ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА
Методические указания

Рассмотрены важные с точки зрения прикладной значимости аналитические методы исследования движения механических систем, имеющие определённые преимущества по сравнению с непосредственным применением уравнений Ньютона. В теоретической механике эти методы названы общим уравнением динамики и уравнениями Лагранжа, из которых могут быть получены основные теоремы динамики механических систем.

Предназначены для студентов 2 курса вузов дневной формы обучения специальностей инженерного профиля.

ВВЕДЕНИЕ

Общий метод решения задач статики даёт принцип возможных перемещений, отличительной особенностью которого является то, что при его применении эффект действия связей, наложенных на механическую систему, учитывается не путём введения неизвестных наперед реакций связей, а рассмотрением возможных перемещений, которые можно сообщить материальным точкам системы из предлагаемого её положения равновесия. С другой стороны, применять методы статики для решения задач динамики позволяет принцип Даламбера добавлением сил инерции к фактически действующим силам.

Поэтому, применяя одновременно эти два принципа, можно получить общий метод решения задач динамики. В результате, аналитическим уравнениям движения механической системы придаётся форма уравнения работ, которое получило название общего уравнения динамики.

Преобразование общего уравнения динамики позволяет получить дифференциальные уравнения динамики механической системы, число которых равно числу обобщённых координат системы. Эти уравнения называются уравнениями Лагранжа. По сравнению с непосредственным применением уравнений Ньютона, уравнения Лагранжа позволяют уменьшить порядок системы уравнений, описывающих движение, а во многих важных случаях и избежать затруднений, связанных с определением реакций связей. Кроме того, число уравнений Лагранжа определяется числом степеней свободы механической системы и не зависит от количества материальных точек системы, что является одним из их основных преимуществ.

1. ОБОБЩЁННЫЕ КООРДИНАТЫ И ЧИСЛО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

При решении многих задач механики можно добиться существенного упрощения, если ввести в рассмотрение так называемые *обобщённые координаты*. Определению этих величин и посвящён этот параграф.

Рассмотрим материальную систему, состоящую из n материальных точек. В инерциальной системе отсчета $OXYZ$ положение каждой точки M_k определяется тремя координатами x_k, y_k, z_k, а положение всех точек – $3n$ декартовыми координатами.

Будем считать, что движение системы ограничено h голономными, идеальными и удерживающими связями

$$f_i(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n, t) = 0, \quad i = 1, ..., n. \tag{1}$$

Так как $3n$ координат x_k, y_k, z_k удовлетворяют h уравнениям связей, то они не являются независимыми. Очевидно, что число независимых координат, определяющих положение системы, будет

$$s = 3n - h. \tag{2}$$

В качестве независимых координат, определяющих положение системы, можно выбрать s из $3n$ декартовых координат, выразив остальные координаты с помощью уравнений связей. Однако такой способ выбора независимых координат не будет лучшим, так как он часто приводит к сложным зависимостям. Значительно удобнее ввести s каких-либо независимых параметров $q_1, ..., q_s$ – *обобщенные координаты* – однозначно определяющих положение системы.

Независимые величины, заданием которых однозначно определяется положение всех точек механической системы, называются обобщёнными координатами этой системы.

Так, например, положение рычага AB с осью вращения O (рис. 1) вполне определяется заданием его угла поворота φ. Угол φ можно рассматривать как обобщённую координату рычага.

Положение всех точек кривошипного механизма (рис. 2) вполне определяется заданием только угла поворота кривошипа φ. Этот угол можно принять за обобщённую координату этой системы.

Положение всех точек центробежного регулятора (рис. 3), вращающегося вокруг вертикальной оси, определяется заданием угла поворота регулятора φ и угла α, образованного каждым из стержней с вертикалью. Не зависящие друг от друга углы φ и α можно считать обобщёнными координатами.

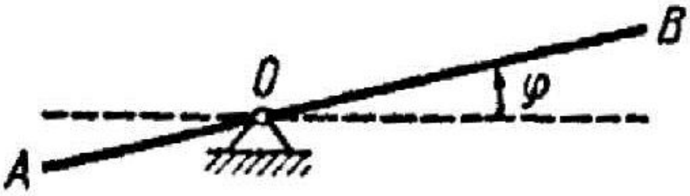

Рис. 1

Рис. 2

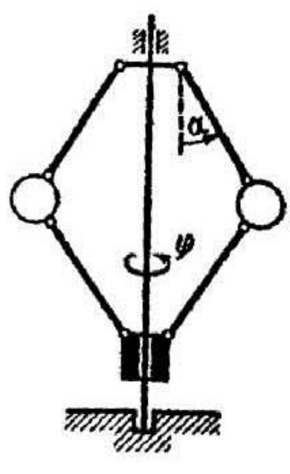

Рис. 3

В общем случае обобщённые координаты могут иметь различный геометрический и механический смысл. Ими могут быть линейные и угловые величины, а также параметры, имеющие размерность площади, объёма; обобщённые координаты иногда содержат элементы силовых и иных физических характеристик системы.

Итак, пусть положение материальной системы определяется s независимыми обобщёнными координатами $q_1, ..., q_s$. Так как положение системы однозначно определяется обобщёнными координатами, а каждая точка системы определяется её радиусом-вектором r_k, то последние можно выразить через обобщённые координаты и время:

$$r_k = r_k(q_1, ..., q_s, t) \quad (k = 1, ..., n). \tag{3}$$

Например, при переменной длине нити маятника (рис. 4) $OM = l - l_0 - ct$ точка M имеет координаты

$$y = (l_0 - ct)\sin\varphi, \quad z = (l_0 - ct)\cos\varphi,$$

которые зависят не только от обобщённой координаты φ, но и от времени t.

Векторные равенства (3) эквивалентны $3n$ скалярным равенствам

$$x_k = x_k(q_1, ..., q_s, t) \quad (k = 1, ..., n),$$
$$y_k = y_k(q_1, ..., q_s, t),$$
$$z_k = z_k(q_1, ..., q_s, t).$$

Конечно, при подстановке этих выражений для x_k, y_k, z_k в уравнения связей (1) последние должны обратиться в тождества.

Заметим, что если связи стационарны, то всегда можно выбрать такие обобщённые координаты, при которых равенства (3) не будут содержать время t явно. Обобщённые координаты удобны тем, что они, во-первых, независимы и, во-вторых, их введение освобождает нас от необходимости учитывать уравнения голономных связей. Последние удовлетворяются теперь автоматически по самому смыслу выбора обобщённых координат.

Если система голономна и число независимых координат, определяющих её положение, равно s, то столько же будет и независимых вариаций координат, характеризующих виртуальное перемещение системы.

Число независимых вариаций координат, определяющих положение системы, называется числом степеней свободы системы.

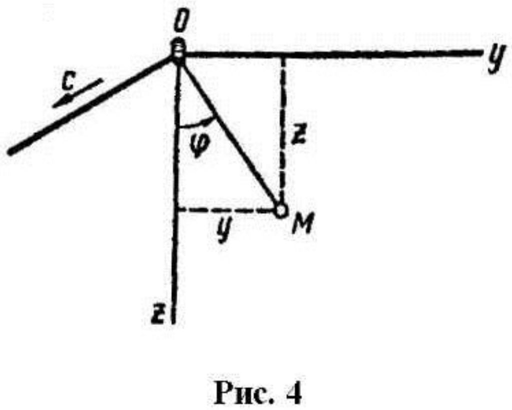

Рис. 4

Для неголономной системы число степеней свободы не будет равно числу независимых координат, определяющих положение системы. Действительно, пусть кроме h голономных связей, движение системы подчинено ещё m неголономным или кинематическим связям, уравнения которых содержат неинтегрируемым образом производные координат по времени (или их дифференциалы и дифференциал времени dt). В большинстве случаев, встречающихся в практике, неголономные связи содержат производные координат или их дифференциалы линейно. В этом случае движение системы будет подчинено m линейным зависимостям вида

$$\alpha_{r1} dq_1 + \ldots + \alpha_{rs} dq_s + \alpha_r dt = 0 \quad (r = 1, \ldots, m), \tag{4}$$

где α_{rk} и α_r – некоторые функции $q_1, \ldots, q_s$ и t. Заметим, что при стационарных неголономных связях $\alpha_r = 0$ и ни одна из функций α_{rk} не будет зависеть от времени t явно.

Условие неинтегрируемости уравнений неголономных связей (4) является существенным, так как в противном случае после интегрирования соответствующего уравнения получилась бы конечная зависимость между $q_1, \ldots, q_s$ и t, т.е. голономная, не кинематическая связь. В этом случае координаты $q_1, \ldots, q_s$ не были бы независимыми, и их число можно было бы уменьшить. Таким образом, неголономные связи налагают ограничения на свободу движения системы и одновременно не позволяют уменьшить число параметров, определяющих положение системы.

В силу неголономных связей вариации обобщённых координат $\delta q_1, \ldots, \delta q_s$ определяющих виртуальное перемещение системы, будут подчинены m условиям

$$\alpha_{r1} \delta q_1 + \ldots + \alpha_{rs} \delta q_s = 0 \quad (r = 1, \ldots, m),$$

которые получаются из (4) заменой dq_k на δq_k при $dt = 0$ (виртуальные перемещения осуществляются при фиксированном времени).

Из последних равенств следует, что число независимых вариаций координат $q_1, \ldots, q_s$ будет меньше числа координат и равно $s - m$. Таким образом, *число степеней свободы неголономной системы равно* $\nu = s - m$, *где* s *– число независимых координат, определяющих положение системы, а* m *– число неголономных связей*. Заметим, что число неголономных связей называется *степенью неголономности*.

Положение свободной материальной точки в пространстве определяется тремя декартовыми координатами, не зависимыми друг от друга. Поэтому свободная материальная точка имеет три степени свободы.

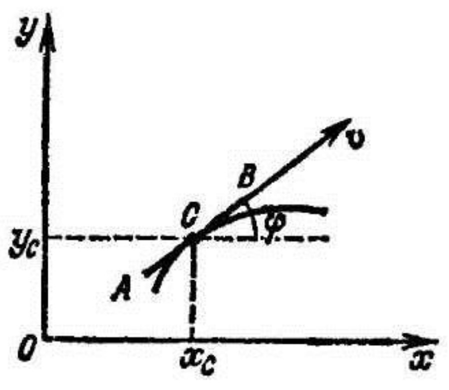

Рис. 5

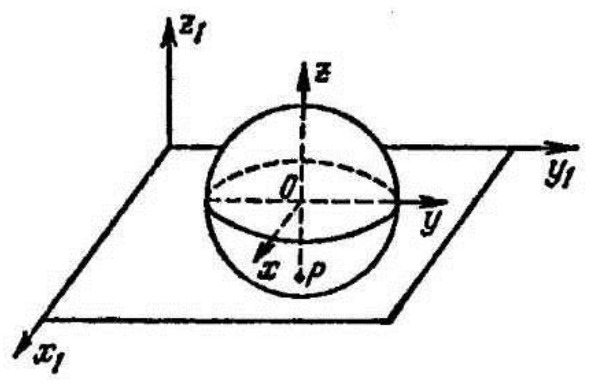

Рис. 6

Твёрдое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, имеет одну степень свободы, так как его положение определяется только углом поворота φ.

Тело, совершающее сферическое движение, имеет три степени свободы, так как его положение определяется тремя эйлеровыми углами: ψ, θ, φ.

Для конька, движущегося по поверхности льда (рис. 5), число независимых координат, определяющих его положение, равно трём $(s = 3)$, степень неголономности равна единице $(m = 1)$, число степеней свободы равно двум $(\nu = 3 - 1 = 2)$.

Для шара, катящегося без скольжения по плоскости (рис. 6), число независимых координат, определяющих его положение, равно пяти $(s = 5)$, степень неголономности равна двум $(m = 2)$, число степеней свободы равно трём $(\nu = s - m = 3)$.

2. ОБОБЩЁННЫЕ СИЛЫ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И СПОСОБЫ ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Вычислим работу δA всех активных сил на виртуальном перемещении системы (если имеются силы трения, то они присоединяются к активным силам):

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} F_k \delta r_k \,. \tag{5}$$

Пользуясь равенством (3), выразим вариацию δr_k радиуса-вектора r_k через вариации $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_s$ обобщённых координат:

$$\delta r_k = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial r_k}{\partial q_j} \delta q_j \quad (k = 1, ..., n). \tag{6}$$

При вычислении δr_k необходимо иметь в виду, что виртуальное перемещение системы определяется при фиксированном времени t.

Проекции вектора $\dfrac{\partial r_k}{\partial q_j}$ на оси неподвижных декартовых координат равны, конечно, производным от соответствующих координат точки:

$$\left(\frac{\partial r_k}{\partial q_j}\right)_x = \frac{\partial x_k}{\partial q_j},\ \left(\frac{\partial r_k}{\partial q_j}\right)_y = \frac{\partial y_k}{\partial q_j},\ \left(\frac{\partial r_k}{\partial q_j}\right)_z = \frac{\partial z_k}{\partial q_j}. \qquad (7)$$

Подставим δr_k из равенства (6) в формулу (5):

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} F_k \delta r_k = \sum_{k=1}^{n} F_k \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial r_k}{\partial q_j} \delta q_j$$

или, меняя порядок суммирования, получим

$$\delta A = \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{n} F_k \frac{\partial r_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j .$$

Введём обозначения

$$Q_j = \sum_{k=1}^{n} F_k \frac{\partial r_k}{\partial q_j} \quad (j = 1,\ 2,\ \dots,\ s). \qquad (8)$$

Тогда последнее равенство примет вид

$$\delta A = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s . \qquad (9)$$

Множитель Q_j при вариации обобщённой координаты δq_j в выражении для виртуальной работы активных сил системы называется *обобщённой силой*, соответствующей обобщённой координате q_j.

Таким образом, обобщённой силой Q_j, соответствующей обобщённой координате q_j, называют скалярную величину, определяемую отношением элементарной работы действующих сил на перемещение механической системы, вызванное элементарным приращением координаты q_j, к величине этого приращения.

$$\delta A_{q_j} = \sum_{j=1}^{n} \delta A_{ij} = Q_j \delta q_j .$$

Обобщённая сила Q_j в общем случае не является силой в обычном понимании этого слова. Её размерность зависит от размерности соответствующей ей обобщённой координаты q_j и определяется равенством $[Q_j] = [A]/[q_j]$, где $[A]$ – размерность работы.

Если обобщённая координата измеряется линейными величинами, то размерность обобщённой силы совпадает с размерностью силы; если же обобщённая координата представляет угол, то размерность обобщённой силы совпадает с размерностью момента, и т.д.

В соответствии с классификацией сил, действующих на механическую систему, обобщённые силы разделяются на *обобщённые внешние* и *внутренние силы* или на *обобщённые задаваемые (активные) силы* и *обобщённые реакции связей*.

В случае стационарных связей обобщённые реакции идеальных связей равны нулю.

Действительно, для нахождения обобщённой реакции, соответствующей координате q_j, следует вычислить сумму работ реакций связей на перемещении системы, соответствующем приращению δq_j этой координаты, а затем определить обобщённую реакцию связи по формуле

$$Q_j^R = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i \delta s_{ij} \cos\left(\overline{R}_i, \delta\overline{s}_{ij}\right)}{\delta q_j}.$$

В случае стационарных связей описанное перемещение системы является одним из возможных перемещений этой системы, а потому сумма работ реакций идеальных связей на этом перемещении равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} R_i \delta s_{ij} \cos\left(\overline{R}_i, \delta\overline{s}_{ij}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$Q_j^R = 0 \quad (j = 1,\ 2, \ldots, s).$$

Таким образом, при определении обобщённых сил реакции идеальных связей выпадают.

Покажем, что обобщённую силу, соответствующую обобщённой координате q_j, можно также вычислить как отношение мощности всех сил, приложенных к механической системе при возможной обобщённой скорости $\dot{q}_j$, к величине этой обобщённой скорости.

Мощность указанной системы сил определится по формуле

$$N_j = \sum_{i=1}^{n} N_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \overline{\vartheta}_{ij}, \tag{10}$$

где $\overline{\vartheta}_{ij} = \dfrac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j$ – скорость точки M_i системы, соответствующая возможной обобщённой скорости $\dot{q}_j$.

Подставив значение $\overline{\vartheta}_{ij}$ в (10), получим

$$N_j = \sum_{i=1}^{n} N_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j = \dot{q}_j \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j}.$$

На основании (8) имеем

$$N_j = \sum_{i=1}^{n} N_{ij} = Q_j \dot{q}_j .$$

Поэтому

$$Q_j = \frac{N_j}{\dot{q}_j} = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_{ij}}{\dot{q}_j}. \tag{11}$$

Формула (11) позволяет определять обобщённую силу, соответствующую обобщённой координате q_j, как отношение мощности системы сил, соответствующей возможной обобщённой скорости $\dot{q}_j$, к числовому значению этой обобщённой скорости при условии, что $\dot{q}_j \neq 0$, а все остальные возможные обобщённые скорости равны нулю.

Рассмотрим способы вычисления обобщённых сил.

1. Обобщённые силы можно вычислить по формуле (8), которую удобнее представить в следующем виде (использовано равенство, выражающее скалярное произведение двух векторов через их проекции):

$$Q_j = \sum_{k=1}^{n} \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right). \tag{12}$$

Здесь F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции силы F_k на оси декартовой системы координат.

2. Для вычисления обобщённой силы, например Q_1, зададим такое виртуальное перемещение, при котором все вариации обобщённых координат, кроме δq_1, равны нулю:

$$\delta q_1 \neq 0,\ \delta q_2 = \delta q_3 = \ldots = \delta q_s = 0 .$$

Вычислим на этом перемещении виртуальную работу δA_1 всех активных сил, приложенных к системе. На основании формулы (9) будем иметь

$$\delta A_1 = Q_1 \delta q_1 .$$

Множитель при вариации δq_1 равен первой обобщённой силе.

Аналогичным образом вычисляются остальные обобщённые силы.

3. Третий способ применим только для консервативных сил. Если силы консервативны, то будут справедливы равенства

$$F_{kx} = -\frac{\partial П}{\partial x_k},\ F_{ky} = -\frac{\partial П}{\partial y_k},\ F_{kz} = -\frac{\partial П}{\partial z_k},$$

где П – потенциальная энергия системы.

Внося эти выражения для F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} в формулу (12), получим

$$Q_j = -\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial П}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{\partial П}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \frac{\partial П}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial q_j}\right),$$

или, учитывая, что потенциальная энергия П зависит от обобщённых координат сложным образом через декартовы координаты x_k, y_k, z_k:

$$Q_j = -\frac{\partial П}{\partial q_j}\ \left(j = 1,\ 2,\ ...,\ s\right). \qquad (13)$$

Таким образом, *обобщённая сила консервативной системы равна частной производной потенциальной энергии по соответствующей обобщённой координате, взятой с обратным знаком.*

Итак, при вычислении обобщённых сил учитываются только активные силы, приложенные к системе; реакции идеальных связей не учитываются, так как их работа равна нулю; если имеются силы трения, то они присоединяются к активным силам.

Пример.

Груз A весом G поднимается лебёдкой с помощью троса по шероховатой наклонной плоскости, которая составляет с горизонтом угол α. К валу лебёдки B радиусом r приложены вращающий момент $M_{вр}$ и момент трения $M_{тр}$ (рис. 7).

Зная, что коэффициент трения скольжения груза по плоскости равен f, и пренебрегая весом троса, определить обобщённую силу, приняв за обобщённую координату q угол поворота φ вала лебёдки.

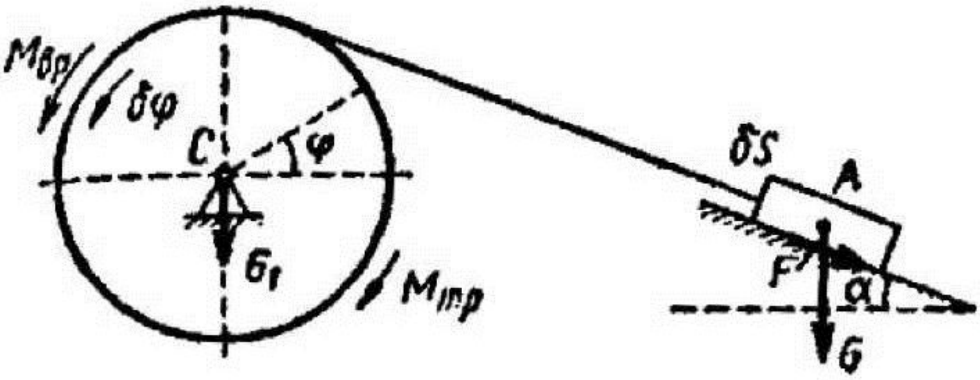

Рис. 7

Решение. Обобщённую силу Q_φ, соответствующую обобщённой координате φ, можно определить как по формуле (8), так и по формуле (11). Для определения Q_φ по формуле (8) сообщаем обобщённой координате φ приращение δφ и составляем сумму работ моментов $M_{вр}$, $M_{тр}$, силы тяжести $\overline{G}$ и силы трения $\overline{F}$ на перемещениях, вызванных приращением угла поворота φ.

$$\delta A_\varphi = M_{вр}\delta\varphi - M_{тр}\delta\varphi - G\sin\alpha\delta s - fG\cos\alpha\delta s .$$

Так как $\delta s = r\delta\varphi$, имеем

$$\delta A_\varphi = [M_{вр} - M_{тр} - Gr(\sin\alpha + f\cos\alpha)]\delta\varphi .$$

Тогда

$$Q_\varphi = \frac{\delta A_\varphi}{\delta\varphi} = M_{вр} - M_{тр} - Gr(\sin\alpha + f\cos\alpha) .$$

Применяя формулу (11), в которую входит мощность системы сил, соответствующая возможной обобщённой скорости системы $\dot{\varphi}$, получаем

$$Q_\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_{ij}}{\dot{q}_j} = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_{i\varphi}}{\dot{\varphi}} = \frac{M_{вр}\dot{\varphi} - M_{тр}\dot{\varphi} - G(\sin\alpha + f\cos\alpha)r\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} =$$

$$= M_{вр} - M_{тр} - Gr(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

Результат получился тот же.

3. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Принцип возможных перемещений, дающий общий метод решения задач статики, можно применить и к решению задач динамики. На основании принципа Германа–Эйлера–Даламбера для несвободной механической системы в любой момент времени геометрическая сумма равнодействующей задаваемых сил, равнодействующей реакций связей и силы инерции для каждой точки M_i механической системы равна нулю.

$$\overline{F}_i + \overline{R}_i + \overline{\Phi}_i = 0 \quad (i = 1,\ 2.\ \ldots,\ n).$$

Если система получает возможное перемещение, при котором каждая точка имеет возможное перемещение $\delta\overline{s}_i$ (рис. 8), то сумма работ этих сил на перемещении $\delta\overline{s}_i$ должна быть равна нулю:

$$F_i \delta s_i \cos\left(\overline{F}_i, \delta\overline{s}_i\right) + R_i \delta s_i \cos\left(\overline{R}_i, \delta\overline{s}_i\right) + \Phi_i \delta s_i \cos\left(\overline{\Phi}_i, \delta\overline{s}_i\right) = 0$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{14}$$

Суммируем все n уравнений:

$$\sum F_i \delta s_i \cos\left(\overline{F}_i, \delta\overline{s}_i\right) + \sum R_i \delta s_i \cos\left(\overline{R}_i, \delta\overline{s}_i\right) + \sum \Phi_i \delta s_i \cos\left(\overline{\Phi}_i, \delta\overline{s}_i\right) = 0\,. \tag{15}$$

Положим, что все связи в рассматриваемой механической системе двусторонние и идеальные (силы трения, если они имеются, отнесены к числу задаваемых сил). Тогда сумма работ реакций связей на возможных перемещениях системы равна нулю:

$$\sum R_i \delta s_i \cos\left(\overline{R}_i, \delta\overline{s}_i\right) = 0\,.$$

При этом условии уравнение (15) имеет вид

$$\sum F_i \delta s_i \cos\left(\overline{F}_i, \delta\overline{s}_i\right) + \sum \Phi_i \delta s_i \cos\left(\overline{\Phi}_i, \delta\overline{s}_i\right) = 0\,. \tag{16}$$

Уравнение (16), называемое *общим уравнением динамики*, показывает, что *в любой момент времени сумма работ всех задаваемых сил и сил инерции материальных точек несвободной механической системы с двусторонними идеальными связями на любом возможном её перемещении равна нулю.*

Если в каждую точку M_i системы из некоторого центра O провести вектор $\overline{r}_i$, то возможное перемещение этой точки $\delta\overline{s}_i$ будет соответствующим приращением радиуса-вектора точки:

$$\delta\overline{s}_i = \delta\overline{r}_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Так как возможное перемещение точки не обязательно направлено в сторону её действительного движения, то возможное приращение

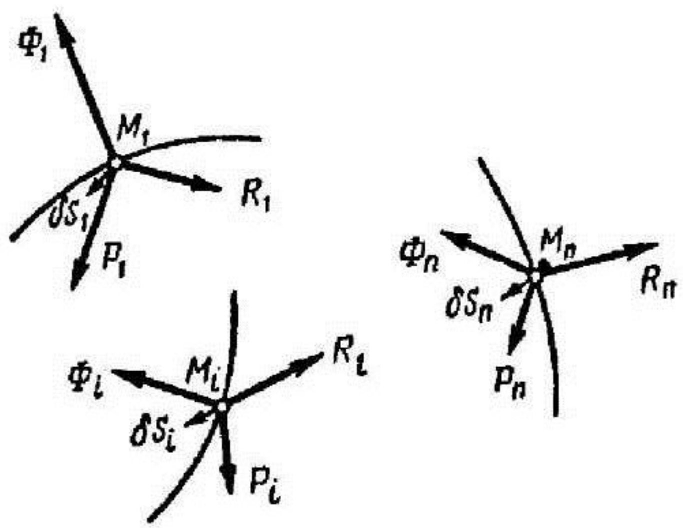

Рис. 8

радиуса-вектора $\delta\overline{r}_i$ не всегда равно действительному приращению радиуса-вектора точки $d\overline{r}_i$.

Работу задаваемых сил $\overline{F}_i$ и сил инерции $\overline{\Phi}_i$ на возможных перемещениях точек системы $\delta\overline{r}_i$ можно представить в виде скалярных произведений $\delta A = \overline{F} d\overline{r}$. Тогда уравнение (16) примет вид

$$\sum \overline{F}_i \delta\overline{r}_i + \sum \overline{\Phi}_i \delta\overline{r}_i = 0 \text{ или } \sum \left(\overline{F}_i + \overline{\Phi}_i\right)\delta\overline{r}_i = 0. \qquad (17)$$

Обозначим: X_i, Y_i, Z_i – проекции задаваемых сил $\overline{F}_i$ на неподвижные оси декартовых координат; $\Phi_{ix}, \Phi_{iy}, \Phi_{iz}$ – проекции сил инерции $\overline{\Phi}_i$, а $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ – проекции векторов возможных перемещений $\delta\overline{r}_i$ на те же оси.

Пользуясь аналитическим выражением элементарной работы $\delta A = \overline{F} d\overline{r}$, уравнению (17) можно придать следующий вид

$$\sum \left[\left(X_i + \Phi_{ix}\right)\delta x_i + \left(Y_i + \Phi_{iy}\right)\delta y_i + \left(Z_i + \Phi_{iz}\right)\delta z_i\right] = 0. \qquad (18)$$

Выразим проекции силы инерции точки на оси координат через проекции её ускорения:

$$\Phi_{ix} = -m_i \ddot{x}_i; \; \Phi_{iy} = -m_i \ddot{y}_i; \; \Phi_{iz} = -m_i \ddot{z}_i.$$

Подставив эти значения в уравнение (18), окончательно получим

$$\sum \left[\left(X_i - m_i \ddot{x}_i\right)\delta x_i + \left(Y_i - m_i \ddot{y}_i\right)\delta y_i + \left(Z_i - m_i \ddot{z}_i\right)\delta z_i\right] = 0. \qquad (19)$$

Общее уравнение динамики (19) позволяет составить дифференциальные уравнения движения любой механической системы. Если механическая система состоит из отдельных твёрдых тел, то силы инерции точек каждого тела можно привести к силе, приложенной в некоторой точке тела, и паре сил. Сила равна главному вектору сил инерции точек этого тела, а момент пары равен главному моменту этих сил относительно центра приведения.

Чтобы воспользоваться принципом возможных перемещений, к каждому телу прикладывают действующие на него задаваемые силы, а также условно прикладывают силу и пару, составленные силами инерции точек тела. Затем системе сообщают возможное перемещение и для всей совокупности задаваемых сил и приведенных сил инерции составляют уравнение (16) или (19).

Если среди связей системы имеются односторонние, то для применения общего уравнения динамики необходимо, чтобы возможные перемещения системы не были освобождающими.

Рассмотрим условия равновесия консервативной системы сил и выразим общее уравнение динамики в обобщённых силах. Для этого приведём общее уравнение динамики (16) к виду

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \delta\overline{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{\Phi}_i \delta\overline{r}_i = 0 .$$

На основании (9)

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \delta\overline{r}_i = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j \ ; \ \sum_{i=1}^{n} \overline{\Phi}_i \delta\overline{r}_i = \sum_{j=1}^{s} Q_j^{\Phi} \delta q_j \ ,$$

где $Q_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{F}_i \dfrac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j}$ – обобщённая сила системы сил, действующих на механическую систему, соответствующая обобщённой координате q_j;

$Q_j^{\Phi} = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{\Phi}_i \dfrac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j}$ – обобщённая сила инерции, соответствующая обобщённой координате q_j.

Подставив эти значения в общее уравнение динамики (16), получаем

$$\sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j + \sum_{j=1}^{s} Q_j^{\Phi} \delta q_j = 0 \ \text{ или } \ \sum_{j=1}^{s} \left(Q_j + Q_j^{\Phi}\right) \delta q_j = 0 . \qquad (20)$$

Приращения обобщённых координат δq_j произвольны и не зависят друг от друга. Поэтому в полученном уравнении (20) все коэффициенты при этих приращениях должны быть равны нулю.

Приравняем нулю эти коэффициенты

$$Q_j + Q_j^{\Phi} = 0 \ \ (j = 1, 2, ..., s). \qquad (21)$$

Уравнения (21) эквивалентны общему уравнению динамики (20).

Если силы, действующие на механическую систему, уравновешиваются, т.е. механическая система находится в состоянии покоя, или все её точки движутся прямолинейно и равномерно, то силы инерции её точек равны нулю. Следовательно, и обобщённые силы инерции системы равны нулю:

$$Q_j^{\Phi} = 0 \ \ (j = 1, 2, ..., s).$$

Тогда уравнения (21) принимают вид

$$Q_j = 0 \ \ (j = 1, 2, ..., s). \qquad (22)$$

Равенства (22) выражают условия равновесия сил в обобщённых силах. Преобразуем условия равновесия (22) для консервативных сил, т.е. сил, имеющих потенциал.

Для любой системы сил условия равновесия имеют вид

$$Q_j = 0 \ \ (j = 1, 2, ..., s).$$

В случае консервативных сил обобщённые силы определяются формулами

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \ \ (j = 1, 2, ..., s).$$

Следовательно, условия равновесия консервативной системы сил имеют вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0 \ \ (j = 1, 2, ..., s).$$

Пример.

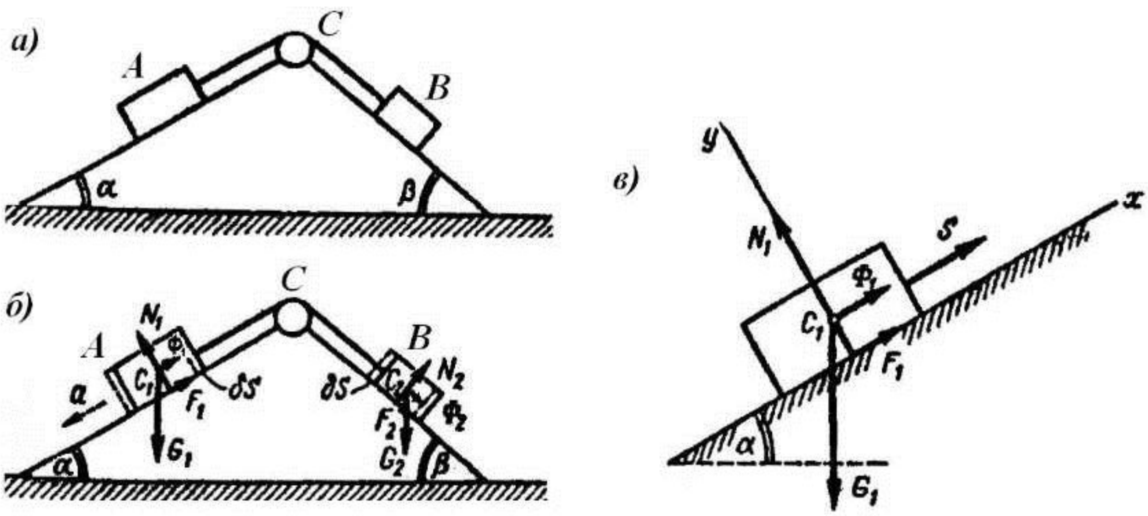

Рис. 9

На треугольной призме, боковые грани которой образуют с горизонтом углы α и β, помещены два груза *A* и *B* весом G_1, G_2, связанные между собой невесомой и нерастяжимой нитью, переброшенной через блок *C* (рис. 9, *а*). Зная, что коэффициент трения скольжения равен *f*, определить ускорение движения грузов $\overline{a}$ и натяжение нити; массой блока пренебречь.

Решение.

Заданная механическая система состоит из двух грузов, движущихся поступательно. Нить и блок, массы которых не учитываются, являются связями. Система имеет одну степень свободы.

Предположим, что груз *A* движется вниз, а груз *B* – вверх.

Покажем задаваемые силы – силы тяжести $\overline{G}_1, \overline{G}_2$, нормальные реакции боковых граней призмы $\overline{N}_1, \overline{N}_2$, силы трения $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ (рис. 9, *б*).

Модули сил трения соответственно равны

$$F_1 = fN_1 \text{ и } F_2 = fN_2,$$

где $N_1 = G_1 \cos\alpha$, $N_2 = G_2 \cos\beta$.

Поэтому

$$F_1 = fG_1 \cos\alpha, \; F_2 = fG_2 \cos\beta.$$

Силы трения направлены в стороны, противоположные направлениям движения грузов.

Так как грузы движутся поступательно, то равнодействующие сил инерции приложены в центрах масс тел, а их модули

$$\Phi_1 = m_1 a = \frac{G_1}{g} a, \; \Phi_2 = m_2 a = \frac{G_2}{g} a.$$

Приложим к грузам условно силы инерции $\overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_2$, направив их противоположно ускорению $\overline{a}$. Сообщим мысленно системе возможное поступательное перемещение δs, например в сторону движения грузов. Составим общее уравнение динамики, применяя (16), в которое не войдут нормальные реакции боковых граней призмы $\overline{N}_1, \overline{N}_2$, направления которых перпендикулярны возможным перемещениям грузов:

$$G_1 \sin\alpha\delta s - G_1 f \cos\alpha\delta s - \Phi_1 \delta s - G_2 \sin\beta\delta s - G_2 \cos\beta\delta s - \Phi_2 \delta s = 0.$$

Подставляем в это уравнение значения сил инерции и делим его на δs:

$$G_1 \sin\alpha - G_1 f \cos\alpha - \frac{G_1}{g} a_1 - G_2 \sin\beta - G_2 \cos\beta - \frac{G_2}{g} a = 0.$$

Из этого уравнения определяем ускорение грузов

$$a = g \frac{G_1(\sin\alpha - f\cos\alpha) - G_2(\sin\beta + f\cos\beta)}{G_1 + G_2}.$$

Если $G_1(\sin\alpha - f\cos\alpha) - G(\sin\beta + f\cos\beta) > 0$, то грузы движутся в указанном выше направлении.

Для определения натяжения нити $\overline{S}$ на основании принципа Германа–Эйлера–Даламбера составим для сил, приложенных к телу, и его силы инерции уравнение проекций на ось x (рис. 9, *в*):

$$S - G_1 \sin\alpha + F_1 + \Phi_1 = 0 \text{ или } S = G_1(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{G_1}{g} a.$$

Подставив значение ускорения после соответствующих преобразований, получим

$$S = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}\left[\sin\alpha + \sin\beta + f(\cos\beta - \cos\alpha)\right].$$

4. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА. КИНЕТИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ

Общее уравнение динамики (16) даёт возможность составлять дифференциальные уравнения движения, не содержащие реакции идеальных связей. Для сравнительно простых систем непосредственное применение этого уравнения вполне оправдано, однако в более сложных случаях использование общего уравнения динамики приводит, как правило, к относительно сложным преобразованиям. Поэтому значительно удобнее пользоваться не общим уравнением динамики, а вытекающими из него уравнениями Лагранжа второго рода, в которых основные трудности преобразования преодолены в общем виде.

Предположим, что механическая система из n материальных точек имеет s степеней свободы. В случае голономных нестационарных связей радиус-вектор $\bar{r}_i$ любой точки M_i этой системы является функцией обобщённых координат $q_1, q_2, ..., q_s$ и времени t:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, q_2, ..., q_s, t). \tag{23}$$

Обобщённые координаты системы $q_1, q_2, ..., q_s$ являются функциями времени. Поэтому радиус-вектор $\bar{r}_i$ является сложной функцией времени и вектор скорости точки $\bar{\vartheta}_i$ определяется по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\bar{\vartheta}_i = \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + ... + \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial t}$$

или

$$\bar{\vartheta}_i = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial t}. \tag{24}$$

В случае стационарных связей

$$\bar{\vartheta}_i = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j. \tag{25}$$

Производные от обобщённых координат по времени $\dot{q}_j$ называются *обобщёнными скоростями*.

Из выражения (24) следует, что частная производная от $\bar{\vartheta}_i$ по какой-либо обобщённой скорости $\dot{q}_j$ равна коэффициенту при $\dot{q}_j$ в правой части этого выражения, т.е. равна частной производной от $\overline{r}_i$ по координате q_j:

$$\frac{\partial \overline{\vartheta}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j}. \tag{26}$$

Кинетическая энергия механической системы, как известно, определяется по формуле

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \vartheta_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{\vartheta}_i \overline{\vartheta}_i . \tag{27}$$

Из выражения (24) следует, что вектор скорости точки $\overline{\vartheta}_i$ в случае голономных нестационарных связей является функцией обобщённых координат, содержащихся в выражениях $\dfrac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j}$, обобщённых скоростей и времени. Поэтому кинетическая энергия механической системы является функцией тех же переменных:

$$T = T\left(q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s, t\right). \tag{28}$$

Найдём частные производные от кинетической энергии по обобщённой координате q_j и обобщённой скорости $\dot{q}_j$, дифференцируя выражение (27) как сложную функцию:

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{\vartheta}_i \frac{\partial \overline{\vartheta}_i}{\partial q_j}; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{\vartheta}_i \frac{\partial \overline{\vartheta}_i}{\partial \dot{q}_j}.$$

Преобразуем последнее выражение на основании равенства (26):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{\vartheta}_i \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j}.$$

Продифференцируем это выражение по времени:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{\vartheta}_i \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\overline{\vartheta}_i}{dt} \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{\vartheta}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j}\right). \tag{29}$$

Рассмотрим две суммы, входящие в правую часть полученного равенства (29), учитывая, что для несвободной материальной точки $m_i \overline{a}_i = \overline{F}_i + \overline{R}_i$.

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\overline{\vartheta}_i}{dt} \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{a}_i \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{F}_i + \overline{R}_i\right) \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j} = Q_j + Q_j^R .$$

Для установления значения второй суммы рассмотрим выражение $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j}\right)$.

Частная производная $\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j}$ является функцией тех же переменных, от которых, согласно (23), зависит радиус-вектор точки $\overline{r}_i$. Дифференцируем $\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j}$ как сложную функцию времени:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial^2 \overline{r}_i}{\partial q_j \partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial^2 \overline{r}_i}{\partial q_j \partial q_2}\dot{q}_2+\ldots+\frac{\partial^2 \overline{r}_i}{\partial q_j \partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial^2 \overline{r}_i}{\partial q_j \partial t}. \qquad (30)$$

Найдём частную производную $\frac{\partial \overline{\vartheta}_i}{\partial q_j}$, дифференцируя по q_j выражение (24):

$$\frac{\partial \overline{\vartheta}_i}{\partial q_j}=\frac{\partial^2 \overline{r}_i}{\partial q_j \partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial^2 \overline{r}_i}{\partial q_j \partial q_2}\dot{q}_2+\ldots+\frac{\partial^2 \overline{r}_i}{\partial q_j \partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial^2 \overline{r}_i}{\partial q_j \partial t}. \qquad (31)$$

Правые части выражений (30) и (31) отличаются только последовательностью дифференцирования, которая при непрерывных функциях не имеет значения; следовательно,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial \overline{\vartheta}_i}{\partial q_j}.$$

Пользуясь этой зависимостью, преобразуем вторую сумму в правой части равенства (29):

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{\vartheta}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j}\right)=\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{\vartheta}_i \frac{\partial \overline{\vartheta}_i}{\partial q_j}=\frac{\partial T}{\partial q_j}.$$

Подставляем найденные значения обеих сумм в равенство (29) и рассматриваем механическую систему со стационарными идеальными связями, для которых $Q_j^R=0$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)=Q_j+\frac{\partial T}{\partial q_j},$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \quad (j=1,2,\ldots,s). \qquad (32)$$

Систему s дифференциальных уравнений (32) называют *уравнениями Лагранжа второго рода.* Эти уравнения представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка относительно обобщённых координат системы $q_1, q_2, ..., q_s$. Интегрируя эти дифференциальные уравнения и определяя по начальным условиям постоянные интегрирования, получаем s уравнений движения механической системы в обобщённых координатах, причём число уравнений равно числу степеней свободы:

$$q_j = q_j(t) \quad (j = 1, 2, ..., s).$$

Если силы, действующие на материальную систему, потенциальные, то в соответствии с формулой (13) уравнения (32) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, ..., s).$$

Если теперь ввести в рассмотрение функцию Лагранжа $L = T - \Pi$ и учесть, что $\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j} \equiv 0$, то получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, ..., s). \tag{33}$$

Уравнения (33) являются *уравнениями Лагранжа второго рода для случая потенциальных сил.*

Прежде чем рассмотреть пример на составление уравнений Лагранжа, сделаем несколько рекомендаций, вытекающих непосредственно из самой формы уравнений (32) и способа введения обобщённых координат.

Для составления уравнений Лагранжа второго рода нужно:

1) изобразить на чертеже все активные силы, действующие на систему; реакции идеальных связей изображать не следует; если имеются силы трения, то их следует присоединить к активным силам;

2) определить число степеней свободы и ввести обобщённые координаты;

3) вычислить кинетическую энергию системы, выразив её через обобщённые координаты и скорости;

4) определить потенциальную энергию системы, если силы потенциальные;

5) найти обобщённые силы системы;

6) выполнить указанные в уравнениях Лагранжа (29) или (30) действия.

Уравнения Лагранжа второго рода сыграли решающую роль в развитии динамики системы и широко используются для решения многих задач механики.

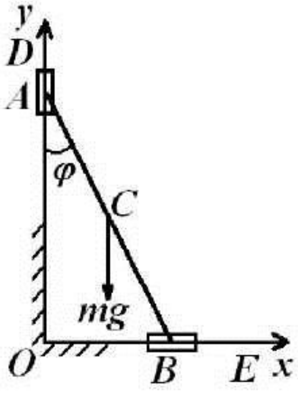

Рис. 10

Пример.

Тонкий однородный стержень длиной l имеет на концах ползуны A и B, которые скользят под действием силы тяжести стержня по направляющим OD и OE. Направляющие образуют прямой угол DOE, расположенный в вертикальной плоскости (рис. 10). Пренебрегая массой ползунов и силами трения, составить дифференциальное уравнение движения стержня и найти его угловую скорость, если направляющая OE горизонтальна.

Решение.

Стержень имеет одну степень свободы, его положение будем определять одной обобщённой координатой – углом φ. На рис. 9 изображена только активная сила – сила тяжести mg ; реакции опор N_A, N_B изображать не следует, так как они не войдут в уравнение Лагранжа.

Кинетическую энергию T стержня вычислим по теореме Кенига

$$T = \frac{1}{2} m \vartheta_C^2 + \frac{1}{2} I_C \dot{\varphi}^2 ,$$

где m – масса стержня; ϑ_C – скорость его центра масс C; $I_C = \frac{1}{2} ml^2$ – момент инерции стержня относительно оси, проходящей через точку C перпендикулярно к плоскости движения.

Для вычисления скорости центра масс C найдём его координаты:

$$x_C = \frac{1}{2} l \sin\varphi, \ y_C = \frac{1}{2} l \cos\varphi .$$

Дифференцируя по времени, получим

$$\dot{x}_C = \frac{1}{2} l \dot{\varphi} \cos\varphi, \ \dot{y}_C = \frac{1}{2} l \dot{\varphi} \sin\varphi .$$

Отсюда

$$\vartheta_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 = \frac{1}{4} l^2 \dot{\varphi}^2 .$$

Внося значения для ϑ_C^2 и I_C в выражение для кинетической энергии стержня, найдём

$$T = \frac{1}{2} m \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} ml^2 \dot{\varphi}^2 \text{ или } T = \frac{1}{6} ml^2 \dot{\varphi}^2 .$$

Перейдем к вычислению обобщённой силы. Для этого найдем выражение потенциальной энергии системы, считая, что при горизонтальном положении стержня она принимает нулевое значение:

$$\Pi = \frac{1}{2} mgl \cos\varphi .$$

Пользуясь формулой (13), определим обобщённую силу, соответствующую обобщённой координате φ :

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} mgl \sin \varphi .$$

Уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q .$$

Имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{3} ml^2 \dot{\varphi} , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3} ml^2 \dot{\varphi}\right) = \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi} .$$

Так как кинетическая энергия T от угла φ не зависит, то $\dfrac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$. Внося полученные выражения в уравнение Лагранжа, получим

$$\frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi} = \frac{1}{3} mgl \sin \varphi \text{ или } \ddot{\varphi} = \frac{3g}{2l} \sin \varphi . \qquad (34)$$

Это есть дифференциальное уравнение движения стержня, полученное вторым методом Лагранжа.

Найдём обобщённую скорость $\dot{\varphi}$. Для этого умножим обе части уравнения (34) на $d\varphi$:

$$\ddot{\varphi} d\varphi = \frac{3g}{2l} \sin \varphi d\varphi .$$

Имеем

$$\ddot{\varphi} d\varphi = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} d\varphi = d\dot{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} d\dot{\varphi} = d\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2}\right) .$$

Теперь дифференциальное уравнение принимает вид

$$d\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2}\right) = -\frac{3g}{2l} d \cos \varphi .$$

Интегрируя и умножая обе части уравнения на 2, найдём

$$\dot{\varphi}^2 = -3\frac{g}{l} \cos \varphi + C .$$

Пусть стержень начинает движение из состояния покоя, составляя с вертикалью в начальный момент угол φ_0 . Тогда при $\varphi = \varphi_0$ $\dot{\varphi} = 0$ и, следовательно, $C = 3\dfrac{g}{l} \cos \varphi_0$. Подставляя это значение для C в последнее равенство, найдём угловую скорость стержня в функции от угла φ :

$$\dot{\varphi}^2 = 3\frac{g}{l}\left(\cos \varphi_0 - \cos \varphi\right) .$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М. : Наука. 1995.
2. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – М. : Наука, 1985. – Т. 2.
3. Гернет, М.М. Курс теоретической механики / М.М. Гернет. – М. : Высшая школа, 1987.
4. Голубев, Ю.Ф. Основы теоретической механики / Ю.Ф. Голубев. – М. : Изд-во МГУ, 2000.