

ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ДИНАМИКА

ЧАСТЬ 1

**Методические указания к
расчетно-графическим работам**

Методические указания предназначены для студентов дневных и заочных факультетов, изучающих теоретическую механику. Содержание отражает основной курс динамики и включает в себя решение задач, аналогичных заданиям выполняемых курсовых работ Д-1, Д-4, Д-15, Д-16 из «Сборника заданий» А.А.Яблонского. В соответствии с разбираемой темой дается теория, решается задача, выполняется обзор, классифицируются варианты задания по группам, приводится экзаменационная задача с решением.

Репетиторский подход и анализ решения задач призваны развивать логическое мышление студентов. Методические указания могут быть полезны студентам, изучающим сопротивление материалов и строительную механику, теорию механизмов и машин, детали машин, а также студентам старших курсов и аспирантам.

Введение

Методические указания по динамике (I и II части) предназначены для студентов всех факультетов, выполняющих задания для курсовых работ в соответствии с Государственным образовательным стандартом и программой курса по теоретической механике. Эти указания отражают основной курс динамики, который включает в себя общие теоремы динамики и три основных принципа механики. На последующих курсах при изучении технических дисциплин "Детали машин" и "Теория механизмов и машин" широко используются эти фундаментальные методы, лежащие в основе расчетов различных механизмов и машин. Принцип возможных перемещений, излагаемый в заданиях Д-14 и Д-15, применяется для решения задач сопротивления материалов и строительной механики.

В методических указаниях выделены два основных метода расчета, основанных на втором законе Ньютона и принципе Даламбера, позволяющем показать силы инерции не в скрытом виде как параметры движения, а как реально действующие силы, направленные противоположно соответствующим ускорениям. Силы инерции, например, в заданиях Д-1 и Д-4 позволяют объяснить движение с позиций статики с использованием уравнений равновесия.

Для каждой разбираемой темы кратко дается теория, приводится решение задачи, подобной сложному варианту задания, выполняются обзор и классификация вариантов задания по группам, решается экзаменационная задача.

Расчетно-графические работы оформляются на листах формата А-4 в соответствии с разобранными примерами выполнения заданий из сборника А.А. Яблонского и из данных методических указаний.

Методические указания помогут студентам самостоятельно решать задания, развивают логику технического мышления и содержат минимум необходимой информации.

1. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Изучение динамики [2, 3, 4] начинается с трактовки четырех основных законов механики.

Первый – закон инерции – устанавливает свойство тел сохранять неизменной скорость их движения без воздействия других тел.

Второй – закон Ньютона – констатирует, что ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет одинаковое с ней направление.

Согласно третьему закону, всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие. Таким образом, силе, вызывающей ускорение точки, противодействует сила инерции точки.

Четвертый – закон независимости действия сил – часто применяется для решения задач и гласит, что несколько одновременно действующих сил сообщают точке такое ускорение, какое сообщила бы одна сила, равная их геометрической сумме.

Выделяются две задачи динамики: первая – определение силы по заданному движению, вторая – определение закона движения по заданным силам. Обе задачи решаются с помощью основного уравнения динамики $m\ddot{a} = \sum \vec{F}_i$ и полученных на его основе дифференциальных уравнений движения:

$$m\ddot{x} = \sum F_{ix}, \quad m\ddot{y} = \sum F_{iy}, \quad m\ddot{z} = \sum F_{iz}.$$

Первая задача динамики решается дифференцированием уравнений движения, а вторая – интегрированием дифференциальных уравнений движения точки под действием заданных сил и с учетом начальных условий движения (начального положения и начальной скорости). В случае действия постоянных сил интегрирование производится методом разделения переменных величин.

Вторая задача динамики является более сложной, т.к. силы, входящие в правую часть уравнения, могут зависеть от времени, положения и скорости точки. Если в процессе движения силы изменяются, то для описания дальнейшего движения надо составить новые дифференциальные уравнения движения, начальными условиями которых будут скорость и положение точки в конце предшествующего движения.

1.1. Задание Д-1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянных сил

Рассмотрим пример движения лыжника по трамплину AB и последующий его свободный полет на участке BC (рис. 1).

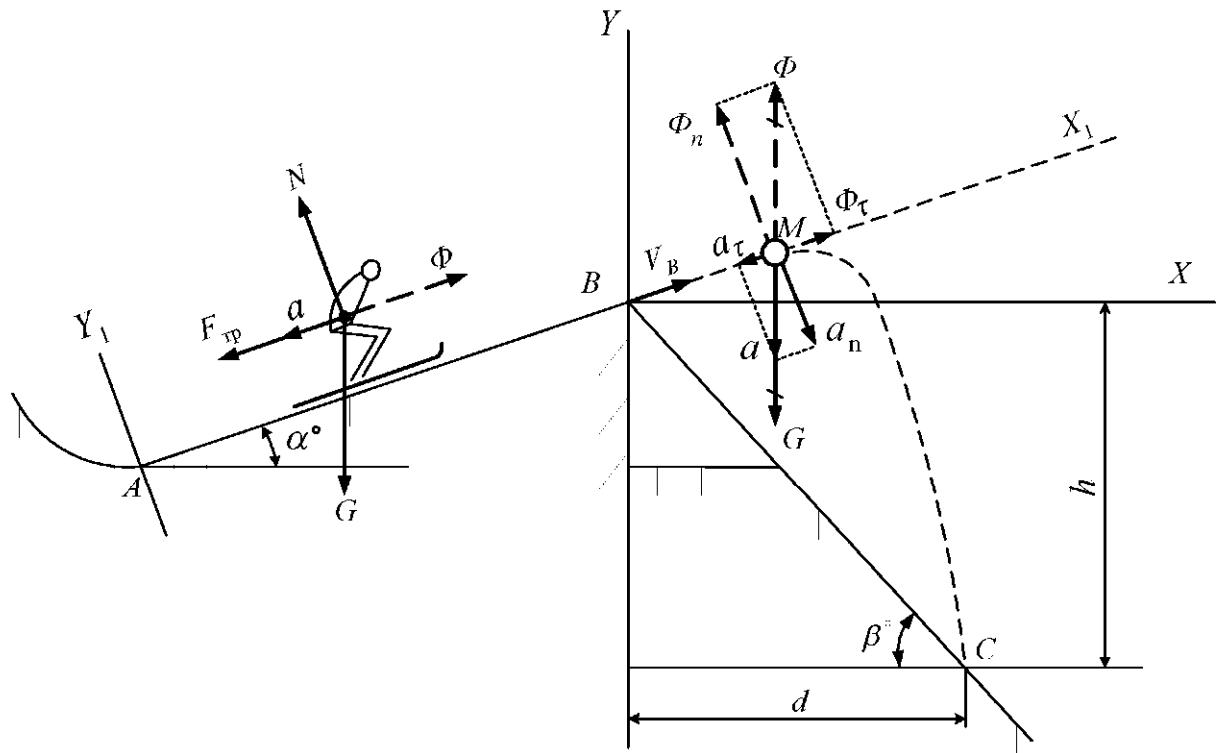


Рис.1

Дано: Лыжник со скоростью V_A подходит к точке A участка трамплина AB , имеющего длину l и угол наклона α (относительно горизонта). Коэффициент трения скольжения лыж на участке AB равен f . Лыжник от A до B движется время τ , с; в точке B он покидает трамплин. Через T , с, лыжник приземляется со скоростью V_C в точке C горы, составляющей угол наклона β с горизонтом. При решении принять лыжника за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

$$\begin{aligned} \alpha &= 20^\circ, & \tau &= 0,5 \text{ с}, \\ V_A &= 20 \text{ м/с}, & V_B &= 18 \text{ м/с}, \\ f &= 0,1, & \beta &= 45^\circ. \end{aligned}$$

Определить l и d .

Рассмотрим движение лыжника на участке AB . Покажем действующие на лыжника силы: вес G , нормальную реакцию N и силу трения скольжения F_{tr} . Силой, движущей лыжника по трамплину, является сила инерции Φ , направленная противоположно его ускорению a , которое, в свою очередь, направлено вдоль трамплина от B к A , так как скорость движения уменьшается ($V_A = 20 \text{ м/с}$, $V_B = 18 \text{ м/с}$). Эту силу

инерции Φ покажем штриховой линией, потому что она входит в дифференциальное уравнение движения, в его левую часть, как параметр движения $|m\ddot{x}_1|$.

Составим дифференциальное уравнение движения:

$$m\ddot{x}_1 = \sum F_{ix_1}, \text{ или } m\ddot{x}_1 = -G \cdot \sin\alpha - F_{tp},$$

где

$$F_{tp} = Nf, \quad \text{а} \quad N = G \cdot \cos\alpha,$$

тогда

$$m\ddot{x}_1 = -mg \sin\alpha - f \cdot mg \cdot \cos\alpha,$$

$$\ddot{x}_1 = -(g \sin\alpha + f \cdot g \cdot \cos\alpha).$$

Рассчитаем выражение в скобках, это будет постоянное отрицательное число, обозначим его K , чтобы дальше решать задачу в общем виде.

$$\ddot{x}_1 = -K,$$

$$\dot{x}_1 = -Kt + C_1,$$

$$x_1 = -K \frac{t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_2.$$

Этот результат получен интегрированием *методом разделения переменных величин*. Рассмотрим этот метод на примере:

$$\ddot{x}_1 = -K, \quad \frac{dV_x}{dt} = -K, \quad \int dV_x = -K \int dt, \quad V_x = -Kt + C_1.$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -Kt + C_1, \quad \int dx_1 = -K \int t \cdot dt + C_1 \int dt, \quad x_1 = -K \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяем по начальным условиям движения (НУД): $t_0 = 0, \quad x_{10} = V_A, \quad \dot{x}_{10} = 0$.

Составим уравнения, полученные при интегрировании для $t = 0$:

$$\dot{x}_{10} = C_1, \quad x_{10} = C_2, \quad \text{то есть} \quad C_1 = V_A, \quad C_2 = 0,$$

$$\text{тогда} \quad \dot{x}_1 = -Kt + V_A, \quad x_1 = -K \frac{t^2}{2} + V_A \cdot t.$$

Для момента τ , когда лыжник покидает участок AB ,

$$\dot{x}_1 = V_B, \quad x_B = l.$$

Окончательные уравнения для расчета искомых параметров:

$$\begin{cases} V_B = -Kt + V_A, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} l = -K \frac{t^2}{2} + V_A \cdot t. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь неизвестные величины t и l . Выразим t из уравнения (1) и, подставив его в уравнение (2), определим l .

Рассмотрим движение лыжника на участке BC – свободное падение под действием только силы тяжести G . Чтобы пояснить, почему лыжник летит вверх и вправо по параболе, а не падает сразу вниз, покажем движущие его силы инерции: Φ_n – нормальная и Φ_τ – касательная, противоположные соответствующим ускорениям. В дифференциальные уравнения движения они как силы не входят, поэтому покажем их штриховыми линиями.

Движение лыжника в плоскости YBX описывается двумя дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0, \\ m\ddot{y} = -G. \end{cases}$$

Начальные условия движения на участке BC :

$$\text{НУД: } t_0 = 0, \quad \begin{cases} \dot{x}_0 = V_B \cdot \cos \alpha, \\ \dot{y}_0 = V_B \cdot \sin \alpha. \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = 0, \\ y_0 = 0. \end{cases}$$

Сократим полученные дифференциальные уравнения на массу m .

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0, \\ \ddot{y} = -G. \end{cases}$$

Интегрируем дважды эти уравнения

$$\begin{cases} \dot{x} = C_3, \\ \dot{y} = C_3 t + C_5. \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y} = -gt + C_4, \\ y = -g \frac{t^2}{2} + C_4 t + C_6. \end{cases}$$

Напишем полученные уравнения для $t = 0$:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = C_3, \\ x_0 = C_5. \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y} = C_4, \\ y = C_6. \end{cases}$$

$$\text{отсюда} \quad \begin{cases} C_3 = V_B \cdot \cos \alpha, \\ C_5 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} C_4 = V_B \cdot \sin \alpha, \\ C_6 = 0. \end{cases}$$

Окончательные выражения скорости и пути в функции времени:

$$\dot{x} = V_B \cdot \cos \alpha, \quad (3)$$

$$x = V_B \cdot \cos \alpha \cdot t, \quad (4)$$

$$\dot{y} = -gt + V_B \cdot \sin \alpha, \quad (5)$$

$$y = -g \frac{t^2}{2} + V_B \cdot \sin \alpha \cdot t. \quad (6)$$

В момент падения $y = -h$, $x = d$, при угле $\beta = 45^\circ$ $|h| = |d|$. Неизвестны величины t и d . Для определения d выразим t через d из уравнения (4) и подставим его значение в уравнение (6).

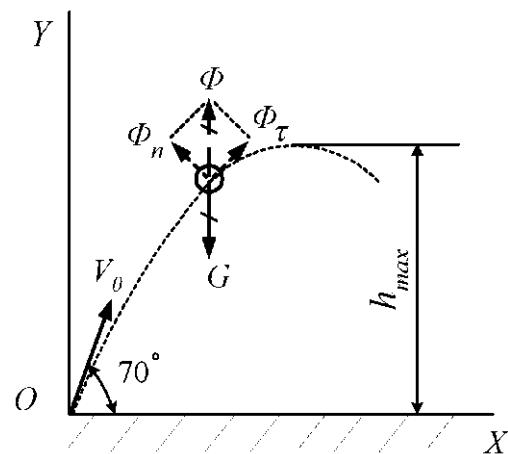
1.2. Обзор и классификация вариантов задания Д-1

Отличительной особенностью задания Д-1 от других заданий является то, что здесь представлено 6 схем, а не 30 и для каждой схемы дано общее условие для пяти вариантов. Внутри схем варианты отличаются между собой только вариацией исходных данных и определяемых величин. Все схемы имеют два участка движения – прямолинейный AB и участок движения в плоскости.

Оба участка связаны общей скоростью V_B , которая является конечной скоростью для участка AB и начальной скоростью для последующего участка BC . В ряде вариантов скорость V_B определяется из расчета движения на участке BC , а затем она подставляется в данные участка AB . Схема 3 отличается от остальных схем наличием движущей силы – силы тяги мотоцикла, тогда как в других вариантах движущая сила – либо составляющая силы тяжести, либо сила инерции.

Путем введения начальной скорости учитывается действие сил до начального расчетного момента движения на рассматриваемом участке. Для каждого участка свои действующие силы и соответствующие им дифференциальные уравнения движения и начальные условия движения.

Принципиально все варианты задания Д-1 не отличаются между собой и решаются по единому алгоритму. Полученные дифференциальные уравнения дважды интегрируются для определения скорости движения и пути в функции времени, то есть решается *вторая задача динамики точки*. Действующие силы постоянны, и поэтому интегрирование выполняется методом разделения переменных величин. Постоянные интегрирования определяются по начальным условиям движения. В ряде вариантов для определения



искомых величин приходится совместно решать систему уравнений для первого и второго участков движения.

1.3. Задача по Д-1 [6]

Материальная точка M движется в вертикальной плоскости под действием силы тяжести (рис. 2). Определить максимальную высоту подъема h в км, если в начальный момент скорость точки $V_0 = 600$ м/с.

Вектор \vec{V}_0 расположен к горизонту под углом 70° .

$$V_0 = 600 \text{ м/с.}$$

$$h_{\max} - ?$$

Решение.

Движение точки по параболе вверх и вправо происходит за счет сил инерции Φ_n и Φ_τ , показанных штриховыми линиями, однако при решении задачи с помощью дифференциальных уравнений движения учитывается только сила тяжести, так как силы инерции «спрятаны» в левых частях дифференциальных уравнений.

Составим дифференциальное уравнение движения, выбрав вертикальную ось Y и горизонтальную ось X , проведенные из начала движения

– точки O со скоростью V_0 . Тогда

начальные условия движения:

$$t_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = V_0 \cos 70^\circ, \quad \dot{y}_0 = V_0 \sin 70^\circ.$$

Преобразуем и проинтегрируем дважды эти уравнения

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0, \\ m\ddot{y} = -G, \end{cases} \quad \begin{cases} m\ddot{x} = 0, \\ m\ddot{y} = -g, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = C_1, \\ \dot{y} = -gt + C_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x = C_1 t + C_3, \\ y = -g \frac{t^2}{2} + C_2 t + C_4. \end{cases}$$

Рис. 2

Определим постоянные интегрирования:

$$C_1 = V_0 \cos 70^\circ = 205,2; \quad C_3 = 0;$$

$$C_2 = V_0 \sin 70^\circ = 563,8; \quad C_4 = 0.$$

Тогда

$$\begin{cases} \dot{x} = 205,2; \\ \dot{y} = -9,81t + 563,8. \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 205,2 \cdot t; \\ \dot{y} = -9,81 \frac{t^2}{2} + 563,8 \cdot t. \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} x = 205,2 \cdot t; \\ y = -9,81 \frac{t^2}{2} + 563,8 \cdot t. \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} x = 205,2 \cdot t; \\ y = -9,81 \frac{t^2}{2} + 563,8 \cdot t. \end{cases} \quad (10)$$

Когда точка находится на максимальной высоте, то $\frac{dy}{dx} = 0$, но

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 0, \text{ где } \frac{dt}{dx} \neq 0, \text{ следовательно, } \frac{dy}{dt} = \dot{y} = 0.$$

Для определения t приравняем к нулю \dot{y} в уравнении (8).

$$0 = -9,81 t + 563,8; t = 57,47 \text{ с.}$$

Для определения $h_{max} = Y_{max}$ подставим значение t в уравнение (10).

$$Y_{max} = -4,9 \cdot 57,47^2 + 563,8 \cdot 57,47 = 16205 \text{ м} = 16,2 \text{ км.}$$

2. ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Для вывода основного уравнения динамики относительного движения точки используется основное уравнение динамики абсолютного движения точки: $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$.

Абсолютное ускорение точки \vec{a} равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c.$$

Подставим эти ускорения в основное уравнение динамики, оставив в левой его части $m \cdot \vec{a}_r$, остальные слагаемые перенесем в правую часть со знаком минус: $m \cdot \vec{a}_r = \sum \vec{F}_i - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$.

Обозначив переносную $\vec{\phi}_e = -m\vec{a}_e$ и кориолисову $\vec{\phi}_c = -m\vec{a}_c$ силы инерции, получим основное уравнение динамики относительного движения точки.

$$m \cdot \vec{a}_r = \sum \vec{F}_i + \vec{\phi}_e + \vec{\phi}_c.$$

Из этого уравнения видно, что на относительное движение точки влияют не только действующие силы, но и переносное движение точки вместе с подвижной системой. Для решения задач используются дифференциальные уравнения относительного движения точки, которые получаются при проектировании векторов на оси декартовых координат.

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum F_{ix} + \Phi_{ex} + \Phi_{cx}, \\ m\ddot{y} = \sum F_{iy} + \Phi_{ey} + \Phi_{cy}, \\ m\ddot{z} = \sum F_{iz} + \Phi_{ez} + \Phi_{cz}. \end{cases}$$

В задании Д-4 относительным является прямолинейное движение точки по каналу, принадлежащему подвижной системе. Здесь требуется определить закон относительного движения точки $x_r = f(t)$, то есть решить вторую задачу динамики точки.

В зависимости от действующих сил в ряде вариантов надо решать однородные или неоднородные дифференциальные уравнения.

2.1. Задание Д-4. Исследование относительного движения материальной точки [1]

Шарик M (рис. 3), рассматриваемый как материальная точка, перемещается по цилиндрическому каналу движущегося тела A . Найти уравнение относительного движения этого шарика $x_r = f(t)$, приняв за начало отсчета точку O . Тело A движется поступательно, параллельно вертикальной плоскости $Y_1O_1Z_1$. Найти также координату x_{t_1} и давление шарика N_{t_1} на стенку канала при заданном значении t_1 .

Дано:

$$m = 0,01 \text{ кг};$$

$$\omega = 2\pi c^{-1};$$

$$x_0 = 0,1 \text{ м};$$

$$\dot{x}_0 = 2 \text{ м/с};$$

$$t_1 = 0,1 \text{ с};$$

$$r = 0,2 \text{ м};$$

$$f = 0,1.$$

Определить:

$$1) x_r = f(t);$$

$$2) x_{t_1}, N_{t_1}.$$

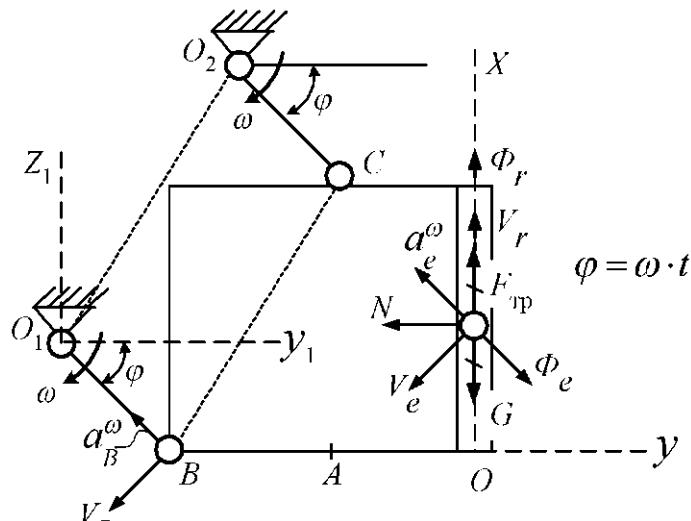


Рис. 3

Решение.

Связем подвижную систему отсчета OXY с каналом, совместив ось X с траекторией относительного движения шарика M . Переносным движением для шарика M является поступательное движение тела A , которое осуществляется благодаря вращению параллельных кривошипов O_2C и O_1B одинаковой длины с угловой скоростью ω . При этом прямая BC тела A движется параллельно самой себе как противоположная сторона параллелограмма O_1O_2BC .

При поступательном движении тела скорости и ускорения всех точек тела геометрически равны. Поэтому, определив скорость и ускорение точки B , принадлежащей одновременно кривошипу O_1B и телу A , находим переносную скорость и ускорение точки M .

$$V_B = \omega \cdot r; \quad a_B^\omega = \omega^2 \cdot r \quad (a_B^\varepsilon = \varepsilon \cdot r = 0, \text{ т.к. } \omega = \text{const}).$$

Покажем эти векторы в точке B и перенесем их без изменения параллельно самим себе, обозначив \vec{V}_e и \vec{a}_e .

$$V_e = \omega \cdot r, \quad a_e = \omega^2 \cdot r.$$

Ускорение Кориолиса при поступательном переносном движении равно нулю: $a_c = 2\omega_e \cdot V_r \cdot \sin(\vec{\omega}_e; \vec{V}_r) = 0$, т.к. $\omega_e = 0$.

Переносная сила инерции $\vec{\phi}_e = -m\vec{a}_e$ и по модулю равна $\phi_e = m\omega^2 \cdot r$. Покажем на рис. 3 силы $\vec{\phi}_e$, \vec{G} , силу трения скольжения $F_{\text{тр}} = Nf$ и нормальную реакцию стенки трубы \vec{N} .

Для данной задачи запишем **основное уравнение динамики** относительного движения шарика.

$$m \cdot \vec{a}_r = \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{\phi}_e + \vec{N} + \vec{G}.$$

Для получения дифференциального уравнения относительного движения спроектируем векторы основного уравнения на ось X .

$$m\ddot{x}_r = -mg - \Phi_e \cdot \sin\omega t + F_{\text{тр}}$$

Для определения N , входящего в $F_{\text{тр}} = Nf$, спроектируем векторы основного уравнения на ось Y .

$$O = -N + \Phi_e \cdot \cos\omega t,$$

откуда $N = \Phi_e \cdot \cos\omega t = m\omega^2 \cdot r \cdot \cos\omega t$. Подставим все значения в исходное дифференциальное выражение

$$m\ddot{x}_r = -mg + m\omega^2 \cdot r \cdot \cos\omega t \cdot f - m\omega^2 \cdot r \cdot \sin\omega t.$$

Сократим на массу m и проинтегрируем:

$$\ddot{x}_r = -g + \omega^2 \cdot r \cdot \cos\omega t \cdot f - \omega^2 \cdot r \cdot \sin\omega t;$$

$$\dot{x} = -gt + \omega \cdot r \cdot \sin\omega t \cdot f + \omega \cdot r \cdot \cos\omega t + C_1;$$

$$x = -g \frac{t^2}{2} - r \cdot \cos\omega t \cdot f + r \cdot \sin\omega t + C_1 t + C_2.$$

Для определения постоянных интегрирования используем начальные условия движения: $t_0 = 0$; $x_0 = 0,1$ м; $\dot{x}_0 = 2$ м/с.

$$2 = \omega \cdot r + C_1, \quad C_1 = 2 - \omega \cdot r = 0,74;$$

$$0,1 = -r \cdot f + C_2, \quad C_2 = 0,1 + r \cdot f = 0,12.$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} \dot{x}_r = -9,81t + 0,125 \cdot \sin \omega t + 1,256 \cdot \cos \omega t + 0,74; \\ x_r = -4,9t^2 - 0,02 \cdot \cos \omega t + 0,2 \cdot \sin \omega t + 0,74t + 0,12. \end{cases}$$

Рассчитаем x_{t_1} , подставив в уравнение $t_1 = 0,1$ с.

$$x_{t_1} = 0,246 \text{ м.}$$

Заметим, что x_{t_1} увеличилась по сравнению с координатой $x_0 = 0,1$ м, то есть движение шарика вверх произошло за счет относительной силы инерции $\Phi_r = |m \cdot a_r|$, которая показана штриховым вектором, направленным вверх противоположно ускорению a_r .

Расчетная скорость $\dot{x}_{t_1} = 1,156$ м/с уменьшилась по сравнению с начальной скоростью $\dot{x}_0 = 2$ м/с, следовательно, движение шарика вверх идет с замедлением, а ускорение a_r направлено вниз.

Такие логические рассуждения помогают оценить по полученным результатам правильность решения.

$$\text{Рассчитаем реакцию } N_{t_1} = m\omega^2 \cdot r \cdot \cos \omega t_1 = 0,064 \text{ Н.}$$

2.2. Обзор и классификация вариантов задания Д-4

Из условия задания четко определены две группы вариантов задания по переносному движению – вращательному и поступательному. Относительным движением является движение шарика по прямолинейному каналу тела A как подвижной системы. В свою очередь, варианты с переносным вращательным движением можно разбить на две подгруппы: *первая*, когда ось вращения вертикальная и лежит в плоскости рисунка, и *вторая*, когда ось вращения горизонтальная и перпендикулярна плоскости рисунка.

В первой подгруппе силы расположены в пространстве по трем осям, а нормальная реакция гладкой стенки трубы состоит из двух – N_y и N_z .

Во второй подгруппе все силы расположены в плоскости вращения и реакция гладкой поверхности трубы N одна в этой же плоскости.

Группа с переносным поступательным движением также разбивается на две подгруппы: *первая* – переносное движение прямолинейное, и *вторая* – переносное движение криволинейное, как в рассмотренном выше варианте.

2.3. Задача по Д-4

Горизонтальная трубка CD (рис. 4) равномерно вращается вокруг вертикальной оси AB с угловой скоростью ω . Внутри трубы находится тяжелый шарик M .

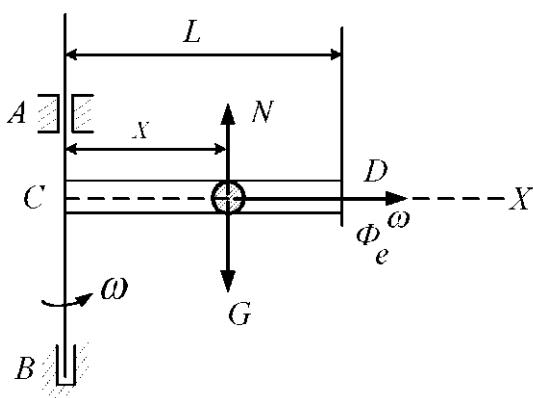


Рис. 4

Определить скорость V_L шарика относительно трубы в момент его вылета, если в начальный момент параметры: $V_0 = 0$, X_0 , длина трубы равна L . Трением пренебречь.

$$L, \omega = \text{const}; X_0, \dot{X}_0 = 0.$$

$$V_L - ?$$

Решение.

Покажем действующие на шарик силы и запишем основное уравнение динамики относительного движения шарика.

$$m \cdot \vec{a}_r = \vec{\phi}_e^\omega + \vec{G} + \vec{N},$$

где $\vec{\phi}_e^\omega = m\omega^2 \cdot \vec{x}$ – центробежная переносная сила инерции.

В проекции на ось CX относительного движения получим дифференциальное уравнение $m\ddot{x} = m\omega^2 \cdot x$.

Сократим на массу и получим $\ddot{x} = \omega^2 \cdot x$.

Чтобы проинтегрировать полученное дифференциальное уравнение,

распишем: $\ddot{x} = \frac{dV_x}{dt} = \frac{dV_x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dV_x}{dx} \cdot V_x$.

Тогда $\frac{dV_x}{dx} \cdot V_x = \omega^2 x$ и $\int_0^L V_x \cdot dV_x = \omega^2 \int_{x_0}^L x \cdot dx$,

$$\frac{V_L^2}{2} = \frac{\omega^2(L^2 - x_0^2)}{2}, \quad V_L = \omega \sqrt{L^2 - x_0^2}.$$

3. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Принцип возможных перемещений применяется для решения задач статики, однако в совокупности с принципом Даламбера дает общий метод решения задач динамики – *общее уравнение динамики*.

Возможные, или виртуальные, – это воображаемые элементарные перемещения, допускаемые наложенными на систему связями. Эти перемещения используются для определения кинематического передаточного отношения механизма и в результате решения сокращаются. Возможные перемещения отличаются от действительных (направленных по криволинейным траекториям) тем, что рассчитываются по формулам, соответствующим движениям точек по окружностям: $\delta S_i = \delta\phi \cdot R_i$, а показываются на расчетных схемах по прямолинейным отрезкам, направленным по касательным к траекториям движений как векторы скоростей точек.

Преимущество принципа возможных перемещений по сравнению с применением уравнений равновесия статики состоит в том, что не нужно определять реакции двухсторонних идеальных связей, которые на возможных перемещениях работу не производят и не входят в уравнение работ, выражающее принцип возможных перемещений.

Независимо от количества тел, входящих в систему, количество уравнений работ соответствует числу степеней свободы системы. Для большинства механизмов с одной степенью свободы только одно

уравнение сразу определяет искомую величину.

В общем виде уравнение работ $\sum F_i \delta S_i \cos(\vec{F}_i \delta \vec{S}_i) = 0$ или уравнение мощностей $\sum F_i V_i \cos(\vec{F}_i \vec{V}_i) = 0$ используются в основном при поступательном движении твердых тел.

При вращательном или плоском движении тела, которое заменяется вращательным вокруг мгновенного центра скоростей, используются соответственно формулы $\sum M_i \cdot \delta \varphi_i = 0$ и $\sum M_i \cdot \omega_i = 0$.

В ряде случаев целесообразно использовать аналитические формулы:

$$\sum F_{ix} \delta x_i + \sum F_{iy} \delta y_i + \sum F_{iz} \delta z_i = 0$$

$$\text{и } \sum F_{ix} \cdot V_{ix} + \sum F_{iy} \cdot V_{iy} + \sum F_{iz} \cdot V_{iz} = 0.$$

Все возможные перемещения или скорости звеньев механизма выражаются через одну величину перемещения или скорости, то есть выполняется расчет кинематического передаточного отношения.

При определении реакций опор неподвижной конструкции, как, например, в Д-15, эта конструкция получает одну степень свободы в результате замены соответствующей опоры, где одна связь мысленно отбрасывается, а ее действие заменяется искомой реакцией. Конструкции сообщается возможное перемещение, и составляется уравнение работ или мощностей поочередно для определения каждой реакции опоры. Проверку правильности определения реакций опор можно производить с помощью уравнения равновесия статики.

3.1. Задание Д-15. Применение принципа возможных перемещений к определению реакций опор составной конструкции [1]

Применяя принцип возможных перемещений, определить реакции опор составной конструкции (рис. 5).

Дано: $P_1 = 16 \text{ кН}$, $P_2 = 8 \text{ кН}$, $M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $q = 1,5 \text{ кН/м}$.

Определить: X_A , Y_A , R_B , R_D .

Конструкция состоит из 2-х тел: рамы ACB и балки $C\bar{D}$, соединенных шарниром C .

Решение.

Заменим равномерно распределенную нагрузку интенсивности q сосредоточенной силой $Q = q \cdot 2 = 3 \text{ кН}$.

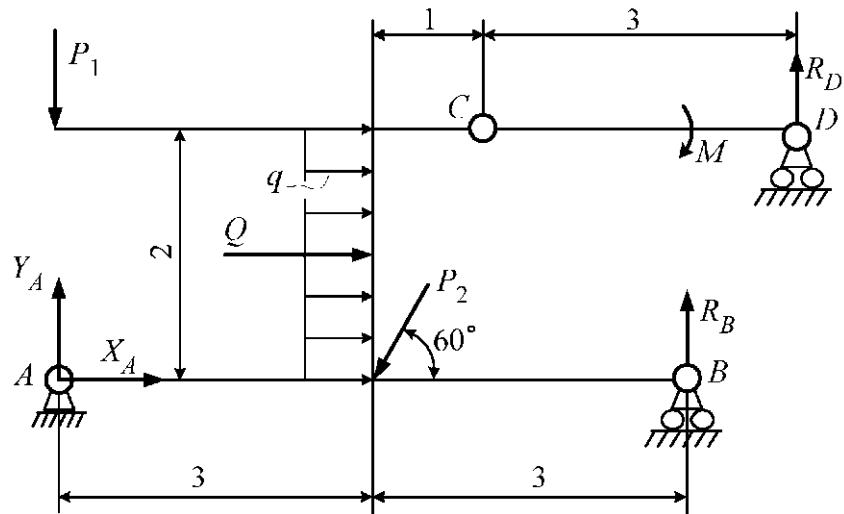


Рис. 5

Определим сначала, например, реакцию Y_A , для чего мысленно отбросим вертикальную связь, заменив шарниро-неподвижную опору A ползуном с шарниром в вертикальных направляющих. Вместо отброшенной связи покажем вертикальную реакцию Y_A , направленную, например, вверх (рис. 6).

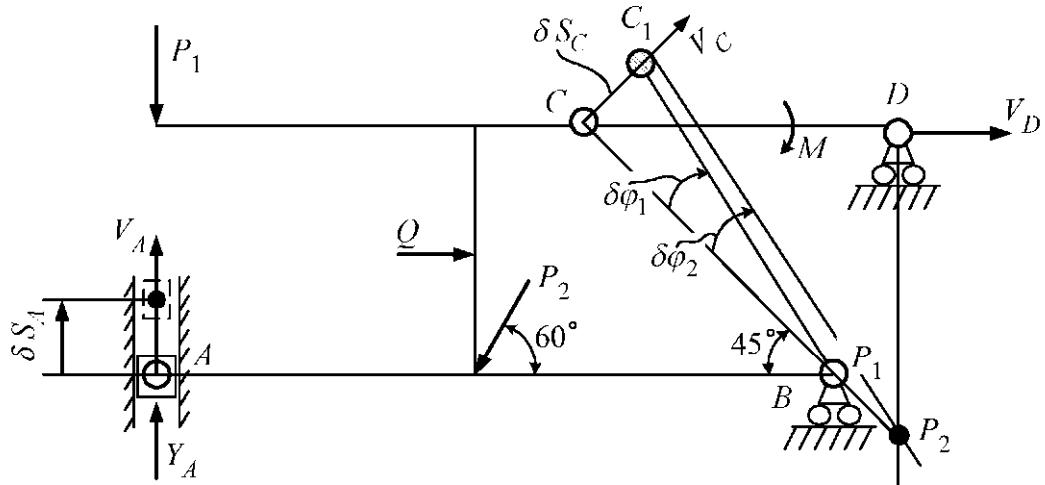


Рис. 6

Возможным перемещением левой части рамы ABC является ее поворот, например, по часовой стрелке на угол $\delta \varphi_1$ вокруг мгновенного центра скоростей P_1 , который совпадает с точкой B и находится на пересечении перпендикуляров к скоростям точек A (ползун) и B (тележка). Скорость точки C и ее возможное перемещение δS_c для рамы ABC и балки CD направлены перпендикулярно радиусу вращения CP_1 . Для определения перемещения балки CD найдем мгновенный центр скоростей P_2 на пересечении

перпендикуляров к скоростям точек C и D (тележки). Из построенных на δS_c как на общем катете прямоугольных треугольников CC_1B и CC_1P_2 получим соотношение углов $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$:

$$\delta S_c = \delta\varphi_1 \cdot CB = \delta\varphi_2 \cdot CP_2,$$

где $CB = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$; $P_2D = CD = 3$, так как угол 45° ;

$$CP_2 = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}; \quad \delta\varphi_2 = \delta\varphi_1 \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}.$$

Составим уравнение работ, выражающее принцип возможных перемещений, при этом учтем, что работа силы при повороте тела равна произведению момента силы относительно центра вращения на угол поворота тела.

$$Y_A \cdot AB \cdot \delta\varphi_1 - P_1 \cdot G \cdot \delta\varphi_1 + Q \cdot 1 \cdot \delta\varphi_1 - P_2 \sin 60 \cdot 3 \cdot \delta\varphi_1 + M \cdot \delta\varphi_2 = 0.$$

Решая это уравнение, сокращаем $\delta\varphi_1$ и определяем Y_A .

Определим R_B , отбросив опору и заменив ее действие реакцией (рис. 7).

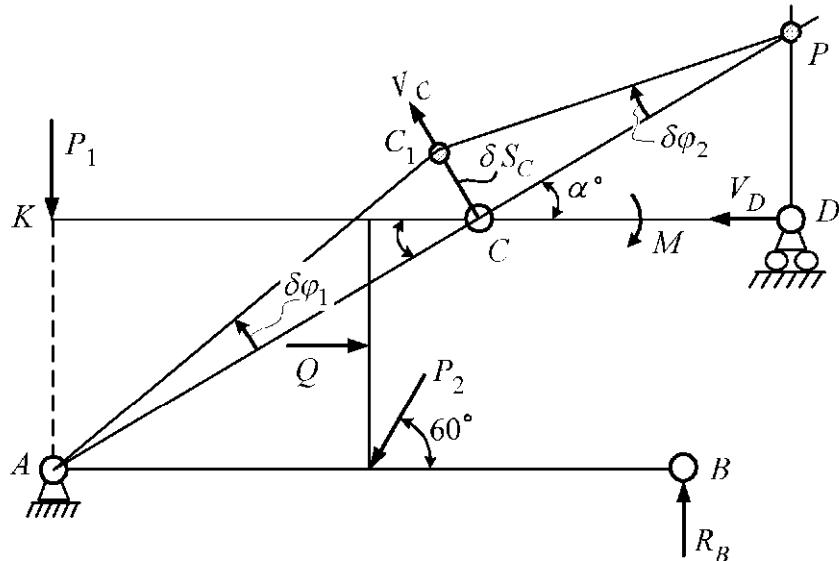


Рис. 7

Рама ACB получила возможность поворачиваться вокруг шарнирно-неподвижной опоры A на угол $\delta\varphi_1$, например, против часовой стрелки.

Отметим, что возможные перемещения не зависят от задаваемых нагрузок, а определяются только имеющимися связями.

Покажем вектор скорости \vec{V}_C и перемещение δS_C перпендикулярно AC , а для определения мгновенного центра скоростей P балки CD проведем перпендикуляры к \vec{V}_C и \vec{V}_D (тележка). Из треугольников ACC_1 и PCC_1

установим зависимость между $\delta \varphi_1$ и $\delta \varphi_2$:

$$\delta S_C = \delta \varphi_1 \cdot AC = \delta \varphi_2 \cdot CP, \text{ откуда } \delta \varphi_2 = \delta \varphi_1 \cdot \frac{AC}{CP},$$

где $AC = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{4} = \frac{PD}{CD}$,

поэтому $PD = 1,5$, когда $CP = \sqrt{1,5^2 + 3^2} = \sqrt{11,25}$.

Составим уравнение работ.

$$-Q \cdot 1 \cdot \delta \varphi_1 - P_2 \cdot \sin 60 \cdot 3 \cdot \delta \varphi_1 + R_B \cdot 6 \cdot \delta \varphi_1 + M \cdot \delta \varphi_2 = 0.$$

Сократив $\delta \varphi_1$, определяем R_B . Оставшиеся реакции X_A и R_D определяются очень просто и без рисунка.

Для определения X_A заменяем шарнирно-неподвижную опору в точке A на ползун с шарниром в горизонтальных направляющих. Так как скорости точек A и B рамы ABC параллельны, то она движется поступательно по горизонтали. Теперь скорости точек C и D балки CD также параллельны и горизонтальны, т.е. вся конструкция имеет возможность переместиться по горизонтали, например, вправо на величину δS . Составим уравнение работ, направив X_A вправо.

$$X_A \cdot \delta S + Q \cdot \delta S - P_2 \cdot \cos 60 \cdot \delta S = 0.$$

Сократив δS , определяем X_A .

Для определения R_D отбросим шарнирно-подвижную опору D , заменив ее действие реакцией R_D . Рама ABC при двух опорах A и B перемещаться не может, поэтому шарнир C для балки CD является неподвижным центром вращения. Сообщим возможное перемещение балке CD – поворот на угол $\delta \varphi$, например, против часовой стрелки и запишем уравнение работ.

$$R_D \cdot 3 \cdot \delta \varphi - M \cdot \delta \varphi = 0.$$

Сократив $\delta \varphi$, определяем R_D .

После расчета всех реакций опор можно сделать проверку правильности их расчета, составив уравнения равновесия для всей конструкции:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0; \\ \sum Y_i = 0; \\ \sum M_i = 0. \end{cases}$$

3.2. Обзор и классификация вариантов задания Д-15

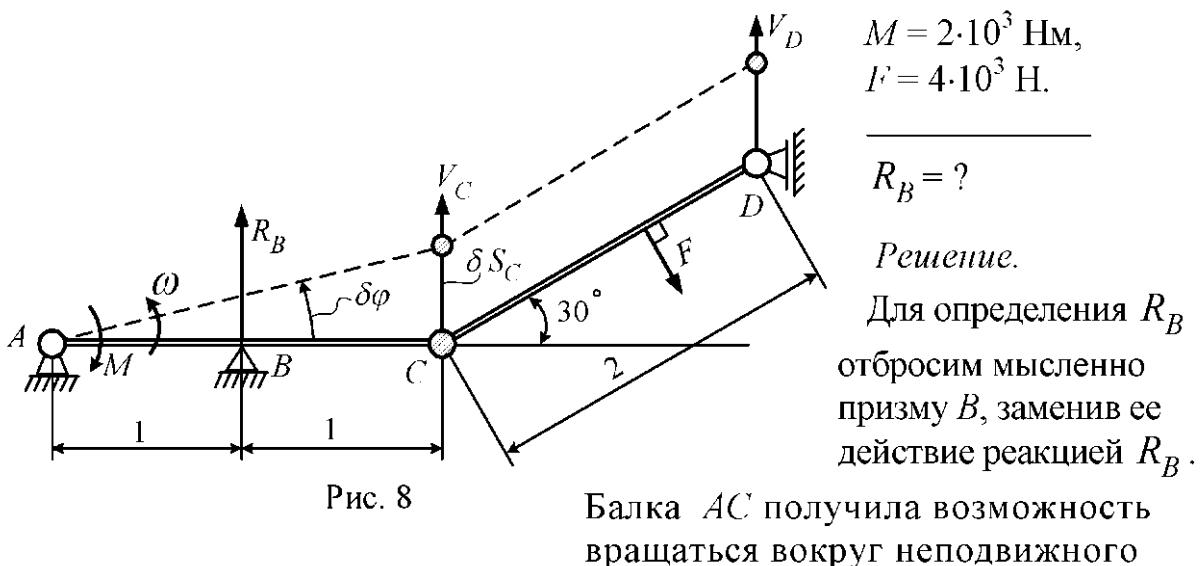
В задании Д-15 требуется определить реакции опор составной конструкции, состоящей из двух твердых тел. Применение принципа возможных перемещений позволяет в любой последовательности определить все *четыре* реакции опор. Каждый раз при определении очередной реакции делается соответствующая расчетная схема и составляется одно уравнение работ или мощностей. Принципиально все варианты решаются по единому алгоритму. Однако можно выделить три разные группы вариантов в соответствии с имеющимися опорами. *Первая группа* – две шарнирно-неподвижные опоры, *вторая группа* – три опоры, две из которых шарнирно-подвижные и одна шарнирно-неподвижная, *третья группа* – одна опора шарнирно-подвижная, другая – жесткая заделка.

Отметим, что возможные перемещения не зависят от нагрузки, а определяются опорами и внутренними связями твердых тел, входящих в конструкцию.

Варианты *первой* и *третьей* групп более просты по решению, причем вариант с жесткой заделкой разобран в примере выполнения задания Д-15 в сборнике А.А. Яблонского, поэтому в данной работе разбираются задачи второй группы вариантов с тремя опорами.

3.3. Задача по Д-15 [6]

Балки AC и CD соединены между собой шарниром C . Горизонтальная балка AC , опирающаяся на ребро B призмы, нагружена парой сил с моментом $M = 2 \cdot 10^3$ Нм. Балка CD нагружена посередине силой $F = 4 \cdot 10^3$ Н. Определить модуль реакции опоры B (рис. 8).



шарнира A на угол $\delta\varphi$. Покажем скорости точек C и D , где точка D – это шарнирно-подвижная или скользящая опора. Балка CD с указанными параллельными скоростями \vec{V}_C и \vec{V}_D может двигаться только поступательно. Покажем возможное перемещение всей конструкции жирной штриховой линией. Запишем уравнение работ.

$$-M \cdot \delta\varphi + R_B \cdot 1 \cdot \delta\varphi - F \cos 30^\circ \cdot \delta S_C = 0,$$

где $\delta S_C = \delta\varphi \cdot AC$.

Рассчитаем R_B , сократив $\delta\varphi$.

$$R_B = 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3 \cdot 0,866 \cdot 2 = 8,93 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Вместо уравнения работ можно было записать уравнение мощностей

$$-M \cdot \omega + R_B \cdot 1 \cdot \omega - F \cdot \cos 30^\circ \cdot V_C = 0,$$

где $V_C = \omega \cdot AC$. Результат расчета тот же.

4. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

По второму закону Ньютона $m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}_i$ ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет одинаковое с ней направление (рис. 9).

Рассмотрим точку M , движущуюся под действием сил F_1, F_2, \dots, F_n .

Равнодействующая этих сил $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$.

Даламбер предложил перенести $m \cdot \vec{a}$ в правую часть уравнения и обозначить силу инерции материальной точки $\vec{\Phi} = -m \cdot \vec{a}$, эту силу инерции он приложил к ускоряемой материальной точке.

Полученное уравнение $\sum \vec{F}_i + \vec{\Phi}_i = 0$

выражает принцип Даламбера для свободной материальной точки – геометрическая сумма задаваемых сил и силы инерции точки равна нулю.

Если рассматривается несвободная механическая система, то добавляются реакции связей. $\sum \vec{F}_i + \sum \vec{R}_i + \vec{\Phi}_i = 0$.

При векторном умножении радиуса-вектора \vec{r}_i , определяющего положение точки M_i , на слагаемые предыдущего равенства

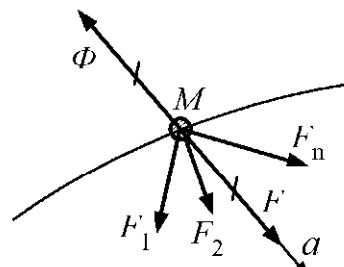


Рис. 9

получаем: $\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum \vec{r}_i \times \vec{R}_i + \sum \vec{r}_i \times \vec{\Phi}_i = 0$

или

$$\sum \vec{M}_{i_o}^F + \sum \vec{M}_{i_o}^R + \sum \vec{M}_{i_o}^\phi = 0,$$

то есть геометрическая сумма моментов всех сил (задаваемых сил, реакций связей и сил инерции относительно заданного центра) равна нулю. Из статики известно, что при приведении произвольной пространственной системы сил к заданному центру получаем два параметра: главный вектор, равный геометрической сумме сил и главный момент, равный геометрической сумме моментов всех сил относительно центра приведения. Если оба эти параметра равны нулю, то получаем условия равновесия произвольной системы сил. Согласно принципу Даламбера получены такие условия равновесия для системы точек, движущихся с ускорениями.

На принципе Даламбера основан метод кинетостатики, то есть решение задач динамики с помощью уравнений равновесия. Для произвольной пространственной системы сил это будет *шесть уравнений равновесия*.

$$\begin{cases} \sum X_i = 0; & \sum M_{i_x} = 0; \\ \sum Y_i = 0; & \sum M_{i_y} = 0; \\ \sum Z_i = 0; & \sum M_{i_z} = 0, \end{cases}$$

а для плоской системы сил – *три уравнения равновесия*.

$$\begin{cases} \sum X_i = 0; \\ \sum Y_i = 0; \\ \sum M_{i_0} = 0, \end{cases}$$

где в сумме проекций сил на оси и в сумме моментов сил учтены силы инерции точек системы.

Главный вектор сил инерции $\vec{R}^\phi = \sum \vec{\Phi}_i = -m\vec{a}_c$ имеет направление, противоположное ускорению центра масс \vec{a}_c системы с массой m .

Главный момент сил инерции при вращении вокруг оси $M_z^\phi = -J_z \cdot \varepsilon$ имеет направление, противоположное угловому ускорению ε , где J_z – момент инерции системы относительно заданной оси. При поступательном

движении главный момент $M_z^\phi = -J_z \cdot \varepsilon = 0$, так как $\omega = 0$, а при вращательном движении вокруг неподвижного центра масс главный вектор $\vec{R}^\phi = -m\vec{a}_c = 0$, так как $V_c = 0$. При плоском движении твердого тела, например колеса движущегося автомобиля, существуют и главный вектор и главный момент сил инерции.

4.1. Задание Д-16. Применение принципа Даламбера к определению реакций связей [1]

Определить реакции внешних связей механической системы в момент времени t_1 (рис. 10). Это реакции X_A , Y_A , Z_A , X_B , Y_B .

Дано:

$$b = 2a = 0,5\ell;$$

$$r_1 = 0,8 \cdot r_2 = R;$$

$$m_1 = 24 \text{ кг};$$

$$m_2 = 30 \text{ кг};$$

$$\ell = 0,5 \text{ м};$$

$$R = 0,2 \text{ м};$$

$$M_z = 20 - 0,1t \text{ Нм};$$

$$t_1 = 200 \text{ с};$$

$$\omega_0 = 0;$$

при $t = t_1$ координаты центров

тяжести шкивов C_1 и C_2 :

$$X_{C_1} = -0,001 \text{ м};$$

$$Y_{C_2} = -0,001 \text{ м}.$$

Решение.

Для определения реакции связей применим принцип Даламбера. Покажем на рисунке все активные силы, реакции связей и силы инерции. Реакции опор A и B и силы тяжести G_1 и G_2 не создают вращающего момента относительно оси Z . Для анализа вращательного движения приведем дифференциальное уравнение вращательного движения вокруг оси: $J_z \varepsilon = \sum M_i^E_z$.

В данной задаче система двух шкивов вращается под действием переменного момента $M_z = 20 - 0,1t$ и с переменным угловым ускорением

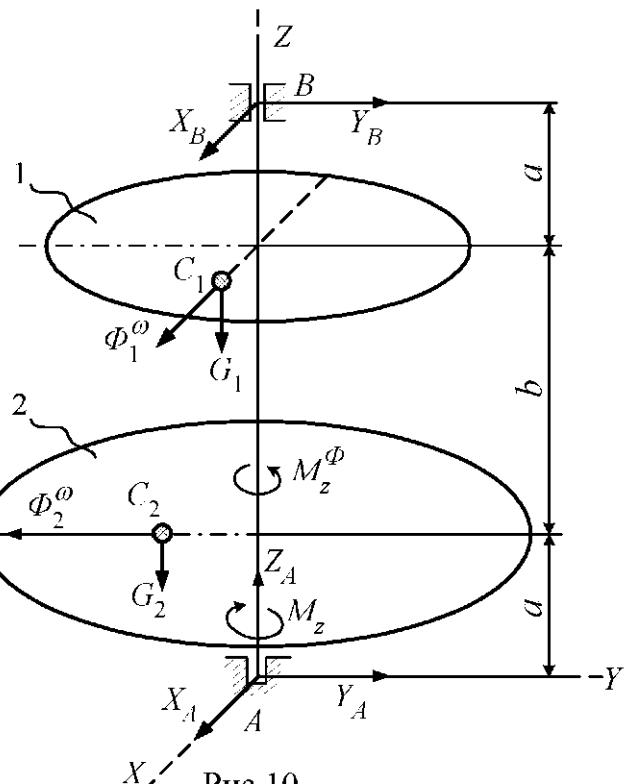


Рис.10

ε , соответствующим направлению M_z . Покажем на рисунке момент сил инерции $M_z^\Phi = -J_z \varepsilon$, противоположный угловому ускорению. Заметим, что в расчетный момент времени $t_1 = 200$ с правая часть дифференциального уравнения $J_z \varepsilon = M_z$ равна нулю, так как $M_z = 20 - 0,1 \cdot 200 = 0$. Тогда, при $\varepsilon = 0$, вращательные силы инерции отсутствуют, и на рисунке покажем только центробежные силы инерции Φ_1^ω и Φ_2^ω .

Согласно принципу Даламбера для произвольной пространственной системы сил запишем *шесть уравнений равновесия*:

$$\sum X_i = 0, \quad X_A + X_B + \Phi_1^\omega = 0. \quad (11)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad Y_A + Y_B + \Phi_2^\omega = 0. \quad (12)$$

$$\sum Z_i = 0, \quad Z_A - G_1 - G_2 = 0. \quad (13)$$

$$\sum M_{i_x} = 0, \quad -Y_B(2a+b) + \Phi_2^\omega \cdot a + G_2 \cdot 0,001 = 0. \quad (14)$$

$$\sum M_{i_y} = 0, \quad X_B(2a+b) + \Phi_1^\omega(a+b) + G_1 \cdot 0,001 = 0. \quad (15)$$

$$\sum M_{i_z} = 0, \quad M_z^\Phi - M_z = 0. \quad (16)$$

Из уравнения (16) $M_z = M_z^\Phi$, или $20 - 0,1 \cdot t = J_z \varepsilon$, определяем

$$\varepsilon = \frac{20}{J_z} - \frac{0,1}{J_z} \cdot t.$$

Момент инерции системы из двух шкивов: $J_z = J_{z_1} + J_{z_2}$.

Моменты инерции однородных сплошных шкивов относительно оси их вращения, не проходящей через их центры масс, определяются в соответствии с теоремой о моментах инерции относительно параллельных осей:

$$J_{z_1} = J_{C_{1z}} + m_1 \cdot 0,001^2 = \frac{m_1 r_1^2}{2} + m_1 \cdot 0,001^2 = 0,48 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$J_{z_2} = J_{C_{2z}} + m_2 \cdot 0,001^2 = \frac{m_2 r_2^2}{2} + m_2 \cdot 0,001^2 = 0,384 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$J_z = 0,864 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Запишем в общем виде $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{20}{J_z} - \frac{0,1}{J_z} \cdot t$.

Для определения ω_1 в момент времени t_1 разделим переменные и проинтегрируем.

$$\int_0^{\omega_1} d\omega = \frac{20}{J_z} \int_0^{200} dt - \frac{0,1}{J_z} \int_0^{200} t \cdot dt,$$

откуда $\omega_1 = \frac{20}{J_z} \cdot 200 - \frac{0,1}{J_z} \cdot \frac{200^2}{2} = \frac{2000}{J_z} = \frac{2000}{0,864} = 2314,8 \text{ с}^{-1}$.

Теперь стало возможным рассчитать:

$$\Phi_1^\omega = m_1 \cdot \omega_1^2 \cdot 0,001 \quad \text{и} \quad \Phi_2^\omega = m_2 \cdot \omega_1^2 \cdot 0,001.$$

Подставив Φ_1^ω в уравнения (15) и (11), определяем X_A и X_B , а подставив Φ_2^ω в уравнения (14) и (12), определяем Y_A и Y_B . Величина $Z_A = G_1 + G_2$ зависит только от статических сил тяжести.

4.2. Обзор и классификация вариантов задания Д-16

В задании Д-16 можно выделить четыре группы вариантов, которые принципиально отличаются по решению.

Самая распространенная – *первая* группа вариантов, пример решения которой рассмотрен в сборнике заданий А.А.Яблонского [1]. Это вращение одного или двух связанных между собой стержней или стержня с грузом на конце вокруг вертикальной или горизонтальной оси, расположенной в плоскости рисунка.

Это варианты: 4, 5, 10, 12–15, 18, 19, 23, 24, 29, 30.

Внутри этой группы также можно выделить варианты с пружиной, соединяющей стержни с осью вращения, и без пружины. Для определения усилия пружины составляется отдельно для стержня уравнение его равновесия относительно шарнира, соединяющего стержень с осью вращения, при этом неизвестные реакции шарнира не входят в уравнение моментов, как не создающие моментов. В вариантах без пружины, как правило, при отсутствии в данных угловой скорости дается постоянный угол, образованный стержнем и осью вращения. Постоянство угла говорит о постоянстве угловой скорости вращения, которая также определяется из уравнения моментов отдельно для стержня относительно шарнира его крепления к оси. В примере по Д-16, рассмотренном в сборнике [1], приведен метод определения точки приложения равнодействующей центро-безных сил инерции стержня, отклоненного от оси вращения. Метод базируется на теореме Вариньона о моменте равнодействующей относительно оси [2]. Стержень разбивается по длине на элементы-тарные

участки, определяется элементарная центробежная сила инерции, а затем момент равнодействующей приравнивается к интегралу, представляющему собой предел суммы элементарных моментов сил инерции стержня. Равнодействующая равна по модулю главному вектору сил инерции Φ^ω , а ее плечо h приложения относительно шарнира определяется из уравнения. Это плечо оказывается равным $\frac{2}{3}\ell \cdot \cos\alpha$, где α° – угол наклона стержня к оси вращения. Плечо можно указывать сразу, без расчета, так как силы инерции стержня при его вращении распределены по линейному закону – закону треугольника, центр которого находится на пересечении медиан на расстоянии $2/3$ длины медианы или высоты

треугольника от вершины угла, из которого они проведены (рис. 11).

После определения точки приложения равнодействующей силы инерции стержня реакции опор можно найти с помощью трех уравнений равновесия для плоской системы сил с учетом сил инерции.

Вторая группа вариантов с вращением диска или стержня вокруг оси, перпендикулярной плоскости, где он находится, – это варианты 1, 2, 3, 6, 7, 8, 20.

Разница в решении вариантов с

дисками или стержнями – только в формулах определения их моментов инерции. Существенное различие вариантов группы зависит от используемых плоскостей XOY или YOZ . В вертикальной плоскости вращение происходит под действием переменного момента силы тяжести, тогда как в горизонтальной плоскости – от постоянного вращающего момента M . Здесь два уравнения равновесия в проекциях на оси координат служат для определения двух составляющих реакций опоры после того, как из 3-го уравнения моментов $\sum M_{i_0} = 0$ определено угловое ускорение

ε ; далее интегрированием найдены ω_1 и φ_1 , соответствующие времени t_1 . Если задан угол φ_1 , соответствующая ему угловая скорость определяется следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \omega, \quad \int_{\omega_0}^{\omega_1} \omega \cdot d\omega = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \varepsilon \cdot d\varphi.$$

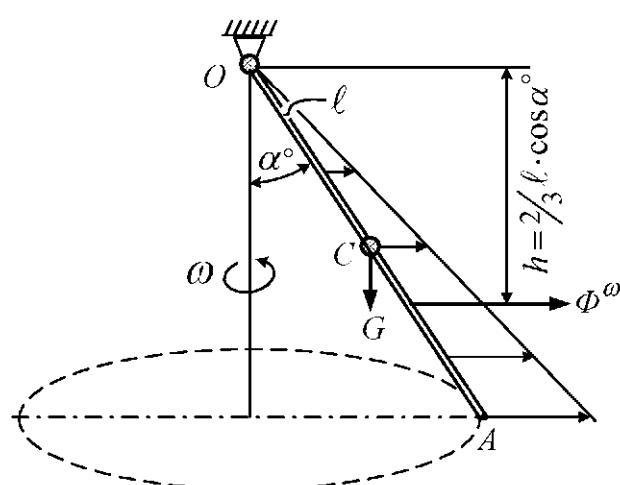


Рис. 11

Третья группа вариантов – 16, 17, 21, 22, 25, 26, 27, 28 – более проста по решению, потому что здесь центры масс вращающихся тел неподвижны и рассчитываются только моменты сил инерции $M_C^\Phi = -J_C \varepsilon$, а для

поступательно движущихся грузов рассчитываются только главные векторы сил инерции:

$$\vec{\Phi}_1 = -m_1 \cdot \vec{a}_1, \quad \vec{\Phi}_2 = -m_2 \cdot \vec{a}_2.$$

Чтобы определить угловое ускорение ε вращающегося тела, составляется уравнение моментов всех сил относительно центра вращения $\sum M_{ic} = 0$ отдельно от остальной конструкции по шарниру C для исключения других неизвестных величин, кроме ε , или для всей конструкции, если эти неизвестные силы не создают моментов. С помощью еще двух уравнений проекций сил на оси координат определяются неизвестные реакции связей.

Четвертая группа вариантов – 9, 11 – представляет собой конструкцию, на которую действует произвольная пространственная (а не плоская) система сил. Здесь составляются шесть уравнений равновесия. Пример такого задания рассмотрен выше в п. 4.1.

4.3. Задача по Д-16 [6]

Однородный стержень OA длиной $\ell = 0,5$ м, массой 4 кг вращается в горизонтальной плоскости под действием пары сил с моментом M (рис. 12, а). Определить модуль силы реакции шарнира и момента M в момент времени, когда угловая скорость

стержня $\omega = 10 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ и угловое ускорение $\varepsilon = 100 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$.

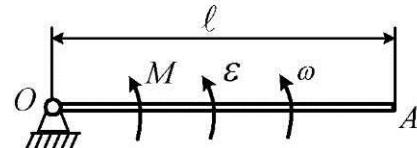


Рис. 12, а

Дано:

$$\begin{aligned} \ell &= 0,5 \text{ м}; \\ m &= 4 \text{ кг}; \\ \omega &= 10 \text{ с}^{-1}; \\ \varepsilon &= 100 \text{ с}^{-2}. \end{aligned}$$

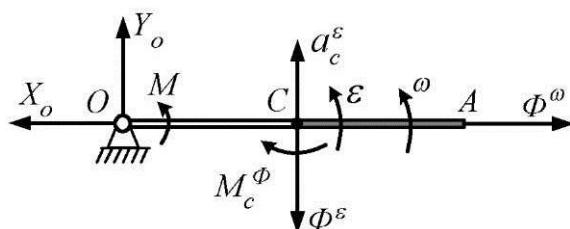


Рис. 12, б

$$R_o - ? \quad M - ?$$

Решение.

Центр масс стержня движется с ускорениями $a_c^\omega = \omega^2 \cdot \frac{\ell}{2}$ и $a_c^\varepsilon = \varepsilon \cdot \frac{\ell}{2}$, поэтому существуют центробежная сила инерции $\vec{\Phi}^\omega = -m\vec{a}_c^\omega$ и вращательная сила инерции $\vec{\Phi}^\varepsilon = -m\vec{a}_c^\varepsilon$. Приведем эти силы инерции к центру масс C . В результате чего появится момент сил инерции $M_C^\Phi = -J_C \varepsilon$, противоположный ε (рис. 12, б). Здесь X_o и Y_o – реакции опоры. Реакция шарнира $R_o = \sqrt{X_o^2 + Y_o^2}$. На основании принципа Даламбера для плоской произвольной системы сил запишем три уравнения равновесия, из которых определяются три неизвестных величины.

$$\sum X_i = 0, \quad -X_o + \Phi^\omega = 0, \quad X_o = \Phi^\omega = ma_c^\omega = m\omega^2 \cdot \frac{\ell}{2} = 4 \cdot 100 \cdot 0,25 = 100 \text{ Н.}$$

$$\sum Y_i = 0, \quad Y_o - \Phi^\varepsilon = 0, \quad Y_o = \Phi^\varepsilon = ma_c^\varepsilon = m\varepsilon \cdot \frac{\ell}{2} = 4 \cdot 100 \cdot 0,25 = 100 \text{ Н.}$$

$$\begin{aligned} \sum M_{i_o} = 0, \quad M - \Phi^\varepsilon \cdot \frac{\ell}{2} - M_c^\Phi = 0, \quad M = m\varepsilon \cdot \frac{\ell^2}{4} + m\varepsilon \cdot \frac{\ell^2}{12} = \\ = \varepsilon \cdot \frac{m\ell^2}{3} = \frac{100 \cdot 4 \cdot 0,25}{3} = 33,3 \text{ Нм.} \end{aligned}$$

$$R_o = \sqrt{100^2 + 100^2} = 141 \text{ Н.}$$

Покажем, что тот же результат можно получить, если силы инерции стержня привести к центру O (рис. 12, в) или к равнодействующей силе (рис. 12, г).

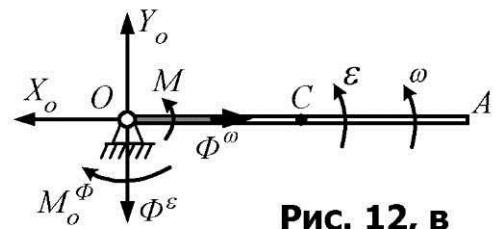


Рис. 12, в

$$\sum M_{i_o} = 0, \quad M - M_o^\Phi = 0, \quad M = M_o^\Phi = J_o \cdot \varepsilon = \frac{m\ell^2}{3} \cdot \varepsilon = 33,3 \text{ Нм.}$$

$$\sum X_i = 0, \quad -X_o + \Phi^\omega = 0, \quad X_o = \Phi^\omega = 100 \text{ Н.}$$

$$\sum Y_i = 0, \quad Y_o - \Phi^\varepsilon = 0, \quad Y_o = \Phi^\varepsilon = 100 \text{ Н.}$$

Здесь центробежные силы инерции распределены вдоль стержня, а вращательные – перпендикулярно стержню по закону треугольника и их равнодействующая $\vec{\Phi}^\varepsilon$ проходит через центр масс этой распределенной по линейному закону нагрузки.

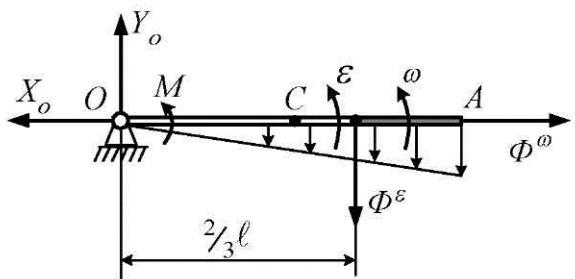


Рис. 12, г

Уравнения равновесия здесь дают те же результаты.

$$\sum X_i = 0, \quad -X_o = \Phi^\omega = 0, \quad X_o = \Phi^\omega = 100 \text{ Н.}$$

$$\sum Y_i = 0, \quad Y_o - \Phi^\varepsilon = 0, \quad Y_o = \Phi^\varepsilon = 100 \text{ Н.}$$

$$\sum M_{i_o} = 0, \quad M - \Phi^\varepsilon \cdot \frac{2}{3} \ell = 0, \quad M = m \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \varepsilon = \frac{m \ell^2}{3} \cdot \varepsilon = 33,3 \text{ Нм.}$$

Библиографический список

1. Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике.– М., 1978 и последующие издания.
2. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. – М., 1984. – Ч.II и последующие издания.
3. Тарг С.М. Курс теоретической механики. – М., 1963 и последующие издания.
4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М., 1990.
5. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М., 1971 и последующие издания.
6. Кепе О.Э. Сборник коротких задач по теоретической механике. – М., 1989.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Динамика материальной точки.....	4
1.1. Задание Д-1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянных сил.....	5
1.2. Обзор и классификация вариантов задания Д-1.....	8
1.3. Задача по Д-1.....	9
2. Динамика относительного движения материальной точки.....	10
2.1. Задание Д-4. Исследование относительного движения материальной точки.....	11
2.2. Обзор и классификация вариантов задания Д-4.....	14
2.3. Задача по Д-4.....	14
3. Принцип возможных перемещений.....	15
3.1. Задание Д-15. Применение принципа возможных перемещений к определению реакций опор составной конструкции.....	16
3.2. Обзор и классификация вариантов Д-15.....	20
3.3. Задача по Д-15.....	20
4. Принцип Даламбера.....	21
4.1. Задание Д-16. Применение принципа Даламбера к определению реакций связей.....	23
4.2. Обзор и классификация вариантов задания Д-16.....	25
4.3. Задача по Д-16.....	27
Библиографический список.....	30