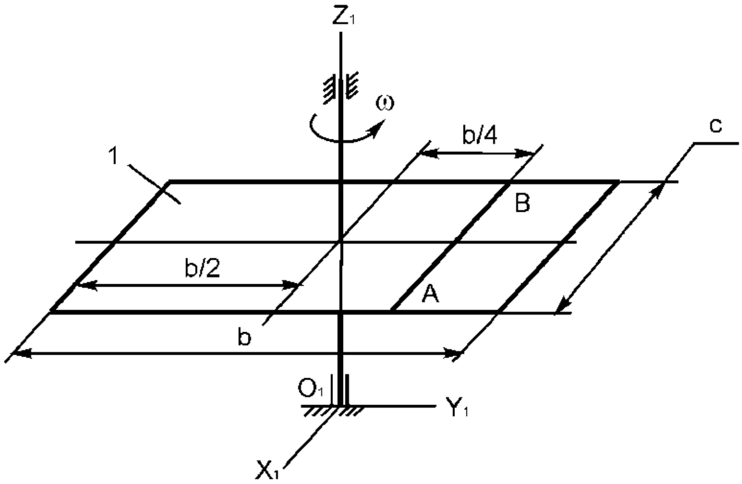
1	2	3

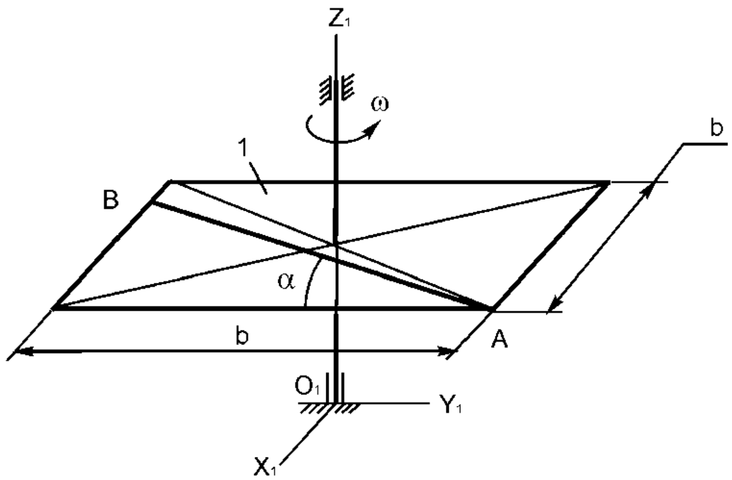
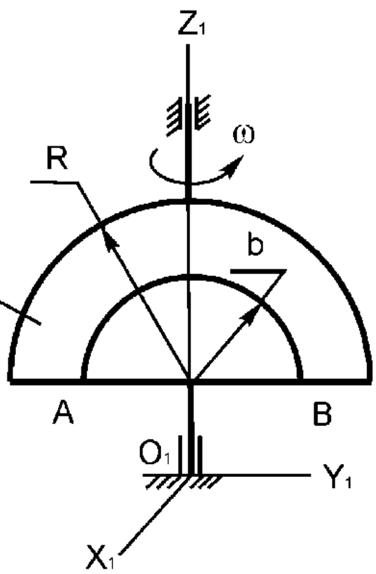
7		m_1 = 300 кг;
		m_2 = 50 кг;
		ω_0 = – 2 рад/с;
		b = 1,6 м;
		c = 1 м;
		R = 0,8 м;
		AO = 0 м;
		M_z = 968 Н·м;
		τ = 1 с;
		ОК=$(\pi R/2)(t_1)^2$ м;
		T = 1 c

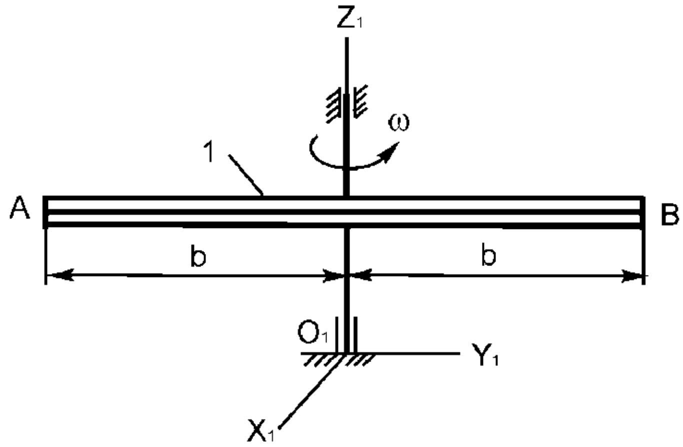
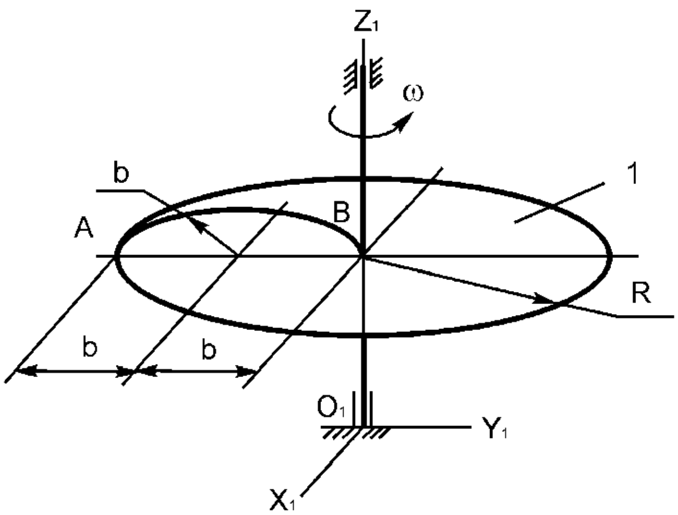
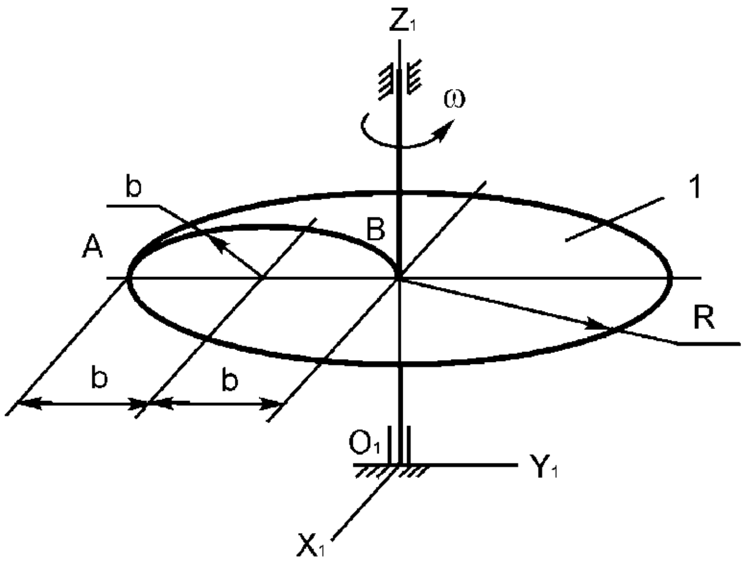
8		m_1 = 80 кг; m_2 = 20 кг; ω_0 = 0 рад/с; b = 1,2 м; R = 2 м; AO = πb/2 м; $M_z = 240t^{0,5}$ Н·м; τ = 4 с; ОК=$(\pi b/4)t_1$ м; T = 2 c
9		m_1 = 20 кг; m_2 = 5 кг; ω_0 = 5 рад/с; b = 1,2 м; R = 0,4 м; $\alpha = 45^o$; AO = πR/4 м; M_z = – 29,2t Н·м; τ = 3 с; ОК=$(3\pi R/4)(t_1)^2$ м; T = 1 c

Продолжение табл..5.1

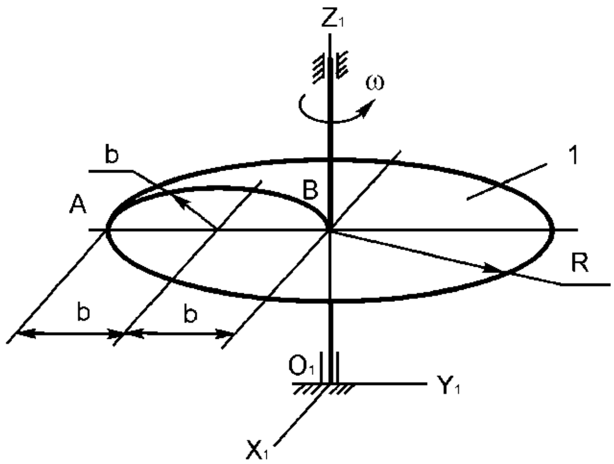
1	2	3

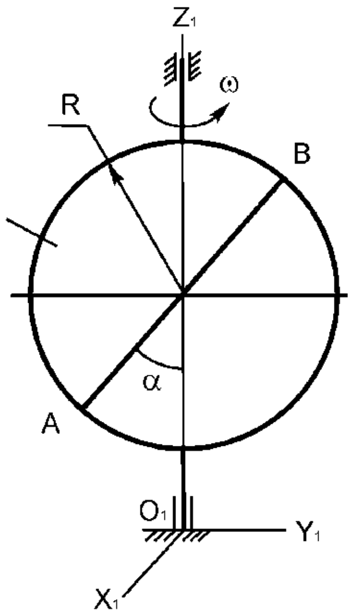
10		m_1 = 100 кг;
		m_2 = 40 кг;
		ω_0 = 2 рад/с;
		b = 2 м;
		c = 1,414 м;
		АО =0,707 м;
		$M_z = -90t^{0,5}$ Н·м;
		τ = 4 с;
		ОК=$(0,707/2)(t_1)^2$ м;
		Т = 1 с

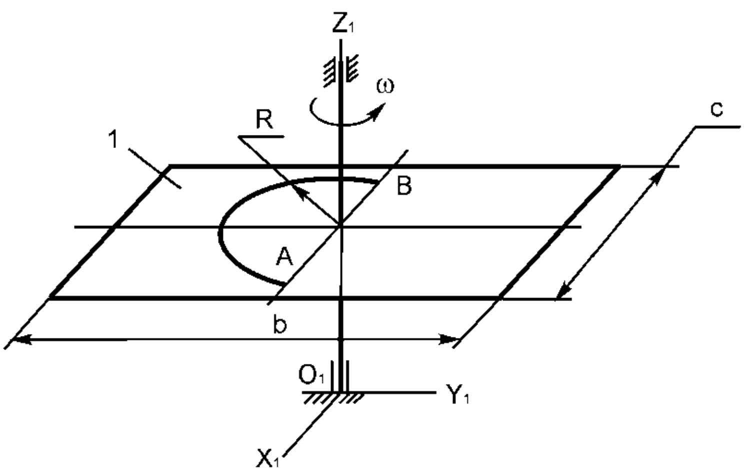
11		m_1 = 60 кг; m_2 = 20 кг; ω_0 = – 1 рад/с; b = 2 м; R = 2 м; АО = 0 м; M_z = 40t Н·м; τ = 2 с; ОК= $0,4(t_1)^2$ м; Т = 2 с
12		m_1 = 40 кг; m_2 = 10 кг; ω_0 = – 3 рад/с; b = 1 м; R = 2 м; АО =0 м; $M_z = 50t^2$ Н·м; τ = 3 с; ОК=$(\pi b/3)(t_1)^2$ м; Т = 2 с

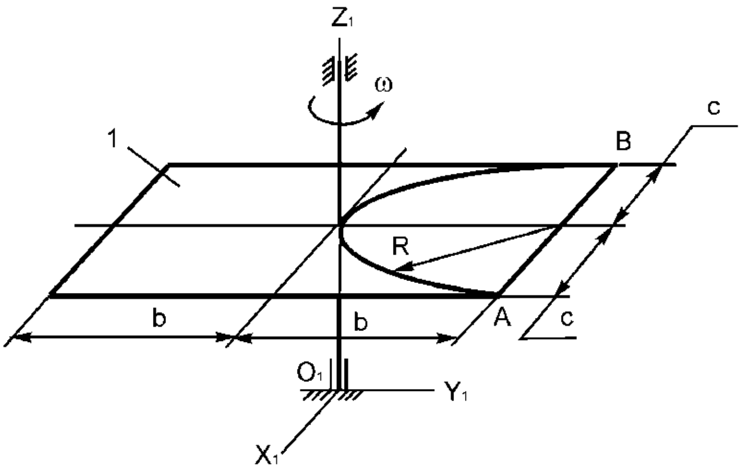
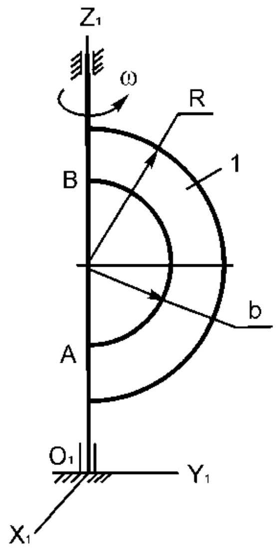
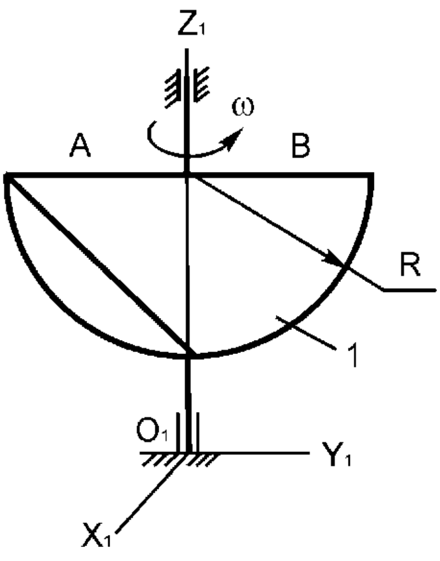
1	2	3
13		m_1 = 24 кг; m_2 = 4 кг; ω_0 = 4 рад/с; b = 1 м; AO =0,5 м; $M_z = -27t^{0,5}$ Н·м; τ = 1 с; ОК= $0,3t_1$ м; Т = 2 с
14		m_1 = 40 кг; m_2 = 10 кг; ω_0 = 2 рад/с; R = 1 м; AO = 0 м; M_z = 120t Н·м; τ = 1 с; ОК= $0,5t_1$ м; Т = 3 с
15		m_1 = 120 кг; m_2 = 50 кг; $\omega_0 = -4$ рад/с; b = 1 м; R = 2 м; AO = 0 м; $M_z = 330t^2$ Н·м; τ = 2 с; ОК= $(\pi b/2)(t_1)^2$ м; Т = 1 с

1	2	3

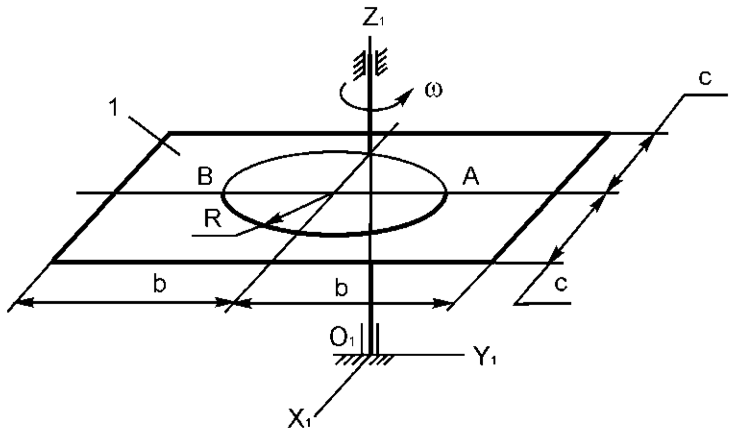
16		m_1 = 60 кг;
		m_2 = 10 кг;
		ω_0 = – 5 рад/с;
		b = 1 м;
		c = 1,2 м;
		$\alpha = 30^o$;
		AO =0,4 м;
		M_z = 74 Н·м;
		τ = 2 с;
		OK= $0,3(t_1)^2$ м;
		T = 2 с

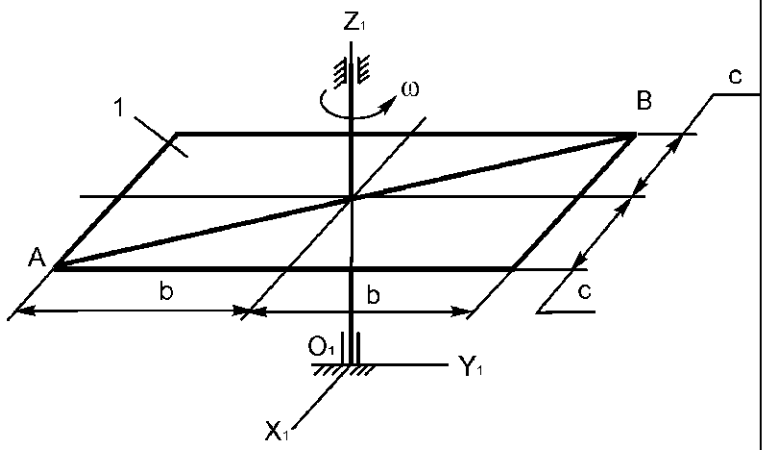
17		m_1 = 50 кг; m_2 = 10 кг; ω_0 = – 2 рад/с; R = 1,6 м; $\alpha = 30^o$; AO =0,6 м; M_z = 69t Н·м; τ = 4 с; OK= $0,6t_1$ м; T = 2 с

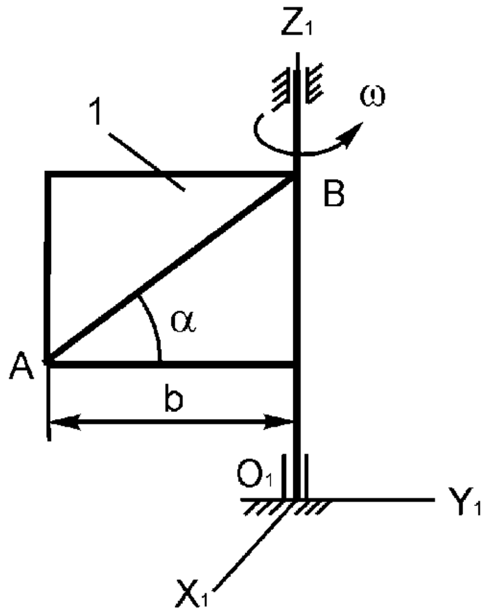
18		m_1 = 120 кг;
		m_2 = 50 кг;
		ω_0 = 3 рад/с;
		b = 2 м;
		c = 3 м;
		R = 0,8 м;
		AO = $\pi R/2$ м;
		M_z = 324 Н·м;
		τ = 3 с;
		OK= $(\pi R/8)(t_1)^2$ м;
		T = 2 с

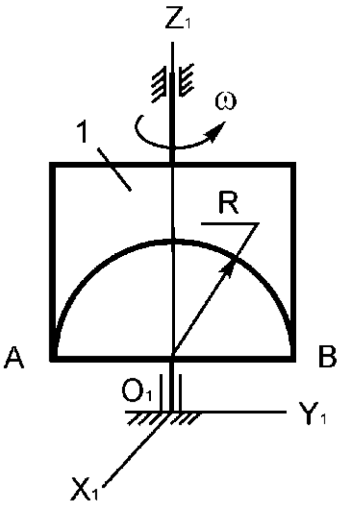
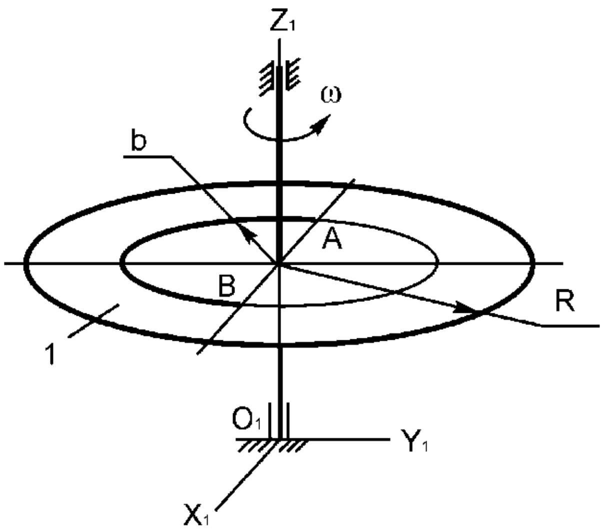
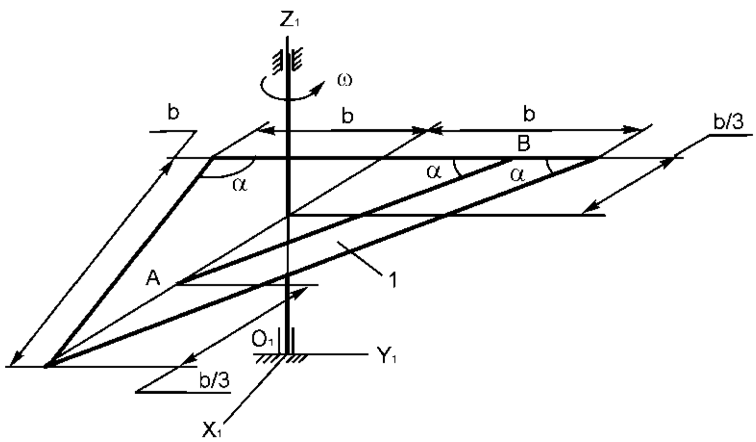
1	2	3
19		m_1 = 90 кг; m_2 = 30 кг; ω_0 = 1 рад/с; b = 1,5 м; AO = 0 м; M_z = – 135t Н·м; τ = 2 с; ОК= $(\pi b/4)(t_1)^2$ м; T = 1 с
20		m_1 = 50 кг; m_2 = 12 кг; ω_0 = 3 рад/с; b = 1 м; R = 1,2 м; AO = $\pi b/6$ м; M_z = $-14t^2$ Н·м; τ = 3 с; ОК= $(\pi b/12)(t_1)^2$ м; T = 2 с
21		m_1 = 40 кг; m_2 = 10 кг; ω_0 = – 6 рад/с; R = 1 м; AO = 0,707 м; M_z = $75t^{0,5}$ Н·м; τ = 1 с; ОК= $(1,41/16)(t_1)^2$ м; T = 2 с

1	2	3

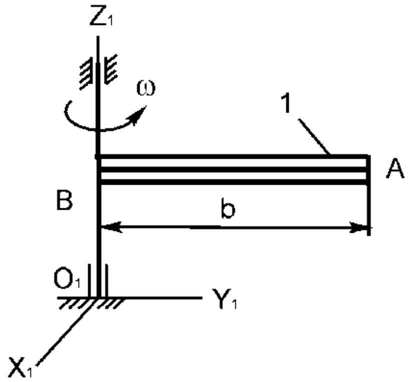
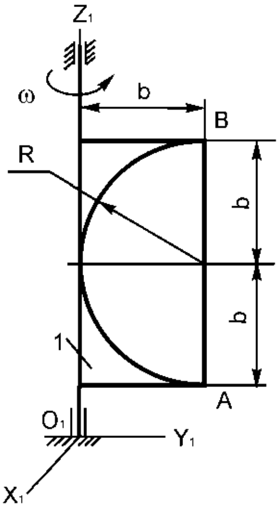
22		m_1 = 150 кг;
		m_2 = 50 кг;
		ω_0 = – 1 рад/с;
		b = 1,6 м;
		c = 1,2 м;
		R = 0,6 м;
		AO = πR/2 м;
		M_z = 163 Н·м;
		τ = 4 с;
		ОК= $(\pi R/2)(t_1)^2$ м;
		T = 1 с

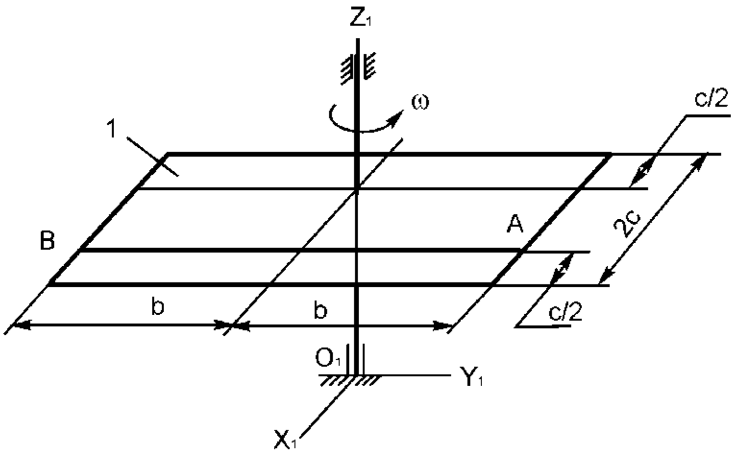
23		m_1 = 90 кг;
		m_2 = 20 кг;
		ω_0 = 2 рад/с;
		b = 1,414 м;
		c = 1 м;
		AO = 0,866 м;
		M_z = – 210 Н·м;
		τ = 2 с;
		ОК= 0,866t_1 м;
		T = 1 с

24		m_1 = 50 кг; m_2 = 12 кг; ω_0 = – 3 рад/с; b = 0,6 м; α = 60°; AO = 0,2 м; M_z = 27t^2 Н·м; τ = 2 с; ОК= 0,4t_1 м; T = 2 с

1	2	3
25		m_1 = 36 кг; m_2 = 8 кг; ω_0 = – 5 рад/с; R = 0,5 м; АО = 0 м; M_z = 20t Н·м; τ = 2 с; ОК= $(\pi R/6)(t_1)^2$ м; Т = 2 с
26		m_1 = 150 кг; m_2 = 40 кг; ω_0 = – 4 рад/с; b = 1,5 м; R = 2 м; АО = $\pi b/6$ м; M_z = $1170t^{0,5}$ Н·м; τ = 1 с; ОК= $(\pi b/2)(t_1)^2$ м; Т = 1 с
27		m_1 = 120 кг; m_2 = 30 кг; ω_0 = 0 рад/с; b = 1 м; $\alpha = 60^0$; АО = 0 м; M_z = – 25t Н·м; τ = 2 с; ОК= $(t_1)^2$ м; Т = 1 с

Окончание табл. 5.1

1	2	3
28		m_1 = 15 кг; m_2 = 4 кг; ω_0 = – 2 рад/с; b = 0,6 м; AO = 0,1 м; M_z = 5,6t Н·м; τ = 3 с; OK= 0,4t_1 м; T = 1 с
29		m_1 = 20 кг; m_2 = 5 кг; ω_0 = 5 рад/с; b = 0,6 м; R = 0,6 м; AO = 0 м; M_z = – 6,3$t^{0,5}$ Н·м; τ = 4 с; OK= (5πR/6)t_1 м; T = 1 с

30		m_1 = 150 кг;
		m_2 = 50 кг;
		ω_0 = 0 рад/с;
		b = 1,6 м;
		c = 1,2 м;
		AO = 1,6 м;
		M_z = 652t Н·м;
		τ = 2 с;
		OK= 0,2$(t_1)^2$ м;
		T = 2 с

ПРИМЕЧАНИЕ. Знак минус перед M_z и ω соответствует направлению вращения часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси OZ.

5.3.6. Пример выполнения курсового задания Д 3

***Условие задания*.**

Тело Н массой m_1 вращается вокруг вертикальной оси O_1Z_1 с постоянной угловой скоростью ω_0 (рис. 5.12).

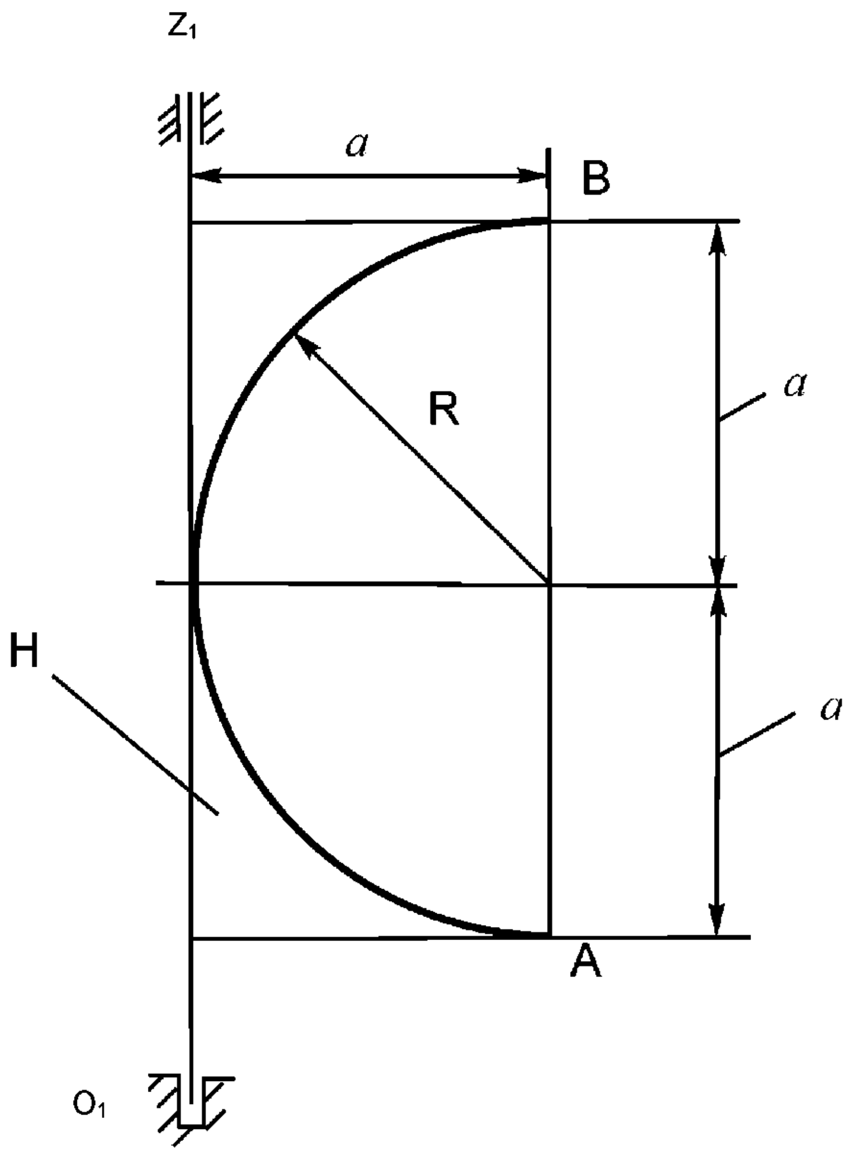


Рис. 5.12

В точке О желоба АВ тела Н на расстоянии АО от точки А, отсчитываемом вдоль желоба, находится материальная точка К массой m_2 (на рис. 5.12 точки О и К не показаны). В некоторый момент времени (t_0 = 0) на систему начинает действовать пара сил с моментом $M_z = M_z(t)$. При $t = \tau$ действие пары сил прекращается.

Определить угловую скорость ω_τ тела Н в момент $t = \tau$.

Тело Н вращается по инерции с угловой скоростью $\omega_т$.

В некоторый момент времени (t_1 = 0, где t_1 – новое начало отсчета времени) точка К (самоходный механизм) начинает относительное движение из точки О вдоль желоба АВ (в направлении от А к В) по закону ОК = s = s(t_1).

Определить угловую скорость ω_T тела Н при t_1 = Т.

Тело Н рассматривать как однородную пластинку.

Дано: m_1 = 20 кг; m_2 = 5 кг; ω_0 = 5 рад/с = const; a = 0,6 м; R = 0,6 м; АО = 0 м; $M_z = -6{,}3t^{0,5}$ Нм; τ = 4 с; ОК = s(t_1) = ($5\pi R/6$)t_1 м; Т = 1с.

Решение.

К решению задачи применим теорему об изменении кинетического момента механической системы, выраженную уравнением

$$dL_{o1z1}/dt = \Sigma M_{o1z1}(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_{o1z1}(\mathbf{R}_i^E),$$

где L_{o1z1} – кинетический момент механической системы относительно оси вращения; $\Sigma M_{o1z1}(\mathbf{F}_i^E)$, $\Sigma M_{o1z1}(\mathbf{R}_i^E)$ – соответственно суммы моментов активных сил и реакций внешних связей относительно оси вращения.

Решение задачи разобьем на три этапа. На первом этапе рассмотрим движение механической системы в исходном положении; на втором этапе – движение этой системы в момент времени τ; на третьем этапе – движение механической системы в момент времени Т.

Первый этап.

В исходном положении тело Н (тело 1 массой m_1), на котором неподвижно (на расстоянии АО = 0 м) установлено тело 2 (самоходный механизм массой m_2), вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 (см. рис. 5.12).

Введем неподвижную (инерциальную) систему отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$, совместив ось O_1Z_1 с осью вращения тела 1. Покажем на рис. 5.13 направление вращения тела 1 с угловой скоростью ω.

Внимание!

Независимо от знака начальной угловой скорости ω_0 направление вращения тела 1 на рис. 5.13 рекомендуется показывать против хода часовой стрелки. Это позволит решать задачу в общем виде для любого направления вращения тела 1. Частные решения будут получены при подстановке в общее решение исходных данных задачи.

Определим положение центра C_2 масс тела 2 на теле 1. Поскольку АО = 0, то точки А, О и C_2 совпадают. Центр масс тела 2 описывает окружность, расположенную в горизонтальной плоскости. Центр этой окружности находится на оси вращения. Покажем на рис. 5.13 траекторию движения этого центра масс, а также векторы абсолютной скорости $\mathbf{V}_{c2}$ и количества движения $m_2\mathbf{V}_{c2}$. Эти векторы приложены в точке C_2 и направлены противоположно направлению координатной оси O_1X_1.

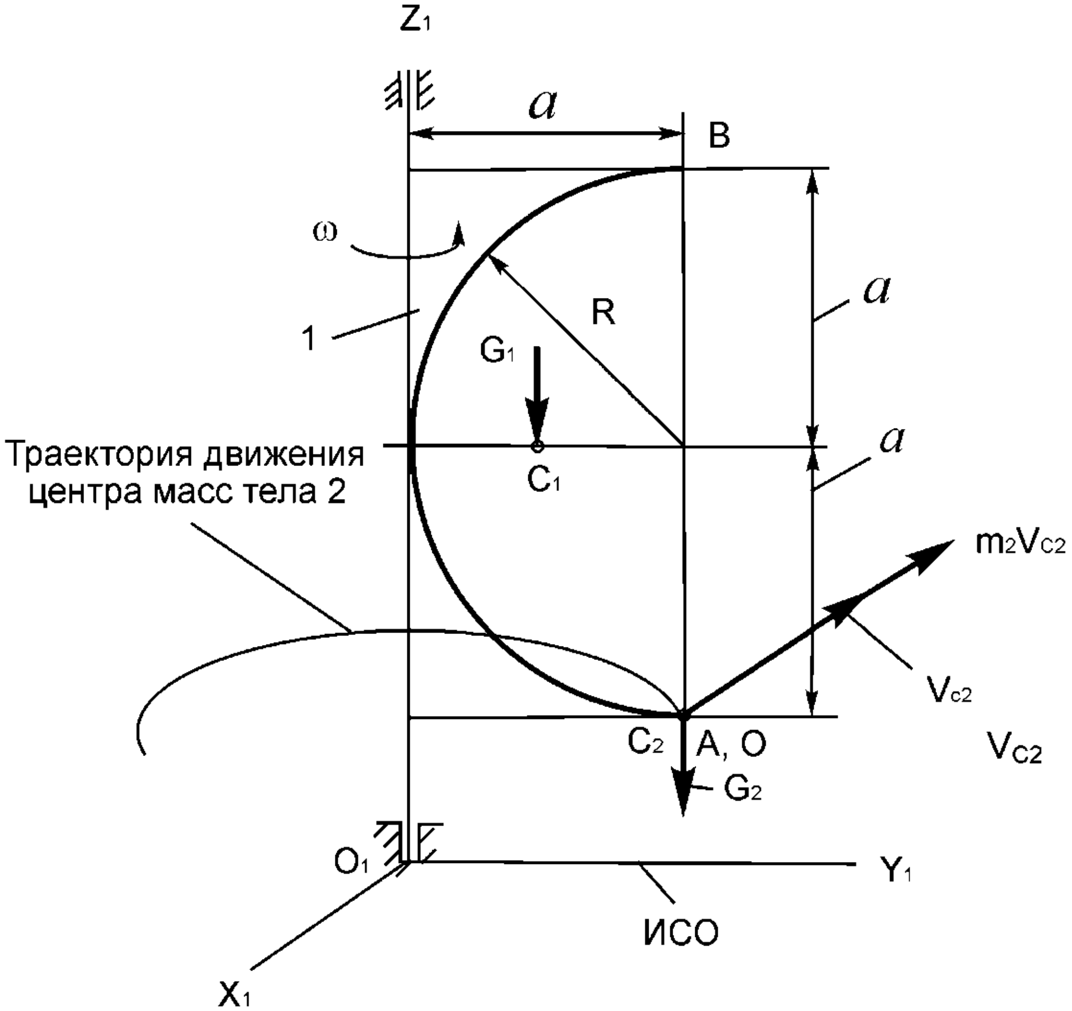


Рис. 5.13

Определим кинетический момент L_{01z1} механической системы относительно оси вращения O_1Z_1 по формуле

$$L_{01z1} = L_{01z1(1)} + L_{01z1(2)},$$

где $L_{01z1(1)}$, $L_{01z1(2)}$ – соответственно кинетические моменты тел 1 и 2 относительно оси вращения O_1Z_1.

Величину $L_{01z1(1)}$ вычисляют по формуле

$$L_{01z1(1)} = J_{o1z1(1)}\omega,$$

где $J_{o1z1(1)}$ – момент инерции тела 1 относительно оси вращения.

Поскольку по условию задания тело 1 – однородная прямоугольная пластина, то имеем $J_{o1z1(1)} = m_1a^2/3$ (см. табл. 4.1). Тогда

$$L_{01z1(1)} = (m_1a^2/3)\omega = (20\cdot 0{,}6^2/3)\omega = 2{,}4\omega.$$

Кинетический момент $L_{01z1(2)}$ тела 2 относительно оси вращения равен моменту количества движения $m_2\mathbf{V}_{c2}$ этого тела относительно той же оси.

$$L_{01z1(2)} = (m_2V_{c2})\cdot a = (m_2(\omega\, a))\, a = m_2\, a^2\cdot\omega = 5\cdot 0{,}6^2\cdot\omega = 1{,}8\omega.$$

Поскольку кинетические моменты тел механической системы определены, то кинетический момент L_{01z1} системы равен

$$L_{01z1} = L_{01z1(1)} + L_{01z1(2)} = 2{,}4\omega + 1{,}8\omega = 4{,}2\omega.$$

Таким образом, формула для определения кинетического момента L_{01z1} механической системы в ее исходном положении получена.

Второй этап.

Рассмотрим движение механической системы под действием активных нагрузок и реакций внешних связей (рис. 5.14).

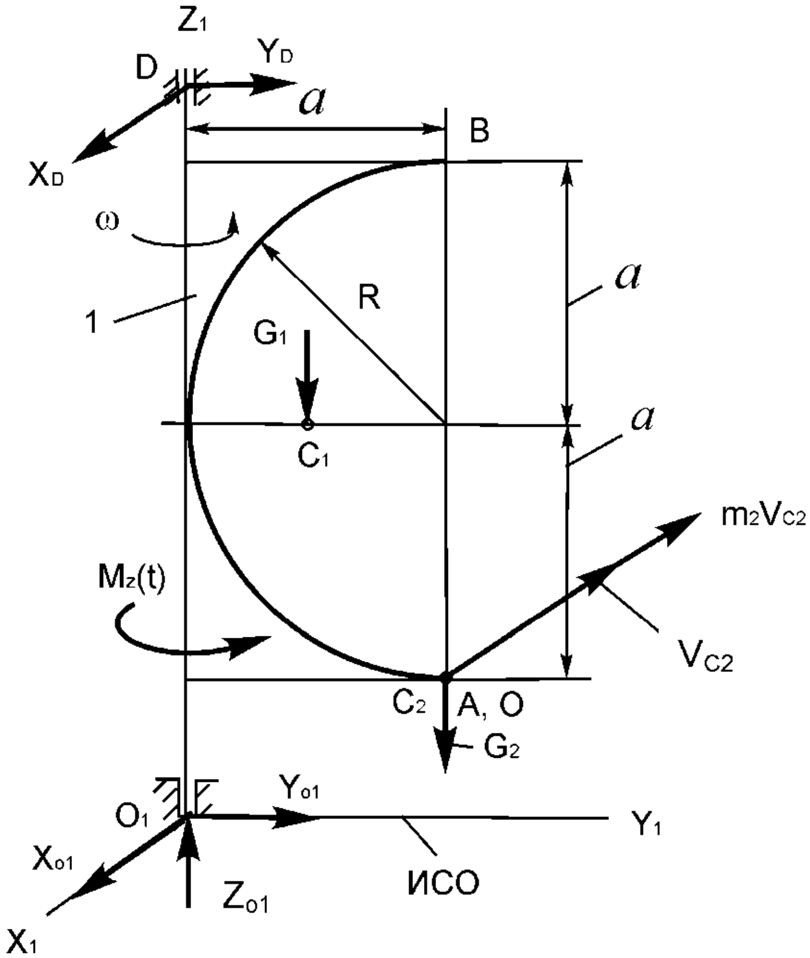


Рис. 5.14

Согласно рис. 5.14 на механическую систему действуют внешние нагрузки: активные силы $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ (силы тяжести тел системы); активный момент $M_z(t)$, зависящий от времени; реакции $\mathbf{X}_{O1}$, $\mathbf{Y}_{O1}$, $\mathbf{Z}_{O1}$ в точке O_1 подпятника и реакции $\mathbf{X}_D$, $\mathbf{Y}_D$ цилиндрического шарнира в точке D.

Внимание!

Независимо от знака момента $M_z(t)$, заданного в исходных данных задачи, на рис. 5.14 направление этого момента рекомендуется показывать против хода часовой стрелки. Это позволяет решать задачу в общем виде и получать частные решения при любых исходных данных.

Так как активный момент $M_z(t)$ зависит от времени, то очевидно, что при его действии на механическую систему будет изменяться ее угловая скорость ω.

В принятых условных обозначениях теорема об изменении кинетического момента механической системы записывается в виде

$$dL_{01z1}/dt = \Sigma M_{01z1}(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_{01z1}(\mathbf{R}_i^E).$$

Определим производную по времени от кинетического момента механической системы относительно оси вращения.

$$dL_{01z1}/dt = d(4{,}2\omega)/dt = 4{,}2d\omega/dt.$$

Сумма моментов активных нагрузок, приложенных к механической системе, относительно оси вращения равна

$$\Sigma M_{01z1}(\mathbf{F}_i^E) = M_z = -\,6{,}3t^{0{,}5}.$$

Сумма моментов реакций внешних связей относительно оси вращения равна нулю ($\Sigma M_{01z1}(\mathbf{R}_i^E) = 0$).

В этих условиях теорема об изменении кинетического момента механической системы относительно оси вращения приобретает вид дифференциального уравнения:

$$4{,}2d\omega/dt = -\,6{,}3t^{0{,}5}.$$

Проинтегрируем это уравнение и решим его:

$$\int\omega = -\,1{,}5\int t^{0{,}5}dt;$$

$$\omega_\tau - \omega_0 = -\,1{,}5(0{,}5\tau^{0{,}5}) = -\,0{,}75\tau^{0{,}5};$$

$$\omega_\tau = \omega_0 - 0{,}75\tau^{0{,}5} = 5 - 0{,}75\cdot 4^{0{,}5} = 3{,}5 \text{ рад/с}.$$

Таким образом, при приложении активного отрицательного момента $M_z = -\,6{,}3t^{0{,}5}$ к механической системе ее угловая скорость за промежуток времени $\tau = 4$ с изменится с начального значения $\omega_0 = 5$ рад/с до значения $\omega_\tau = 3{,}5$ рад/с.

Ответ на один из вопросов ($\omega_\tau = ?$) курсового задания получен.

Третий этап.

Рассмотрим движение механической системы в момент времени Т, когда на нее действуют только активные силы $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ (силы тяжести тел системы); реакции $\mathbf{X}_{O1}$, $\mathbf{Y}_{O1}$, $\mathbf{Z}_{O1}$ в точке O_1 подпятника и реакции $\mathbf{X}_D$, $\mathbf{Y}_D$ цилиндрического шарнира в точке D (рис. 5.15).

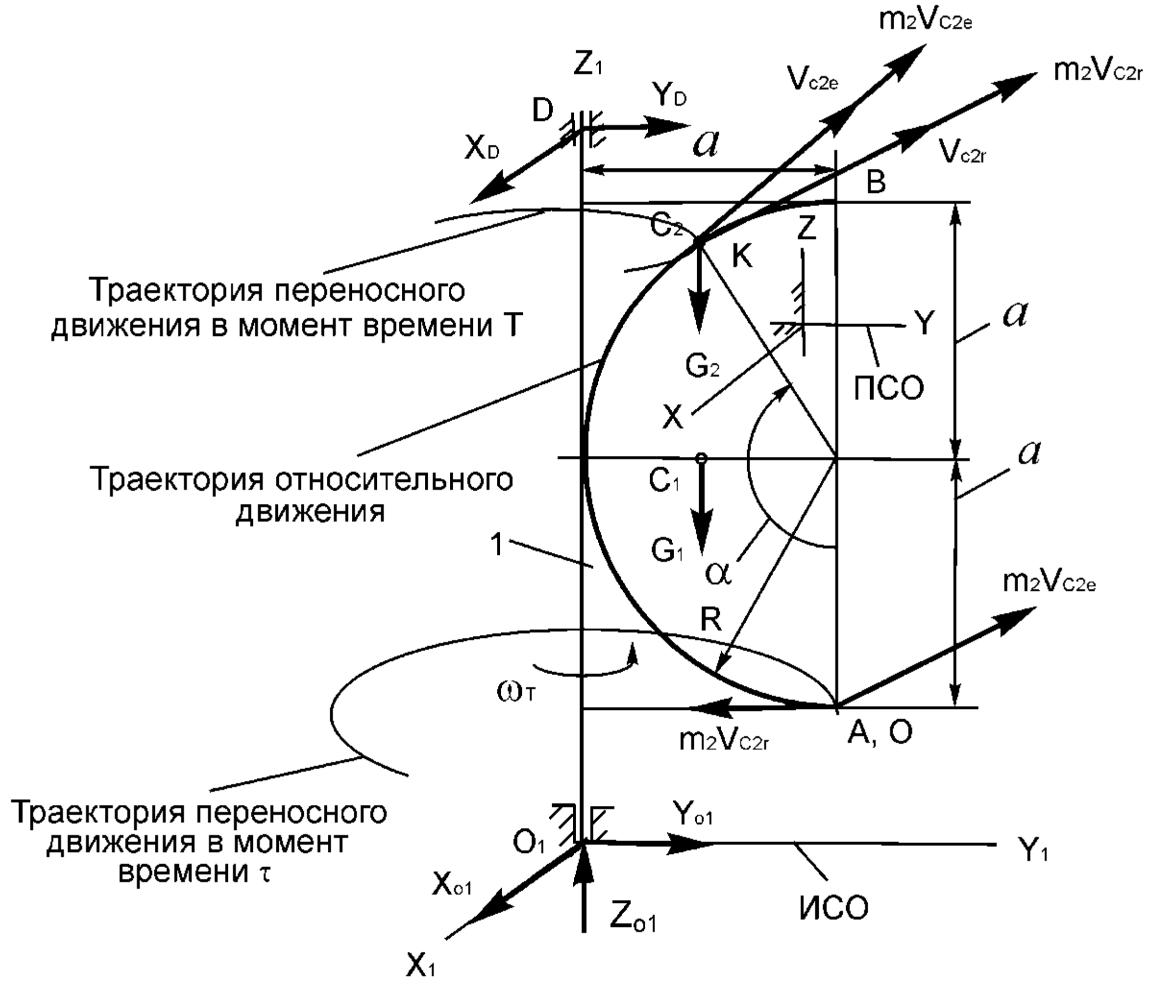


Рис. 5.15

Поскольку материальная точка К совершает сложное движение (перемещается по вращающемуся телу 1), то необходимо рассмотреть это движение в подвижной (ПСО) и неподвижной инерциальной (ИСО) системах отсчета. Так как ПСО закреплена на теле 1, то она совершает вращательное движение.

Из курса кинематики известно, что абсолютная скорость точки в сложном движении равна

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_e,$$

где $\mathbf{V}_r$ – относительная скорость; $\mathbf{V}_e$ – переносная скорость.

Определим абсолютную скорость $\mathbf{V}_{C2}$ точки К.

В нашем случае траектория относительного движения точки – траектория ее движения по телу 1. Такой траекторией является дуга АВ окружности радиусом R. По условию задания уравнение относительного движения точки ($OK = (5\pi R/6)t_1$) известно. Зафиксируем положение точки К на траектории относительного движения в момент времени Т центральным углом α.

$$OK(T) = (5\pi R/6)T = (5\pi R/6)1 = (5\pi R/6).$$

$$\alpha = OK(T)/R = (5\pi R/6)/R = 5\pi/6 \text{ рад}.$$

В градусной мере $\alpha = 150°$. На рис. 5.15 покажем траекторию переносного движения точки К. Эта траектория есть окружность, расположенная в горизонтальной плоскости. Центр окружности находится на оси вращения. Радиус окружности определим по формуле

$$r = a - R\sin(\pi - \alpha) = a - a\sin\alpha = a(1 - \sin\alpha) = a(1 - 0{,}5) = 0{,}5a.$$

Абсолютную скорость $\mathbf{V}_{C2}$ центра масс тела 2 (абсолютную скорость точки К) определим по формуле

$$\mathbf{V}_{C2} = \mathbf{V}_{C2r} + \mathbf{V}_{C2e},$$

где $\mathbf{V}_{C2r}$ – относительная скорость; $\mathbf{V}_{C2e}$ – переносная скорость.

По заданному уравнению относительного движения ($OK = s = s(t_1)$) определим проекцию V_{C2r} относительной скорости точки на касательную к траектории ее движения.

$$V_{C2r} = ds/dt_1 = d((5\pi R/6)t_1)/dt_1 = 5\pi R/6 = \text{const} > 0.$$

Поскольку $ds/dt_1 > 0$, то относительная скорость $\mathbf{V}_{C2r}$ направлена в сторону увеличения дуговой координаты $OK = s$ (см. рис. 5.15). Необходимо отметить, что вектор скорости $\mathbf{V}_{C2r}$ лежит в плоскости рисунка.

Модуль V_{C2e} переносной скорости $\mathbf{V}_{C2e}$ центра масс тела 2 определим по формуле

$$V_{C2e} = r\cdot\omega = 0{,}5a\omega.$$

Вектор $\mathbf{V}_{C2e}$ переносной скорости направлен перпендикулярно плоскости рис. 5.15 (параллельно оси O_1X_1).

Абсолютное количество движения $m_2\mathbf{V}_{C2}$ тела 2 находим по формуле

$$m_2\mathbf{V}_{C2} = m_2(\mathbf{V}_{C2r} + \mathbf{V}_{C2e}) = m_2\mathbf{V}_{C2r} + m_2\mathbf{V}_{C2e},$$

где $m_2\mathbf{V}_{C2r}$, $m\mathbf{V}_{C2e}$ – соответственно относительное и переносное количества движения.

Векторы $m_2\mathbf{V}_{C2r}$, $m\mathbf{V}_{C2e}$ покажем на рис. 5.15.

Запишем теорему об изменении кинетического момента механической системы для рассматриваемого этапа расчета:

$$dL_{o1z1}/dt_1 = \Sigma M_{o1z1}(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_{o1z1}(\mathbf{R}_i^E).$$

Поскольку сумма моментов активных сил $\mathbf{F}_i^E$ относительно оси вращения равна нулю ($\Sigma M_{o1z1}(\mathbf{F}_i^E) = 0$) и сумма моментов реакций $\mathbf{R}_i^E$ внешних связей относительно той же оси также равна нулю ($\Sigma M_{o1z1}(\mathbf{R}_i^E) = 0$), то, следовательно, имеем $dL_{o1z1}/dt_1 = 0$. Отсюда следует, что $L_{o1z1} = \text{const}$, т. е. при движении механической системы ее кинетический момент относительно оси не изменяется. Имеет место случай сохранения кинетического момента механической системы относительно оси O_1Z_1 ее вращения. Исходя из этого, справедливо утверждение

$$L_{o1z1(\tau)} = L_{o1z1(T)},$$

где $L_{o1z1(\tau)}$, $L_{o1z1(T)}$ – кинетические моменты механической системы в расчетные моменты времени τ и Т.

В начальный момент времени ($t_{10} = 0$) имеем: угловая скорость прямоугольной пластины $\omega_\tau = 3{,}5$ рад/с; векторы количеств движения $m_2\mathbf{V}_{c2r}$, $m_2\mathbf{V}_{c2e}$ направлены так, как это показано на рис. 5.15.

Кинетический момент $L_{o1z1}(t_{10} = 0)$ механической системы в начальный момент времени определим по формуле

$$L_{o1z1}(t_{10} = 0) = 4{,}2\ \omega_\tau.$$

Кинетический момент $L_{o1z1(T)}$ механической системы в момент времени Т равен

$$L_{o1z1(T)} = L_{o1z1(1)} + L_{o1z1(2)},$$

где $L_{o1z1(1)}$, $L_{o1z1(2)}$ – соответственно кинетические моменты тел 1 и 2 относительно оси вращения в момент времени Т.

$$L_{o1z1(1)} = 2{,}4\omega_T.$$

$$L_{o1z1(2)} = m_2V_{C2e}\cdot r = (m_2(\omega_T r))r = m_2\omega_T(r)^2 =$$

$$= m_2\omega_T(0{,}5a)^2 = 5\omega_T(0{,}5\cdot 0{,}6)^2 = 0{,}45\omega_T.$$

Тогда

$$L_{o1z1(T)} = 2{,}4\omega_T + 0{,}45\omega_T = 2{,}85\omega_T.$$

Так как кинетический момент механической системы относительно оси вращения постоянен, то

$$L_{o1z1}(t_{10} = 0) = 4{,}2\ \omega_\tau = L_{o1z1(T)} = 2{,}85\omega_T.$$

Отсюда

$$\omega_T = (4{,}2\ \omega_\tau)/2{,}85 = (4{,}2\cdot 3{,}5)/2{,}85 = 5{,}157 \text{ рад/с}.$$

По сравнению с исходным положением расчета третьего этапа, когда угловая скорость пластины была равна $\omega_\tau = 3{,}5$ рад/с, в конце расчета ее угловая скорость выросла до значения $\omega_T = 5{,}157$ рад/с. Произошло это потому, что центр масс механической системы сместился к оси вращения. Очевидно, что угловая скорость пластины достигнет максимального значения в момент времени, когда точка К будет находиться на оси вращения.

Таким образом, ответ на другой вопрос (ω_T = ?) курсового задания получен.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулировать определение понятия «***момент количества движения точки относительно произвольного центра***».
2. Сформулировать определение понятия «***плечо вектора количества движения точки относительно произвольного центра***».
3. Сформулировать определение понятия «***момент количества движения точки относительно оси***».
4. Записать формулы для определения ***моментов количества движения точки относительно координатных осей***.
5. Записать в векторной форме формулу, выражающую ***теорему об изменении момента количества движения материальной точки***.
6. Записать в скалярном виде формулу, выражающую ***теорему об изменении момента количества движения материальной точки***.
7. Сформулировать определение понятия «***центральная сила***».
8. Сформулировать определение понятия «***кинетический момент механической системы относительно центра***».
9. Сформулировать определение понятия «***кинетический момент механической системы относительно оси***».
10. Записать в скалярном виде формулы, ***выражающие теорему об изменении кинетического момента механической системы относительно координатных осей***.
11. Сформулировать следствия из теоремы об ***изменении кинетического момента механической системы относительно координатных осей***.

5.4. Динамика движений твердого тела

5.4.1. Динамика поступательного движения твердого тела

Поступательным движением твердого тела *называют такое его движение, при котором любая прямая линия, проведенная на теле, остается во все время движения параллельной своему начальному положению.*

Рассмотрим поступательное движение твердого тела на плоскости в инерциальной системе отсчета OXY под действием активных сил $\mathbf{F}_i^E$ и реакций $\mathbf{R}_i^E$ внешних связей (рис. 5.16).

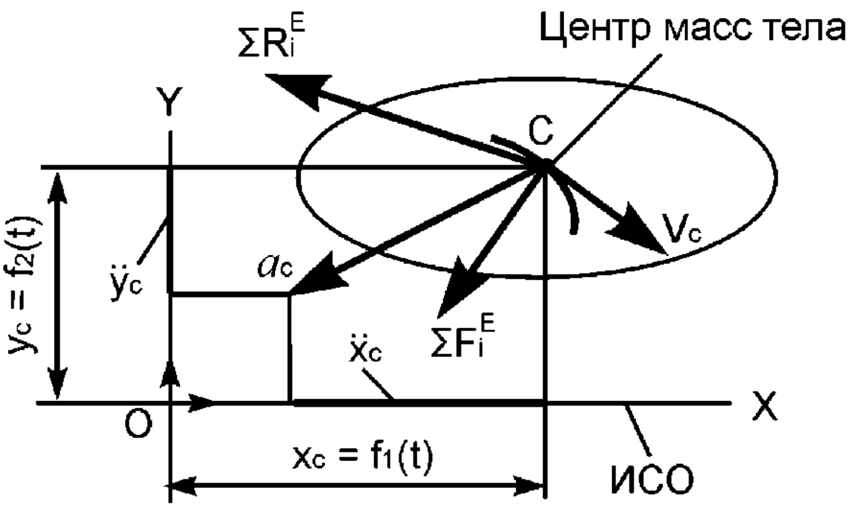


Рис. 5.16

Из курса кинематики известно, что при поступательном движении твердого тела траектории всех его точек одинаковы (при наложении друг на друга траектории движения точек совпадают), а скорости и ускорения всех точек геометрически равны.

Эти свойства позволяют свести изучение поступательного движения твердого тела к изучению движения его отдельной точки. За такую точку, как правило, выбирают центр масс твердого тела.

Выражения $x_c = f_1(t)$, $y_c = f_2(t)$, $z_c = f_3(t)$, описывающие движение центра С масс твердого тела в пространстве, называют ***уравнениями поступательного движения твердого тела*** в пространстве.

Твердое тело рассматривается как неизменяемая механическая система, в которой геометрическая сумма внутренних сил $\Sigma\mathbf{R}_i^J$ (главный вектор $\mathbf{R}^J$ внутренних сил) всегда равна нулю ($\Sigma\mathbf{R}_i^J = \mathbf{R}^J = 0$).

Таким образом, центр С масс твердого тела при его поступательном движении движется под действием активных сил $\mathbf{F}_i^E$ и реакций $\mathbf{R}_i^E$ внешних связей.

Основное уравнение динамики движения центра масс имеет вид

$$m\boldsymbol{a}_c = \Sigma\mathbf{F}_i^E + \Sigma\mathbf{R}_i^E.$$

Спроецируем это векторное равенство на координатные оси неподвижной (инерциальной системы отсчета) OXYZ:

$$m\ddot{x}_c = \Sigma F^E_{iox} + \Sigma R^E_{iox};$$

$$m\ddot{y}_c = \Sigma F^E_{ioy} + \Sigma R^E_{ioy};$$

$$m\ddot{z}_c = \Sigma F^E_{ioz} + \Sigma R^E_{ioz},$$

где m – масса тела; $\ddot{x}_c$, $\ddot{y}_c$, $\ddot{z}_c$ – проекции ускорения центра масс тела на координатные оси; ΣF^E_{iox}, ΣF^E_{ioy}, ΣF^E_{ioz}, ΣR^E_{iox}, ΣR^E_{ioy}, ΣR^E_{ioz} – суммы проекций соответственно активных сил и реакций внешних связей на координатные оси инерциальной системы отсчета.

Последние выражения называют ***дифференциальными уравнениями поступательного движения твердого тела*** в пространстве.

По дифференциальным уравнениям поступательного движения твердого тела решают прямые и обратные задачи динамики. Алгоритмы решения таких задач не отличаются от алгоритмов решения задач динамики точки, приведенных в подразделах данного учебно-методического пособия, поэтому здесь они подробно не приводятся.

Так как курсовых заданий на решение дифференциальных уравнений поступательного движения твердого тела по учебной программе не предусмотрено, то и примеры решения таких задач здесь не приведены.

5.4.2. Динамика вращательного движения твердого тела

Вращательным движением твердого тела *называется такое его движение, при котором все точки, находящиеся на прямой, неизменно связанной с телом и называемой осью вращения, остаются неподвижными.*

Рассмотрим вращательное движение твердого тела в инерциальной системе отсчета OXYZ под действием активных сил $\mathbf{F}^E_i$ и реакций $\mathbf{R}^E_i$ внешних связей (рис. 5.17).

При вращении тела угол его поворота φ изменяется в зависимости от времени t.

$$\varphi = f(t).$$

Эту аналитическую зависимость называют ***уравнением вращательного движения*** твердого тела. При вращательном движении твердого тела все его точки описывают окружности с центром на оси вращения и радиусом r_i.

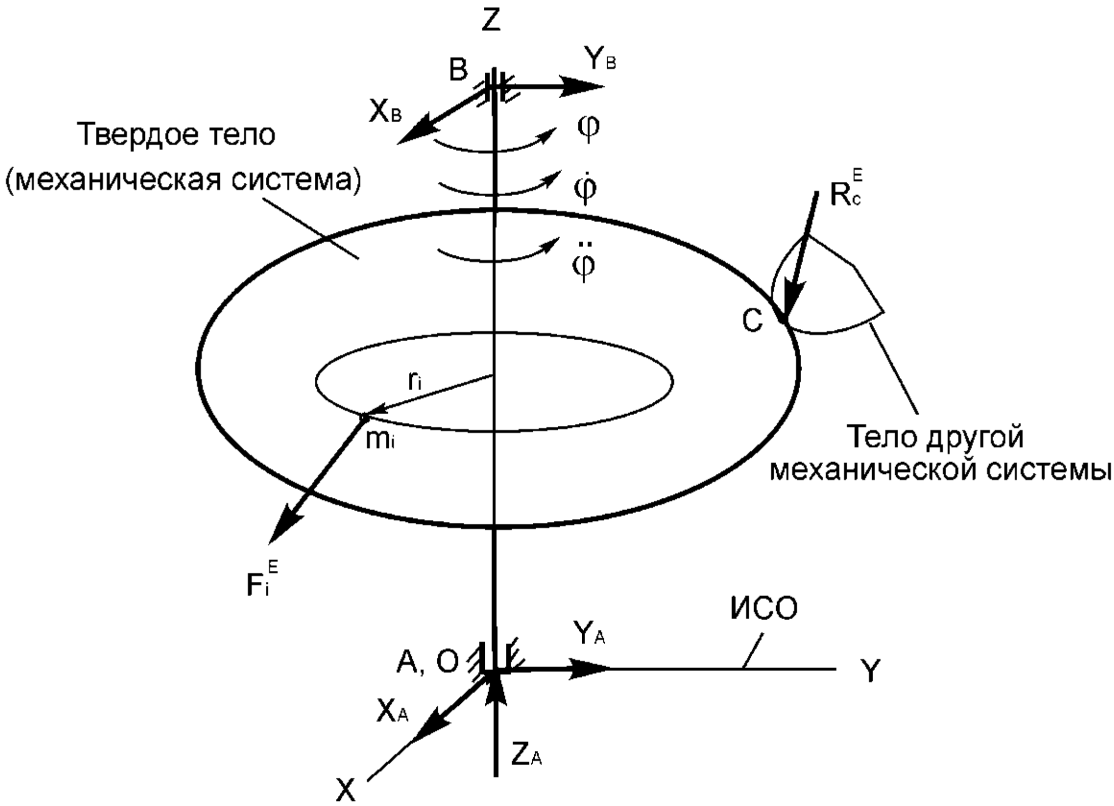


Рис. 5.17

По известному уравнению $\varphi = f(t)$ вращательного движения тела определяют его угловую скорость ω и угловое ускорение ε.

$$\omega = d\varphi/dt; \quad \varepsilon = d_2\varphi/dt^2.$$

Согласно рис. 5.17 на рассматриваемую механическую систему (твердое тело) кроме активных сил $\mathbf{F}_i^E$ действуют реакции $\mathbf{R}_i^E$ внешних связей. К этим реакциям отнесены: $\mathbf{X}_A$, $\mathbf{Y}_A$, $\mathbf{Z}_A$, $\mathbf{X}_B$, $\mathbf{Y}_B$, $\mathbf{R}_C^E$ – соответственно реакции подпятника A, цилиндрического шарнира B и реакция тела другой механической системы в точке C.

$$\mathbf{R}^E = \Sigma\mathbf{R}_i^E = \mathbf{X}_A + \mathbf{Y}_A + \mathbf{Z}_A + \mathbf{X}_B + \mathbf{Y}_B + \mathbf{R}_C^E,$$

где $\mathbf{R}^E = \Sigma\mathbf{R}_i^E$ – главный вектор реакций внешних связей.

Необходимо отметить, что в динамике твердое тело рассматривается как неизменяемая механическая система, в которой геометрическая сумма внутренних сил $\mathbf{R}_i^J$ (главный вектор $\mathbf{R}^J$ внутренних сил) всегда равен нулю ($\Sigma\mathbf{R}_i^J = \mathbf{R}^J = 0$).

С учетом этого ***дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела*** относительно оси вращения OZ имеет вид

$$J_{oz}(d_2\varphi/dt^2) = \Sigma M_{oz}(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_{oz}(\mathbf{R}_i^E),$$

где J_{oz} – момент инерции твердого тела относительно оси вращения; $\Sigma M_{oz}(\mathbf{F}_i^E)$, $\Sigma M_{oz}(\mathbf{R}_i^E)$ – соответственно суммы моментов активных сил и реакций внешних связей относительно оси вращения.

Сравним дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела ($J_{oz}(d_2\varphi/dt^2) = \Sigma M_{oz}(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_{oz}(\mathbf{R}_i^E)$) с одним из дифференциальных уравнений поступательного движения твердого тела ($m\ddot{x}_c = \Sigma F_{iox}^E + \Sigma R_{iox}^E$).

Очевидно, что момент инерции J_{oz} твердого тела при вращательном движении имеет то же значение, что и масса m при его поступательном движении.

Таким образом, *момент инерции является мерой инертности тела при его вращательном движении*.

По дифференциальному уравнению вращательного движения твердого тела ($J_{oz}(d_2\varphi/dt^2) = \Sigma M_{oz}(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_{oz}(\mathbf{R}_i^E)$) решают следующие задачи:

1. По заданному уравнению движения $\varphi = f(t)$ и его моменту инерции J_{oz} определяют главный момент M_{oz}^E внешних сил, действующих на тело:

$$M_{oz}^E = \Sigma M_{oz}(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_{oz}(\mathbf{R}_i^E).$$

2. По заданным активным силам $\mathbf{F}_i^E$ и реакциям $\mathbf{R}_i^E$ внешних связей, а также по начальным условиям вращения (φ_0, ω_0) и по моменту инерции J_{oz} тела относительно оси вращения определяют уравнение движения $\varphi = f(t)$.

3. Определяют момент инерции J_{oz} относительно оси вращения по известным величинам углового ускорения ε и главного момента M_{oz}^E внешних сил, действующих на тело.

Поскольку учебной программой выполнение курсовых заданий на применение дифференциальных уравнений вращательного движения твердого тела не запланировано, то и примеры решения задач на эту тему в данном учебно-методическом пособии не приведены.

5.4.3. Динамика плоскопараллельного движения твердого тела

Плоскопараллельным (плоским) движением твердого тела *называется такое движение, при котором каждая точка тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости.*

Рассмотрим плоскопараллельное движение твердого тела в инерциальной системе отсчета OYZ, происходящее под действием активных сил $\mathbf{F}_i^E$ и реакций $\mathbf{R}_i^E$ внешних связей (рис. 5.18).

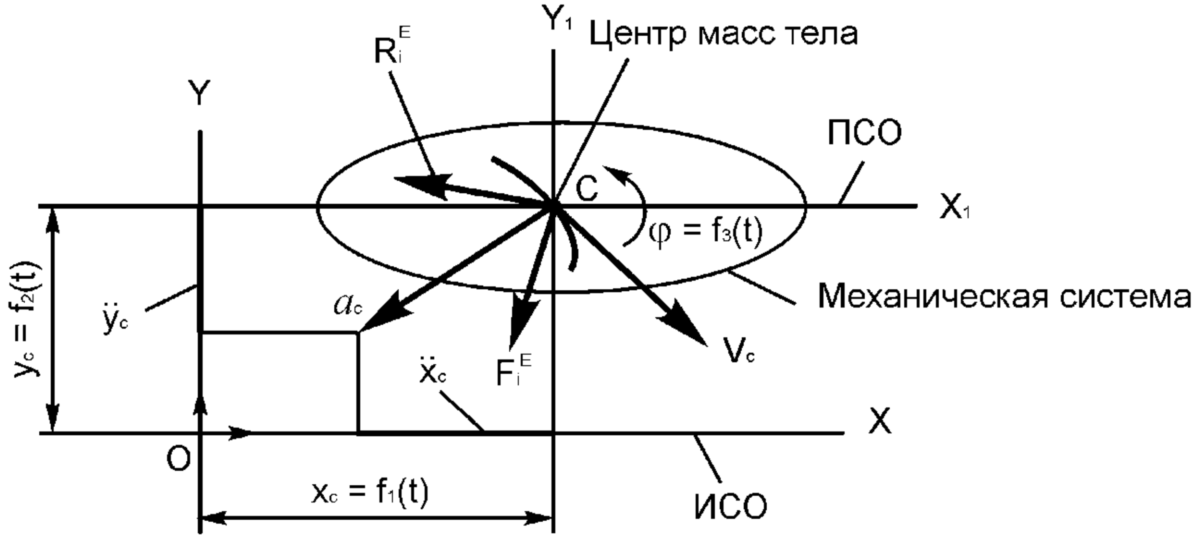


Рис. 5.18

Поскольку твердое тело рассмотрено как неизменяемая механическая система, то главный вектор $\mathbf{R}^J$ внутренних сил $\mathbf{R}_i^J$, приложенных к точкам тела, всегда равен нулю ($\mathbf{R}^J = \Sigma\mathbf{R}_i^J = 0$). Так как внутренние силы $\mathbf{R}_i^J$ не влияют на движение центра C масс тела, то они на рис. 5.18 не показаны.

Из курса кинематики известно, что плоскопараллельное движение можно рассматривать как сложное движение, представляющее собой сумму двух движений: 1 – поступательное движение со скоростью V_C центра масс в неподвижной системе отсчета OXY; 2 – вращательное движение относительно подвижной оси CZ_1, проходящей через центр масс, при этом подвижная система отсчета $CX_1Y_1Z_1$ совершает поступательное движение.

Необходимо отметить, что начало системы отсчета $CX_1Y_1Z_1$ всегда располагают в центре C масс тела.

Уравнения плоскопараллельного движения твердого тела в динамике, как правило, записывают в следующем виде:

$$x_c = f_1(t); \quad y_c = f_2(t); \quad \varphi = f_3(t).$$

С использованием этих уравнений движения дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела имеют вид:

$$m\ddot{x}_c = \Sigma F^E_{iox} + \Sigma R^E_{iox};$$

$$m\ddot{y}_c = \Sigma F^E_{ioy} + \Sigma R^E_{ioy};$$

$$J_{cz1}(d_2\varphi/dt^2) = \Sigma M_{cz1}(\mathbf{F}^E_i) + \Sigma M_{cz1}(\mathbf{R}^E_i),$$

где m – масса тела; $\ddot{x}_c$, $\ddot{y}_c$ – проекции ускорения центра C масс тела на координатные оси неподвижной системы отсчета OXY; ΣF^E_{iox}, ΣF^E_{ioy} – суммы проекций активных сил $\mathbf{F}^E_i$ на координатные оси OX, OY; ΣR^E_{iox}, ΣR^E_{ioy} – суммы проекции реакций $\mathbf{R}^E_i$ внешних связей на координатные оси OX, OY; $d_2\varphi/dt^2 = \varepsilon$ – угловое ускорение тела; J_{cz1} – момент инерции твердого тела относительно подвижной оси CZ_1 вращения, проходящей через центр масс; $\Sigma M_{cz1}(\mathbf{F}^E_i)$, $\Sigma M_{cz1}(\mathbf{R}^E_i)$ – соответственно суммы моментов активных сил и реакций внешних связей относительно подвижной оси CZ_1 вращения, проходящей через центр масс тела.

С помощью этих дифференциальных уравнений движения твердого тела можно решать как прямые (первые), так и обратные (вторые) задачи динамики.

При решении обратных задач динамики (определение движения по заданным силам) приходится интегрировать систему дифференциальных уравнений плоскопараллельного движения твердого тела. Для определения шести постоянных интегрирования ($C_1,\ldots, C_6$) должны быть заданы шесть начальных условий движения: x_{c0}, y_{c0}, z_{c0}, $\dot{x}_{c0}$, $\dot{y}_{c0}$, $\dot{z}_{c0}$.

В учебной программе могут быть предусмотрены курсовые задания по излагаемой теме, поэтому необходимо привести алгоритм решения таких задач.

Решение задач динамики плоскопараллельного движения твердого тела рекомендуется выполнять по следующему алгоритму.

1. Выбрать неподвижную (инерциальную) систему отсчета OXY.
2. Изобразить тело в системе отсчета OXY в произвольный момент времени.

3. В центре С масс твердого тела разместить начало подвижной системы отсчета.
4. Изобразить на рисунке все внешние силы ($\mathbf{F}_i^E$, $\mathbf{R}_i^E$), приложенные к твердому телу.
5. Составить дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела:

$$m\ddot{x}_c = \Sigma F_{iox}^E + \Sigma R_{iox}^E;$$

$$m\ddot{y}_c = \Sigma F_{ioy}^E + \Sigma R_{ioy}^E;$$

$$J_{cz1}(d_2\varphi/dt^2) = \Sigma M_{cz1}(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_{cz1}(\mathbf{R}_i^E).$$

Дальнейший ход решения зависит от того, какая задача динамики должна быть решена – прямая или обратная.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Записать ***дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела*** в пространстве.
2. Записать ***дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела*** относительно вертикальной оси.
3. Записать ***дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела***.

5.5. Теорема об изменении кинетической энергии

5.5.1. Работа силы на перемещении точки ее приложения

Рассмотрим прямолинейное перемещение точки на горизонтальной плоскости OXY из положения M_1 в положение M_2, происходящее под действием постоянной силы **F** (рис. 5.19).

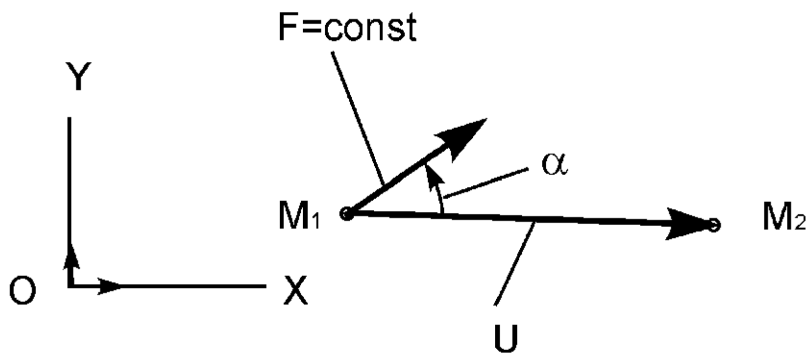


Рис. 5.19

***Работой A(F) постоянной силы на прямолинейном перемещении точки ее приложения** называется скалярное произведение вектора силы **F** на вектор **U** перемещения ее точки приложения.*

$$A(\mathbf{F}) = \mathbf{F}\cdot\mathbf{U} = F\cdot U\cdot\cos(\mathbf{F}, \mathbf{U}) = F\cdot U\cdot\cos\alpha,$$

где F – модуль силы **F**; U – модуль вектора **U** перемещения точки приложения силы **F**; α – угол, составленный направлениями векторов **F** и **U**.

Единица измерения работы [Нм] = [Дж].

Согласно последнему равенству работа постоянной силы **F** на перемещении **U** точки ее приложения равна произведению трех сомножителей: модуля силы на модуль вектора перемещения точки приложения силы и на косинус угла, составленного направлениями векторов **F** и **U**.

В зависимости от величины угла α работа A(**F**) силы **F** на перемещении **U** точки ее приложения может быть положительной, отрицательной или равной нулю (рис. 5.20).

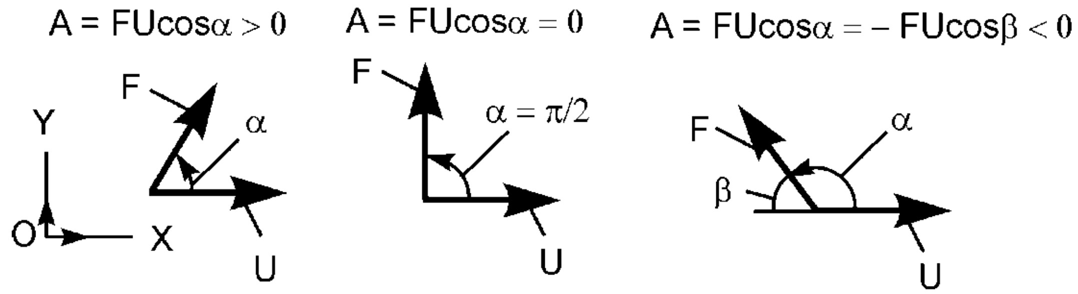


Рис. 5.20

Анализ рис. 5.20 позволяет сделать следующие выводы:

1) если векторы **F** и **U** направлены в одну полуплоскость, то A(**F**) > 0;

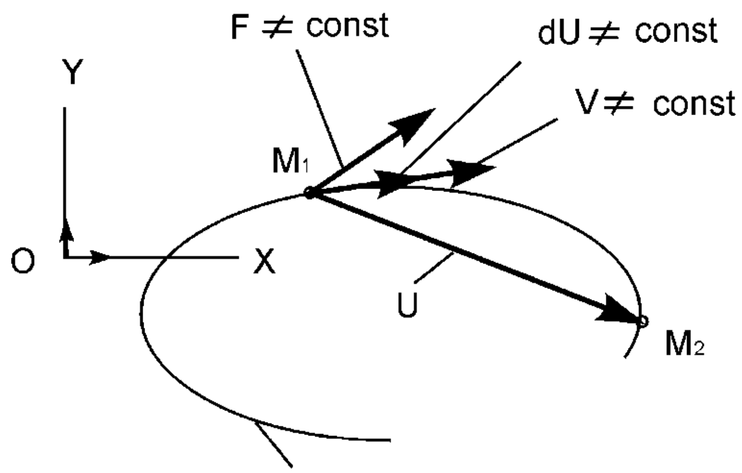
2) если векторы **F** и **U** направлены в разные полуплоскости, то A(**F**) < 0;

3) если векторы **F** и **U** взаимно перпендикулярны, то A(**F**) = 0.

Как правило, в задачах инженерной практики силы являются переменными, а точки их приложения описывают криволинейные траектории (рис. 5.21).

В этом случае используют понятие «***элементарная работа силы***».

***Элементарная работа силы** – скалярная мера действия силы, равная скалярному произведению силы на элементарное перемещение точки ее приложения.*



Траектория движения точки M

Рис. 5.21

Рассмотренное понятие базируется на другом понятии – «***элементарное перемещение точки»***.

Элементарное перемещение точки *– перемещение точки из данного положения в положение, бесконечно близкое к нему.*

Это перемещение изображается вектором, начало и конец которого совпадают соответственно с положениями точки в начале и конце перемещения. Элементарное перемещение d**U** направляется по касательной к траектории движения в данной точке. Так как вектор d**U** и вектор **V** скорости точки имеют одинаковое направление, то равенство для определения элементарной работы δA(**F**) имеет вид

$$\delta A(\mathbf{F}) = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{U} = F\cdot dU\cdot \cos(\mathbf{F},\, d\mathbf{U}).$$

Работа переменной силы **F** на конечном перемещении **U** точки ее приложения по произвольной траектории равна криволинейному интегралу, взятому вдоль кривой от M_1 до M_2 от элементарной работы δA.

$$A(\mathbf{F}) = \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{U} = \int F\cdot dU\cdot \cos(\mathbf{F},\, d\mathbf{U}).$$

Работа силы на конечном перемещении точки ее приложения *– величина, равная криволинейному интегралу от элементарной работы силы, действующей на данную материальную точку, взятому вдоль дуги кривой, описанной точкой при этом перемещении.*

Если сила последовательно действует на разные точки механической системы (тела), то ее работа при конечном перемещении системы определяется как предел суммы соответствующих элементарных работ.

Выражение работы переменной силы на конечном перемещении точки ее приложения по криволинейной траектории через проекции F_{ox}, F_{oy}, F_{oz} силы $\mathbf{F}$ и проекции dx, dy, dz вектора d$\mathbf{U}$ элементарного перемещения на оси декартовой системы отсчета имеет вид

$$A(\mathbf{F}) = \int(F_{ox}dx + F_{oy}dy + F_{oz}dz).$$

Рассмотрим движение i-й точки неизменяемой механической системы в инерциальной системе отсчета OXYZ (рис. 5.22).

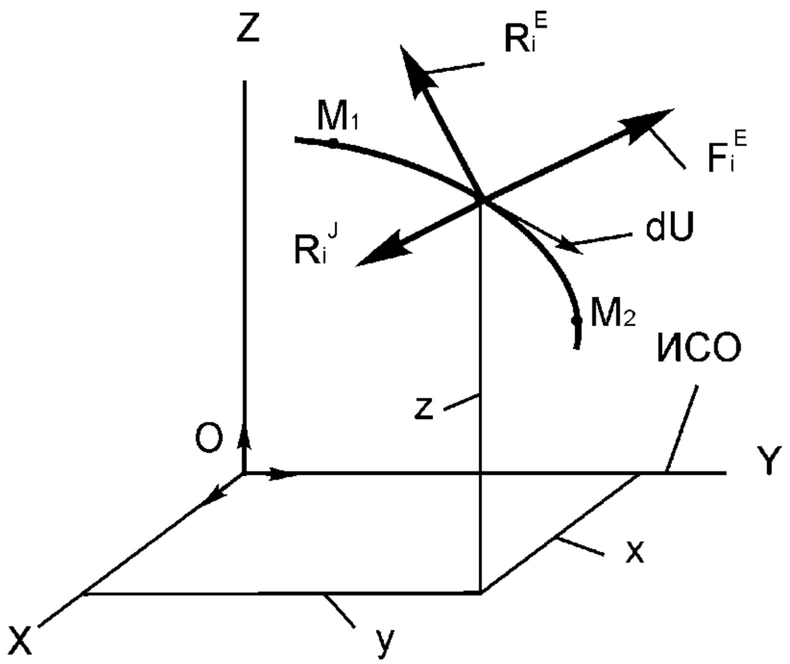


Рис. 5.22

Как известно, точки механической системы осуществляют движение под действием активных сил $\mathbf{F}_i^E$, реакций $\mathbf{R}_i^E$ внешних связей и внутренних сил $\mathbf{R}_i^J$. В этом случае элементарная работа δA_s внешних сил ($\mathbf{F}_i^E$, $\mathbf{R}_i^E$) и внутренних сил $\mathbf{R}_i^J$, приложенных к точке, будет равна

$$\delta A_s = (\mathbf{F}_i^E + \mathbf{R}_i^E + \mathbf{R}_i^J)\cdot d\mathbf{U} =$$
$$= F_i^E\cdot dU\cdot\cos(\mathbf{F}_i^E, d\mathbf{U}) + R_i^E\cdot dU\cdot\cos(\mathbf{R}_i^E, d\mathbf{U}) + R_i^J\cdot dU\cdot\cos(\mathbf{R}_i^J, d\mathbf{U}).$$

Определим работу силы тяжести **G** при перемещении точки из положения M_1 в положение M_2 в инерциальной системе отсчета OXYZ (рис. 5.23).

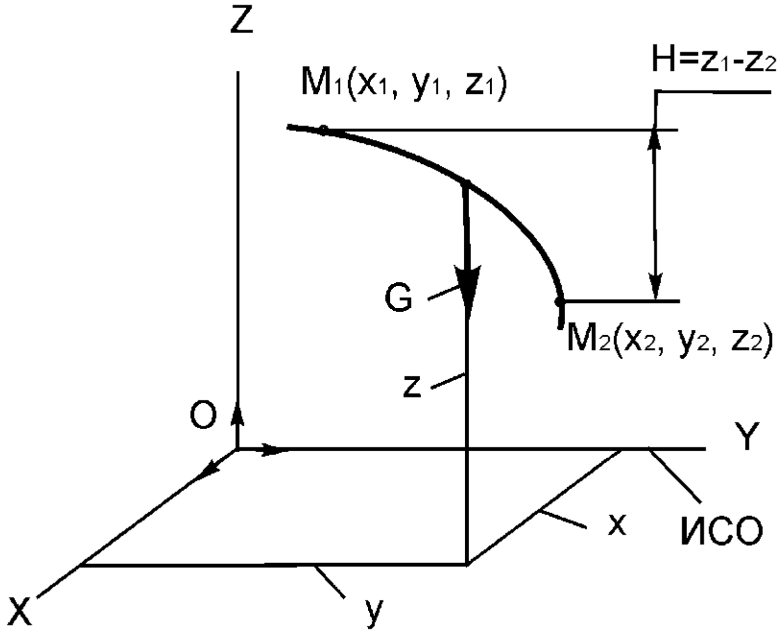


Рис. 5.23

Работу A(**G**) силы тяжести **G** определяют по формуле

$$A(\mathbf{G}) = \pm\, GH,$$

где G – модуль силы тяжести (вес); H – изменение высоты точки при ее перемещении из положения M_1 в положение M_2.

Знак (+) соответствует перемещению точки вниз, а знак (–) соответствует перемещению точки вверх.

Таким образом, работа силы тяжести равна взятому со знаком (+) или (–) произведению модуля силы тяжести на вертикальное перемещение точки ее приложения.

Работа силы тяжести не зависит от вида траектории, по которой перемещается точка ее приложения, а зависит лишь от расстояния между горизонтальными плоскостями, проходящими через начальное и конечное положения точки.

В данном учебно-методическом пособии рассматриваются только неизменяемые механические системы. Для таких систем элементарная работа $\delta A(\mathbf{R}_i^J)$ внутренних сил, определяемая как сумма элементарных работ внутренних сил, действующих на точки, равна нулю.

$$\delta A(\mathbf{R}_i^J) = \Sigma R_i^J \cdot dU \cdot \cos(\mathbf{R}_i^J, d\mathbf{U}) = 0.$$

Исходя из этого, элементарную работу δA_s при перемещении неизменяемой механической системы определяют по формулам:

$$\delta A_s = \Sigma(\mathbf{F}_i^E + \mathbf{R}_i^E)\cdot d\mathbf{U};$$

$$\delta A_s = \Sigma F_i^E \cdot dU \cdot \cos(\mathbf{F}_i^E, d\mathbf{U}) + \Sigma R_i^E \cdot dU \cdot \cos(\mathbf{R}_i^E, d\mathbf{U}).$$

В процессе движения механической системы ее тела осуществляют три вида движений: поступательное, вращательное, плоскопараллельное.

При поступательном движении твердого тела, рассматриваемого как неизменяемая механическая система, элементарная работа δA_s внешних сил, приложенных к нему, равна

$$\delta A_s = \Sigma F_i^E \cdot dU \cdot \cos(\mathbf{F}_i^E, d\mathbf{U}) + \Sigma R_i^E \cdot dU \cdot \cos(\mathbf{R}_i^E, d\mathbf{U}).$$

При вращательном движении тела относительно оси OZ имеем

$$\delta A_s = \Sigma M_{oz}(\mathbf{F}_i^E)\delta\varphi + \Sigma M_{oz}(\mathbf{R}_i^E)\delta\varphi,$$

где $\Sigma M_{oz}(\mathbf{F}_i^E)$, $\Sigma M_{oz}(\mathbf{R}_i^E)$ – соответственно моменты активных сил $\mathbf{F}_i^E$ и реакций $\mathbf{R}_i^E$ внешних связей относительно оси OZ вращения тела; $\delta\varphi$ – элементарный угол поворота тела (приращение угла поворота тела).

Так как плоскопараллельное движение твердого тела есть сумма поступательного движения со скоростью полюса (как правило, за полюс принимают центр масс твердого тела) и вращательного движения с угловой скоростью ω относительно оси, проходящей через полюс, то элементарную работу δA_s определяют по формуле

$$\delta A_s = \Sigma F_i^E \cdot dU_c \cdot \cos(\mathbf{F}_i^E, d\mathbf{U}_c) + \Sigma R_i^E \cdot dU_c \cdot \cos(\mathbf{R}_i^E, d\mathbf{U}_c) +$$
$$+ \Sigma M_{cz}(\mathbf{F}_i^E)\delta\varphi + \Sigma M_{cz}(\mathbf{R}_i^E)\delta\varphi,$$

где $\Sigma M_{cz}(\mathbf{F}_i^E)$, $\Sigma M_{cz}(\mathbf{R}_i^E)$ – соответственно суммы моментов активных сил и реакций внешних связей относительно оси CZ , проходящей через центр масс тела; $d\mathbf{U}_c$ – элементарное перемещение центра масс тела.

В инженерных дисциплинах широко используется понятие ***«мощность силы»***. Определим это понятие.

Мощность силы *– величина, равная скалярному произведению силы на скорость точки ее приложения.*

Мощность обозначают символом N и находят по формуле

$$N = \mathbf{F}\cdot\mathbf{V} = F\cdot V\cdot\cos(\mathbf{F}, \mathbf{V}).$$

Так как мощность силы характеризует быстроту выполнения работы, то величину мощности можно находить по формуле

$$N = \delta A(\mathbf{F})/dt,$$

где $\delta A(\mathbf{F})$ – элементарная работа силы; dt – промежуток времени, за который совершена элементарная работа.

Единица измерения мощности [Дж/с] = [Вт], (ватт).

Для поступательного движения твердого тела мощность определяют по формуле

$$N = \Sigma F_i^E \cdot V_c \cdot \cos(\mathbf{F}_i^E, \mathbf{V}_c) + \Sigma R_i^E \cdot V_c \cdot \cos(\mathbf{R}_i^E, \mathbf{V}_c),$$

где $\mathbf{V}_c = d\mathbf{U}_c/dt$ – скорость центра масс.

При вращательном движении твердого тела имеем

$$N = \Sigma M_{oz}(\mathbf{F}_i^E)\omega + \Sigma M_{oz}(\mathbf{R}_i^E)\omega,$$

где ω – угловая скорость вращения тела.

Вычисление суммы работ сил осуществляют по следующему алгоритму.

1. Изобржают на рисунке силы, приложенные к материальной точке либо к системе материальных точек.
2. Изображают элементарные перемещения точек системы.
3. Вычисляют элементарную работу сил, т. е. сумму работ всех сил на элементарных перемещениях точек системы.
4. Вычисляют искомую сумму работ сил на конечных перемещениях как сумму определенных интегралов, взятых в соответствующих пределах от элементарных работ. При наличии сил тяжести вычисляют работу этих сил на конечных перемещениях по формуле $A(\mathbf{G}_i) = \pm G_i H_{ci}$, где H_{ci} – высота, на которую перемещается центр C_i масс i-го тела.

5.5.2. Кинетическая энергия механической системы

В динамике рассматриваются два случая преобразования механического движения материальной точки или системы точек.

1. Механическое движение переносится с одной механической системы на другую в качестве механического движения.

2. Механическое движение превращается в другую форму движения материи (в форму потенциальной энергии, теплоты, электричества и т. д.).

Каждый из этих случаев преобразования механического движения имеет свои измерители как механического движения, так и действия силы.

Когда рассматривается преобразование механического движения без перехода его в другую форму движения, мерой механического движения является вектор количества движения материальной точки $\mathbf{K} = m\mathbf{V}$ или механической системы $\mathbf{K} = m\mathbf{V}_c$. Мерой действия силы в этом случае является вектор $\mathbf{S}$ импульса силы.

Когда механическое движение превращается в другую форму движения материи, в качестве меры механического движения выступает кинетическая энергия материальной точки или механической системы.

***Кинетическая энергия материальной точки** – скалярная мера механического движения, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости движения.*

Кинетическую энергию T точки определяют по формуле

$$T = mV^2/2.$$

Мерой действия силы при превращении механического движения в другую форму движения является работа силы.

Рассмотрим движение неизменяемой механической системы в инерциальной системе отсчета OXYZ (рис. 5.24).

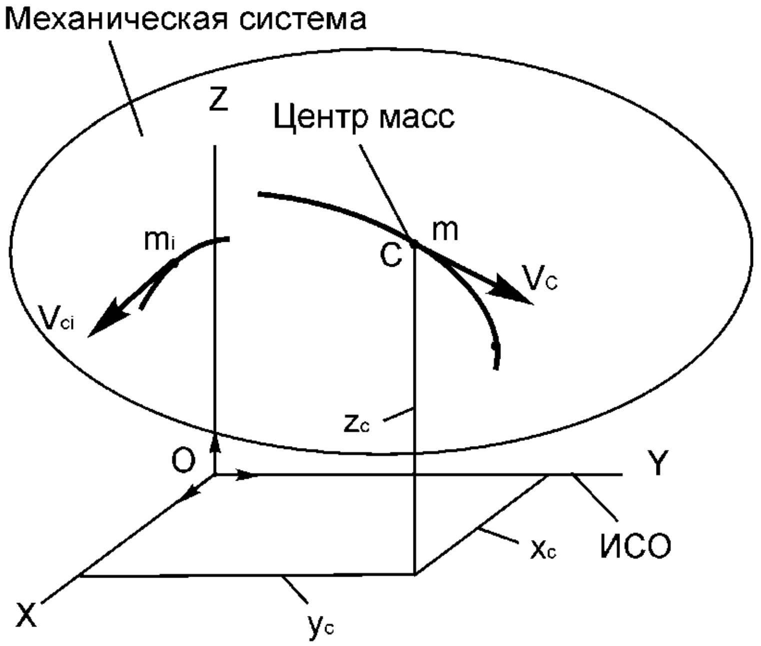


Рис. 5.24

На рис. 5.24 использованы следующие обозначения: m_i, $\mathbf{V}_{ci}$ – соответственно масса и скорость центра масс i-й точки механической системы; m, $\mathbf{V}_c$ – масса и скорость центра масс механической системы.

***Кинетическая энергия системы** – величина, равная сумме кинетических энергий всех материальных точек механической системы.*

Кинетическую энергию механической системы T_s определяют по формуле

$$T_s = \Sigma\, T_i,$$

где T_i – кинетическая энергия i-й точки механической системы.

Тела, входящие в механическую систему, осуществляют следующие виды движений: поступательное, вращательное, плоскопараллельное. Определим кинетические энергии тел, находящихся в этих движениях.

Рассмотрим поступательное движение твердого тела в инерциальной системе отсчета OXYZ (рис. 5.25).

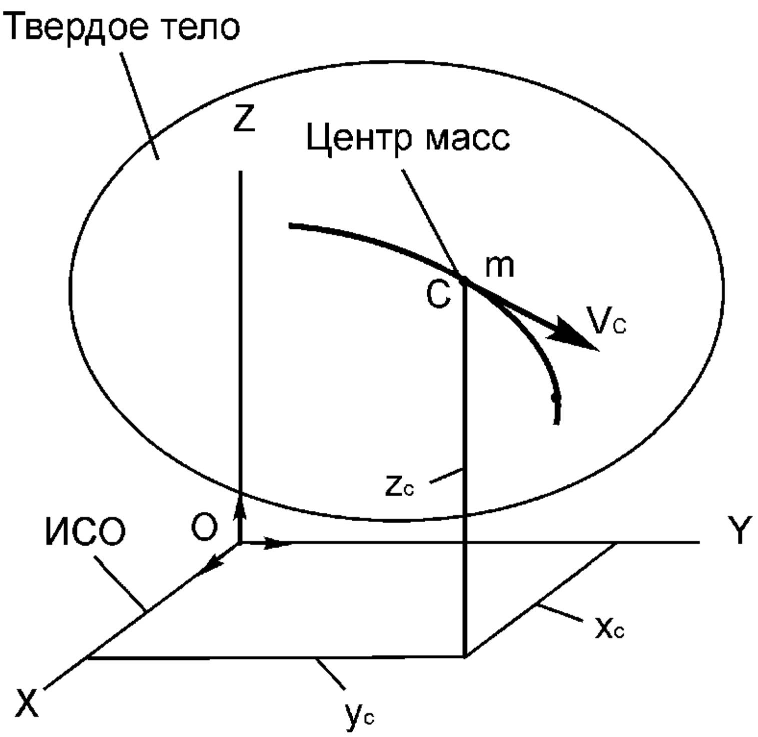


Рис. 5.25

Кинетическую энергию тела при таком движении определяют по формуле

$$T = m(V_c)^2/2,$$

где V_c – скорость центра C масс тела.

Кинетическая энергия твердого тела, совершающего поступательное движение, равна половине произведения массы тела на квадрат скорости его центра масс.

При вращательных движениях тел (рис. 5.26) относительно различных осей (OX, OY, OZ) кинетическую энергию определяют по формулам:

$$T = J_{ox}\omega^2/2; \quad T = J_{oy}\omega^2/2; \quad T = J_{oz}\omega^2/2,$$

где J_{ox}, J_{oy}, J_{oz} – соответственно моменты инерции относительно осей вращения OX, OY, OZ; ω – угловая скорость вращения.

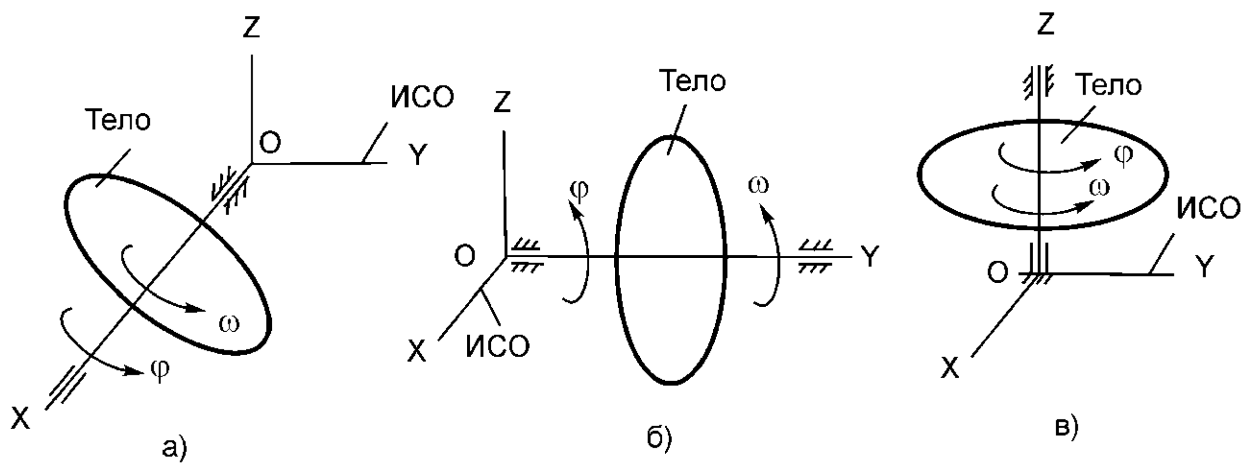


Рис. 5.26

Кинетическая энергия твердого тела, совершающего вращательное движение, равна половине произведения его момента инерции относительно соответствующей оси на квадрат угловой скорости.

Как известно из кинематики, плоскопараллельное движение состоит из двух простейших движений: 1 – поступательное движение со скоростью V_c центра масс в неподвижной (инерциальной) системе отсчета OXY; 2 – вращательное движение с угловой скоростью ω относительно подвижной оси вращения, проходящей через центр масс (рис. 5.27).

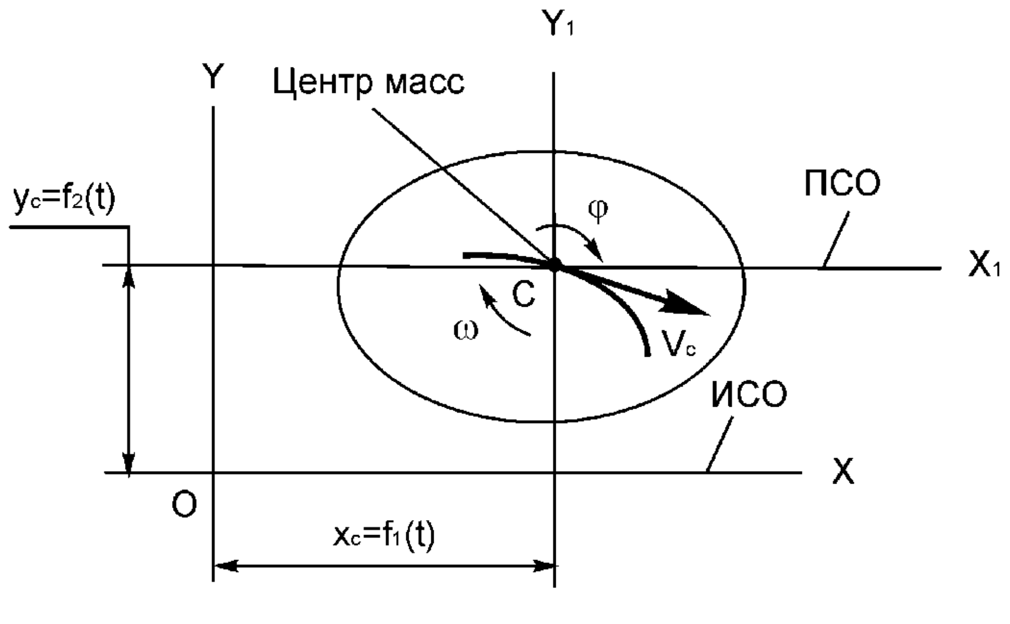


Рис. 5.27

Исходя из изложенного, кинетическую энергию тела при плоскопараллельном движении определяют по формуле

$$T = m(V_c)^2/2 + J_{cz1}\omega^2/2,$$

где J_{cz1} – момент инерции тела относительно оси CZ_1, проходящей через его центр масс.

Зависимость между изменением кинетической энергии неизменяемой механической системы и работой приложенных к ее точкам сил на некотором перемещении определяется формулой

$$T_{sk} - T_{sn} = \Sigma A_i^E,$$

где T_{sk} – кинетическая энергия механической системы в конечном положении; T_{sn} – кинетическая энергия механической системы в исходном положении; ΣA_i^E – сумма работ внешних сил (активных сил и реакций внешних связей) на перемещении механической системы из начального положения в конечное положение.

Эта формула выражает ***теорему об изменении кинетической энергии механической системы***.

Изменение кинетической энергии неизменяемой механической системы на некотором перемещении равно сумме работ внешних сил, приложенных к системе, на этом же перемещении.

Для закрепления изложенного теоретического материала учебным планом рекомендуется выполнить курсовое задание Д 4.

5.5.3. Варианты курсового задания Д 4 «Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы»

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя; начальное положение системы показано в табл. 5.2. Учитывая трение скольжения тела 1 (варианты 1–3, 5, 6, 8 –12, 17– 23, 28 – 30) и сопротивление качению тела 3, катящегося без скольжения (варианты 2, 4, 6 – 9, 11, 13 –15, 20, 21, 24, 27, 29) и пренебрегая другими силами сопротивления и массами нитей, предполагаемых нерастяжимыми, определить скорость тела 1 в тот момент времени, когда пройденный путь станет равным s.

В задании приняты следующие обозначения: m_1, m_2, m_3, m_4 – массы тел 1, 2, 3, 4; R_2, r_2, R_3, r_3 – радиусы больших и малых окружностей; i_{2x}, i_{3x} – радиусы инерции тел 2 и 3 относительно горизонтальных осей, проходящих через их центры тяжести; α, β – углы наклона плоскостей к горизонту; f – коэффициент трения скольжения; δ – коэффициент трения качения.

Расчетные схемы механизмов и необходимые для решения данные приведены в табл. 5.2. Блоки и катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными дисками.

Наклонные участки нитей параллельны соответствующим наклонным плоскостям.

***Примечания к вариантам*.**

Вариант 4 – массами звеньев АВ, ВС и ползуна В пренебречь.

Вариант 5 – массой водила пренебречь.

Вариант 14 – массы каждого из четырех колес одинаковы.

Вариант 16 – массой водила пренебречь.

Вариант 17 – шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень.

Вариант 18 – массой водила пренебречь.

Вариант 20 – массами звеньев АВ, ВС и ползуна В пренебречь.

Вариант 22 – массой водила пренебречь.

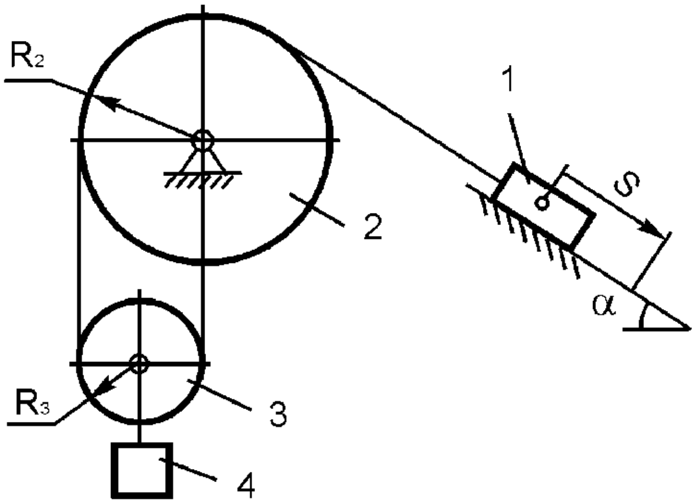
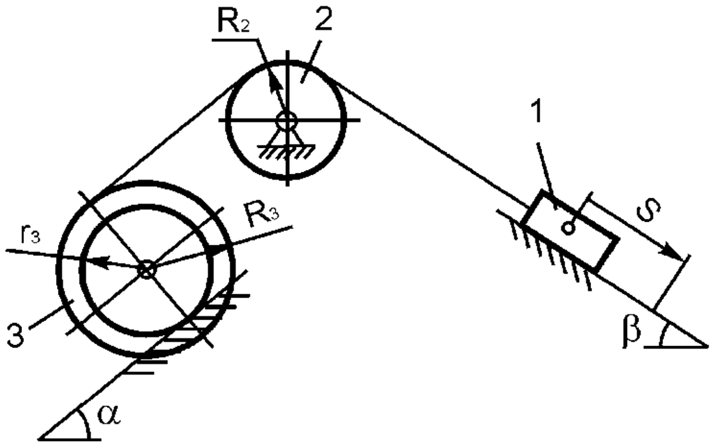
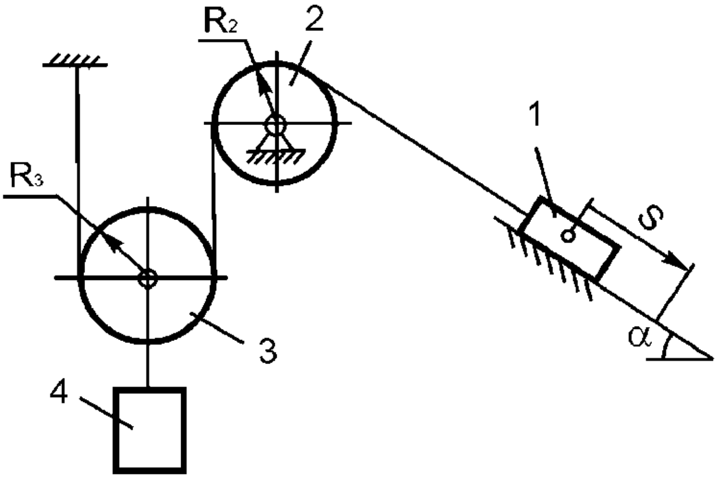
Вариант 24 – массами звеньев АВ, ВС и ползуна В пренебречь.

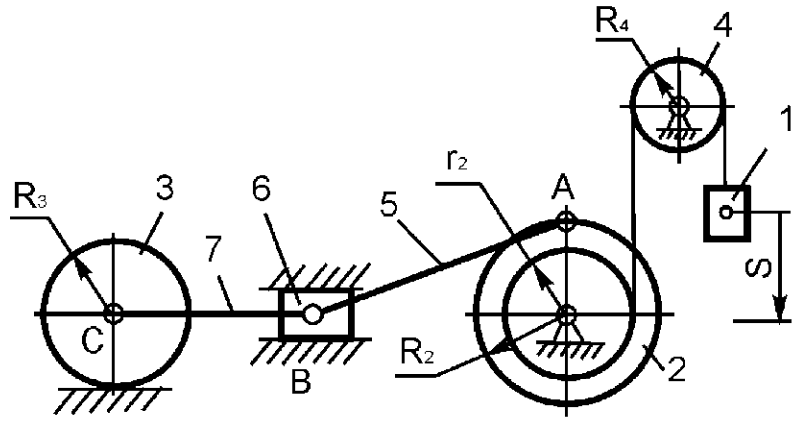
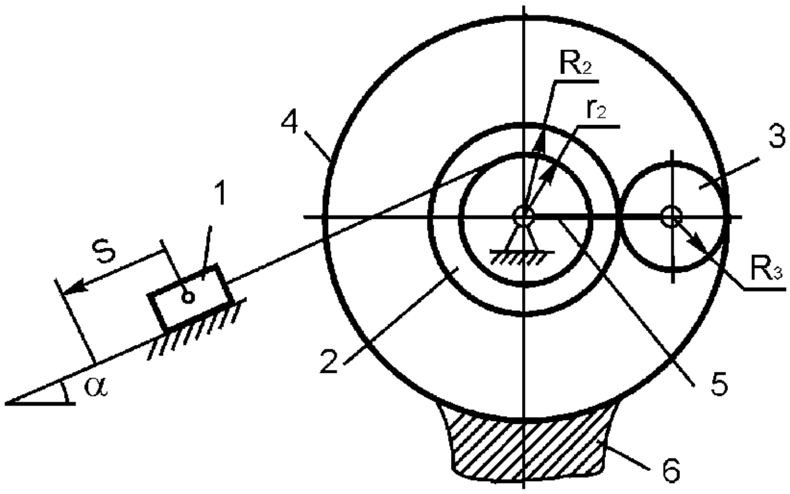
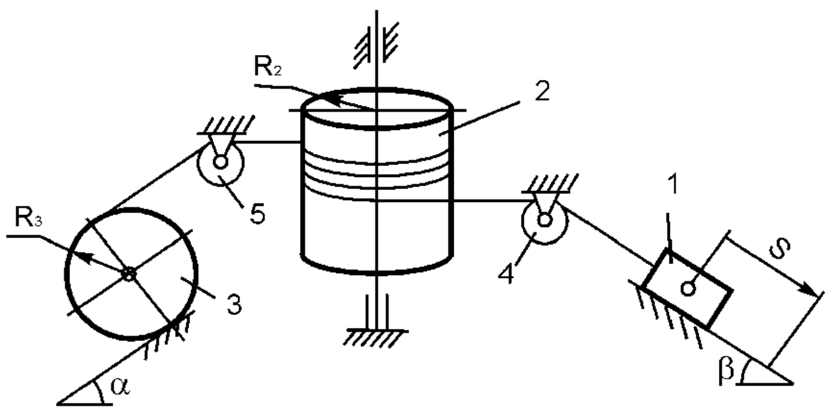
Вариант 25 – массой водила пренебречь.

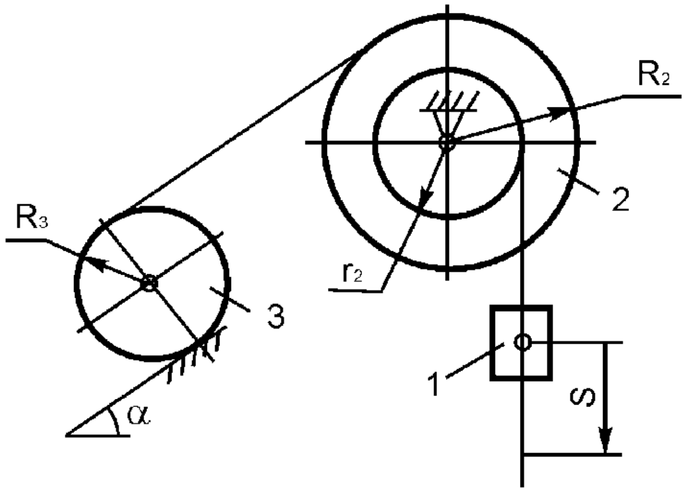
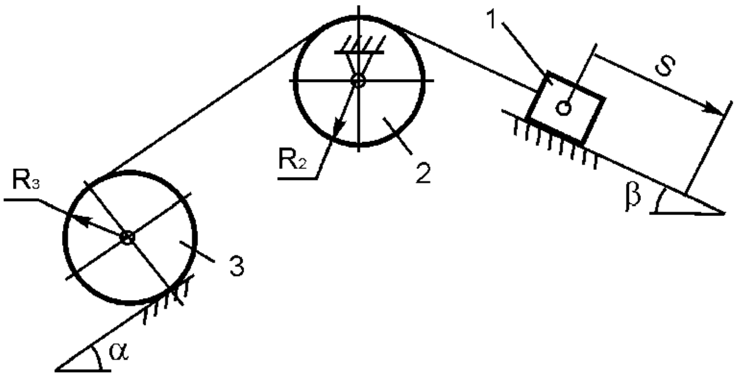
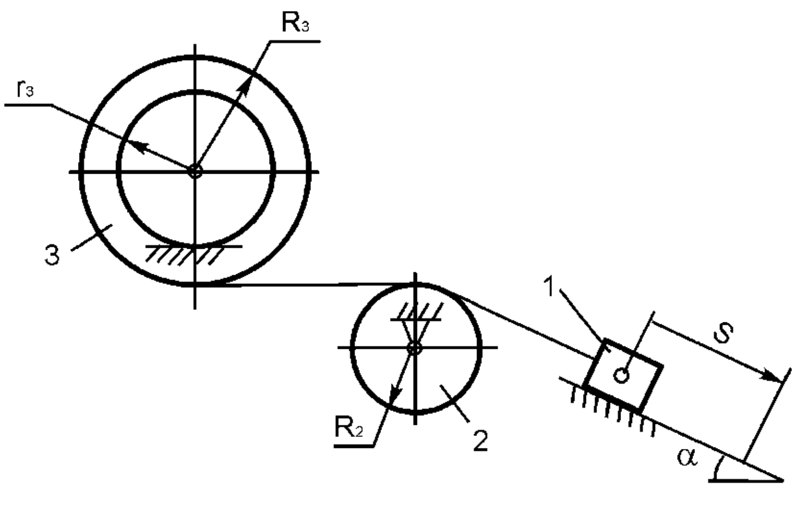
Вариант 26 – массы и моменты инерции блоков 2 и 5 одинаковы. Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень.

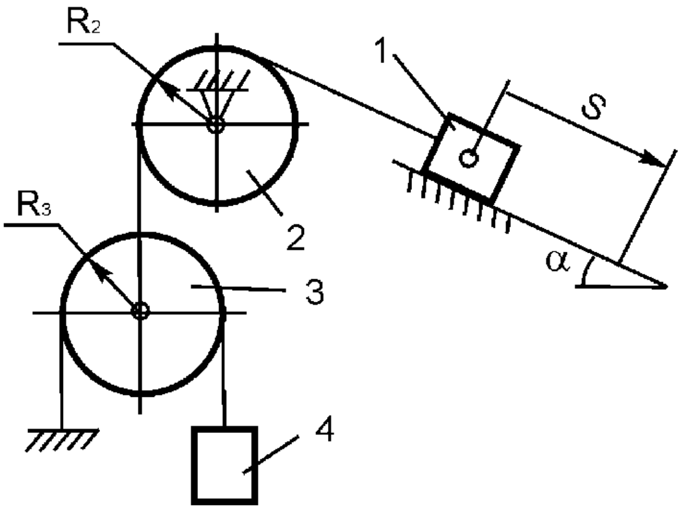
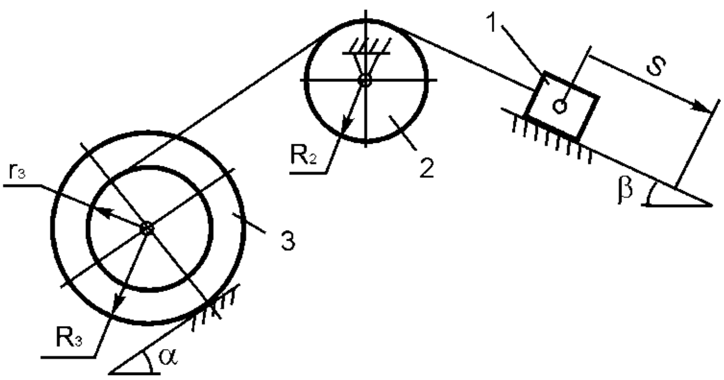
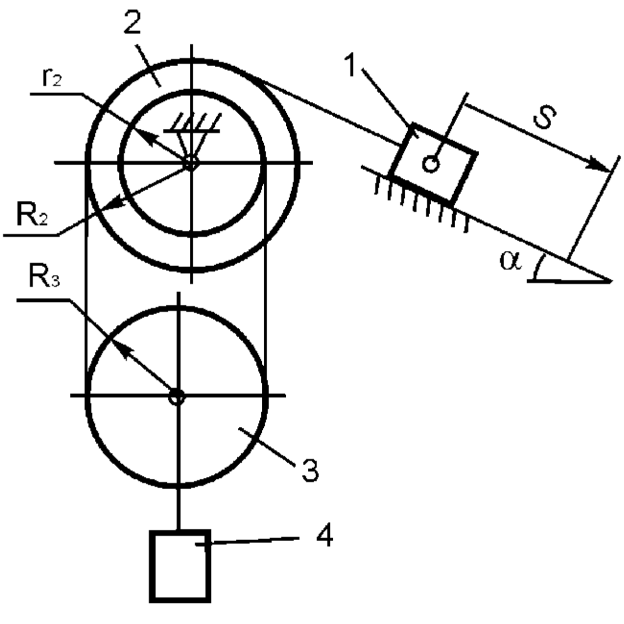
Вариант 28 – шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень.

Таблица 5.2

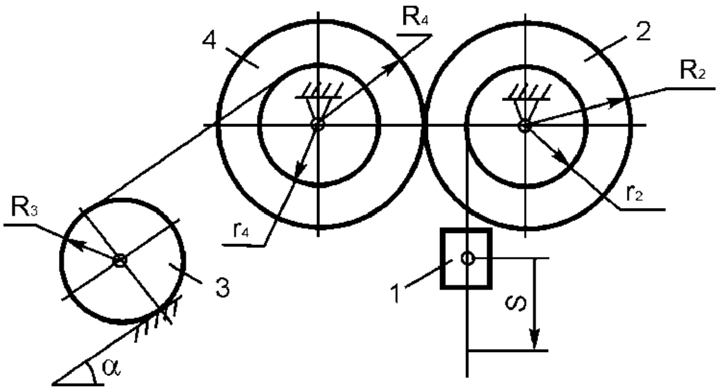
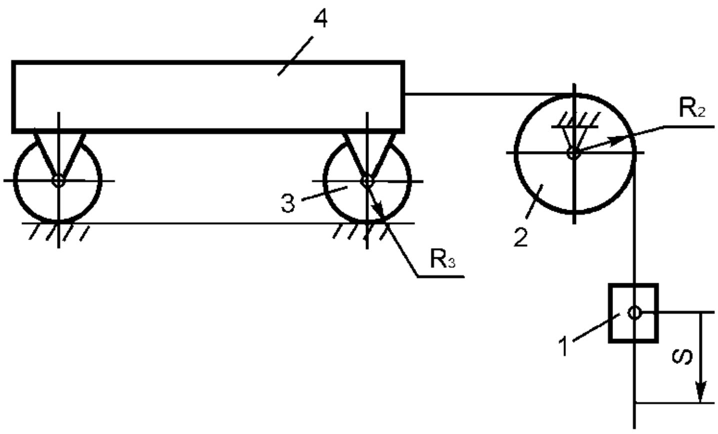
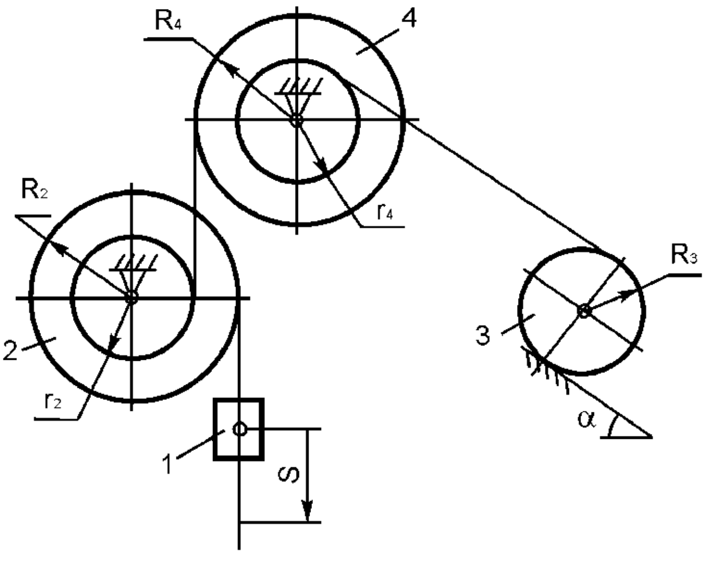
Номер варианта	Расчетная схема механизма	Исходные данные
1	2	3
1		m_1 = m кг; m_2 = 4m кг; m_3 = m/5 кг; m_4 = 4m/3 кг; α = 60°; f = 0,1; s = 2 м
2		m_1 = m кг; m_2 = m/2 кг; m_3 = m/3 кг; R_3 = 30 см; r_3 = (2/3)R_3; i_{3x} = 20 см; α = 30°; β = 45°; f = 0,22; δ = 0,20 см; s = 2 м
3		m_1 = m кг; m_2 = m кг; m_3 = m/10 кг; m_4 = m кг; α = 45°; f = 0,10; s = 2 м

1	2	3
4		$m_1 = m$ кг; $m_2 = 2m$ кг; $m_3 = 40m$ кг; $m_4 = m$ кг; $R_2 = 20$ см; $AB = 5R_2$; $R_3 = 40$ см; $r_2 = 0{,}5R_2$; $R_4 = r_2$; $i_{2x} = 18$ см; $\delta = 0{,}30$ см; $s = 0{,}1\pi$ м
5		$m_1 = m$ кг; $m_2 = 2m$ кг; $m_3 = m$ кг; $R_2 = 20$ см; $R_2 = 20$ см; $r_2 = 0{,}8R_2$; $i_{2x} = 18$ см; $\alpha = 60°$; $f = 0{,}12$; $s = 0{,}28\pi$ м
6		$m_1 = m$ кг; $m_2 = 3m$ кг; $m_3 = m$ кг; $R_3 = 28$ см; $\alpha = 30°$; $\beta = 45°$; $f = 0{,}10$; $\delta = 0{,}28$ см; $s = 1{,}5$ м

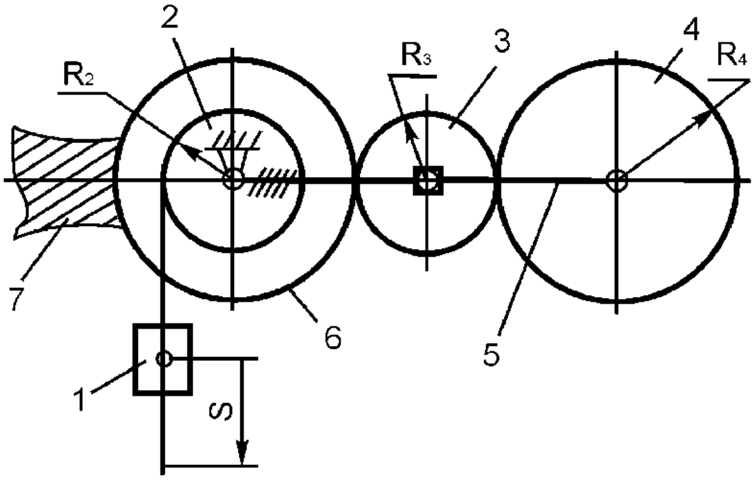
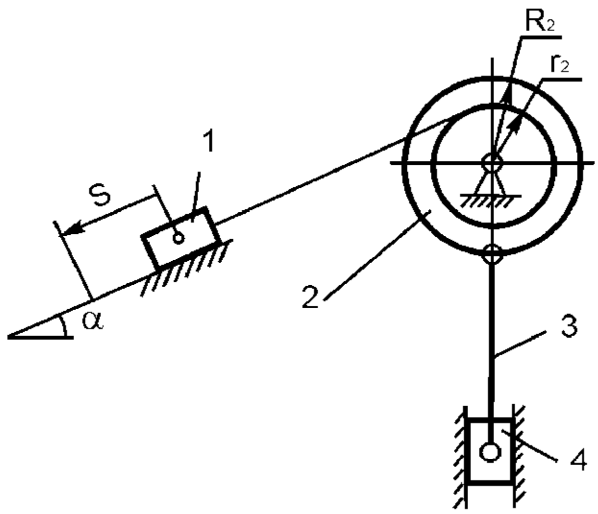
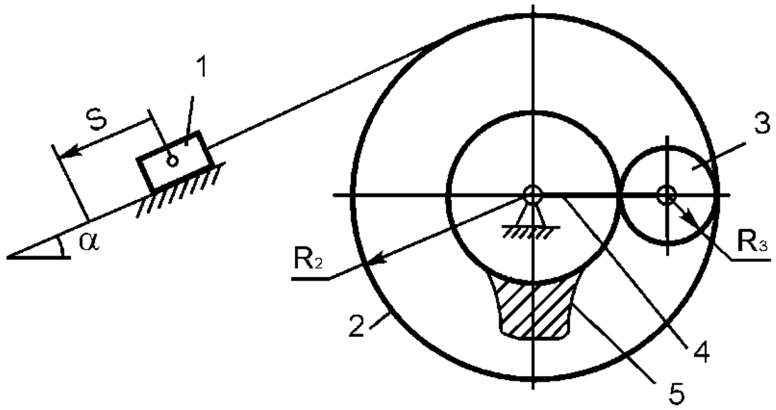
1	2	3
7		m_1 = m кг; m_2 = 2m кг; m_3 = 2m кг; R_2 = 16 см; $r_2 = (3/4)R_2$; R_3 = 25 см; i_{2x} = 14 см; $\alpha = 30^o$; δ = 0,20 см; s = 2 м
8		m_1 = m кг; m_2 = m/2 кг; m_3 = m/3 кг; R_3 = 30 см; $\alpha = 30^o$; $\beta = 45^o$; f = 0,15; δ = 0,20 см; s = 1,75 м
9		m_1 = m кг; m_2 = 2m кг; m_3 = 9m кг; R_3 = 30 см; $r_3 = 0,5R_3$; i_{3x} = 20 см; $\alpha = 30^o$; f = 0,12; δ = 0,25 см; s = 1,5 м

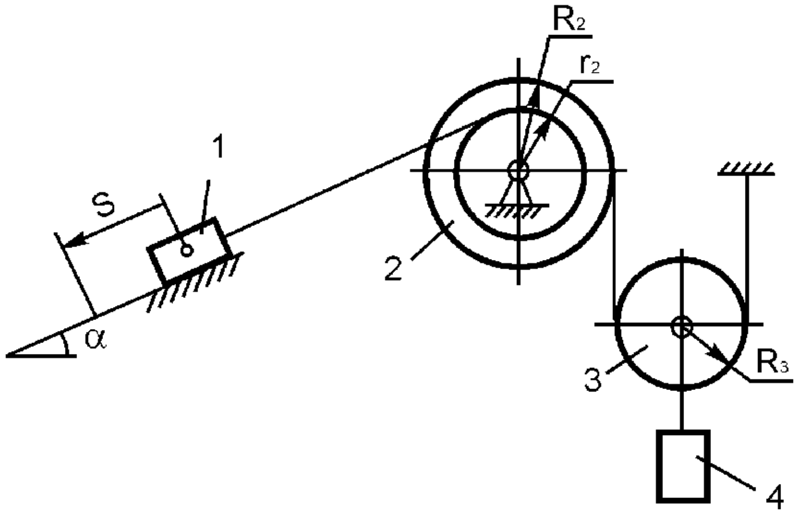
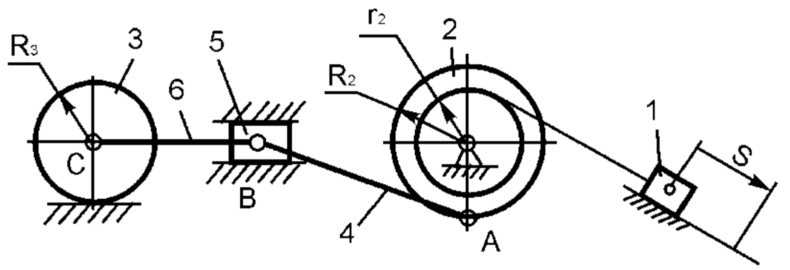
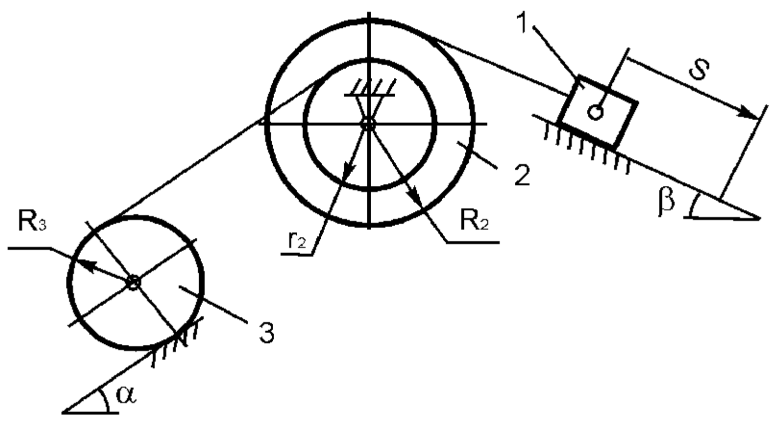
1	2	3
10		m_1 = m кг; m_2 = m/4 кг; m_3 = m/4 кг; m_4 = m/5 кг; $\alpha = 60^o$; f = 0,10; s = 3 м
11		m_1 = m кг; m_2 = m/2 кг; m_3 = m/4 кг; R_3 = 30 см; $r_3 = (2/3)R_3$; i_{3x} = 25 см; $\alpha = 30^o$; $\beta = 45^o$; f = 0,17; δ = 0,20 см; s = 2,5 м
12		m_1 = m кг; m_2 = m/2 кг; m_3 = m/5 кг; m_4 = m кг; R_2 = 30 см; i_{2x} = 25 см; $\alpha = 30^o$; f = 0,20; s = 2,5 м

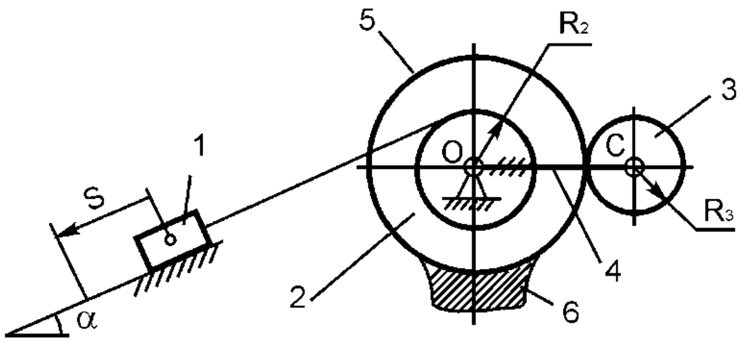
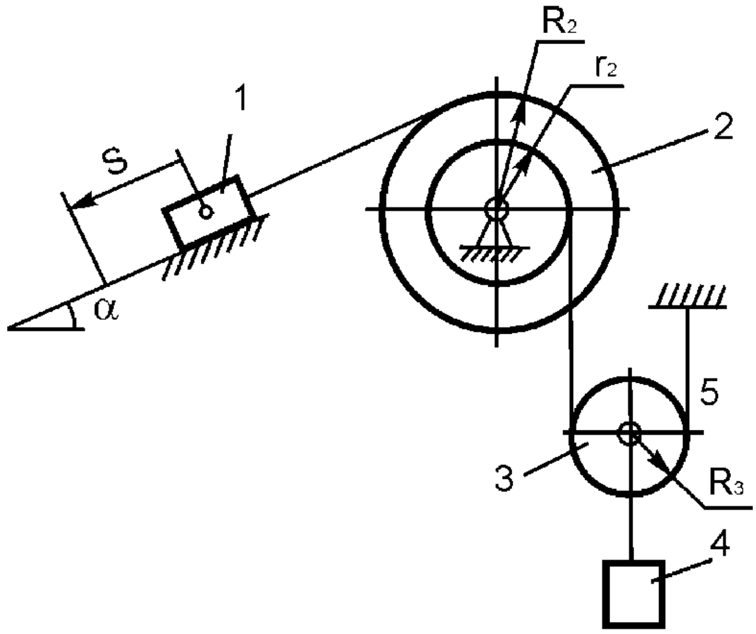
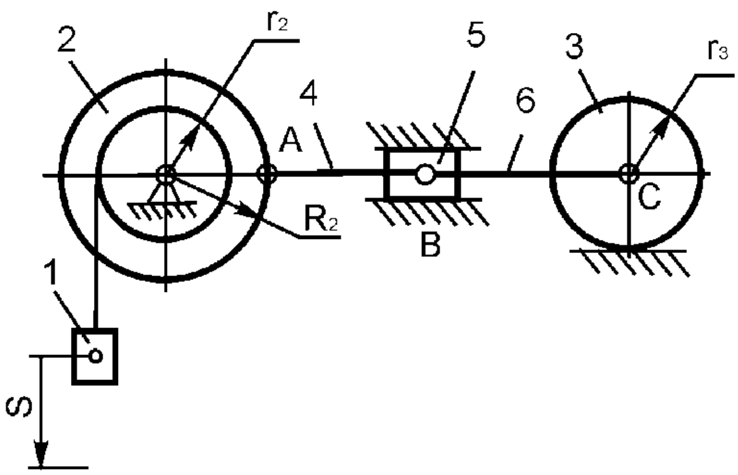
Продолжение табл..5.2

1	2	3
13		m_1 = m кг; m_2 = 2m кг; m_3 = 5m кг; m_4 = 2m кг; R_2 = 30 см; R_3 = 20 см; $r_2 = 0{,}8R_2$; $R_4 = R_2$; $r_4 = 0{,}2R_4$; i_{2x} = 26 см; $i_{4x} = 0{,}5i_{2x}$; $\alpha = 30^\circ$; δ = 0,24 см; s = 2 м
14		m_1 = m кг; m_2 = m/2 кг; m_3 = 5m кг; m_4 = 4m кг; R_3 = 25 см; δ = 0,20 см; s = 2 м
15		m_1 = m кг; m_2 = m/2 кг; m_3 = 4m кг; m_4 = m/2 кг; R_2 = 20 см; R_3 = 15 см; $R_4 = R_2$; $r_4 = r_2 = 0{,}5R_2$; $i_{4x} = i_{2x}$; i_{2x} = 18 см; $\alpha = 60^\circ$; δ = 0,25 см; s = 1,5 м

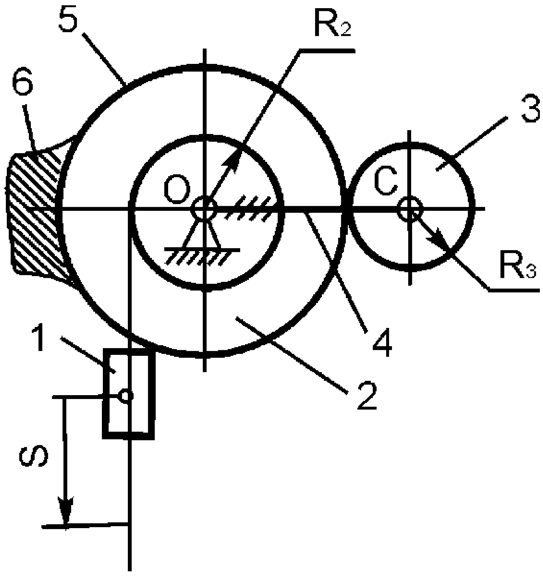
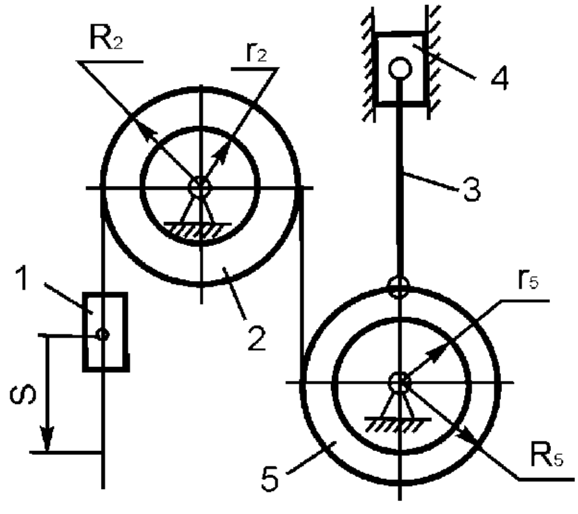
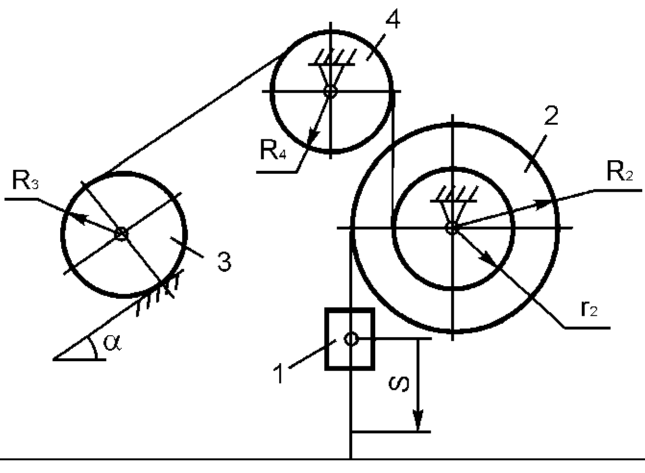
Продолжение табл..5.2

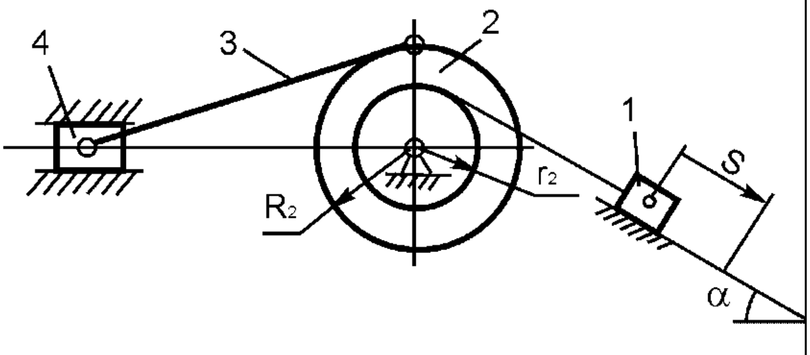
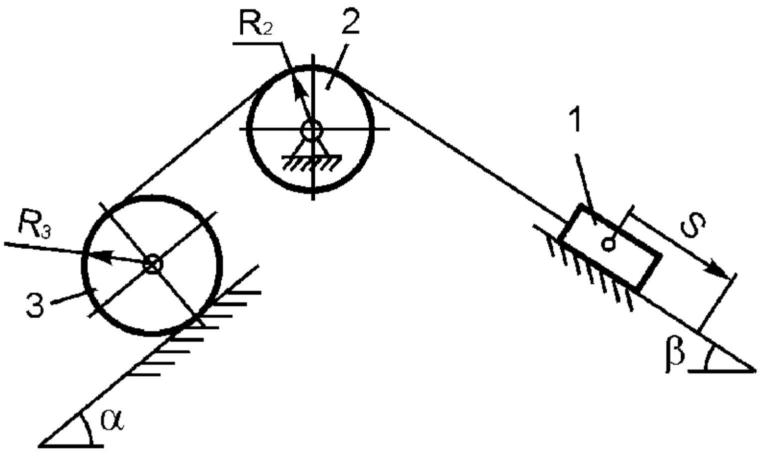
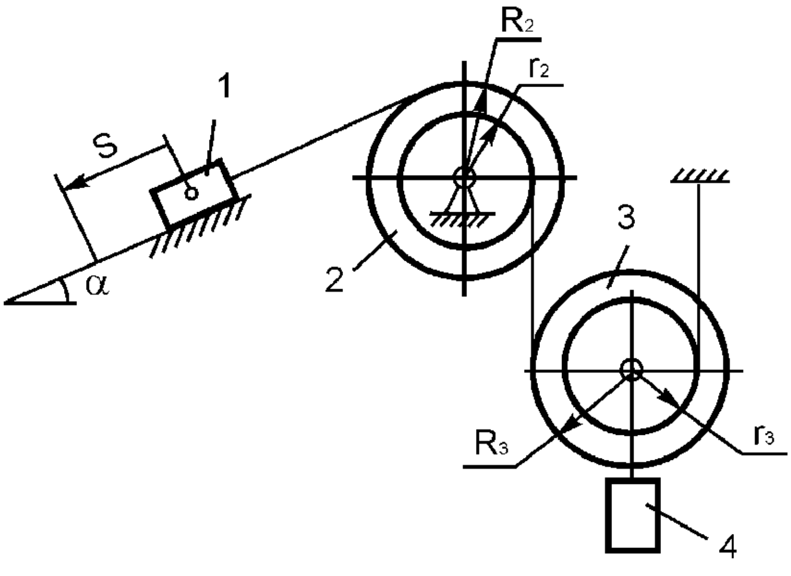
1	2	3
16		m_1 = m кг; m_2 = 0,1m кг; m_3 = 0,2m кг; m_4 = 0,1m кг; R_2 = 10 см; R_3 = 12 см; OC = 6 R_3; R_4 = $2R_3$; s = 0,05 м
17		m_1 = m кг; m_2 = m/4 кг; m_3 = m/5 кг; m_4 = 0,1m кг; R_2 = 20 см; r_2 = $0,8R_2$; i_{2x} = 15 см; α = 60°; f = 0,10; s = 0,16π м
18		m_1 = m кг; m_2 = 3m кг; m_3 = m кг; R_2 = 20 см; r_2 = 15 см; R_3 = 32 см; α = 60°; f = 0,15; s = 0,2π м

1	2	3
19		m_1 = m кг; m_2 = m/3 кг; m_3 = 0,1m кг; m_4 = m кг; R_2 = 24 см; r_2 = 0,8 R_2; i_{2x} = 20 см; $\alpha = 60^o$; f = 0,15; s = 1,5 м
20		m_1 = m кг; m_2 = 2m кг; m_3 = 20m кг; R_2 = 24 см; r_2 = 0,5R_2; R_3 = 15 см; i_{2x} = 16 см; AB = 6R_2; $\alpha = 30^o$; f = 0,10; δ = 0,20 см; s = 0,2π м
21		m_1 = m кг; m_2 = m кг; m_3 = 2m кг; R_2 = 20 см; r_2 = (3/4)R_2; R_3 = 20 см; i_{2x} = 16 см; $\alpha = 30^o$; $\beta = 45^o$; f = 0,20; δ = 0,32 см; s = 1,2 м

1	2	3
22		m_1 = m кг; m_2 = m/2 кг; m_3 = m/4 кг; R_2 = 20 см; OC = $2R_2$; R_3 = 10 см; $\alpha = 60^o$; f = 0,17; s = $0{,}1\pi$ м
23		m_1 = m кг; m_2 = m кг; m_3 = 0,1m кг; m_4 = 0,8m кг; R_2 = 20 см; r_2 = $0{,}8R_2$; i_{2x} = 18 см; $\alpha = 30^o$; f = 0,10; s = 1 м
24		m_1 = m кг; m_2 = 3m кг; m_3 = 20m кг; R_2 = 20 см; r_2 = $0{,}8R_2$; R_3 = 30 см; i_{2x} = 18 см; AB = $4R_2$; δ = 0,60 см; s = $0{,}08\pi$ м

Продолжение табл..5.2

1	2	3
25		$m_1 = m$ кг; $m_2 = m/3$ кг; $m_3 = m/4$ кг; $R_2 = 16$ см; $OC = 2{,}5R_2$; $R_3 = 20$ см; $s = 0{,}04\pi$ м
26		$m_1 = m$ кг; $m_2 = m/2$ кг; $m_3 = m$ кг; $m_4 = m/3$ кг; $R_2 = 30$ см; $i_{2x} = 20$ см; $R_2 = R_5$; $r_2 = r_5 = 0{,}5R_2$; $s = 0{,}6\pi$ м
27		$m_1 = m$ кг; $m_2 = m$ кг; $m_3 = 6m$ кг; $m_4 = m/2$ кг; $R_2 = 20$ см; $R_3 = 20$ см; $i_{2x} = 16$ см; $\alpha = 30°$; $\delta = 0{,}20$ см; $s = 2$ м

1	2	3
28		$m_1 = m$ кг; $m_2 = 2m$ кг; $m_3 = 3m$ кг; $R_2 = 20$ см; $r_2 = 0{,}5R_2$; $i_{2x} = 14$ см; $\alpha = 60°$; $f = 0{,}10$; $s = 0{,}1\pi$ м
29		$m_1 = m$ кг; $m_2 = m/5$ кг; $m_3 = m/8$ кг; $R_3 = 35$ см; $\alpha = 15°$; $\beta = 30°$; $f = 0{,}20$; $\delta = 0{,}20$ см; $s = 2{,}4$ м
30		$m_1 = m$ кг; $m_2 = m/2$ кг; $m_3 = 0{,}3m$ кг; $m_4 = 1{,}5m$ кг; $R_2 = 26$ см; $R_3 = 20$ см; $i_{2x} = 20$ см; $i_{3x} = 18$ см; $\alpha = 30°$; $f = 0{,}12$; $s = 2$ м

5.5.4. Пример выполнения курсового задания Д 4

Рассмотрим пример выполнения задания Д 4.

Условие задания.

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя. Начальное положение системы показано на рис. 5.28.

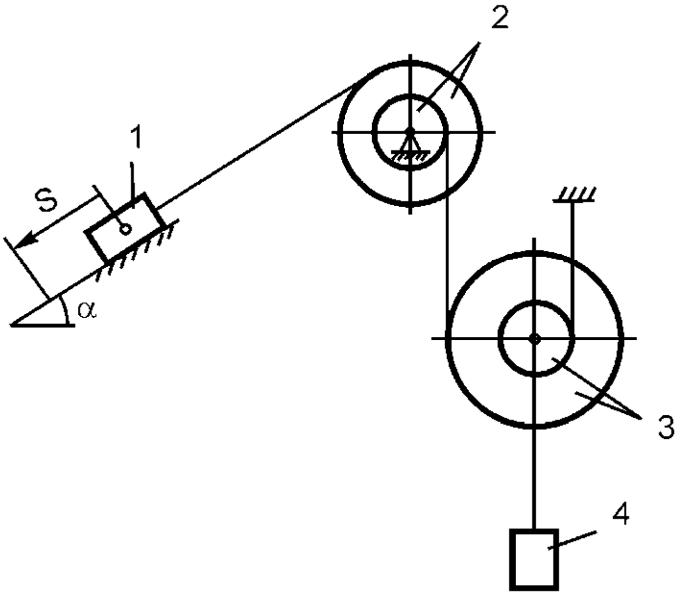


Рис. 5.28

Учитывая трение скольжения тела 1, пренебрегая силами сопротивления и массами нитей, предполагаемых нерастяжимыми, определить скорость тела 1 в тот момент времени, когда пройденный им путь станет равным s.

В задании приняты следующие обозначения: m_1, m_2, m_3, m_4 – массы тел 1, 2, 3, 4; R_2, r_2, R_3, r_3 – радиусы больших и малых окружностей; i_{2x}, i_{3x} – радиусы инерции тел 2 и 3 относительно горизонтальных осей, проходящих через их центры масс; α – угол наклона шероховатой поверхности к горизонту; f – коэффициент трения скольжения.

Дано: $m_1 = m$; $m_2 = m/2$; $m_3 = 0{,}3m$; $m_4 = 1{,}5m$; $R_2 = 26$ см; $r_2 = 0{,}5R_2$; $R_3 = 20$ см; $r_3 = 0{,}5R_3$; $i_{2x} = 20$ см; $i_{3x} = 18$ см; $\alpha = 30^\circ$; $f = 0{,}12$; $s = 2$ м.

Курсовое задание рекомендуется выполнять по следующему алгоритму.

1. Записать теорему об изменении кинетической энергии неизменяемой механической системы на конечном перемещении.

$$T_{sk} - T_{sn} = \Sigma A_i^E,$$

где T_{sn} – начальное значение кинетической энергии системы; T_{sk} – конечное значение кинетической энергии механической системы; ΣA_i^E – сумма работ внешних сил, приложенных к системе на ее конечном перемещении.

2. Определить кинетическую энергию T_{sn} механической системы в начальный момент времени. Поскольку механическая система движется из состояния покоя (см. рис. 5.28), то во всех вариантах заданий имеем $T_{sn} = 0$.

3. Изобразить на рисунке механическую систему в момент времени, когда центр C_1 масс тела 1 проходит расстояние s (см. рис. 5.29).

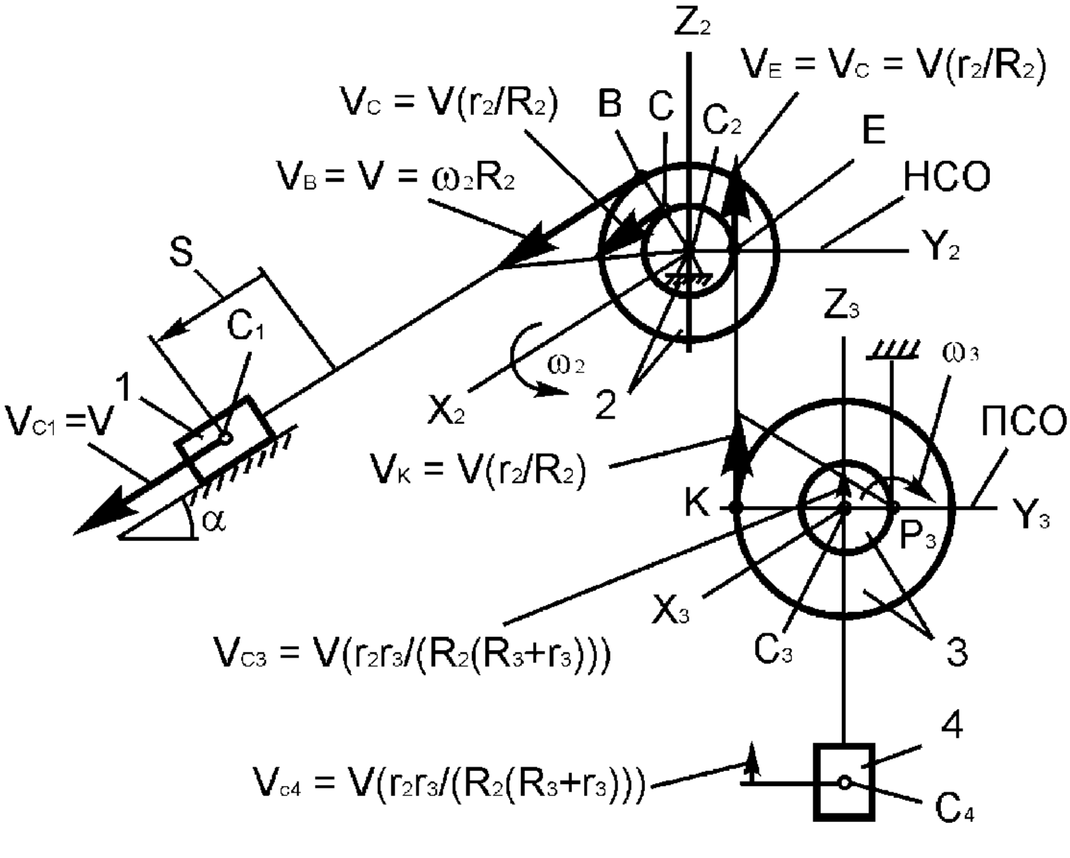


Рис. 5.29

4. Провести кинематический анализ безаварийной работы исследуемой механической системы.

Согласно рис. 5.29 тела механической системы осуществляют следующие виды движений. Тело 1 – поступательное движение со скоростью V_{C1} центра C_1 его масс; тело 2 – вращательное движение с угловой скоростью ω_2 относительно оси вращения C_2X_2, проходящей через центр масс C_2; тело 3 – плоскопараллельное движение;

тело 4 – поступательное движение со скоростью V_{C4} центра C_4 его масс.

Выразить скорости центров масс и угловые скорости тел механической системы в зависимости от скорости V_{C1} центра C_1 масс тела 1.

С целью сокращения формы записи введем обозначение $V = V_{C1}$. При определении кинематических характеристик тел механической системы учтем, что в точках контакта тел скорость этих точек должна быть одинаковой из условия их принадлежности соприкасающимся телам.

Итак, необходимо определить зависимости: $\omega_2 = f_1(V)$, $V_{C3} = f_2(V)$, $\omega_3 = f_3(V)$, $V_{C4} = f_4(V)$.

Так как тело 1 совершает поступательное движение, а нить нерастяжима, то справедливо равенство

$$V_{C1} = V = V_A = V_B,$$

где V_A – скорость точки A контакта тела 1 с нитью; V_B – скорость точки B контакта нити с телом 2.

Из условия принадлежности точки B телу 2, совершающему вращательное движение с угловой скоростью ω_2 относительно оси вращения C_2X_2, проходящей через центр масс C_2, имеем

$$V_B = V = \omega_2 BC_2 = \omega_2 R_2.$$

Отсюда получим

$$\omega_2 = V/R_2.$$

Зная угловую скорость ω_2, несложно определить скорость V_E точки E соприкосновения тела 2 с участком EK нерастяжимой нити.

$$V_E = \omega_2 EC_2 = \omega_2 r_2 = V(r_2/R_2) = V(0{,}5R_2/R_2) = 0{,}5V.$$

Зависимости, связывающие скорости точек B, C, E, несложно получить и из рассмотрения подобия треугольников на рис. 5.29.

Скорость V_K точки K контакта нити с телом 3 равна скорости точки E нити.

$$V_K = V_E = V(r_2/R_2).$$

Из условия принадлежности точки K телу 3, совершающему плоскопараллельное движение, справедливо равенство

$$V_K = V(r_2/R_2) = \omega_3 KP_3,$$

где ω_3 – угловая скорость тела 3; KP_3 – расстояние от точки K до мгновенного центра скоростей – точки P_3.

Согласно рис. 5.29 имеем $KP_3 = R_3 + r_3$. Тогда

$$\omega_3 = V(r_2/(R_2 KP_3)) = V\,(r_2/(R_2(R_3+r_3))).$$

Скорость V_{C3} центра C_3 масс тела 3 равна

$$V_{C3} = \omega_3 C_3 P_3 = V\,(r_2/(R_2(R_3+r_3))r_3) = V\,(r_2 r_3/(R_2(R_3+r_3))).$$

Так как по условию задания нить нерастяжима, то легко видеть, что скорость V_{C3} центра масс тела 3 равна скорости V_{C4} центра масс тела 4.

$$V_{C4} = V_{C3} = V\ (r_2r_3/(R_2(R_3+r_3))).$$

Таким образом, зависимости $\omega_2 = f_1(V)$, $V_{C3} = f_2(V)$, $\omega_3 = f_3(V)$, $V_{C4} = f_4(V)$ получены.

5. Определить кинетическую энергию T_{sk} неизменяемой механической системы в ее конечном положении по формуле

$$T_{sk} = \Sigma T_{ski},$$

где T_{ski} – кинетическая энергия i-го тела системы в конечном положении.

Кинетическая энергия тела 1, совершающего поступательное движение,

$$T_{sk1} = m_1(V_{C1})^2/2 = mV^2/2 = 0{,}5mV^2.$$

Кинетическая энергия тела 2 при его вращательном движении находится по формуле

$$T_{sk2} = J_{C2X2}(\omega_2)^2/2 = (m_2(i_{2X})^2)\ (\omega_2)^2/2 = ((m/2)\ (i_{2X})^2)(V/R_2)^2 =$$
$$= ((m/2)(20)^2)(V/26)^2 = 0{,}296mV^2.$$

Кинетическая энергия тела 3 при его плоскопараллельном движении равна

$$T_{sk3} = m_3(V_{C3})^2/2 + J_{C3X3}(\omega_3)^2/2 =$$
$$= m_3(V\ (r_2r_3/(R_2(R_3+r_3)))^2/2 + (m_3(i_{3X})^2)(V\ (r_2/(R_2(R_3+r_3))))^2/2 =$$
$$= 0{,}3m(V\ (0{,}5R_2\cdot 0{,}5R_3/(R_2(R_3+r_3))))^2/2 +$$
$$+ 0{,}3m(18)^2(V\ (0{,}5R_2/(R_2(R_3+r_3))))^2/2 =$$
$$= 0{,}3m(V(0{,}25/1{,}5))^2/2 + 0{,}3m(18)^2(V(0{,}5/(1{,}5\cdot 20)))^2/2 = 0{,}053mV^2.$$

Кинетическая энергия тела 4

$$T_{sk4} = m_4(V_{C4})^2/2 = 1{,}5m(V\ (r_2r_3/(R_2(R_3+r_3))))^2/2 =$$
$$= 1{,}5m(V\ (0{,}5R_2\cdot 0{,}5R_3/(R_2(R_3+r_3))))^2/2 = 0{,}020mV^2.$$

Определим кинетическую энергию T_{sk} механической системы:

$$T_{sk} = 0{,}5mV^2 + 0{,}295mV^2 + 0{,}053mV^2 + 0{,}020mV^2 = 0{,}868\ mV^2.$$

Таким образом, имеем $T_{sk} = 0{,}868\ mV^2$.

6. Показать внешние силы, действующие на точки механической системы при ее движении (рис. 5.30).

Согласно рис. 5.30 на механическую систему действуют активные силы ($\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{G}_3$, $\mathbf{G}_4$) и реакции ($\mathbf{N}_1$, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{Z}_{C2}$, $\mathbf{Y}_{C2}$, $\mathbf{T}_L$) внешних связей, которые наложены на эту систему.

По условию задания сила $\mathbf{F}_1$ трения скольжения тела 1 при его движении по шероховатой поверхности связана с нормальной реакцией $\mathbf{N}_1$ соотношением $F_1 = fN_1$, где f – коэффициент трения скольжения.

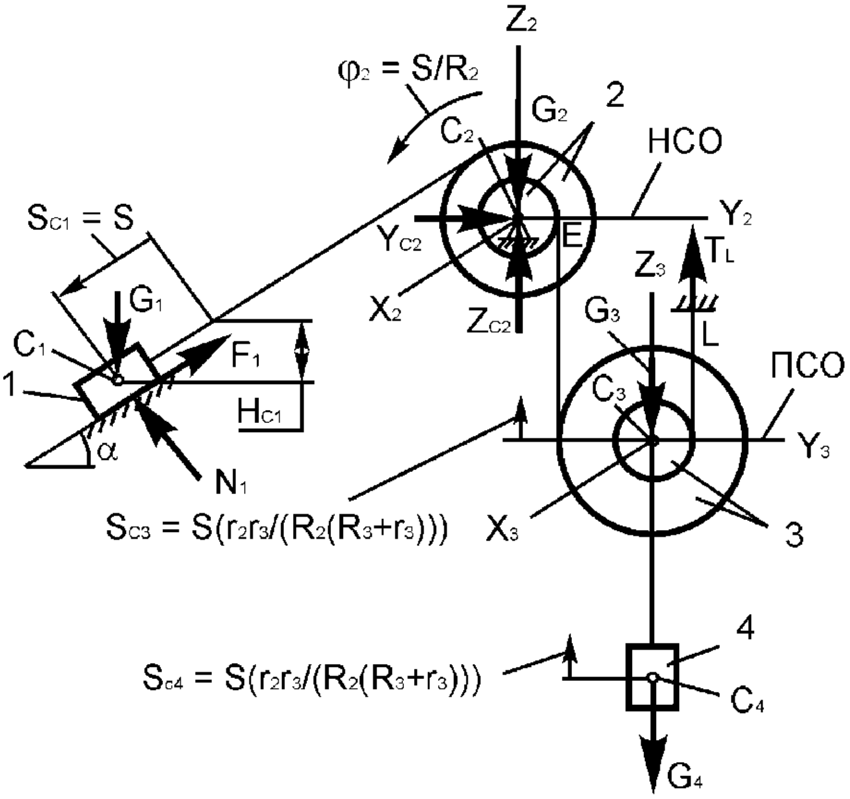


Рис. 5.30

Для определения реакции N_1 рассмотрим поступательное движение тела 1, приняв его за материальную точку, в системе отсчета $O_1X_1Y_1$, происходящее под действием силы тяжести $\mathbf{G}_1$, нормальной реакции $\mathbf{N}_1$, силы трения $\mathbf{F}_1$ и реакции $\mathbf{T}_A$ растянутой нити (рис. 5.31).

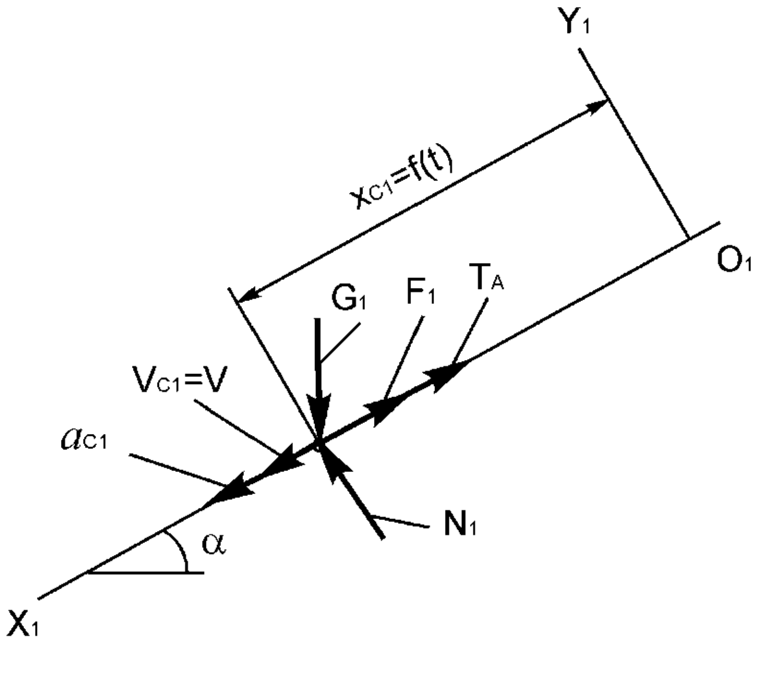


Рис. 5.31

Основное уравнение динамики для поступательно движущегося груза 1 имеет вид

$$m\boldsymbol{a}_{C1} = \Sigma\, \mathbf{F}_i^E + \Sigma \mathbf{R}_i^E = \mathbf{G}_1 + \mathbf{N}_1 + \mathbf{F}_1 + \mathbf{T}_A,$$

где $\boldsymbol{a}_{C1}$ – ускорение центра масс тела 1; $\mathbf{T}_A$ – натяжение нити в точке А тела 1 (см. рис. 5.29).

Составим дифференциальное уравнение движения центра C_1 масс груза 1, спроецировав последнее векторное равенство на координатную ось O_1Y_1.

$$m\ddot{y}_{C1} = \Sigma F_{io1y1}^E + \Sigma R_{io1y1}^E = -G_1\cos\alpha + N_1.$$

Поскольку проекция $\ddot{y}_{C1}$ ускорения $\boldsymbol{a}_{C1}$ центра масс тела 1 на координатную ось O_1Y_1 равна нулю, то имеем

$$N_1 = G_1\cos\alpha = m_1g\cos\alpha = mg\cos\alpha.$$

Тогда модуль силы трения находится по формуле

$$F_1 = fmg\cos\alpha.$$

7. Определить перемещения s_{Ci} центров C_i масс тел механической системы в зависимости от перемещения $s_{C1} = s$ центра C_1 масс тела 1.

При решении рассматриваемого варианта курсового задания были определены зависимости, связывающие скорость $V_{C1} = V$ центра C_1 масс тела 1 со скоростями V_{C3}, V_{C4} центров C_3, C_4 масс тел 3, 4.

$$V_{C3} = V_{C4} = V\,(r_2r_3/(R_2(R_3+r_3))).$$

Интегрируя эти выражения, получим

$$s_{C1} = s;\ s_{C3} = s_{C4} = s\,(r_2r_3/(R_2(R_3+r_3))).$$

8. Определить сумму работ (ΣA_i^E) внешних сил, приложенных к механической системе, при перемещении центра C_1 масс тела 1 на расстояние $s_{C1} = s$.

$$\Sigma A_i^E = A(\mathbf{G}_1) + A(\mathbf{N}_1) + A(\mathbf{F}_1) + A(\mathbf{G}_2) + A(\mathbf{Y}_{C2}) +$$
$$+ A(\mathbf{Z}_{C2}) + A(\mathbf{G}_3) + A(\mathbf{G}_4) + A(\mathbf{T}_L).$$

Согласно теоретическому материалу, изложенному в подразделе 5.5.1 данного учебно-методического пособия, справедливы следующие равенства:

$$A(\mathbf{G}_1) = G_1H_{C1} = m_1g(s_{C1})\sin\alpha = mg(s)\sin\alpha = mg\cdot 2\cdot 0{,}5 = mg,$$

где H_{C1} – перемещение центра C_1 масс тела 1 по высоте.

Работа $A(\mathbf{N}_1)$ нормальной реакции $\mathbf{N}_1$ равна нулю ($A(\mathbf{N}_1)=0$), так как направление реакции $\mathbf{N}_1$ перпендикулярно направлению вектора $\mathbf{s}$ перемещения точки ее приложения.

Работа $A(\mathbf{F}_1)$ силы трения $\mathbf{F}_1$ определяется по формуле

$$A(\mathbf{F}_1) = \mathbf{F}_1\cdot \mathbf{s}_{C1} = -F_1(s) = -(fmg\cos\alpha)s =$$
$$= -0{,}12mg\cdot 0{,}866\cdot 2\cdot = -0{,}207mg.$$

Работа $A(\mathbf{G}_2)$ силы тяжести $\mathbf{G}_2$, а также работы $A(\mathbf{Y}_{C2})$, $A(\mathbf{Z}_{C2})$ реакций $\mathbf{Y}_{C2}$, $\mathbf{Z}_{C2}$ шарнирно-неподвижной опоры в точке C_2 соответственно равны нулю: ($A(\mathbf{G}_2) = 0$; $A(\mathbf{Y}_{C2}) = 0$; $A(\mathbf{Z}_{C2}) = 0$), так как при вращении тела 2 точки приложения сил $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{Y}_{C2}$, $\mathbf{Z}_{C2}$ не изменяют своего положения ($s_{C2} = 0$).

Работу $A(\mathbf{G}_3)$ силы тяжести $\mathbf{G}_3$ тела 3 определим по формуле

$$A(\mathbf{G}_3) = -G_3H_{C3} = -m_3gs_{C3} = -0{,}3mg\cdot(s(r_2r_3/(R_2(R_3+r_3)))) =$$
$$= -0{,}3mg(s(0{,}5R_2\cdot 0{,}5R_3/(R_2(R_3+0{,}5R_3)))) =$$
$$= -0{,}3mg(2(0{,}5\cdot 0{,}5/(1(1+0{,}5)))) = -0{,}1mg.$$

Работа $A(\mathbf{G}_4)$ силы тяжести $\mathbf{G}_4$ равна

$$A(\mathbf{G}_4) = -G_4H_{C4} = -m_4gs_{C4} = -m_4g\cdot(s(r_2r_3/(R_2(R_3+r_3)))) =$$
$$= -1{,}5mg(2(0{,}5\cdot 0{,}5/(1(1+0{,}5)))) = -0{,}5mg,$$

где H_{C4} – изменение положения центра C_4 масс тела 4 по высоте.

Работа $A(\mathbf{T}_L)$ реакции $\mathbf{T}_L$ растянутой нити равна нулю ($A(\mathbf{T}_L)= 0$), так как точка L приложения этой реакции не изменяет своего положения при движении механической системы.

Вычислим сумму работ ΣA_i^E внешних сил, приложенных к механической системе, при перемещении центра C_1 масс тела 1 на расстояние s.

$$\Sigma A_i^E = mg - 0{,}207mg - 0{,}1mg - 0{,}5mg = 0{,}193mg.$$

9. Определим скорость тела 1 в тот момент времени, когда пройденный им путь станет равным S.

$$T_{sk} = 0{,}868mV^2 = \Sigma A_i^E = 0{,}193mg.$$

Решая последнее выражение, получим

$$V = \sqrt{0{,}193g/0{,}868} = \sqrt{0{,}193(9{,}81)/0{,}868} = 1{,}476 \text{ м/с}.$$

Таким образом, ответ на вопрос, поставленный в курсовом задании, получен:

$$V = 1{,}476 \text{ м/с}.$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулировать определение понятия «***работа постоянной силы на прямолинейном перемещении точки ее приложения***».
2. Сформулировать определение понятия «***элементарная работа переменной силы***».
3. Записать формулу для определения ***работы силы тяжести***.
4. Сформулировать определение понятия «***мощность силы***».

5. Сформулировать определение понятия «***кинетическая энергия***».
6. Записать формулу для определения ***кинетической энергии материальной точки***.
7. Записать формулу для определения ***кинетической энергии поступательно движущегося твердого тела***.
8. Записать формулу для определения ***кинетической энергии вращающегося тела*** относительно вертикальной оси.
9. Записать формулу для определения ***кинетической энергии для твердого тела, совершающего плоскопараллельное движение***.
10. Записать формулу для определения ***кинетической энергии механической системы***.
11. Записать формулу, выражающую ***теорему об изменении кинетической энергии механической системы***.

5.6. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы

5.6.1. Принцип Даламбера для несвободной материальной точки

Рассмотрим движение несвободной материальной точки под действием активных сил $\mathbf{F}_i^E$ и реакций $\mathbf{R}_i^E$ внешних связей в инерциальной системе отсчета OXYZ (рис. 5.32).

Следует отметить, что на точку могут действовать несколько активных сил и реакций внешних связей. Однако на рис. 5.32 показаны только по одной из этих сил.

Основное уравнение динамики точки имеет вид

$$m\boldsymbol{a} = \Sigma\mathbf{F}_i^E + \Sigma\mathbf{R}_i^E.$$

Перенесем произведение $m\boldsymbol{a}$ из левой части рассматриваемого уравнения в правую его часть:

$$\Sigma\mathbf{F}_i^E + \Sigma\mathbf{R}_i^E - m\boldsymbol{a} = 0.$$

Введем условное обозначение $\mathbf{\Phi} = -\, m\boldsymbol{a}$. Назовем $\mathbf{\Phi}$ силой инерции материальной точки.

Сила инерции материальной точки *– величина, равная произведению массы точки на ее ускорение и направленная противоположно этому ускорению.*

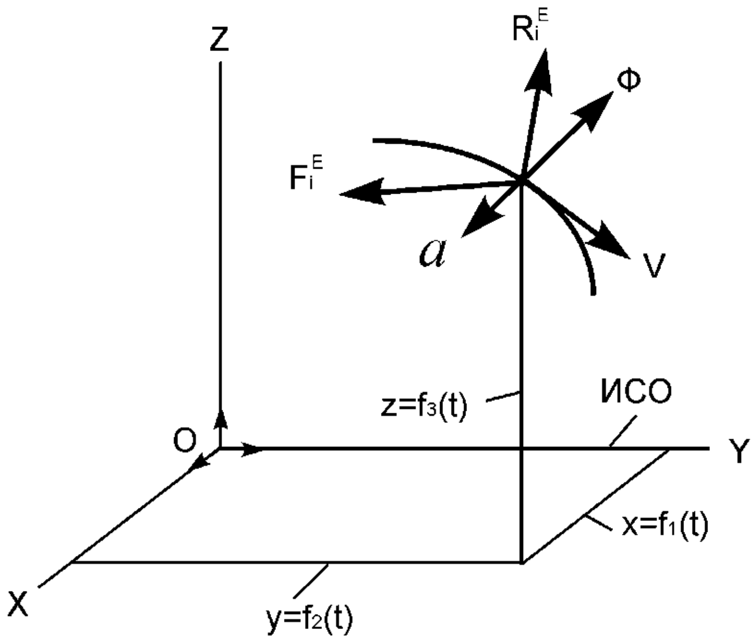


Рис. 5.32

Как вектор сила инерции **Ф** имеет размерность [Н] и характеризуется тремя элементами: точкой приложения (приложена в точке, движение которой рассматривается); направлением (направлена в сторону, противоположную направлению ускорения $\boldsymbol{a}$); модулем, который определяется по формуле Ф = ma.

Исходя из изложенного выше, последнее векторное равенство представим в следующем виде:

$$\Sigma \mathbf{F}_i^E + \Sigma \mathbf{R}_i^E + \mathbf{\Phi} = 0.$$

Это векторное уравнение и выражает ***принцип Даламбера*** для несвободной материальной точки.

В любой момент времени для движущейся несвободной материальной точки геометрическая сумма активных сил, реакций внешних связей и силы инерции равна нулю.

По существу, основное уравнение динамики точки ($m\boldsymbol{a} = \Sigma \mathbf{F}_i^E + \Sigma \mathbf{R}_i^E$) преобразовано к другому виду ($\Sigma \mathbf{F}_i^E + \Sigma \mathbf{R}_i^E + \mathbf{\Phi} = 0$), который широко применяется в статике механических систем.

Поскольку силовой многоугольник, построенный на векторах активных сил $\mathbf{F}_i^E$, реакций $\mathbf{R}_i^E$ внешних связей и силы инерции **Ф** замкнут, то суммы проекций этих сил на координатные оси системы отсчета OXYZ равны нулю. Спроецируем векторное равенство ($\Sigma \mathbf{R}_i^E + \Sigma \mathbf{R}_i^E + \mathbf{\Phi} = 0$) на координатные оси инерциальной системы отсчета и получим следующие равенства:

$$\Sigma F^E_{iox} + \Sigma R^E_{iox} + \Phi_{ox} = 0;$$
$$\Sigma F^E_{ioy} + \Sigma R^E_{ioy} + \Phi_{oy} = 0;$$
$$\Sigma F^E_{ioz} + \Sigma R^E_{ioz} + \Phi_{oz} = 0.$$

Сумма проекций активных сил, реакций внешних связей и силы инерции на координатные оси инерциальной системы отсчета равна нулю.

Последние уравнения зачастую называют ***уравнениями динамического равновесия материальной точки***, в отличие от уравнений ($\Sigma F^E_{iox} + \Sigma R^E_{iox} = 0$; $\Sigma F^E_{ioy} + \Sigma R^E_{ioy} = 0$; $\Sigma F^E_{ioz} + \Sigma R^E_{ioz} = 0$) статического равновесия.

В действительности сила инерции материальной точки приложена не к ней, а к телу, взаимодействующему с рассматриваемой точкой. Приложение силы инерции к точке является лишь условным приемом, сводящим задачу динамики по форме решения к задаче статики.

Благодаря простоте, принцип Даламбера получил широкое применение во многих инженерных дисциплинах. В ряде случаев он обеспечивает наиболее простое и удобное решение задач динамики.

5.6.2. Принцип Даламбера для несвободной механической системы

Рассмотрим движение материальной точки несвободной механической системы под действием активной силы $\mathbf{F}^E_i$, реакции $\mathbf{R}^E_i$ внешней связи и внутренней силы $\mathbf{R}^J_i$ в инерциальной системе отсчета OXYZ (рис. 5.33).

Применим принцип Даламбера для каждой точки C_i неизменяемой механической системы.

$$\mathbf{F}^E_i + \mathbf{R}^E_i + \mathbf{R}^J_i + \mathbf{\Phi}_i = 0,$$

где $\mathbf{\Phi}_i = -m\boldsymbol{a}_{ci}$ – сила инерции материальной точки C_i механической системы.

Просуммируем составленные уравнения и получим выражение

$$\Sigma\mathbf{F}^E_i + \Sigma\mathbf{R}^E_i + \Sigma\mathbf{R}^J_i + \Sigma\mathbf{\Phi}_i = 0.$$

Поскольку механическая система неизменяемая, то геометрическая сумма реакций $\mathbf{R}^J_i$ внутренних связей равна нулю ($\Sigma\mathbf{R}^J_i = 0$). Тогда получим

$$\Sigma\mathbf{F}^E_i + \Sigma\mathbf{R}^E_i + \Sigma\mathbf{\Phi}_i = 0.$$

В любой момент времени для неизменяемой механической системы геометрическая сумма активных сил, реакций внешних связей и сил инерции равна нулю.

Это и есть ***принцип Даламбера для неизменяемой механической системы***.

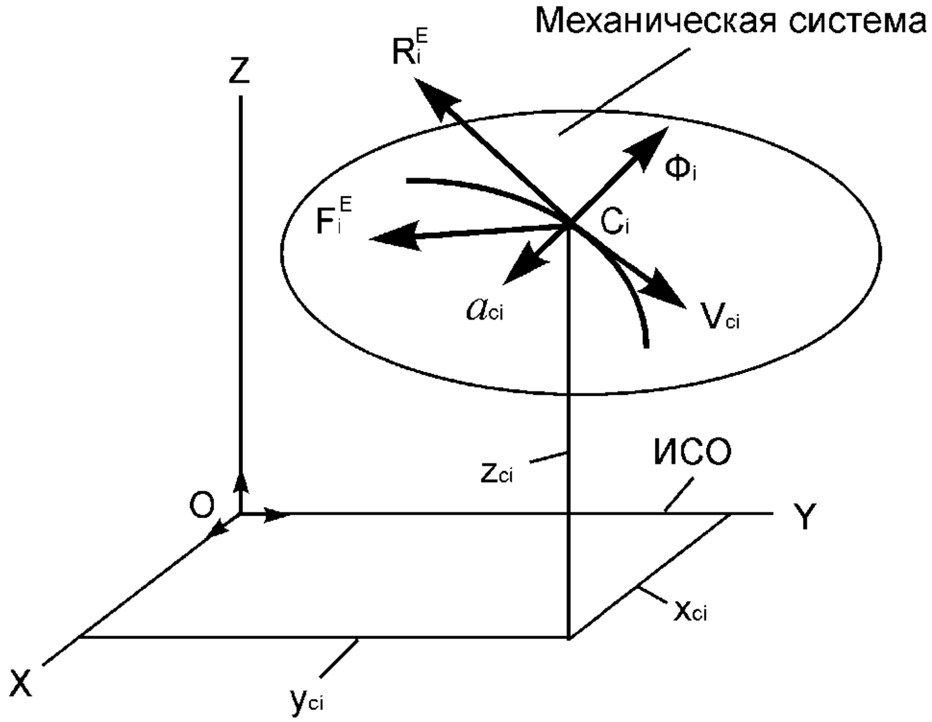


Рис. 5.33

Этот принцип зачастую записывают в следующем виде:

$$\mathbf{F}^* + \mathbf{R}^* + \mathbf{\Phi}^* = 0,$$

где $\mathbf{F}^* = \Sigma \mathbf{F}_i^E$ – главный вектор активных сил; $\mathbf{R}^* = \Sigma \mathbf{R}_i^E$ – главный вектор реакций внешних связей; $\mathbf{\Phi}^* = \Sigma \mathbf{\Phi}_i$ – главный вектор сил инерции.

В любой момент времени для неизменяемой механической системы геометрическая сумма главных векторов активных сил, реакций внешних связей и сил инерции равна нулю.

Как правило, векторное равенство $\mathbf{F}^* + \mathbf{R}^* + \mathbf{\Phi}^* = 0$, выражающее принцип Даламбера, применяют при рассмотрении поступательного движения твердого тела.

Используя метод Пуансо для каждой материальной точки механической системы, приведем произвольно направленные в пространстве активные силы $\mathbf{F}_i^E$, реакции $\mathbf{R}_i^E$ внешних связей и силы инерции $\mathbf{\Phi}_i$ к центру масс механической системы (рис. 5.34).

Необходимо отметить, что метод Пуансо справедлив для любой произвольной точки, но, как правило, в инженерной практике за такую точку принимают центр масс твердого тела или механической системы.

Согласно методу Пуансо система активных сил $\mathbf{F}_i^E$, реакций $\mathbf{R}_i^E$ внешних связей и сил инерции $\mathbf{\Phi}_i$ эквивалентна системе сил ($\mathbf{F}^*$, $\mathbf{R}^*$, $\mathbf{\Phi}^*$) и системе присоединенных пар сил с векторными моментами $\mathbf{M}_c^*(\mathbf{F}_i^E)$, $\mathbf{M}_c^*(\mathbf{R}_i^E)$, $\mathbf{M}_c^*(\mathbf{\Phi}_i)$, где $\mathbf{M}_c^*(\mathbf{F}_i^E) = \Sigma\mathbf{M}_c(\mathbf{F}_i^E)$ – главный момент активных сил относительно центра масс; $\mathbf{M}_c^*(\mathbf{R}_i^E) = \Sigma\mathbf{M}_c(\mathbf{R}_i^E)$ – главный момент реакций внешних связей относительно центра масс; $\mathbf{M}_c^*(\mathbf{\Phi}_i) = \Sigma\mathbf{M}_c(\mathbf{\Phi}_i)$ – главный момент сил инерции относительно центра масс.

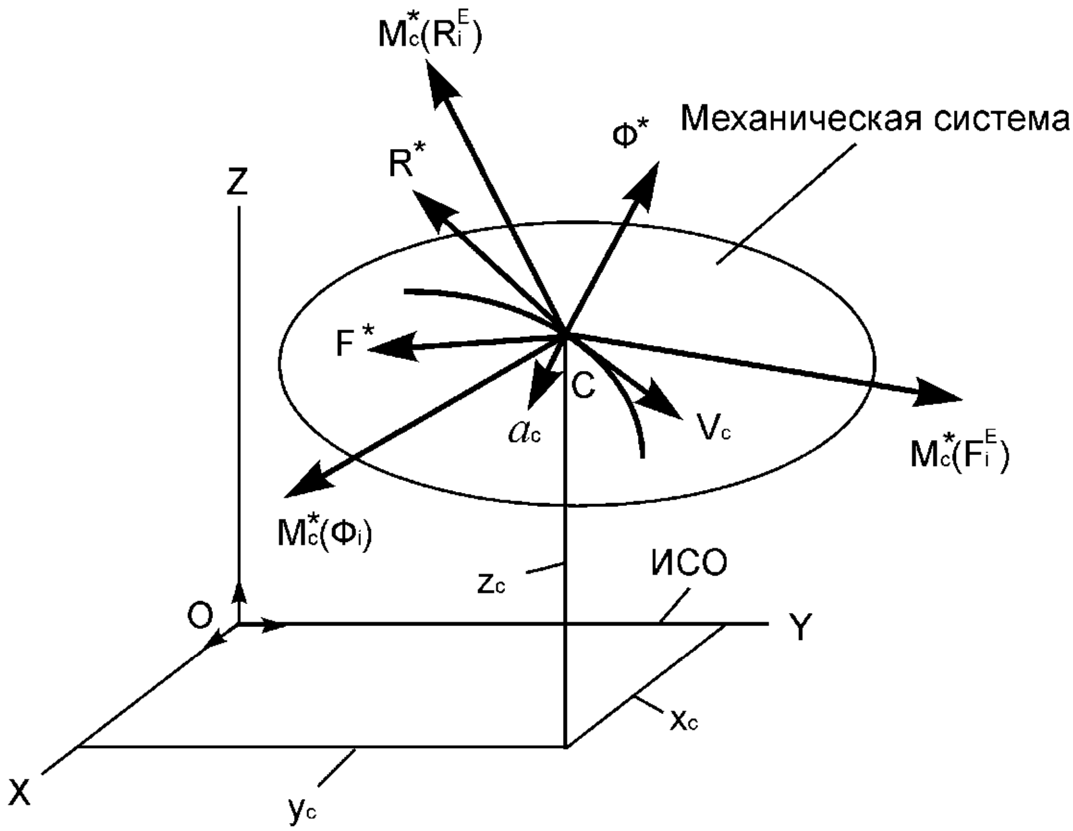


Рис. 5.34

С использованием условных обозначений: $\mathbf{F}^*$, $\mathbf{R}^*$, $\mathbf{\Phi}^*$, $\mathbf{M}_c^*(\mathbf{F}_i^E)$, $\mathbf{M}_c^*(\mathbf{R}_i^E)$, $\mathbf{M}_c^*(\mathbf{\Phi}_i)$ принцип Даламбера преобразуется в совокупность двух векторных выражений:

$$\mathbf{F}^* + \mathbf{R}^* + \mathbf{\Phi}^* = 0;$$

$$\mathbf{M}_c^*(\mathbf{F}_i^E) + \mathbf{M}_c^*(\mathbf{R}_i^E) + \mathbf{M}_c^*(\mathbf{\Phi}_i) = 0.$$

В любой момент времени для движущейся неизменяемой механической системы геометрические суммы главных векторов и главных моментов активных сил, реакций внешних связей и сил инерции относительно произвольного центра (как правило, относительно центра масс) равны нулю.

Спроецируем последние векторные равенства на координатные оси системы отсчета OXYZ и получим шесть уравнений, выражающих принцип Даламбера в скалярной форме:

$$F^*_{ox} + R^*_{ox} + \Phi^*_{ox} = 0;$$

$$F^*_{oy} + R^*_{oy} + \Phi^*_{oy} = 0;$$

$$F^*_{oz} + R^*_{oz} + \Phi^*_{oz} = 0;$$

$$M^*_{cox}(\mathbf{F}_i^E) + M^*_{cox}(\mathbf{R}_i^E) + M^*_{cox}(\mathbf{\Phi}_i) = 0;$$

$$M^*_{coy}(\mathbf{F}_i^E) + M^*_{coy}(\mathbf{R}_i^E) + M^*_{coy}(\mathbf{\Phi}_i) = 0;$$

$$M^*_{coz}(\mathbf{F}_i^E) + M^*_{coz}(\mathbf{R}_i^E) + M^*_{coz}(\mathbf{\Phi}_i) = 0,$$

где F^*_{ox}, F^*_{oy}, F^*_{oz} – проекции главного вектора активных сил на координатные оси; R^*_{ox}, R^*_{oy}, R^*_{oz} – проекции главного вектора реакций внешних связей на координатные оси; Φ^*_{ox}, Φ^*_{oy}, Φ^*_{oz} – проекции главного вектора сил инерции на координатные оси; $M^*_{cox}(\mathbf{F}_i^E)$, $M^*_{coy}(\mathbf{F}_i^E)$, $M^*_{coz}(\mathbf{F}_i^E)$ – проекции главного момента активных сил на координатные оси; $M^*_{cox}(\mathbf{R}_i^E)$, $M^*_{coy}(\mathbf{R}_i^E)$, $M^*_{coz}(\mathbf{R}_i^E)$ – проекции главного момента реакций внешних связей на координатные оси; $M^*_{cox}(\mathbf{\Phi}_i)$, $M^*_{coy}(\mathbf{\Phi}_i)$, $M^*_{coy}(\mathbf{\Phi}_i)$, $M^*_{coz}(\mathbf{\Phi}_i)$ – проекции главного момента сил инерции на координатные оси.

В любой момент времени для движущейся неизменяемой механической системы суммы проекций главных векторов активных сил, реакций внешних связей и сил инерции, а также суммы проекций главных моментов активных сил, реакций внешних связей и сил инерции относительно произвольного центра на координатные оси инерциальной системы отсчета равны нулю.

Как правило, в инженерной практике силы не приводят в одну точку и, следовательно, такими понятиями, как главные векторы сил и главные моменты сил относительно произвольной точки не пользуются, а применяют силы, приложенные в различных точках механической системы. В этом случае принцип Даламбера выражается следующими уравнениями:

$$\Sigma F^E_{iox} + \Sigma R^E_{iox} + \Sigma \Phi_{iox} = 0;$$
$$\Sigma F^E_{ioy} + \Sigma R^E_{ioy} + \Sigma \Phi_{ioy} = 0;$$
$$\Sigma F^E_{ioz} + \Sigma R^E_{ioz} + \Sigma \Phi_{ioz} = 0;$$
$$\Sigma M_{ox}(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_{ox}(\mathbf{R}_i^E) + \Sigma M_{ox}(\mathbf{\Phi}_i) = 0;$$
$$\Sigma M_{oy}(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_{oy}(\mathbf{R}_i^E) + \Sigma M_{oy}(\mathbf{\Phi}_i) = 0;$$
$$\Sigma M_{oz}(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_{oz}(\mathbf{R}_i^E) + \Sigma M_{oz}(\mathbf{\Phi}_i) = 0,$$

где ΣF^E_{iox}, ΣF^E_{ioy}, ΣF^E_{ioz} – суммы проекций активных сил на координатные оси; ΣR^E_{iox}, ΣR^E_{ioy}, ΣR^E_{ioz} – суммы проекций реакций внешних связей на координатные оси; $\Sigma \Phi_{iox}$, $\Sigma \Phi_{ioy}$, $\Sigma \Phi_{ioz}$ – суммы проекций сил инерции на координатные оси; $\Sigma M_{oz}(\mathbf{F}_i^E)$, $\Sigma M_{oy}(\mathbf{F}_i^E)$, $\Sigma M_{oz}(\mathbf{F}_i^E)$ – суммы моментов активных сил относительно координатных осей; $\Sigma M_{ox}(\mathbf{R}_i^E)$, $\Sigma M_{oy}(\mathbf{R}_i^E)$, $\Sigma M_{oz}(\mathbf{R}_i^E)$ – суммы моментов реакций внешних связей относительно координатных осей; $\Sigma M_{ox}(\mathbf{\Phi}_i)$, $\Sigma M_{oy}(\mathbf{\Phi}_i)$, $\Sigma M_{oz}(\mathbf{\Phi}_i)$ – суммы моментов сил инерции относительно координатных осей.

В любой момент времени для движущейся неизменяемой механической системы суммы проекций активных сил, реакций внешних связей и сил инерции на координатные оси, а также суммы моментов активных сил, реакций внешних связей и сил инерции относительно координатных осей равны нулю.

Последние математические выражения применяются для механических систем, расположенных в трехмерном пространстве. Для плоских систем используют двухмерное пространство. В таком пространстве принцип Даламбера выражается следующими уравнениями:

$$\Sigma F^E_{iox} + \Sigma R^E_{iox} + \Sigma \Phi_{iox} = 0;$$
$$\Sigma F^E_{ioy} + \Sigma R^E_{ioy} + \Sigma \Phi_{ioy} = 0;$$
$$\Sigma M_A(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_A(\mathbf{R}_i^E) + \Sigma M_A(\mathbf{\Phi}_i) = 0,$$

где $\Sigma M_A(\mathbf{F}_i^E)$, $\Sigma M_A(\mathbf{R}_i^E)$, $\Sigma M_A(\mathbf{\Phi}_i)$ – суммы моментов соответственно активных сил, реакций внешних связей и сил инерции относительно произвольной точки А.

В любой момент времени для движущейся неизменяемой механической системы суммы проекций активных сил, реакций внешних связей и сил инерции на координатные оси, а также *сумма моментов активных сил, реакций внешних связей и сил инерции относительно произвольной точки равны нулю.*

В инженерной практике, как правило, принцип Даламбера применяют для определения реакций внешних связей, наложенных на механическую систему.

5.6.3. Приведение сил инерции точек твердого тела к простейшему виду

В данном учебно-методическом пособии рассматриваются неизменяемые механические системы, в которые входят тела, осуществляющие следующие виды движений: поступательное, вращательное, плоскопараллельное.

При поступательном движении силы инерции материальных точек приводятся к главному вектору $\mathbf{\Phi}^*$ сил инерции, который прикладывается в центре масс твердого тела (рис. 5.35) и определяется по формуле

$$\mathbf{\Phi}^* = -m\boldsymbol{a}_C.$$

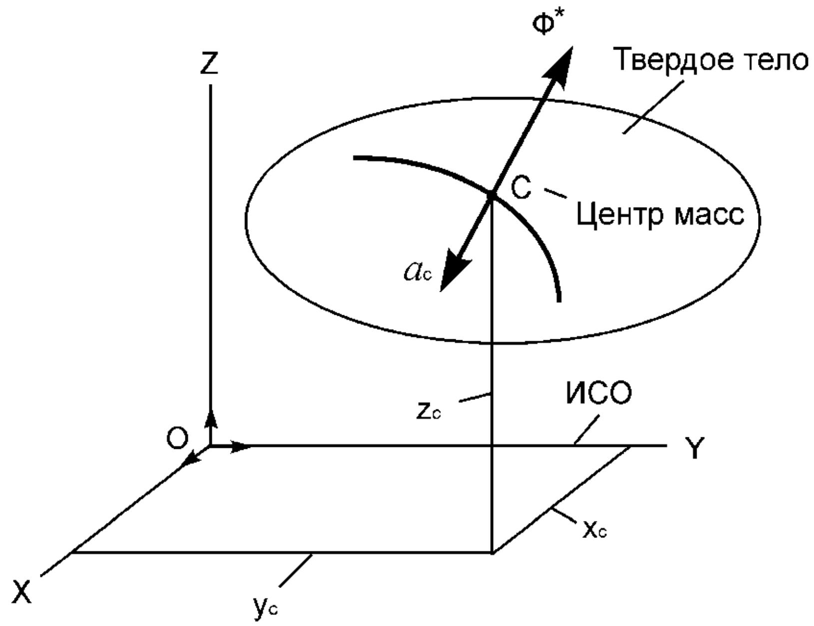


Рис. 5.35

Согласно рис. 5.35 главный вектор сил инерции $\mathbf{\Phi}^*$ направлен в сторону, противоположную ускорению $\boldsymbol{a}_C$. Модуль главного вектора сил инерции определяется по формуле $\Phi^* = ma_C$.

Рассмотрим вращательное движение твердого тела относительно оси OX, которая не проходит через его центр масс (рис. 5.36).

Согласно положениям кинематики имеем векторное равенство

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_C^{\omega} + \boldsymbol{a}_C^{\varepsilon},$$

где a_c – ускорение центра масс; a_c^{ω} – центростремительное ускорение центра масс; a_c^{ε} – вращательное ускорение центра масс.

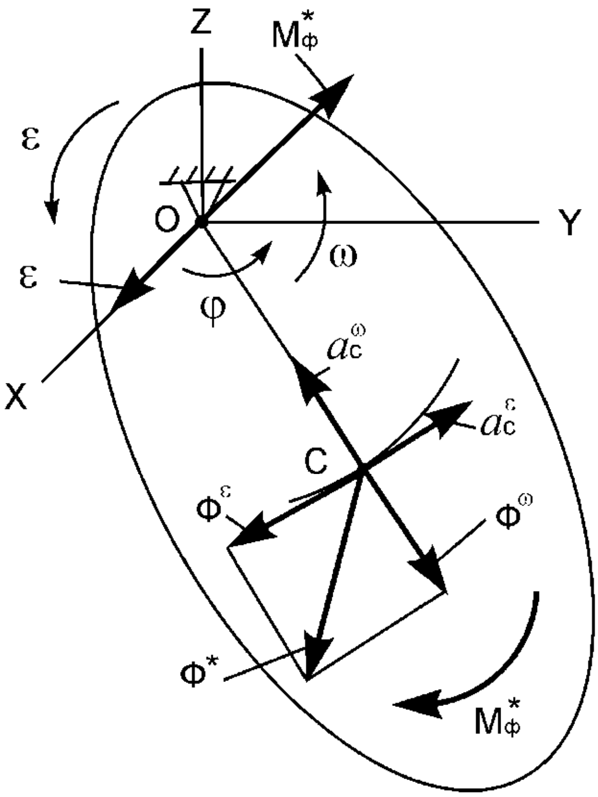


Рис. 5.36

В рассматриваемом случае силы инерции материальных точек тела приводятся к главному вектору $\mathbf{Ф}^*$ сил инерции и главному векторному моменту $\mathbf{M}_Ф^*$, определяемым по формулам:

$$\mathbf{Ф}^* = \mathbf{Ф}^{\omega} + \mathbf{Ф}^{\varepsilon};$$
$$\mathbf{M}_Ф^* = -J_{cx1}\boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\mathbf{Ф}^{\omega} = -m a_c^{\omega}$ – центробежная сила инерции; $\mathbf{Ф}^{\varepsilon} = -m a_c^{\varepsilon}$ – вращательная сила инерции; J_{cx1} – момент инерции тела относительно оси CX_1, проходящей через центр масс; $\boldsymbol{\varepsilon}$ – вектор углового ускорения.

Направления сил инерции $\mathbf{Ф}^{\omega}$, $\mathbf{Ф}^{\varepsilon}$ показаны на рис. 5.36. Модули составляющих $\mathbf{Ф}^{\omega}$, $\mathbf{Ф}^{\varepsilon}$ главного вектора $\mathbf{Ф}^*$ сил инерции и приведенного момента $\mathbf{M}_Ф^*$ сил инерции определяют по формулам:

$$Ф^{\omega} = m(\omega^2 \cdot CO); \quad Ф^{\varepsilon} = m(\varepsilon \cdot CO); \quad M_Ф^* = M^Ф = J_{cx1}\varepsilon,$$

где m, ω, ε – соответственно масса, угловая скорость и угловое ускорение тела; CO – расстояние от центра масс до оси вращения.

В инженерной практике наиболее часто используется вариант, в котором центробежная и вращательная силы инерции прикладываются в центре масс (см. рис. 5.36). Этот вариант и рекомендуется для дальнейшего использования как основной вариант.

Для общего ознакомления приведем и другие варианты приложения сил инерции.

Рассмотрим вариант вращательного движения твердого тела, при котором силы инерции $\mathbf{\Phi}^{\omega}$, $\mathbf{\Phi}^{\varepsilon}$ прикладываются на оси вращения (рис. 5.37).

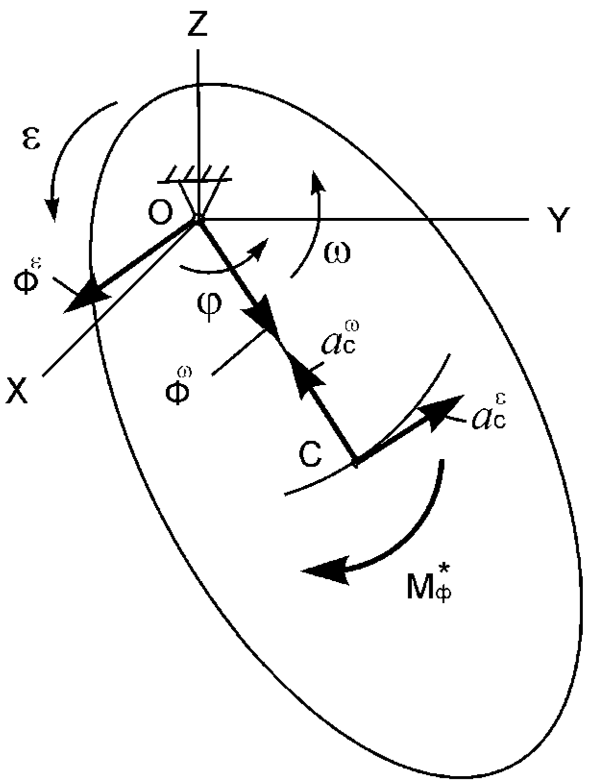


Рис. 5.37

В этом случае модули искомых инерциальных нагрузок определяются по формулам:

$$\Phi^{\omega} = m(\omega^2 \cdot CO); \quad \Phi^{\varepsilon} = m(\varepsilon \cdot CO); \quad M^*_{\Phi} = M^{\Phi} = J_{ox}\varepsilon,$$

где J_{ox} – момент инерции тела относительно оси вращения.

Рассмотрим вариант вращательного движения твердого тела (рис. 5.38), при котором $\Phi^{\omega} = m(\omega^2 \cdot CO)$; $\Phi^{\varepsilon} = m(\varepsilon \cdot CO)$; $M^*_{\Phi} = M^{\Phi} = 0$.

В этом случае центробежную и вращательную силы инерции прикладывают в точке O_1, а расстояние OO_1 определяют по формуле

$$OO_1 = J_{ox}/(m \cdot CO),$$

где J_{ox} – момент инерции тела относительно оси вращения.

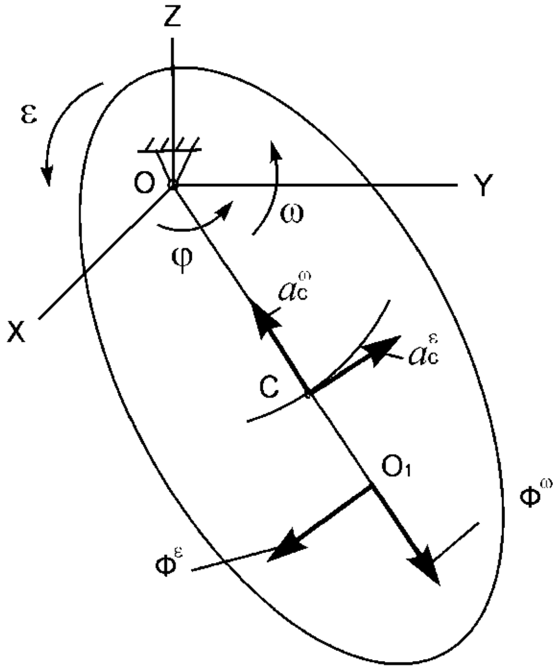


Рис. 5.38

В инженерной практике широкое распространение имеет вариант, при котором ось вращения тела проходит через его центр масс (рис. 5.39).

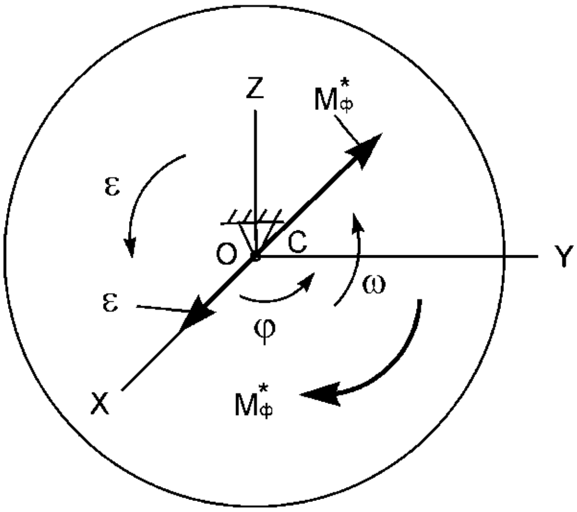


Рис. 5.39

В рассматриваемом случае силы инерции материальных точек твердого тела приводятся к моменту $M^Ф$ сил инерции.

$$M^Ф = J_{cx}\varepsilon.$$

Определим и покажем на рис. 5.40 главный вектор **Ф*** сил инерции и момент $M^{Ф}$ сил инерции при плоскопараллельном движении твердого тела.

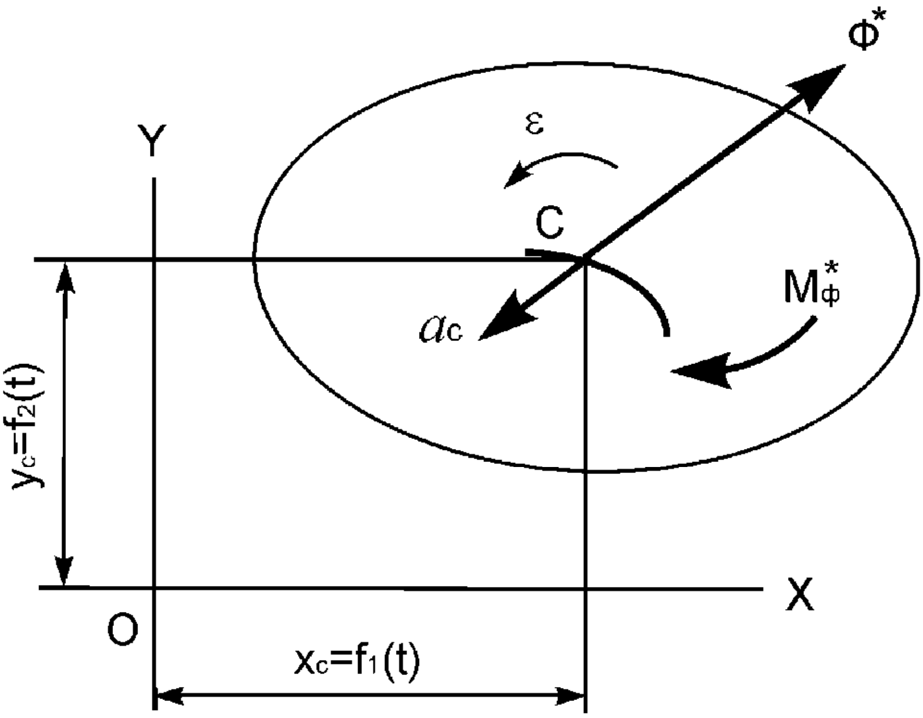


Рис. 5.40

При таком движении твердого тела имеем:

$$Ф^* = m a_c; \quad M^{Ф} = J_{cz}\varepsilon,$$

где J_{cz} – момент инерции тела относительно оси CZ вращения, проходящей через центр масс.

Для закрепления изложенного материала студентам рекомендуется выполнить курсовое задание Д 5.

5.6.4. Варианты курсового задания Д 5 «Применение принципа Даламбера к определению реакций связей»

Определить реакции внешних связей механической системы: в заданном положении для вариантов 4, 5, 10, 15, 19, 21 – 30; в момент времени t_1 для вариантов 1, 8, 9, 11, 20; в тот момент времени, когда угол поворота имеет значение φ_1, для вариантов 2, 3, 6, 7.

На расчетных схемах плоскость OXY (AXY) горизонтальна, плоскость OYZ (AYZ) вертикальна. Расчетные схемы механизмов и необходимые для решения данные приведены в табл. 5.3, в которой ω – угловая скорость; φ_0, ω_0 – значения угла поворота и угловой скорости в начальный момент времени.

Примечания:

Для варианта 17. Радиус инерции ротора 2 двигателя 3; i_{3x} = 0,10 м.

Для варианта 21. Радиус инерции ротора 2 двигателя 3 ; i_{3x} = 0,12 м.

Для варианта 25. Радиус инерции шкива 3 i_{3x} = 0,18 м.

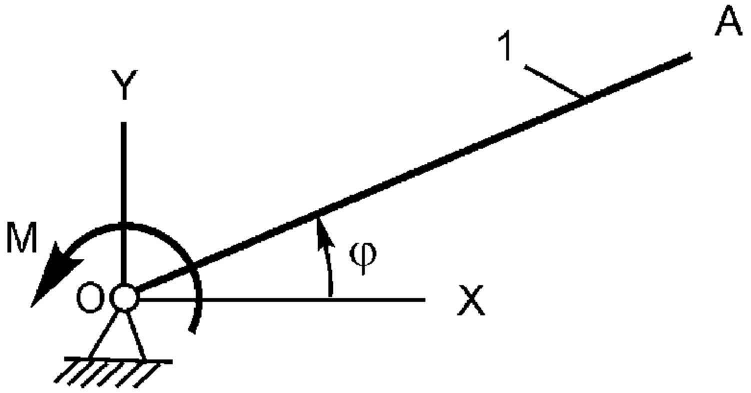
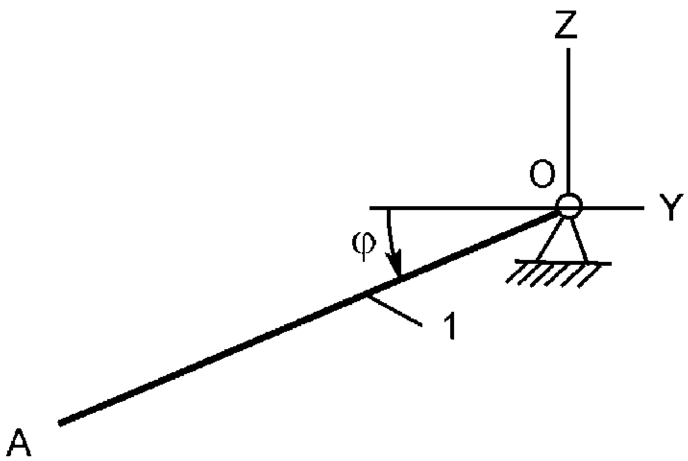
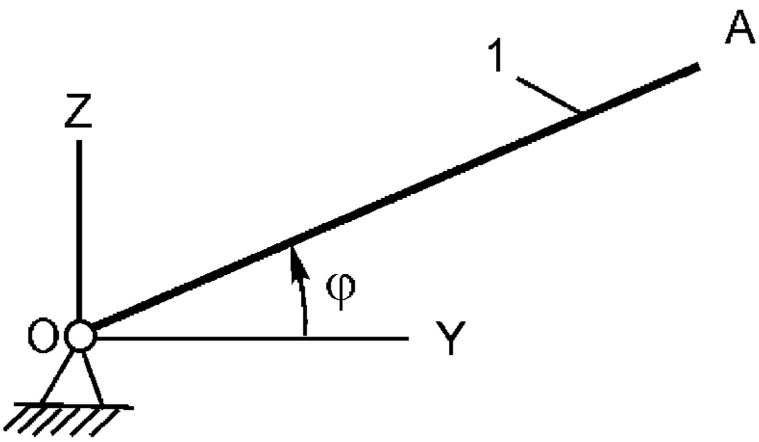
Для варианта 26. Радиус инерции шкива 3 i_{3x} = 0,22 м.

Для варианта 27. Радиус инерции шкива 3 i_{3x} = 0,15 м.

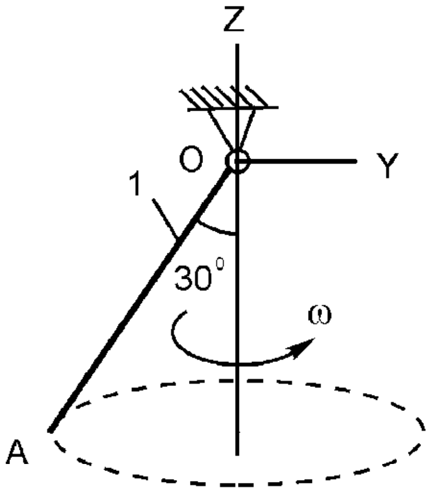
Для варианта 28. Р = 1300 Н.

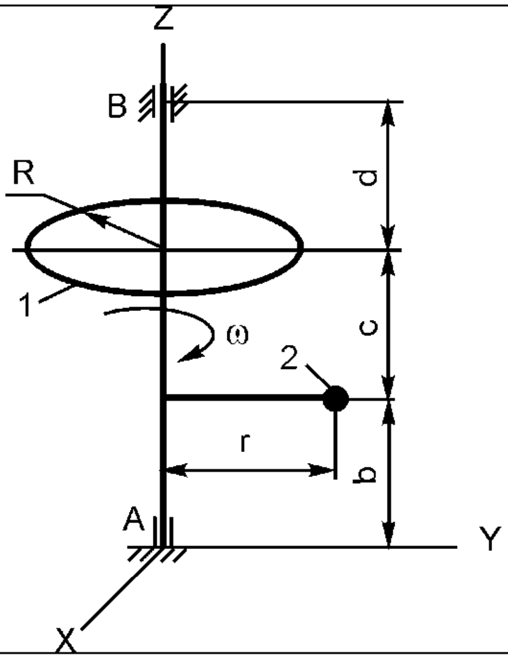
Вращающиеся тела, для которых не показан радиус инерции, рассматривать как тонкие однородные стержни или сплошные однородные диски (варианты 6 – 9, 16, 20, 22, 28). На схемах вариантов 1, 8, 9, 16, 17, 20 – 22 указаны внешние моменты М.

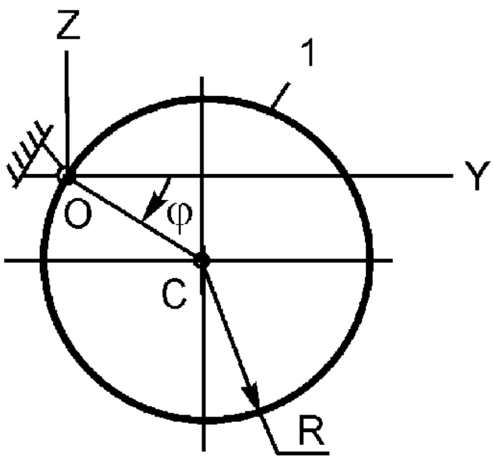
Таблица 5.3

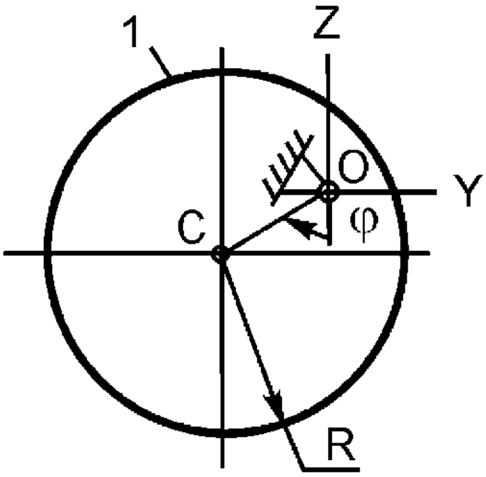
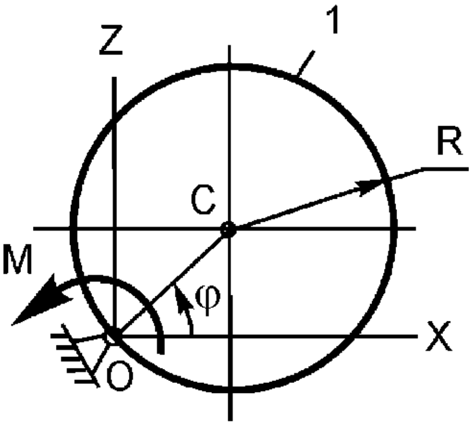
<table>
<tr><th>Номер вари-анта</th><th>Расчетная схема механизма</th><th>Исходные дан-ные</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>
</td><td>$m_1 = 20$ кг;
$l = 0{,}60$ м;
$M = 1{,}0$ Н·м;
$t_1 = 10$ с;
$\varphi_0 = 0^\circ$;
$\omega_0 = 0$ рад/с</td></tr>
<tr><td>2</td><td>
</td><td>$m_1 = 25$ кг;
$l = 0{,}50$ м;
$\varphi_1 = 60^\circ$;
$\varphi_0 = 0^\circ$;
$\omega_0 = 0$ рад/с</td></tr>
<tr><td>3</td><td>
</td><td>$m_1 = 40$ кг;
$l = 0{,}80$ м;
$\varphi_1 = 60^\circ$;
$\varphi_0 = 0^\circ$;
$\omega_0 = 6{,}3$ рад/с</td></tr>
</table>

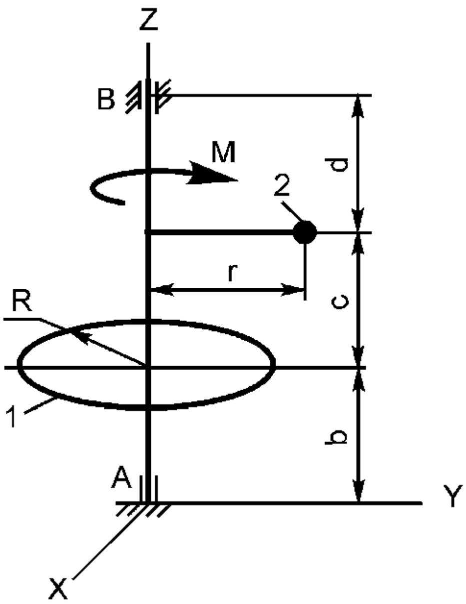
Продолжение табл..5.3

1	2	3
4		m_1 = 20 кг; l = 0,80 м

5		m_1 = 30 кг;
		m_2 = 1,5 кг;
		r = 0,60 м;
		R = 0,50 м;
		b = 0,30 м;
		c = 0,25 м;
		d = 0,30 м;
		ω = 6 рад/с

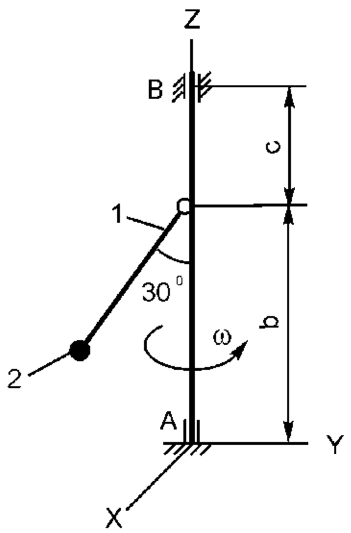
6		m_1 = 40 кг; R = 0,30 м; φ_1 = 30°; φ_0 = 0°; ω_0 = 0 рад/с

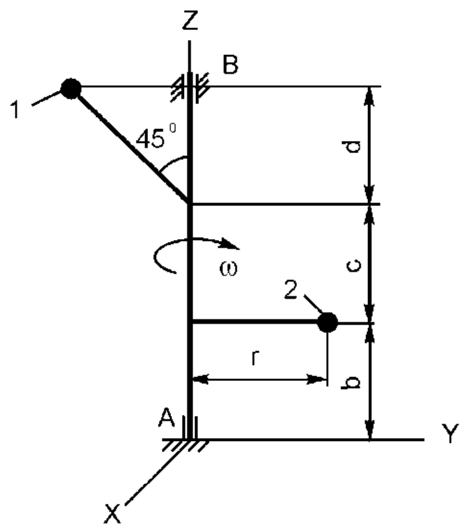
1	2	3
7		m_1 = 20 кг; R = 0,25 м; φ_1 = 60°; φ_0 = 0°; ω_0 = 5,5 рад/с
8		m_1 = 50 кг; R = 0,30 м; M = 4,0 Н·м; t_1 = 5 с; φ_0 = 0°; ω_0 = 0 рад/с

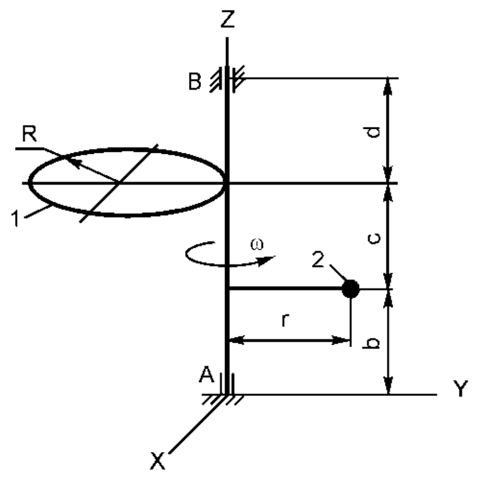
9		m_1 = 20 кг;
		m_2 = 5 кг;
		r = 0,60 м;
		R = 0,50 м;
		b = 0,30 м;
		c = 0,25 м;
		d = 0,30 м;
		M = 10t Н·м;
		t_1 = 2 с

Продолжение табл..5.3

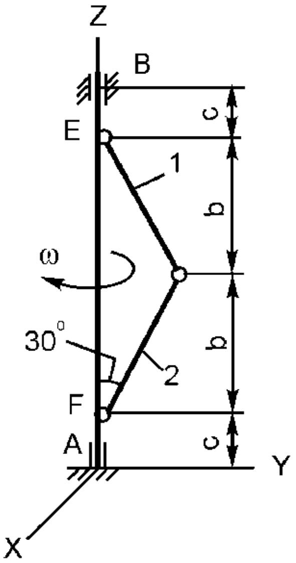
1	2	3

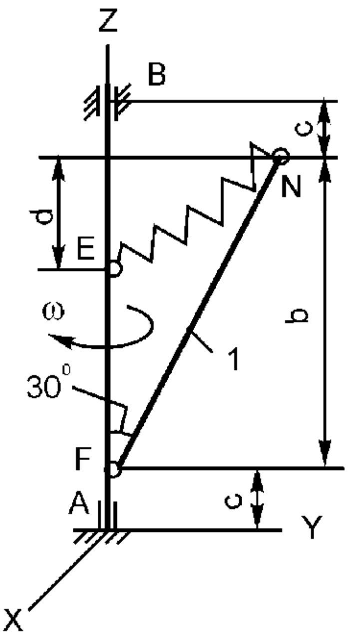
10		m_1 = 12 кг;
		m_2 = 5 кг;
		l_l = 0,25 м;
		b = 0,40 м;
		c = 0,15 м;
		ω = 10 рад/с

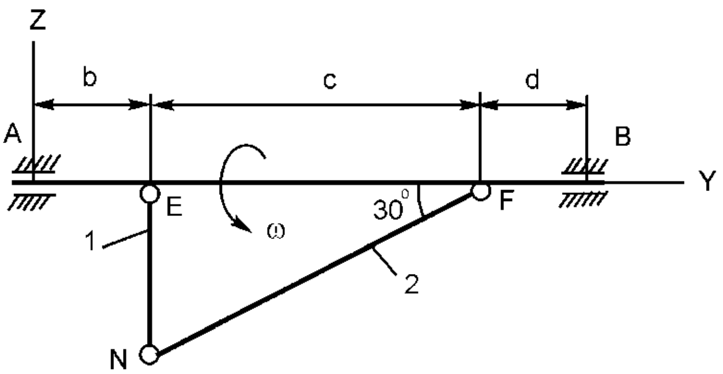
11		m_1 = 10 кг;
		m_2 = 6 кг;
		r = 0,25 м;
		b = 0,30 м;
		c = 0,20 м;
		d = 0,35 м;
		ω = 10 рад/с

12		m_1 = 10 кг;
		m_2 = 6 кг;
		R = 0,25 м;
		r = 0,20 м;
		b = 0,30 м;
		c = 0,20 м;
		d = 0,35 м;
		ω = 10 рад/с

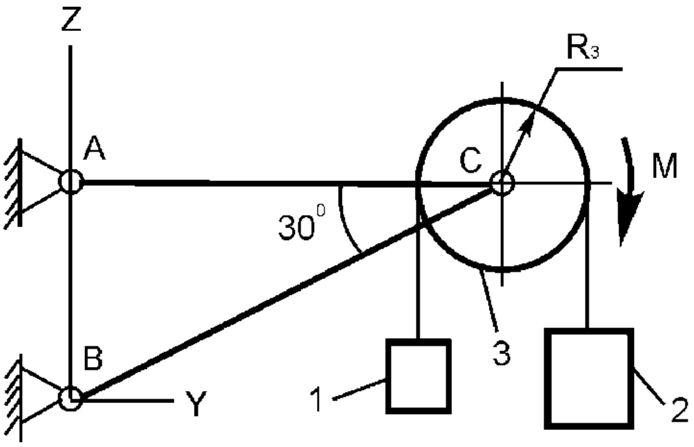
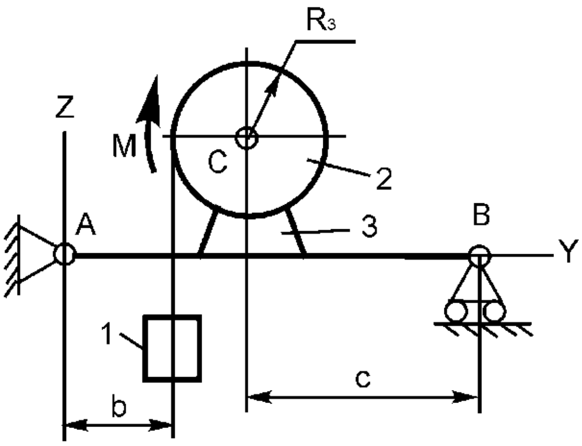
1	2	3

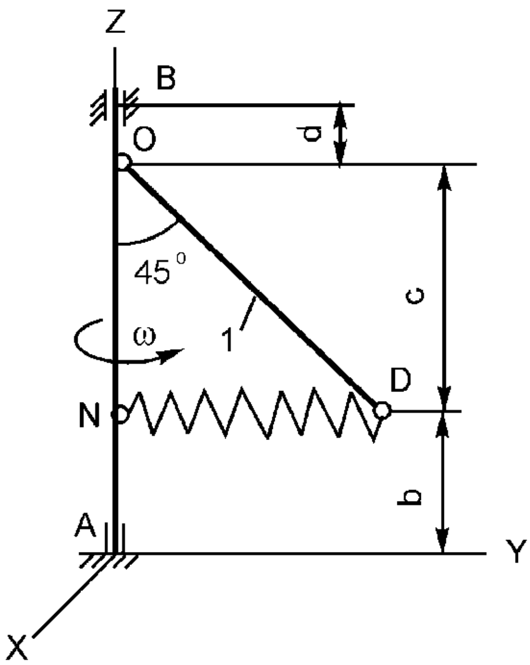
13		m_1 = 10 кг;
		m_2 = 6 кг;
		b = 0,30 м;
		c = 0,20 м;
		ω = 10 рад/с

14		m_1 = 10 кг;
		b = 0,30 м;
		c = 0,20 м;
		d = 0,35 м;
		ω = 10 рад/с

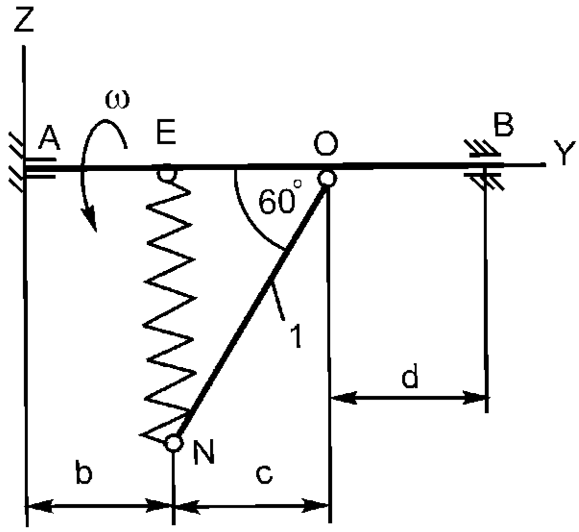
15		m_1 = 10 кг;
		m_2 = 20 кг;
		b = 0,30 м;
		c = 0,80 м;
		d = 0,35 м;
		ω = 10 рад/с

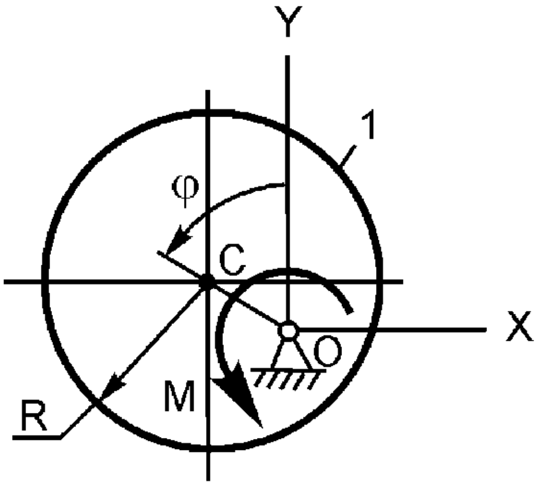
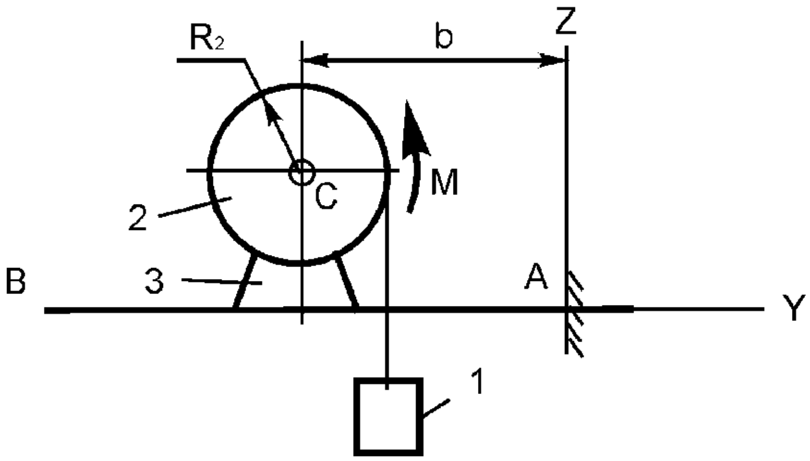
Продолжение табл..5.3

1	2	3
16		m_1 = 80 кг; m_2 = 20 кг; R_3 = 0,10 м; M = 100 Н·м
17		m_1 = 10 кг; m_2 = 20 кг; M = 30 Н·м; R_2 = 0,2 м; b = 0,30 м; c = 0,80 м

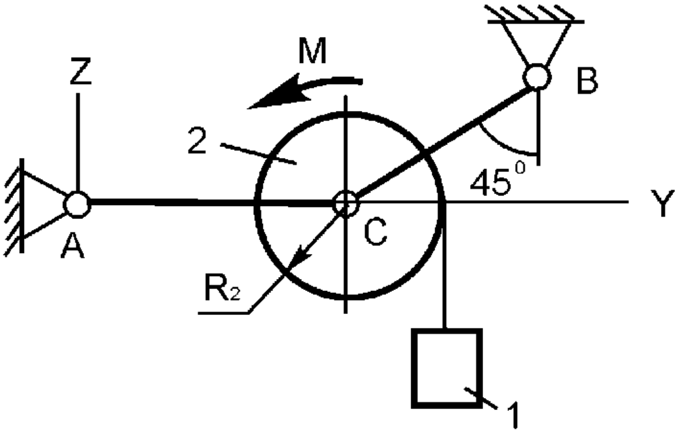
18		m_1 = 10 кг;
		b = 0,30 м;
		c = 0,20 м;
		d = 0,35 м;
		ω = 10 рад/с

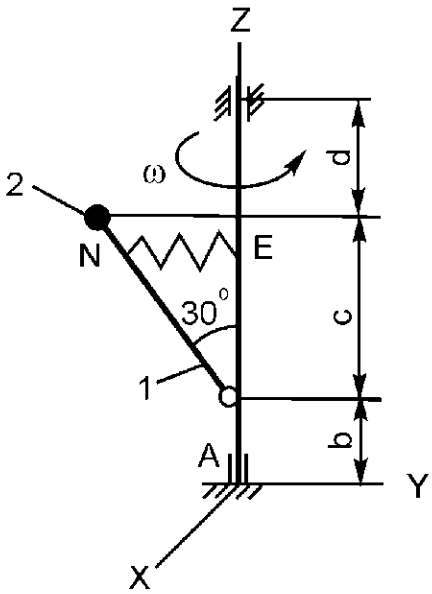
1	2	3

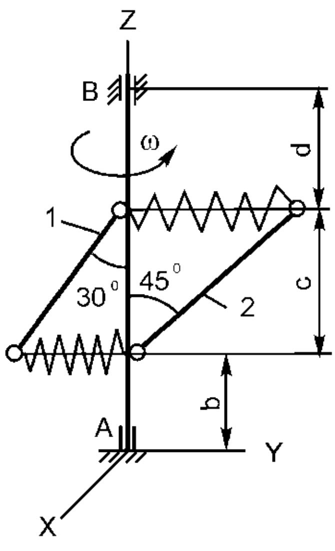
19		m_1 = 12 кг;
		b = 0,30 м;
		c = 0,25 м;
		d = 0,35 м;
		ω = 8 рад/с

20		m_1 = 40 кг; R = 0,30 м; M = 3,0 Н·м; t_1 = 4 с; φ_0 = 0°; ω_0 = 8 рад/с
21		m_1 = 100 кг; m_2 = 40 кг; m_3 = 15 кг; M = 124 Н·м; R_2 = 0,2 м; b = 0,30 м

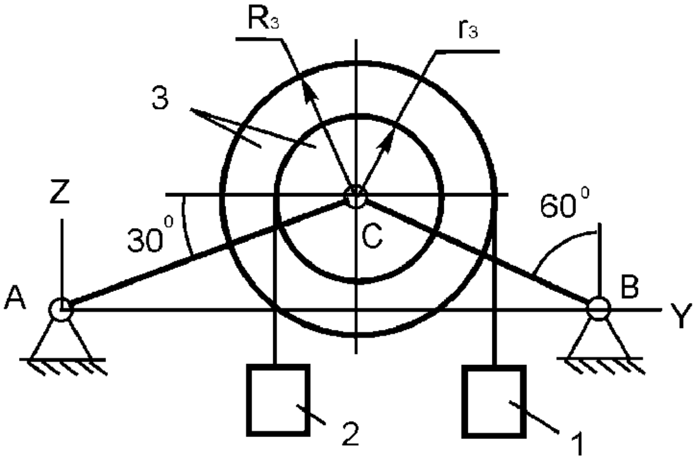
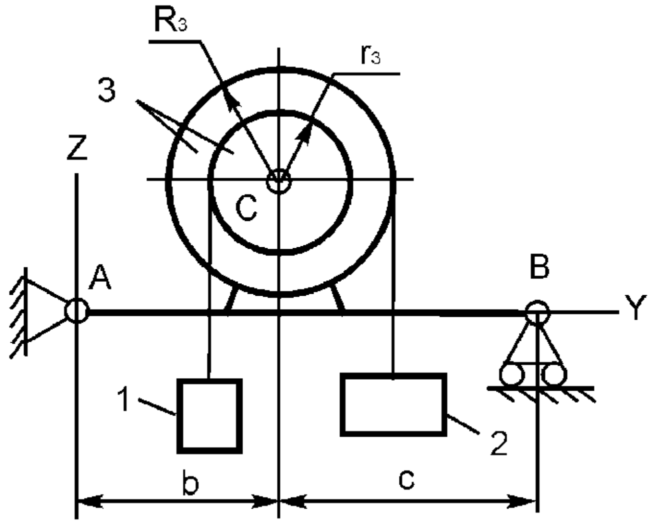
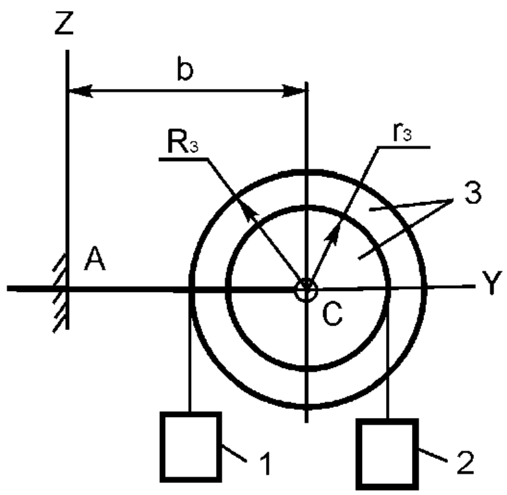
Продолжение табл..5.3

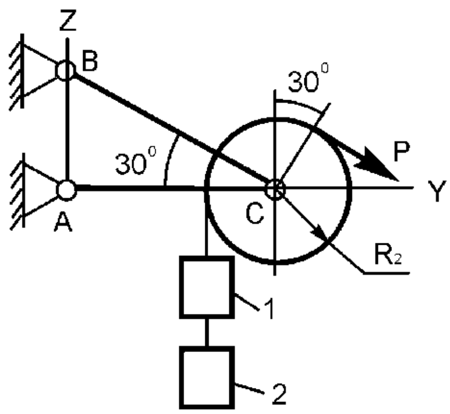
1	2	3
22		m_1 = 80 кг; m_2 = 20 кг; R_2 = 0,10 м; M = 120 Н·м

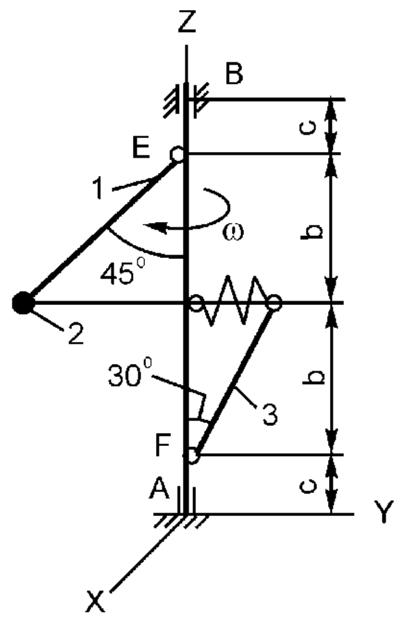
23		m_1 = 10 кг;
		m_2 = 25 кг;
		b = 0,30 м;
		c = 0,20 м;
		d = 0,35 м;
		ω = 10 рад/с

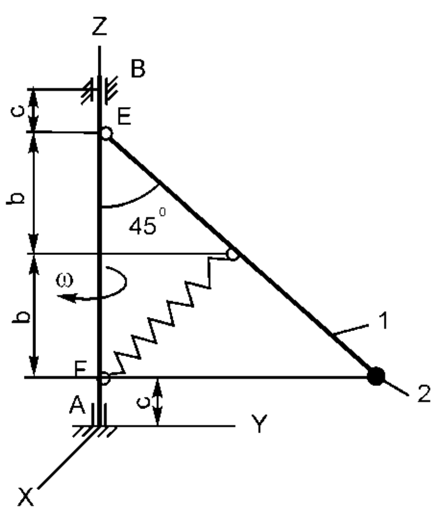
24		m_1 = 10 кг;
		m_2 = 25 кг;
		b = 0,20 м;
		c = 0,35 м;
		d = 0,30 м;
		ω = 12 рад/с

Продолжение табл..5.3

1	2	3
25		m_1 = 10 кг; m_2 = 25 кг; R_3 = 0,30 м; r_3 = 0,20 м
26		m_1 = 80 кг; m_2 = 20 кг; R_3 = 0,30 м; r_3 = 0,20 м; b = 0,20 м; c = 0,30 м
27		m_1 = 50 кг; m_2 = 20 кг; R_3 = 0,25 м; r_3 = 0,15 м; b = 0,20 м

1	2	3
28		m_1 = 30 кг; m_2 = 15 кг; P = 300 Н; R_3 = 0,25 м

29		m_1 = 10 кг;
		m_2 = 25 кг;
		m_3 = 25 кг;
		b = 0,20 м;
		c = 0,35 м;
		ω = 8 рад/с

30		m_1 = 10 кг;
		m_2 = 25 кг;
		b = 0,50 м;
		c = 0,15 м;
		ω = 16 рад/с

5.6.5. Пример выполнения курсового задания Д 5

В курсовом задании Д 5 требуется определить реакции внешних связей, наложенных на механическую систему в следующих случаях: в произвольный момент времени; в фиксированный момент времени t_1; в тот момент времени, когда угол поворота тела равен значению φ_1.

Рассмотрим последовательно эти случаи.

Случай 1.

Однородный стержень 1 длиной l и точечный груз 2, закрепленный на конце стержня, совершают вращательное движение относительно оси OZ с постоянной угловой скоростью ω (рис. 5.41).

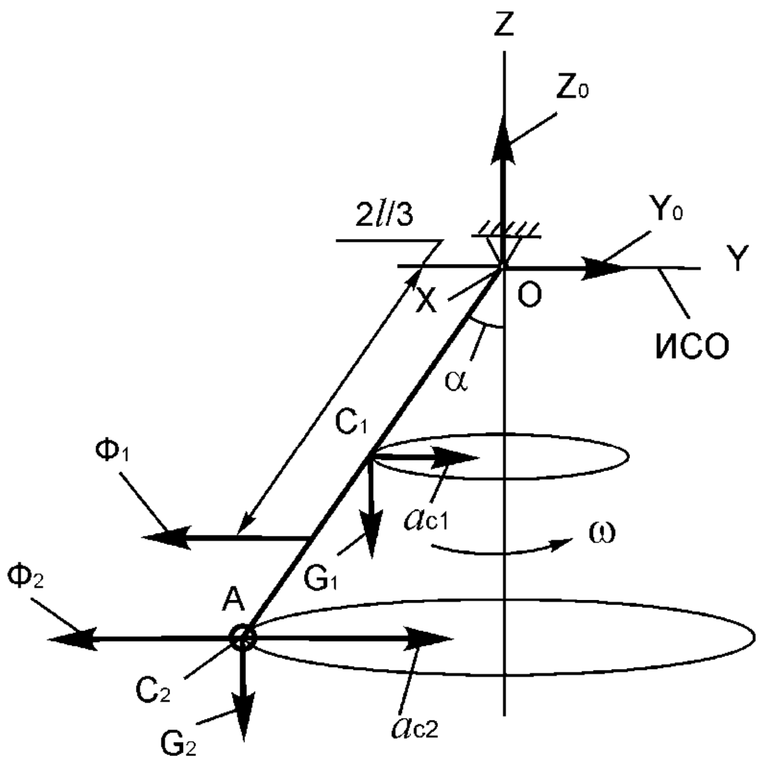


Рис. 5.41

Дано: m_1 = 20 кг; m_2 = 10 кг; OA = l = 1 м; $\alpha = 30^o$. Определить реакции связи в точке O.

Решение.

Запишем формулу, выражающую принцип Даламбера для механической системы в векторном виде:

$$\Sigma \mathbf{F}_i^E + \Sigma \mathbf{R}_i^E + \Sigma \mathbf{\Phi}_i = 0,$$

где $\Sigma \mathbf{F}_i^E$ – геометрическая сумма активных сил; $\Sigma \mathbf{R}_i^E$ – геометрическая сумма реакций внешних связей, наложенных на механическую систему; $\Sigma \mathbf{\Phi}_i$ – геометрическая сумма сил инерции.

Согласно этому принципу на механическую систему действуют активные силы $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$, реакции $\mathbf{Y}_0$, $\mathbf{Z}_0$ внешней связи и силы инерции $\mathbf{\Phi}_1$, $\mathbf{\Phi}_2$. Применительно к рассматриваемой задаче принцип Даламбера выражается формулой

$$\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Z}_0 + \mathbf{\Phi}_1 + \mathbf{\Phi}_2 = 0.$$

Покажем эти силы на рис. 5.41. Силы $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ поместим в центрах C_1, C_2 масс тел 1 и 2.

Используя исходные данные задачи, запишем формулы для определения модулей активных сил и сил инерции:

$$G_1 = m_1g; \quad G_2 = m_2g.$$

Так как механическая система вращается с постоянной угловой скоростью ω, то угловое ускорение $\varepsilon = d\omega/dt = 0$ и, следовательно, ускорения a_{c1}, a_{c2} центров масс тел 1 и 2 соответственно равны:

$$a_{c1} = a_{c1}^{\omega} = \omega^2 \cdot 0{,}5\, l \sin\alpha;$$

$$a_{c2} = a_{c2}^{\omega} = \omega^2\, l \sin\alpha,$$

где a_{c1}^{ω}, a_{c2}^{ω} – центростремительные ускорения центров масс тел рассматриваемой механической системы.

Тогда имеем:

$$\Phi_1 = m_1 a_{c1} = m_1 a_{c1}^{\omega} = m_1(\omega^2 \cdot 0{,}5\, l \sin\alpha);$$

$$\Phi_2 = m_1 a_{c2} = m_1 a_{c2}^{\omega} = m_2(\omega^2 \cdot l \sin\alpha).$$

Сила инерции $\mathbf{\Phi}_1$ тела 1 приложена в точке D на расстоянии $OD = 2\, l/3$, так как эпюра распределения элементарных сил инерции тела 1 имеет форму треугольника.

Согласно рис. 5.41 на рассматриваемую конструкцию действует плоская произвольная система сил. Принцип Даламбера в этих условиях выражается системой трех уравнений.

$$\Sigma F_{ioy}^E + \Sigma R_{ioy}^E + \Sigma \Phi_{ioy} = 0; \qquad (1)$$

$$\Sigma F_{ioz}^E + \Sigma R_{ioz}^E + \Sigma \Phi_{ioz} = 0; \qquad (2)$$

$$\Sigma M_O(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_O(\mathbf{R}_i^E) + \Sigma M_O(\mathbf{\Phi}_i) = 0, \qquad (3)$$

где $\Sigma M_O(\mathbf{F}_i^E)$, $\Sigma M_O(\mathbf{R}_i^E)$, $\Sigma M_O(\mathbf{\Phi}_i)$ – суммы моментов соответственно активных сил, реакций внешних связей и сил инерции относительно точки O.

Преобразуем последние уравнения к следующему виду:

$$Y_0 - \Phi_1 - \Phi_2 = 0; \qquad (1^1)$$

$$-G_1 - G_2 + Z_0 = 0; \qquad (2^1)$$

$$G_1 \cdot 0{,}5l\sin\alpha + G_2 \cdot l\sin\alpha - \Phi_1 \cdot (2l/3)\cos\alpha - \Phi_2 \cdot l\cos\alpha = 0. \qquad (3^1)$$

При использовании условий задачи эти уравнения принимают вид:

$$Y_0 - m_1(\omega^2 \cdot 0{,}5l\sin\alpha) - m_2(\omega^2 \cdot l\sin\alpha); \qquad (1^{11})$$

$$- m_1 g - m_2 g + Z_0 = 0; \qquad (2^{11})$$

$$m_1 g \cdot 0{,}5l\sin\alpha + m_2 g \cdot l\sin\alpha -$$

$$- m_1(\omega^2 \cdot 0{,}5l\sin\alpha \cdot (2l/3)\cos\alpha - m_2(\omega^2 \cdot l\sin\alpha) \cdot l\cos\alpha = 0. \qquad (3^{11})$$

В трех уравнениях (1^{11}), (2^{11}), (3^{11}) содержатся три неизвестные величины: Y_0 , Z_0, ω. Решим эти уравнения.

Из уравнения (3^{11}) имеем

$$\omega = (g/\sin\alpha(0{,}5m_1 + m_2)/(l\sin\alpha l\cos\alpha(0{,}333m_1 + m_2)))^{0{,}5} =$$

$$= (g(0{,}5m_1 + m_2)/(l\cos\alpha(0{,}333m_1 + m_2)))^{0{,}5} =$$

$$= (9{,}81(0{,}5(20) + 10)/(1(0{,}866)(0{,}333(20) + 10)))^{0{,}5} = 3{,}686 \text{ рад/с}.$$

Из уравнения (2^{11}) следует, что

$$Z_0 = g(m_1 + m_2) = 9{,}81(20 + 10) = 294{,}300 \text{ Н}.$$

Из уравнения (1^{11}) получим

$$Y_0 = \omega^2 l\sin\alpha(0{,}5m_1+m_2) = 3{,}686^2 \cdot 1 \cdot 0{,}5(0{,}5 \cdot 20+10) = 135{,}939 \text{ Н}.$$

Таким образом, ответы на вопросы (Y_0 =?, Z_0 =?), поставленные в курсовом задании Д 5, получены.

Случай 2.

Однородный стержень массой m из состояния покоя приходит во вращательное движение относительно вертикальной оси OZ по гладкой горизонтальной плоскости под действием пары сил с моментом M (рис. 5.42).

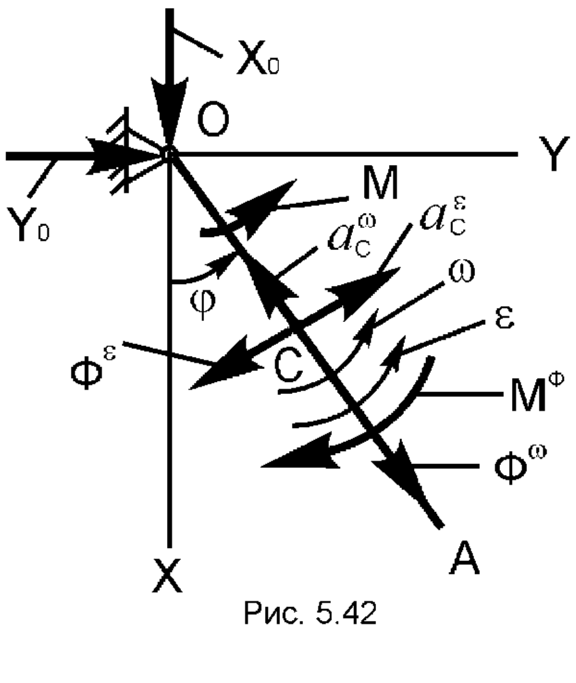


Рис. 5.42

Определить реакции внешней связи в момент времени t_1.

Дано: $m = 10$ кг; $OA = l = 1$ м; $\varphi_0 = 0$; $\omega_0 = 0$; $M = 10t$; $t_1 = 1$ с.

Решение.

Запишем формулу, выражающую принцип Даламбера в векторном виде:

$$\Sigma \mathbf{F}_i^E + \Sigma \mathbf{R}_i^E + \Sigma \mathbf{\Phi}_i = 0,$$

где $\Sigma \mathbf{F}_i^E$ – геометрическая сумма активных сил; $\Sigma \mathbf{R}_i^E$ – геометрическая сумма реакций внешних связей, наложенных на механическую систему; $\Sigma \mathbf{\Phi}_i$ – геометрическая сумма сил инерции.

Согласно этому принципу на стержень действуют активная сила $\mathbf{G}$ (сила тяжести), активная пара сил с моментом M, реакции $\mathbf{X}_0$, $\mathbf{Y}_0$ цилиндрического шарнира в точке O, реакция $\mathbf{N}$ гладкой горизонтальной поверхности OXY, центробежная $\mathbf{\Phi}^\omega$ и вращательная $\mathbf{\Phi}^\varepsilon$ силы инерции и момент M^Φ сил инерции. Силы $\mathbf{G}$ и $\mathbf{N}$ на рис. 5.42 не показаны, так как рисунок приведен в ортогональных проекциях.

Стержень на рис. 5.42 изображен в произвольный момент времени, при этом предполагается, что он вращается с угловой скоростью ω в сторону возрастания угловой координаты φ с угловым ускорением ε. Исходя из этого предположения, силы $\mathbf{\Phi}^\omega$, $\mathbf{\Phi}^\varepsilon$ инерции и момент M^Φ сил инерции направлены так, как это показано на рис. 5.42.

Применительно к рассматриваемой задаче принцип Даламбера выражается формулой

$$\mathbf{G} + \mathbf{X}_0 + \mathbf{Y}_0 + \mathbf{N} + \mathbf{\Phi}^\omega + \mathbf{\Phi}^\varepsilon = 0.$$

Модули Φ^ω, Φ^ε сил инерции и модуль M^Φ момента сил инерции определим по формулам:

$$\Phi^\omega = m\cdot a_c^\omega = m(\omega^2 l/2);\quad \Phi^\varepsilon = m\cdot a_c^\varepsilon = m(\varepsilon l/2);$$

$$M^\Phi = J_{cz}\varepsilon = (ml^2/12)\varepsilon.$$

Поскольку стержень движется по гладкой горизонтальной поверхности, то силы $\mathbf{G}$ и $\mathbf{N}$ на это движение не влияют и, следовательно, их можно исключить из рассмотрения. В этих условиях принцип Даламбера выражается системой трех уравнений:

$$\Sigma F_{iox}^E + \Sigma R_{iox}^E + \Sigma \Phi_{iox} = 0; \qquad (1)$$

$$\Sigma F_{ioy}^E + \Sigma R_{ioy}^E + \Sigma \Phi_{ioy} = 0; \qquad (2)$$

$$\Sigma M_O(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_O(\mathbf{R}_i^E) + \Sigma M_O(\mathbf{\Phi}_i) = 0, \qquad (3)$$

где $\Sigma M_O(\mathbf{F}_i^E)$, $\Sigma M_O(\mathbf{R}_i^E)$, $\Sigma M_O(\mathbf{\Phi}_i)$ – суммы моментов соответственно активных сил, реакций внешних связей и сил инерции относительно произвольной точки O.

Применительно к рассматриваемой задаче имеем:

$$X_O + \Phi^{\omega}\cos\varphi + \Phi^{\varepsilon}\sin\varphi = 0; \quad (1^1)$$
$$Y_O + \Phi^{\omega}\sin\varphi + \Phi^{\varepsilon}\cos\varphi = 0; \quad (2^1)$$
$$M - \Phi^{\varepsilon}(l/2) - M^{\Phi} = 0. \quad (3^1)$$

При использовании условий задачи эти уравнения приобретают следующий вид:

$$X_O + m(\omega^2 l/2)\cos\varphi + m(\varepsilon l/2)\sin\varphi = 0; \quad (1^{11})$$
$$Y_O + m(\omega^2 l/2)\sin\varphi + m(\varepsilon l/2)\cos\varphi = 0; \quad (2^{11})$$
$$M - m(\varepsilon l/2)(l/2) - (ml^2/12)\varepsilon = 0. \quad (3^{11})$$

Следует отметить, что угловая скорость ω, угловое ускорение ε и угол φ поворота зависят от времени t ($\omega = f_1(t)$; $\varepsilon = f_2(t)$; $\varphi = f_3(t)$). В момент времени t_1 они будут иметь соответствующие значения ω_1, ε_1, φ_1. Внесем эти значения в последние уравнения.

$$X_O + m((\omega_1)^2 l/2)\cos\varphi_1 + m(\varepsilon_1 l/2)\sin\varphi_1 = 0; \quad (1^{111})$$
$$Y_O + m((\omega_1)^2 l/2)\sin\varphi_1 + m(\varepsilon_1 l/2)\cos\varphi_1 = 0; \quad (2^{111})$$
$$M - m(\varepsilon_1 l/2)(l/2) - (ml^2/12)\varepsilon_1 = 0. \quad (3^{111})$$

Нетрудно заметить, что в трех уравнениях содержатся следующие неизвестные величины: X_0, Y_0, ω_1, ε_1, φ_1, следовательно, для успешного решения задачи требуется получить дополнительные уравнения. Для этого дифференциальное уравнение (3^{111}) представим в следующем виде:

$$(ml^2/3)\varepsilon = 10t.$$

Преобразовав это уравнение, получим

$$\varepsilon = d\omega/dt = (30/ml^2)t. \quad (4)$$

Дважды проинтегрировав последнее уравнение, получим:

$$\omega = (30/(ml^2))(t^2/2) + C_1 = (15/(ml^2))t^2 + C_1;$$
$$\varphi = (15/(ml^2))(t^3/3) + C_1 t + C_2 = (5/(ml^2))t^3 + C_1 t + C_2,$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования, определяемые по начальным условиям движения.

Поскольку $\omega_0 = 0$ и $\varphi_0 = 0$, то $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$. Тогда справедливы выражения:

$$\omega = (15/(ml^2))t^2; \quad (5)$$
$$\varphi = (5/(ml^2))t^3. \quad (6)$$

Если в уравнения (4), (5), (6) подставить значения времени t_1, то получим:

$$\varepsilon_1 = (30/(ml^2))t_1 = (30/(10\cdot 1^2))1 = 3 \text{ рад/с};$$
(4^1)
$$\omega_1 = (15/(ml^2))(t_1)^2 = (15/(10\cdot 1^2))1^2 = 1{,}5 \text{ рад/с}; \quad (5^1)$$
$$\varphi_1 = (5/(ml^2))(t_1)^3 = (5/(10m\cdot 1^2))1^3 = 0{,}5 \text{ рад}.$$
(6^1)

Определим значения $\sin\varphi_1$ и $\cos\varphi_1$:

$$\sin\varphi_1 = 0{,}479; \cos\varphi_1 = 0{,}877.$$

По известным величинам ε_1, ω_1, $\sin\varphi_1$, $\cos\varphi_1$ определим реакции X_0, Y_0 связи:

$$X_O = -m((\omega_1)^2 l/2)\cos\varphi_1 - m(\varepsilon_1 l/2)\sin\varphi_1 =$$
$$= -10(3{,}5^2\cdot 1/2)0{,}877 - 10(1{,}5\cdot 1/2)0{,}479 = -57{,}308\ Н;$$
$$Y_O = -m((\omega_1)^2 l/2)\sin\varphi_1 + m(\varepsilon_1 l/2)\cos\varphi_1 =$$
$$= -10(3{,}5^2\cdot 1/2)0{,}479 + 10(1{,}5\cdot 1/2)0{,}877 = -22{,}760\ Н.$$

Таким образом, ответы на вопросы (X_0 = ?, Y_0 = ?), поставленные в курсовом задании Д 5, получены.

Случай 3.

Однородный круг массой m и радиусом R находится в состоянии покоя. В момент времени $t_0 = 0$ ему придали угловую скорость ω_0. Определить реакции внешней связи в момент времени, когда угол поворота тела равен значению φ_1. На рис. 5.43 круг изображен в произвольный момент времени.

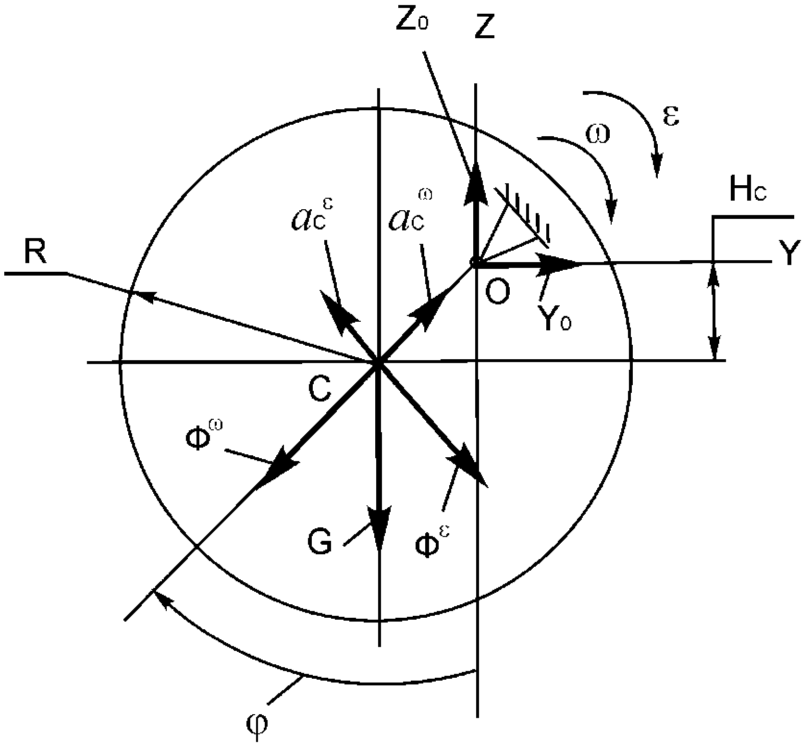


Рис. 5.43

Дано: m = 10 кг; R = 1 м; $\varphi_1 = 60^\circ$; $\varphi_0 = 0^\circ$; ω_0 = 10 рад/с.

Решение.

Запишем формулу, выражающую принцип Даламбера в векторной форме:

$$\Sigma \mathbf{F}_i^E + \Sigma \mathbf{R}_i^E + \Sigma \mathbf{\Phi}_i = 0,$$

где $\Sigma \mathbf{F}_i^E$ – геометрическая сумма активных сил; $\Sigma \mathbf{R}_i^E$ – геометрическая сумма реакций внешних связей, наложенных на механическую систему; $\Sigma \mathbf{\Phi}_i$ – геометрическая сумма сил инерции.

По условию задания на материальное тело действует активная сила тяжести **G**, реакции $\mathbf{Y}_0$, $\mathbf{Z}_0$ цилиндрического шарнира, центробежная $\mathbf{\Phi}^{\omega}$ и вращательная $\mathbf{\Phi}^{\varepsilon}$ силы инерции и момент M^{Φ} сил инерции. Направления нагрузок **G**, $\mathbf{Y}_0$, $\mathbf{Z}_0$, $\mathbf{\Phi}^{\omega}$, $\mathbf{\Phi}^{\varepsilon}$, M^{Φ} показаны на рис. 5.43. При определении направления этих нагрузок предполагается, что тело вращается в сторону увеличения угловой координаты φ ускоренно. Модули инерционных нагрузок определяют по формулам:

$$\Phi^{\omega} = m\cdot a_c^{\omega} = m(\omega^2 R); \quad \Phi^{\varepsilon} = m\cdot a_c^{\varepsilon} = m(\varepsilon R);$$

$$M^{\Phi} = J_{cx}\varepsilon = (mR^2/2)\varepsilon,$$

где a_c^{ω}, a_c^{ε}, J_{cx} – соответственно центростремительное, вращательное ускорения центра масс и момент инерции круга относительно оси, проходящей через центр масс.

Так как система сил, действующая на круг, является плоской и произвольной, то для решения поставленной задачи необходимо составить три уравнения:

$$\Sigma F_{ioy}^{E} + \Sigma R_{ioy}^{E} + \Sigma \Phi_{ioy} = 0; \qquad (1)$$

$$\Sigma F_{ioz}^{E} + \Sigma R_{ioz}^{E} + \Sigma \Phi_{ioz} = 0; \qquad (2)$$

$$\Sigma M_O(\mathbf{F}_i^{E}) + \Sigma M_O(\mathbf{R}_i^{E}) + \Sigma M_O(\mathbf{\Phi}_i) = 0, \qquad (3)$$

где $\Sigma M_O(\mathbf{F}_i^{E})$, $\Sigma M_O(\mathbf{R}_i^{E})$, $\Sigma M_O(\mathbf{\Phi}_i)$ – суммы моментов соответственно активных сил, реакций внешних связей и сил инерции относительно точки О.

Для рассматриваемого варианта курсового задания Д 5 имеем:

$$Y_0 - \Phi^{\omega}\sin\varphi + \Phi^{\varepsilon}\cos\varphi = 0; \qquad (1^1)$$

$$G + Z_0 - \Phi^{\omega}\cos\varphi - \Phi^{\varepsilon}\sin\varphi = 0; \qquad (2^1)$$

$$G\cdot R\sin\varphi + \Phi^{\varepsilon}\cdot R + M^{\Phi} = 0. \qquad (3^1)$$

В уравнения (1^1), (2^1), (3^1) введем обозначения исходных данных.

$$Y_0 - m(\omega^2 R)\sin\varphi + m(\varepsilon R)\cos\varphi = 0; \qquad (1^{11})$$

$$mg + Z_0 - m(\omega^2 R)\cos\varphi - m(\varepsilon R)\sin\varphi = 0; \qquad (2^{11})$$

$$mg\cdot R\sin\varphi + m(\varepsilon R)\cdot R + (mR^2/2)\varepsilon = 0. \qquad (3^{11})$$

Очевидно, что при вращении тела его угловой путь φ, угловая скорость ω и угловое ускорение ε будут переменны и взаимозависимы. При значении угла φ_1 угловая скорость будет иметь значение ω_1, а угловое ускорение значение ε_1. Исходя из этого, уравнения (1^{11}), (2^{11}), (3^{11}) приобретают вид:

$$Y_0 - m(\omega_1)^2 R\sin\varphi_1 + m\varepsilon_1 R\cos\varphi_1 = 0; \qquad (1^{111})$$

$$-mg + Z_0 - m(\omega_1)^2 R\cos\varphi_1 - m\varepsilon_1 R\sin\varphi_1 = 0; \qquad (2^{111})$$

$$mg\cdot R\sin\varphi_1 + m\varepsilon_1 R\cdot R + (mR^2/2)\varepsilon_1 = 0. \qquad (3^{111})$$

В системе этих уравнений содержатся следующие неизвестные: Y_0, Z_0, ω_1, ε_1. Для решения задачи необходимо получить четвертое уравнение.

Проанализируем исходные данные задачи. Нам известны начальное (φ_0 = 0) и конечное (φ_1) значения угла поворота тела. Связь между начальным и конечным значениями параметров определяется теоремой об изменении кинетической энергии механической системы на ее конечном перемещении.

$$T_{sk} - T_{sn} = \Sigma A_i^E,$$

где T_{sk} – кинетическая энергия механической системы в конечном положении; T_{sn} – кинетическая энергия механической системы в начальном положении; ΣA_i^E – сумма работ внешних сил, приложенных к механической системе, на ее перемещении.

Кинетическую энергию твердого тела при его вращательном движении определяют по формуле

$$T = 0{,}5J_{ox}\omega^2,$$

где J_{ox} – момент инерции тела относительно оси вращения; ω – угловая скорость.

Для рассматриваемой задачи

$$J_{ox} = mR^2/2 + m(CO)^2 = mR^2/2 + mR^2 = 1{,}5\ mR^2.$$

Тогда получим

$$T = 1{,}5mR^2\omega^2.$$

Определим кинетические энергии тела в начальный и конечный моменты времени:

$$T_{sn} = 1{,}5mR^2(\omega_0)^2;\ \ T_{sk} = 1{,}5mR^2(\omega_1)^2.$$

Определим сумму работ внешних сил, приложенных к телу, при его повороте из начального положения (φ_0 = 0) в конечное положение ($\varphi_1 = 60^o$).

$$\Sigma A_i^E = -\ G\cdot H_c = -\ mg(R - R\cos\varphi_1) = -\ mgR(1 - \cos\varphi_1).$$

Применительно к условиям задания теорема об изменении кинетической энергии приобретает вид

$$1{,}5mR^2((\omega_1)^2 - (\omega_0)^2) = -\ mgR(1 - \cos\varphi_1).$$

Отсюда определим значение ω_1 угловой скорости.

$$\omega_1 = ((\omega_0)^2 - g(1 - \cos\varphi_1)/(1{,}5R))^{0,5} =$$
$$= ((10)^2 - 9{,}81(1 - 0{,}5)/(1{,}5\cdot 1))^{0,5} = 9{,}835\ \text{рад/с}.$$

Решим систему уравнений (1^{111}), (2^{111}), (3^{111}) относительно неизвестных величин Y_0, Z_0, ε_1.

Из уравнения (3^{111}) имеем

$$\varepsilon_1 = -\ (mgR\sin\varphi_1)/(1{,}5mR^2) = -\ (g\sin\varphi_1)/(1{,}5R) =$$
$$= -\ (9{,}81\cdot 0{,}866)/(1{,}5\cdot 1) = -\ 5{,}633\ \text{рад/с}^2.$$

Из уравнения (1^{111}) определим реакцию Y_0.

$$Y_0 = m(\omega_1)^2R\sin\varphi_1 - m\varepsilon_1R\cos\varphi_1 =$$

$$= 10 \cdot 9{,}835^2 \cdot 1 \cdot 0{,}866 - 10(-5{,}663)1 \cdot 0{,}5 = 995{,}587 \text{ Н}.$$

Из уравнения (2^{111}) получим

$$Z_0 = mg + m(\omega_1)^2 R\cos\varphi_1 + m\varepsilon_1 R\sin\varphi_1 =$$
$$= 10 \cdot 9{,}81 + 10 \cdot 9{,}835^2 \cdot 1 \cdot 0{,}5 + 10(-5)1 \cdot 0{,}866 = 538{,}436 \text{ Н}.$$

Таким образом, ответы на вопросы (Y_0 =?, Z_0 = ?), поставленные в курсовом задании Д 5, получены.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулировать определение понятия «***сила инерции***».
2. Записать формулу для определения ***силы инерции материальной точки***.
3. Записать формулу, выражающую ***принцип Даламбера для несвободной материальной точки*** в векторной форме.
4. Записать формулы, выражающие ***принцип Даламбера для несвободной материальной точки*** в координатной форме.
5. Записать формулы, выражающие ***принцип Даламбера для несвободной материальной точки*** в координатной форме.
6. Записать формулы, выражающие ***принцип Даламбера для несвободной механической системы*** в векторной форме.
7. Записать формулы, выражающие ***принцип Даламбера для несвободной неизменяемой механической системы*** в координатной форме.
8. Записать формулу для определения ***главного вектора сил инерции*** поступательно движущегося твердого тела.
9. Записать формулы, по которым определяются ***центробежная и вращательная силы инерции и момент сил инерции*** при вращательном движении тела относительно оси, не проходящей через центр масс, в случае, когда силы инерции приложены в центре масс.
10. Записать формулу для определения ***момента сил инерции*** при вращении тела относительно оси, проходящей через его центр масс.
11. Записать формулы для определения инерционных нагрузок при плоскопараллельном движении твердого тела.

6. ОСНОВНЫЕ НАЧАЛА АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Принцип возможных перемещений является основополагающим принципом аналитической механики.

Аналитическая механика *– раздел механики, в котором изучается равновесие или движение механизмов с помощью общих, единых аналитических методов, применяемых для любых механических систем.*

6.1. Обобщенные координаты и возможные перемещения тел и точек механической системы

Перемещения точек механической системы не могут быть независимыми, так как на них наложены внешние и внутренние связи. Положение точек механической системы определяется только заданием независимых координат. Такие координаты называют обобщенными координатами.

Обобщенные координаты механической системы *– независимые между собой параметры, однозначно определяющие положение механической системы.*

Число независимых координат равно числу степеней свободы механической системы. Так, например, для материальной точки, перемещающейся в пространстве, обобщенными координатами ($x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$) являются уравнения движения точки. Точка в пространстве имеет три степени свободы. Для тела, совершающего вращательное движение, обобщенной координатой является зависимость $\varphi = f(t)$ – угловой путь тела. Для плоскопараллельного движения твердого тела число обобщенных координат равно трем: $x_c = f_1(t)$; $y_c = f_2(t)$; $\varphi = f_3(t)$, где x_c, y_c – координаты центра масс тела: φ – угол поворота тела относительно оси, проходящей через его центр масс.

Координаты любой точки механической системы являются функциями обобщенных координат (рис. 6.1).

Положение всех точек кривошипно-ползунного механизма вполне определяется заданием только угла поворота φ кривошипа. Этот угол и примем за обобщенную координату механизма. Таким образом, рассматриваемый механизм имеет одну степень свободы.

Покажем, что координата точки В ползуна зависит от обобщенной координаты.

$$x_B = OK+AB = r\cos\varphi+(l^2+r^2(\sin\varphi)^2)^{0,5} = f_1(\varphi).$$

Нетрудно показать, что и координаты других точек (А, С) также зависят от обобщенной координаты φ:

$$x_A = f_2(\varphi); \quad x_c = f_3(\varphi).$$

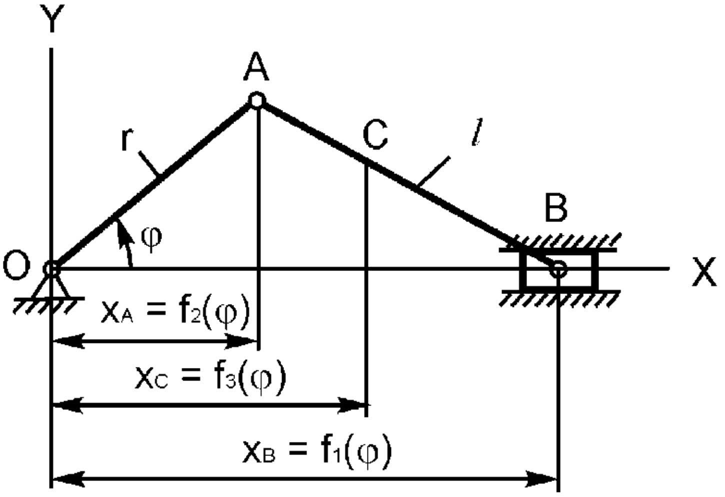


Рис. 6.1

***Возможное (виртуальное) перемещение точки** – любое допускаемое наложенными связями перемещение материальной точки из положения, занимаемого ею в данный момент времени, в бесконечно близкое положение, которое она может занимать в тот же момент времени.*

Другими словами, возможные (или виртуальные) перемещения механической системы – воображаемые бесконечно малые перемещения, допускаемые в данный момент времени наложенными на систему связями.

Для иллюстрации этого понятия рассмотрим рычаг АВ, который может совершать вращательное движение (рис. 6.2).

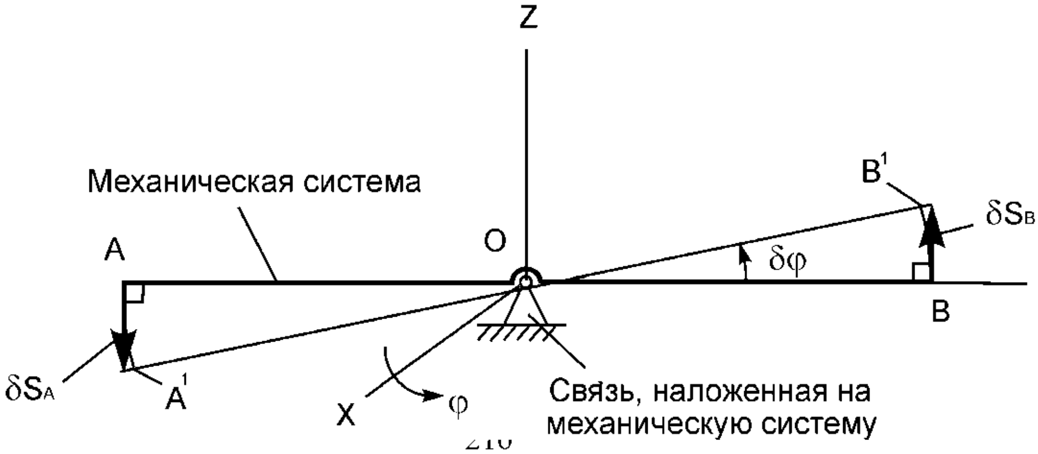


Рис. 6.2

Рычаг АВ рассматривается как механическая система, на которую наложена связь – шарнирно-неподвижная опора. В качестве обобщенной координаты используем угол φ поворота тела. Зададим углу φ бесконечно малое перемещение δφ, которое называют ***возможным угловым перемещением*** или ***приращением угловой координаты*** φ. При повороте рычага на угол δφ точки А и В переместятся по дугам AA^1, BB^1. Возможные перемещения точек А и В рассматривают как величины первого порядка малости, поэтому криволинейные перемещения точек замещают направленными прямолинейными отрезками (векторами $\delta\mathbf{S}_A$, $\delta\mathbf{S}_B$), отложенными по касательным к траекториям точек. Модули возможных перемещений $\delta\mathbf{S}_A$, $\delta\mathbf{S}_B$ точек А и В определяют по формулам:

$$\delta S_A = AO \cdot \delta\varphi; \quad \delta S_B = BO \cdot \delta\varphi.$$

Размерность возможных перемещений определяется размерностью обобщенной координаты: δφ [рад]; δS_A, δS_B [м]. Направления возможных перемещений точек механической системы совпадает с направлениями скоростей этих точек.

В данном учебно-методическом пособии рассматриваются неизменяемые механические системы с одной степенью свободы. Материальные тела, входящие в такие механические системы, совершают следующие виды движений: поступательное, вращательное, плоскопараллельное. Рассмотрим подробнее эти движения.

Поступательное движение (рис. 6.3).

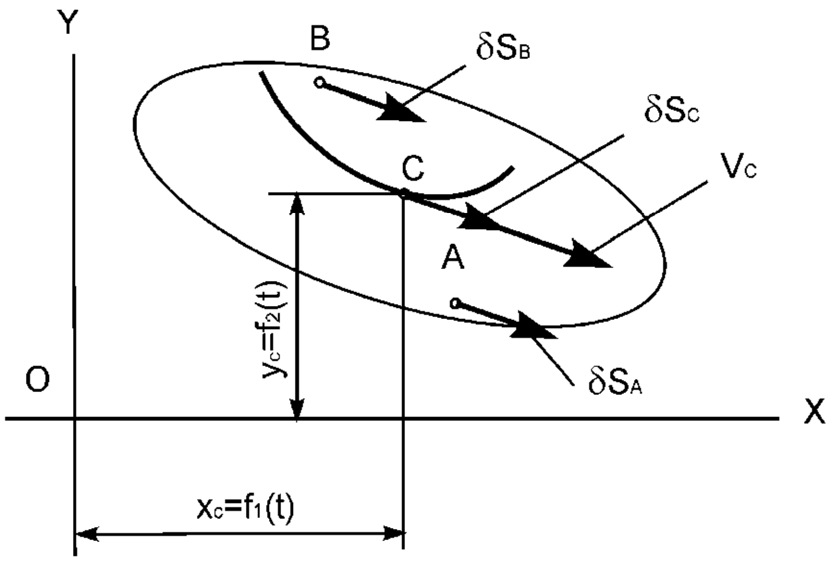


Рис. 6.3

При поступательном движении возможные перемещения всех точек тела геометрически равны:

$$\delta\mathbf{S}_A = \delta\mathbf{S}_B = \delta\mathbf{S}_C.$$

Так как тело при поступательном движении не поворачивается, то его возможное угловое перемещение равно нулю ($\delta\varphi = 0$).

Возможные перемещения $\delta\mathbf{S}_A$, $\delta\mathbf{S}_A$, $\delta\mathbf{S}_C$ точек A, B, C можно связать с их скоростями $\mathbf{V}_A$, $\mathbf{V}_B$, $\mathbf{V}_C$ следующими соотношениями:

$$\delta\mathbf{S}_A = \mathbf{V}_A\delta t; \quad \delta\mathbf{S}_B = \mathbf{V}_B\delta t; \quad \delta\mathbf{S}_C = \mathbf{V}_C\delta t,$$

где δt – бесконечно малый промежуток времени.

Вращательное движение (рис. 6.4).

За обобщенную координату в таком движении принимают угол поворота φ, а за возможное перемещение $\delta\varphi$ – приращение угла поворота. Модули возможных перемещений $\delta\mathbf{S}_A$, $\delta\mathbf{S}_A$, $\delta\mathbf{S}_C$ точек A, B, C определяют по формулам:

$$\delta S_A = AO\cdot\delta\varphi; \quad \delta S_B = BO\cdot\delta\varphi; \quad \delta S_C = CO\cdot\delta\varphi.$$

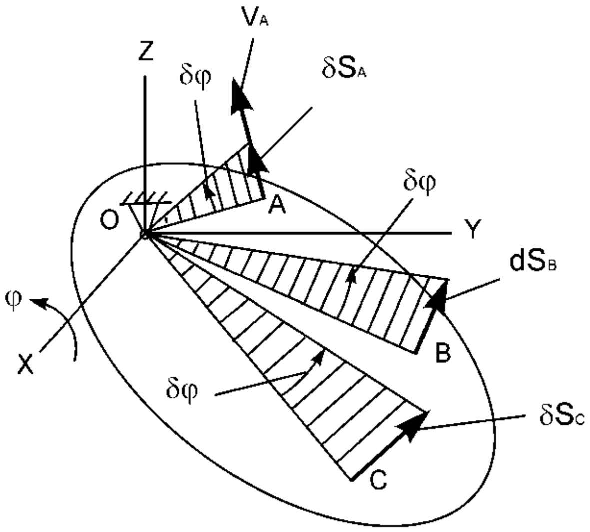


Рис. 6.4

Следует отметить, что при вращательном движении твердого тела возможные перемещения точек тела геометрически различны:

$$\delta\mathbf{S}_A \neq \delta\mathbf{S}_A \neq \delta\mathbf{S}_C.$$

Плоскопараллельное движение (рис. 6.5).

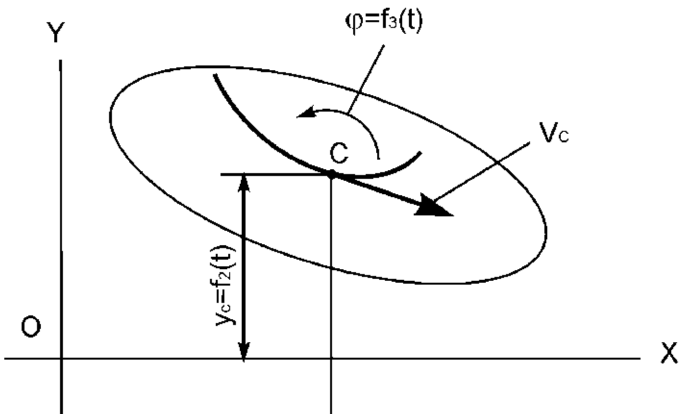


Рис. 6.5

Согласно определению при плоскопараллельном движении тело имеет три степени свободы и, следовательно, этому соответствует три обобщенные координаты x_C, y_C, φ, где x_C, y_C – координаты центра масс; φ – угол поворота тела относительно оси CZ, проходящей через его центр масс.

Из курса кинематики известно, что плоскопараллельное движение твердого тела можно представить как вращательное движение относительно оси, проходящей через мгновенный центр скоростей (МЦС). В этом случае в качестве обобщенной координаты используют только угол поворота φ.

Как правило, в инженерной практике возможные перемещения точек механической системы определяют с помощью мгновенного центра вращения (мгновенного центра поворота), положение которого всегда совпадает с положением мгновенного центра скоростей.

***Мгновенный центр вращения** – точка неподвижной плоскости, поворотом вокруг которой плоская фигура перемещается из данного положения в положение, бесконечно близкое к данному.*

Рассмотрим частные случаи определения возможных перемещений точек тела при его плоскопараллельном движении.

Случай 1 (рис. 6.6).

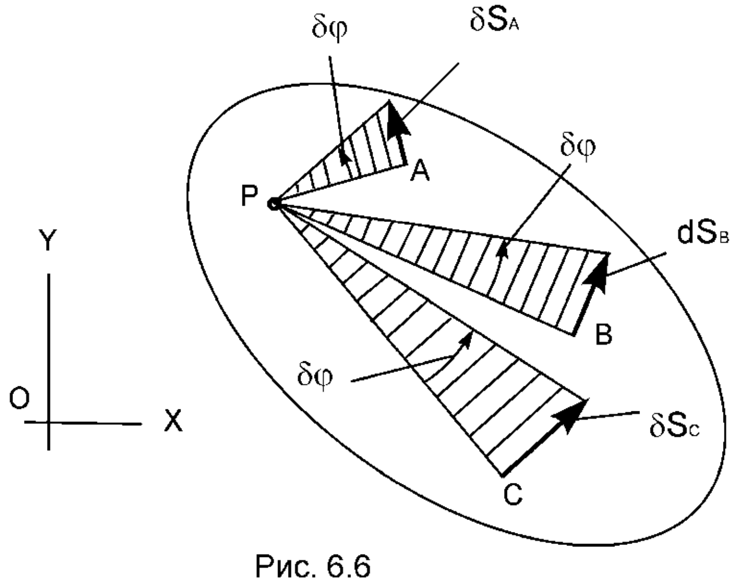


Рис. 6.6

Положение мгновенного центра вращения (точка P) определяют так же, как и положение МЦС. Так как методика определения положения МЦС подробно рассмотрена в курсе кинематики, то здесь она не приводится. Модули возможных перемещений $\delta \mathbf{S}_A$, $\delta \mathbf{S}_A$, $\delta \mathbf{S}_C$ точек A, B, C определяют по формулам:

$$\delta S_A = AP \cdot \delta\varphi; \quad \delta S_B = BP \cdot \delta\varphi; \quad \delta S_C = CP \cdot \delta\varphi,$$

где AP, BP, CP – соответственно расстояния от точек A, B, C до мгновенного центра вращения.

Необходимо еще раз напомнить, что возможные перемещения $\delta\mathbf{S}_A$, $\delta\mathbf{S}_A$, $\delta\mathbf{S}_C$ точек A, B, C связаны с их скоростями $\mathbf{V}_A$, $\mathbf{V}_B$, $\mathbf{V}_C$ следующими соотношениями: $\delta\mathbf{S}_A = \mathbf{V}_A\delta t$; $\delta\mathbf{S}_B = \mathbf{V}_B\delta t$; $\delta\mathbf{S}_C = \mathbf{V}_C\delta t$ и, следовательно, направления возможных перемещений точек и их скоростей совпадают.

Случаи 2, 3, 4 (рис. 6.7).

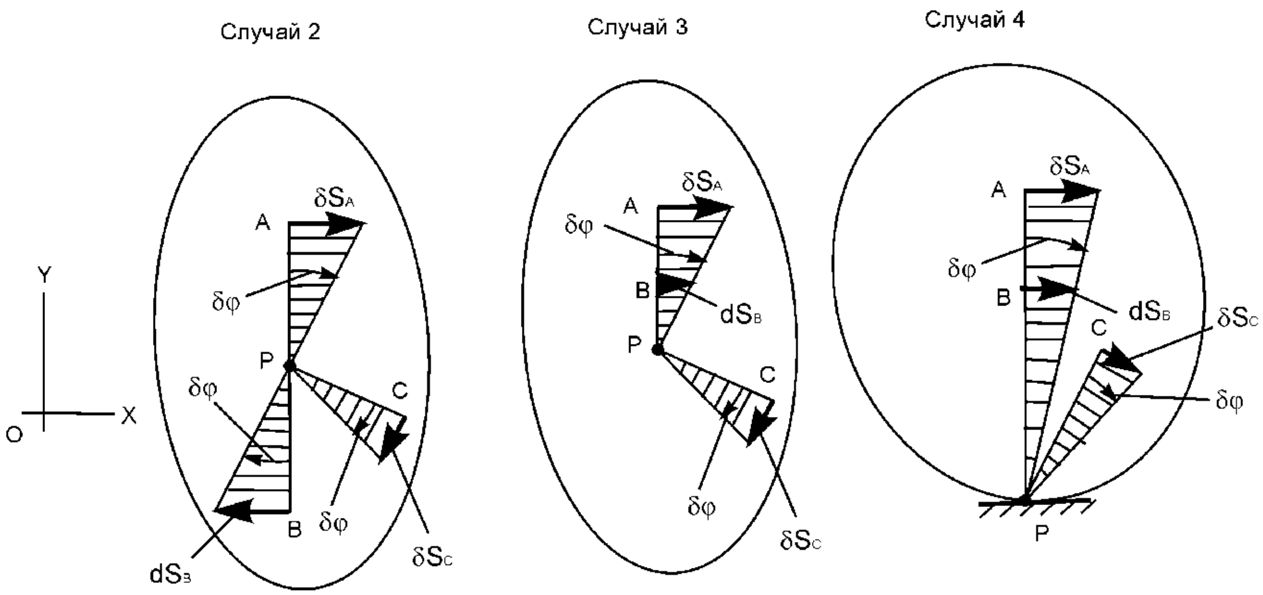


Рис. 6.7

Формулы для определения модулей возможных перемещений точек A, B, C в случаях 2, 3, 4 остаются такими же, как и формулы для случая 1 (см. рис. 6.6).

Рассмотрим частный случай плоскопараллельного движения – мгновенно поступательное движение (рис. 6.8).

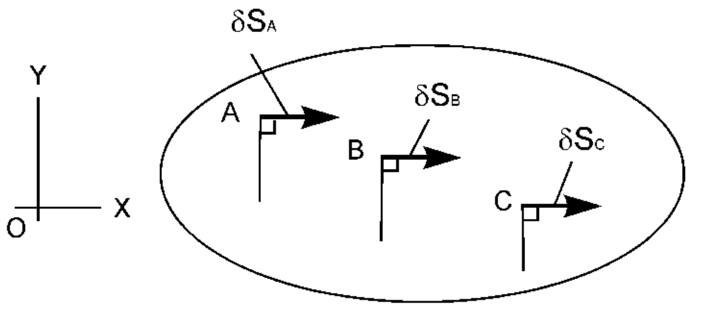


Рис. 6.8

Из курса кинематики известно, что при мгновенно поступательном движении скорости всех точек тела геометрически равны:

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_B = \mathbf{V}_C.$$

Так как $\delta\mathbf{S}_A = \mathbf{V}_A\delta t$; $\delta\mathbf{S}_B = \mathbf{V}_B\delta t$; $\delta\mathbf{S}_C = \mathbf{V}_C\delta t$, то отсюда следует, что равны и возможные перемещения этих точек:

$$\delta\mathbf{S}_A = \delta\mathbf{S}_B = \delta\mathbf{S}_C.$$

В инженерной практике возможные перемещения точек твердого тела при его плоскопараллельном движении связывают между собой через их проекции на прямую, соединяющую эти точки (рис. 6.9).

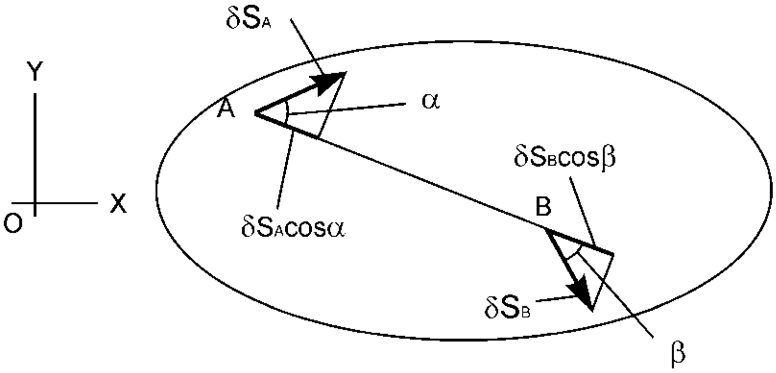


Рис. 6.9

Возможные перемещения $\delta\mathbf{S}_A$, $\delta\mathbf{S}_B$ точек A и B тела при его плоскопараллельном движении связаны соотношением

$$\delta S_A\cos\alpha = \delta S_B\cos\beta.$$

При решении задач аналитической механики все возможные перемещения точек механической системы выражают через приращение обобщенной координаты рассматриваемого механизма (рис. 6.10).

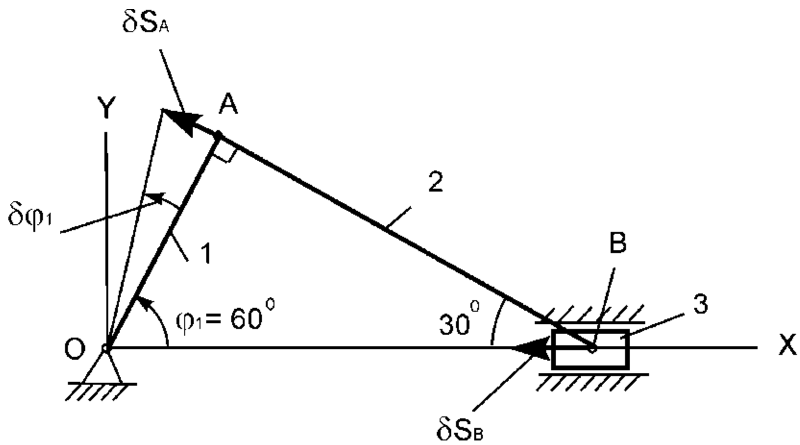


Рис. 6.10

Согласно рис. 6.10 механическая система (кривошипно-ползунный механизм) состоит из трех звеньев: 1 – кривошип;

2 – шатун; 3 – ползун. Механизм имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты используем угол φ_1 поворота тела 1. В заданном положении механизма обобщенной координате φ_1 зададим приращение $\delta\varphi_1$. Таким образом, $\delta\varphi_1$ – возможное угловое перемещение звена 1, которое совершает вращательное движение. Исходя из этого, определим модуль возможного перемещения $\delta\mathbf{S}_A$.

$$\delta S_A = AO\cdot\delta\varphi_1.$$

Кинематический анализ работы механизма показывает, что звено 2 совершает плоскопараллельное движение, а звено 3 совершает поступательное движение вдоль координатной оси OX. Из условия принадлежности точки B звену 3 возможное перемещение $\delta\mathbf{S}_B$ направлено вдоль координатной оси OX. Спроецировав возможные перемещения точек A и B на прямую, соединяющую эти точки, получим

$$\delta S_A = \delta S_B\cdot\cos 30^\circ.$$

Отсюда имеем

$$\delta S_B = \delta S_A/\cos 30^\circ = AO\cdot\delta\varphi_1/\cos 30^\circ.$$

Таким образом, установлено, что линейные возможные перемещения точек A и B зависят от возможного углового перемещения $\delta\varphi_1$ звена 1 механизма.

$$\delta S_A = AO\cdot\delta\varphi_1 = f_1(\delta\varphi_1);$$
$$\delta S_B = AO\cdot\delta\varphi_1/\cos 30^0 = f_2(\delta\varphi_1).$$

6.2. Связи и их классификация. Идеальные связи

В аналитической механике широко используются понятия: «***механическая система»***; «***связи»***, наложенные на механическую систему. Уточним эти понятия и проведем их классификацию.

Связи *– материальные тела, осуществляющие ограничения, налагаемые на положения и скорости точек механической системы, которые должны выполняться при любых действующих на систему силах.*

Эти ограничения записываются в виде уравнений или ограничений.

Уравнения связей *– уравнения, которым в силу наложенных связей должны удовлетворять координаты точек механической системы и их скорости (первые производные от координат по времени).*

***Геометрические связи** – связи, уравнения которых содержат только координаты точек механической системы.*

Эти связи выполнены в виде тел, поверхностей, линий и т. п. Например, связь в виде некоторой поверхности описывается уравнением f(x, y, z) = 0.

***Дифференциальные связи** – связи, уравнения которых, кроме координат точек механической системы, содержат еще первые производные от этих координат по времени.*

Уравнения такой связи имеет вид f(x, y, z, dx/dt, dy/dt, dz/dt) = 0.

***Голономные связи** – геометрические связи и дифференциальные связи, уравнения которых можно проинтегрировать.*

***Неголономные связи** – дифференциальные связи, уравнения которых не могут быть проинтегрированы.*

***Стационарные связи** – связи, в уравнения которых время явно не входит.*

Например, геометрическая стационарная связь в виде невесомого стержня длины l, ограничивающая перемещение материальной точки (рис. 6.11), описывается уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0.$$

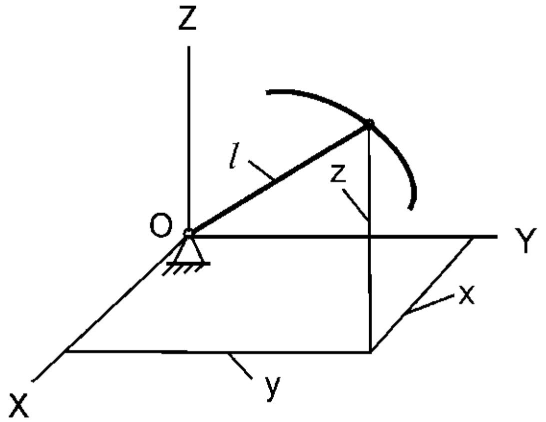


Рис. 6.11

Если в рассматриваемом примере (рис. 6.11) вместо стержня будет нить, длина которой с течением времени изменяется, то такая связь будет геометрически нестационарной. Эта связь описывается уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2(t) = 0.$$

***Двусторнние (удерживающие) связи** – связи, допускающие возможные перемещения только в двух взаимно противоположных направлениях.*

Примером такого типа связи служит, например, кулисный камень. Эти связи описываются уравнением f(x, y, z, t) = 0.

***Односторонние (неудерживающие) связи** – связи, при которых точки механической системы имеют возможные перемещения, противоположные которым не являются возможными.*

К связям такого типа относится, например, шарнирно-подвижная опора. Аналитически эти связи описываются неравенствами типа f(x, y, z, t) ≥ 0.

***Механическая система** – любая совокупность материальных точек, движения которых взаимозависимы.*

***Голономная система** – механическая система, на которую наложены голономные связи.*

***Неголономная система** – механическая система, на которую наложена хотя бы одна неголономная связь.*

***Возможное перемещение системы** – любая совокупность возможных перемещений точек данной механической системы, допускаемая всеми наложенными на нее связями.*

Рассмотрим понятие «***возможная работа силы***», которое также широко применяют в аналитической механике.

***Возможная (элементарная) работа силы** – бесконечно малая величина, равная скалярному произведению вектора силы **F** на вектор возможного перемещения δ**S** точки ее приложения.*

На рис. 6.12 показаны векторы **F** и δ**S.**

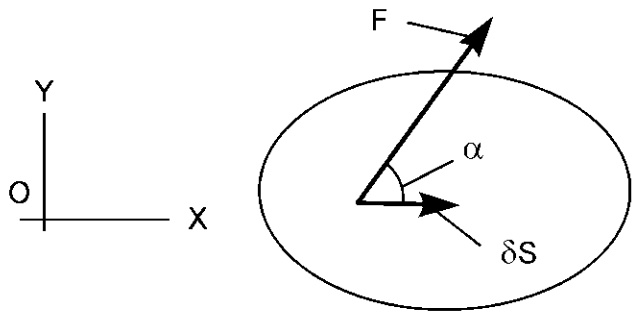


Рис. 6.12

Согласно рис. 6.12 и определению возможную работу δA(**F**) силы **F** определяют по формуле

$$\delta A(\mathbf{F}) = \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{S} = F\cdot\delta S\cdot\cos(\mathbf{F}, \delta\mathbf{S}) = F\cdot\delta S\cdot\cos\alpha.$$

В зависимости от величины угла α возможная работа δA(**F**) может быть положительной, отрицательной или равной нулю.

Рассмотрим случай, при котором под действием силы **F** тело совершает вращательное движение относительно оси OX (рис. 6.13).

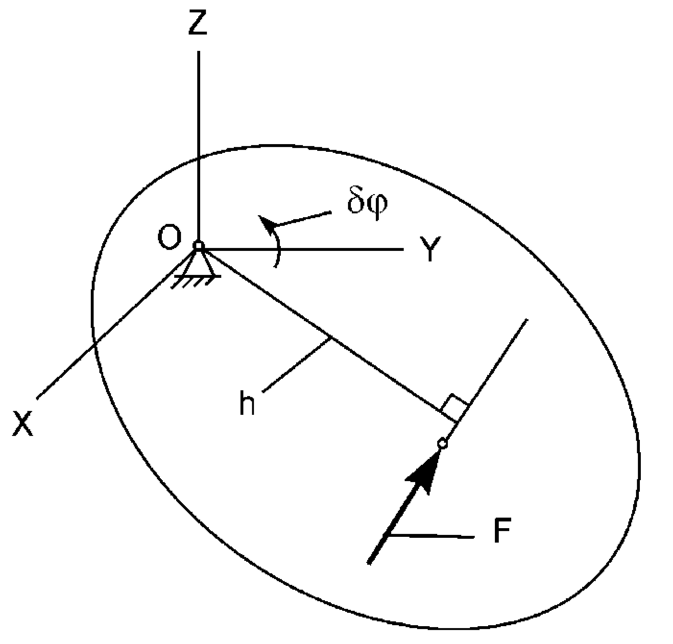


Рис. 6.13

При вращении тела возможную работу δA(**F**) силы **F** на возможном угловом перемещении δφ в общем случае определяют по формуле

$$\delta A(\mathbf{F}) = \pm\, M_{ox}(\mathbf{F})\cdot\delta\varphi = \pm\,(F\cdot h)\delta\varphi,$$

где M_{ox}(**F**) – момент силы **F** относительно оси OX вращения; h – плечо силы **F** относительно оси вращения.

Следует отметить, что при совпадении направления $M_{ox}(\mathbf{F})$ и $\delta\varphi$ возможная работа $\delta A(\mathbf{F}) > 0$. Если направления $M_{ox}(\mathbf{F})$ и $\delta\varphi$ противоположны, то $\delta A(\mathbf{F}) < 0$.

Возможная элементарная работа δA сил, приложенных к точкам механической системы, вычисляется по формуле

$$\delta A = \Sigma\delta A(\mathbf{F}_i).$$

Рассмотрим еще одно понятие «идеальные связи», применяемое в аналитической механике.

***Идеальные связи** – связи, для которых сумма элементарных работ их реакций равна нулю на любом возможном перемещении механической системы.*

Идеальными связями являются: гладкая поверхность; шарнирно-подвижная и шарнирно-неподвижная опоры; шероховатая поверхность при качении по ней рассматриваемого тела и др.

6.3. Принцип возможных перемещений

При решении задач на равновесие механических систем, например, для составной конструкции применяются соответствующие уравнения равновесия. Как правило, такие задачи являются статически неопределимыми. Для их решения требуется рассматривать равновесие каждого из тел системы под действием активных сил, реакций внешних связей и реакций внутренних связей. В результате того, что для каждого из тел системы составляются уравнения равновесия, приходится решать большие системы уравнений. Такой подход к решению задачи становится громоздким и потому малопригодным. В этих случаях целесообразно использовать принцип возможных перемещений, который существенно облегчает решение поставленной задачи.

*Формулировка **принципа возможных перемещений**.*

Для равновесия механической системы, на которую наложены стационарные идеальные связи, необходимо и достаточно, чтобы сумма работ активных (задаваемых) сил на любых возможных перемещениях механической системы равнялась нулю.

Этот принцип выражается формулой

$$\delta A = \Sigma\delta A(\mathbf{F}_i) = \Sigma\mathbf{F}_i\cdot\delta\mathbf{S}_i = \Sigma F_i\cdot\delta S_i\cdot\cos(\mathbf{F}_i, \delta\mathbf{S}_i) = 0,$$

где $\mathbf{F}_i$ – активная сила, приложенная к i-й точке механической системы; $\delta\mathbf{S}_i$ – возможное перемещение точки приложения силы $\mathbf{F}_i$.

Принцип возможных перемещений в декартовой системе отсчета имеет вид

$$\Sigma(F_{iox}\delta S_{iox} + F_{ioy}\delta S_{ioy} + F_{ioz}\delta S_{ioz}) = 0,$$

где F_{iox}, F_{ioy}, F_{ioz} – проекции задаваемых (активных) сил на координатные оси; δS_{iox}, δS_{ioy}, δS_{ioz} – проекции возможных перемещений $\delta\mathbf{S}_i$ точки приложения сил $\mathbf{F}_i$ на координатные оси.

Если предыдущую формулу ($\Sigma\mathbf{F}_i\cdot\delta\mathbf{S}_i = \Sigma F_i\cdot\delta S_i\cdot\cos(\mathbf{F}_i, \delta\mathbf{S}_i) = 0$) продифференцировать по времени, то получим

$$\Sigma\mathbf{F}_i\cdot\mathbf{V}_i = \Sigma F_i\cdot V_i\cdot\cos(\mathbf{F}_i, \mathbf{V}_i) = 0,$$

где $\mathbf{V}_i = d(\delta\mathbf{S}_i)/dt$ – возможная скорость точки приложения силы $\mathbf{F}_i$.

Так как по определению $\mathbf{F}\cdot\mathbf{V} = F\cdot V\cdot\cos(\mathbf{F}, \mathbf{V}) = N$, где N – мощность, то последнее равенство трактуют как ***принцип возможных скоростей*** или ***принцип возможных мощностей***.

Для равновесия механической системы, на которую наложены стационарные идеальные связи, необходимо и достаточно, чтобы сумма мощностей активных сил на любых возможных скоростях точек этой системы равнялась нулю.

Для закрепления изложенного теоретического материала рекомендуется выполнить курсовые задания Д 6, Д7.

6.3.1. Варианты курсового задания Д 6 «Применение принципа возможных перемещений к решению задач о равновесии сил, приложенных к механической системе с одной степенью свободы»

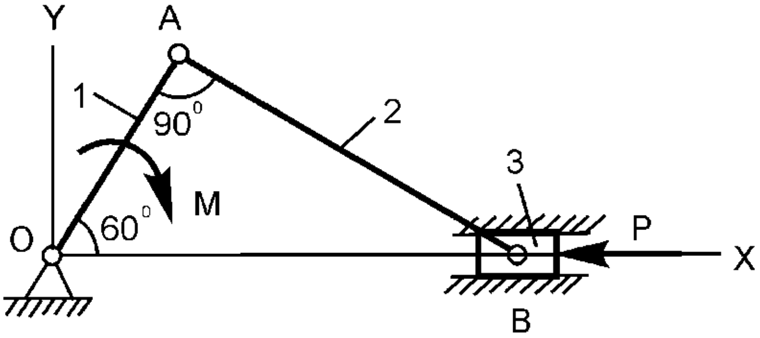
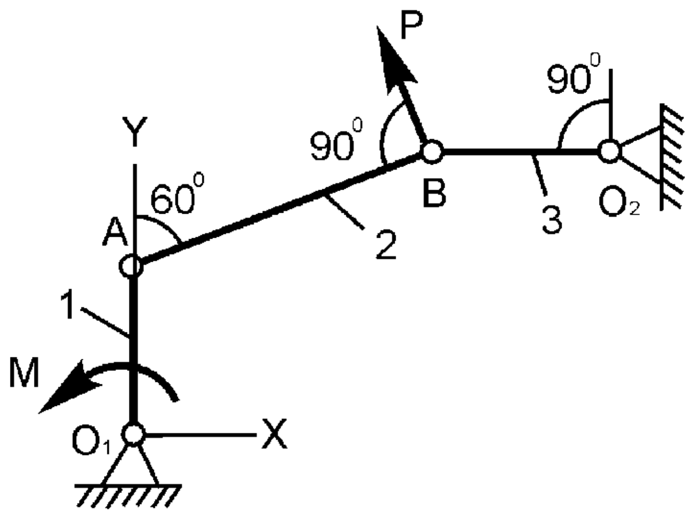
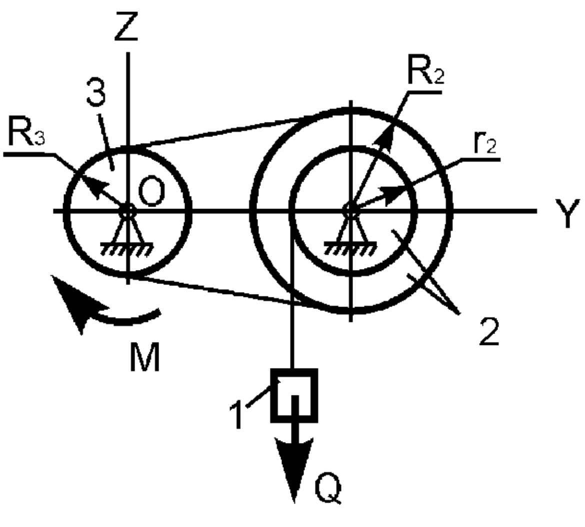
Схемы механизмов, находящихся под действием взаимно уравновешивающихся сил, и необходимые для расчета данные приведены в табл. 5.4. В расчетах использовать следующие условные обозначения: c – коэффициент жесткости пружины (Н/см); h – деформация пружины (см); Q, P – силы (Н); M – момент пары сил (Н·м).

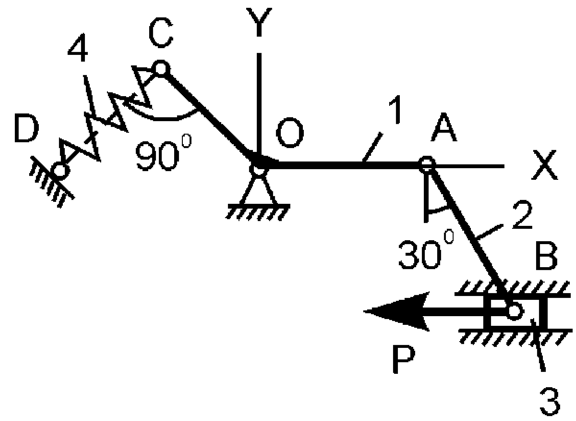
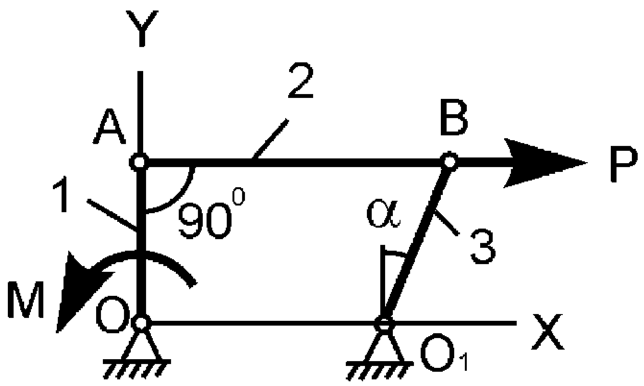
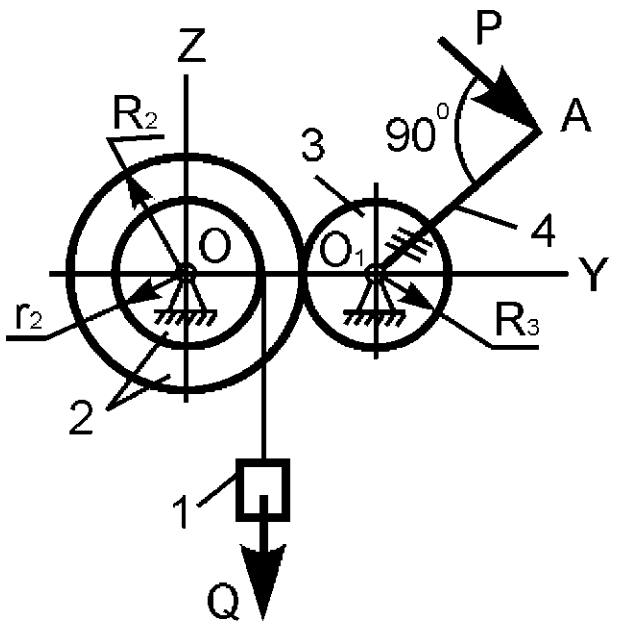
Примечания:

Вариант 6. Вес рукоятки O_1A не учитывать.
Вариант 7. Пружина сжата.
Вариант 8. Пружина сжата.
Вариант 10. Вес рукоятки OA не учитывать.
Вариант 14. Вес стержней OA и OB не учитывать; пружина растянута.
Вариант 16. Вес стержней O_1A и O_2B не учитывать.
Вариант 18. P – вес блока радиуса R_3.
Вариант 19. Вес звена AB не учитывать.
Вариант 24. Пружина сжата.
Вариант 25. Вес стержней AO и BO не учитывать. Пружина растянута.
Вариант 26. Пружина растянута.

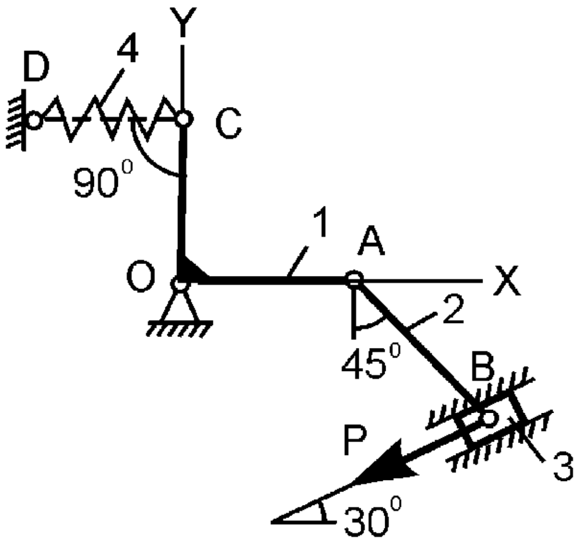
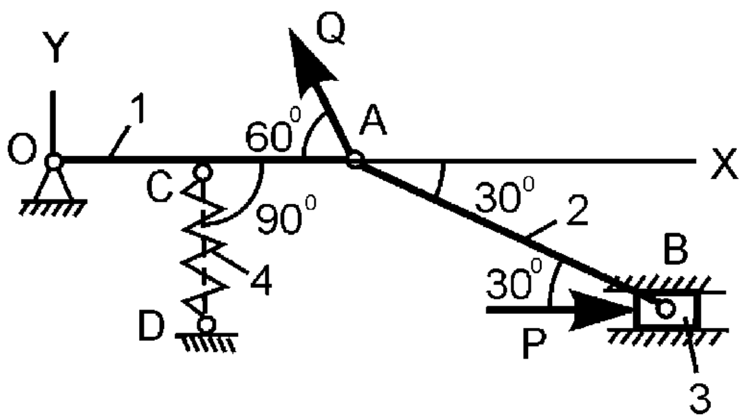
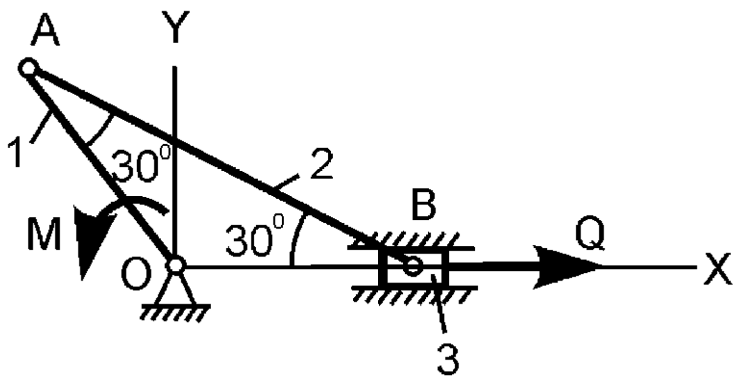
Применяя принцип возможных перемещений и пренебрегая силами сопротивления, определить величину, указанную в последнем столбце табл. 5.4.

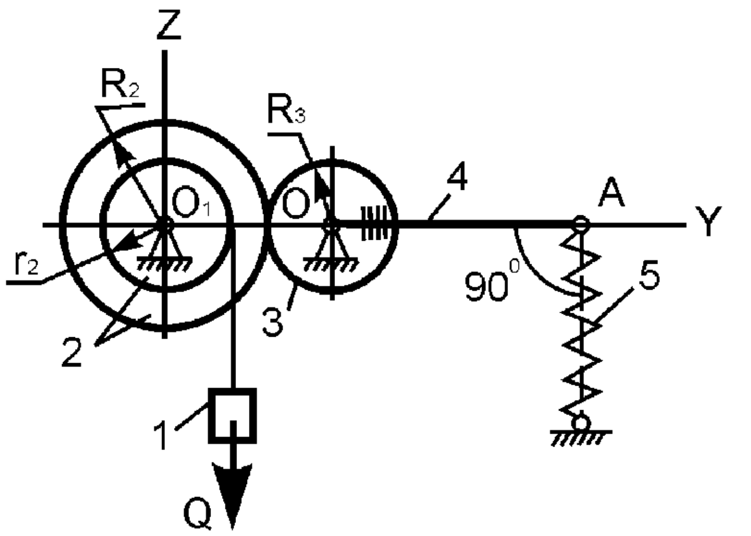
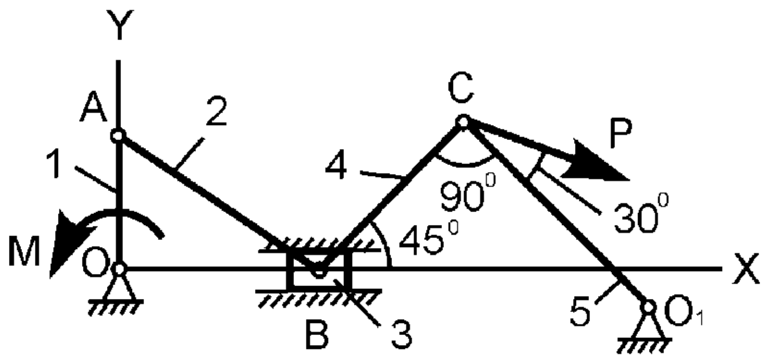
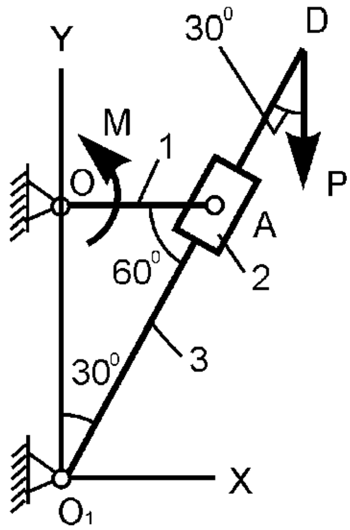
Таблица 5.4

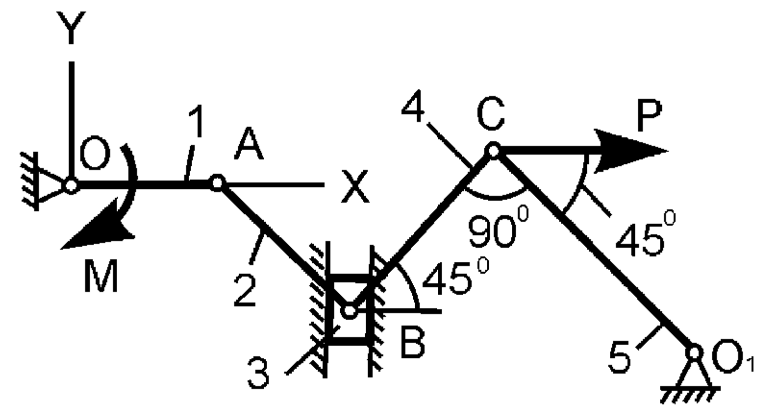
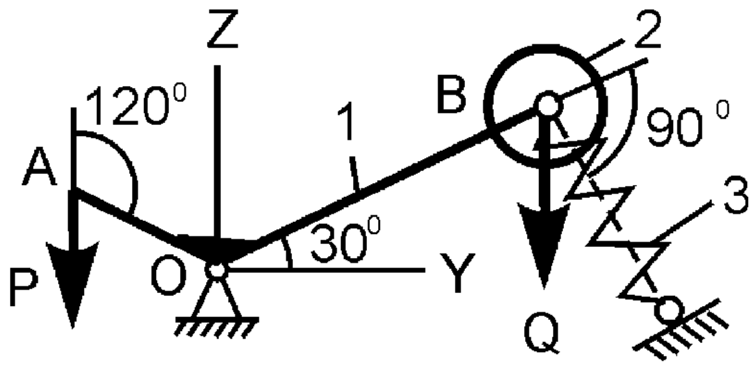
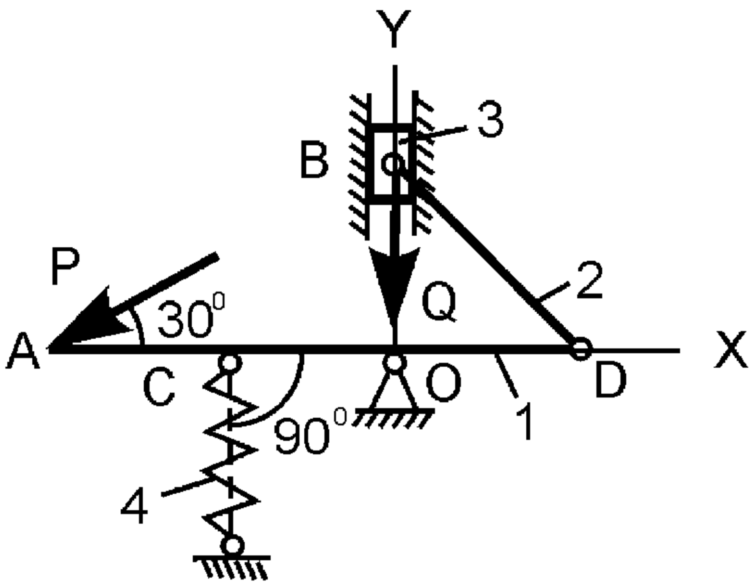
Номер варианта	Расчетная схема механизма	Исходные данные, определяемая величина
1	2	3
1		OA = 10 см; M = 20 Н·м; P = ?
2		O_1A = 20 см; P = 100 Н; M = ?
3		R_2 = 40 см; r_2 = 30 см; R_3 = 20 см; M = 100 Н·м; Q = ?

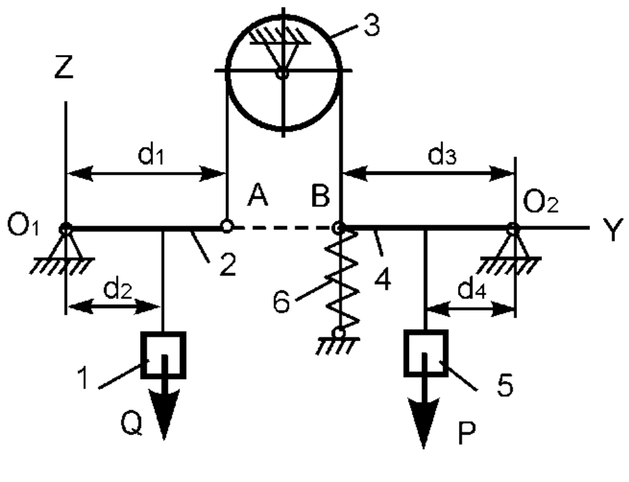
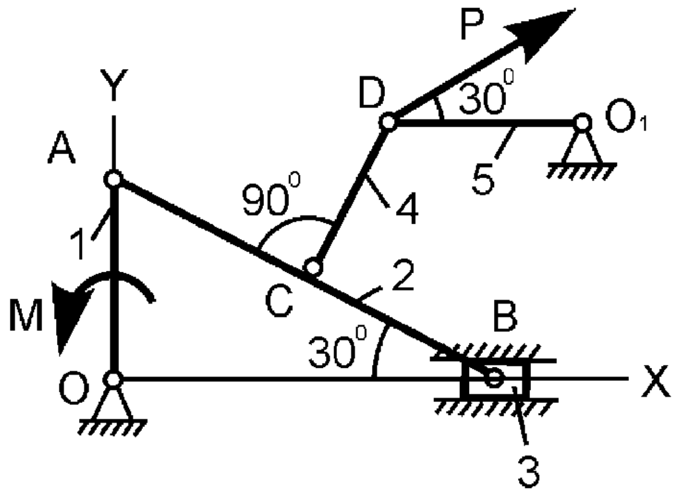
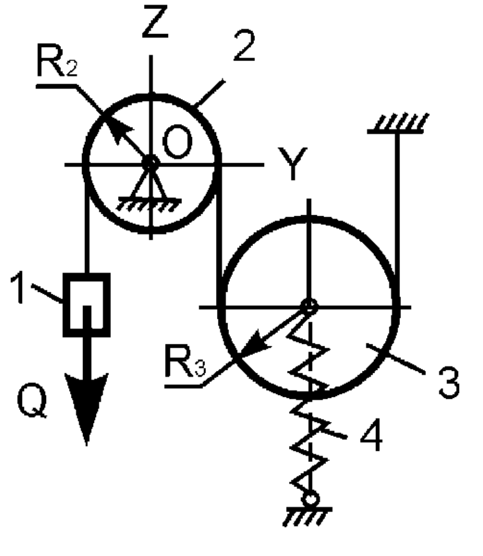
1	2	3
4		OC/OA = 4/5; P = 200 Н; h = 4 см; c = ?
5		OA = 100 см; M = 10 Н·м; P = ?
6		R_2 = 50 см; r_2 = 15 см; R_3 = 20 см; O_1A = 80 см; Q = 200 Н; P = ?

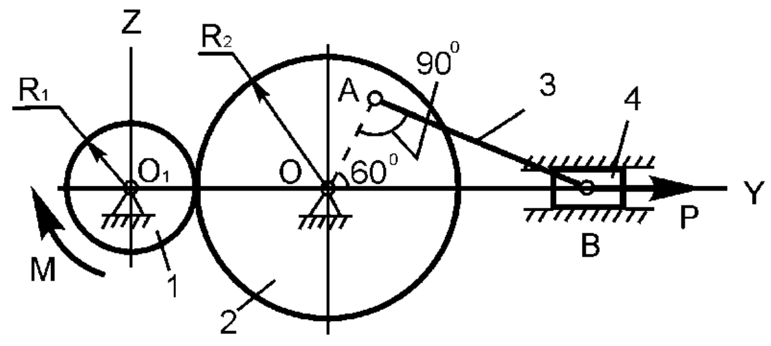
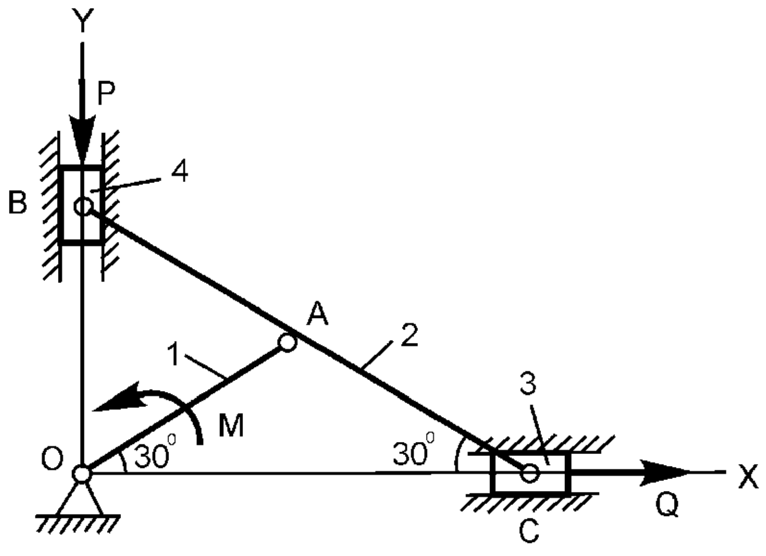
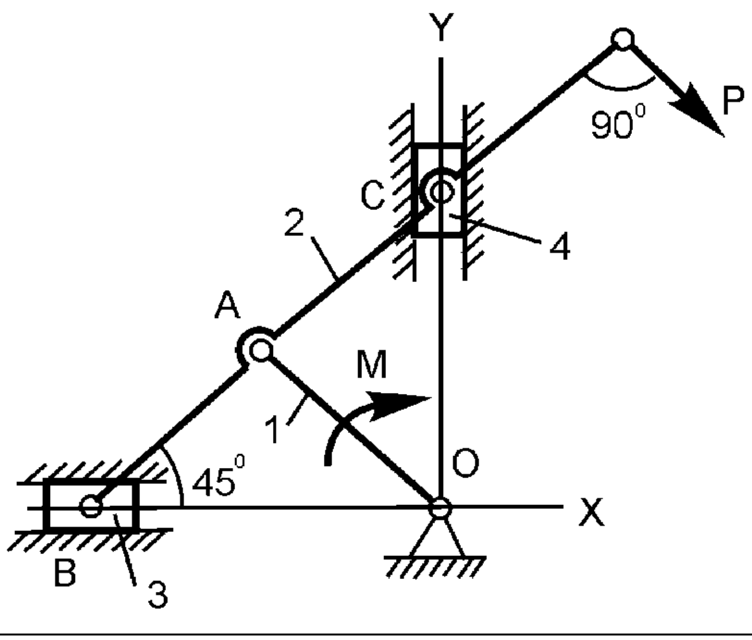
Продолжение табл..5.4

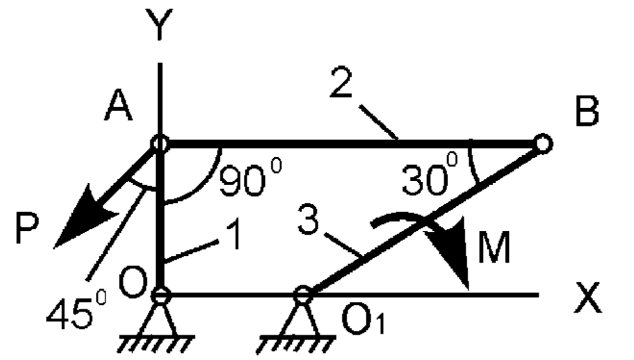
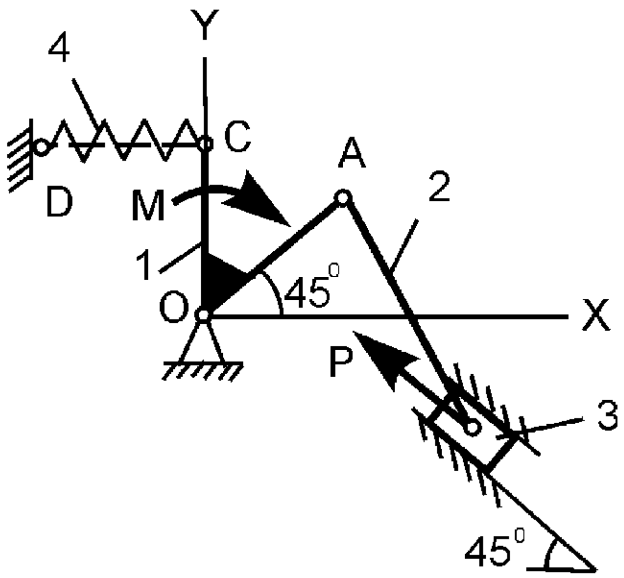
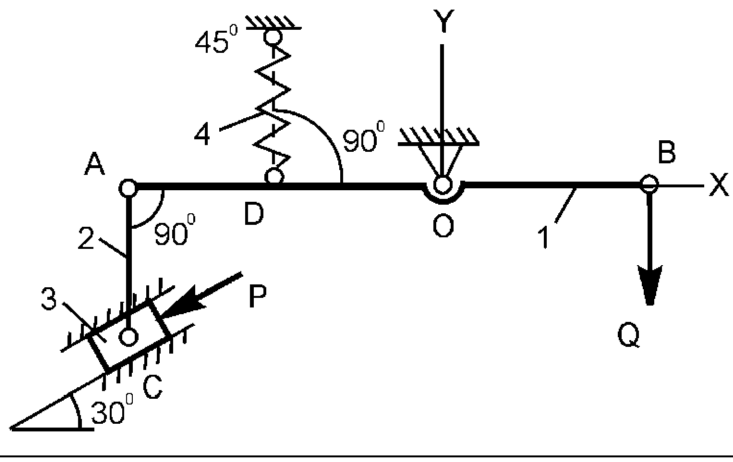
1	2	3
7		OC = OA; c = 10 Н/см; h = 3 см; P = ?
8		OC = AC; P = 200 Н; c = 10 Н/см; h = 2 см; Q = ?
9		OA = 20 см; Q = 200 Н; M = ?

1	2	3
10		R_2 = 40 см; r_2 = 15 см; R_3 = 20 см; OA = 100 см; Q = 2000 Н; h = 4 см; c = ?
11		OA = 20 см; M = 300 Н·м; P = ?
12		O_1D = 60 см; AO = 20 см; M = 100 Н·м; P = ?

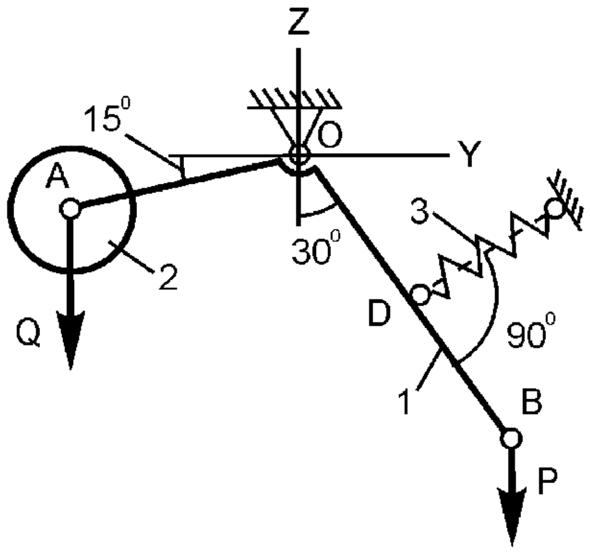
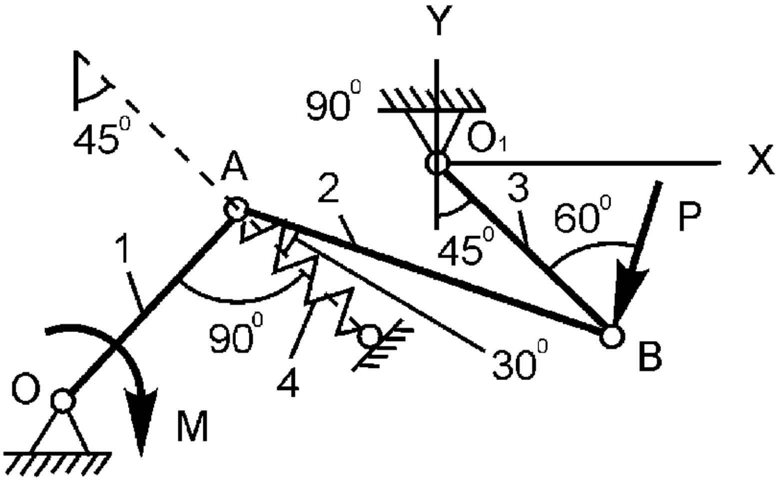
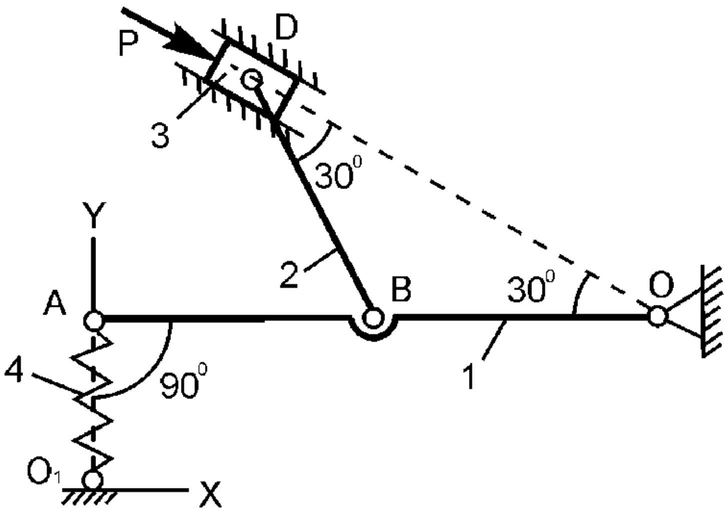
1	2	3
13		OA = 40 см; M = 200 Н·м; P =?
14		OB = 2OA; Q = 20 Н; c = 25 Н/см; h = 3 см; P = ?
15		AC = OC = OD; Q = 3000 Н; c = 250 Н/см; h = 3 см; P = ?

1	2	3
16		d_1 = 100 см; d_2 = 60 см; d_3 = 80 см; d_4 = 40 см; Q = 5000 Н; c = 100 Н/см; h = 4 см; P = ?
17		OA = 20 см; M = 200 Н·м; P = ?
18		Q = 200 Н; P = 200 Н; c = 100 Н/см; h = ?

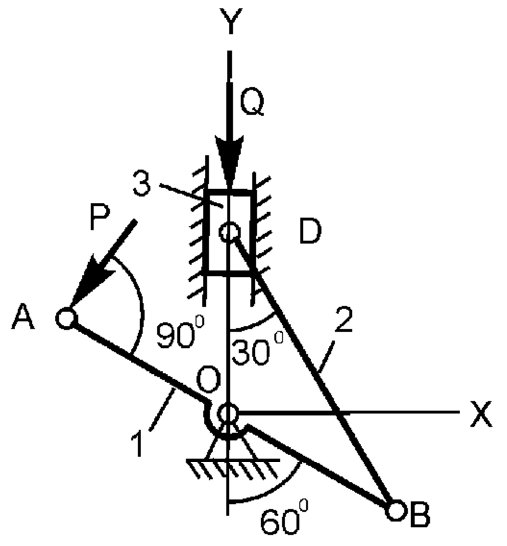
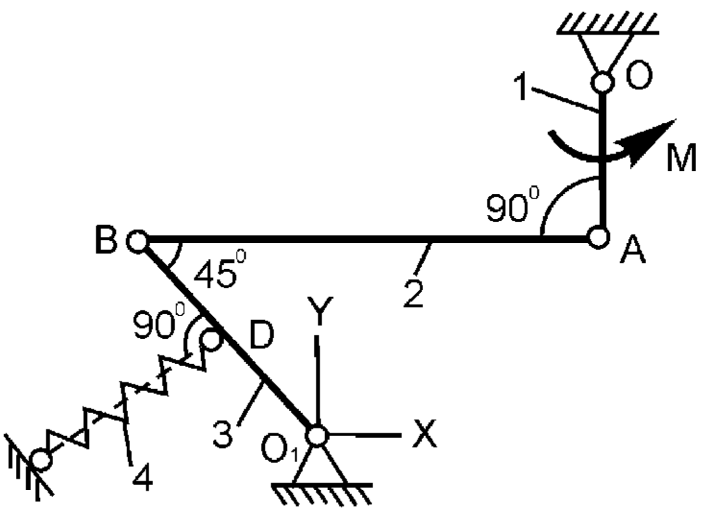
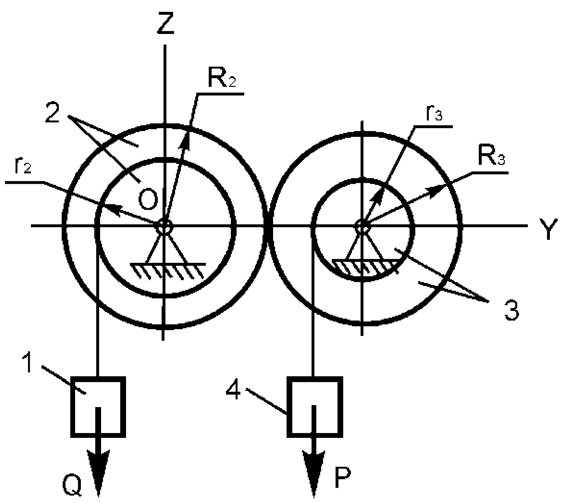
1	2	3
19		R_1 = 20 см; R_2 = 30 см; OA = 25 см; M = 100 Н·м; P = ?
20		OA=AB =50 см; AC = 50 см; Q = 50 Н; P = 100 Н; M = ?
21		OA=AB= 25 см; AC=DC= 25 см; P = 200 Н; M = ?

1	2	3
22		OA = 40 см; M = 400 Н/см; P = ?
23		OC =2OA = 1 м; P = 200 Н; M = 50 Н·м; c = 50 Н/см; h = ?
24		AD = OD = OB; P = 250 Н; c = 150 Н/см; h = 2,5 см; Q = ?

Продолжение табл..5.4

1	2	3
25		OD=DB=0,8AO; Q = 400 Н; c = 120 Н/см; h = 3 см; P = ?
26		OA = 25 см; P = 500 Н; M = 120 Н·м; h = 2 см; c = ?
27		OB = AB; c = 180 Н/см; h = 2 см; P = ?

Окончание табл. 5.3

1	2	3
28		OB = (5/4)OA; P = 450 Н; Q = ?
29		AO = 30 см; BD = O_1D; M = 120 Н·м; c = 100 Н/см; h = ?
30		R_2 = 36 см; r_2 = 15 см; R_3 = 20 см; r_3 = 10 см; P = 600 Н; Q =?

6.3.2. Пример выполнения курсового задания Д 6

При выполнении курсовых заданий Д 6, Д 7 необходимо учесть следующие замечания.

1. Если не все связи, наложенные на рассматриваемую механическую систему, являются идеальными, например, имеются шероховатые поверхности (неидеальные связи), то к активным нагрузкам следует добавить силы трения. Таким приемом силы трения переносят в разряд активных сил и, следовательно, шероховатую поверхность можно рассматривать как идеальную связь (рис. 6.14).

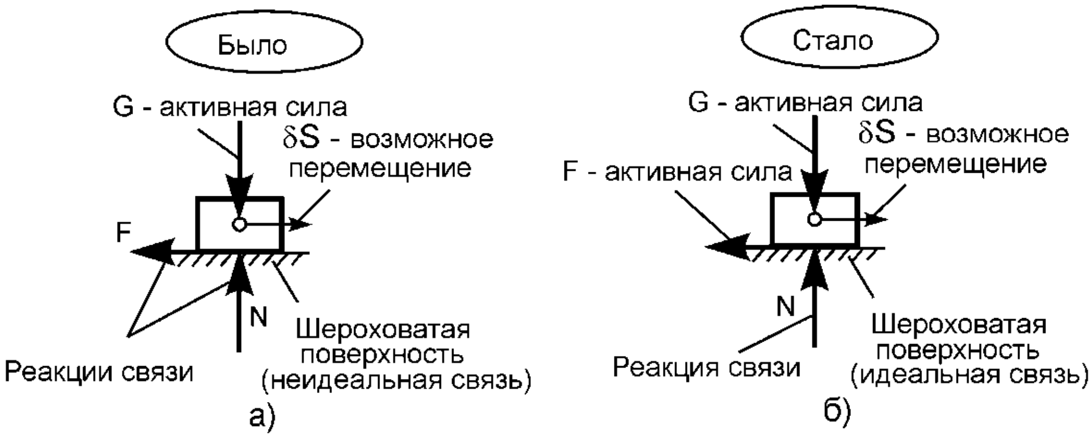


Рис. 6.14

Таким образом, при решении задачи рис. 6.14,а и рис. 6.14,б эквивалентны.

2. Если требуется определить какую-либо реакцию идеальной связи, то, применив аксиому связей, отбрасывают соответствующую связь и заменяют ее реакцией связи. Таким образом, исходная связь заменяется другой связью, допускающей возможные перемещения. Тем самым искомая реакция переносится в разряд активных сил. Этот прием решения задач является черезвычайно эффективным, так как искомая реакция связи непосредственно определяется из уравнения, выражающего принцип возможных перемещений.

На рис. 6.15, 6.16 приведены некоторые варианты определения реакций внешних связей для механических систем.

В исходном положении (см. рис. 6.15) на механическую систему, состоящую из двух тел, в точке А наложена связь – жесткая заделка. Снимем ограничение на перемещение тела 1 в горизонтальном направлении, сохранив остальные ограничения. Варианты такой замены показаны на рис. 6.15,б, 6.15,в.

При таких заменах тело 1 может совершить только поступательное движение, параллельное координатной оси ОХ. Если задать возможное перемещение δS_A точке А механической системы, то ее точки B и C получат возможные перемещения $\delta\mathbf{S}_B$, $\delta\mathbf{S}_C$, зависящие от $\delta\mathbf{S}_A$.

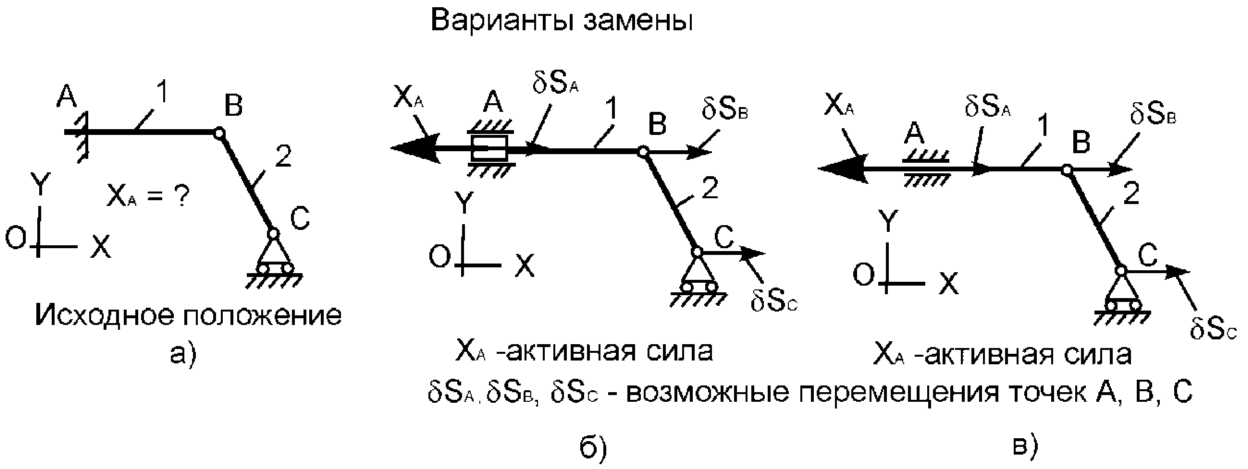


Рис. 6.15

При определении реактивного момента M_A для механической системы, приведенной на рис 6.15, жесткую заделку заменяют шарнирно неподвижной опорой (см. рис. 6.16).

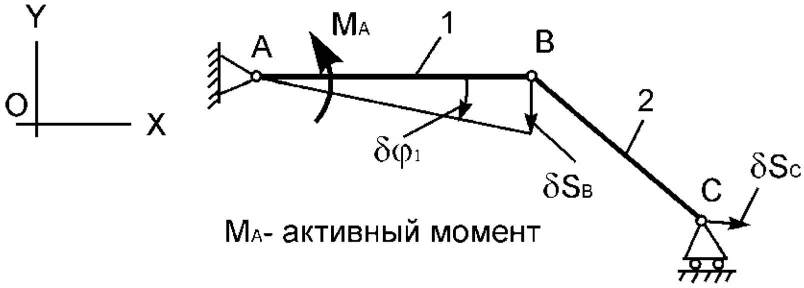


Рис. 6.16

При такой замене тело 1 может совершать вращательное движение. Зададим этому телу возможное угловое перемещение $\delta\varphi_1$. Точки B и C механической системы получат линейные возможные перемещения $\delta\mathbf{S}_B$, $\delta\mathbf{S}_C$, зависящие от перемещения $\delta\varphi_1$.

Задачи на применение принципа возможных перемещений рекомендуется решать по следующему алгоритму.

1. Изобразить рассматриваемую механическую систему на рисунке в соответствующем масштабе.
2. Приложить к механической системе активные нагрузки.
3. При наличии неидеальных связей добавить соответствующие реакции связей (например, силы трения).
4. Для определения реакции связи эту реакцию перенести в разряд активных сил путем замены существующей связи на

связь, допускающую возможное перемещение в направлении, как правило, противоположном направлению определяемой реакции связи.

5. Дать возможное перемещение одной из точек механической системы и выразить возможные перемещения точек приложения сил в зависимости от заданного возможного перемещения.
6. Вычислить сумму работ активных сил на возможных перемещениях их точек приложения и приравнять эту сумму нулю.
7. Решив составленное уравнение, определить искомую величину.

Пример.

На рис. 6.17 изображена механическая система, находящаяся в равновесии. Определить модуль силы **F**, приложенной в точке B рычага 1.

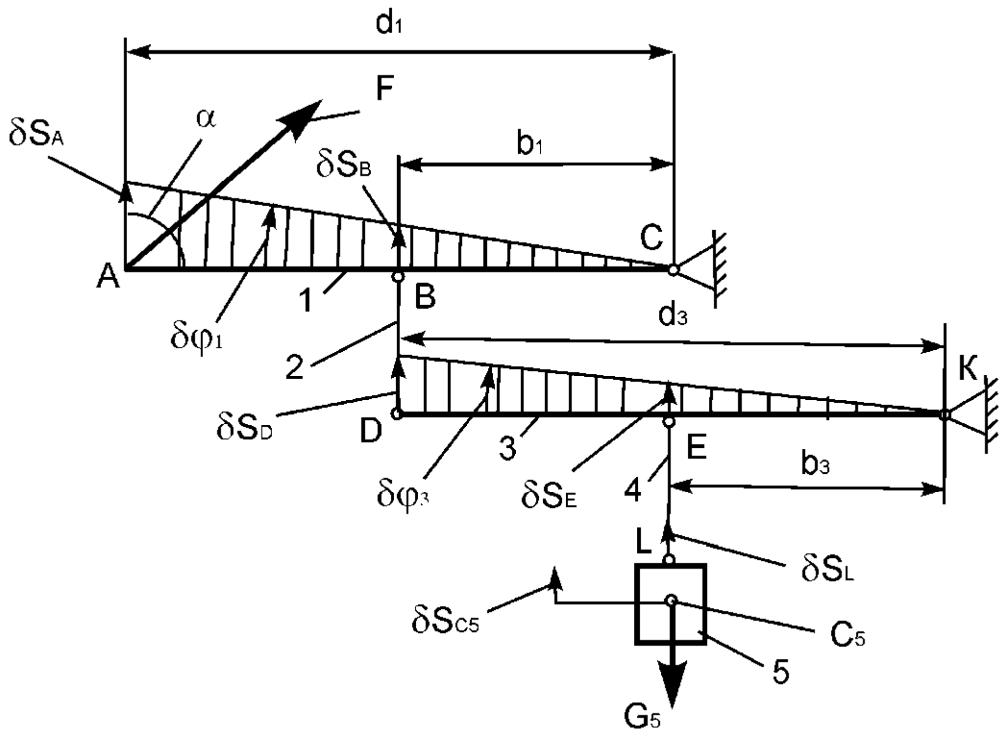


Рис. 6.17

Дано: G_5 = 100 Н; $\alpha = 30^{\circ}$; d_1 = 1 м; b_1 = 0,5 м; d_3 = 0,8 м; b_3 = 0,5 м.

Решение.

Согласно рис. 6.17 механическая система, содержащая пять тел, имеет одну степень свободы. Наложенные на эту систему в точках C и K связи (шарнирно-неподвижные опоры) являются идеальными. На механическую систему, находящуюся в равновесии, действуют активные силы **F** и $\mathbf{G}_5$.

Зададим возможное угловое перемещение $\delta\varphi_1$ телу 1, которое может совершать вращательное движение. Возможные перемещения $\delta\mathbf{S}_A$, $\delta\mathbf{S}_B$ точек A и B в зависимости от $\delta\varphi_1$ определим по формулам:

$$\delta S_A = \delta\varphi_1 \cdot AC = \delta\varphi_1 \cdot d_1; \ \delta S_B = \delta\varphi_1 \cdot BC = \delta\varphi_1 \cdot b_1.$$

Решая совместно эти выражения, найдем зависимость

$$\delta S_B = f(\delta S_A) = (\delta S_A) \cdot b_1/d_1.$$

Из условия принадлежности точки D телу 3, которое получит возможное угловое перемещение $\delta\varphi_3$, эта точка получит возможное перемещение $\delta\mathbf{S}_D$, перпендикулярное DK.

$$\delta S_D = \delta\varphi_3 \cdot DK = \delta\varphi_3 \cdot d_3.$$

Рассмотрим элементарное движение тела 2. Это тело совершает мгновенно поступательное движение, так как возможные перемещения $\delta\mathbf{S}_B$, $\delta\mathbf{S}_D$ соответствующих точек этого тела одинаково направлены. Исходя из этого, имеем

$$\delta S_D = \delta S_B = \delta\varphi_3 \cdot d_3 = (\delta S_A) \cdot b_1/d_1.$$

Точка E тела 3 получит возможное перемещение

$$\delta S_E = \delta\varphi_3 \cdot EK = \delta\varphi_3 \cdot b_3.$$

Выразим $\delta\mathbf{S}_E$ сначала в зависимости от $\delta\mathbf{S}_D$,а затем в зависимости от $\delta\mathbf{S}_A$:

$$\delta S_E = \delta S_D(b_3/d_3) = (\delta S_A) \cdot (b_1/d_1) \cdot (b_3/d_3) = \delta S_A(b_1 b_3/d_1 d_3).$$

Так как участок нити EL и груз 5 совершают поступательные движения, то имеем

$$\delta S_E = \delta S_L = \delta S_{C5} = \delta S_A(b_1\, b_3/d_1 d_3),$$

где $\delta\mathbf{S}_L$, $\delta\mathbf{S}_{C5}$ – соответственно возможные перемещение точки L, принадлежащей нити 4 и центру C_5 масс груза 5.

Запишем принцип возможных перемещений для рассматриваемой механической системы.

$$\Sigma F_i \cdot \delta S_i \cdot \cos(\mathbf{F}_i, \delta\mathbf{S}_i) = 0 = F \cdot \delta S_A \cdot \cos\alpha - G_5 \cdot \delta S_{C5} = 0.$$

Так как $\delta S_{C5} = \delta S_A(b_1 b_3/d_1 d_3)$, то получим

$$F \cdot \delta S_A \cdot \cos\alpha - G_5 \cdot \delta S_A(b_1\, b_3/d_1 d_3) = 0.$$

Решая последнее выражение, определим модуль силы **F**, при котором механическая система находится в равновесии.

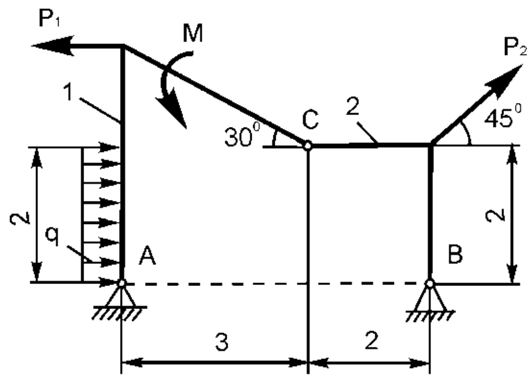
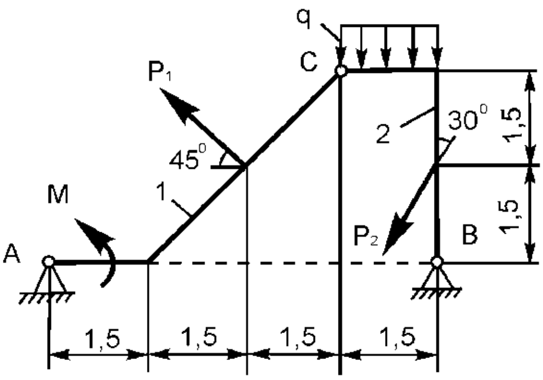
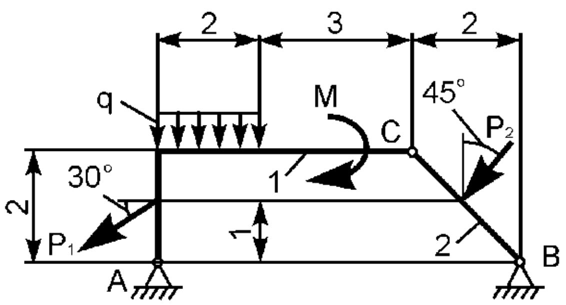
$$F = G_5(b_1 b_3/d_1 d_3)/\cos\alpha = 100(0{,}5 \cdot 0{,}4/1 \cdot 0{,}8)/0{,}866 = 28{,}866 \text{ H}.$$

Таким образом, ответ на вопрос (F = ?), поставленный в курсовом задании Д 6, получен.

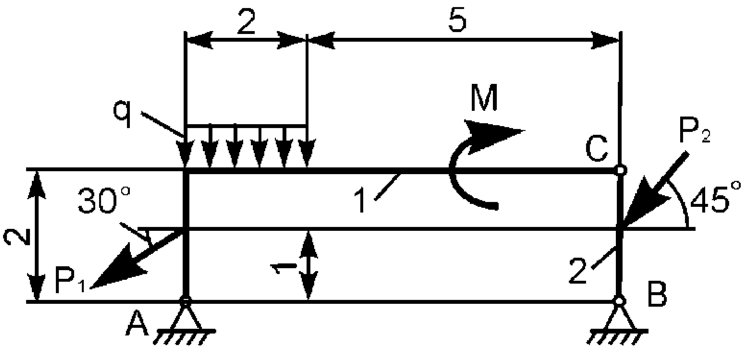
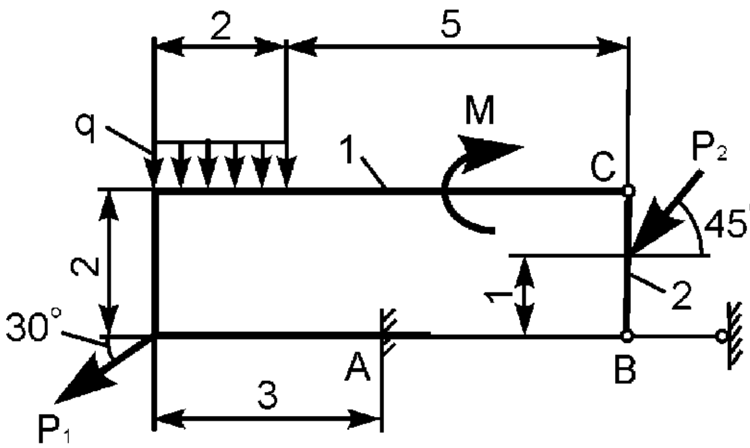
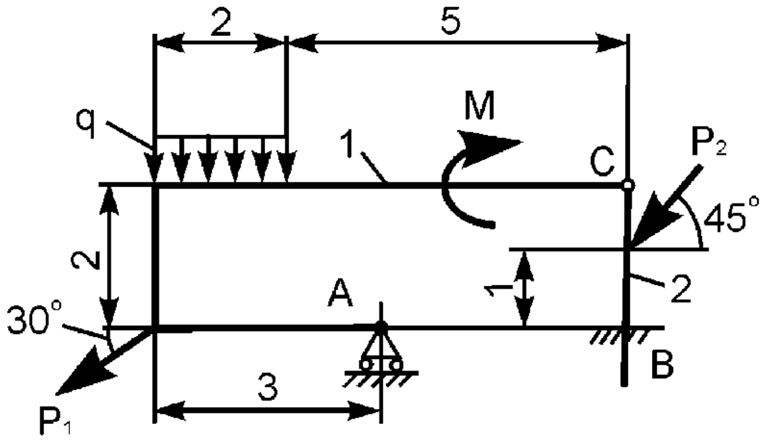
6.3.3. *Варианты курсового задания Д 7 «Применение принципа возможных перемещений к определению реакций опор составной конструкции»*

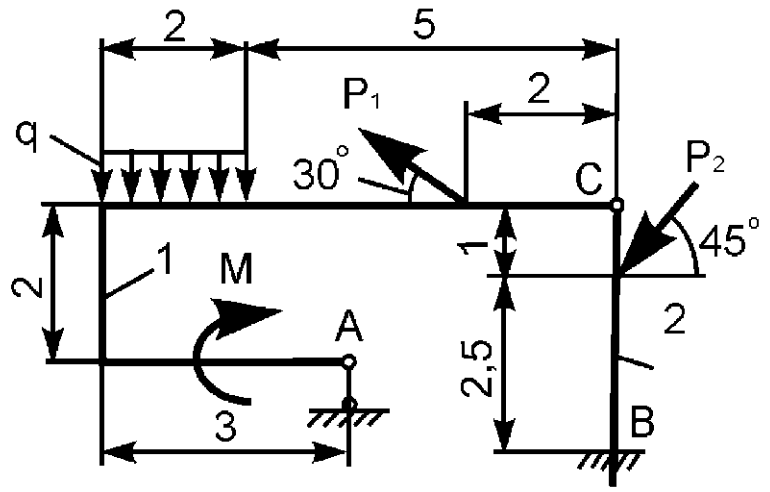
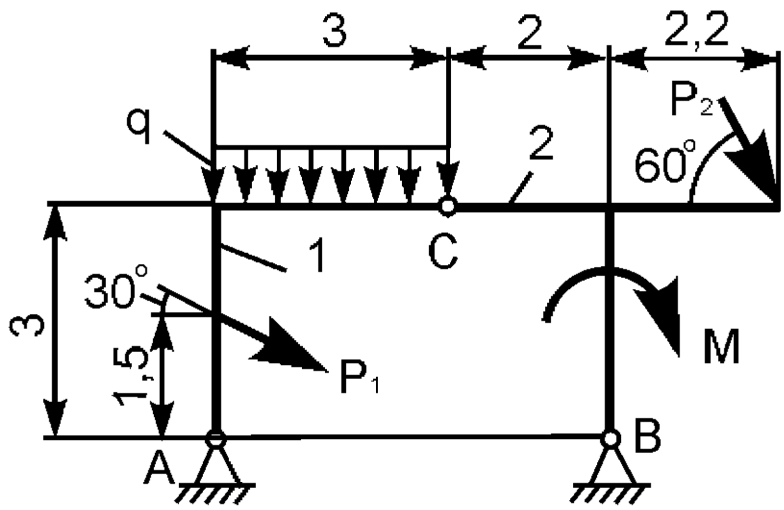
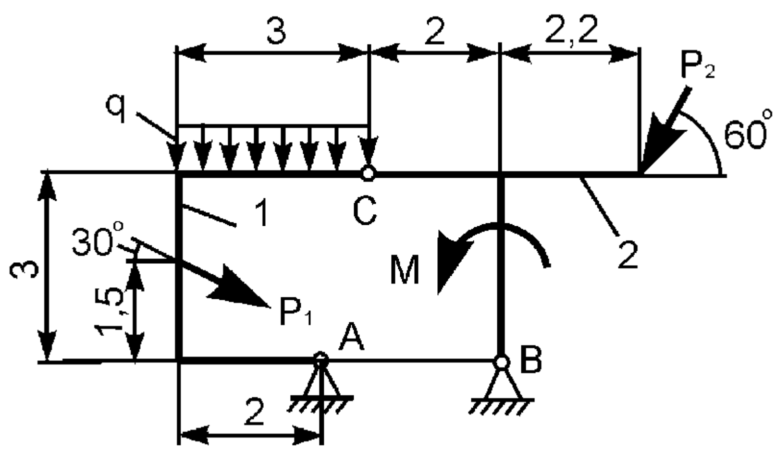
Применяя принцип возможных перемещений, определить реакции опор составной конструкции. Схемы конструкций и необходимые для решения данные приведены в табл. 5.5. На рисунках все размеры указаны в метрах.

Таблица 5.5

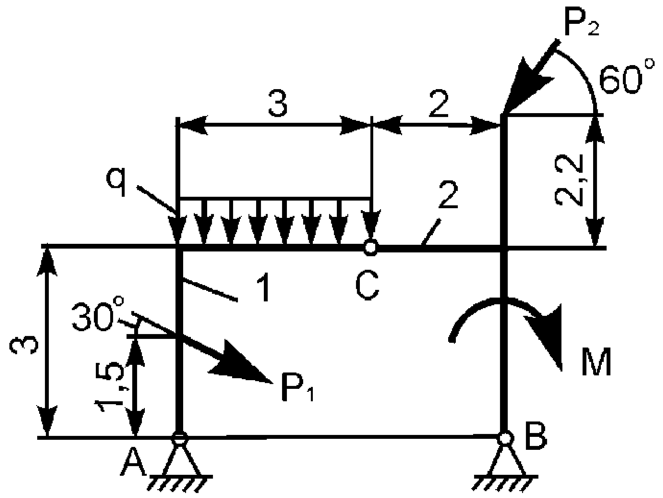
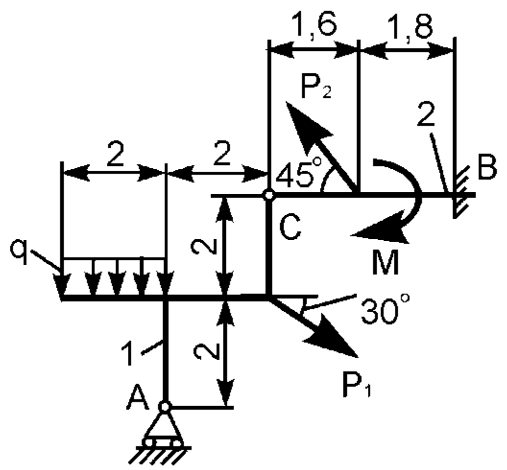
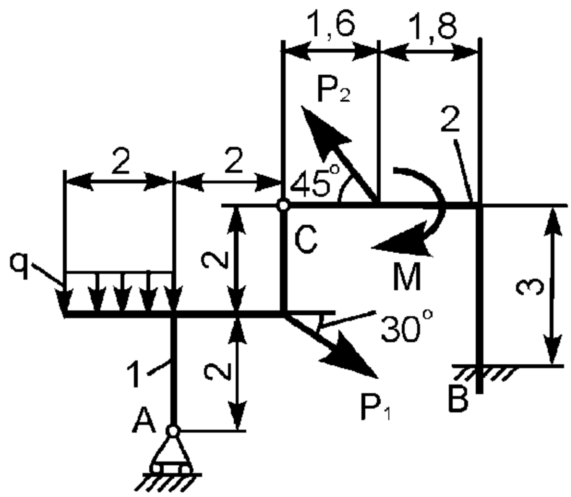
Номер варианта	Расчетная схема механизма	Исходные данные
1	2	3
1		P_1 = 10 кН; P_2 = 10 кН; M = 6 кН·м; q = 2 кН/м
2		P_1 = 6 кН; P_2 = 10 кН; M = 12 кН·м; q = 1 кН/м
3		P_1 = 8 кН; P_2 = 10 кН; M = 3 кН·м; q = 2 кН/м

Продолжение табл..5.5

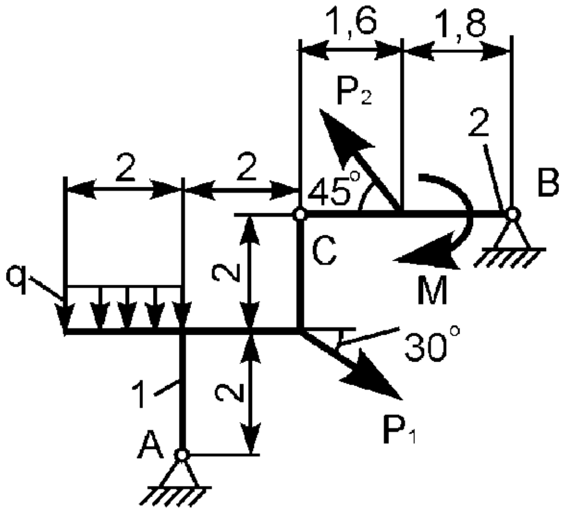
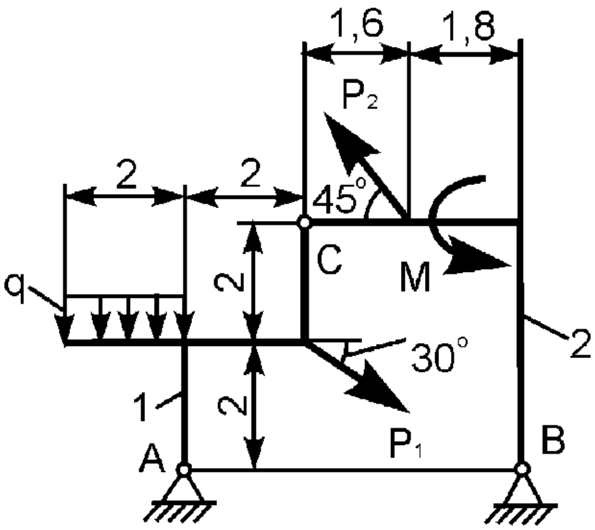
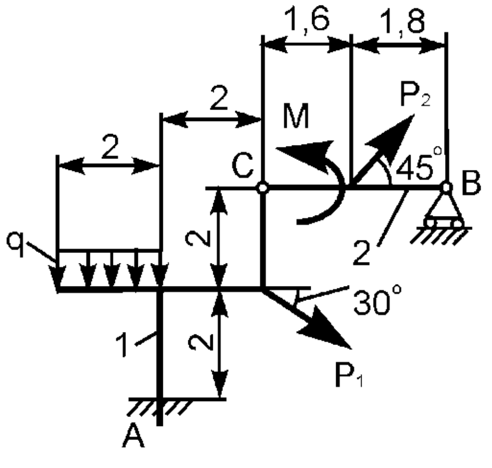
1	2	3
4		P_1 = 5 кН; P_2 = 12 кН; M = 4 кН·м; q = 2 кН/м
5		P_1 = 6 кН; P_2 = 8 кН; M = 3 кН·м; q = 2 кН/м
6		P_1 = 4 кН; P_2 = 6 кН; M = 10 кН·м; q = 2 кН/м

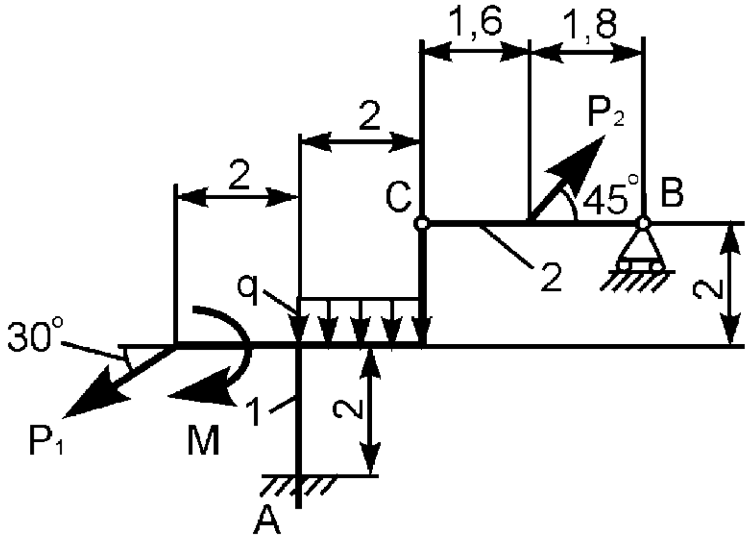
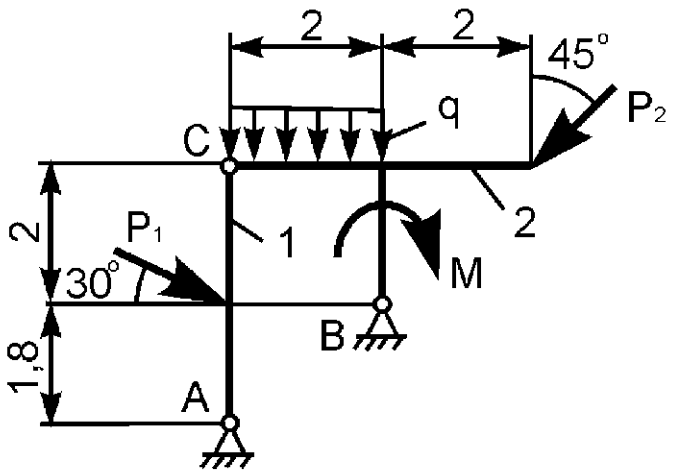
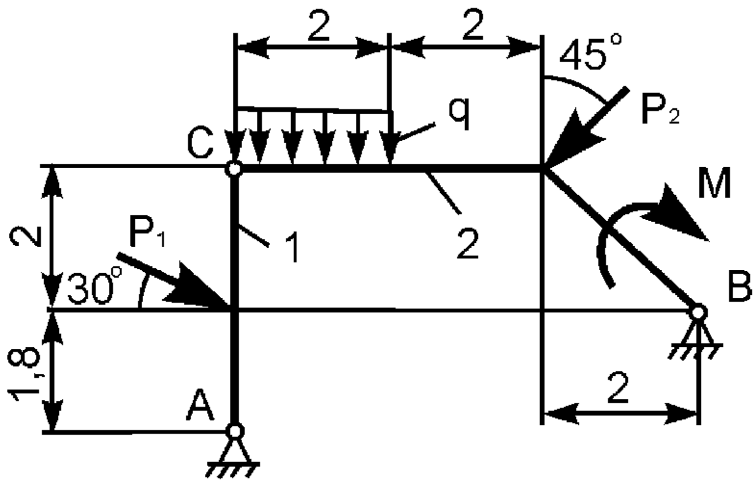
1	2	3
7		P_1 = 7 кН; P_2 = 8 кН; M = 15 кН·м; q = 2 кН/м
8		P_1 = 8 кН; P_2 = 8 кН; M = 16 кН·м; q = 2 кН/м
9		P_1 = 10 кН; P_2 = 10 кН; M = 6 кН·м; q = 2 кН/м

Продолжение табл..5.5

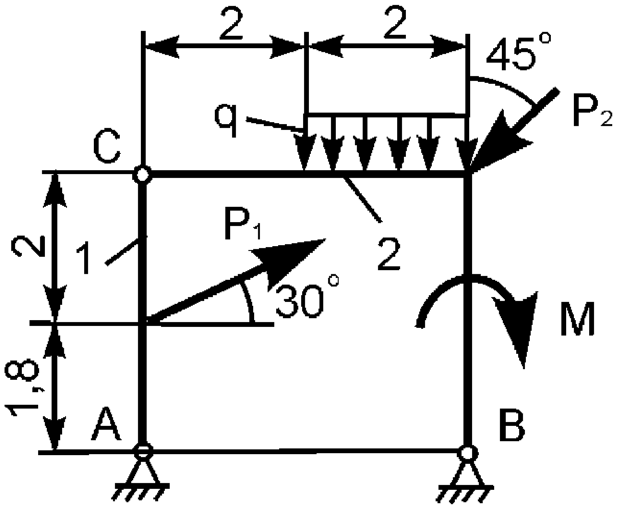
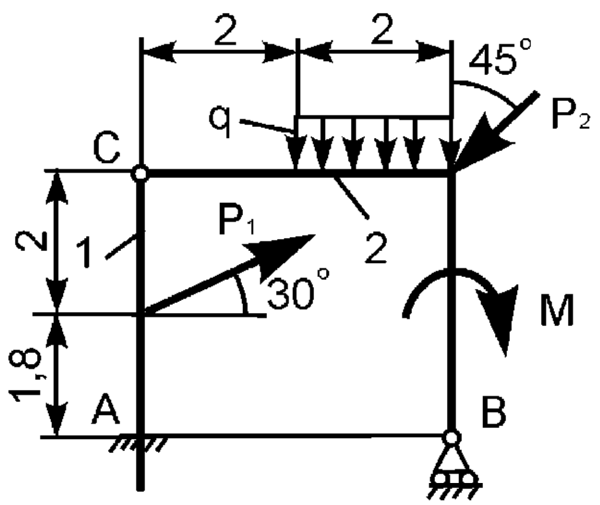
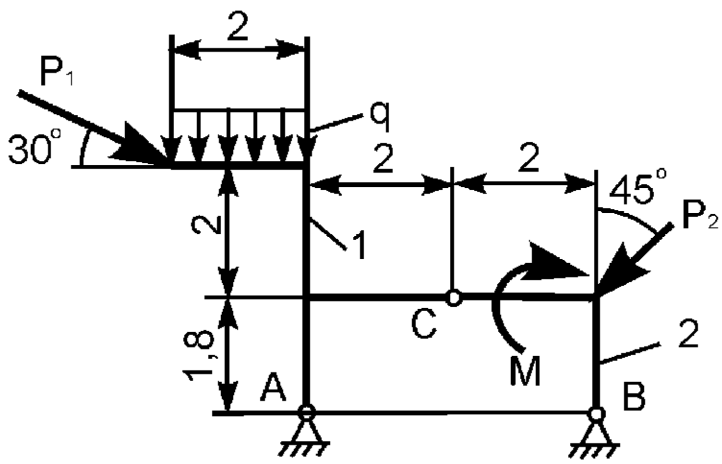
1	2	3
10		P_1 = 10 кН; P_2 = 3 кН; M = 9 кН·м; q = 2 кН/м
11		P_1 = 12 кН; P_2 = 5 кН; M = 6 кН·м; q = 1 кН/м
12		P_1 = 11 кН; P_2 = 3 кН; M = 8 кН·м; q = 4 кН/м

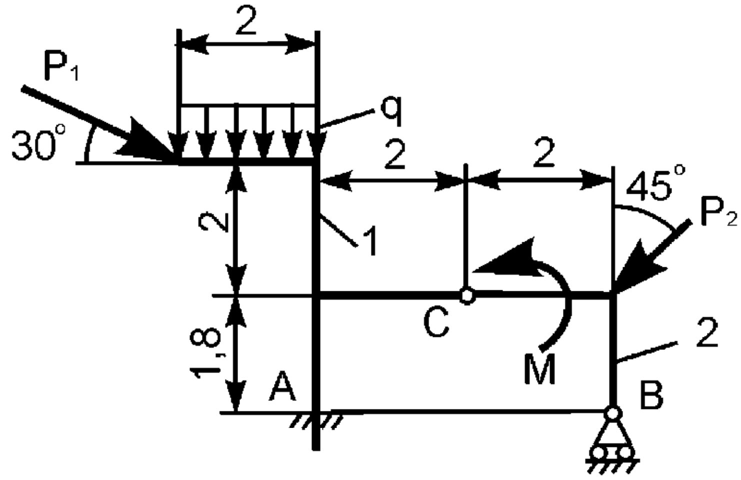
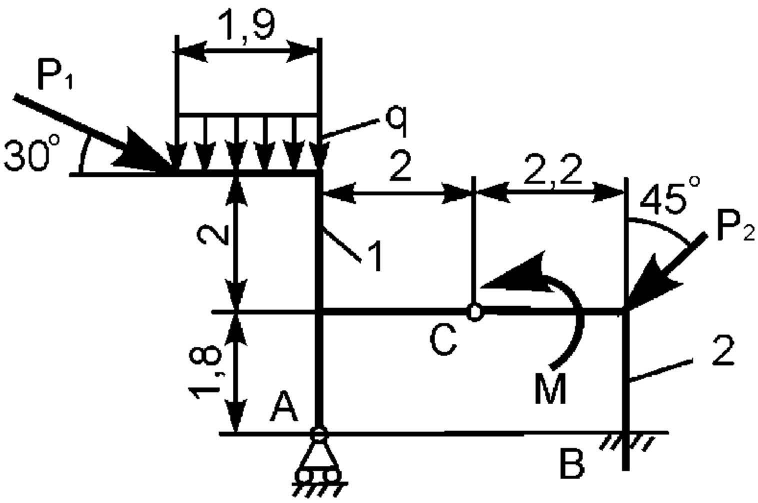
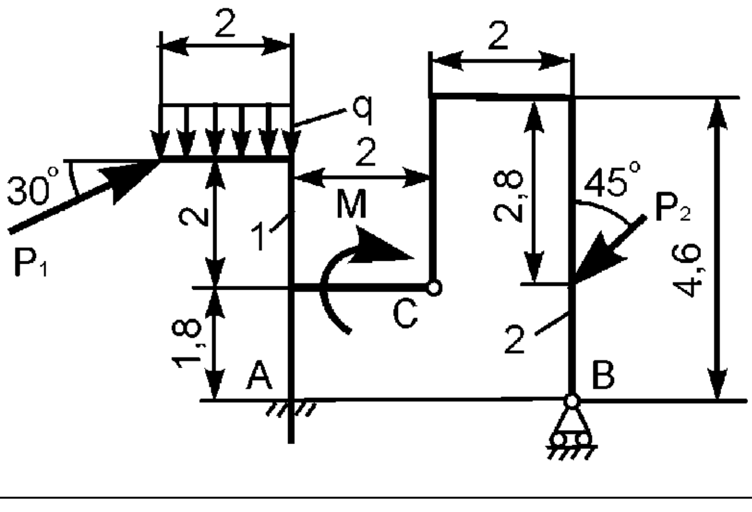
Продолжение табл..5.5

1	2	3
13		P_1 = 10 кН; P_2 = 12 кН; M = 8 кН·м; q = 2 кН/м
14		P_1 = 10 кН; P_2 = 2 кН; M = 12 кН·м; q = 2 кН/м
15		P_1 = 15 кН; P_2 = 10 кН; M = 5 кН·м; q = 2 кН/м

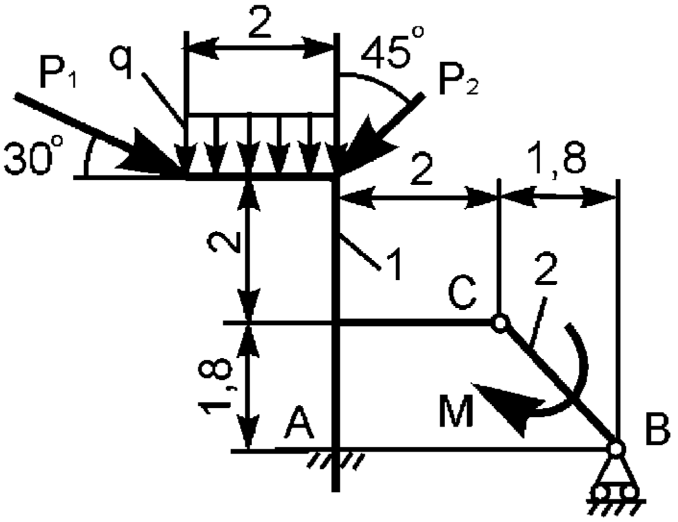
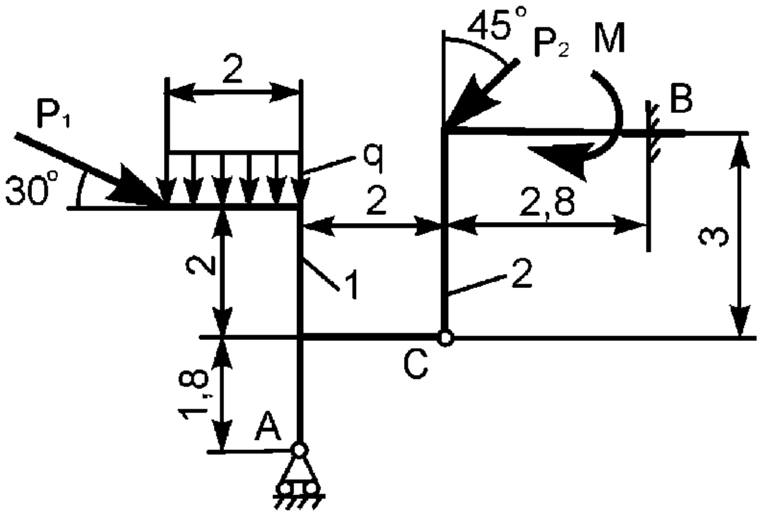
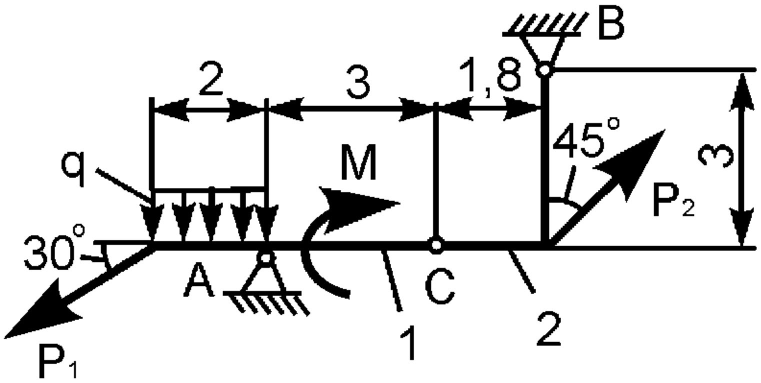
1	2	3
16		P_1 = 16 кН; P_2 = 10 кН; M = 4 кН·м; q = 1 кН/м
17		P_1 = 17 кН; P_2 = 3 кН; M = 6 кН·м; q = 6 кН/м
18		P_1 = 18 кН; P_2 = 9 кН; M = 4 кН·м; q = 8 кН/м

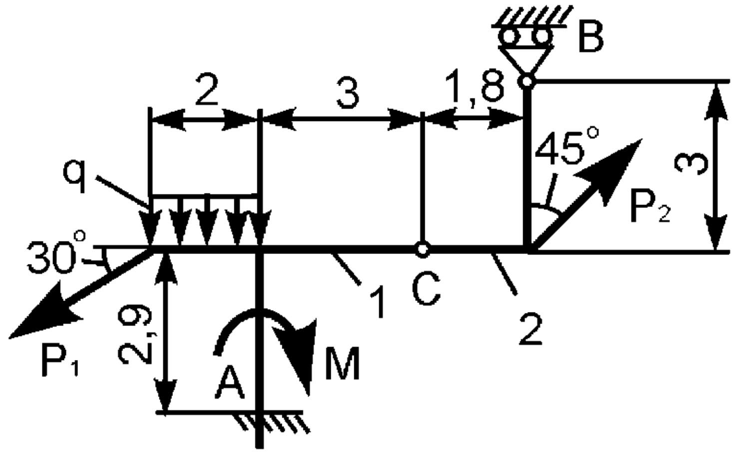
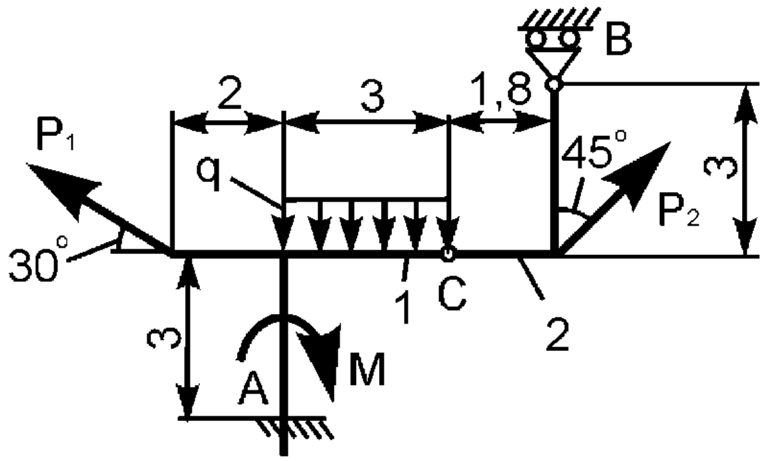
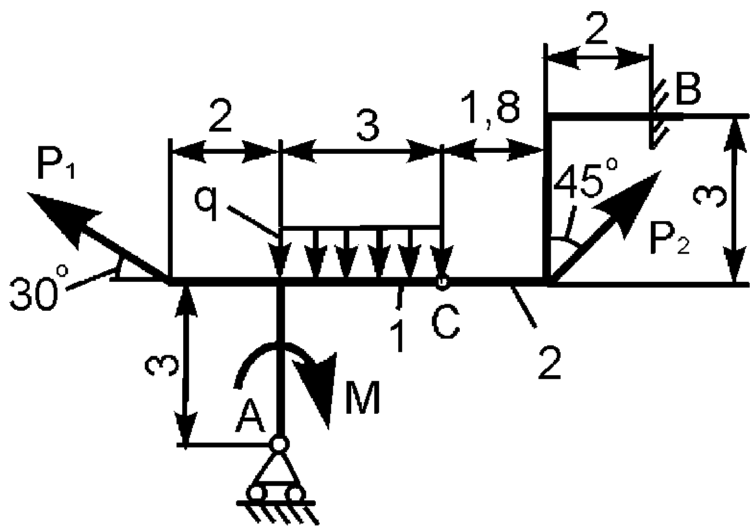
Продолжение табл..5.5

1	2	3
19		P_1 = 19 кН; P_2 = 7 кН; M = 12 кН·м; q = 2 кН/м
20		P_1 = 20 кН; P_2 = 12 кН; M = 8 кН·м; q = 4 кН/м
21		P_1 = 21 кН; P_2 = 10 кН; M = 12 кН·м; q = 6 кН/м

1	2	3
22		P_1 = 22 кН; P_2 = 12 кН; M = 10 кН·м; q = 5 кН/м
23		P_1 = 23 кН; P_2 = 9 кН; M = 5 кН·м; q = 8 кН/м
24		P_1 = 24 кН; P_2 = 10 кН; M = 12 кН·м; q = 2 кН/м

Продолжение табл..5.5

1	2	3
25		P_1 = 25 кН; P_2 = 10 кН; M = 8 кН·м; q = 2 кН/м
26		P_1 = 26 кН; P_2 = 16 кН; M = 6 кН·м; q = 6 кН/м
27		P_1 = 27 кН; P_2 = 10 кН; M = 4 кН·м; q = 3 кН/м

1	2	3
28		P_1 = 28 кН; P_2 = 18 кН; M = 8 кН·м; q = 2 кН/м
29		P_1 = 28 кН; P_2 = 20 кН; M = 6 кН·м; q = 2 кН/м
30		P_1 = 30 кН; P_2 = 20 кН; M = 6 кН·м; q = 1 кН/м

6.3.4. Пример выполнения курсового задания Д 7

Дано: конструкция, состоящая из двух тел, находится в равновесии под действием следующих нагрузок: P_1 = 2 кН; P_2 = 4 кН; M = 6 кН·м; q = 1 кН/м (рис. 6.18).

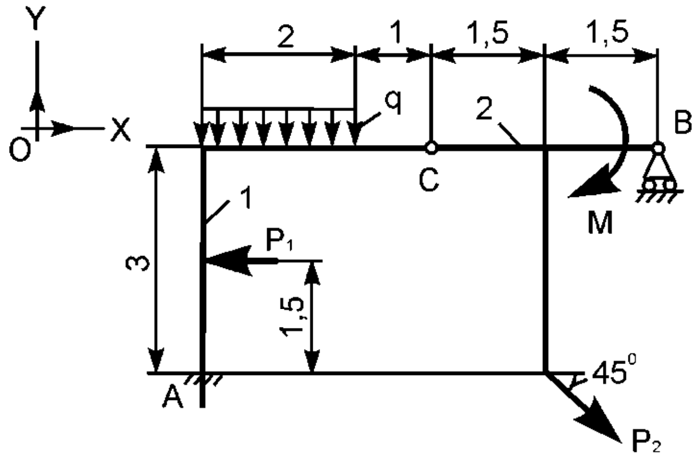


Рис. 6.18

Применяя принцип возможных перемещений, определить реакции опор составной конструкции.

Решение.

Заменим равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q сосредоточенной силой Q = q·2 = 1·2 = 2 кН, приложенной в середине загруженного участка тела 1 (рис. 6.19).

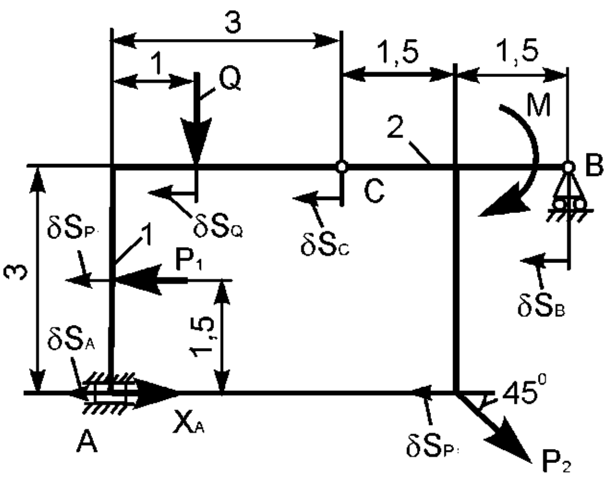


Рис. 6.19

Поскольку связи, наложенные на рассматриваемую механическую систему, являются идеальными, то для решения поставленной задачи правомерно применение принципа возможных перемещений.

Найдем горизонтальную составляющую $\mathbf{X}_A$ реакции в жесткой заделке.

Согласно известным положениям статики жесткая заделка накладывает три ограничения на перемещения тела в плоскости XOY (поступательные движения параллельно координатным осям и поворот в этой плоскости). Снимем ограничение на перемещение тела 1 только параллельно оси OX, сохраняя другие ограничения, и покажем на рисунке реакцию $\mathbf{X}_A$. В результате этих действий реакция $\mathbf{X}_A$ переходит в разряд активных сил, а жесткая заделка в точке A (см. рис. 6.18) заменяется кулисным камнем, к которому жестко закреплено тело 1 составной конструкции. При такой замене составная конструкция становится подвижной.

Зададим возможное перемещение $\delta\mathbf{S}_A$ точке A тела 1. Так как тело 1 может совершать только поступательное движение, то возможные перемещения всех точек этого тела геометрически равны:

$$\delta\mathbf{S}_A = \delta\mathbf{S}_{P_1} = \delta\mathbf{S}_Q = \delta\mathbf{S}_C,$$

где $\delta\mathbf{S}_{P_1}$ – возможное перемещение точки приложения силы $\mathbf{P}_1$; $\delta\mathbf{S}_Q$ – возможное перемещение точки приложения силы $\mathbf{Q}$; $\delta\mathbf{S}_C$ – возможное перемещение точки C.

Так как точка C принадлежит и телу 2, то оно тоже будет подвижным. Для того, чтобы связь в точке B не разрушилась, эта точка получит возможное перемещение $\delta\mathbf{S}_B$, параллельное опорной поверхности шарнирно-подвижной опоры. Поскольку возможные перемещения $\delta\mathbf{S}_C$, $\delta\mathbf{S}_B$ точек C и B тела 2 параллельны, то тело 2 совершает поступательное движение. Исходя из этого, имеем следующее равенство:

$$\delta\mathbf{S}_C = \delta\mathbf{S}_B = \delta\mathbf{S}_{P_2},$$

где $\delta\mathbf{S}_{P_2}$ – возможное перемещение точки приложения силы P_2.

Таким образом, возможные перемещения всех точек тел 1 и 2 геометрически равны:

$$\delta\mathbf{S}_A = \delta\mathbf{S}_{P_1} = \delta\mathbf{S}_Q = \delta\mathbf{S}_C = \delta\mathbf{S}_B = \delta\mathbf{S}_{P_2}.$$

Запишем уравнение, выражающее принцип возможных перемещений для рассматриваемого случая.

$$\sum F_i \cdot \delta S_i \cdot \cos(\mathbf{F}_i,\ \delta\mathbf{S}_i) = 0 = -\,X_A \cdot \delta S_A + P_1 \cdot \delta S_{P_1} - P_2 \cdot \cos 45^\circ \cdot \delta S_{P_2} = 0. \quad (1)$$

Поскольку $\delta S_A = \delta S_{P_1} = \delta S_{P_2}$, то выражение (1) можно записать в следующем виде:

$$-\,X_A \cdot \delta S_A + P_1 \cdot \delta S_A - P_2 \cdot \cos 45^\circ \cdot \delta S_A = 0.$$

Решая последнее выражение относительно X_A, получим

$$X_A = P_1 - P_2 \cdot \cos 45^\circ = 2 - 4 \cdot 0{,}707 = -\,0{,}828 \text{ кН}.$$

Найдем горизонтальную составляющую Y_A реакции в жесткой заделке.

Согласно известным положениям статики жесткая заделка накладывает три ограничения на перемещения тела в плоскости XOY (поступательные движения параллельно координатным осям и поворот в этой плоскости). Снимем ограничение на перемещение тела 1 только параллельно оси OY, сохраняя другие ограничения, и покажем на рисунке реакцию Y_A. В результате этих действий реакция Y_A переходит в разряд активных сил, а жесткая заделка в точке A (рис. 6.20) заменяется кулисным камнем, к которому жестко закреплено тело 1 составной конструкции. При такой замене составная конструкция становится подвижной.

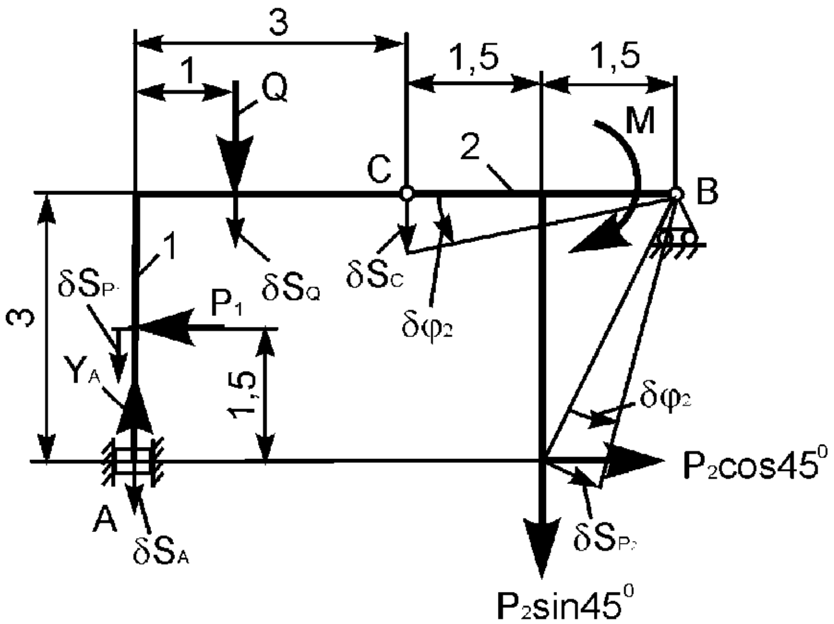


Рис. 6.20

Зададим возможное перемещение $\delta\mathbf{S}_A$ точке A тела 1. Так как тело 1 может совершать только поступательное движение, то возможные перемещения всех точек этого тела геометрически равны:

$$\delta\mathbf{S}_A = \delta\mathbf{S}_{P_1} = \delta\mathbf{S}_Q = \delta\mathbf{S}_C,$$

где $\delta\mathbf{S}_{P_1}$ – возможное перемещение точки приложения силы P_1; $\delta\mathbf{S}_Q$ – возможное перемещение точки приложения силы Q; $\delta\mathbf{S}_C$ – возможное перемещение точки C.

Так как точка C принадлежит и телу 2, то оно тоже будет подвижным. Для того, чтобы связь в точке B не разрушилась, эта точка должна получить возможное перемещение $\delta\mathbf{S}_B$, параллельное опорной поверхности шарнирно-подвижной опоры. Поскольку возможные перемещения $\delta\mathbf{S}_C$, $\delta\mathbf{S}_B$ точек С и В тела 2 не параллельны, то тело 2 совершает плоскопараллельное движение. Очевидно, что мгновенный центр поворота тела 2 находится в точке В. Относительно оси, проходящей через точку В и перпендикулярную плоскости рис. 6.20, тело 2 повернется на угол $\delta\varphi_2$. Исходя из этого, имеем следующее равенство:

$$\delta S_C = CB\cdot\delta\varphi_2 = 3\cdot\delta\varphi_2.$$

Следует заметить, что возможные перемещения $\delta\mathbf{S}_C$, $\delta\mathbf{S}_{P_2}$ точки С и точки приложения силы $\mathbf{P}_2$ перпендикулярны отрезкам, соединяющим эти точки с мгновенным центром поворота тела 2.

Принцип возможных перемещений выражается формулой

$$\sum F_i\cdot\delta S_i\cdot\cos(\mathbf{F}_i, \delta\mathbf{S}_i) = 0.$$

Так как величину угла между направлениями активной силы $\mathbf{P}_2$ и возможным перемещением $\delta\mathbf{S}_{P_2}$ точки приложения этой силы определять достаточно затруднительно, то элементарную работу приложенных к телу 2 сил определим через работу моментов сил относительно его мгновенного центра поворота, который находится в точке В. С этой целью силу $\mathbf{P}_2$ разложим на составляющие силы: $P_2\sin45^\circ$ и $P_2\cos 45^\circ$.

Запишем уравнение, выражающее принцип возможных перемещений:

$$-Y_A\cdot\delta S_A + Q\cdot\delta S_Q + P_2\sin 45^\circ\cdot 1{,}5\cdot\delta\varphi_2 + $$
$$+ P_2\cos45^\circ\cdot 3\cdot\delta\varphi_2 - M\cdot\delta\varphi_2 = 0. \qquad (2)$$

Так как $\delta S_A = \delta S_Q = 3\cdot\delta\varphi_2$, то выражение (2) можно преобразовать к следующему виду:

$$-Y_A\cdot 3\cdot\delta\varphi_2 + Q\cdot 3\cdot\delta\varphi_2 + P_2\sin 45^\circ\cdot 1{,}5\cdot\delta\varphi_2 + $$
$$+ P_2\cos45^\circ\cdot 3\cdot\delta\varphi_2 - M\cdot\delta\varphi_2 = 0.$$

Решая последнее выражение относительно Y_A, получим

$$Y_A = Q\ 1 + P_2\sin 45^\circ\cdot 0{,}5 + P_2\cos45^\circ\cdot 1 - M/3 =$$
$$= 2 + 4\cdot 0{,}707\cdot 0{,}5 + 4\cdot 0{,}707\cdot 1 - 6/3 = 4{,}242\ \text{кН}.$$

Найдем реактивный момент M_A в жесткой заделке.

Жесткая заделка накладывает три ограничения на перемещения тела в плоскости XOY (поступательные движения параллельно координатным осям и поворот в этой плоскости). Снимем ограничение на поворот тела 1 в плоскости XOY, сохраняя другие ограничения, и покажем на рисунке реактивный момент M_A. В результате этих действий реакция M_A переходит в разряд активных нагрузок, а жесткая заделка в точке А (рис. 6.21) заменяется шарнирно-неподвижной опорой. При такой замене составная конструкция становится подвижной. Тело 1 может совершать вращательное движение относительно оси, проходящей через точку А. Зададим телу 1 возможное угловое перемещение $\delta\varphi_1$. Тогда точки приложения активных сил P_1, Q и точка C получат возможные перемещения $\delta\mathbf{S}_{P_1}$, $\delta\mathbf{S}_Q$, $\delta\mathbf{S}_C$.

$$\delta S_{P_1} = 1{,}5\cdot\delta\varphi_1;\quad \delta S_Q = (\sqrt{3^2+1^2})\cdot\delta\varphi_1;\quad \delta S_C = CA\cdot\delta\varphi_1.$$

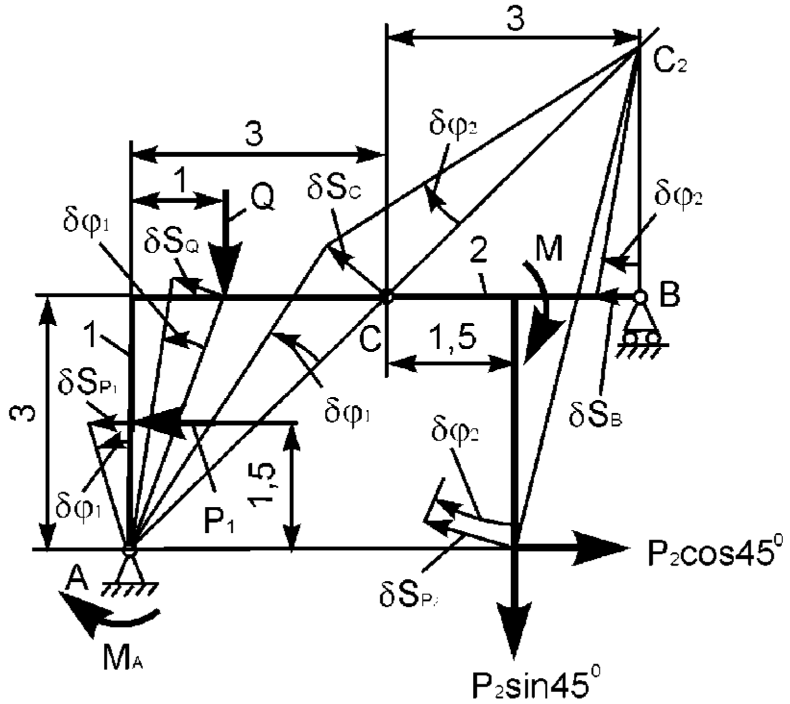


Рис. 6.21

Следует отметить, что возможное перемещение $\delta\mathbf{S}_C$ перпендикулярно отрезку, соединяющему точку C с осью вращения тела 1, проходящей через точку A.

Так как точка C принадлежит и телу 2, то оно тоже будет подвижным. Для того, чтобы связь в точке B не разрушилась, эта точка должна получить возможное перемещение $\delta\mathbf{S}_B$, параллельное опорной поверхности шарнирно-подвижной опоры. Поскольку возможные перемещения $\delta\mathbf{S}_C$, $\delta\mathbf{S}_B$ точек C и B тела 2 не параллельны, то тело 2 совершает плоскопараллельное движение. Очевидно, что мгновенный центр поворота тела 2 находится в точке C_2. Относительно оси, проходящей через точку C_2 и перпендикулярную плоскости рис. 6.21, тело 2 повернется на угол $\delta\varphi_2$. Исходя из этого, имеем следующее равенство:

$$\delta S_C = CC_2\cdot\delta\varphi_2.$$

Так как точка C принадлежит и телу 1, и телу 2, то справедливо равенство

$$\delta S_C = CA\cdot\delta\varphi_1 = CC_2\cdot\delta\varphi_2.$$

Из рис. 6.21 нетрудно установить, что CA = CC_2. Отсюда имеем

$$\delta\varphi_1 = \delta\varphi_2.$$

Возможные перемещения $\delta\mathbf{S}_C$, $\delta\mathbf{S}_{P_2}$ точки C и точки приложения силы $\mathbf{P}_2$ перпендикулярны отрезкам, соединяющим эти точки с мгновенным центром поворота тела 2.

В общем случае принцип возможных перемещений выражается формулой

$$\sum F_i \cdot \delta S_i \cdot \cos(\mathbf{F}_i, \delta\mathbf{S}_i) = 0.$$

Так как величину угла между направлениями активной силы $\mathbf{P}_2$ и возможным перемещением $\delta\mathbf{S}_{P_2}$ точки приложения этой силы определять достаточно затруднительно, то элементарную работу приложенных к телу 2 сил определим через работу моментов сил относительно его мгновенного центра поворота, который находится в точке C_2. Как и ранее (см. рис. 6.20), силу $\mathbf{P}_2$ разложим на составляющие силы: $P_2\sin45^\circ$ и $P_2\cos 45^\circ$, параллельные координатным осям.

Запишем уравнение, выражающее принцип возможных перемещений.

$$– M_A \cdot \delta\varphi_1 + P_1 \cdot 1{,}5 \cdot \delta\varphi_1 – Q \cdot 1 \cdot \delta\varphi_1 –$$
$$– P_2\sin45^\circ \cdot 1{,}5 \cdot \delta\varphi_2 – P_2\cos45^\circ \cdot 6 \cdot \delta\varphi_2 + M \cdot \delta\varphi_2 = 0. \quad (3)$$

Поскольку $\delta\varphi_1 = \delta\varphi_2$, то выражение (3) можно преобразовать к виду

$$– M_A \cdot \delta\varphi_1 + P_1 \cdot 1{,}5 \cdot \delta\varphi_1 – Q \cdot 1 \cdot \delta\varphi_1 –$$
$$– P_2\sin45^\circ \cdot 1{,}5 \cdot \delta\varphi_1 – P_2\cos45^\circ \cdot 6 \cdot \delta\varphi_1 + M \cdot \delta\varphi_1 = 0.$$

Решая это уравнение относительно M_A, получим

$$M_A = + P_1 \cdot 1{,}5 – Q \cdot 1 – P_2\sin45^\circ \cdot 1{,}5 – P_2\cos45^\circ \cdot 6 + M =$$
$$= 2 \cdot 1{,}5 – 2 \cdot 1 – 4 \cdot 0{,}707 \cdot 1{,}5 – 4 \cdot 0.707 \cdot 6 + 6 = – 14{,}210 \text{ кН·м}.$$

Определим реакцию $\mathbf{R}_B$.

Шарнирно-подвижная опора в точке B накладывает только одно ограничение на перемещение тела 2 в пространстве. Снимем это ограничение на поступательное движение тела, параллельное оси OY, и покажем на рис. 6.22 реакцию $\mathbf{R}_B$. Так как тело 1 неподвижно, то возможным перемещением тела 2 является его поворот относи-

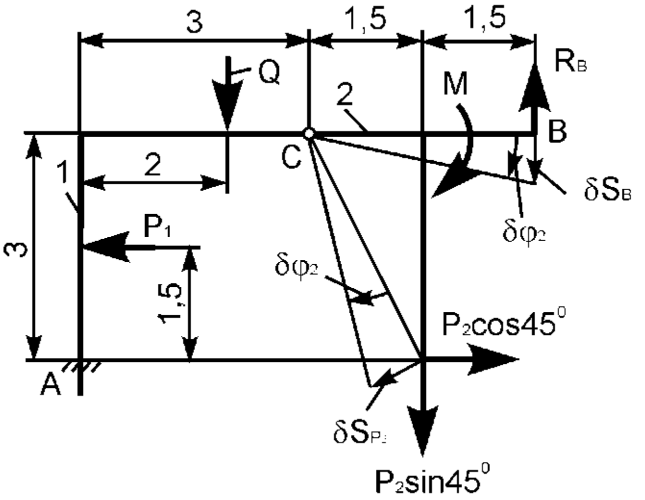


Рис. 6.22

тельно оси, проходящей через точку C на угол $\delta\varphi_2$.

На рис. 6.22 показаны возможные перемещения $\delta\mathbf{S}_B$, $\delta\mathbf{S}_{P_2}$ точек приложения сил $\mathbf{R}_B$ и $\mathbf{P}_2$.

Составим уравнение, выражающее принцип возможных перемещений, при этом учтем, что работа силы при повороте тела равна произведению момента силы относительно мгновенного центра поворота на угол поворота тела.

$$P_2\sin 45^\circ\cdot 1{,}5\cdot\delta\varphi_2 - P_2\cos 45^\circ\cdot 3\cdot\delta\varphi_2 + M\cdot\delta\varphi_2 - R_B\cdot\delta S_B = 0. \quad (4)$$

Так как $\delta S_B = 3\cdot\delta\varphi_2$, то выражение (4) приводится к виду

$$P_2\sin 45^\circ\cdot 1{,}5\cdot\delta\varphi_2 - P_2\cos 45^\circ\cdot 3\cdot\delta\varphi_2 + M\cdot\delta\varphi_2 - R_B\cdot 3\cdot\delta\varphi_2 = 0.$$

Решая последнее выражение относительно R_B, получим

$$R_B = P_2\sin 45^\circ\cdot 0{,}5 - P_2\cos 45^\circ\cdot 1 + M/3 =$$
$$= 4\cdot 0{,}707\cdot 0{,}5 - 4\cdot 0{,}707\cdot 1 + 6/3 = 0{,}586 \text{ кН}.$$

Проведем проверку полученных результатов расчета. Для этого рассмотрим равновесие составной конструкции под действием активных нагрузок $\mathbf{P}_1$; $\mathbf{P}_2$, M, $\mathbf{Q}$ и реакций внешних связей $\mathbf{X}_A$, $\mathbf{Y}_A$, M_A, $\mathbf{R}_B$ (рис. 6.23).

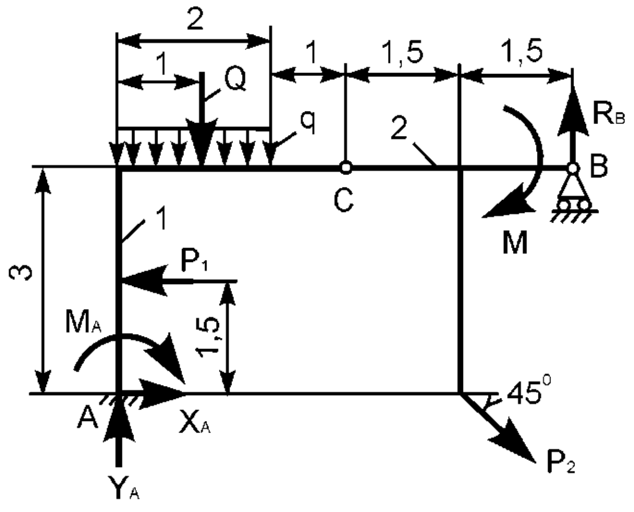


Рис. 6.23

Запишем уравнения равновесия для плоской произвольной системы сил и подставим в них определенные значения реакций внешних связей.

$$\Sigma F_{iox} = 0 = X_A - P_1 + P_2\cos 45^\circ =$$
$$= -0{,}828 - 2 + 4\cdot 0{,}707 = -2{,}828 + 2{,}828 = 0;$$
$$\Sigma F_{ioy} = 0 = Y_A - P_2\sin 45^\circ + R_B =$$
$$= 4{,}242 - 2 - 4\cdot + 0{,}586 = 4{,}828 - 4{,}828 = 0;$$
$$\Sigma M_{iA} = 0 = -M_A + P_1\cdot 1{,}5 - Q\cdot 1 - P_2\sin 45^\circ\cdot 4{,}5 - M + R_B\cdot 6 =$$
$$= -(-14{,}210) + 2\cdot 1{,}5 - 2\cdot 1 - 4\cdot 0{,}707\cdot 4{,}5 - 6 + 0{,}586\cdot 6 =$$

$$= 20{,}728 - 20{,}\ 728 = 0.$$

Проверка подтвердила правильность расчетов.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулировать определение понятия «***обобщенные координаты механической системы***».
2. Что изучает ***аналитическая механика***?
3. Сформулировать определение понятия «***возможные перемещения несвободной механической системы***».
4. Сформулировать определение понятия «***связи***».
5. Сформулировать определение понятия «***геометрические связи***».
6. Сформулировать определение понятия «***стационарные связи***».
7. Сформулировать определение понятия «***уравнения связей***».
8. Сформулировать определение понятия «***дифференциальные связи***».
9. Сформулировать определение понятия «***голономные связи***».
10. Сформулировать определение понятия «***неголономные связи***».
11. Сформулировать определение понятия «***нестационарные связи***».
12. Сформулировать определение понятия «***двусторонние (удерживающие) связи***».
13. Сформулировать определение понятия «***односторонние (неудерживающие) связи***».
14. Сформулировать определение понятия «***голономная система***».
15. Сформулировать определение понятия «***неголономная система***».
16. Сформулировать определение понятия «***возможное перемещение системы***».
17. Сформулировать определение понятия «***возможная (элементарная) работа силы***».
18. Записать формулу для определения ***возможной работы силы***.
19. Записать формулу для определения ***возможной работы сил***, приложенных к механической системе.
20. Сформулировать определение понятия «***идеальные связи***».
21. Сформулировать ***принцип возможных перемещений***.

22. Записать формулу, выражающую ***принцип возможных перемещений***, в векторной форме.
23. Записать формулу, выражающую ***принцип возможных перемещений***, в координатной форме.
24. Записать формулу, выражающую ***принцип возможных скоростей (принцип возможных мощностей)***.

6.4. Общее уравнение динамики

6.4.1. Общее уравнение динамики механической системы

Принцип возможных перемещений, дающий общий метод решения задач статики, можно применить и к решению задач динамики, если его дополнить принципом Даламбера.

Рассмотрим движение несвободной неизменяемой механической системы, на которую наложены идеальные связи, в инерциальной системе отсчета OXYZ (рис. 6.24).

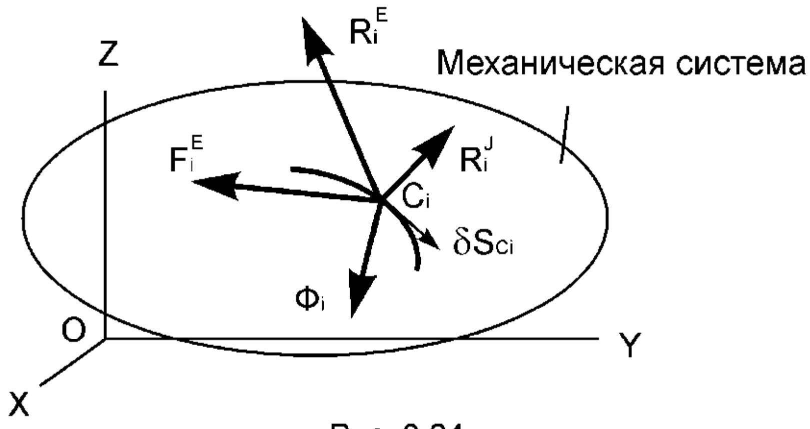


Рис. 6.24

Согласно принципу Даламбера i-я точка механической системы совершает движение под действием активной силы $\mathbf{F}_i^E$, реакции $\mathbf{R}_i^E$ внешней связи, реакции $\mathbf{R}_i^J$ внутренней связи и силы инерции $\mathbf{\Phi}_i$. Этот принцип выражается формулой

$$\mathbf{F}_i^E + \mathbf{R}_i^E + \mathbf{R}_i^J + \mathbf{\Phi}_i = 0.$$

Пусть точка C_i механической системы получит возможное перемещение $\delta\mathbf{S}_{ci}$. Очевидно, что элементарная работа δA сил, приложенных к точке, равна нулю.

$$\delta A = (\mathbf{F}_i^E + \mathbf{R}_i^E + \mathbf{R}_i^J + \mathbf{\Phi}_i)\delta\mathbf{S}_{ci} = 0.$$

Просуммируем последние выражения и получим

$$\Sigma \mathbf{F}_i^E \cdot \delta \mathbf{S}_{ci} + \Sigma \mathbf{R}_i^E \cdot \delta \mathbf{S}_{ci} + \Sigma \mathbf{R}_i^J \cdot \delta \mathbf{S}_{ci} + \Sigma \mathbf{\Phi}_i \cdot \delta \mathbf{S}_{ci} = 0.$$

Для движущейся механической системы сумма работ активных сил, реакций внешних связей, внутренних сил и сил инерции, приложенных к ее точкам, на любых возможных перемещениях этой системы равна нулю.

Поскольку на механическую систему наложены идеальные связи, то сумма работ реакций этих связей равна нулю.

$$\Sigma \mathbf{R}_i^E \cdot \delta \mathbf{S}_{ci} = 0.$$

Так как рассматривается неизменяемая механическая система, то сумма работ реакций внутренних связей также равна нулю.

$$\Sigma \mathbf{R}_i^J \cdot \delta \mathbf{S}_{ci} = 0.$$

Исходя из того, что $\Sigma \mathbf{R}_i^E \cdot \delta \mathbf{S}_{ci} = 0$ и $\Sigma \mathbf{R}_i^J \cdot \delta \mathbf{S}_{ci} = 0$, получим

$$\Sigma \mathbf{F}_i^E \cdot \delta \mathbf{S}_{ci} + \Sigma \mathbf{\Phi}_i \cdot \delta \mathbf{S}_{ci} = 0.$$

Последнее уравнение называют ***общим уравнением динамики***.

В любой момент времени работа активных сил и сил инерции материальных точек несвободной механической системы с идеальными связями на ее любом возможном перемещении равна нулю.

Общее уравнение динамики ($\Sigma \mathbf{F}_i^E \cdot \delta \mathbf{S}_{ci} + \Sigma \mathbf{\Phi}_i \cdot \delta \mathbf{S}_{ci} = 0$) можно преобразовать к следующим видам:

$$\Sigma(\mathbf{F}_i^E + \Sigma \mathbf{\Phi}_i)\delta \mathbf{S}_{ci} = 0;$$

$$\Sigma F_i^E \cdot \delta S_{ci} \cdot \cos(\mathbf{F}_i^E, \delta \mathbf{S}_{ci}) + \Sigma \Phi_i \cdot \delta S_{ci} \cdot \cos(\mathbf{\Phi}_i, \delta \mathbf{S}_{ci}) = 0;$$

$$\Sigma(F_{iox}^E \cdot \delta S_{iox} + F_{ioy}^E \cdot \delta S_{ioy} + F_{ioz}^E \cdot \delta S_{ioz}) +$$
$$+ \Sigma(\Phi_{iox} \cdot \delta S_{iox} + \Phi_{ioy} \cdot \delta S_{ioy} + \Phi_{ioz} \cdot \delta S_{ioz}) = 0;$$

$$\Sigma(F_{iox}^E \cdot \delta S_{iox} + F_{ioy}^E \cdot \delta S_{ioy} + F_{ioz}^E \cdot \delta S_{ioz}) +$$
$$+ \Sigma(- m\ddot{x}_{ci} \cdot \delta S_{iox} - m\ddot{y}_{ci} \cdot \delta S_{ioy} - \ddot{z}_{ci} \cdot \delta S_{ioz}) = 0,$$

где F_{iox}^E, F_{ioy}^E, F_{ioz}^E – проекции активных сил на координатные оси; Φ_{iox}, Φ_{ioy}, Φ_{ioz} – проекции сил инерции на координатные оси; δS_{iox}, δS_{ioy}, δS_{ioz} – проекции возможных перемещений точек приложения сил на координатные оси, $\ddot{x}_{ci}$, $\ddot{y}_{ci}$, $\ddot{z}_{ci}$ – проекции ускорений материальных точек механической системы на координатные оси.

Общее уравнение динамики позволяет составить дифференциальные уравнения движения любой механической системы.

Если среди связей системы имеются односторонние, то для применения общего уравнения динамики необходимо, чтобы возможные перемещения системы не разрушали эти связи, а обеспечивали их функциональное назначение.

Для закрепления изложенного теоретического материала рекомендуется выполнить курсовое задание Д 8.

6.4.2. Варианты курсового задания Д 8 «Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы»

Для заданной механической системы определить ускорения грузов. Массами нитей пренебречь. Трение качения и силы сопротивления в подшипниках не учитывать. Система движется из состояния покоя.

Варианты механических систем и необходимые для решения данные приведены в табл. 5.6.

Блоки и катки, для которых радиусы инерции в табл. 5.6 не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами.

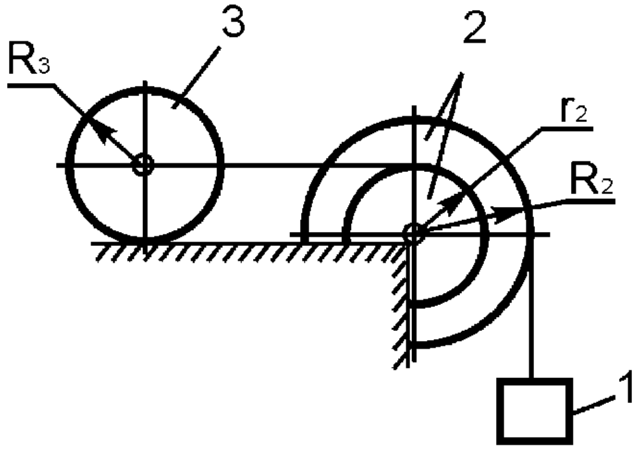
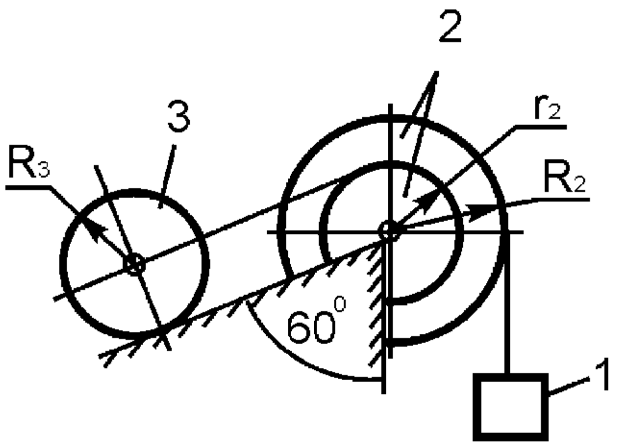
Примечания:

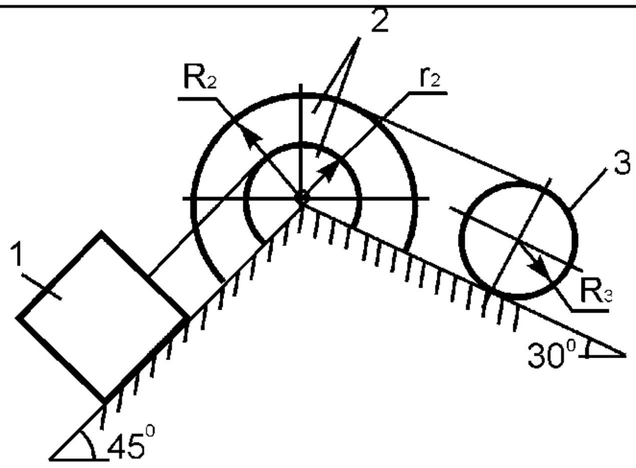
Радиусы инерции даны относительно центральных осей, перпендикулярных плоскости чертежа.

Коэффициенты трения принимать одинаковыми как при скольжении тела по плоскости, так и при торможении колодкой.

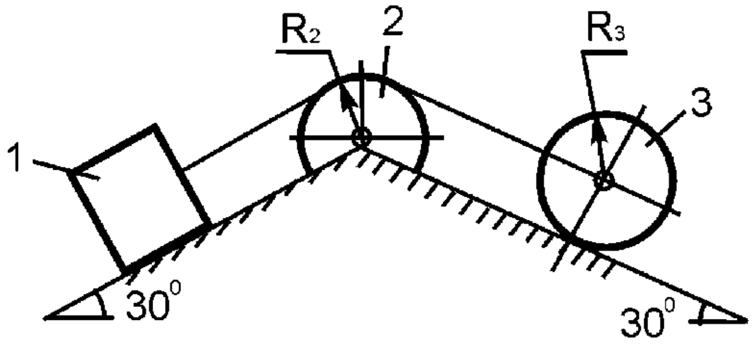
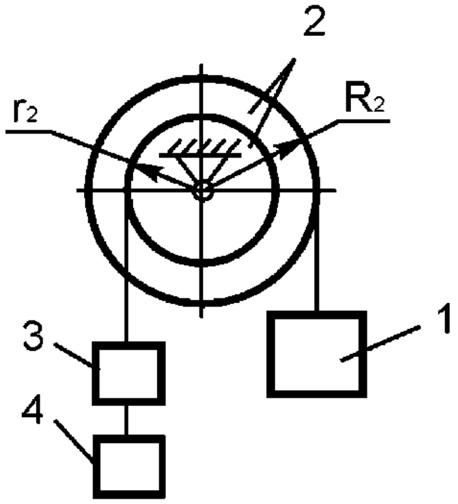
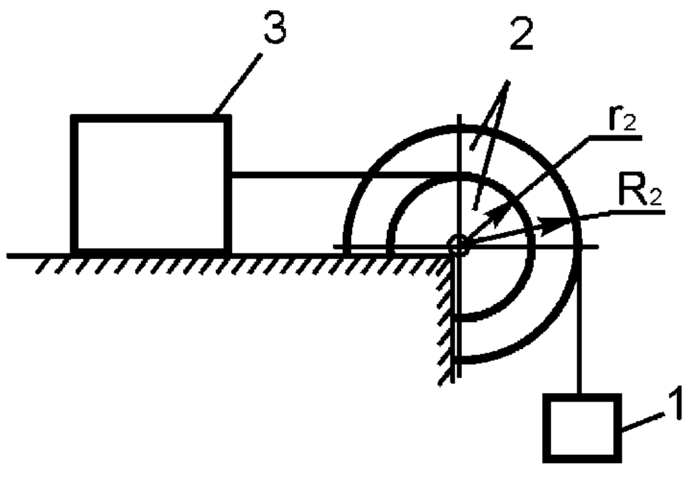
В варианте 24 массы четырех колес одинаковы.

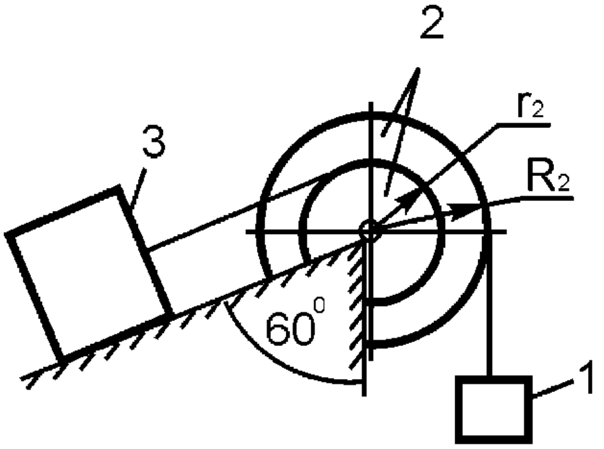
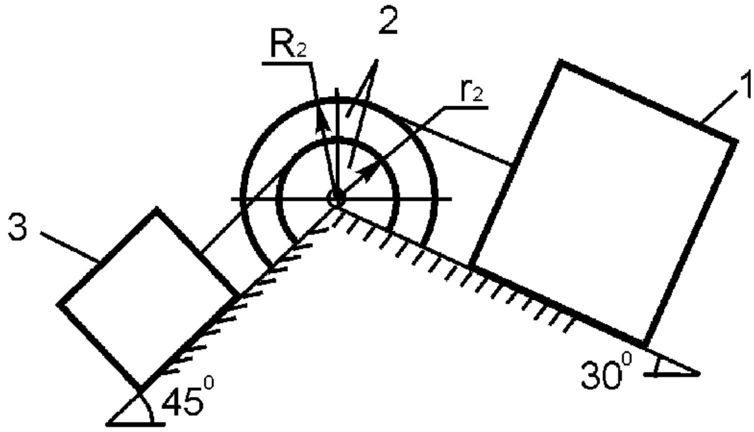
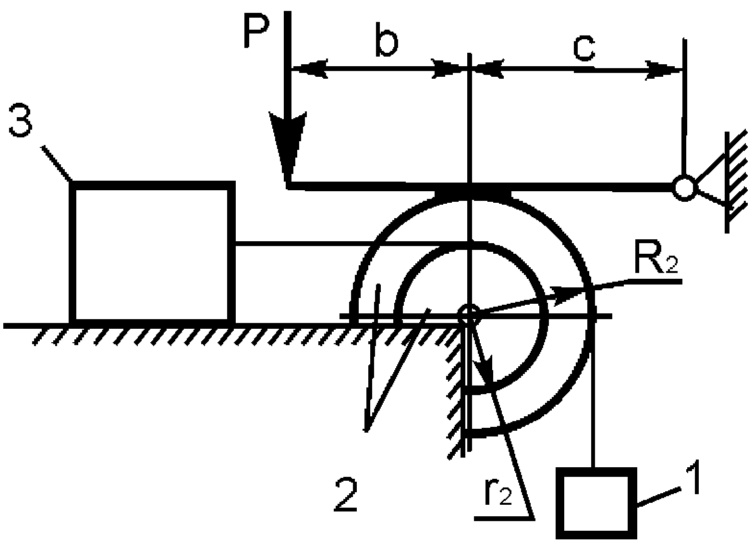
Таблица 5.6

Номер варианта	Расчетная схема механизма	Исходные данные
1	2	3
1		$G_1 = G$; $G_2 = G$; $G_3 = 3G$; $r_2 = r$; $R_2 = 2r$; $R_3 = r$; $i_{2x} = r\sqrt{2}$
2		$G_1 = G$; $G_2 = G$; $G_3 = G$; $r_2 = r$; $R_2 = 2r$; $R_3 = r$; $i_{2x} = r\sqrt{2}$
3		$G_1 = 3G$; $G_2 = G$; $G_3 = G$; $r_2 = r$; $R_2 = 2r$; $R_3 = r$; $f = 0,1$; $i_{2x} = r\sqrt{2}$

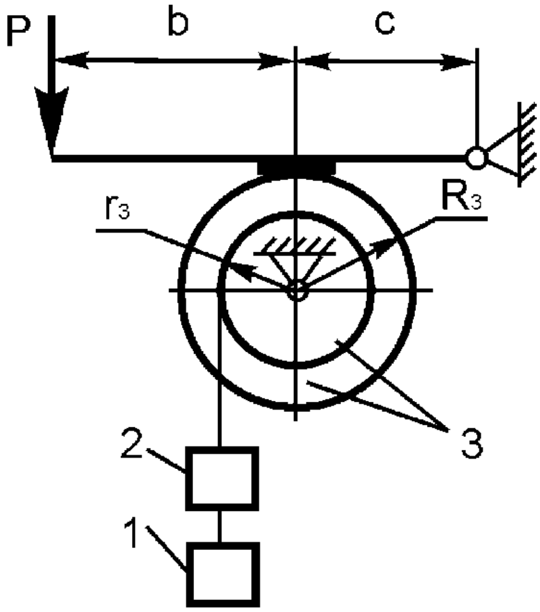
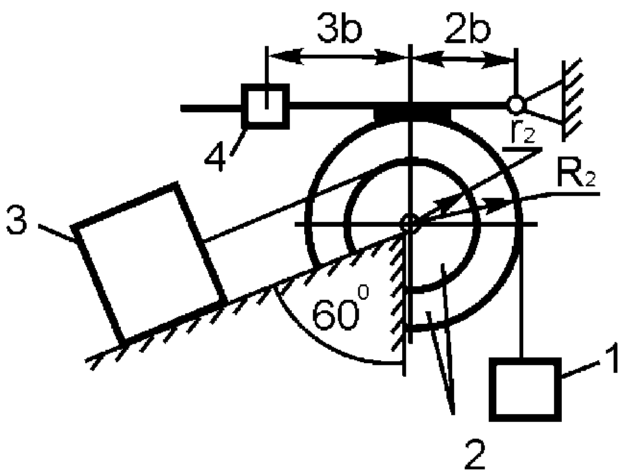
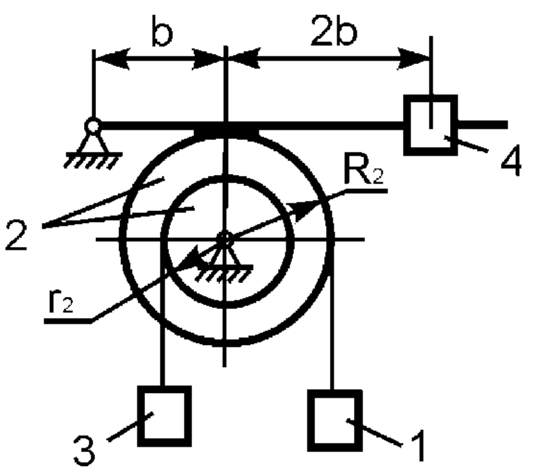
	2 R2 r2 3 1 R3 30⁰ 45⁰	

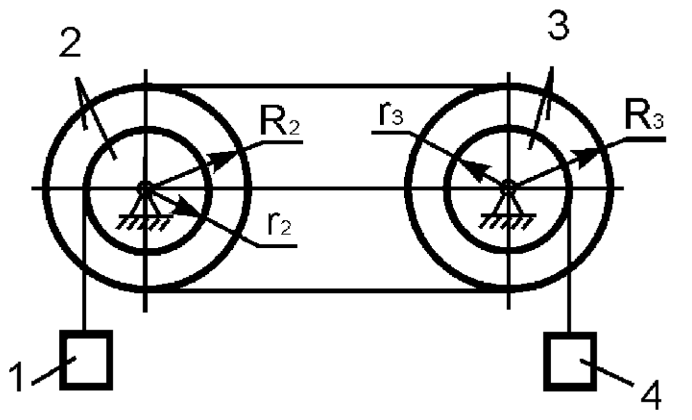
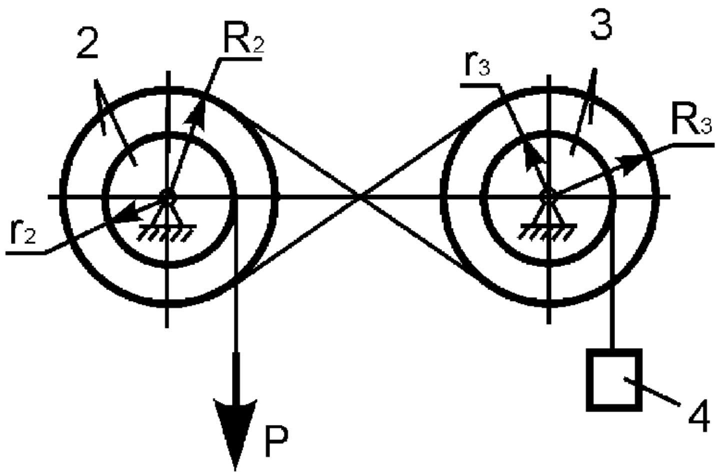
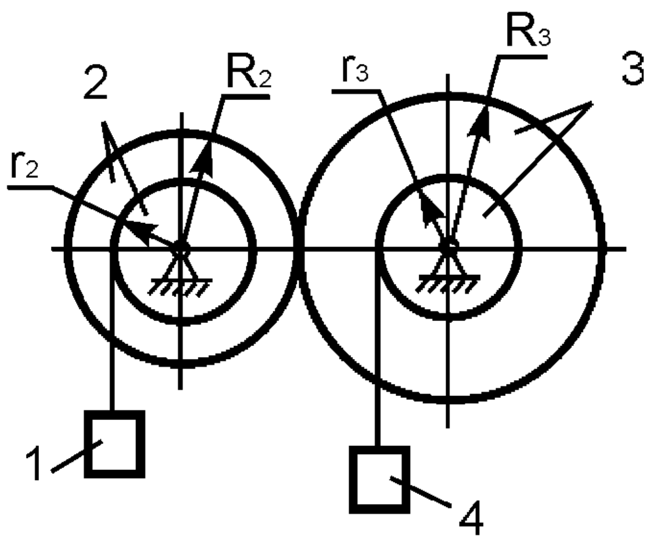
Продолжение табл..5.6

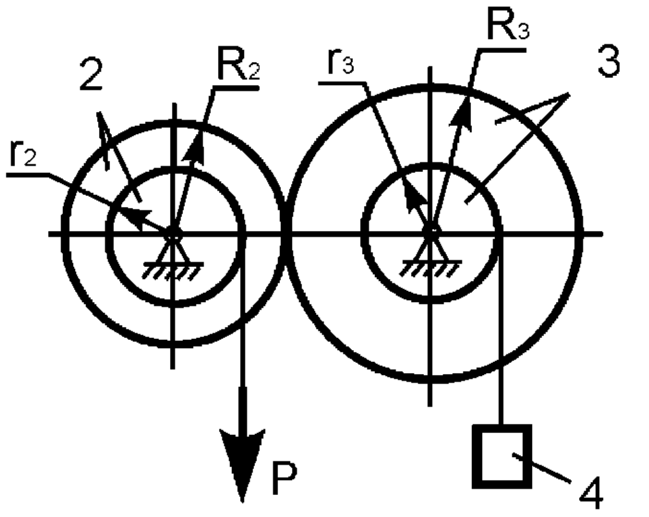
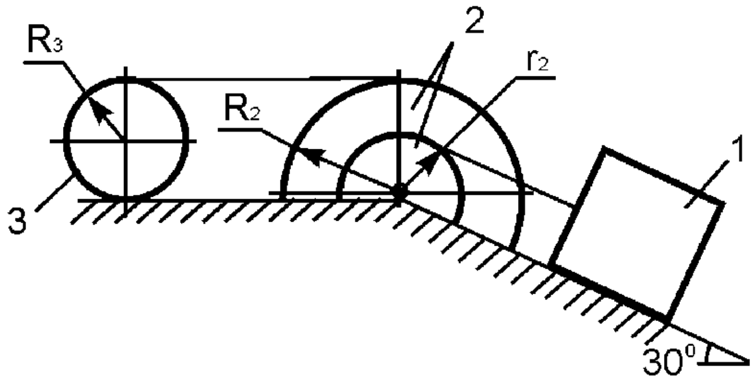
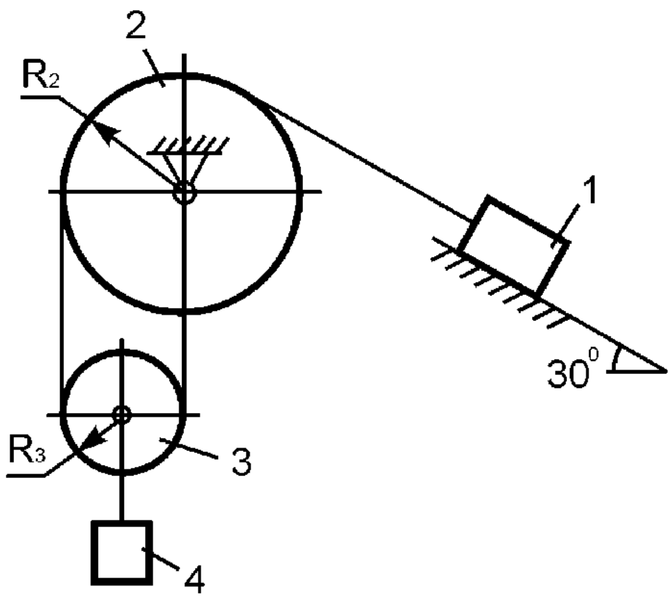
1	2	3
4		$G_1 = G$; $G_2 = G$; $G_3 = 2G$; $R_2 = R_3 = r$; $f = 0,2$
5		$G_1 = 2G$; $G_2 = G$; $G_3 = G$; $G_4 = G$; $r_2 = r$; $R_2 = 3r$; $i_{2x} = 2r$
6		$G_1 = 2G$; $G_2 = G$; $G_3 = 2G$; $r_2 = r$; $R_2 = 3r$; $f = 0,1$; $i_{2x} = 2r$; $f = 0,2$

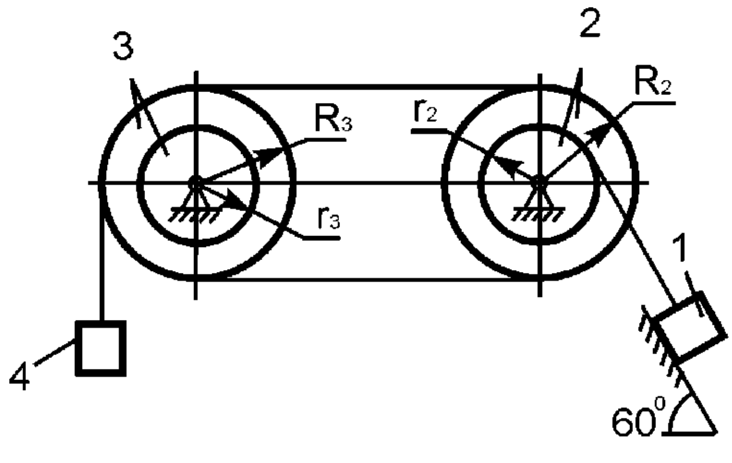
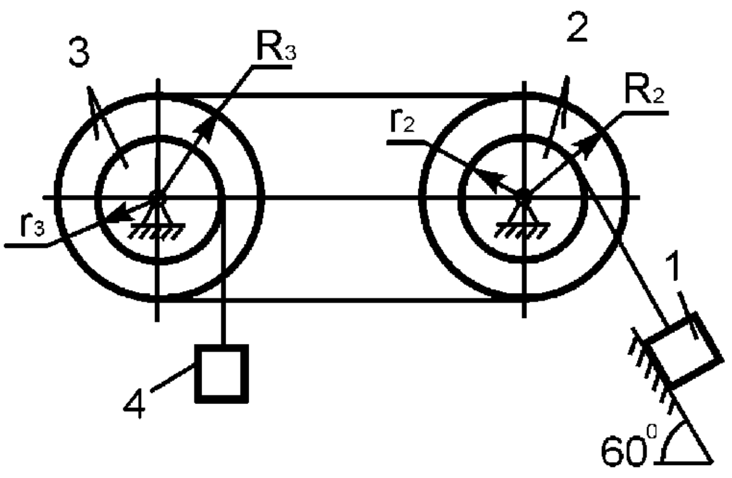
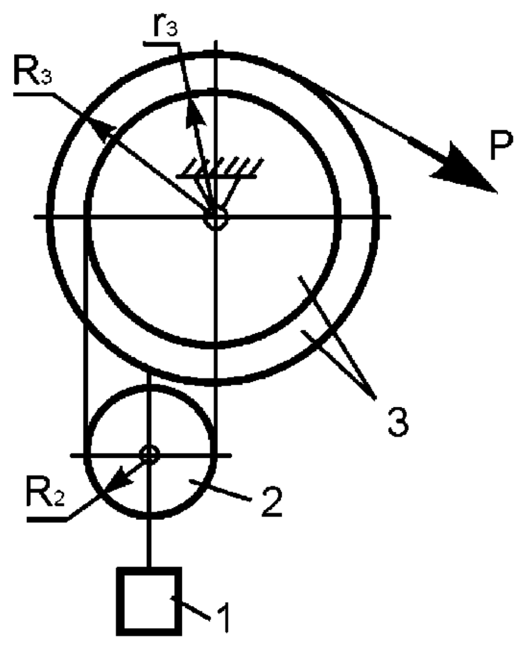
1	2	3
7		$G_1 = 2G$; $G_2 = G$; $G_3 = 2G$; $r_2 = r$; $R_2 = 3r$; $i_{2x} = 2r$; $f = 0{,}2$
8		$G_1 = 2G$; $G_2 = G$; $G_3 = 2G$; $r_2 = r$; $R_2 = 3r$; $i_{2x} = 2r$; $f = 0{,}2$
9		$G_1 = 2G$; $G_2 = G$; $G_3 = 2G$; $r_2 = r$; $R_2 = 3r$; $i_{2x} = 2r$; $P = 0{,}2G$; $f = 0{,}2$

Продолжение табл..5.6

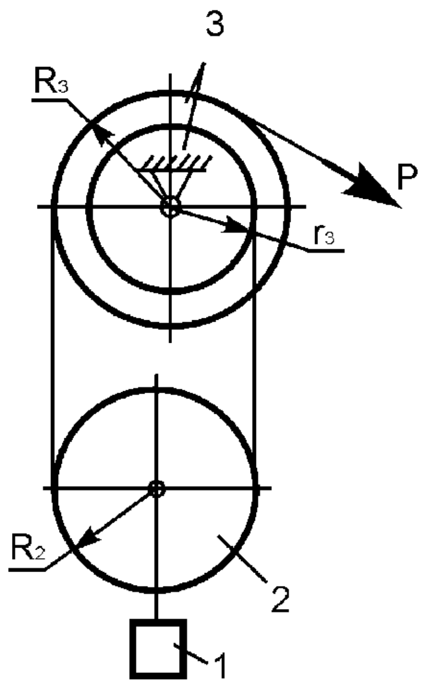
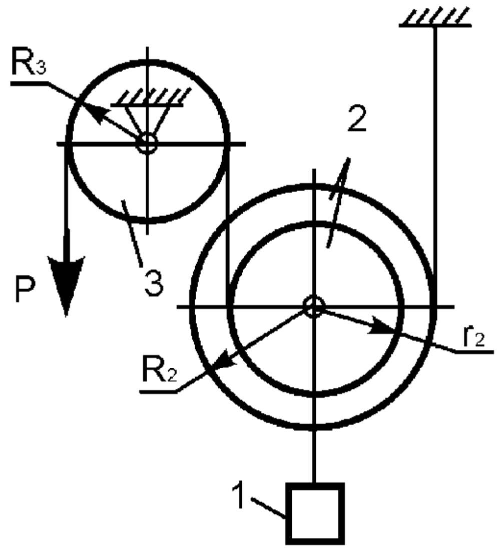
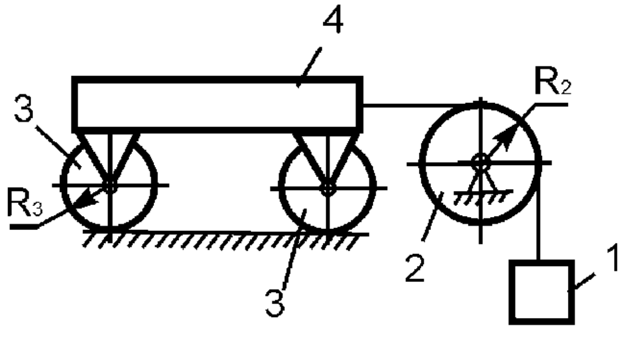
1	2	3
10		$G_1 = 2G$; $G_2 = 2G$; $G_3 = G$; $r_3 = r$; $R_3 = 4r$; $i_{3x} = 2r$; $P = G/3$; $f = 0,4$
11		$G_1 = 2G$; $G_2 = G$; $G_3 = 2G$; $G_4 = 0,2G$; $r_2 = r$; $R_2 = 3r$; $i_{2x} = 2r$; $f = 0,2$
12		$G_1 = 2G$; $G_2 = G$; $G_3 = 2G$; $G_4 = 0,2G$; $r_2 = r$; $R_2 = 3r$; $i_{2x} = 2r$; $f = 0,2$

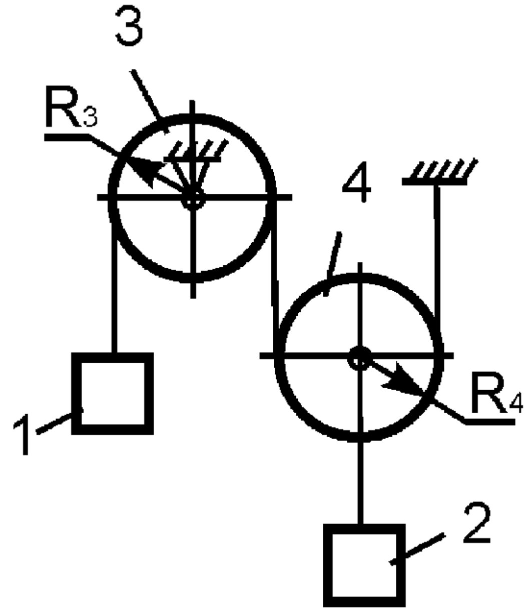
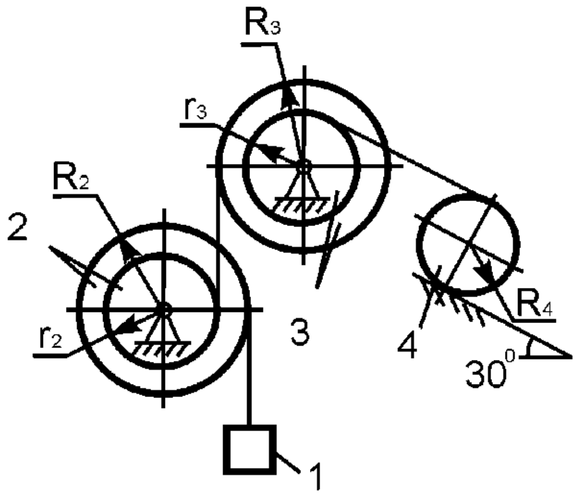
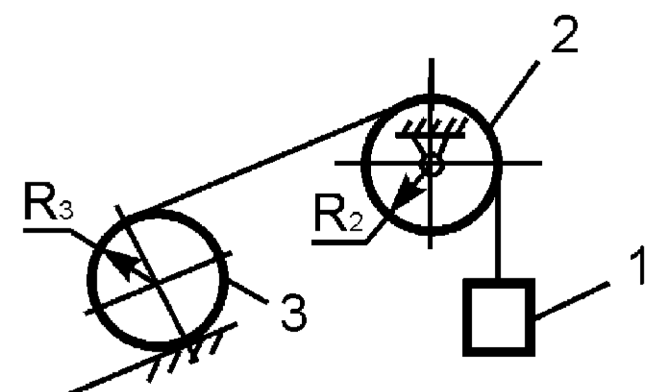
1	2	3
13		$G_1 = 4G$; $G_2 = 2G$; $G_3 = G$; $G_4 = 4G$; $r_2 = 2r_3$; $R_2 = R_3$; $i_{2x} = r_2\sqrt{2}$; $i_{3x} = 2r_3$
14		$G_2 = 2G$; $G_3 = G$; $G_4 = 4G$; $r_2 = 2r_3$; $R_3 = 1,5R_2$; $i_{2x} = r_2\sqrt{2}$; $i_{3x} = 2r_3$; $P = 8G$
15		$G_1 = 4G$; $G_2 = G$; $G_3 = 2G$; $G_4 = 4G$; $i_{2x} = r_2\sqrt{2}$; $i_{3x} = 2r_3$; $r_2 = 2r_3$; $R_3 = 1,5R_2$

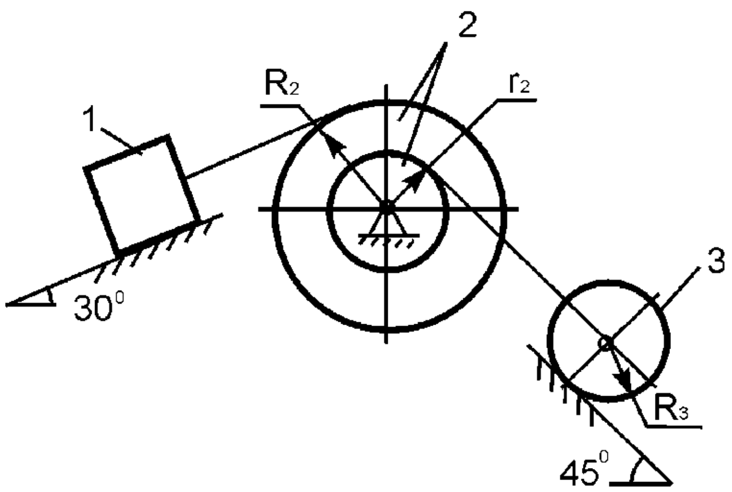
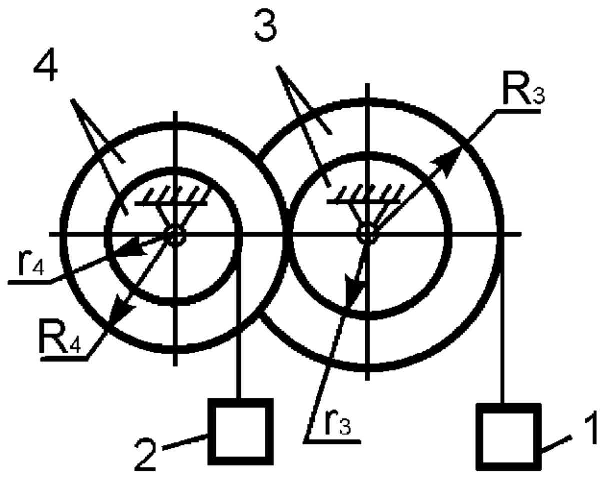
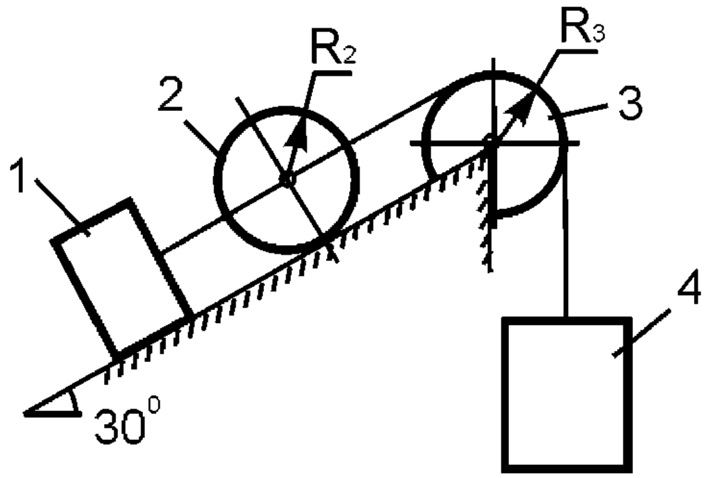
1	2	3
16		$G_2 = G$; $G_3 = 2G$; $G_4 = 4G$; $i_{2x} = r_2\sqrt{2}$; $i_{3x} = 2r_3$; $P = 4G$; $r_2 = 2r_3$; $R_3 = 1{,}5R_2$
17		$G_1 = 2G$; $G_2 = G$; $G_3 = G$; $r_2 = r$; $R_2 = 2r$; $R_3 = r$; $i_{2x} = r\sqrt{2}$; $f = 0{,}1$
18		$G_1 = 3G$; $G_2 = 0{,}2G$; $G_3 = 0{,}1G$; $G_4 = 0{,}5G$; $r_2 = r$; $R_2 = 2r$; $R_3 = r$; $f = 0{,}4$

1	2	3
19		$G_1 = 4G$; $G_2 = 0{,}3G$; $G_3 = 0{,}2G$; $G_4 = 3G$; $i_{2x} = 2r$; $i_{3x} = 1{,}2r$; $r_2 = r$; $f = 0{,}1$; $R_2 = 3r$; $R_3 = 1{,}2r_3$; $R_3 = 1{,}2r$
20		$G_1 = 4G$; $G_2 = 0{,}2G$; $G_3 = 0{,}1G$; $G_4 = 3G$; $i_{2x} = 1{,}6r$; $i_{3x} = r\sqrt{2}$; $r_2 = 1{,}5r$; $f = 0{,}2$; $R_2 = 1{,}2r_2$; $R_3 = 2r$; $r_3 = r$
21		$G_1 = 5G$; $G_2 = 0{,}1G$; $G_3 = 0{,}2G$; $r_3 = r$; $R_3 = 3r$; $R_2 = 0{,}5r$; $i_{3x} = r\sqrt{2}$; $P = G$

Продолжение табл..5.6

1	2	3
22		$G_1 = G$; $G_2 = 0{,}2G$; $G_3 = 0{,}3G$; $r_3 = r$; $R_3 = 2r$; $R_2 = 1{,}5r$; $i_{3x} = r\sqrt{2}$; $P = G$
23		$G_1 = G$; $G_2 = 0{,}2G$; $G_3 = 0{,}1G$; $r_2 = r$; $R_2 = 1{,}5r$; $R_3 = 1{,}2r$; $i_{2x} = 1{,}2r$; $P = 2G$
24		$G_1 = 2G$; $G_2 = G$; $G_3 = G$; $G_4 = 8G$ $R_2 = r$; $R_3 = r$

1	2	3
25		$G_1 = 6G$; $G_2 = 2G$; $G_3 = 2G$; $G_4 = G$ $R_3 = r$; $R_4 = r$
26		$G_1 = G$; $G_2 = G$; $G_3 = G$; $G_4 = 4G$; $r_2 = r$; $R_2 = 2r$; $R_3 = 2r$; $r_3 = r$; $i_{2x} = r\sqrt{2}$; $i_{3x} = r\sqrt{2}$
27		$G_1 = 6G$; $G_2 = G$; $G_3 = 2G$; $G_4 = 4G$; $R_2 = r$; $R_3 = r$

1	2	3
28		$G_1 = 3G$; $G_2 = G$; $G_3 = G$; $r_2 = r$; $R_2 = 2r$; $R_3 = r$; $i_{2x} = r\sqrt{2}$; $f = 0,1$
29		$G_1 = 6G$; $G_2 = 3G$; $G_3 = G$; $G_4 = G$; $r_3 = r$; $R_3 = 2r$; $r_4 = r$; $R_4 = 2r$; $i_{3x} = r\sqrt{2}$; $i_{4x} = r\sqrt{2}$
30		$G_1 = 8G$; $G_2 = G$; $G_3 = G$; $G_4 = 2G$; $R_2 = r$; $R_3 = r$; $f = 0,1$

6.4.3. Пример выполнения курсового задания Д 8

Для заданной механической системы (рис. 6.25) определить ускорение груза 1 при его опускании.

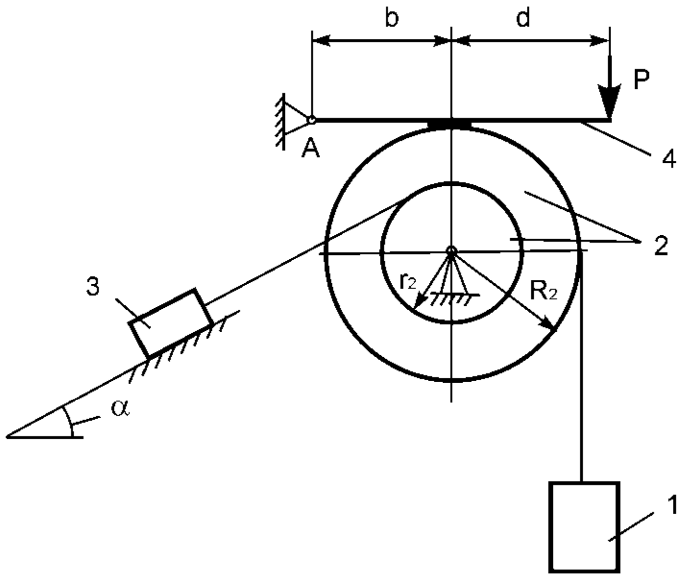


Рис. 6.25

Дано: G_1 = 8G; G_2 = 4G; G_3 = 2G; f_3 = 0,1; i_{2x} = 0,1 м; f_4 = 0,1; α = 30^0; b = 0,5 м; d = 0,4 м; r_2 = 0,2 м; R_2 = 0,5 м, где G_1, G_2, G_3 – вес соответствующих тел механической системы; f_3 – коэффициент трения скольжения тела 3 при его движении по шероховатой поверхности; f_4 – коэффициент трения скольжения между телами 2 и 4; i_{2x} – радиус инерции тела 2 относительно оси, проходящей через его центр масс; α, b, d, r_2, R_2 – геометрические параметры. Механическая система начинает движение из состояния покоя.

Решение.

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из тел 1, 2, 3 (рис. 6.26), предположив, что груз 1 опускается ускоренно.

Согласно общему уравнению динамики механическая система совершает движение под действием активных сил: $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{G}_3$ – силы тяжести тел 1, 2, 3; $\mathbf{F}_3$ – сила трения при движении груза 3 по шероховатой поверхности; $\mathbf{F}_{4\text{-}2}$ – сила трения при скольжении цилиндрической поверхности тела 2 по тормозной колодке тела 4 и инерционных нагрузок: $\mathbf{\Phi}_1$, $\mathbf{\Phi}_3$ – силы инерции тел 1, 3; M_2^{Φ} – момент сил инерции при вращении тела 2 относительно оси C_2X_2.

Как это отмечалось ранее, при наличии неидеальных связей, наложенных на механическую систему, эти связи необходимо преобразовать в идеальные путем переноса сил трения в разряд активных сил.

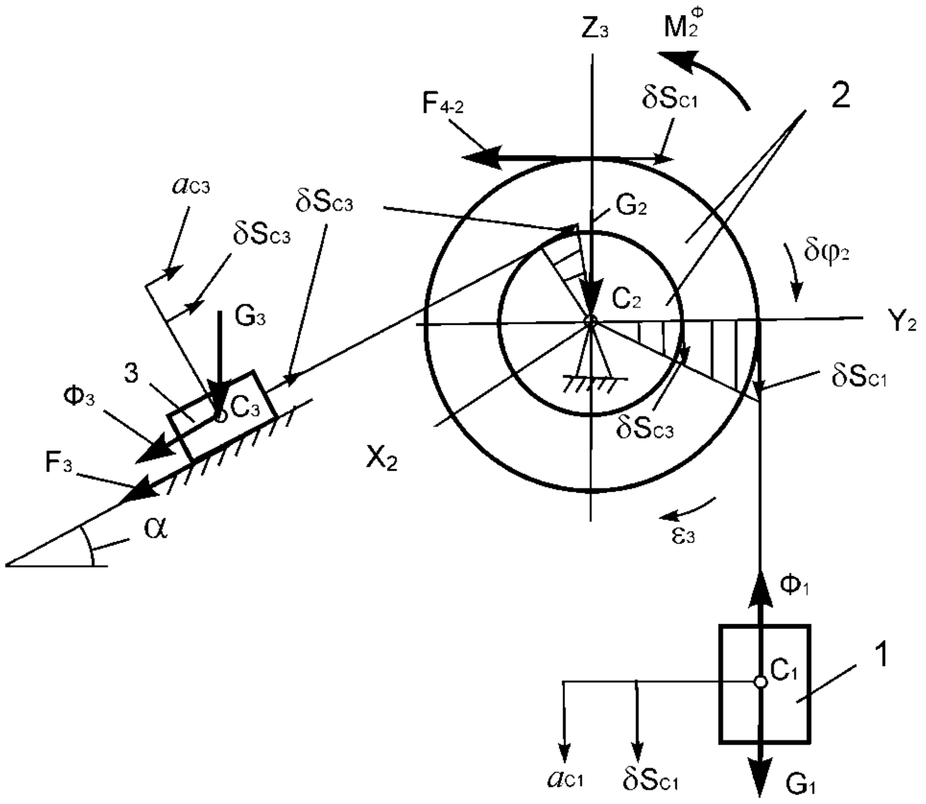


Рис. 6.26

Для определения силы трения $\mathbf{F}_{4\text{-}2}$ механическую систему, показанную на рис. 6.25, расчленим по внутренней связи и рассмотрим равновесие рычага 4 (рис. 6.27).

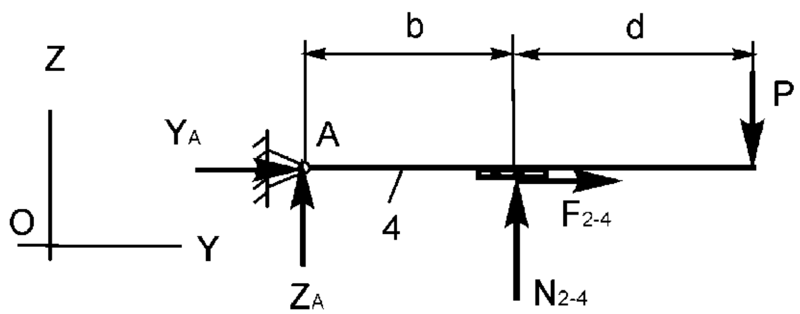


Рис. 6.27

На тело 4 действуют: активная сила $\mathbf{P}$; реакции $\mathbf{Y}_A$, $\mathbf{Z}_A$ внешней связи в точке А (шарнирно-неподвижная опора); реакции $\mathbf{N}_{2\text{-}4}$, $\mathbf{F}_{2\text{-}4}$ внутренней связи. Направления сил $\mathbf{N}_{2\text{-}4}$, $\mathbf{F}_{2\text{-}4}$ показывают, как тело 2 действует на тело 4. Составим уравнение равновесия.

$$\Sigma M_{iA} = N_{2\text{-}4} \cdot b - P \cdot d = 0.$$

Из этого уравнения определим нормальную реакцию

$$N_{2\text{-}4} = P(d/b) = G(d/b).$$

Согласно закону сухого трения (закону Кулона) сила трения $\mathbf{F}_{2\text{-}4}$ связана с нормальной реакцией $\mathbf{N}_{2\text{-}4}$ соотношением

$$F_{2\text{-}4} = f_4 \cdot N_{2\text{-}4} = f_4 G(d/b).$$

По известному закону динамики (закон равенства действия и противодействия) имеем

$$F_{4\text{-}2} = F_{2\text{-}4} = f_4 G(d/b).$$

Таким образом, сила $\mathbf{F}_{4\text{-}2}$ трения, приложенная к телу 2 со стороны тела 4 (см. рис. 6.26), определена.

Для определения силы $\mathbf{F}_3$ трения рассмотрим поступательное движение груза 3 (рис. 6.28) в инерциальной системе отсчета $O_3Y_3X_3$. Используя известные положения динамики, примем груз 3 за материальную точку.

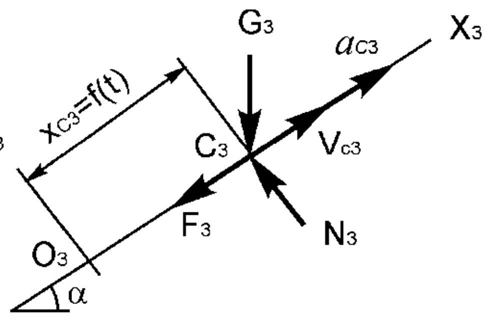


Рис. 6.28

На рис. 6.28 использованы условные обозначения: $\mathbf{N}_3$ – нормальная реакция шероховатой поверхности; $\mathbf{V}_{c3}$, $\boldsymbol{a}_{c3}$ – соответственно скорость и ускорение центра масс тела 3.

Составим дифференциальное уравнение поступательного движения тела 3.

$$m\ddot{y}_{c3} = -G_3\cos\alpha + N_3,$$

где $\ddot{y}_{c3}$ – проекция ускорения $\boldsymbol{a}_{c3}$ на координатную ось O_3Y_3.

Так как $\ddot{y}_{c3} = 0$, то получим

$$N_3 = G_3\cos\alpha.$$

Тогда имеем

$$F_3 = f_3N_3 = f_3G_3\cos\alpha = f_32G\cos\alpha.$$

Таким образом, сила трения $\mathbf{F}_3$ определена.

Вернемся к рис. 6.26. Зададим возможное перемещение $\delta\mathbf{S}_{c1}$ центру масс тела 1. При этом тело 2 получит возможное угловое перемещение $\delta\varphi_2 = \delta S_{c1}/R_2$, а центр C_3 масс тела 3 получит возможное линейное перемещение $\delta S_{c3} = \delta S_{c1}(r_2/R_2)$. Двойным дифференцированием по времени возможных перемещений $\delta\varphi_2$, δS_{c3} определим угловое ускорение ε_2 тела 2 и ускорение a_{c3} центра масс тела 3.

$$\varepsilon_2 = a_{c1}/R_2; \quad a_{c3} = a_{c1}(r_2/R_2).$$

К рассматриваемой механической системе приложим активные силы $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{G}_3$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_{4\text{-}2}$ и инерционные нагрузки $\mathbf{\Phi}_1$, $\mathbf{\Phi}_2$, M_2^{Φ}.

Модули сил инерции Φ_1, Φ_3 и момента M_2^{Φ} сил инерции определяют по формулам:

$$\Phi_1 = m_1 a_{c1} = (G_1/g)a_{c1} = (8G/g)a_{c1};$$

$$\Phi_3 = m_1 a_{c3} = (G_3/g)a_{c3} = (2G/g)a_{c1}(r_2/R_2);$$

$$M_2^{\Phi} = J_{c2x2}\varepsilon_2 = m_2(i_{2x})^2\varepsilon_2 = (G_2/g)(i_{2x})^2\varepsilon_2 = (4G/g)(i_{2x})^2(a_{c1}/R_2).$$

Запишем общее уравнение динамики для рассматриваемой механической системы:

$$\Sigma F_i^E \cdot \delta S_{ci} \cdot \cos(\mathbf{F}_i^E, \delta \mathbf{S}_{ci}) + \Sigma \Phi_i \cdot \delta S_{ci} \cdot \cos(\mathbf{\Phi}_i, \delta \mathbf{S}_{ci}) = 0.$$

Определим первое слагаемое правой части этого уравнения.

$$\Sigma F_i^E \cdot \delta S_{ci} \cdot \cos(\mathbf{F}_i^E, \delta \mathbf{S}_{ci}) =$$

$$= G_1 \cdot \delta S_{c1} - F_{4\text{-}2} \cdot \delta S_{c1} - G_3 \cdot \delta S_{c3} \sin\alpha - F_3 \cdot \delta S_{c3} =$$

$$= 8G \cdot \delta S_{c1} - f_4 G(d/b) \cdot \delta S_{c1} - 2G \cdot \delta S_{c1}(r_2/R_2)\sin\alpha -$$

$$- f_3 2G\cos\alpha \cdot \delta S_{c1}(r_2/R_2) =$$

$$= G(8 - f_4(d/b) - 2(r_2/R_2)\sin\alpha - f_3 2G\cos\alpha(r_2/R_2))\delta S_{c1}.$$

Определим второе слагаемое правой части общего уравнения динамики:

$$\Sigma \Phi_i \cdot \delta S_{ci} \cdot \cos(\mathbf{\Phi}_i, \delta \mathbf{S}_{ci}) = -\, \Phi_1\, \delta S_{c1} - M_2^{\Phi} \cdot \delta\varphi_2 - \Phi_3\, \delta S_{c3} =$$

$$= -\,(8G/g)\, a_{c1}\, \delta S_{ci} - (4G/g)(i_{2x})^2(a_{c1}/R_2)(\delta S_{ci}/R_2) -$$

$$- (2G/g)a_{c1}(r_2/R_2)\, \delta S_{ci}(r_2/R_2) =$$

$$= -\,(G/g)(8 + 4(i_{2x}/R_2)^2 + 2(r_2/R_2)^2)a_{c1}\delta S_{ci}.$$

Внося эти слагаемые в общее уравнение динамики, получим

$$G(8 - f_4(d/b) - 2(r_2/R_2)\sin\alpha - f_3 2G\cos\alpha(r_2/R_2))\delta S_{c1} -$$

$$- (G/g)(8 + 4(i_{2x}/R_2)^2 + 2(r_2/R_2)^2)a_{c1}\delta S_{ci} = 0.$$

Отсюда определим ускорение a_{c1}:

$$a_{c1} = g(8 - f_4(d/b) - 2(r_2/R_2)\sin\alpha - f_3 2\cos\alpha(r_2/R_2))/$$

$$/(8 + 4(i_{2x}/R_2)^2 + 2(r_2/R_2)^2) =$$

$$= 9{,}81(8 - 0{,}1(0{,}4/0{,}5) - 2(0{,}2/0{,}5)0{,}5 - 0{,}1 \cdot 2 \cdot 0{,}866(0{,}2/0{,}5))/$$

$$/(8 + 4(0{,}1/0{,}5)^2 + 2(0{,}2/0{,}5)^2) = 9{,}584 \text{ м/с}^2.$$

Таким образом, ответ на вопрос (a_{c1} =?), поставленный в курсовом задании Д 8, получен.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Записать формулу, выражающую ***общее уравнение динамики***, в векторной форме.

2. Записать формулу, выражающую ***общее уравнение динамики***, в скалярной форме.
3. Записать формулу, выражающую ***общее уравнение динамики***, в координатной форме.

6.5. Уравнения Лагранжа второго рода

Уравнения Лагранжа второго рода *– дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах.*

Для механической системы с n степенями свободы эти уравнения имеют вид

$$\frac{d}{dt}(\partial T_s/\partial \dot{q}_i) - \partial T_s/\partial q_i = Q_{qi},\ i = 1, \ldots, n,$$

где T_s – кинетическая энергия механической системы; q_i – обобщенная координата; $\dot{q}_i$ – обобщенная скорость; Q_{qi} – обобщенная сила по обобщенной координате q_i.

Число уравнений Лагранжа второго рада равно числу степеней свободы рассматриваемой механической системы.

Используя рис 6.29, поясним понятия «***обобщенная скорость», «обобщенная сила»***.

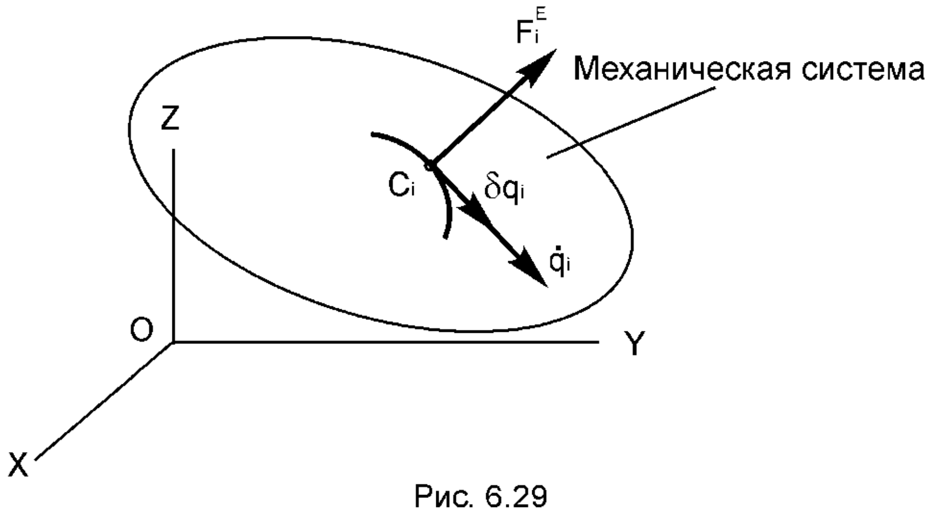


Рис. 6.29

На рис. 6.29 приняты условные обозначения: $\mathbf{F}_i^E$ – активная сила, приложенная к точке механической системы; $\delta \mathbf{q}_i$ – приращение обобщенной координаты q_i (возможное перемещение i-й точки системы); $\dot{q}_i$ – обобщенная скорость i-й точки механической системы.

Обобщенная скорость *– производная по времени от обобщенной координаты.*

$$\dot{q}_i = dq_i/dt.$$

Определим возможную элементарную работу $\delta A(\mathbf{F}_i^E)$ активных сил $\mathbf{F}_i^E$, приложенных к точкам механической системы при задании какой-либо ее точке возможного перемещения $\delta\mathbf{q}_i$.

$$\delta A(\mathbf{F}_i^E) = \Sigma \mathbf{F}_i^E \cdot \delta q_i \cdot \cos(\mathbf{F}_i^E, \delta\mathbf{q}_i).$$

Обобщенная сила Q_{qi} по обобщенной координате q_i *– величина, равная отношению возможной элементарной работы δA активных сил $\mathbf{F}_i^E$, приложенных к точкам механической системы, к приращению δq_i обобщенной координаты q_i.*

$$Q_{qi} = \delta A(\mathbf{F}_i^E)/\delta q_i.$$

Формулировка уравнения Лагранжа второго рода.
Разность полной производной по времени от частной производной кинетической энергии по обобщенной скорости и частной производной от кинетической энергии по обобщенной координате равна обобщенной силе.

Уравнения Лагранжа второго рода используют в качестве универсального метода составления дифференциальных уравнений движения механических систем любой степени сложности. Преимущество этого метода по сравнению с применяемыми ранее общими теоремами динамики заключается в том, что в уравнениях Лагранжа второго рода используются только активные силы. Это намного упрощает решение задач динамики механических систем.

Согласно учебной программе выполнение курсового задания на применение уравнений Лагранжа второго рода к исследованию движения механических систем не предусмотрено. Тем не менее для развития общего кругозора студента приведем пример решения такого типа задач.

Пример.

Однородный барабан 1 массой m и радиусом R приводится во вращение активным моментом M. На барабан наматывается невесомый трос, перекинутый через невесомый блок 2. К свободному концу троса прикреплен груз 3 массой m_3 (рис. 6.30).

Механическая система начинает двигаться из состояния покоя. Составить дифференциальное уравнение вращательного движения барабана.

Дано: m_1 = 20 кг; R = 0,2 м; m_3 = 10 кг; M = 200 Н·м.

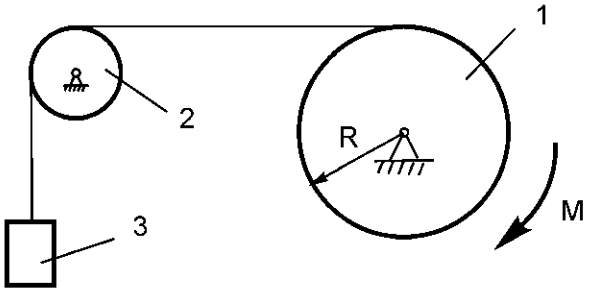


Рис. 6.30

Решение.

Механическая система имеет одну степень свободы. Примем за обобщенную координату q угол φ_1 поворота тела 1 (рис. 6.31).

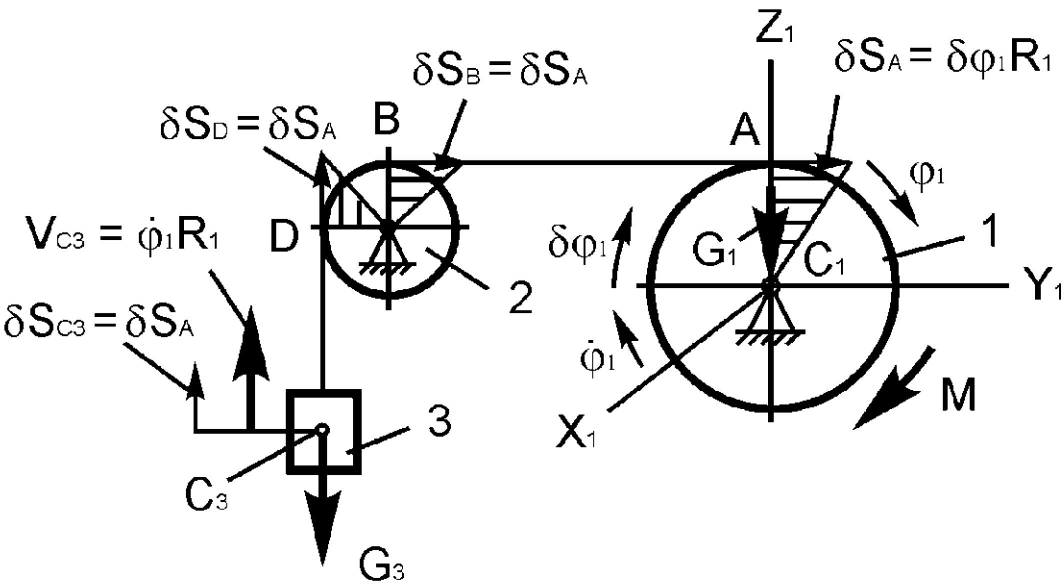


Рис. 6.31

Запишем уравнение Лагранжа второго рода для рассматриваемой механической системы.

$$\frac{d}{dt}(\partial T_s/\partial\dot{\varphi}_1) - \partial T_s/\partial\varphi_1 = Q_{\varphi 1},$$

где T_s – кинетическая энергия механической системы; $Q_{\varphi 1}$ – обобщенная сила по обобщенной координате φ_1; $\dot{\varphi}_1 = d\varphi_1/dt$ – обобщенная скорость.

Зададим приращение $\delta\varphi_1$ обобщенной координате φ_1. Тогда центр масс тела 3 получит возможное перемещение

$$\delta S_{c3} = \delta\varphi_1 \cdot R_1.$$

Кинетическая энергия механической системы равна

$$T_s = T_1 + T_3,$$

где T_1 – кинетическая энергия барабана 1; T_3 – кинетическая энергия груза 3.

Тело 1 совершает вращательное движение относительно оси C_1X_1. Его кинетическую энергию определим по формуле

$$T_1 = 0{,}5J_{c1x1}(\omega_1)^2 = 0{,}5(m_1(R_1)^2/2)(\dot{\varphi}_1)^2 = 0{,}25m_1(R_1)^2(\dot{\varphi}_1)^2.$$

Согласно рис. 6.31 тело 3 совершает поступательное движение. Исходя из этого утверждения, его кинетическую энергию определим по формуле

$$T_3 = 0{,}5m_3(V_{c3})^2 = 0{,}5m_3(\dot{\varphi}_1 R_1)^2.$$

В последней формуле символом V_{c3} обозначена скорость центра масс тела 3.

Кинетическая энергия механической системы

$$T_s = 0{,}25m_1(R_1)^2(\dot{\varphi}_1)^2 + 0{,}5m_3(\dot{\varphi}_1 R_1)^2 = (0{,}25m_1 + 0{,}5m_3)(\dot{\varphi}_1 R_1)^2.$$

Определим частную производную от кинетической энергии механической системы по обобщенной скорости $d\varphi_1/dt$.

$$(\partial T_s/\partial\dot{\varphi}_1) = 2(0{,}25m_1 + 0{,}5m_3)(R_1)^2\,\dot{\varphi}_1.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}(\partial T_s/\partial\dot{\varphi}_1) = (0{,}5m_1 + m_3)(R_1)^2\,\ddot{\varphi}_1.$$

Так как кинетическая энергия системы не зависит от обобщенной координаты φ_1, то соответственно ее частная производная $\partial T_s/\partial\varphi_1$ равна нулю ($\partial T_s/\partial\varphi_1 = 0$).

Тогда левая часть уравнения Лагранжа вторго рода равна

$$\frac{d}{dt}(\partial T_s/\partial\dot{\varphi}_1) - \partial T_s/\partial\varphi_1 = (0{,}5m_1 + m_3)(R_1)^2\,\ddot{\varphi}_1.$$

Определим элементарную работу $\delta A(\mathbf{F}_i^E)$ сил, приложенных к механической системе на ее возможном перемещении.

$$\delta A(\mathbf{F}_i^E) = M\cdot\delta\varphi_1 - G_3\cdot\delta S_{c3} = M\cdot\delta\varphi_1 - m_3g\cdot\delta\varphi_1\cdot R_1 = (M - m_3gR_1)\delta\varphi_1.$$

Согласно определению обобщенная сила $Q_{\varphi1}$ по обобщенной координате равна

$$Q_{\varphi1} = \delta A/\,\delta\varphi_1 = M - m_3gR_1.$$

Уравнение Лагранжа второго рода для рассматриваемой механической системы принимает вид

$$(0{,}5m_1 + m_3)(R_1)^2\,\ddot{\varphi}_1 = M - m_3gR_1.$$

Решая это уравнение относительно углового ускорения $\ddot{\varphi}_1 = d^2\varphi_1/dt^2$, получим

$$\ddot{\varphi}_1 = d^2\varphi_1/dt^2 = (M - m_3gR_1)/\ (0{,}5m_1 + m_3)(R_1)^2 =$$
$$= (200 - 10\cdot 9{,}81\cdot 0{,}2)/(0{,}5\cdot 20 + 10\cdot 0{,}2^2) = 17{,}344 \text{ м/с}^2.$$

Дважды интегрируя эти дифференциальные уравнения и определив постоянные интегрирования, получим:

$$\dot{\varphi}_1 = 17{,}344t; \quad \varphi_1 = 8{,}672t^2.$$

Таким образом, ответ на вопрос ($\varphi_1 = f(t) = ?$), поставленный в задаче, получен.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Записать ***уравнение Лагранжа второго рода***.
2. Сформулировать определение понятия «***обобщенная скорость***».
3. Сформулировать определение понятия «***обобщенная сила***».

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ, ОПРЕДЕЛЕНИЙ, ПОНЯТИЙ

Механика *– наука о механическом движении и механическом взаимодействии материальных тел.*

Теоретическая механика *– раздел механики, в котором изучаются законы движения механических систем и общие свойства этих движений.*

Статика *– раздел механики, в котором изучаются условия равновесия механических систем под действием сил.*

Кинематика *– раздел теоретической механики, в котором изучаются движения материальных тел без учета их масс и действующих на них сил.*

Динамика *– раздел механики, в котором изучаются движения механических систем под действием сил.*

Масса *– одна из основных характеристик любого материального объекта, определяющая его инертные и гравитационные свойства.*

Инертность *– свойство материального тела, проявляющееся в сохранении движения, совершаемого им при отсутствии действующих сил, и в постепенном изменении этого движения с течением времени, когда на тело начинают действовать силы.*

Материальная точка *– точка, имеющая массу.*

Абсолютно твердое тело *– материальное тело, в котором расстояние между двумя любыми точками остается неизменным.*

Механическая система *– любая совокупность материальных точек, движения которых взаимозависимы.*

Механическое действие *– действие на данное тело со стороны других тел, которое приводит к изменению скоростей точек этого тела или следствием которого является изменение взаимного положения точек данного тела.*

Механическое движение *– изменение с течением времени взаимного положения в пространстве материальных тел или взаимного положения частей данного тела.*

Свободное твердое тело *– тело, на перемещения которого не наложено никаких ограничений.*

Система отсчета *– система координат, связанная с телом, по отношению к которому определяется положение других тел (механических систем) в разные моменты времени.*

Сила *– векторная величина, являющаяся мерой механического действия одного тела на другое.*

Сила тяжести *– сила, действующая на точку вблизи земной поверхности, равная произведению массы m этой точки на ускорение* **g** *свободного падения в вакууме.*

Вес тела *– сумма модулей сил тяжести, действующих на частицы этого тела.*

Внешняя сила *– сила, действующая на какую-либо точку механической системы со стороны тел, не принадлежащих рассматриваемой механической системе.*

Внутренние силы *– силы, действующие на какие-либо точки механической системы со стороны других точек, принадлежащих рассматриваемой механической системе.*

Система сил *– любая совокупность сил, действующих на механическую систему.*

Сосредоточенная сила *– сила, приложенная к телу в какой-либо одной его точке.*

Распределенные силы *– силы, действующие на все точки некоторой части линии, поверхности или объема.*

Связи *– материальные тела, накладывающие ограничения на положения и скорости точек механической системы, которые должны выполняться при любых действующих на систему силах.*

Реакции связей *– силы, действующие на точки механической системы со стороны материальных тел, осуществляющих связи, наложенные на эту систему.*

Инерциальная система отсчета *– система отсчета, по отношению к которой изолированная материальная точка находится в покое или движется равномерно и прямолинейно.*

Естественные координатные оси *– прямоугольная система осей с началом в движущейся точке, направленных соответственно по касательной, главной нормали и бинормали к траектории этой точки.*

Восстанавливающая сила *– сила, стремящаяся вернуть тело или точку в положение статического равновесия.*

Амплитуда свободных колебаний *– величина наибольшего отклонения точки от положения статического равновесия.*

Период свободных колебаний *– отрезок времени, за который точка проходит положение статического равновесия в одном и том же направлении.*

Период затухающих колебаний *– промежуток времени между двумя последовательными прохождениями точки в одном направлении через положение покоя.*

Амплитуда затухающих колебаний *– величина наибольшего отклонения точки в ту или другую сторону от положения статического равновесия в течение каждого колебания.*

Сила инерции *– величина, равная произведению массы материальной точки на ее ускорение и направленная противоположно этому ускорению.*

Переносная сила инерции *при рассмотрении движения материальной точки в неинерциальной системе отсчета – величина, равная произведению массы точки на ее переносное ускорение и направленная противоположно этому ускорению.*

Кориолисова сила инерции *при рассмотрении движения точки в неинерциальной системе отсчета – величина, равная произведению массы точки на ее кориолисово ускорение и направленная противоположно этому ускорению.*

Центр масс механической системы *– геометрическая точка, для которой сумма произведений масс всех материальных точек, образующих механическую систему, на их радиус-векторы, проведенные из этой точки, равна нулю.*

Момент инерции механической системы относительно оси *– величина, равная сумме произведений масс всех материальных точек, образующих механическую систему, на квадраты их расстояний от данной оси.*

Радиус инерции твердого тела относительно оси вращения *– величина, произведение квадрата которой на массу тела равно моменту инерции тела относительно этой оси.*

Радиус инерции механической системы относительно оси вращения *– величина, квадрат которой равен отношению момента инерции механической системы относительно данной оси к массе этой системы.*

Количество движения материальной точки *– векторная мера механического движения, равная произведению массы точки на ее скорость.*

Элементарный импульс силы *– векторная мера действия силы, равная произведению силы на элементарный промежуток времени ее действия.*

Импульс силы за конечный промежуток времени *– величина, равная определенному интегралу от элементарного импульса силы, где пределами интеграла являются моменты начала и конца данного промежутка времени.*

Количество движения механической системы *– величина, равная сумме количеств движения всех материальных точек, образующих механическую систему.*

Момент количества движения материальной точки относительно центра *– величина, равная векторному произведению радиус-вектора материальной точки, проведенного из этого центра, на количество движения.*

Момент количества движения точки относительно оси *– величина, равная проекции на ось момента количества движения точки относительно любого выбранного на данной оси центра.*

Момент количества движения $m\mathbf{V}$ ***точки относительно оси*** *– величина, равная алгебраической сумме моментов компонентов* $m\mathbf{V}_x$, $m\mathbf{V}_y$, $m\mathbf{V}_z$ *вектора* $m\mathbf{V}$ *относительно этой оси.*

Центральная сила *– сила, линия действия которой постоянно проходит через некоторую точку, неподвижную в данной системе отсчета и называемую* ***центром силы.***

Кинетический момент или главный момент количеств движения механической системы относительно данного центра *– величина, равная сумме моментов количеств движения всех точек механической системы относительно этого центра.*

Кинетический момент или главный момент количеств движения механической системы относительно оси *– величина, равная сумме моментов количеств движения всех точек механической системы относительно этой оси.*

Элементарная работа силы *– скалярная мера действия силы, равная скалярному произведению силы на элементарное перемещение точки ее приложения.*

Элементарное перемещение точки *– перемещение точки из данного положения в положение, бесконечно близкое к нему.*

Работа силы на конечном перемещении точки ее приложения *– величина, равная криволинейному интегралу от элементарной работы силы, действующей на данную материальную точку, взятому вдоль дуги кривой, описанной точкой при этом перемещении.*

Мощность силы *– величина, равная скалярному произведению силы на скорость точки ее приложения.*

Кинетическая энергия материальной точки *– скалярная мера механического движения, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости движения.*

Кинетическая энергия системы *– величина, равная сумме кинетических энергий всех материальных точек механической системы.*

Аналитическая механика *– раздел механики, в котором изучается равновесие или движение механизмов с помощью общих, единых аналитических методов, применяемых для любых механических систем.*

Обобщенные координаты механической системы *– независимые между собой параметры, однозначно определяющие положение механической системы.*

Возможное (виртуальное) перемещение точки *– любое допускаемое наложенными связями перемещение материальной точки из положения, занимаемого ею в данный момент времени, в бесконечно близкое положение, которое она может занимать в тот же момент времени.*

Мгновенный центр вращения *– точка неподвижной плоскости, поворотом вокруг которой плоская фигура перемещается из данного положения в положение, бесконечно близкое к данному.*

Уравнения связей *– уравнения, которым в силу наложенных связей должны удовлетворять координаты точек механической системы и их скорости (первые производные от координат по времени).*

Геометрические связи *– связи, уравнения которых содержат только координаты точек механической системы.*

Стационарные связи *– связи, в уравнения которых время явно не входит.*

Двусторнние (удерживающие) связи *– связи, допускающие возможные перемещения только в двух взаимно противоположных направлениях.*

Односторонние (неудерживающие) связи *– связи, при которых точки механической системы имеют возможные перемещения, противоположные которым не являются возможными.*

Возможное перемещение системы *– любая совокупность возможных перемещений точек данной механической системы, допускаемая всеми наложенными на нее связями.*

Возможная (элементарная) работа силы *– бесконечно малая величина, равная скалярному произведению вектора силы **F** на вектор возможного перемещения δ**S** точки ее приложения.*

Идеальные связи *– связи, для которых сумма элементарных работ их реакций равна нулю на любом возможном перемещении механической системы.*

Уравнения Лагранжа второго ро*да – дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах.*

Обобщенная скорость *– производная по времени от обобщенной координаты.*

Обобщенная сила Q_{qi} ***по обобщенной координате*** q_i *– величина, равная отношению возможной элементарной работы δA активных сил* $\mathbf{F}_i^E$*, приложенных к точкам механической системы, к приращению* δq_i *обобщенной координаты* q_i*.*

Приложение 2

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

1. Сформулировать ***первый закон динамики*** (закон инерции).
2. Сформулировать ***второй закон динамики*** (закон пропорциональности силы и ускорения).
3. Сформулировать ***третий закон динамики*** (закон равенства действия и противодействия).
4. Сформулировать ***четвертый закон динамики*** (закон независимости действия сил).
5. Сформулировать определение понятия «***инерциальная система отсчета***».
6. Записать ***основное уравнение динамики*** несвободной материальной точки в векторном виде.
7. Записать ***дифференциальные уравнения движения*** несвободной материальной точки в декартовой системе отсчета.
8. Записать ***дифференциальные уравнения движения*** несвободной материальной точки в естественных координатных осях.
9. Сформулировать суть ***первой задачи динамики***.
10. Сформулировать суть ***второй задачи динамики***.
11. Как определяются ***постоянные интегрирования*** при решении второй задачи динамики?
12. Сформулировать определение понятия «***восстанавливающая сила***».
13. Сформулировать определение понятия «***коэффициент жесткости пружины***».
14. Записать формулу для определения модуля ***силы упругости*** пружины.
15. Под действием каких сил осуществляются ***свободные колебания*** точки?
16. Записать ***дифференциальное уравнение свободных колебаний*** точки.
17. Записать ***уравнения свободных колебаний*** точки.
18. Сформулировать определение понятия «***амплитуда свободных колебаний*** точки».
19. Сформулировать определение понятия «***период свободных колебаний*** точки».

20. Сформулировать определение понятия «***циклическая частота свободных колебаний*** точки».
21. Записать ***дифференциальное уравнение затухающих колебаний*** точки.
22. Записать ***уравнения затухающих колебаний*** точки.
23. Сформулировать определение понятия «***период затухающих колебаний*** точки».
24. Сформулировать определение понятия «***амплитуда затухающих колебаний*** точки».
25. Сформулировать определение понятия «***циклическая частота затухающих колебаний***».
26. Какие колебания называют ***колебаниями с малым сопротивлением внешней среды***?
27. Записать ***уравнения апериодического движения*** точки.
28. Под действием каких сил происходят ***вынужденные колебания*** материальной точки?
29. Записать формулу для определения ***периода возмущающей силы***.
30. Записать ***дифференциальное уравнение движения точки*** под действием восстанавливающей и возмущающей сил.
31. Записать ***уравнение вынужденных колебаний малой частоты***.
32. Записать уравнение ***вынужденных колебаний большой частоты***.
33. Записать условие, при котором происходит ***явление резонанса***.
34. Записать ***дифференциальное уравнение движения точки***, происходящее под действием восстанавливающей силы, возмущающей силы, изменяющейся по периодическому закону, и силы сопротивления движению, пропорциональной первой степени скорости.
35. Записать ***основное уравнение динамики относительного движения***.
36. Записать формулу для определения ***переносной силы инерции***.
37. Записать формулу для определения ***кориолисовой силы инерции***.
38. Записать ***основное уравнение динамики относительного движения*** точки для случая, когда переносное движение есть неравномерное вращение отно-

сительно неподвижной оси, а относительное движение прямолинейное.

39. Записать ***основное уравнение динамики относительного движения*** точки для случая, когда переносное движение есть равномерное вращение относительно неподвижной оси, а относительное движение прямолинейное.
40. Записать ***основное уравнение динамики относительного движения*** точки для случая, когда переносное движение есть поступательное неравномерное криволинейное движение, а относительное движение прямолинейное.
41. Записать ***основное уравнение динамики относительного движения*** точки для случая, когда переносное движение есть прямолинейное и равномерное движение, а относительное движение прямолинейное.
42. Сформулировать ***принцип относительности классической механики***.
43. Сформулировать определение понятия «***механическая система***».
44. Сформулировать определение понятия «***свободная механическая система***».
45. Сформулировать определение понятия «***несвободная механическая система***».
46. Сформулировать определение понятия «***внешние силы***».
47. Сформулировать определение понятия «***внутренние силы***».
48. Сформулировать определение понятия «***неизменяемая механическая система***».
49. Сформулировать определение понятия «***центр масс механической системы***».
50. Записать формулу для определения ***радиус-вектора центра масс механической системы***.
51. Записать формулу для определения ***главного вектора активных сил***.
52. Записать формулу для определения ***главного вектора реакций внешних связей***.
53. Записать формулу для определения ***главного вектора реакций внутренних связей***.
54. Записать формулу для определения вектора ***скорости центра масс механической системы***.

55. Записать формулу для определения вектора ***ускорения центра масс механической системы***.
56. Записать формулы для определения ***проекций*** вектора ***скорости центра масс механической системы на координатные оси***.
57. Записать формулы для определения ***проекций*** вектора ***ускорения центра масс механической системы на координатные оси***.
58. Записать формулу для определения модуля ***скорости центра масс механической системы***.
59. Записать формулу для определения модуля ***ускорения центра масс механической системы***.
60. Что является ***мерой инертности*** при поступательном движении твердого тела?
61. Что является ***мерой инертности*** при вращательном движении твердого тела?
62. Сформулировать определение понятия «***момент инерции тела относительно оси вращения***».
63. Что характеризует ***момент инерции тела относительно оси вращения***?
64. Сформулировать ***теорему Штейнера***.
65. Записать формулу для определения ***момента инерции тела относительно вертикальной оси вращения***.
66. Сформулировать определение «***радиус инерции твердого тела относительно оси вращения***».
67. Записать формулу для определения ***момента инерции механической системы***.
68. Сформулировать ***теорему о движении центра масс механической системы***.
69. Записать векторную формулу, выражающую ***теорему о движении центра масс механической системы***.
70. Записать ***дифференциальные уравнения движения центра масс механической системы*** в декартовой системе отсчета.
71. Сформулировать первое следствие из ***теоремы о движении центра масс механической системы***.
72. Сформулировать второе следствие из ***теоремы о движении центра масс механической системы***.
73. Сформулировать определение понятия «***количество движения материальной точки***».
74. Сформулировать определение понятия «***импульс силы за промежуток времени***».

75. Записать формулу для определения ***импульса силы за промежуток времени***.
76. Сформулировать определение понятия «***количество движения механической системы***».
77. Записать ***теорему об изменении количества движения механической системы*** в векторной форме.
78. Записать ***теорему об изменении количества движения механической системы*** в скалярной форме.
79. Сформулировать определение понятия «***момент количества движения точки относительно произвольного центра***».
80. Сформулировать определение понятия «***плечо вектора количества движения точки относительно произвольного центра***».
81. Сформулировать определение понятия «***момент количества движения точки относительно оси***».
82. Записать формулы для определения ***моментов количества движения точки относительно координатных осей***.
83. Записать в векторной форме формулу, выражающую ***теорему об изменении момента количества движения материальной точки***.
84. Записать в скалярном виде формулу, выражающую ***теорему об изменении момента количества движения материальной точки***.
85. Сформулировать определение понятия «***центральная сила***».
86. Сформулировать определение понятия «***кинетический момент механической системы относительно оси***».
87. Записать в скалярном виде формулу, выражающую ***теорему об изменении кинетического момента механической системы относительно координатных осей***.
88. Сформулировать следствия из ***теоремы об изменении кинетического момента механической системы относительно координатных осей***.
89. Записать ***дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела*** в пространстве.
90. Записать ***дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела*** относительно вертикальной оси.

91. Записать ***дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела***.
92. Сформулировать определение понятия «***работа постоянной силы на прямолинейном перемещении точки ее приложения***».
93. Сформулировать определение понятия «***элементарная работа переменной силы***».
94. Записать формулу для определения ***работы силы тяжести***.
95. Сформулировать определение понятия «***мощность силы***».
96. Сформулировать определение понятия «***кинетическая энергия***».
97. Записать формулу для определения ***кинетической энергии материальной точки***.
98. Записать формулу для определения ***кинетической энергии поступательно движущегося твердого тела***.
99. Записать формулу для определения ***кинетической энергии вращающегося тела*** относительно вертикальной оси.
100. Записать формулу для определения ***кинетической энергии для твердого тела, совершающего плоскопараллельное движение***.
101. Записать формулу для определения ***кинетической энергии механической системы***.
102. Записать формулу, выражающую ***теорему об изменении кинетической энергии механической системы***.
103. Сформулировать определение понятия «***сила инерции***».
104. Записать формулу для определения ***силы инерции материальной точки***.
105. Записать формулу, выражающую ***принцип Даламбера для несвободной материальной точки*** в векторной форме.
106. Записать формулы, выражающие ***принцип Даламбера для несвободной материальной точки*** в координатной форме.
107. Записать формулы, выражающие ***принцип Даламбера для несвободной механической системы*** в векторной форме.

108. Записать формулы, выражающие ***принцип Даламбера для несвободной неизменяемой механической системы*** в координатной форме.
109. Записать формулу для определения ***главного вектора сил инерции*** поступательно движущегося твердого тела.
110. Записать формулы, по которым определяются ***центробежная и вращательная силы инерции и момент сил инерции*** при вращательном движении тела относительно оси, не проходящей через центр масс, в случае, когда силы инерции приложены в центре масс.
111. Записать формулу для определения ***момента сил инерции*** при вращении тела относительно оси, проходящей через его центр масс.
112. Записать формулы для определения инерционных нагрузок при плоскопараллельном движении твердого тела.
113. Сформулировать определение понятия «***обобщенные координаты механической системы***».
114. Что изучает ***аналитическая механика***?
115. Сформулировать определение понятия «***возможные перемещения несвободной механической системы***».
116. Сформулировать определение понятия «***связи***».
117. Сформулировать определение понятия «***геометрические связи***».
118. Сформулировать определение понятия «***стационарные связи***».
119. Сформулировать определение понятия «***уравнения связей***».
120. Сформулировать определение понятия «***двусторонние (удерживающие) связи***».
121. Сформулировать определение понятия «***односторонние (неудерживающие) связи***».
122. Сформулировать определение понятия «***возможное перемещение системы***».
123. Сформулировать определение понятия «***возможная (элементарная) работа силы***».
124. Записать формулу для определения ***возможной работы силы***.
125. Записать формулу для определения ***возможной работы сил***, приложенных к механической системе.

126. Сформулировать определение понятия «***идеальные связи***».
127. Сформулировать ***принцип возможных перемещений***.
128. Записать формулу, выражающую ***принцип возможных перемещений***, в векторной форме.
129. Записать формулу, выражающую ***принцип возможных перемещений***, в координатной форме.
130. Записать формулу, выражающую ***принцип возможных скоростей (принцип возможных мощностей***).
131. Сформулировать ***общее уравнение динамики***.
132. Записать формулу, выражающую ***общее уравнение динамики***, в векторной форме.
133. Записать формулу, выражающую ***общее уравнение динамики***, в скалярной форме.
134. Записать формулу, выражающую ***общее уравнение динамики***, в координатной форме.
135. Записать ***уравнение Лагранжа второго рода***.
136. Сформулировать определение понятия «***обобщенная сила***».

Приложение 3

ВАРИАНТ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

Порядок выбора экзаменационного билета

Экзаменационные билеты содержат теоретические и практические задания по разделу «Динамика» курса теоретической механики.

Теоретическая часть экзаменационного билета сформирована из вопросов и заданий для самоконтроля, приведенных в данном учебно-методическом пособии. Эта часть экзаменационного билета содержит десять заданий.

Практическая часть экзаменационного билета состоит из пяти заданий и содержит некоторые вопросы, решаемые студентами при выполнении расчетно-графических работ.

Таким образом, экзаменационный билет позволяет произвести объективную оценку теоретических знаний и практических навыков применения этих знаний при решении конкретных инженерных задач.

Экзаменационный билет студент выбирает самостоятельно по двум последним цифрам номера своей зачетной книжки, используя следующую формулу:

$$b = c - 20\cdot i,$$

где b – номер экзаменационного билета; c – две последние цифры номера зачетной книжки студента; 20 – число предложенных студенту экзаменационных билетов; i – целое число, изменяющееся от 0 до 4.

Примеры определения номера экзаменационного билета:

c = 06, b = 06 - 20·0 = 6. Билет №6.
c = 32, b = 32 - 20·1 = 12. Билет №12.
c = 57, b = 57 - 20·2 = 17. Билет №17.
c = 73, b = 73 - 20·3 = 13. Билет №13.
c = 95, b = 95 - 20·4 = 15. Билет №15.

Пример ответа на экзаменационный билет

Теоретическая часть

Задание 1. Сформулировать **второй закон динамики**.

Ответ. **Второй закон динамики** – ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе, имеет одинаковое с ней направление.

Задание 2. Сформулировать определение термина «**инерциальная система отсчета**».

Ответ. **Инерциальная система отсчета** – система отсчета, по отношению к которой изолированная материальная точка находится в покое или движется равномерно и прямолинейно.

Задание 3. Сформулировать содержание **второй задачи динамики**.

Ответ. Содержание **второй задачи динамики** – зная силы, действующие на точку, ее массу, а также начальное положение точки и ее начальную скорость, требуется определить уравнения движения точки.

Задание 4. Записать **дифференциальные уравнения движения** несвободной материальной точки в декартовой системе отсчета.

Ответ. **Дифференциальные уравнения движения** несвободной материальной точки в декартовой системе отсчета:

$$m\ddot{x} = \sum F_{iox} + \sum R_{iox}; \quad m\ddot{y} = \sum F_{ioy} + \sum R_{ioy}; \quad m\ddot{z} = \sum F_{ioz} + \sum R_{ioz},$$

где m – масса точки; $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ – проекции ускорения точки на координатные оси; $\sum F_{iox}$, $\sum F_{ioy}$,, $\sum F_{ioz}$ – суммы проекций активных сил на соответствующие координатные оси; $\sum R_{iox}$, $\sum R_{ioy}$, $\sum R_{ioz}$ – суммы проекций реакций внешних связей на координатные оси.

Задание 5. Записать **основное уравнение динамики относительного движения точки**.

Ответ. **Основное уравнение динамики относительного движения точки** имеет вид

$$m\boldsymbol{a}_r = \sum \mathbf{F}_i + \sum \mathbf{R}_i + \mathbf{\Phi}_e + \mathbf{\Phi}_c,$$

где m – масса точки; $\boldsymbol{a}_r$ – относительное ускорение точки; $\sum \mathbf{F}_i$ – геометрическая сумма активных сил; $\sum \mathbf{R}_i$ – геометрическая сумма реакций внешних связей; $\mathbf{\Phi}_e$ – переносная сила инерции; $\mathbf{\Phi}_c$ – кориолисова сила инерции.

Задание 6. Что является мерой инертности при вращательном движении твердого тела?

Ответ. Мерой инертности твердого тела при его вращательном движении является **момент инерции тела относительно оси вращения**.

Задание 7. Записать **дифференциальное уравнение вращательного движения** твердого тела относительно оси OX.

Ответ. **Дифференциальное уравнение вращательного движения** твердого тела относительно оси OX имеет вид

$$J_{ox}(d_2\varphi/dt^2) = \sum M_{ox}(F_i^E) + \sum M_{ox}(R_i^E),$$

где J_{ox} – момент инерции тела относительно оси вращения OX; $d_2\varphi/dt^2$ – угловое ускорение тела; $\sum M_{ox}(F_i^E)$ – сумма моментов активных сил относительно оси вращения; $\sum M_{ox}(R_i^E)$ – сумма моментов реакций внешних связей относительно оси вращения.

Задание 8. Записать формулу для определения **кинетической энергии твердого тела** при его поступательном движении.

Ответ. **Кинетическую энергию твердого тела** при его поступательном движении определяют по формуле

$$T = m(V_c)^2/2,$$

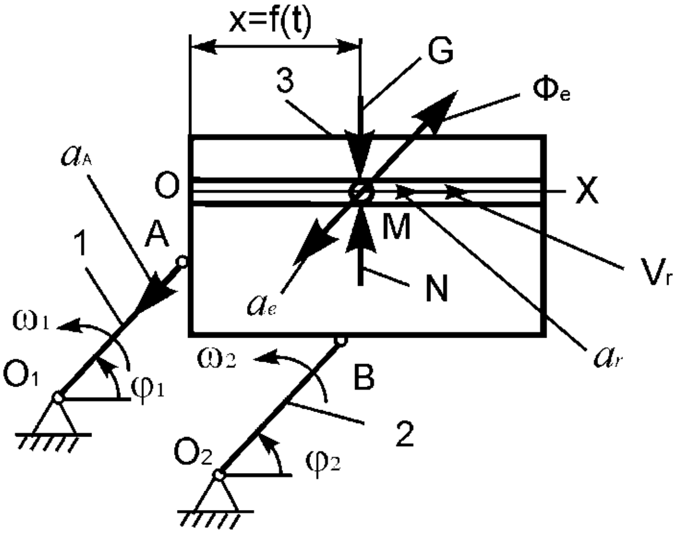
где T – кинетическая энергия; m – масса тела; V_c – скорость центра масс твердого тела.

Задание 9. Сформулировать определение понятия **обобщенные координаты механической системы**.

Ответ. **Обобщенные координаты механической системы** – независимые величины, заданием которых однозначно определяются положения точек механической системы.

Задание 10. Сформулировать определение понятия **механическая система**.

Ответ. **Механическая система** – любая совокупность материальных точек, движения которых взаимозависимы.



Плоский механизм состоит из трех тел. Тела 1, 2 имеют одинаковые размеры ($O_1A = O_2B = r_1 = r_2 = r$) и совершают вращательные движения с постоянными угловыми скоростями $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. По гладкому каналу, выполненному в теле 3, перемещается точка M массой m.

Записать дифференциальное уравнение относительного движения точки M.

Решение

$$a_A = a_e = \omega^2 \cdot r;$$

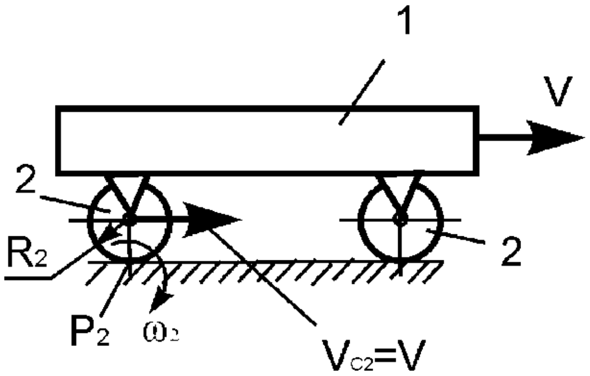
$a_A = \omega^2 \cdot r$ – ускорение точки A тела 1, совершающего вращательное движение. a_e – переносное ускорение. a_r – относительное ускорение. V_r – относительная скорость. G – сила тяжести. N – нормальная реакция. Φ_e – переносная сила инерции. x = f(t) – уравнение относительного движения точки.

$$\Phi_e = m \cdot a_e = m(\omega^2 \cdot r).$$

Ответ:

$$m\ddot{x} = \Phi_e \cos\omega t = m(\omega^2 r)\cos\omega t,$$

где $\ddot{x}$ – проекция относительного ускорения на координатную ось OX.



Тележка состоит из платформы 1 и колес 2. Платформа осуществляет поступательное движение со скоростью V. R_2 – радиус колеса 2. J_{c2x2} – момент инерции колеса 2 относительно оси, проходящей через его центр масс.

Определить кинетическую энергию колеса 2 массой m_2 в зависимости от скорости V и геометрических параметров платформы.

Решение

Тело 2 осуществляет плоскопараллельное движение. Его кинетическую энергию определяют по формуле

$$T_2 = m_2(V_{C2})^2/2 + J_{C2X2}(\omega_2)^2/2,$$

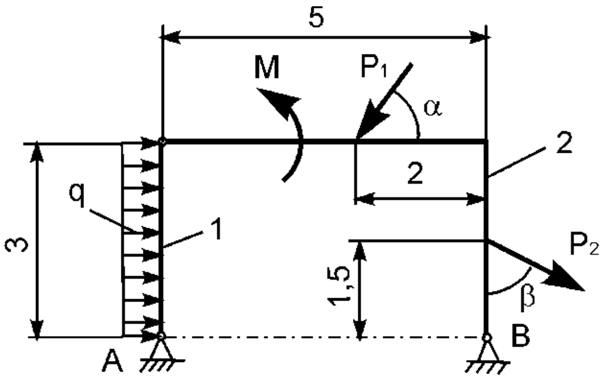
где m_2 – масса тела 2; V_{C2} – скорость центра C_2 масс тела 2; J_{C2X2} – момент инерции тела относительно оси C_2X_2, проходящей через его центр масс; ω_2 – угловая скорость тела 2.

Точка P_2 – мгновенный центр скоростей тела 2.

$$\omega_2 = V_{C2}/R_2 = V/R_2.$$

Ответ:

$$T_2 = (m_2V^2)/2 + (J_{c2x2}(V/R_2)^2)/2.$$



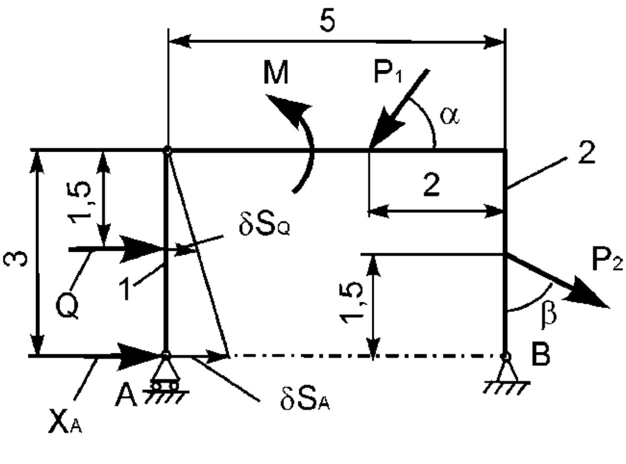
На плоскую механическую систему, состоящую из тел 1, 2, действуют активные нагрузки P_1, P_2, q, M.

Используя принцип возможных перемещений, определить горизонтальную составляющую реакции внешней связи в точке A.

Решение

Распределенную нагрузку заменим сосредоточенной силой **Q**.

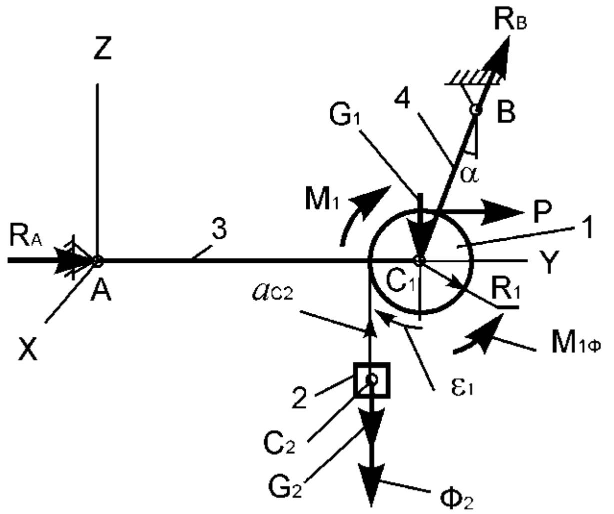
Снимем связь по горизонтали и перенесем реакцию $\mathbf{X}_A$ в разряд активных сил. Зададим возможное перемещение δS_A точке A тела 1. Точка приложения силы Q получит возможное перемещение $\delta \mathbf{S}_Q = \delta \mathbf{S}_A/2$.



Запишем принцип возможных перемещений. $Q\cdot \delta S_Q + X_A\cdot \delta S_A = 0$.

Так как $\delta S_Q = \delta S_A/2$, то имеем $Q\cdot \delta S_A/2 + X_A\cdot \delta S_A = 0$.

Ответ: $X_A = -Q/2$.



Механическая система, состоящая из однородного диска 1 с массой m_1, груза 2 массой m_2, невесомых стержней 3, 4 и нити, приходит в движение из состояния покоя. P – активная сила; M_1 – активный момент; R_1 – радиус тела 1; J_{c1x1} – радиус инерции тела 1 относительно оси, проходящей через его центр масс.

Используя принцип Даламбера, составить **уравнения динамического равновесия** механической системы.

Решение

Обозначения: G_1 – сила тяжести диска 1; G_2 – сила тяжести груза 2; C_1, C_2 – соответственно центры масс тел 1 и 2; a_{C2} – ускорение центра масс груза 2; ε_1 – угловое ускорение диска 1; Φ_2 – сила инерции груза 2; $M_{1\Phi}$ – приведенный момент сил инерции диска 1; R_A, R_B – реакции связей в точках A и B.

Ответ:

Уравнения динамического равновесия:

сумма проекций сил на горизонтальную ось

$$R_A + R_B\sin\alpha + P = 0; \qquad (1)$$

сумма проекций сил на вертикальную ось

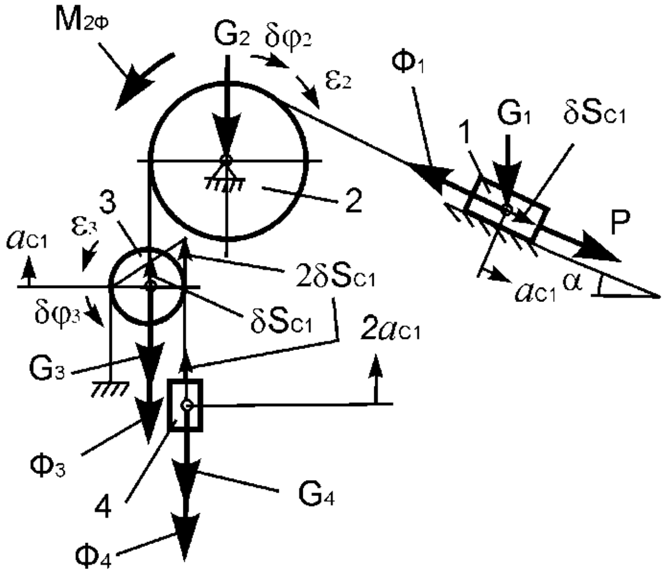
$$-G_1 - G_2 + R_B\cos\alpha - \Phi_2 = 0; \qquad (2)$$

сумма моментов сил относительно точки C_1

$$G_2 \cdot R_1 - M_1 - P \cdot R_1 + \Phi_2 \cdot R_1 + M_{1\Phi} = 0. \qquad (3)$$

В уравнениях (1), (2), (3) имеем: $G_1 = m_1 g$; $G_2 = m_2 g$; $\Phi_2 = m_2 a_{C2}$; $\varepsilon_1 = a_{C2}/R_1$; $M_{1\Phi} = J_{C1X1} \cdot \varepsilon_1$.

При решении уравнений (1), (2), (3) определяют неизвестные величины R_A, R_B, a_{C2}.



На механическую систему, состоящую из четырех тел, наложены идеальные связи. Известны геометрические параметры системы. Под действием активных нагрузок механическая система движется из состояния покоя.

Дано: m_1, m_2, m_3, m_4 – массы тел; J_{c2x2}, J_{c3x3} – моменты инерции тел 2, 3 относительно осей, проходящих через их центры масс; P – активная сила.

Составить **общее уравнение динамики** механической системы.

Решение

Обозначения: $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{G}_3$, $\mathbf{G}_4$ – силы тяжестей тел 1, 2, 3, 4; $\mathbf{\Phi}_1$, $\mathbf{\Phi}_3$, $\mathbf{\Phi}_4$ – силы инерции тел 1, 3, 4; $M_{2\Phi}$ – приведенный момент сил инерции тела 2; $\delta\mathbf{S}_{C1}$ – возможное перемещение центра масс тела 1; $\delta\varphi_2$, $\delta\varphi_3$ – возможные угловые перемещения тел 2,3; ε_2, ε_3 – угловые ускорения тел 2, 3; a_{C1} – ускорение центра масс тела 1.

Ответ:

Общее уравнение динамики механической системы

$$G_1\sin\alpha\cdot\delta S_{C1} - G_3\cdot\delta S_{C1} - G_4\cdot 2\delta S_{C1} + P\cdot\delta S_{C1} -$$
$$-\Phi_1\cdot\delta S_{C1} - M_{2\Phi}\cdot\delta\varphi_2 - \Phi_3\cdot\delta S_{C1} - M_{3\Phi}\cdot\delta\varphi_3 - \Phi_4\cdot 2\,\delta S_{C1} = 0,$$

где $G_1 = m_1 g$; $G_2 = m_2 g$; $G_3 = m_3 g$: $G_4 = m_4 g$; $\delta\varphi_2 = \delta S_{C1}/R_2$; $\delta\varphi_3 = \delta S_{C1}/R_3$; $\varepsilon_2 = a_{C1}/R_2$; $\varepsilon_3 = a_{C1}/R_3$; $\Phi_1 = m_1\, a_{C1}$; $\Phi_3 = m_3\, a_{C1}$; $\Phi_4 = m_4\, 2a_{C1}$; $M_{2\Phi} = J_{c2x2}\cdot\varepsilon_2$; $M_{3\Phi} = J_{c3x3}\cdot\varepsilon_3$.

При решении этого уравнения определяют ускорение a_{C1}.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ БИЛЕТЫ

Билет № 1

Теоретическая часть

Задание 1. Сформулировать ***второй закон динамики*** (закон пропорциональности силы и ускорения).

Задание 2. Сформулировать определение понятия «***период свободных колебаний*** точки».

Задание 3. Записать формулу для определения ***периода возмущающей силы***.

Задание 4. Сформулировать определение понятия «***механическая система***».

Задание 5. Что является ***мерой инертности*** при вращательном движении твердого тела?

Задание 6. Сформулировать определение понятия «***количество движения материальной точки***».

Задание 7. Записать формулу для определения ***кинетической энергии поступательно движущегося твердого тела***.

Задание 8. Записать формулу для определения ***момента сил инерции*** при вращении тела относительно оси, проходящей через его центр масс.

Задание 9. Сформулировать ***общее уравнение динамики***.

Задание 10. Записать формулу, выражающую ***общее уравнение динамики***, в скалярной форме.

Практическая часть

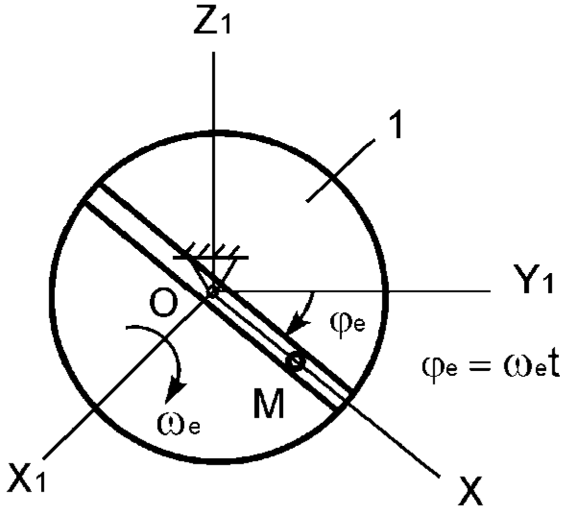


Рис. 1.1

Тело 1 вращается относительно оси OX_1 с постоянной угловой скоростью ω_e. По гладкому каналу, выполненному в теле 1, перемещается точка M массой m.

Записать дифференциальное уравнение относительного движения точки M.

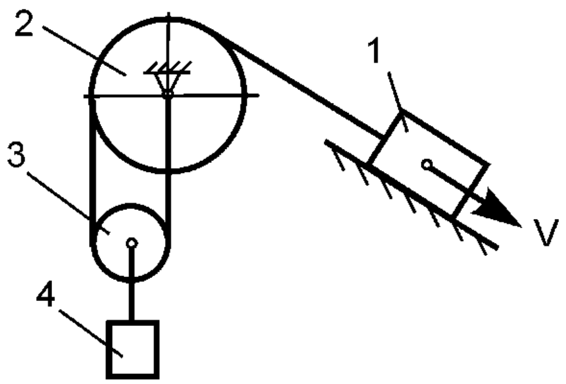


Рис. 1.2

Движущаяся механическая система состоит из четырех тел. Центр масс тела 1 имеет скорость V. Известны радиусы R_2, R_3 тел 2 и 3.

Определить кинетическую энергию тела 4 массой m_4 в зависимости от скорости V и геометрических параметров этой системы.

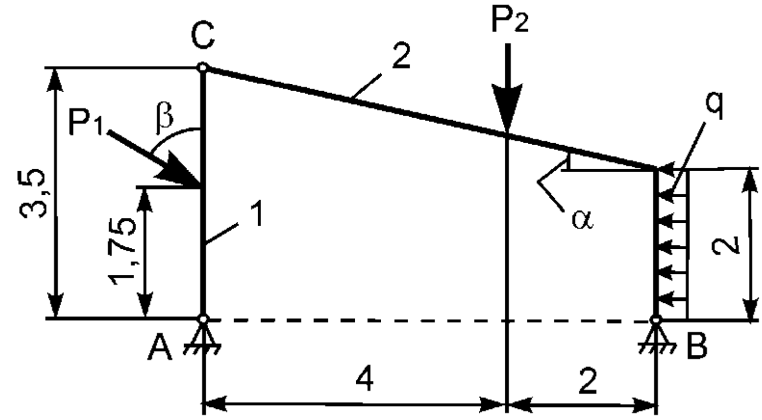


Рис. 1.3

На плоскую механическую систему, состоящую из тел 1, 2, действуют активные нагрузки P_1, P_2, q.

Используя принцип возможных перемещений, определить горизонтальную составляющую реакции внешней связи в точке А.

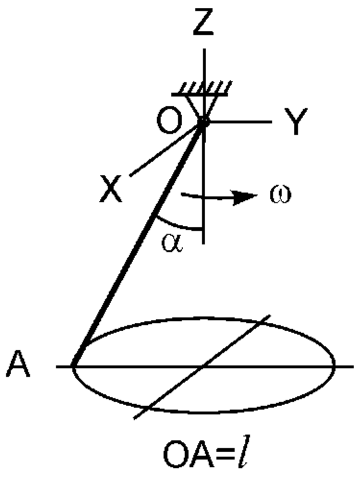


Рис. 1.4

Однородный стержень OA длиной l и массой m вращается относительно оси OZ с постоянной угловой скоростью ω.

Используя принцип Даламбера, записать уравнения динамического равновесия.

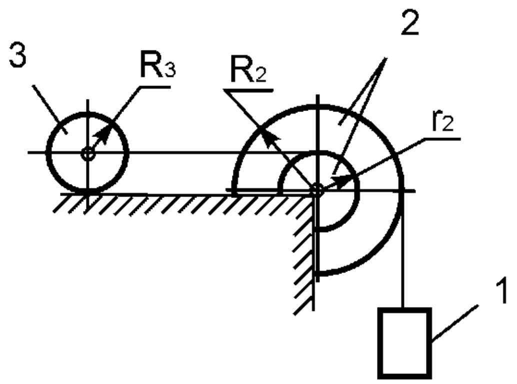


Рис. 1.5

На механическую систему, состоящую из трех тел, наложены идеальные связи. Известны геометрические параметры системы. Под действием активных нагрузок механическая система движется из состояния покоя.

Дано: m_1, m_2, m_3 – массы тел 1, 2, 3; J_{c2x2}, J_{c3x3} – моменты инерции тел 2, 3 относительно осей, проходящих через их центры масс.

Составить общее уравнение динамики механической системы.

Билет № 2

Теоретическая часть

Задание 1. Сформулировать ***третий закон динамики*** (закон равенства действия и противодействия).

Задание 2. Записать ***уравнения апериодического движения*** точки.

Задание 3. Записать формулу для определения ***переносной силы инерции***.

Задание 4. Записать формулу для определения вектора ***ускорения центра масс механической системы***.

Задание 5. Сформулировать второе следствие из ***теоремы о движении центра масс механической системы***.

Задание 6. Сформулировать определение понятия «***момент количества движения точки относительно оси***».

Задание 7. Записать формулу для определения ***главного вектора сил инерции*** поступательно движущегося твердого тела.

Задание 8. Записать ***теорему об изменении количества движения механической системы*** в векторной форме.

Задание 9. Записать ***дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела*** в пространстве.

Задание 10. Сформулировать ***первый закон динамики*** (закон инерции).

Практическая часть

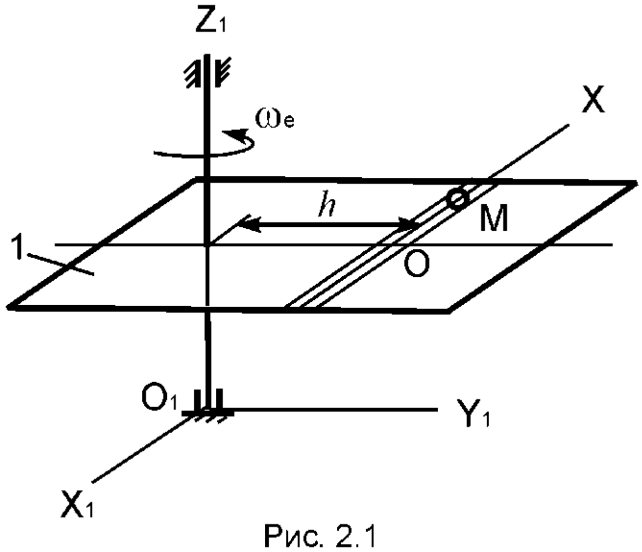


Рис. 2.1

Тело 1 вращается относительно оси O_1Z_1 с постоянной угловой скоростью ω_e. По гладкому каналу, выполненному в теле 1, перемещается точка M массой m.

Записать дифференциальное уравнение относительного движения точки M.

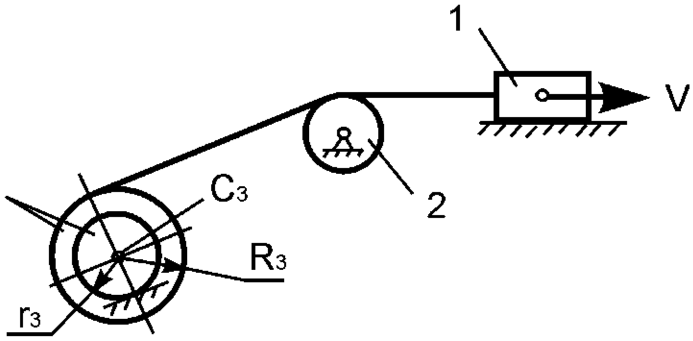


Рис. 2.2

Движущаяся механическая система состоит из трех тел. Центр масс тела 1 имеет скорость V. Известны радиусы r_3, R_3 тела 3 и его момент инерции J_{c3x3} относительно оси, проходящей через центр масс.

Определить кинетическую энергию тела 3 в зависимости от скорости V и геометрических параметров этой системы.

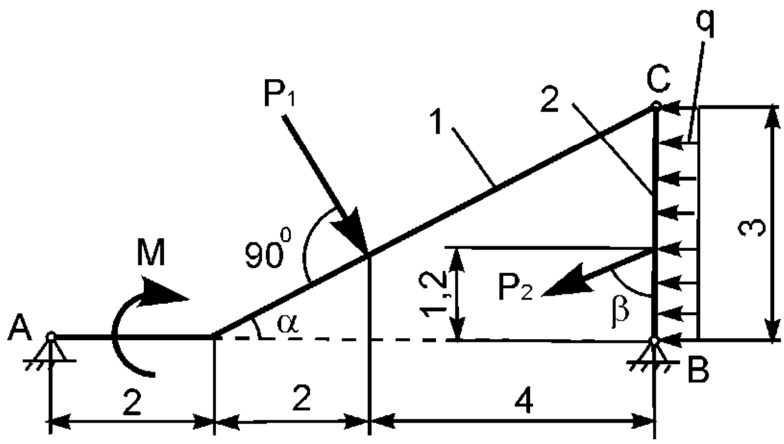


Рис. 2.3

На плоскую механическую систему, состоящую из двух тел, действуют активные нагрузки P_1, P_2, q, M.

Использую принцип возможных перемещений, определить горизонтальную составляющую реакции внешней связи в точке A.

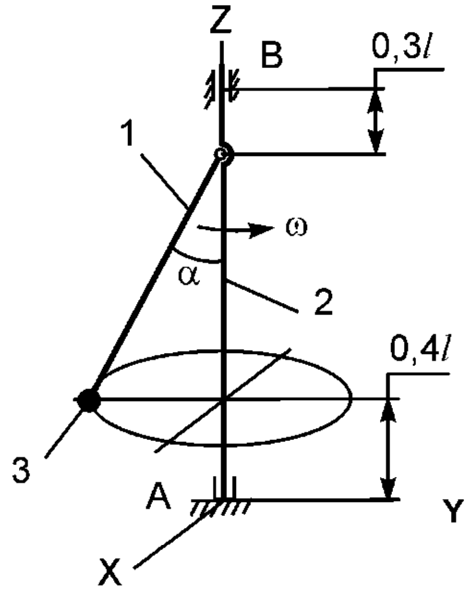


Рис. 2.4

Механическая система, состоящая из трех тел массами m_1, m_2, m_3, вращается относительно вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Шарик 3 принять за материальную точку. Тела 1, 2 – однородные стержни. l – длина стержня 1.

Используя принцип Даламбера, составить уравнения динамического равновесия механической системы.

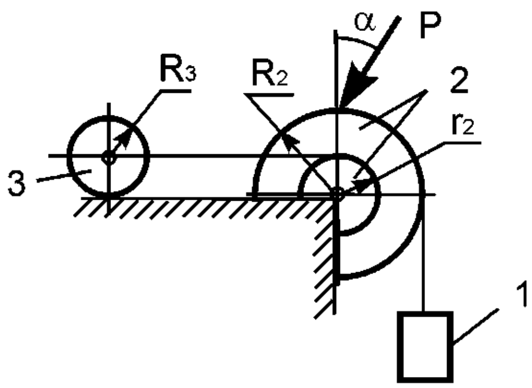


Рис. 2.5

На механическую систему, состоящую из трех тел, наложены идеальные связи. Известны геометрические параметры системы. Под действием активных нагрузок механическая система движется из состояния покоя.

Дано: m_1, m_2, m_3 – массы тел 1, 2, 3; J_{c2x2}, J_{c3x3} – моменты инерции тел 2, 3 относительно осей, проходящих через их центры масс; P – активная сила.

Составить общее уравнение динамики механической системы.

Билет № 3

Теоретическая часть

Задание 1. Сформулировать ***третий закон динамики*** (закон равенства действия и противодействия).

Задание 2. Под действием каких сил происходят ***вынужденные колебания*** материальной точки?

Задание 3. Записать ***основное уравнение динамики относительного движения*** точки для случая, когда переносное движение есть поступательное неравномерное криволинейное движение, а относительное движение прямолинейное.

Задание 4. Что является ***мерой инертности*** при поступательном движении твердого тела?

Задание 5. Сформулировать второе следствие из ***теоремы о движении центра масс механической системы***.

Задание 6. Сформулировать определение понятия «***центральная сила***».

Задание 7. Сформулировать определение понятия «***кинетическая энергия***».

Задание 8. Сформулировать определение понятия «***возможные перемещения несвободной механической системы***».

Задание 9. Что изучает ***аналитическая механика***?

Задание 10. Сформулировать определение понятия «***обобщенная сила***».

Практическая часть

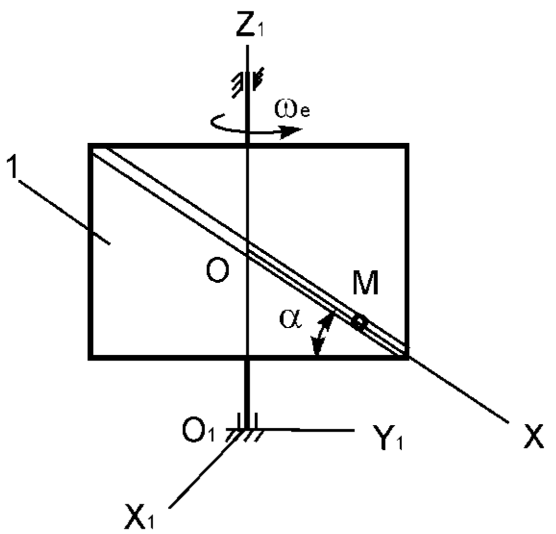


Рис. 3.1

Тело 1 вращается относительно оси O_1Z_1 с постоянной угловой скоростью ω_e. По гладкому каналу, выполненному в теле 1, перемещается точка M массой m.

Записать дифференциальное уравнение относительного движения точки M.

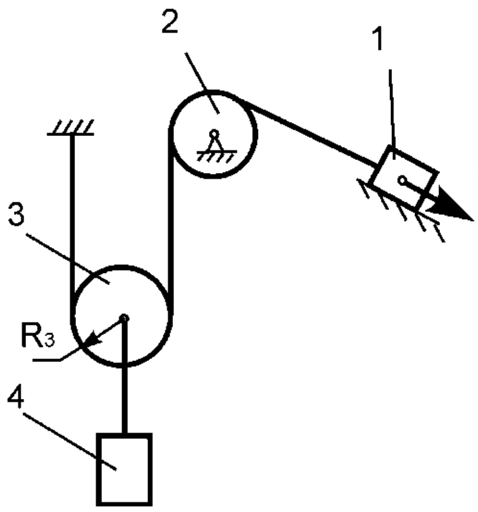


Рис. 3.2

Движущаяся механическая система состоит из четырех тел. Центр масс тела 1 имеет скорость V.

Определить кинетическую энергию тела 4 массой m_4 в зависимости от скорости V и геометрических параметров этой системы.

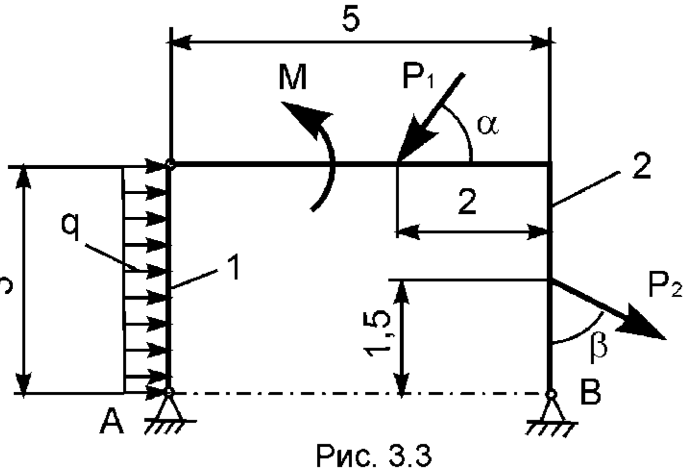


Рис. 3.3

На плоскую механическую систему, состоящую из двух тел, действуют активные нагрузки P_1, P_2, q, M.

Используя принцип возможных перемещений, определить горизонтальную составляющую реакции внешней связи в точке B.

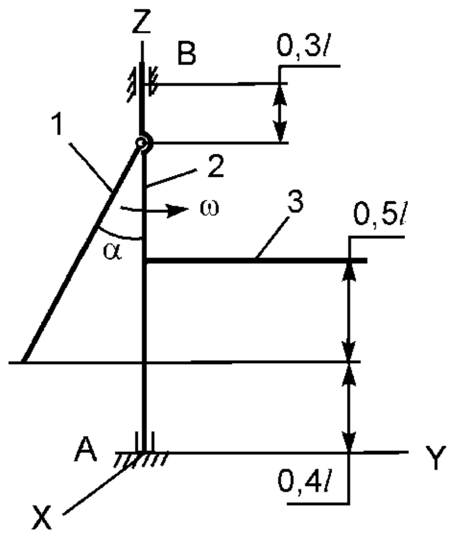


Рис. 3.4

Механическая система, состоящая из трех тел массами m_1, m_2, m_3, вращается относительно вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Тела 1, 2, 3 – однородные стержни. $l_1 = l_3 = l$ – длины стержней 1, 3.

Используя принцип Даламбера, составить уравнения динамического равновесия механической системы.

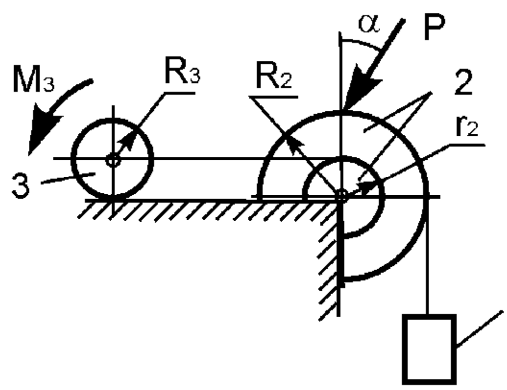


Рис. 3.5

На механическую систему, состоящую из трех тел, наложены идеальные связи. Известны геометрические параметры системы. Под действием активных нагрузок механическая система движется из состояния покоя.

Дано: m_1, m_2, m_3 – массы тел 1, 2, 3; J_{c2x2}, J_{c3x3} – моменты инерции тел 2, 3 относительно осей, проходящих через их центры масс; P – активная сила; M_3 – активный момент.

Составить общее уравнение динамики механической системы.

Билет № 4

Теоретическая часть

Задание 1. Сформулировать определение понятия «***инерциальная система отсчета***».

Задание 2. Под действием каких сил происходят ***вынужденные колебания*** материальной точки?

Задание 3. Записать дифференциальное уравнение движения точки, происходящее под действием восстанавливающей силы, возмущающей силы, изменяющейся по периодическому закону, и силы сопротивления движению, пропорциональной первой степени скорости.

Задание 4. Что является ***мерой инертности*** при поступательном движении твердого тела?

Задание 5. Записать формулу для определения ***момента инерции тела относительно вертикальной оси вращения***.

Задание 6. Сформулировать определение понятия «***плечо вектора количества движения точки относительно произвольного центра***».

Задание 7. Записать формулу для определения ***работы силы тяжести***.

Задание 8. Записать формулы, выражающие ***принцип Даламбера для несвободной неизменяемой механической системы*** в координатной форме.

Задание 9. Сформулировать определение понятия «***возможное перемещение системы***».

Задание 10. Записать формулу, выражающую ***принцип возможных перемещений***, в векторной форме.

Практическая часть

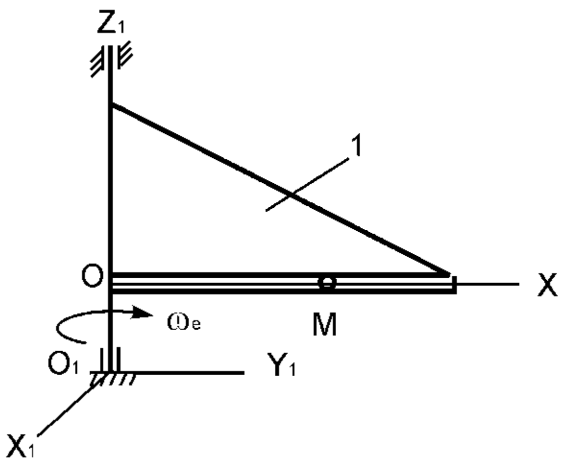


Рис. 4.1

Тело 1 вращается относительно оси O_1Z_1 с постоянной угловой скоростью ω_e. По гладкому каналу, выполненному в теле 1, перемещается точка М массой m.

Записать дифференциальное уравнение относительного движения точки М.

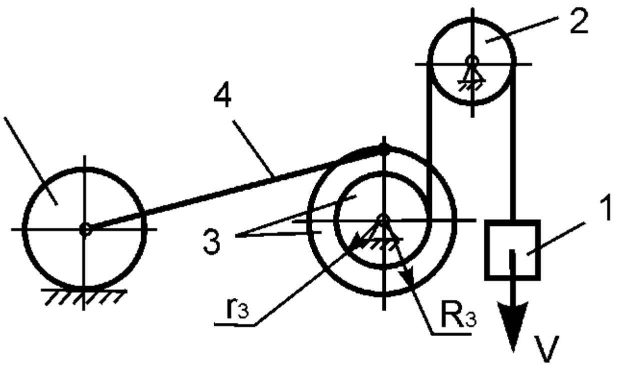


Рис. 4.2

Движущаяся механическая система состоит из пяти тел. Геометрические параметры тел известны. R_3, r_3, R_5 – соответствующие радиусы тел 3, 5. Центр масс тела 1 имеет скорость V. J_{c5x5} – момент инерции тела 5 относительно оси, проходящей через его центр масс.

Определить кинетическую энергию тела 5 массой m_5 в зависимости от скорости V и геометрических параметров этой системы.

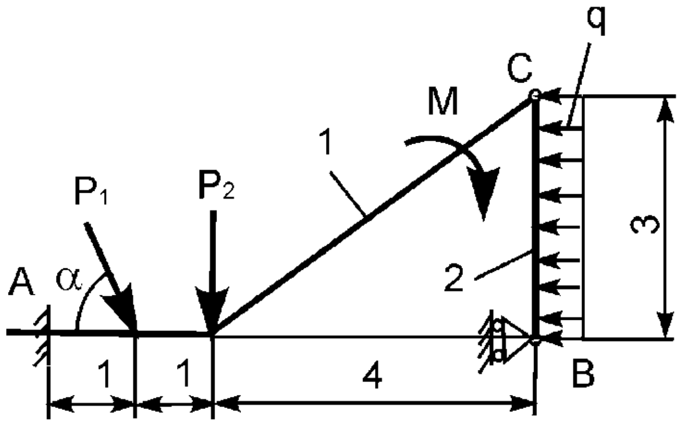


Рис. 4.3

На плоскую механическую систему, состоящую из двух тел, действуют активные нагрузки P_1, P_2, q, M.

Используя принцип возможных перемещений, определить вертикальную составляющую реакции внешней связи в точке А.

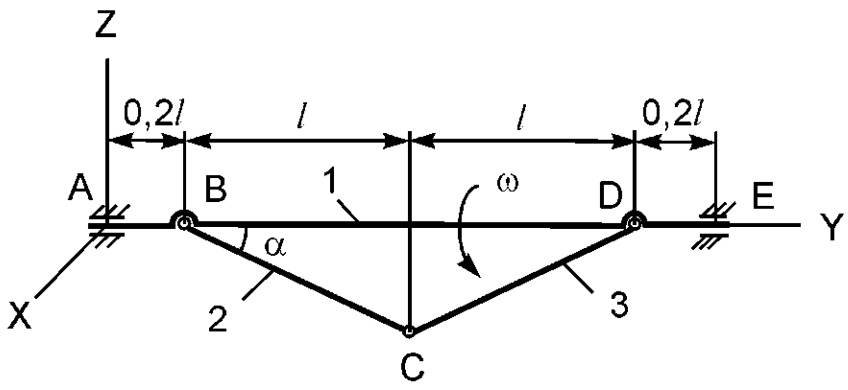


Рис. 4.4

Механическая система, состоящая из трех тел массами m_1, m_2, m_3, вращается относительно горизонтальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Тела 1, 2, 3 – однородные стержни.

Используя принцип Даламбера, составить уравнения динамического равновесия механической системы.

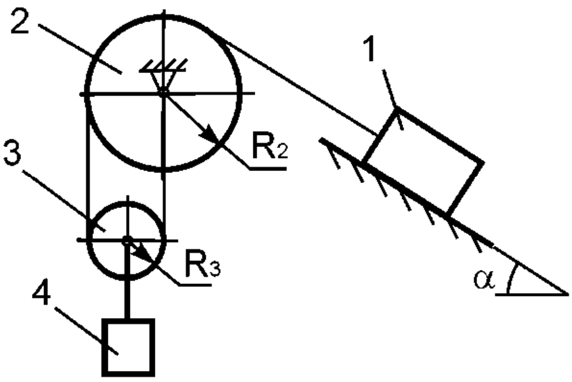


Рис. 4.5

На механическую систему, состоящую из четырех тел, наложены идеальные связи. Известны геометрические параметры системы. Под действием активных нагрузок механическая система движется из состояния покоя.

Дано: m_1, m_2, m_3, m_4 – массы тел; J_{c2x2}, J_{c3x3} – моменты инерции тел 2, 3 относительно осей, проходящих через их центры масс.

Составить общее уравнение динамики механической системы.

Билет № 5

Теоретическая часть

Задание 1. Записать ***основное уравнение динамики*** несвободной материальной точки в векторном виде.

Задание 2. Сформулировать определение понятия «***циклическая частота свободных колебаний*** точки».

Задание 3. Сформулировать определение понятия «***внутренние силы***».

Задание 4. Записать формулу для определения ***главного вектора реакций внешних связей***.

Задание 5. Сформулировать ***теорему Штейнера***.

Задание 6. Записать ***теорему импульсов*** в векторной форме.

Задание 7. Сформулировать определение понятия «***работа постоянной силы на прямолинейном перемещении точки ее приложения***».

Задание 8. Записать формулу для определения ***силы инерции материальной точки***.

Задание 9. Сформулировать определение понятия «***возможная (элементарная) работа силы***».

Задание 10. Записать ***уравнение Лагранжа второго рода***.

Практическая часть

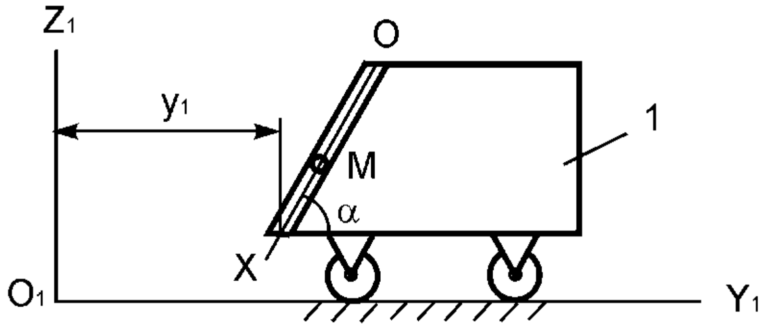


Рис. 5.1

Тележка 1 совершает поступательное горизонтальное движение по закону $y_1 = 4t^3 + 2t^2 + t + 1$, м. В гладком наклонном канале тележки перемещается шарик М массой m.

Записать дифференциальное уравнение относительного движения точки М.

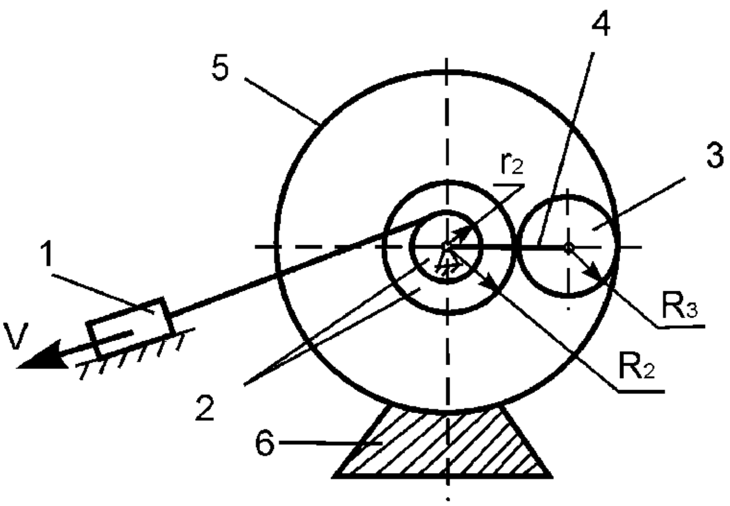


Рис. 5.2

Движущаяся механическая система состоит из шести тел. Геометрические параметры тел известны. R_2, r_2, R_3 – соответственно радиусы тел 2 и 3. J_{c3x3} – момент инерции тела 3 относительно оси, проходящей через его центр масс. Центр масс тела 1 имеет скорость V.

Определить кинетическую энергию тела 3 в зависимости от скорости V и геометрических параметров механизма.

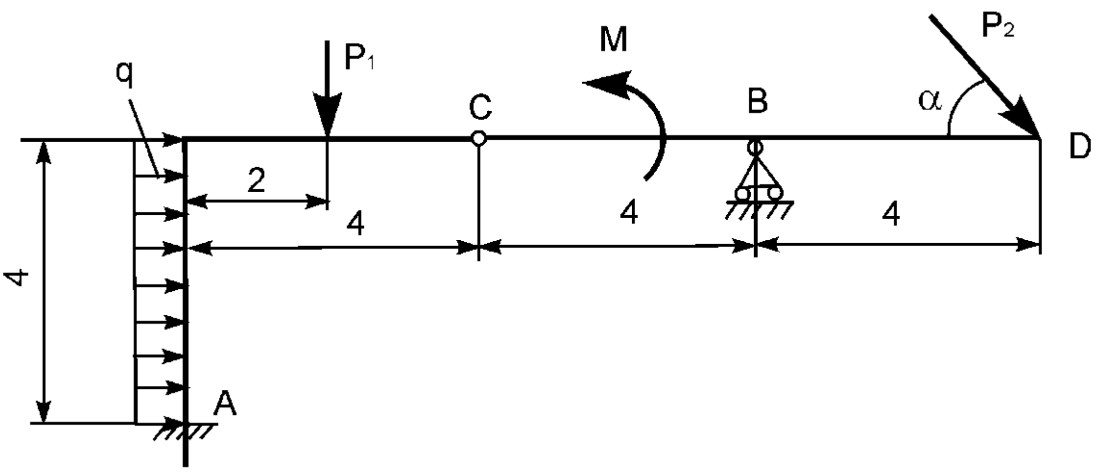


Рис. 5.3

На плоскую механическую систему, состоящую из двух тел, действуют активные нагрузки P_1, P_2, q, M.

Используя принцип возможных перемещений, определить вертикальную составляющую реакции внешней связи в точке А.

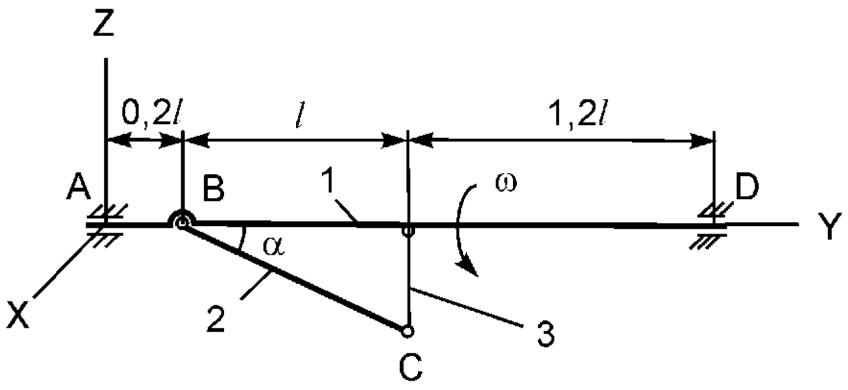


Рис. 5.4

Механическая система, состоящая из двух однородных стержней 1, 2 массами m_1, m_2 и невесомой нити 3, вращается относительно горизонтальной оси с постоянной угловой скоростью ω.

Используя принцип Даламбера, составить уравнения динамического равновесия механической системы.

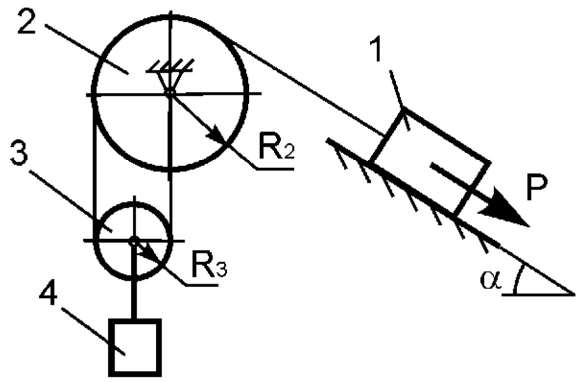


Рис. 5.5

На механическую систему, состоящую из четырех тел, наложены идеальные связи. Известны геометрические параметры системы. Под действием активных нагрузок механическая система движется из состояния покоя.

Дано: m_1, m_2, m_3, m_4 – массы тел; J_{c2x2}, J_{c3x3} – моменты инерции тел 2, 3 относительно осей, проходящих через их центры масс; P – активная сила.

Составить общее уравнение динамики механической системы.

Билет № 6

Теоретическая часть

Задание 1 Записать ***дифференциальные уравнения движения*** несвободной материальной точки в декартовой системе отсчета.

Задание 2. Сформулировать определение понятия «***период свободных колебаний*** точки».

Задание 3. Записать уравнение ***вынужденных колебаний большой частоты***.

Задание 4. Сформулировать определение понятия «***несвободная механическая система***».

Задание 5. Что является ***мерой инертности*** при вращательном движении твердого тела?

Задание 6. Записать формулу для определения ***импульса равнодействующей нескольких сил***, действующих на точку.

Задание 7. Сформулировать определение понятия «***кинетический момент механической системы относительно оси***».

Задание 8. Записать формулу для определения ***кинетической энергии механической системы***.

Задание 9. Сформулировать определение понятия «***возможные перемещения несвободной механической системы***».

Задание 10. Записать формулу для определения ***возможной работы***.

Практическая часть

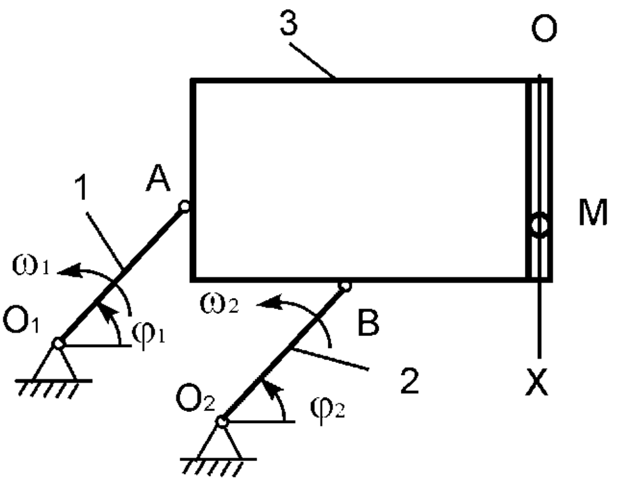


Рис. 6.1

Плоский механизм состоит из трех тел. Тела 1, 2 имеют одинаковые размеры ($O_1A = O_2B = r_1 = r_2 = r = 1$ м.) и совершают вращательные движения с постоянными угловыми скоростями $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. По гладкому каналу, выполненному в теле 3, перемещается точка M массой m.

Записать дифференциальное уравнение относительного движения точки M.

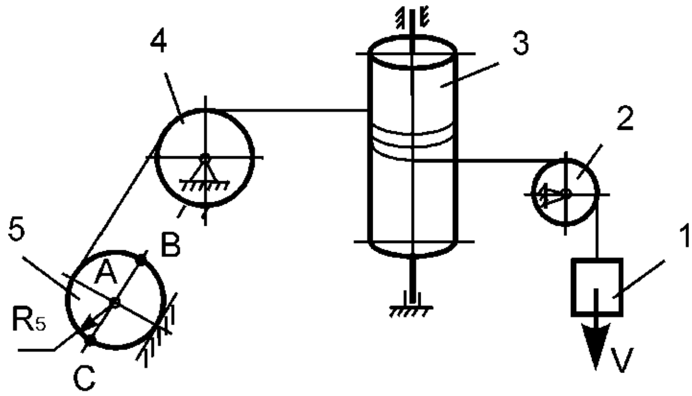


Рис. 6.2

Движущаяся механическая система состоит из пяти тел. Геометрические параметры тел известны. R_5 – радиус тела 5. Центр масс тела 1 имеет скорость V. J_{c5x5} – момент инерции тела 5 относительно оси, проходящей через его центр масс.

Определить кинетическую энергию тела 5 массой m_5 в зависимости от скорости V и геометрических параметров этой системы.

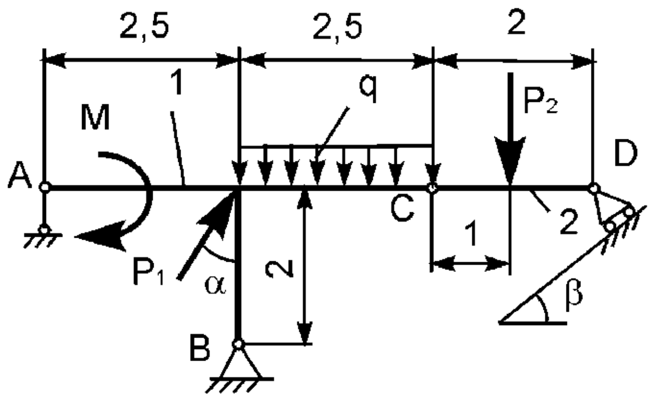


Рис. 6.3

На плоскую механическую систему, состоящую из двух тел, действуют активные нагрузки P_1, P_2, q, M.

Используя принцип возможных перемещений, определить реакцию внешней связи в точке D.

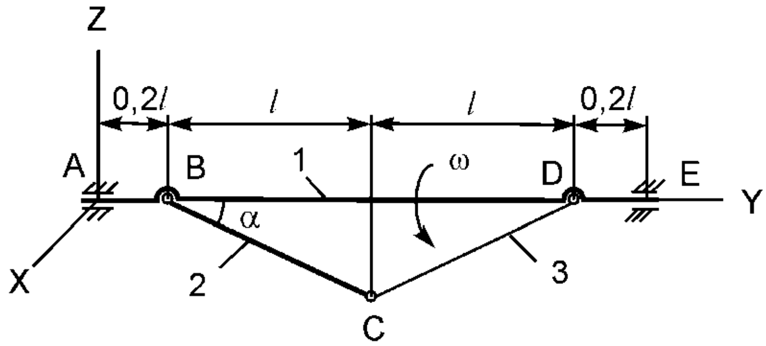


Рис. 6.4

Механическая система, состоящая из двух однородных стержней 1, 2 массами m_1, m_2 и невесомой нити 3, вращается относительно горизонтальной оси с постоянной угловой скоростью ω.

Используя принцип Даламбера, составить уравнения динамического равновесия механической системы.

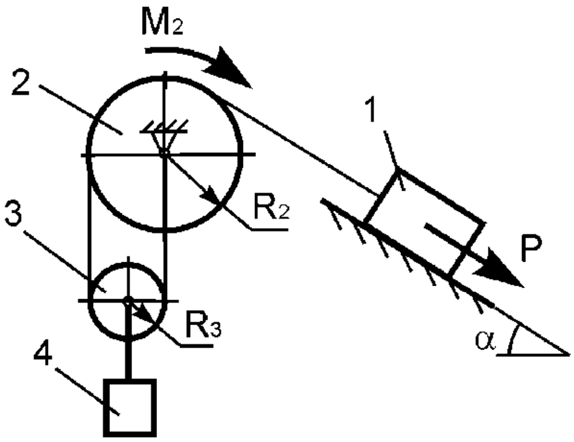


Рис. 6.5

На механическую систему, состоящую из четырех тел, наложены идеальные связи. Известны геометрические параметры системы. Под действием активных нагрузок механическая система движется из состояния покоя.

Дано: m_1, m_2, m_3, m_4 – массы тел; J_{c2x2}, J_{c3x3} – моменты инерции тел 2, 3 относительно осей, проходящих через их центры масс; P – активная сила; M_2 – активный момент.

Составить общее уравнение динамики механической системы.

Билет № 7

Теоретическая часть

Задание 1. Записать ***дифференциальные уравнения движения*** несвободной материальной точки в естественных координатных осях.

Задание 2. Записать ***уравнения затухающих колебаний*** точки.

Задание 3. Записать уравнение ***вынужденных колебаний большой частоты***.

Задание 4. Сформулировать определение понятия «***внутренние силы***».

Задание 5. Сформулировать определение понятия «***момент инерции тела относительно оси вращения***».

Задание 6. Записать ***теорему импульсов*** в векторной форме.

Задание 7. Записать в скалярном виде формулу, ***выражающую теорему об изменении кинетического момента механической системы относительно координатных осей***.

Задание 8. Записать формулу, выражающую ***теорему об изменении кинетической энергии механической системы***.

Задание 9. Сформулировать определение понятия «***связи***».

Задание 10. Записать формулу для определения ***возможной работы сил***, приложенных к механической системе.

Практическая часть

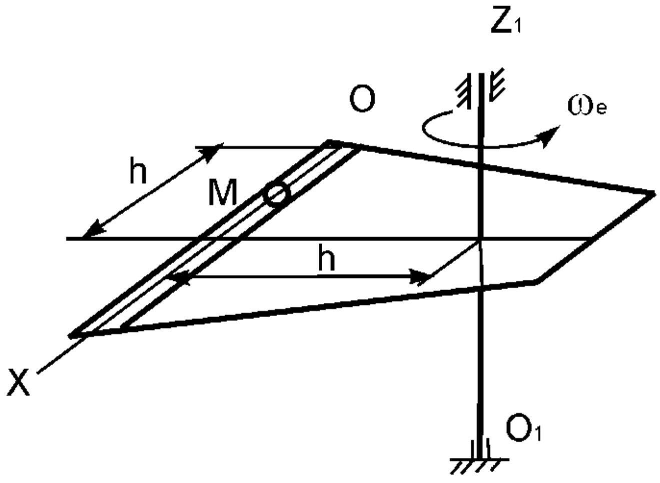


Рис. 7.1

Горизонтальная пластина вращается относительно оси O_1Z_1 с постоянной угловой скоростью ω_e. По гладкому каналу, выполненному на пластине, перемещается точка M массой m.

Записать дифференциальное уравнение относительного движения точки M.

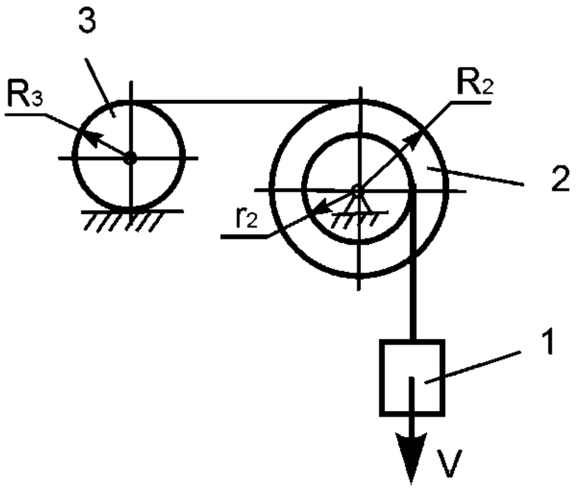


Рис. 7.2

Движущаяся механическая система состоит из трех тел. Геометрические параметры тел известны. R_2, r_2, R_3 – соответственно радиусы тел 3, 4. J_{c3x3} – момент инерции тела 3 относительно оси, проходящей через его центр масс. Центр масс тела 1 имеет скорость V.

Определить кинетическую энергию тела 3 в зависимости от скорости V и геометрических параметров этой системы.

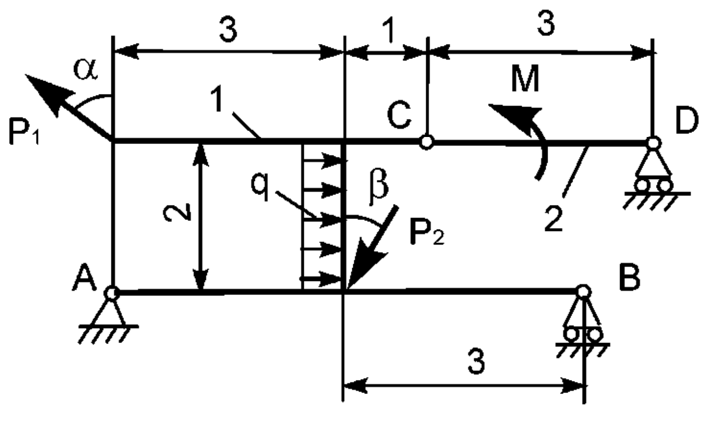


Рис. 7.3

На плоскую механическую систему, состоящую из двух тел, действуют активные нагрузки P_1, P_2, q, M.

Используя принцип возможных перемещений, определить горизонтальную составляющую реакции внешней связи в точке А.

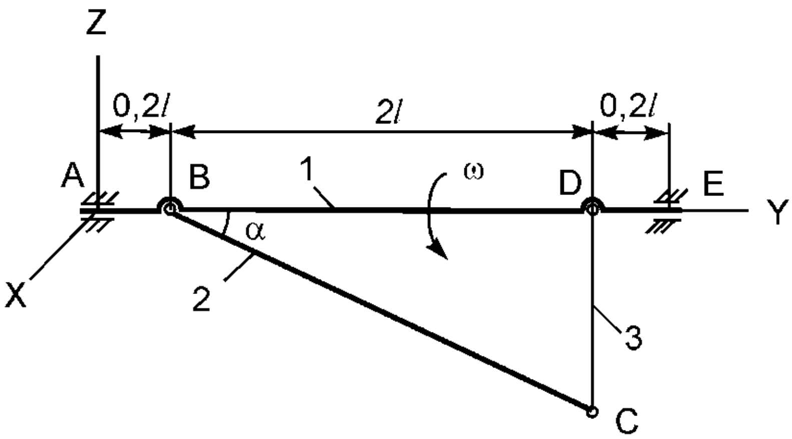


Рис. 7.4

Механическая система, состоящая из двух однородных стержней 1, 2 массами m_1, m_2 и невесомой нити 3, вращается относительно горизонтальной оси с постоянной угловой скоростью ω.

Используя принцип Даламбера, составить уравнения динамического равновесия механической системы.

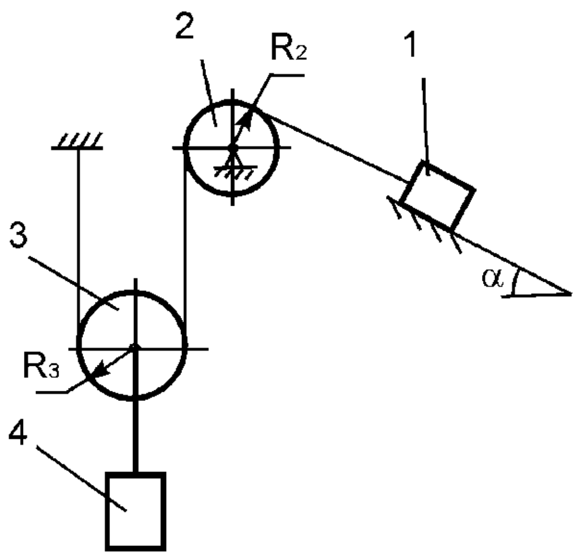


Рис. 7.5

На механическую систему, состоящую из четырех тел, наложены идеальные связи. Известны геометрические параметры системы. Под действием активных нагрузок механическая система движется из состояния покоя.

Дано: m_1, m_2, m_3, m_4 – массы тел; J_{c2x2}, J_{c3x3} – моменты инерции тел 2, 3 относительно осей, проходящих через их центры масс.

Составить общее уравнение динамики механической системы.

Билет № 8

Теоретическая часть

Задание 1. Сформулировать суть ***первой задачи динамики***.

Задание 2. Сформулировать определение понятия «***период затухающих колебаний*** точки».

Задание 3. Записать условие, при котором происходит ***явление резонанса***.

Задание 4. Сформулировать определение понятия «***неизменяемая механическая система***».

Задание 5. Что характеризует ***момент инерции тела относительно оси вращения***?

Задание 6. Записать ***теорему импульсов*** в скалярной форме.

Задание 7. Сформулировать следствия из теоремы об ***изменении кинетического момента механической системы относительно координатных осей***.

Задание 8. Сформулировать определение понятия «***сила инерции***».

Задание 9. Сформулировать определение понятия «***мощность силы***».

Задание 10. Сформулировать определение понятия «***идеальные связи***».

Практическая часть

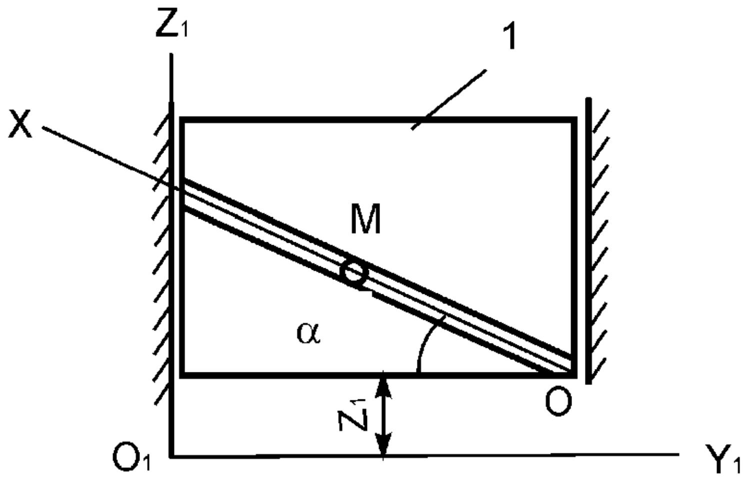


Рис. 8.1

Пластина совершает поступательное движение параллельно оси O_1Z_1 согласно уравнению $z_1 = 20\sin\pi t$. По каналу, выполненному на пластине, перемещается точка M массой m.

Записать дифференциальное уравнение относительного движения точки M.

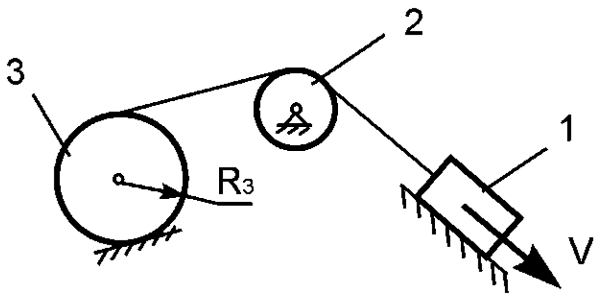


Рис. 8.2

Движущаяся механическая система состоит из трех тел. Геометрические параметры тел известны. R_2, R_3 – соответственно радиусы тел 3, 4. J_{c3x3} – момент инерции тела 3 относительно оси, проходящей через его центр масс. Центр масс тела 1 имеет скорость V.

Определить кинетическую энергию тела 3 в зависимости от скорости V и геометрических параметров этой системы.

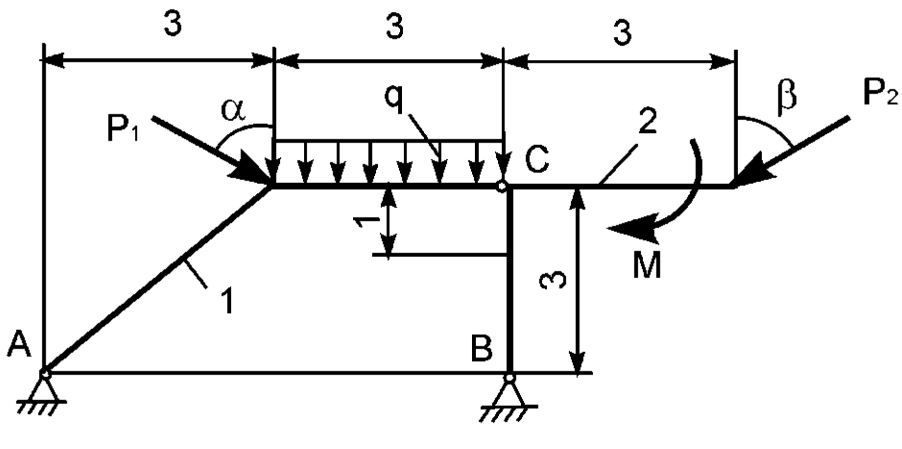


Рис. 8.3

На плоскую механическую систему, состоящую из двух тел, действуют активные нагрузки P_1, P_2, q, M.

Используя принцип возможных перемещений, определить горизонтальную составляющую реакции внешней связи в точке B.

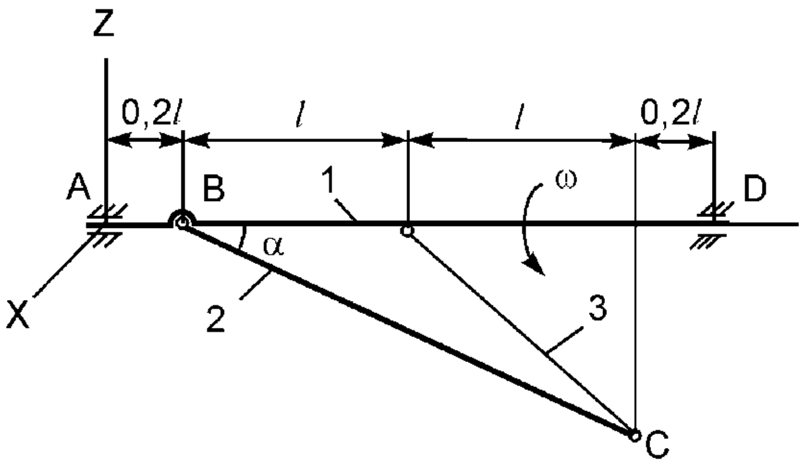


Рис. 8.4

Механическая система, состоящая из двух однородных стержней 1, 2 массами m_1, m_2 и невесомой нити 3, вращается относительно горизонтальной оси с постоянной угловой скоростью ω.

Используя принцип Даламбера, составить уравнения динамического равновесия механической системы.

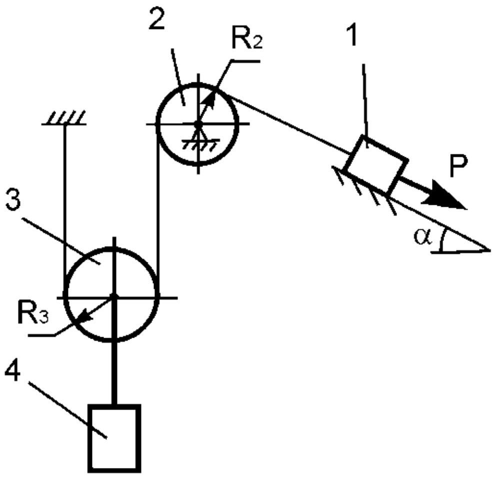


Рис. 8.5

На механическую систему, состоящую из четырех тел, наложены идеальные связи. Известны геометрические параметры системы. Под действием активных нагрузок механическая система движется из состояния покоя.

Дано: m_1, m_2, m_3, m_4 – массы тел; J_{c2x2}, J_{c3x3} – моменты инерции тел 2, 3 относительно осей, проходящих через их центры масс; P – активная сила.

Составить общее уравнение динамики механической системы.

Билет № 9

Теоретическая часть

Задание 1. Сформулировать суть ***второй задачи динамики***.

Задание 2. Сформулировать определение понятия «***амплитуда затухающих колебаний*** точки».

Задание 3. Записать дифференциальное уравнение движения точки, происходящее под действием восстанавливающей силы, возмущающей силы, изменяющейся по периодическому закону, и силы сопротивления движению, пропорциональной первой степени скорости.

Задание 4. Сформулировать определение понятия «***центр масс механической системы***».

Задание 5. Сформулировать ***теорему Штейнера***.

Задание 6. Сформулировать определение понятия «***количество движения механической системы***».

Задание 7. Записать ***дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела*** в пространстве.

Задание 8. Записать формулу для определения ***силы инерции материальной точки***.

Задание 9. Сформулировать определение понятия «***стационарные связи***».

Задание 10. Сформулировать ***принцип возможных перемещений***.

Практическая часть

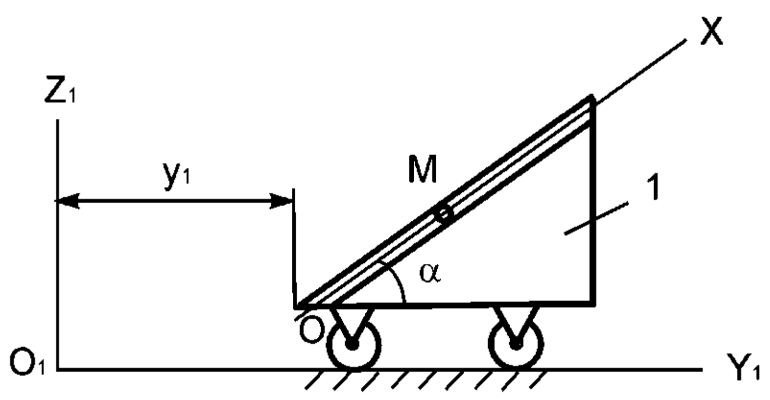


Рис. 9.1

Тележка 1 совершает поступательное горизонтальное движение по закону $y_1 = 4t^3 + 2t^2 + t + 1$, м. В гладком наклонном канале тележки перемещается шарик М массой m.

Записать дифференциальное уравнение относительного движения точки М.

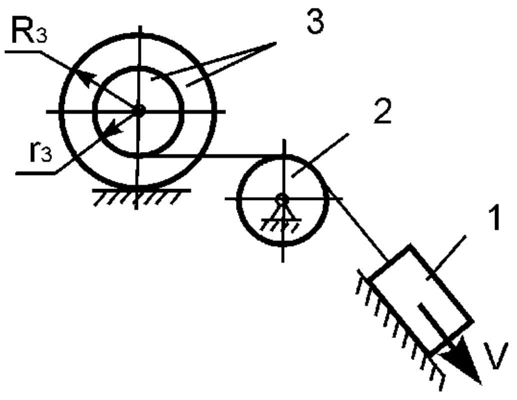


Рис. 9.2

Движущаяся механическая система состоит из трех тел. Геометрические параметры тел известны. R_3, r_3 – соответственно радиусы тела 3. J_{c3x3} – момент инерции тела 3 относительно оси, проходящей через его центр масс. Центр масс тела 1 имеет скорость V.

Определить кинетическую энергию тела 3 в зависимости от скорости V и геометрических параметров этой системы.

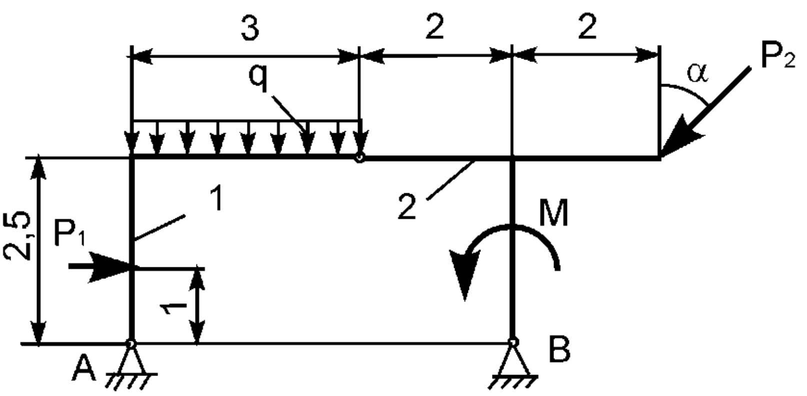


Рис. 9.3

На плоскую механическую систему, состоящую из двух тел, действуют активные нагрузки P_1, P_2, q, M.

Используя принцип возможных перемещений, определить горизонтальную составляющую реакции внешней связи в точке А.

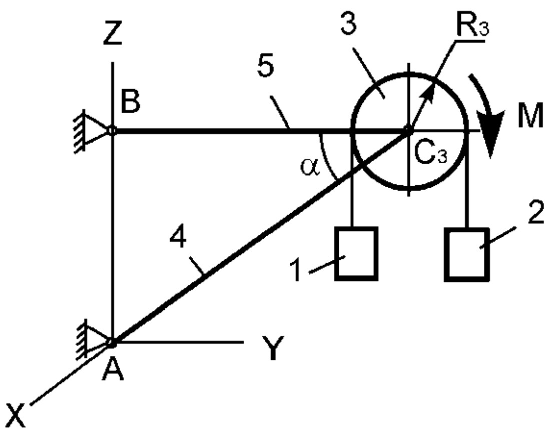


Рис. 9.4

Механическая система, состоящая из двух грузов 1, 2 массами m_1, m_2, однородного диска 3 массой m_3, невесомых стержней 4, 5 и нити, приходит в движение из состояния покоя. M – активный момент; R_3 – радиус тела 3; J_{c3x3} – момент инерции тела 3 относительно оси, проходящей через его центр масс.

Используя принцип Даламбера, составить уравнения динамического равновесия механической системы.

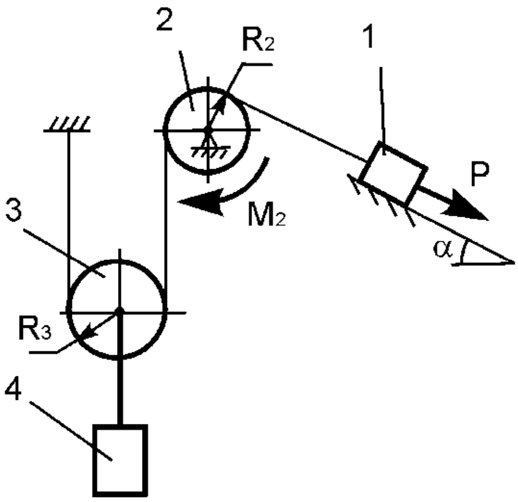


Рис. 9.5

На механическую систему, состоящую из четырех тел, наложены идеальные связи. Известны геометрические параметры системы. Под действием активных нагрузок механическая система движется из состояния покоя.

Дано: m_1, m_2, m_3, m_4 – массы тел; J_{c2x2}, J_{c3x3} – моменты инерции тел 2, 3 относительно осей, проходящих через их центры масс; P – активная сила; M_2 – активный момент.

Составить общее уравнение динамики механической системы.

Билет № 10

Теоретическая часть

Задание 1. Как определяются ***постоянные интегрирования*** при решении второй задачи динамики?

Задание 2. Сформулировать определение понятия «***циклическая частота затухающих колебаний***».

Задание 3. Записать ***основное уравнение динамики относительного движения***.

Задание 4. Записать формулу для определения ***радиус-вектора центра масс механической системы***.

Задание 5. Записать формулу для определения ***момента инерции тела относительно вертикальной оси вращения***.

Задание 6. Записать ***теорему об изменении количества движения механической системы*** в векторной форме.

Задание 7. Записать ***дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела*** относительно вертикальной оси.

Задание 8. Записать формулу, выражающую ***принцип Даламбера для несвободной материальной точки*** в векторной форме.

Задание 9. Записать формулы для определения инерционных нагрузок при плоскопараллельном движении твердого тела.

Задание 10. Сформулировать определение понятия «***обобщенная скорость***».

Практическая часть

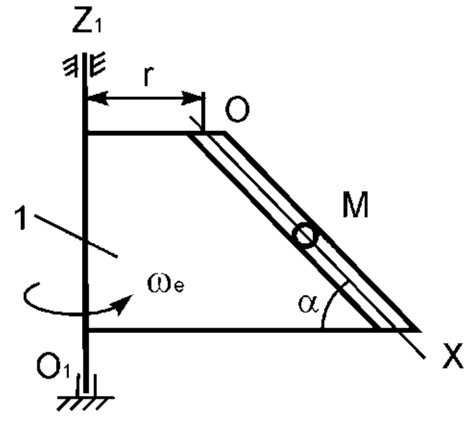


Рис. 10.1

Вертикальная пластина вращается относительно оси O_1Z_1 с постоянной угловой скоростью ω_e. По гладкому каналу, выполненному на пластине, перемещается точка М массой m.

Записать дифференциальное уравнение относительного движения точки М.

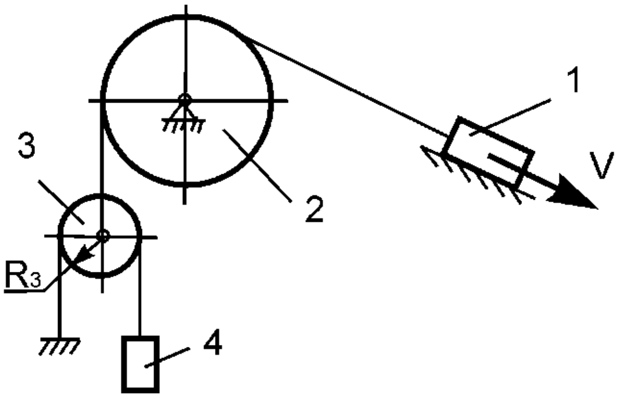


Рис. 10.2

Движущаяся механическая система состоит из четырех тел. Геометрические параметры тел известны. R_3 – радиус тела 3. Центр масс тела 1 имеет скорость V.

Определить кинетическую энергию тела 4 массой m_4 в зависимости от скорости V и геометрических параметров этой системы.

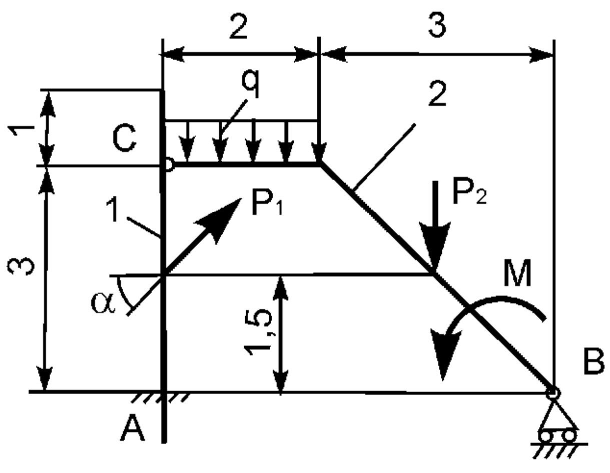


Рис. 10.3

На плоскую механическую систему, состоящую из двух тел, действуют активные нагрузки P_1, P_2, q, M.

Используя принцип возможных перемещений, определить горизонтальную составляющую реакции внешней связи в точке A.

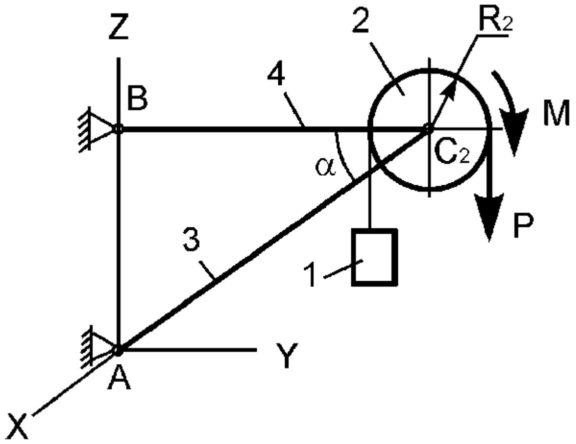


Рис. 10.4

Механическая система, состоящая из груза 1 массой m_1, однородного диска 2 массой m_2, невесомых стержней 3, 4 и нити, приходит в движение из состояния покоя. P – активная сила; M – активный момент; R_2 – радиус тела 2; J_{c2x2} – момент инерции тела 2 относительно оси, проходящей через его центр масс.

Используя принцип Даламбера, составить уравнения динамического равновесия механической системы.

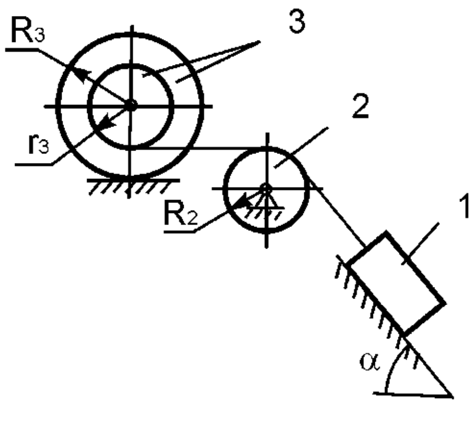


Рис. 10.5

На механическую систему, состоящую из четырех тел, наложены идеальные связи. Известны геометрические параметры системы. Под действием активных нагрузок механическая система движется из состояния покоя.

Дано: m_1, m_2, m_3 – массы тел; J_{c2x2}, J_{c3x3} – моменты инерции тел 2, 3 относительно осей, проходящих через их центры масс.

Составить общее уравнение динамики механической системы.

Билет № 11

Теоретическая часть

Задание 1. Сформулировать определение понятия «***восстанавливающая сила***».

Задание 2. Сформулировать определение понятия «***амплитуда затухающих колебаний*** точки».

Задание 3. Записать формулу для определения ***переносной силы инерции***.

Задание 4. Записать формулу для определения ***главного вектора активных сил***.

Задание 5. Сформулировать определение «***радиус инерции твердого тела относительно оси вращения***».

Задание 6. Записать ***теорему об изменении количества движения механической системы*** в скалярной форме.

Задание 7. Записать ***дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела***.

Задание 8. Записать формулы, выражающие ***принцип Даламбера для несвободной материальной точки*** в координатной форме.

Задание 9. Записать формулы, выражающие ***принцип Даламбера для несвободной неизменяемой механической системы*** в координатной форме.

Задание 10. Записать формулу, выражающую ***принцип возможных перемещений***, в координатной форме.

Практическая часть

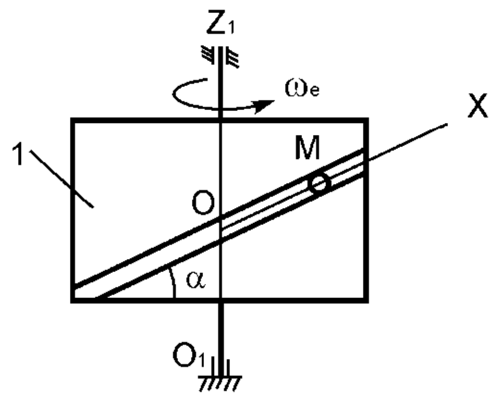


Рис. 11.1

Вертикальная пластина вращается относительно оси O_1Z_1 с постоянной угловой скоростью ω_e. По гладкому каналу, выполненному на пластине, перемещается точка M массой m.

Записать дифференциальное уравнение относительного движения точки M.

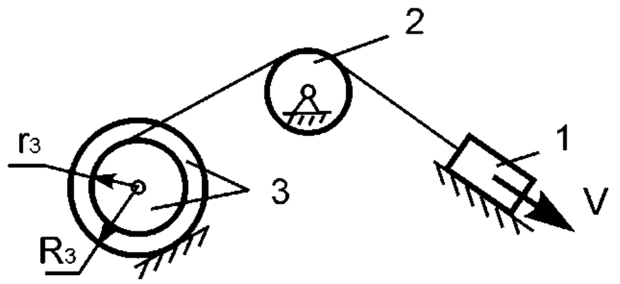


Рис. 11.2

Движущаяся механическая система состоит из трех тел. Геометрические параметры тел известны. R_3, r_3 – радиусы тела 3. J_{c3x3} – момент инерции тела 3 относительно оси, проходящей через его центр масс. Центр масс тела 1 имеет скорость V.

Определить кинетическую энергию тела 3 в зависимости от скорости V и геометрических параметров этой системы.

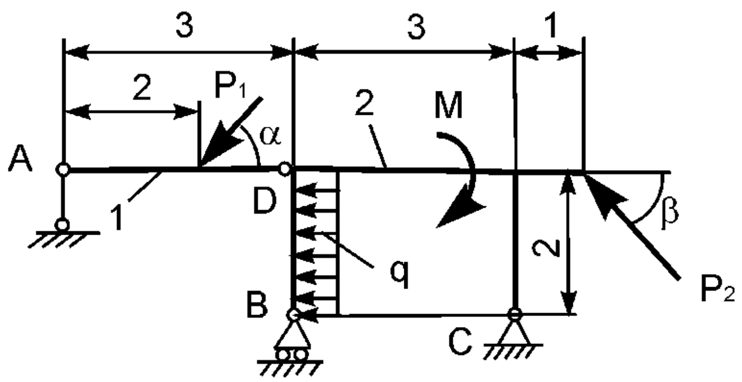


Рис. 11.3

На плоскую механическую систему, состоящую из тел 1, 2, действуют активные нагрузки P_1, P_2, q, M.

Используя принцип возможных перемещений, определить горизонтальную составляющую реакции внешней связи в точке C.

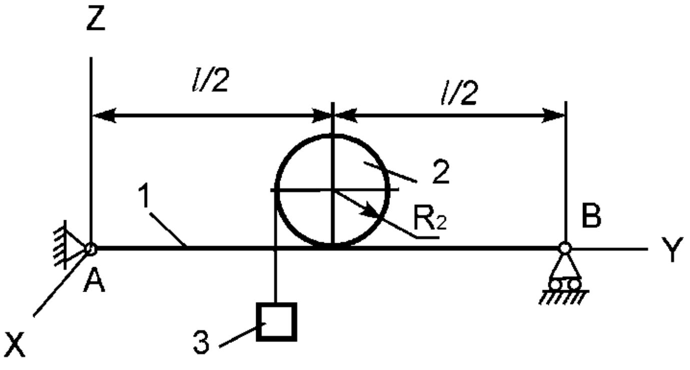


Рис. 11.4

Механическая система, состоящая из балки 1 массой m_1, однородного диска 2 массой m_2, груза 3 массой m_3 и нити, приходит в движение из состояния покоя. J_{c2x2} – момент инерции тела 2 относительно оси, проходящей через его центр масс.

Используя принцип Даламбера, составить уравнения динамического равновесия механической системы.

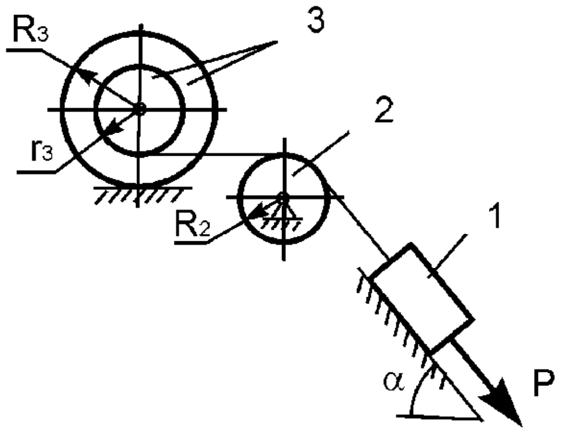


Рис. 11.5

На механическую систему, состоящую из трех тел, наложены идеальные связи. Известны геометрические параметры системы. Под действием активных нагрузок механическая система движется из состояния покоя.

Дано: m_1, m_2, m_3 – массы тел; J_{c2x2}, J_{c3x3} – моменты инерции тел 2, 3 относительно осей, проходящих через их центры масс; P – активная сила.

Составить общее уравнение динамики механической системы.

Билет № 12

Теоретическая часть

Задание 1. Сформулировать определение понятия «***коэффициент жесткости пружины***».

Задание 2. Под действием каких сил происходят ***вынужденные колебания*** материальной точки?

Задание 3. Записать формулу для определения ***кориолисовой силы инерции***.

Задание 4. Записать формулу для определения ***главного вектора реакций внешних связей***.

Задание 5. Записать формулу для определения ***момента инерции механической системы***.

Задание 6. Сформулировать следствия из ***теоремы об изменении количества движения механической системы***.

Задание 7. Сформулировать определение понятия «***работа постоянной силы на прямолинейном перемещении точки ее приложения***».

Задание 8. Записать формулы, выражающие ***принцип Даламбера для несвободной материальной точки*** в координатной форме.

Задание 9. Сформулировать определение понятия «***возможная (элементарная) работа силы***».

Задание 10. Записать формулу, выражающую ***принцип возможных скоростей (принцип возможных мощностей***).

Практическая часть

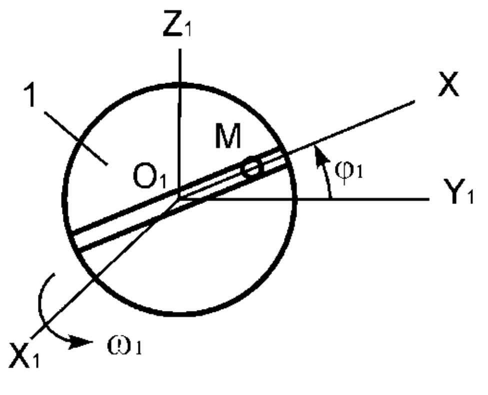


Рис. 12.1

Вертикальная пластина 1 вращается относительно оси O_1X_1 с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = \omega_e$. По гладкому каналу, выполненному на пластине, перемещается точка M массой m.

Записать дифференциальное уравнение относительного движения точки M.

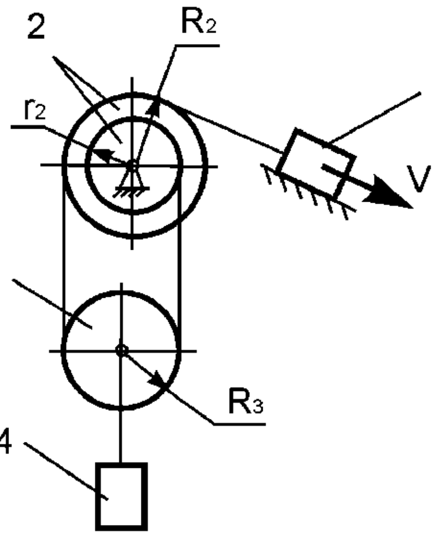


Рис. 12.2

Движущаяся механическая система состоит из четырех тел. Геометрические параметры тел известны. Центр масс тела 1 имеет скорость V.

Определить кинетическую энергию тела 4 массой m_4 в зависимости от скорости V и геометрических параметров механизма.

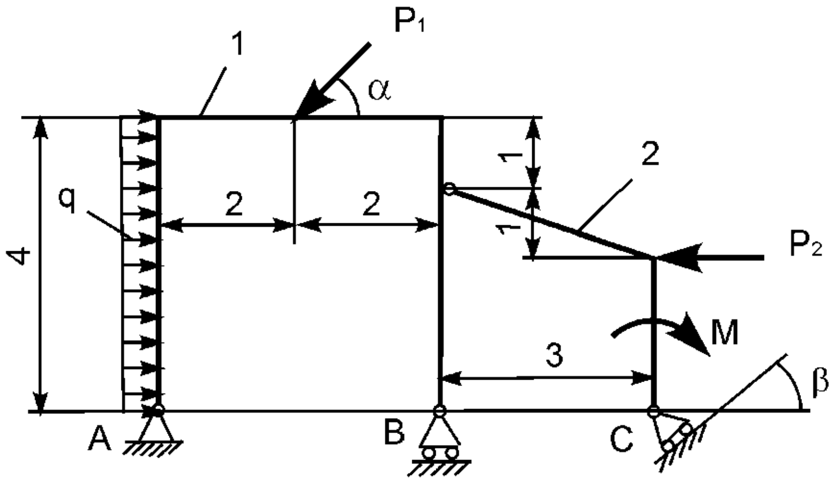


Рис. 12.3

На плоскую механическую систему, состоящую из тел 1, 2, действуют активные нагрузки P_1, P_2, q, M.

Используя принцип возможных перемещений, определить горизонтальную составляющую реакции внешней связи в точке А.

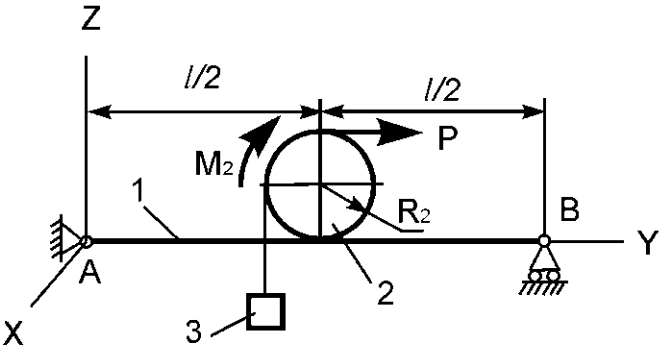


Рис. 12.4

Механическая система, состоящая из балки 1 массой m_1, однородного диска 2 массой m_2, груза 3 массой m_3 и нити, приходит в движение из состояния покоя. P – активная сила; M_2 – активный момент; R_2 – радиус тела 2; J_{c2x2} – момент инерции тела 2 относительно оси, проходящей через его центр масс.

Используя принцип Даламбера, составить уравнения динамического равновесия механической системы.

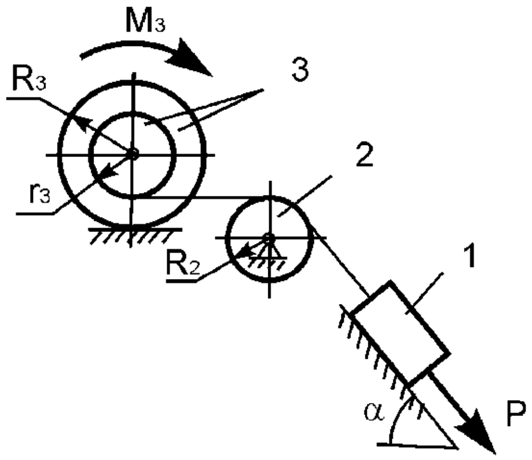


Рис. 12.5

На механическую систему, состоящую из трех тел, наложены идеальные связи. Известны геометрические параметры системы. Под действием активных нагрузок механическая система движется из состояния покоя.

Дано: m_1, m_2, m_3 – массы тел; J_{c2x2}, J_{c3x3} – моменты инерции тел 2, 3 относительно осей, проходящих через их центры масс; P – активная сила; M_3 – активный момент.

Составить общее уравнение динамики механической системы.

Билет № 13

Теоретическая часть

Задание 1. Записать формулу для определения модуля ***силы упругости*** пружины.

Задание 2. Какие колебания называют ***колебаниями с малым сопротивлением внешней среды***?

Задание 3. Записать ***основное уравнение динамики относительного движения*** точки для случая, когда переносное движение есть неравномерное вращение относительно неподвижной оси, а относительное движение прямолинейное.

Задание 4. Записать формулу для определения ***главного вектора реакций внутренних связей***.

Задание 5. Сформулировать ***теорему о движении центра масс механической системы***.

Задание 6. Сформулировать определение понятия «***момент количества движения точки относительно произвольного центра***».

Задание 7. Сформулировать определение понятия «***элементарная работа переменной силы***».

Задание 8. Записать формулы, выражающие ***принцип Даламбера для несвободной механической системы*** в векторной форме.

Задание 9. Записать формулу для определения ***возможной работы сил***, приложенных к механической системе.

Задание 10. Сформулировать ***общее уравнение динамики***.

Практическая часть

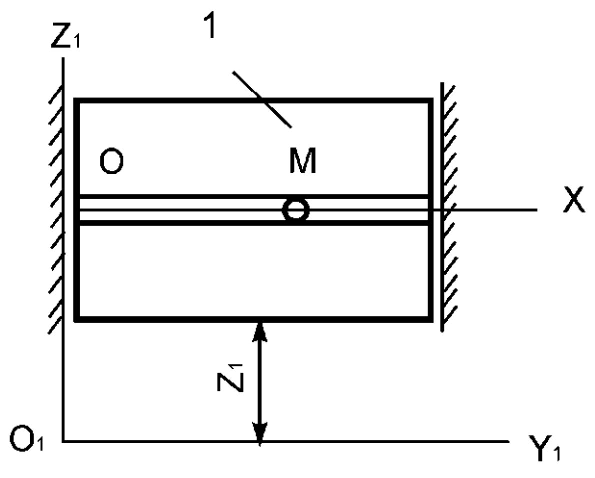


Рис. 13.1

Пластина совершает поступательное движение параллельно оси O_1Z_1 согласно уравнению $z_1 = 20\sin\pi t$. По гладкому каналу, выполненному на пластине, перемещается точка M массой m.

Записать дифференциальное уравнение относительного движения точки M.

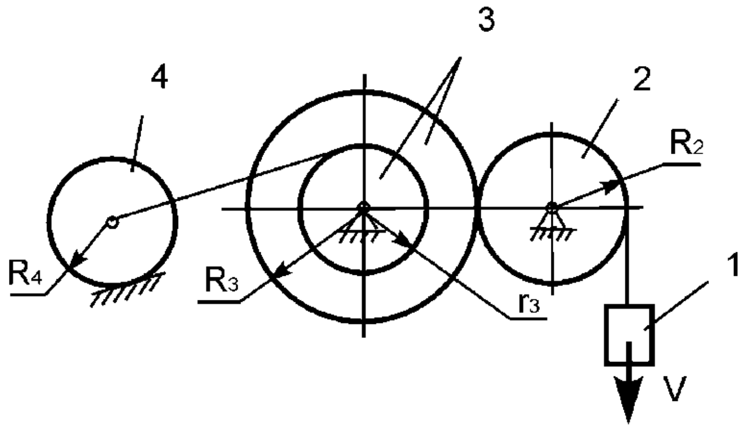


Рис. 13.2

Движущаяся механическая система состоит из четырех тел. Геометрические параметры тел известны. J_{c4x4} – момент инерции тела 4 относительно оси, проходящей через его центр масс. Центр масс тела 1 имеет скорость V.

Определить кинетическую энергию тела 4 массой m_4 в зависимости от скорости V и геометрических параметров механизма.

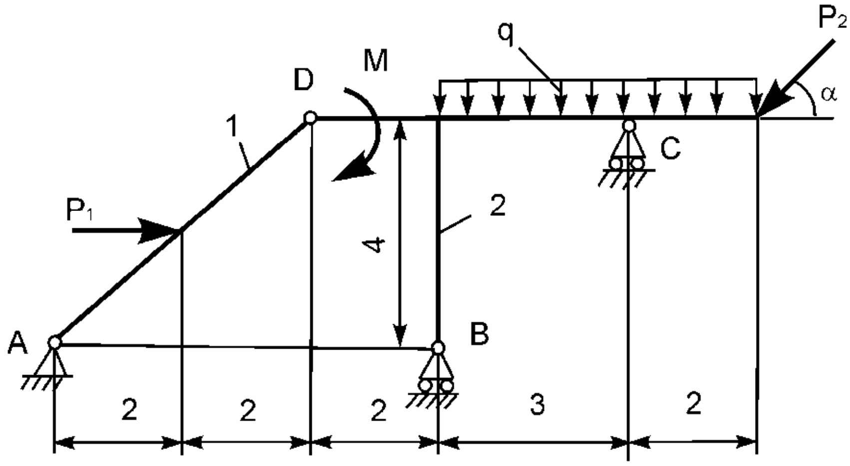


Рис. 13.3

На плоскую механическую систему, состоящую из двух тел, действуют активные нагрузки P_1, P_2, q, M.

Используя принцип возможных перемещений, определить горизонтальную составляющую реакции внешней связи в точке A.

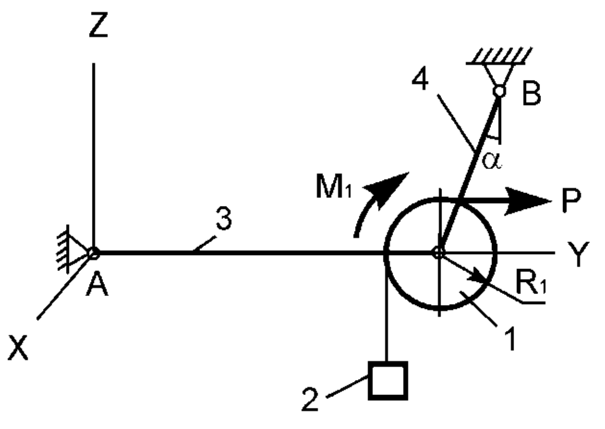


Рис. 13.4

Механическая система, состоящая из однородного диска 1 массой m_1, груза 2 массой m_2, невесомых стержней 3, 4 и нити, приходит в движение из состояния покоя. P – активная сила; M_1 – активный момент; R_1 – радиус тела 1; J_{c1x1} – момент инерции тела 1 относительно оси, проходящей через его центр масс.

Используя принцип Даламбера, составить уравнения динамического равновесия механической системы.

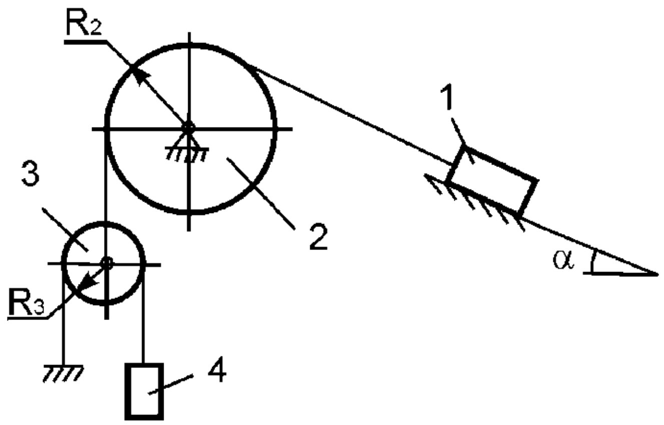


Рис. 13.5

На механическую систему, состоящую из четырех тел, наложены идеальные связи. Известны геометрические параметры системы. Под действием активных нагрузок механическая система движется из состояния покоя.

Дано: m_1, m_2, m_3, m_4 – массы тел; J_{c2x2}, J_{c3x3} – моменты инерции тел 2, 3 относительно осей, проходящих через их центры масс.

Составить общее уравнение динамики механической системы.

Билет № 14

Теоретическая часть

Задание 1. Под действием каких сил осуществляются ***свободные колебания*** точки?

Задание 2. Записать ***уравнения апериодического движения*** точки.

Задание 3. Записать ***основное уравнение динамики относительного движения*** точки для случая, когда переносное движение есть равномерное вращение относительно неподвижной оси, а относительное движение прямолинейное.

Задание 4. Записать формулу для определения вектора ***скорости центра масс механической системы***.

Задание 5. Записать векторную формулу, выражающую ***теорему о движении центра масс механической системы***.

Задание 6. Сформулировать определение понятия «***плечо вектора количества движения точки относительно произвольного центра***».

Задание 7. Записать ***уравнение вынужденных колебаний малой частоты***.

Задание 8. Записать формулы, выражающие ***принцип Даламбера для несвободной неизменяемой механической системы*** в координатной форме.

Задание 9. Записать формулу, выражающую ***общее уравнение динамики***, в векторной форме.

Задание 10. Сформулировать определение понятия «***обобщенная сила***».

Практическая часть

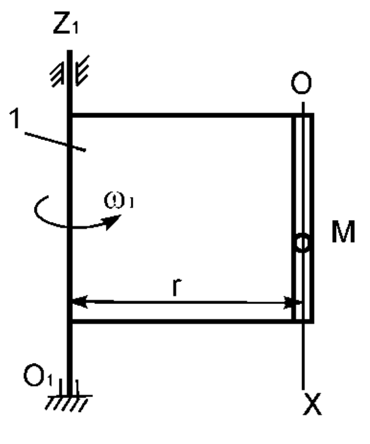


Рис. 14.1

Вертикальная пластина 1 вращается относительно оси O_1Z_1 с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = \omega_e$. По гладкому каналу, выполненному на пластине, перемещается точка M массой m.

Записать дифференциальное уравнение относительного движения точки M.

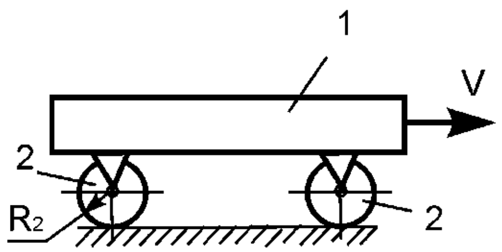


Рис. 14.2

Тележка состоит из платформы 1 и колес 2. Платформа осуществляет поступательное движение со скоростью V. R_2 – радиус колеса 2. J_{c2x2} – момент инерции колеса 2 относительно оси, проходящей через его центр масс.

Определить кинетическую энергию колеса 2 массой m_2 в зависимости от скорости V и геометрических параметров платформы.

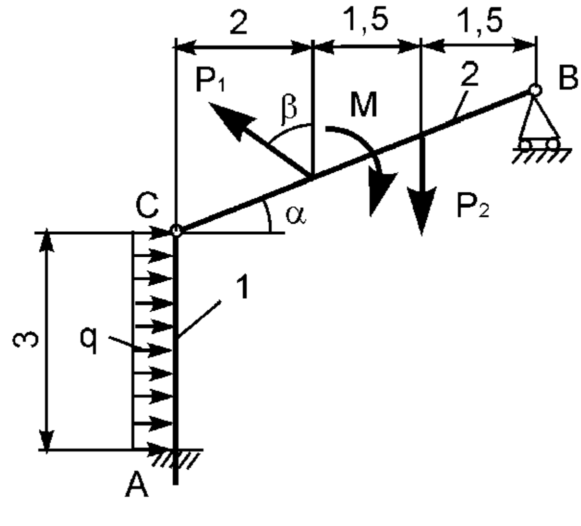


Рис. 14.3

На плоскую механическую систему, состоящую из тел 1, 2, действуют активные нагрузки P_1, P_2, q, M.

Используя принцип возможных перемещений, определить горизонтальную составляющую реакции внешней связи в точке A.

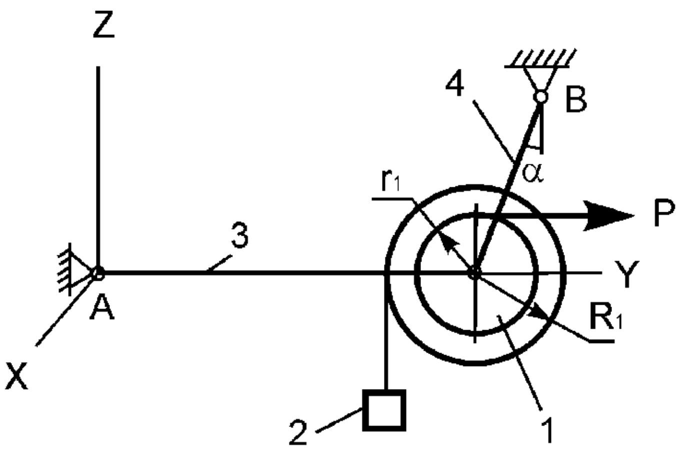


Рис. 14.4

Механическая система, состоящая из ступенчатого диска 1 массой m_1, груза 2 массой m_2, невесомых стержней 3, 4 и нити, приходит в движение из состояния покоя. P – активная сила; R_1, r_1 – радиусы тела 1; J_{c1x1} – момент инерции тела 1 относительно оси, проходящей через его центр масс.

Используя принцип Даламбера, составить уравнения динамического равновесия механической системы.

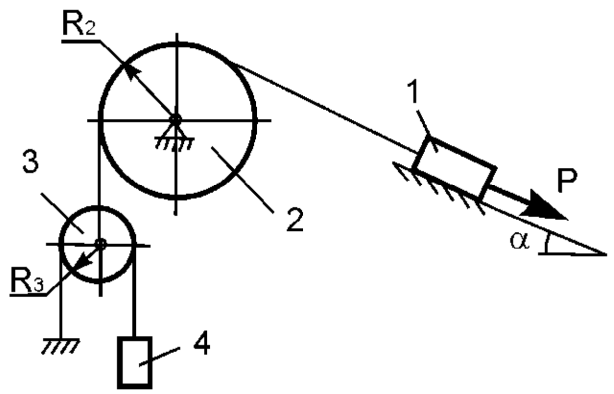


Рис. 14.5

На механическую систему, состоящую из четырех тел, наложены идеальные связи. Известны геометрические параметры системы. Под действием активных нагрузок механическая система движется из состояния покоя.

Дано: m_1, m_2, m_3, m_4 – массы тел; J_{c2x2}, J_{c3x3} – моменты инерции тел 2, 3 относительно осей, проходящих через их центры масс; P – активная сила.

Составить общее уравнение динамики механической системы.

Билет № 15

Теоретическая часть

Задание 1. Записать ***дифференциальное уравнение свободных колебаний*** точки.

Задание 2. Под действием каких сил происходят ***вынужденные колебания*** материальной точки?

Задание 3. Записать ***основное уравнение динамики относительного движения*** точки для случая, когда переносное движение есть поступательное неравномерное криволинейное движение, а относительное движение прямолинейное.

Задание 4. Записать формулу для определения вектора ***ускорения центра масс механической системы***.

Задание 5. Записать ***дифференциальные уравнения движения центра масс механической системы*** в декартовой системе отсчета.

Задание 6. Сформулировать определение понятия «***момент количества движения точки относительно оси***».

Задание 7. Сформулировать определение понятия «***мощность силы***».

Задание 8. Записать формулу для определения ***главного вектора сил инерции*** поступательно движущегося твердого тела.

Задание 9. Записать формулу для определения ***возможной работы сил***, приложенных к механической системе.

Задание 10. Записать формулу, выражающую ***общее уравнение динамики***, в скалярной форме.

Практическая часть

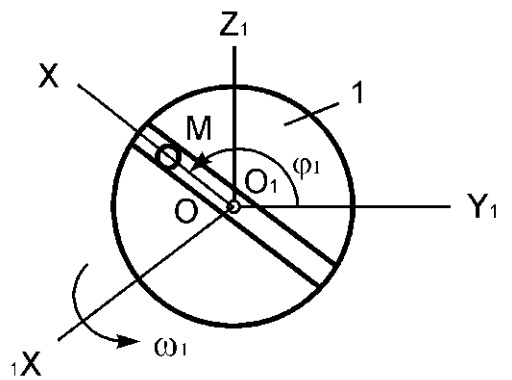


Рис. 15.1

Вертикальная пластина 1 вращается относительно оси O_1X_1 с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = \omega_e$. По гладкому каналу, выполненному на пластине, перемещается точка M массой m.

Записать дифференциальное уравнение относительного движения точки M.

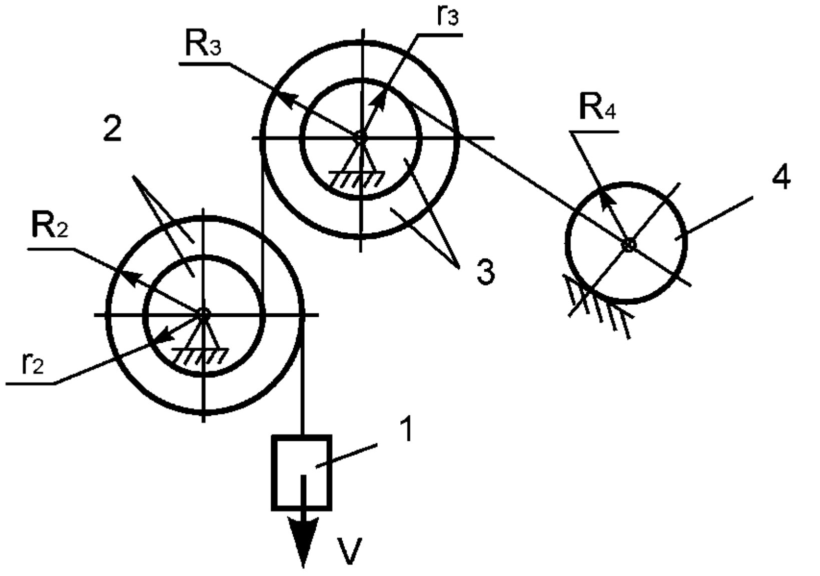


Рис. 15.2

Движущаяся механическая система состоит из четырех тел. Геометрические параметры тел известны. Центр масс тела 1 имеет скорость V. J_{c4x4} – момент инерции тела 4 относительно оси, проходящей через его центр масс.

Определить кинетическую энергию тела 4 в зависимости от скорости V и геометрических параметров механизма.

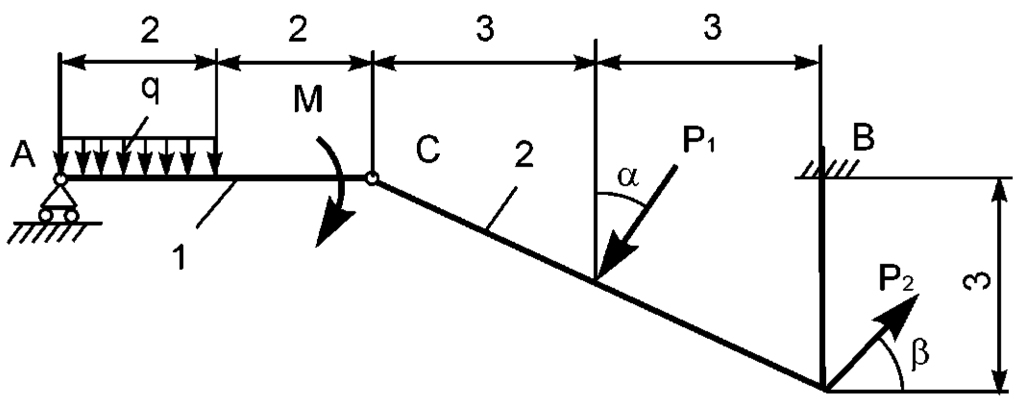


Рис. 15.3

На плоскую механическую систему, состоящую из двух тел, действуют активные нагрузки P_1, P_2, q, M.

Используя принцип возможных перемещений, определить вертикальную составляющую реакции внешней связи в точке B.

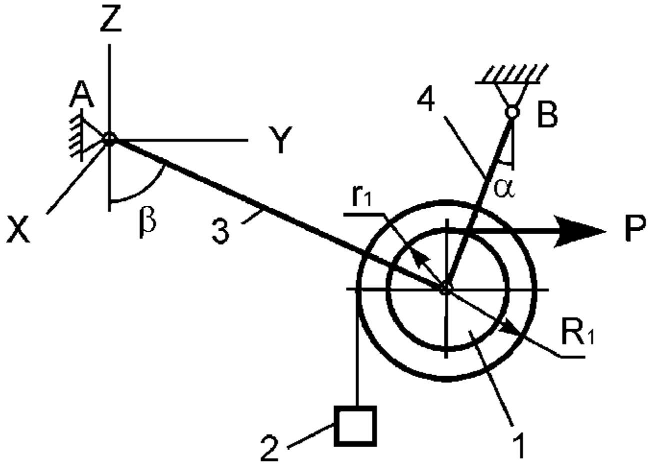


Рис. 15.4

Механическая система, состоящая из ступенчатого диска 1 массой m_1, груза 2 массой m_2, невесомых стержней 3, 4 и нити, приходит в движение из состояния покоя. P – активная сила; R_1, r_1 – радиусы тела 1; J_{c1x1} – момент инерции тела 1 относительно оси, проходящей через его центр масс.

Используя принцип Даламбера, составить уравнения динамического равновесия механической системы.

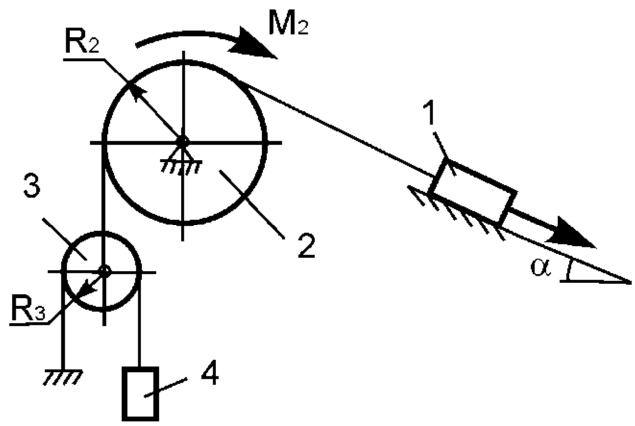


Рис. 15.5

На механическую систему, состоящую из четырех тел, наложены идеальные связи. Известны геометрические параметры системы. Под действием активных нагрузок механическая система движется из состояния покоя.

Дано: m_1, m_2, m_3, m_4 – массы тел; J_{c2x2}, J_{c3x3} – моменты инерции тел 2, 3 относительно осей, проходящих через их центры масс; P – активная сила; M_2 – активный момент.

Составить общее уравнение динамики механической системы.

Билет № 16

Теоретическая часть

Задание 1. Записать ***уравнения свободных колебаний*** точки.

Задание 2. Сформулировать определение понятия «***период затухающих колебаний*** точки».

Задание 3. Записать ***основное уравнение динамики относительного движения*** точки для случая, когда переносное движение есть прямолинейное и равномерное движение, а относительное движение прямолинейное.

Задание 4. Записать формулы для определения ***проекций*** вектора ***скорости центра масс механической системы на координатные оси***.

Задание 5. Сформулировать первое следствие из ***теоремы о движении центра масс механической системы***.

Задание 6. Записать формулы для определения ***моментов количества движения точки относительно координатных осей***.

Задание 7. Сформулировать определение понятия «***кинетическая энергия***».

Задание 8. Записать формулы, по которым определяются ***центробежная и вращательная силы инерции и момент сил инерции*** при вращательном движении тела относительно оси, не проходящей через центр масс, в случае, когда силы инерции приложены в центре масс.

Задание 9. Записать формулу, выражающую ***принцип возможных перемещений***, в координатной форме.

Задание 10. Записать формулу, выражающую ***общее уравнение динамики***, в координатной форме.

Практическая часть

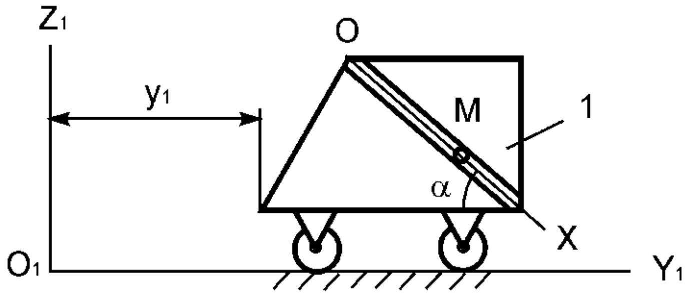


Рис. 16.1

Тележка 1 совершает поступательное горизонтальное движение по закону $y_1 = 4t^3 + 2t^2 + t + 1$, м. В гладком наклонном канале тележки перемещается шарик M массой m.

Записать дифференциальное уравнение относительного движения шарика.

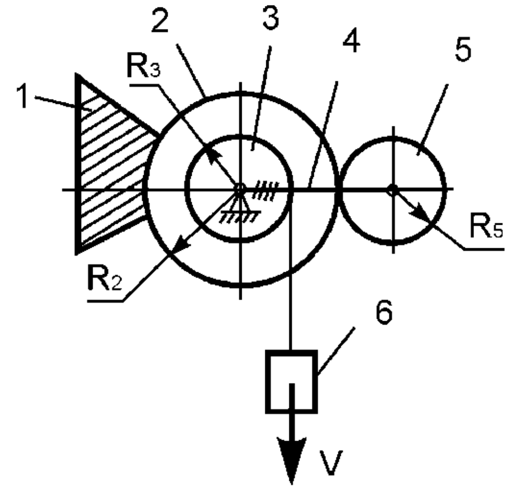


Рис. 16.2

Движущаяся механическая система состоит из шести тел. Геометрические параметры тел известны. J_{c5x5} – момент инерции тела 5 относительно оси, проходящей через его центр масс. Центр масс тела 6 имеет скорость V.

Определить кинетическую энергию тела 5 массой m_5 в зависимости от скорости V и геометрических параметров механизма.

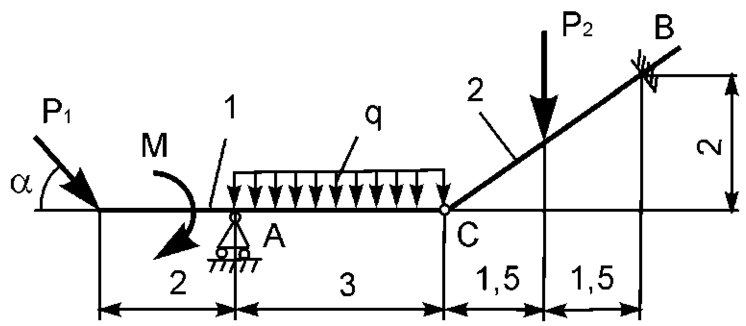


Рис. 16.3

На плоскую механическую систему, состоящую из двух тел, действуют активные нагрузки P_1, P_2, q, M.

Используя принцип возможных перемещений, определить горизонтальную составляющую реакции внешней связи в точке B.

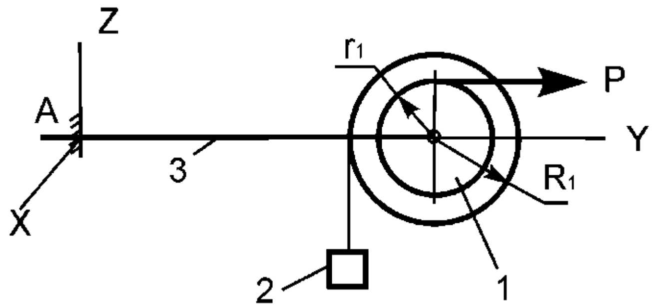


Рис. 16.4

Механическая система, состоящая из ступенчатого диска 1 массой m_1, груза 2 массой m_2, невесомого стержня 3 и нити, приходит в движение из состояния покоя. P – активная сила; R_1, r_1 – радиусы тела 1; J_{c1x1} – момент инерции тела 1 относительно оси, проходящей через его центр масс.

Используя принцип Даламбера, составить уравнения динамического равновесия механической системы.

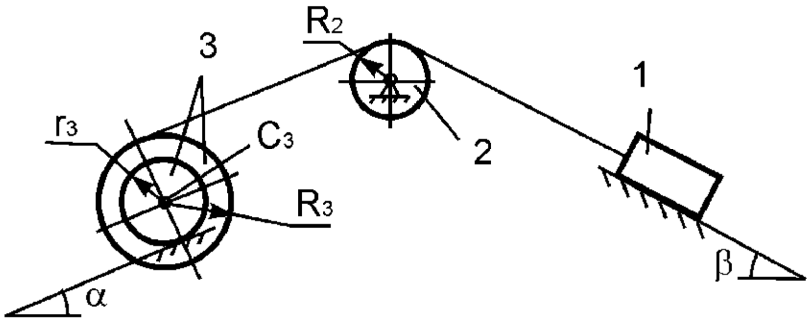


Рис. 16.5

На механическую систему, состоящую из трех тел, наложены идеальные связи. Известны геометрические параметры системы. Под действием активных нагрузок механическая система движется из состояния покоя.

Дано: m_1, m_2, m_3 – массы тел; J_{c2x2}, J_{c3x3} – моменты инерции тел 2, 3 относительно осей, проходящих через их центры масс.

Составить общее уравнение динамики механической системы.

Билет № 17

Теоретическая часть

Задание 1. Сформулировать определение понятия «***амплитуда свободных колебаний*** точки».

Задание 2. Сформулировать определение термина «***инерциальная система отсчета***».

Задание 3. Сформулировать ***принцип относительности классической механики***.

Задание 4. Записать формулы для определения ***проекций вектора ускорения центра масс механической системы на координатные оси***.

Задание 5. Сформулировать ***второй закон динамики*** (закон пропорциональности силы и ускорения).

Задание 6. Сформулировать второе следствие из ***теоремы о движении центра масс механической системы***.

Задание 7. Записать в векторной форме формулу, выражающую ***теорему об изменении момента количества движения материальной точки***.

Задание 8. Записать формулу для определения ***кинетической энергии материальной точки***.

Задание 9. Записать формулу для определения ***момента сил инерции*** при вращении тела относительно оси, проходящей через его центр масс.

Задание 10. Сформулировать определение понятия «***идеальные связи***».

Практическая часть

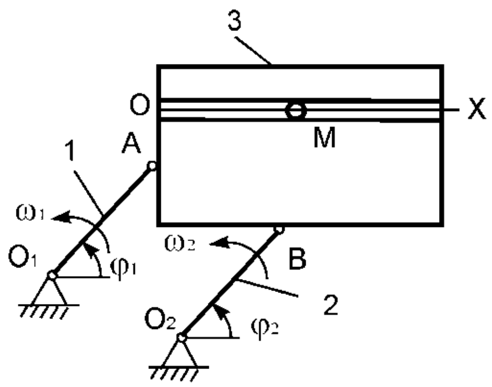


Рис. 17.1

Плоский механизм состоит из трех тел. Тела 1, 2 имеют одинаковые размеры ($O_1A = O_2B = r_1 = r_2 = r$) и совершают вращательные движения с постоянными угловыми скоростями $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. По гладкому каналу, выполненному в теле 3, перемещается точка M массой m.

Записать дифференциальное уравнение относительного движения точки M.

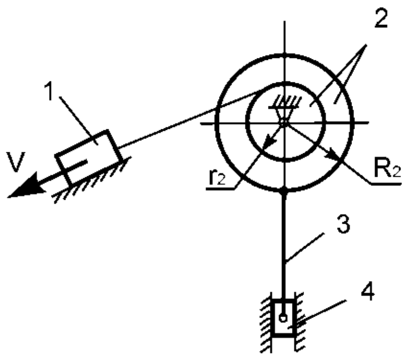


Рис. 17.2

Движущаяся механическая система состоит из четырех тел. Геометрические параметры тел известны. l_3 – длина стержня 3. Центр масс тела 1 имеет скорость V. J_{c3x3} – момент инерции тела 3 относительно оси, проходящей через его центр масс.

Определить кинетическую энергию тела 3 массой m_3 в зависимости от скорости V и геометрических параметров механизма.

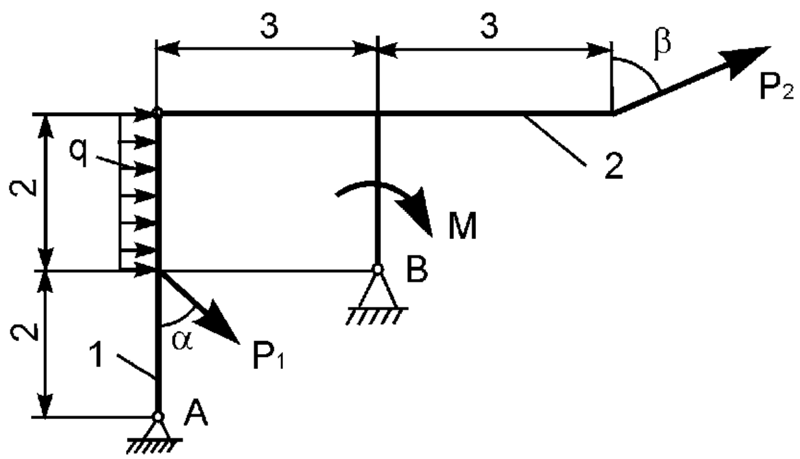


Рис. 17.3

На плоскую механическую систему, состоящую из двух тел, действуют активные нагрузки P_1, P_2, q, M.

Используя принцип возможных перемещений, определить горизонтальную составляющую реакции внешней связи в точке B.

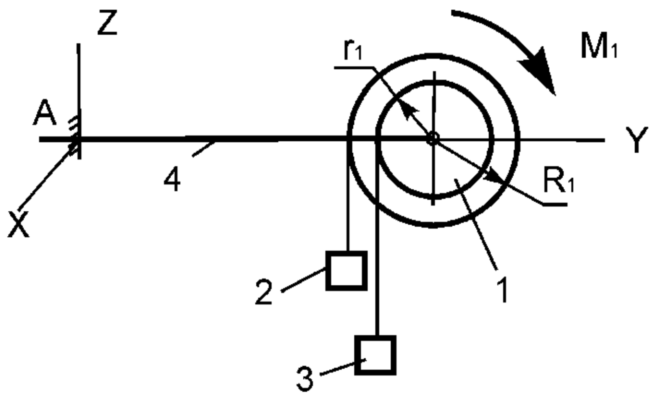


Рис. 17.4

Механическая система, состоящая из ступенчатого диска 1 массой m_1, грузов 2, 3 массами m_2, m_3, невесомого стержня 4 и нити, приходит в движение из состояния покоя. M_1 – активный момент; R_1, r_1 – радиусы тела 1; J_{c1x1} – момент инерции тела 1 относительно оси, проходящей через его центр масс.

Используя принцип Даламбера, составить уравнения динамического равновесия механической системы.

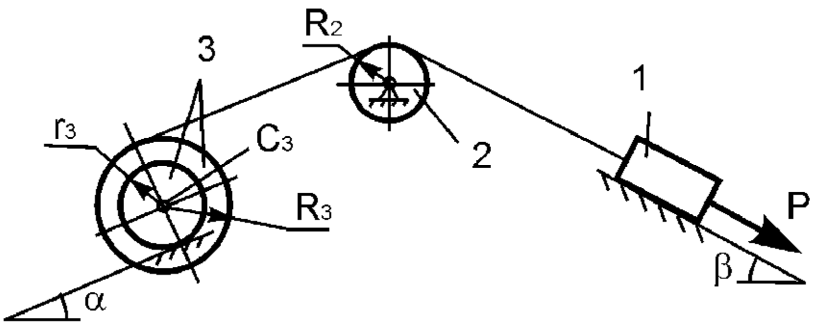


Рис. 17.5

На механическую систему, состоящую из трех тел, наложены идеальные связи. Известны геометрические параметры системы. Под действием активных нагрузок механическая система движется из состояния покоя.

Дано: m_1, m_2, m_3 – массы тел; J_{c2x2}, J_{c3x3} – моменты инерции тел 2, 3 относительно осей, проходящих через их центры масс; P – активная сила.

Составить общее уравнение динамики механической системы.

Билет № 18

Теоретическая часть

Задание 1. Сформулировать определение понятия «***период свободных колебаний*** точки».

Задание 2. Записать формулу для определения ***периода возмущающей силы***.

Задание 3. Сформулировать определение понятия «***механическая система***».

Задание 4. Записать формулу для определения модуля ***скорости центра масс механической системы***.

Задание 5. Сформулировать ***первый закон динамики*** (закон инерции).

Задание 6. Сформулировать определение понятия «***количество движения материальной точки***».

Задание 7. Записать в скалярном виде формулу, выражающую ***теорему об изменении момента количества движения материальной точки***.

Задание 8. Записать формулу для определения ***кинетической энергии поступательно движущегося твердого тела***.

Задание 9. Записать формулы для определения инерционных нагрузок при плоскопараллельном движении твердого тела.

Задание 10. Записать формулу, выражающую ***принцип возможных скоростей (принцип возможных мощностей)***.

Практическая часть

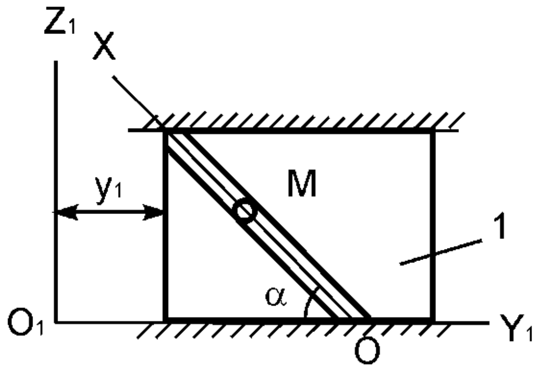


Рис. 18.1

Пластина совершает поступательное движение параллельно оси O_1Y_1 согласно уравнению $y_1 = 20\sin\pi t$. По гладкому каналу, выполненному на пластине, перемещается точка M массой m.

Записать дифференциальное уравнение относительного движения точки M.

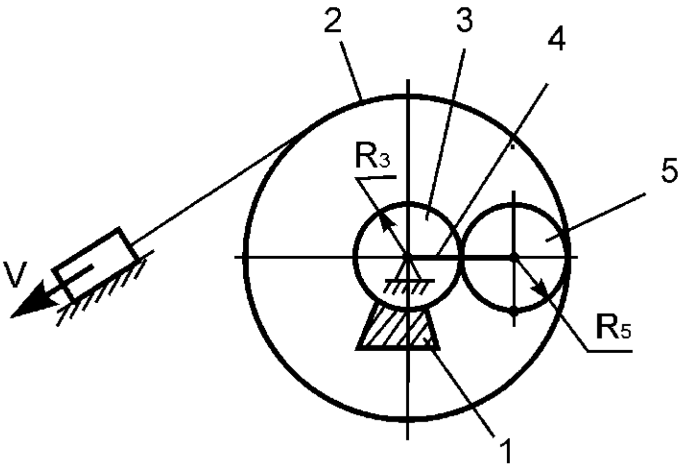


Рис. 18.2

На рисунке изображен плоский механизм, состоящий из шести звеньев. Известны геометрические параметры звеньев этого механизма. J_{c4x4} – момент инерции тела 4 относительно оси, проходящей через его центр масс. Ведущее звено 6 имеет скорость V.

Определить кинетическую энергию звена 4 массой m_4 в зависимости от скорости V и геометрических параметров механизма.

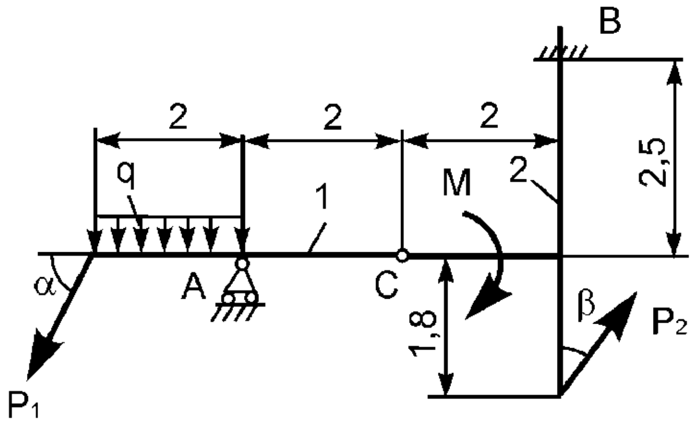


Рис. 18.3

На плоскую механическую систему, состоящую из двух тел, действуют активные нагрузки P_1, P_2, q, M.

Используя принцип возможных перемещений, определить горизонтальную составляющую реакции внешней связи в точке B.

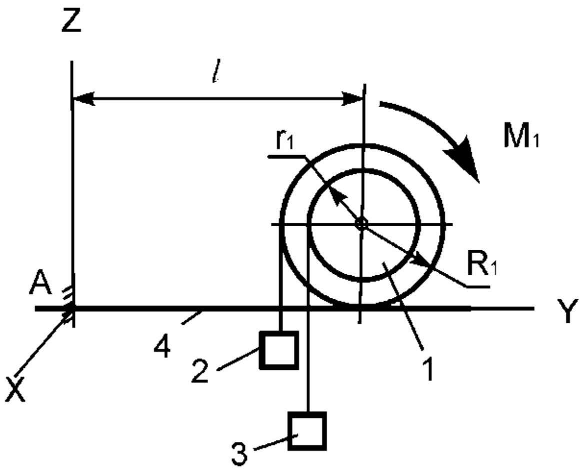


Рис. 18.4

Механическая система, состоящая из ступенчатого диска 1 массой m_1, грузов 2, 3 массами m_2, m_3, невесомого стержня 4 и нити, приходит в движение из состояния покоя. M_1 – активный момент; R_1, r_1 – радиусы тела 1; J_{c1x1} – момент инерции тела 1 относительно оси, проходящей через его центр масс.

Используя принцип Даламбера, составить уравнения динамического равновесия механической системы.

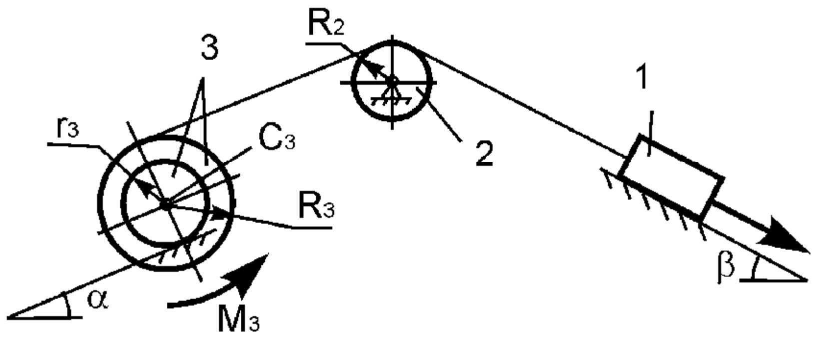


Рис. 18.5

На механическую систему, состоящую из трех тел, наложены идеальные связи. Известны геометрические параметры системы. Под действием активных нагрузок механическая система движется из состояния покоя.

Дано: m_1, m_2, m_3 – массы тел; J_{c2x2}, J_{c3x3} – моменты инерции тел 2, 3 относительно осей, проходящих через их центры масс; P – активная сила; M_3 – активный момент.

Составить общее уравнение динамики механической системы.

Билет № 19

Теоретическая часть

Задание 1. Сформулировать определение понятия «***циклическая частота свободных колебаний*** точки».

Задание 2. Записать дифференциальное уравнение движения точки под действием восстанавливающей и возмущающей сил.

Задание 3. Сформулировать определение понятия «***свободная механическая система***».

Задание 4. Записать формулу для определения модуля ***ускорения центра масс механической системы***.

Задание 5. Сформулировать определение понятия «***импульс силы за промежуток времени***».

Задание 6. Сформулировать определение понятия «***центральная сила***».

Задание 7. Записать формулу для определения ***кинетической энергии вращающегося тела*** относительно вертикальной оси.

Задание 8. Сформулировать определение понятия «***обобщенные координаты механической системы***».

Задание 9. Сформулировать определение понятия «***возможная (элементарная) работа силы***».

Задание 10. Сформулировать ***принцип возможных перемещений***.

Практическая часть

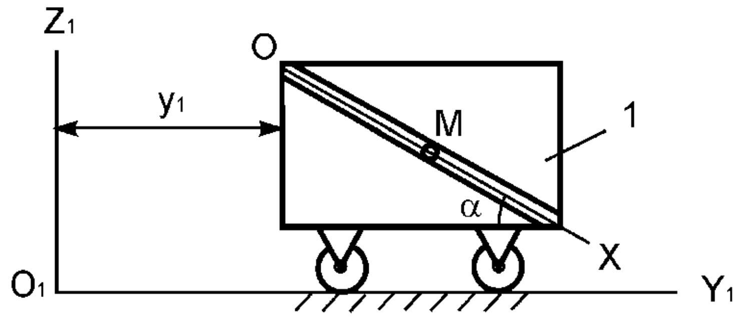


Рис. 19.1

Тележка 1 совершает поступательное горизонтальное движение по закону $y_1 = 4t^3 + 2t^2 + t + 1$, м. В гладком наклонном канале тележки перемещается шарик M массой m.

Записать дифференциальное уравнение относительного движения точки M.

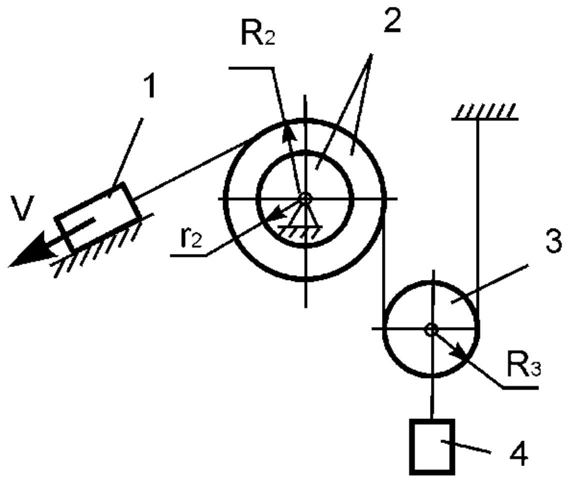
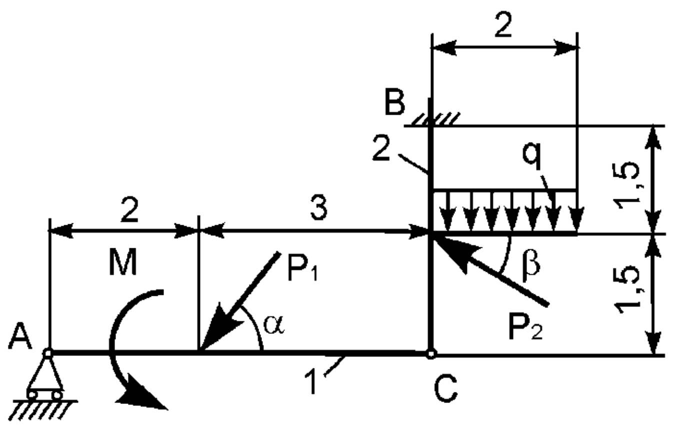


Рис. 19.2

На рисунке изображен плоский механизм, состоящий из четырех звеньев. Известны геометрические параметры звеньев этого механизма. Ведущее звено 1 имеет скорость V.

Определить кинетическую энергию звена 4 массой m_4 в зависимости от скорости V и геометрических параметров механизма.



Билет 19.3

На плоскую механическую систему, состоящую из двух тел, действуют активные нагрузки P_1, P_2, q, M.

Используя принцип возможных перемещений, определить горизонтальную составляющую реакции внешней связи в точке B.

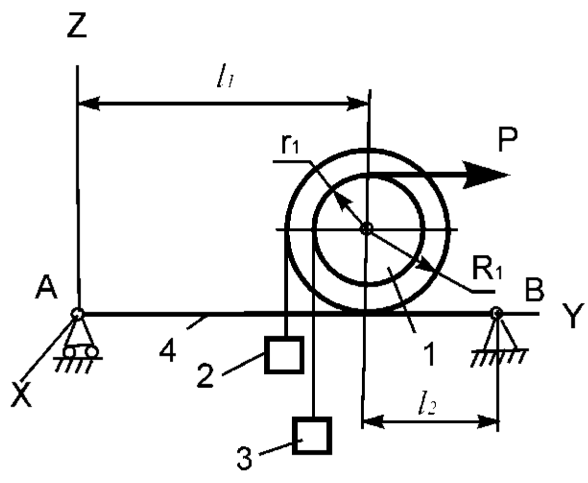


Рис. 19.4

Механическая система, состоящая из ступенчатого диска 1 массой m_1, грузов 2, 3 массами m_2, m_3, невесомого стержня 4 и нити, приходит в движение из состояния покоя. P – активная сила; R_1, r_1 – радиусы тела 1; J_{c1x1} – момент инерции тела 1 относительно оси, проходящей через его центр масс.

Используя принцип Даламбера, составить уравнения динамического равновесия механической системы.

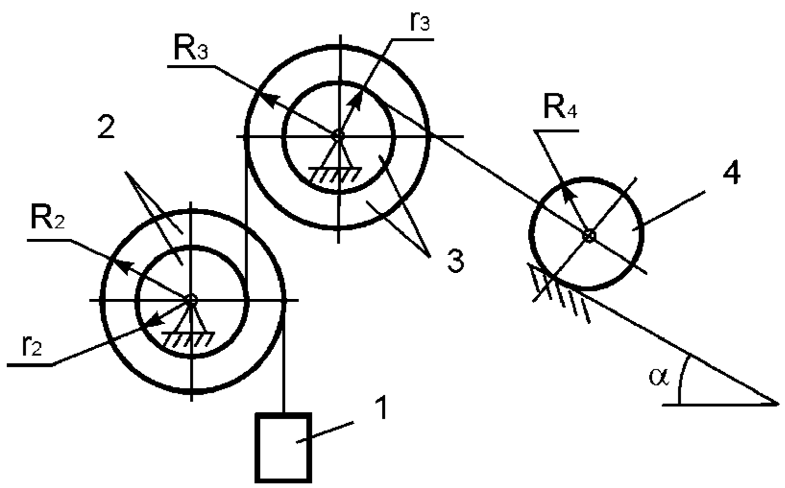


Рис. 19.5

На механическую систему, состоящую из четырех тел, наложены идеальные связи. Известны геометрические параметры системы. Под действием активных нагрузок механическая система движется из состояния покоя.

Дано: m_1, m_2, m_3, m_4 – массы тел; J_{c2x2}, J_{c3x3}, J_{c4x4} – моменты инерции тел 2, 3, 4 относительно осей, проходящих через их центры масс.

Составить общее уравнение динамики механической системы.

Билет № 20

Теоретическая часть

Задание 1. Записать ***дифференциальное уравнение затухающих колебаний*** точки.

Задание 2. Записать ***уравнение вынужденных колебаний малой частоты***.

Задание 3. Сформулировать определение понятия «***несвободная механическая система***».

Задание 4. Что является ***мерой инертности*** при поступательном движении твердого тела?

Задание 5. Записать формулу для определения ***импульса силы за промежуток времени***.

Задание 6. Сформулировать определение понятия «***кинетический момент механической системы относительно оси***».

Задание 7. Записать формулу для определения ***кинетической энергии механической системы***.

Задание 8. Что изучает ***аналитическая механика***?

Задание 9. Сформулировать определение понятия «***возможная (элементарная) работа силы***».

Задание 10. Сформулировать определение понятия «***обобщенная сила***».

Практическая часть

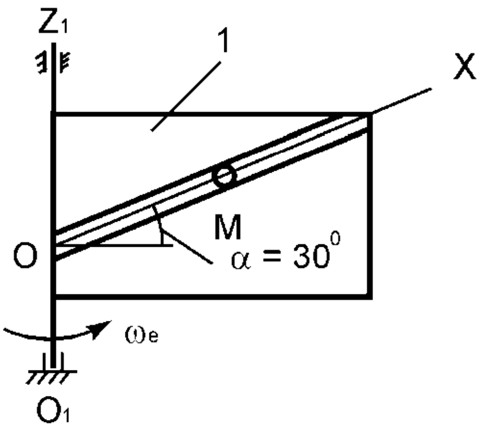


Рис. 20.1

Вертикальная пластина 1 вращается относительно оси O_1Z_1 с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = \omega_e$. По гладкому каналу, выполненному на пластине, перемещается точка M массой m.

Записать дифференциальное уравнение относительного движения точки M.

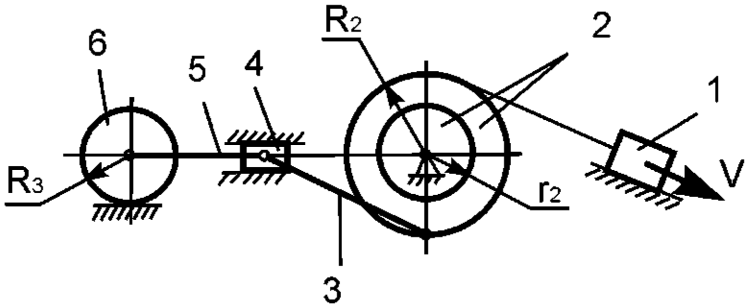


Рис. 20.2

На рисунке изображен плоский механизм, состоящий из шести звеньев. Известны геометрические параметры звеньев этого механизма. Ведущее звено 1 совершает поступательное движение со скоростью V. J_{c6x6} – момент инерции тела 6 относительно оси, проходящей через его центр масс.

Определить кинетическую энергию звена 6 массой m_6 в зависимости от скорости V и геометрических параметров этого механизма.

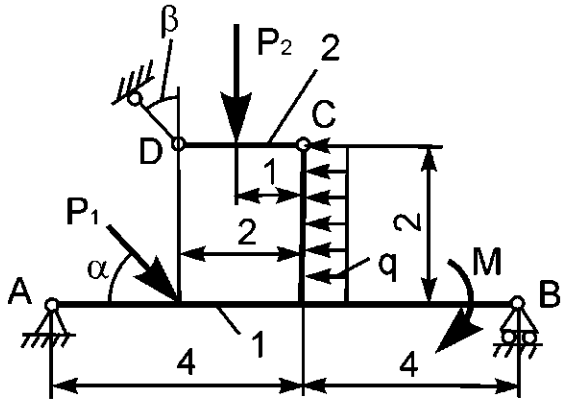


Рис. 20.3

На плоскую механическую систему, состоящую из двух тел, действуют активные нагрузки P_1, P_2, q, M.

Используя принцип возможных перемещений, определить горизонтальную составляющую реакции внешней связи в точке A.

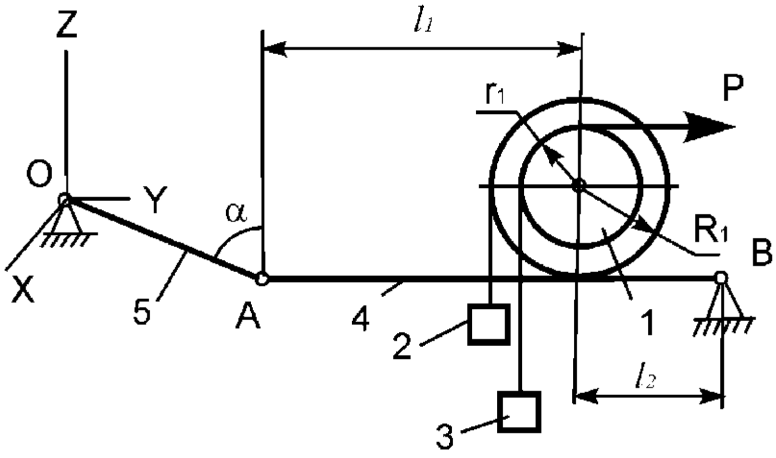


Рис. 20.4

Механическая система, состоящая из ступенчатого диска 1 массой m_1, грузов 2, 3 массами m_2, m_3, невесомых стержней 4, 5 и нити, приходит в движение из состояния покоя. P – активная сила; R_1, r_1 – радиусы тела 1; J_{c1x1} – момент инерции тела 1 относительно оси, проходящей через его центр масс.

Используя принцип Даламбера, составить уравнения динамического равновесия механической системы.

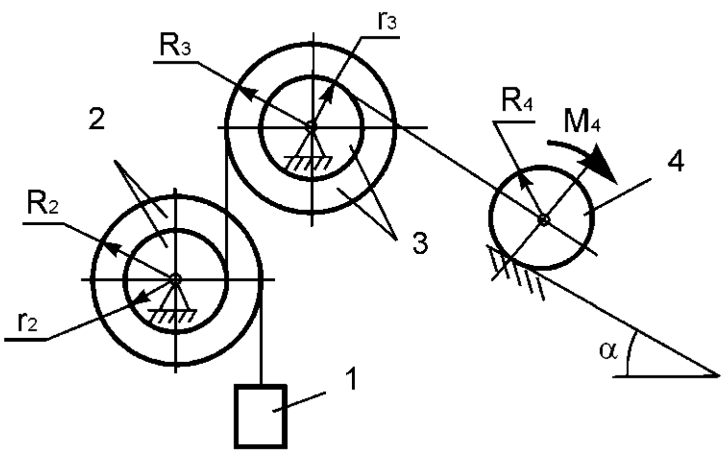


Рис. 20.5

На механическую систему, состоящую из четырех тел, наложены идеальные связи. Известны геометрические параметры системы. Под действием активных нагрузок механическая система движется из состояния покоя.

Дано: m_1, m_2, m_3, m_4 – массы тел; J_{c2x2}, J_{c3x3}, J_{c4x4} – моменты инерции тел 2, 3, 4 относительно осей, проходящих через их центры масс; M_4 – активный момент.

Составить общее уравнение динамики механической системы.

Оглавление