

**ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ДИНАМИКА**

**ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕ-
НЬЮ СВОБОДЫ**

Методические указания к курсовой работе

СОДЕРЖАНИЕ

Цель работы	4
Общие положения	4
Содержание курсовой работы	5
Порядок выполнения работы	6
Методическое обеспечение	7
Часть 1. Применение основных теорем динамики механической системы	8
1.1 Постановка второй основной задачи динамики системы	8
1.2 Определение закона движения системы	13
1.3 Определение реакций внешних и внутренних связей	17
Часть 2. Построение алгоритма вычисления и работа в компьютерном классе	19
Часть 3. Применение принципа Даламбера – Лагранжа и уравнения Лагранжа 2 рода	23
3.1 Составление дифференциального уравнения движения механизма с помощью принципа Даламбера – Лагранжа	23
3.2 Составление дифференциального уравнения движения механизма с помощью уравнения Лагранжа 2 рода	25
Часть 4. Анализ колебаний механической системы с одной степенью свободы	28
4.1 Колебания механической системы при отсутствии сил сопротивления среды	28
4.1.1 Свободные колебания	28
4.1.2 Вынужденные колебания	29
4.2 Колебания механической системы в вязкой среде	33
4.2.1 Свободные колебания	33
4.2.2 Вынужденные колебания в сопротивляющейся среде	34
4.3 Коэффициент динамичности	37
Требования к оформлению	39
Приложение 1	40
Приложение 2	47
Приложение 3	48
Приложение 4. Альбом заданий	49

Целью курсовой работы по динамике является выработка у студентов умений и привитие навыков исследования динамического поведения механической системы с использованием основных теорем и уравнений теоретической механики.

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ.

Под динамическим поведением конструкции следует понимать реакцию (отклик) ее на внешние кинематические или динамические возмущения, обусловленные условиями эксплуатации. Прогнозировать динамическое поведение - это значит предвидеть последствия эксплуатационных возмущений, проанализировать поведение задуманной машины на основе математических моделей, устраниить заблаговременно нежелательные эффекты, добиваясь оптимальных свойств будущей машины. Важнейшим этапом исследования динамического поведения конструкций является решение двух основных задач динамики материальных объектов: материальной точки и материальной системы.

Эти задачи следующие:

1. По заданному закону движения объекта и распределению масс его элементов определить характеристики силовых полей, в которых функционирует объект.
2. При заданных характеристиках силовых полей и распределению масс элементов объекта определить закон его движения.

Решение названных двух задач требует умения производить их постановку. Процедура постановки задач динамики включает в себя три этапа:

1. Формулировку задачи.
2. Построение расчетной схемы.
3. Построение математической модели.

Формулировка задачи - это условие (текст) задачи. Она осуществляется руководителем работ совместно с исполнителем.

Расчетная схема - это рисунок, на котором изображены:

- а)rationally selected coordinate system;
- б) simplified scheme of a mechanical system in an arbitrary position;
- в) acting forces, kinematic characteristics and so on. (depending on the method used).

Mathematical model - this is a system of differential equations, algebraic equations and initial conditions, describing the dynamic behavior of a mechanical system.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСОВОЙ РАБОТЫ.

Given a mechanical system with one degree of freedom, represented by a set of absolutely rigid bodies connected by massless inextensible threads, parallel to corresponding planes. The system is supplied with an external spring force with stiffness coefficient c . On the first body of the system acts a resistance force $\vec{R} = -\mu \cdot \vec{V}$ (\vec{V} - velocity of the center of mass of body 1) and a harmonic excitation force $F(t) = F_0 \cdot \sin(pt)$. Friction of rolling and sliding is negligible. Rolling of wheels occurs without slipping, slipping of threads on blocks does not occur. Schemes of mechanical systems, as well as inertial and geometric characteristics of bodies are given in the task album.

In all variants of tasks take:

m - characteristic mass - $m = 1$ kg.

r - characteristic radius - $r = 0.1$ m.

c - stiffness coefficient - $c = 4000$ N/m.

μ - coefficient of friction - $\mu = 100$ N·sec/m.

F_0 - amplitude of excitation force $F_0 = 50$ N.

p - frequency of excitation force $p = \pi = 3,14$ rad/s.

Requires: applying basic theorems of dynamics of systems and analytical methods of theoretical mechanics, determine the law of motion of the first body

и реакции внешних и внутренних связей. Провести численный анализ полученного решения с использованием ЭВМ.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

Построить расчетную схему.

Используя теорему об изменении кинетической энергии механической системы, составить дифференциальное уравнение движения механизма.

Сформулировать начальные условия движения.

Найти решение дифференциального уравнения движения.

Используя начальные условия, определить произвольные постоянные, которые возникают в процессе интегрирования дифференциального уравнения движения.

Подставив найденные постоянные интегрирования в решение дифференциального уравнения, записать закон движения объекта.

Составить систему уравнений для определения реакций связей с помощью теоремы об изменении количества движения механической системы и теоремы об изменении кинетического момента механической системы.

Построить алгоритм вычислений для реализации на ЭВМ.

Произвести вычисления в дисплейном классе.

Произвести графическую обработку результатов вычислений.

Построить математические модели динамического поведения объекта другими методами по указанию преподавателя (См. пример выполнения задания).

МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ:

1. Настоящие методические указания.
2. Конспекты лекций по разделу " Динамика ".

3. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. - М.: Высшая школа, 1990. – 607 с.
4. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Т.2. - М.: Высшая школа, 1984. - 424 с.
5. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. - М.: Наука, 1988. - 482 с.

Пример выполнения задания.

Задача. Исследовать движение механизма с одной степенью свободы, изображенного на рис.1. Определить реакции внешних и внутренних связей. Массами нитей и упругих элементов пренебречь. Нити считать нерастяжимыми и абсолютно гибкими. Сопротивление, возникающее в демпфирующем устройстве, принять пропорциональным первой степени скорости груза 3. В качестве координаты, определяющей положение системы, принять перемещение груза 3 – S. Качение катка 1 происходит без скольжения. К грузу 3 приложена возмущающая сила $F(t)$.

Исходные данные:

m_1, m_2, m_3 - массы тел механической системы,

c - жесткость упругого элемента,

r_1 - радиус однородного катка 1,

r_2, R_2 - радиусы ступеней блока 2,

i_2 - радиус инерции блока 2,

μ - коэффициент сопротивления среды,

α - угол наклона плоскости, по которой катится каток 1.

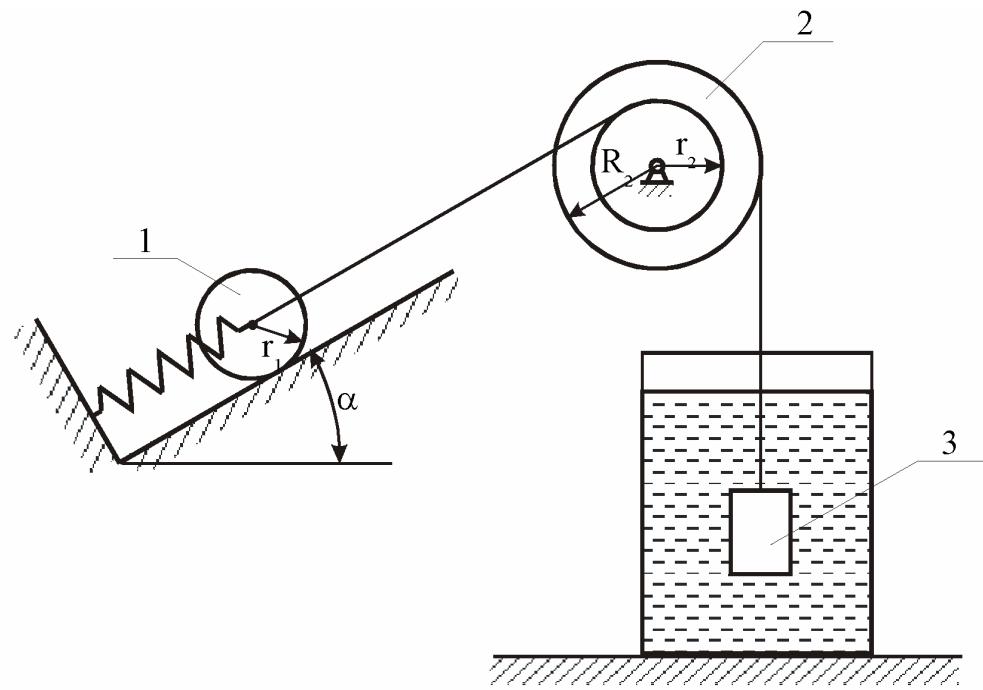


Рис.1

Часть 1. ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.

1.1. Постановка второй основной задачи динамики системы.

Расчетная схема представлена на рис.2.

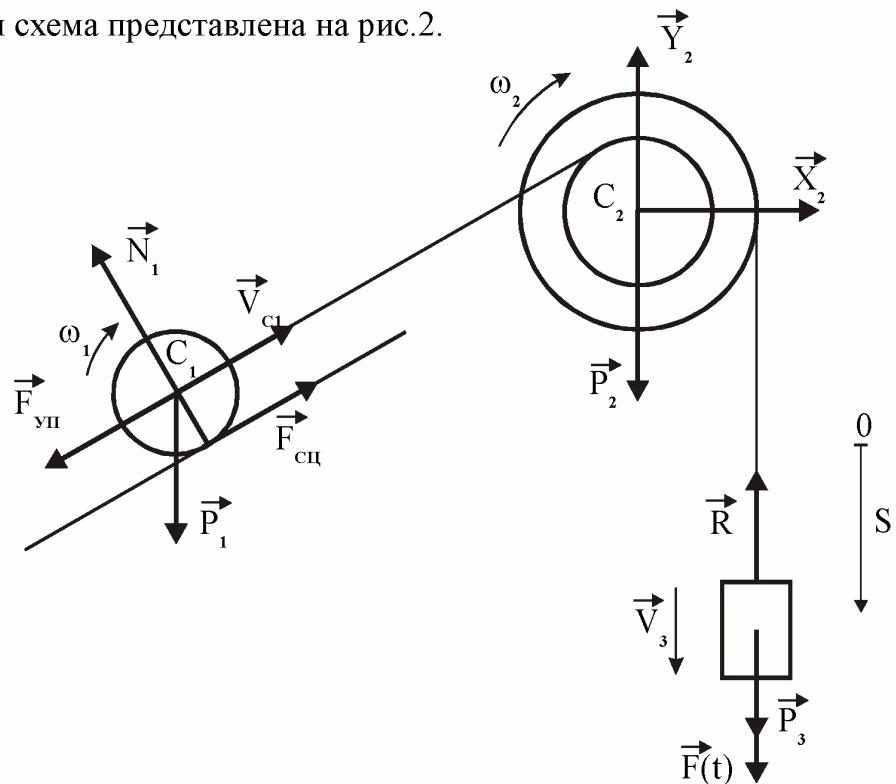


Рис.2

На рис. 2 обозначено:

$\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ - силы тяжести,

\vec{N}_1 - нормальная реакция опорной плоскости,

$\vec{F}_{\text{сцеп}}$ - сила сцепления,

$\vec{F}_{\text{уп}}$ - упругая реакция пружины,

\vec{X}_2, \vec{Y}_2 - реакции подшипника блока 2,

$\vec{R} = -\mu \cdot \vec{V}$ - сила вязкого сопротивления,

$\vec{F}(t)$ - возмущающая сила.

Рассматриваемая механическая система имеет одну степень свободы (нити нерастяжимые, качение катка 1 происходит без скольжения). Будем определять ее положение с помощью координаты S . Начало отсчета координаты со-вместим с положением статического равновесия центра масс груза 3.

Для построения дифференциального уравнения движения системы используем теорему об изменении кинетической энергии механической системы в форме:

$$\frac{dT}{dt} = \sum N^e + \sum N^i, \quad (1.1)$$

где T - кинетическая энергия системы,

$\sum N^e$ - сумма мощностей внешних сил,

$\sum N^i$ - сумма мощностей внутренних сил.

Теорема (1.1) формулируется так: "Производная по времени от кинетической энергии механической системы равна алгебраической сумме мощностей внешних и внутренних сил, действующих на точки механической системы".

Вычислим кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий тел 1-3:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (1.2)$$

Каток 1 совершает плоскопараллельное движение, поэтому его кинети-

ческая энергия определяется по теореме Кенига:

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1V_{C1}^2 + \frac{1}{2}J_{C1}\omega_1^2, \quad (1.3)$$

где V_{C1} – скорость центра масс катка;

J_{C1} – момент инерции относительно центральной оси катка;

ω_1 – угловая скорость катка.

Блок 2 совершают вращательное движение около неподвижной оси. Его кинетическая энергия

$$T_2 = \frac{1}{2}J_{C2}\omega_2^2, \quad (1.4)$$

где J_{C2} – момент инерции относительно центральной оси блока;

ω_2 – угловая скорость блока.

Груз 3 совершает поступательное движение. Его кинетическая энергия равна:

$$T_3 = \frac{1}{2}m_3V_3^2. \quad (1.5)$$

Кинетическая энергия всего механизма будет равна:

$$T = \frac{m_1V_{C1}^2}{2} + \frac{J_{C1}\omega_1^2}{2} + \frac{J_{C2}\omega_2^2}{2} + \frac{m_3V_3^2}{2}. \quad (1.6)$$

Выразим V_{C1} , ω_1 и ω_2 через скорость груза 3. Положив $V_3 = V$, получим

$$V_3 = V; \omega_2 = \frac{V}{R_2}; V_{C1} = \frac{r_2}{R_2} \cdot V; \omega_1 = \frac{r_2}{r_1 R_2} \cdot V. \quad (1.7)$$

Подставляя (1.3), (1.4), (1.5) в (1.6) с учетом (1.7), получаем:

$$T = \frac{1}{2} \left(m_1 \frac{r_2^2}{R_2^2} + J_{C1} \frac{r_2^2}{r_1^2 R_2^2} + J_{C2} \frac{1}{R_2^2} + m_3 \right) \cdot V^2 \quad (1.8)$$

или

$$T = \frac{1}{2}m_{np} \cdot V^2, \quad (1.9)$$

где

$$m_{np} = m_1 \frac{r_2^2}{R_2^2} + J_{C1} \frac{r_2^2}{r_1^2 R_2^2} + J_{C2} \frac{1}{R_2^2} + m_3. \quad (1.10)$$

Величину $m_{np} = \text{const}$ будем называть приведенной массой.

Найдем производную от кинетической энергии по времени

$$\frac{dT}{dt} = m_{np} \cdot \dot{S} \cdot \ddot{S}. \quad (1.11)$$

Теперь вычислим правую часть уравнения (1.1) - сумму мощностей внешних и внутренних сил.

Мощность силы равна скалярному произведению вектора силы на скорость точки ее приложения

$$N = \vec{F} \cdot \vec{V} = F \cdot V \cdot \cos(\vec{F}, \vec{V}). \quad (1.12)$$

Рассматриваемая нами механическая система является неизменяемой, т. е. тела, входящие в систему, недеформируемы и скорости их точек относительно друг друга равны нулю. Поэтому сумма мощностей всех внутренних сил будет равняться нулю:

$$\sum N^i = 0. \quad (1.13)$$

Будут равняться нулю и мощности некоторых внешних сил, приложенных в точках, скорости которых равны нулю. Как видно из расчетной схемы, таковыми являются силы

$$\vec{N}_1, \vec{F}_{\text{ен}}, \vec{P}_2, \vec{X}_2, \vec{Y}_2.$$

Сумма мощностей остальных сил

$$N^e = \vec{F}_{yn} \cdot \vec{V}_{C1} + \vec{P}_1 \cdot \vec{V}_{C1} + \vec{R}_3 \cdot \vec{V}_3 + \vec{P}_3 \cdot \vec{V}_3 + \vec{F} \cdot \vec{V}_3; \quad (1.14)$$

или, раскрывая скалярные произведения,

$$N^e = -F_{yn} \cdot V_{C1} - P_1 \cdot V_{C1} \cdot \sin \alpha - R_3 \cdot V_3 + P_3 \cdot V_3 + F \cdot V_3. \quad (1.15)$$

С учетом кинематических соотношений (1.7) сумму мощностей внешних сил преобразуем к виду:

$$N^e = \left(-F_{yn} \cdot \frac{r_2}{R_2} - P_1 \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \sin \alpha - R_3 + P_3 + F(t) \right) \cdot V \quad (1.16)$$

или

$$N^e = F_{np} \cdot V, \quad (1.17)$$

где

$$F_{np} = -F_{yn} \cdot \frac{r_2}{R_2} - P_1 \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \sin \alpha - R_3 + P_3 + F(t). \quad (1.18)$$

Величину F_{np} будем называть приведенной силой.

Преобразуем выражение (1.18). Упругую силу считаем пропорциональной удлинению пружины. Полное удлинение пружины f равно сумме статического f_{ct} и динамического S_{C1} удлинений

$$f = f_{ct} + S_{C1},$$

причем из выражения (1.7) для V_{C1} следует, что $S_{C1} = \frac{r_2}{R_2} S$.

Тогда упругая сила будет равна:

$$F_{yn} = c \cdot (f_{ct} + S_{c1}) = c \cdot \left(f_{ct} + \frac{r_2}{R_2} S \right). \quad (1.19)$$

Сила вязкого сопротивления $R = \mu \cdot V = \mu \cdot \dot{S}$. Приведенную силу с учетом последних формул для F_{up} и R запишем в виде:

$$F_{np} = -c \cdot f_{ct} \cdot \frac{r_2}{R_2} - c \cdot \frac{r_2^2}{R_2^2} \cdot S - P_1 \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \sin \alpha - \mu \cdot \dot{S} + P_3 + F(t). \quad (1.20)$$

В состоянии покоя приведенная сила равна нулю. Полагая в (1.20) $S = 0$, $\dot{S} = 0$ и $F(t) = 0$, получаем условие равновесия системы

$$-c \cdot f_{ct} \cdot \frac{r_2}{R_2} - P_1 \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \sin \alpha + P_3 = 0. \quad (1.21)$$

Из уравнения (1.21) определяется статическое удлинение пружины

$$f_{ct} = \frac{1}{c} \left(P_3 \cdot \frac{R_2}{r_2} - P_1 \cdot \sin \alpha \right). \quad (1.22)$$

Учитывая (1.22) в (1.20), получаем окончательное выражение для приведенной силы:

$$F_{np} = -c \cdot \frac{r_2^2}{R_2^2} \cdot S - \mu \cdot \dot{S} + F(t). \quad (1.23)$$

Подставим выражения для производной от кинетической энергии (1.11) и сумму мощностей всех сил (1.17) с учетом (1.23) в уравнение (1.1). Тогда, получаем дифференциальное уравнение движения системы:

$$m_{np} \cdot \ddot{S} = -c \cdot \frac{r_2^2}{R_2^2} \cdot S - \mu \cdot \dot{S} + F(t). \quad (1.24)$$

Запишем последнее уравнение в виде:

$$\ddot{S} + 2 \cdot n \cdot \dot{S} + k^2 \cdot S = \frac{1}{m_{np}} \cdot F(t), \quad (1.25)$$

где введены коэффициенты, имеющие определенный физический смысл:

$k = \frac{r_2}{R_2} \sqrt{\frac{c}{m_{np}}}$ - циклическая частота свободных колебаний,

$2 \cdot n = \frac{\mu}{m_{np}}$ - показатель степени затухания колебаний.

Запишем начальные условия движения:

$$t = 0 \quad | \quad S = S_0, \quad \dot{S} = \dot{S}_0. \quad (1.26)$$

Выражения (1.25) и (1.26) совместно представляют математическую модель для решения второй задачи динамики.

1.2. Определение закона движения системы.

Проинтегрируем дифференциальное уравнение (1.25). Пусть возмущающая сила изменяется по гармоническому закону:

$$F = F_0 \cdot \sin(pt), \quad (2.1)$$

где F_0 - амплитуда возмущающей силы,

p - циклическая частота возмущения.

Общее решение S неоднородного дифференциального уравнения (1.25) складывается из общего решения однородного уравнения S_{od} и частного реше-

ния S_q неоднородного: $S = S_{\text{од}} + S_q$. Однородное дифференциальное уравнение, соответствующее данному неоднородному (1.25), имеет вид:

$$\ddot{S} + 2 \cdot n \cdot \dot{S} + k^2 \cdot S = 0. \quad (2.2)$$

Решение этого уравнения ищем в виде функции

$$S = A \cdot e^{\lambda t}, \quad (2.3)$$

где A и λ - неопределенные постоянные величины.

Подставляя (2.3) в (2.2), получаем:

$$(\lambda^2 + 2 \cdot n \cdot \lambda + k^2) \cdot A \cdot e^{\lambda t} = 0.$$

Так как мы ищем нетривиальное решение, то $A \cdot e^{\lambda t} \neq 0$. Следовательно, должно выполняться условие

$$\lambda^2 + 2 \cdot n \cdot \lambda + k^2 = 0. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) называется характеристическим уравнением дифференциального уравнения (2.2). Это уравнение имеет два корня:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \quad (2.5)$$

В зависимости от знака подкоренного выражения, корни характеристического уравнения могут быть комплексно-сопряженными или действительными. Возможны три случая:

$n < k$ - подкоренное выражение отрицательное, следовательно корни комплексно-сопряженные,

$n = k$ - подкоренное выражение равно нулю, корни действительные, кратные.

$n > k$ - подкоренное выражение больше нуля, корни действительные, разные.

В первом случае ($n < k$) общее решение уравнения (2.2) имеет вид:

$$S = (A_1 \cdot e^{ik_1 t} + A_2 \cdot e^{-ik_1 t}) \cdot e^{-nt}, \quad (2.6)$$

где A_1, A_2 – постоянные интегрирования,

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}. \quad (2.7)$$

Решение (2.6), используя известные формулы Эйлера

$$e^{ik_1 t} = \cos(k_1 t) + i \cdot \sin(k_1 t),$$

$$e^{-ik_1 t} = \cos(k_1 t) - i \cdot \sin(k_1 t),$$

нетрудно представить в виде:

$$S_{OD} = a \cdot e^{-nt} \cdot \sin(k_1 t + \beta), \quad (2.8)$$

где a, β - постоянные интегрирования.

Во втором случае ($n = k$) общее решение имеет вид:

$$S_{OD} = e^{-nt} \cdot (A_1 + A_2 \cdot t). \quad (2.9)$$

В третьем случае ($n > k$) общее решение имеет вид:

$$S_{OD} = e^{-nt} \cdot (A_1 \cdot e^{k_2 t} + A_2 \cdot e^{-k_2 t}). \quad (2.10)$$

где

$$k_2 = \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Примечание. В каждом варианте задания в зависимости от исходных данных может реализовываться только один из трех рассмотренных случаев. Следовательно, в каждом варианте возможен только один из представленных выше (2.8), (2.9), (2.10) видов общего решения однородного дифференциального уравнения. Далее предполагается, что в рассматриваемом примере имеет место случай $k > n$.

Определим частное решение неоднородного дифференциального уравнения

$$\ddot{S} + 2 \cdot n \cdot \dot{S} + k^2 \cdot S = \frac{F_0}{m_{np}} \cdot \sin(pt). \quad (2.11)$$

Частное решение ищем в виде правой части

$$S_q = A \cdot \sin(pt) + B \cdot \cos(pt). \quad (2.12)$$

Подставляя (2.12) в (2.11), после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} & \left[A \cdot (k^2 - p^2) - 2 \cdot n \cdot B \cdot p \right] \cdot \sin(pt) + \left[2 \cdot n \cdot p \cdot A + B \cdot (k^2 - p^2) \right] \cdot \cos(pt) = \\ & = \frac{F_0}{m_{np}} \cdot \sin(pt). \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при соответствующих тригонометрических функциях справа и слева, получаем систему алгебраических уравнений для определения постоянных A и B :

$$A \cdot (k^2 - p^2) - 2 \cdot n \cdot B \cdot p = \frac{F_0}{m_{np}},$$

$$A \cdot 2 \cdot n \cdot p + B \cdot (k^2 - p^2) = 0.$$

Решая эту систему, получаем следующие выражения для коэффициентов A и B :

$$\begin{aligned} A &= \frac{(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4 \cdot n^2 \cdot p^2} \cdot \frac{F_0}{m_{np}}, \\ B &= -\frac{2 \cdot n \cdot p}{(k^2 - p^2)^2 + 4 \cdot n^2 \cdot p^2} \cdot \frac{F_0}{m_{np}}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Таким образом, решение (2.12) определено. Складывая (2.8) и (2.12), получаем общее решение неоднородного уравнения (2.11)

$$S = a \cdot e^{-nt} \cdot \sin(k_1 t + \beta) + A \cdot \sin(pt) + B \cdot \cos(pt). \quad (2.14)$$

Константы a и β определяются из начальных условий (1.26). Для этого найдем производную по времени от (2.14)

$$\begin{aligned} \dot{S} &= a \cdot e^{-nt} \cdot [-n \cdot \sin(k_1 t + \beta) + k_1 \cdot \cos(k_1 t + \beta)] - \\ &- B \cdot p \cdot \sin(pt) + A \cdot p \cdot \cos(pt). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Подчинив (2.14) и (2.15) начальным условиям, получим систему уравнений относительно искомых констант

$$S_0 = a \cdot \sin(\beta) + B,$$

$$\dot{S}_0 = a \cdot [-n \cdot \sin \beta + k_1 \cdot \cos \beta] + A \cdot p.$$

Решая эту систему, получаем:

$$a = \sqrt{(S_0 - B)^2 + \frac{1}{k_1^2} \cdot (\dot{S}_0 + n \cdot S_0 - n \cdot B - A \cdot p)^2},$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{k_1 \cdot (S_0 - B)}{\dot{S}_0 + n \cdot S_0 - n \cdot B - A \cdot p}. \quad (2.16)$$

Подставляя (2.16) в (2.14), получаем закон движения механизма.

1.3. Определение реакций внешних и внутренних связей.

Для решения этой задачи расчленяем механизм на отдельные части и изображаем расчетные схемы отдельно для каждого тела (рис.3).

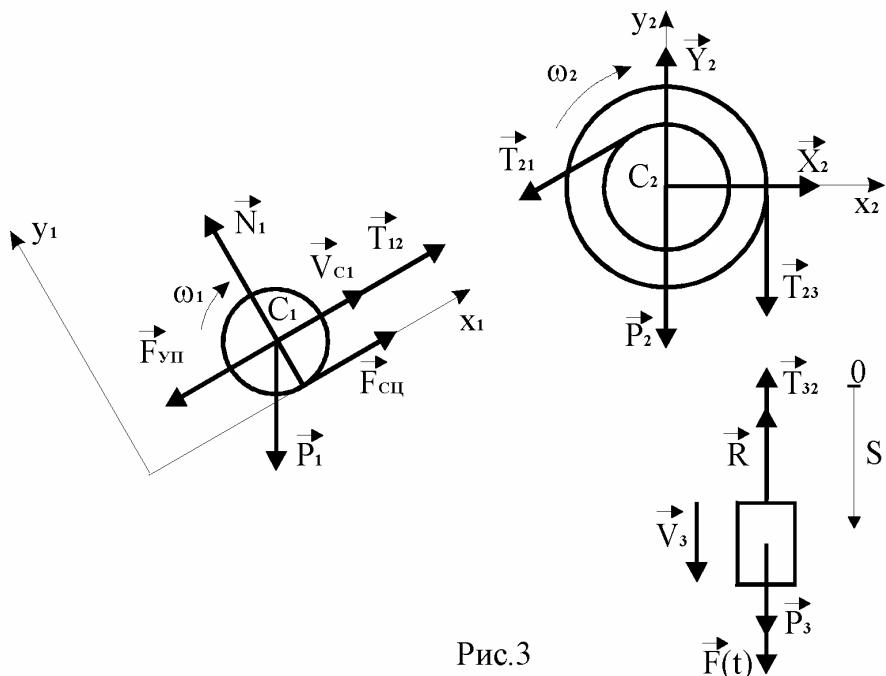


Рис.3

Определение реакций связей проведем с помощью теоремы об изменении количества движения

$$\frac{dm\vec{V}_C}{dt} = \sum \vec{F}_k^e, \quad (3.1)$$

и теоремы об изменении кинетического момента относительно центра масс

$$\frac{d\vec{L}_{CZ}}{dt} = \sum \vec{M}_{CZ}^e . \quad (3.2)$$

В соответствии с расчетными схемами (рис. 3) записываем уравнения (3.1) и (3.2) в проекциях на оси координат

тело 1: $\frac{dm_1 V_{C1}}{dt} = T_{12} + F_{CII} - F_{yn} - P_1 \cdot \sin \alpha , \quad (3.3)$

$$0 = N_1 - P_1 \cdot \cos \alpha , \quad (3.4)$$

$$\frac{dJ_{1C}\omega_1}{dt} = -F_{cII} \cdot r_1 ; \quad (3.5)$$

тело 2:

$$0 = X_2 - T_{21} \cdot \cos \alpha , \quad (3.6)$$

$$0 = Y_2 - P_2 - T_{21} \cdot \sin \alpha - T_{23} , \quad (3.7)$$

$$\frac{dJ_{C2}\omega_2}{dt} = -T_{21} \cdot r_2 + T_{23} \cdot R_2 ; \quad (3.8)$$

тело 3:

$$\frac{dm_3 V_3}{dt} = -T_{32} - R + P_3 + F . \quad (3.9)$$

С учетом кинематических соотношений (1.7) систему уравнений (3.3) - (3.9) преобразуем к виду:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \ddot{S} &= T_{12} + F_{cII} - F_{yn} - P_1 \cdot \sin \alpha , \\ 0 &= N_1 - P_1 \cdot \cos \alpha , \\ J_{C1} \cdot \frac{r_2}{r_1 \cdot R_2} \cdot \ddot{S} &= -F_{cII} \cdot r_1 , \\ 0 &= X_2 - T_{21} \cdot \cos \alpha , \\ 0 &= Y_2 - P_2 - T_{21} \cdot \sin \alpha - T_{23} , \\ J_{C2} \cdot \frac{1}{R_2} \cdot \dot{S} &= -T_{21} \cdot r_2 + T_{23} \cdot R_2 , \\ m_3 \cdot \ddot{S} &= -T_{32} - R + P_3 + F . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Уравнения (3.10) составляют систему алгебраических уравнений относительно функций

$$\ddot{S}, N_1, F_{\text{сп}}, T_{12}, T_{23}, X_2, Y_2.$$

Решая эту систему, получаем и дифференциальное уравнение движения системы, и выражения для определения реакций.

Часть 2. ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМА ВЫЧИСЛЕНИЙ И РАБОТА В КОМПЬЮТЕРОМ КЛАССЕ.

Алгоритм.

2.1. Исходные данные:

$$m_1, m_2, m_3, c, r_1, r_2, R_2, i_2, \mu, \alpha, F_0, p, S_0, \dot{S}_0, g.$$

2.2. Вычисление констант

$$J_{C1} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot r_1^2,$$

$$J_{C2} = m_2 \cdot i_2^2,$$

$$m_{np} = m_1 \frac{r_2^2}{R_2^2} + J_{C1} \frac{r_2^2}{r_1^2 R_2^2} + J_{C2} \frac{1}{R_2^2} + m_3,$$

$$k = \frac{r_2}{R_2} \sqrt{\frac{c}{m_{np}}},$$

$$n = \frac{\mu}{2 \cdot m_{np}},$$

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2},$$

$$f_{cr} = \frac{g}{c} \left(m_3 \cdot \frac{R_2}{r_2} - m_1 \cdot \sin \alpha \right).$$

$$A = \frac{(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4 \cdot n^2 \cdot p^2} \cdot \frac{F_0}{m_{np}},$$

$$B = -\frac{2 \cdot n \cdot p}{(k^2 - p^2)^2 + 4 \cdot n^2 \cdot p^2} \cdot \frac{F_0}{m_{np}},$$

$$a = \sqrt{(S_0 - B)^2 + \frac{1}{k_1^2} \cdot (\dot{S}_0 + n \cdot S_0 - n \cdot B - A \cdot p)^2},$$

$$\beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{k_1 \cdot (S_0 - B)}{\dot{S}_0 + n \cdot S_0 - n \cdot B - A \cdot p} \right).$$

2.3. Задание начального времени $t = 0$.

2.4. Вычисление значений функций в момент времени t

$$S = a \cdot e^{-nt} \cdot \sin(k_1 t + \beta) + A \cdot \sin(pt) + B \cdot \cos(pt);$$

$$\dot{S} = a \cdot e^{-nt} \cdot [-n \cdot \sin(k_1 t + \beta) + k_1 \cdot \cos(k_1 t + \beta)] + B \cdot p \cdot \sin(pt) + A \cdot p \cdot \cos(pt);$$

$$\ddot{S} = -2 \cdot n \cdot \dot{S} - k^2 \cdot S + \frac{F_0}{m_{np}} \cdot \sin(pt);$$

$$F_{yn} = c \cdot \left(f_{cr} + \frac{r_2}{R_2} \cdot S \right).$$

2.5. Вычисление реакций связей

$$N_1 = m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha;$$

$$F_{cy} = -J_{1C} \cdot \frac{r_2}{r_1^2 \cdot R_2} \cdot \ddot{S};$$

$$T_{21} = m_1 \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \ddot{S} - F_{cy} + F_{yn} + m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha;$$

$$X_2 = T_{21} \cdot \cos \alpha;$$

$$T_{32} = -m_3 \cdot \ddot{S} - \mu \cdot S + m_3 \cdot g + F_0 \cdot \sin(pt);$$

$$Y_2 = m_2 \cdot g + T_{21} \cdot \sin \alpha + T_{32}.$$

2.6. Вывод на печать значений искомых функций в момент времени t .

2.7. Определение значения времени на следующем шаге $t = t + \Delta t$.

2.8. Проверка условия окончания цикла $t \leq t_{kon}$.

2.9. Возврат к пункту 2.4.

Примечание. Вычисления производятся по готовой программе в дисплейном классе на персональных ЭВМ. Запуск программы производится в присутствии преподавателя. Вычисления проводятся до $t_{кон} = \frac{4 \cdot \pi}{k}$ с шагом $\Delta t = 0.1 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{k}$. Работа с программой осуществляется в диалоговом режиме. Необходимая для выполнения программы информация запрашивается на экране дисплея и вводится исполнителем с пульта. Результаты вычислений выводятся на экран дисплея для оперативного анализа в виде графиков и таблицы.

2.9. Оптимизация характеристик механической системы.

В результате решения дифференциального уравнения были получены законы движения первого груза, его скорость и ускорение в зависимости от времени t . На основании этих зависимостей могут быть определены законы изменения всех остальных характеристик механической системы, в том числе и реакций связей. Поскольку значения параметров системы задавались произвольно, то может возникнуть ситуация, когда натяжение одной из нитей или всех нитей станет отрицательным. В этом случае математическая модель перестает адекватно отражать динамику механической системы. Актуальной становится задача оптимизации параметров механической системы таким образом, чтобы на всем этапе функционирования системы она сохраняла бы свою работоспособность.

Предлагается изменить массу 1 груза так, чтобы обеспечить положительные значения натяжения нитей на всем протяжении работы механической системы.

Для оптимизации параметров механической системы на компьютере необходимо выполнить следующие операции:

1. Запустите программу rgr_d1.exe
2. Введите с клавиатуры свою фамилию и № группы.

3. Введите значения параметров механической системы, которые заданы первоначально.

Примечание а) если в расчетной схеме груз 1 висит вертикально, то необходимо ввести угол $\alpha = 90^0$;

б) если тело представляет собой каток, то большой и малый радиусы катка должны быть равны ($R_M = R_B$).

4. На экране компьютера появятся четыре графика:

либо перемещения $S(t)$, силы сцепления $F_{\text{сц}}(t)$, натяжения нитей $T_{12}(t)$ и $T_{23}(t)$, либо перемещения $S(t)$, натяжения нитей $T_{12}(t)$, $T_{23}(t)$ и $T_{34}(t)$ в зависимости от схемы механизма.

5. Если натяжение какой-либо нити имеет отрицательное значение, то необходимо нажать клавишу Enter. Появившееся на экране дисплея меню позволяет варьировать тремя параметрами: массой первого тела m_1 , жесткостью пружины c , амплитудой возмущающей силы F_0 . Необходимо выбрать параметр "масса m_1 ", нажав клавишу Enter, ввести новое численное значение массы первого груза и опять нажать Enter.

6. Если в результате значение натяжения какой-либо из нитей опять окажется отрицательным повторить п.5.

7. Если натяжение нитей в течение всего цикла работы механизма окажется положительным, нажмите клавишу Space.

8. Включите питание принтера и вставьте в него чистый лист бумаги.

9. Из предложенного меню выберите раздел "Печать результатов на принтер" и нажмите клавишу Enter.

10. После окончания печати выберите в меню пункт "Выход в DOS" и нажмите Enter.

На этом ваша работа с компьютером закончена.

По распечатке результатов необходимо построить графики зависимостей $S = S(t)$; $V = V(t)$; $a = a(t)$; $T_{12} = T_{12}(t)$; $T_{23} = T_{23}(t)$; $F_{\text{сц}} = F_{\text{сц}}(t)$.

Распечатку результатов и построенные на миллиметровке графики необходимо подшить к курсовой работе. (*Примеры распечатки результатов оптимизации системы и построенные на их основе графики зависимостей S = S(t), V = V(t), a = a(t), T₁₂ = T₁₂(t), T₂₃ = T₂₃(t), F_{сц} = F_{сц}(t) показаны в приложениях 2, 3*).

Примечание. Обозначения, используемые в таблице результатов:

t - время (с) - первая колонка;

S - перемещение (м) - вторая колонка;

V - скорость (м/с) - третья колонка;

w - ускорение (м/с²) - четвертая колонка;

T₁₂, T₂₃ - натяжение нитей (Н) - пятая и шестая колонки;

F_С - сила сцепления (Н) - седьмая колонка.

Часть 3. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ДАЛАМБЕРА-ЛАГРАНЖА И УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА.

3.1. Составление дифференциального уравнения движения механизма с помощью принципа Даламбера-Лагранжа.

Общее уравнение динамики системы есть математическое выражение принципа Даламбера-Лагранжа

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^a + \sum_{k=1}^n \delta A_k^U = 0. \quad (3.1)$$

Здесь $\sum_{k=1}^n \delta A_k^a = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k$ - сумма элементарных работ всех активных сил

на возможном перемещении системы; $\sum_{k=1}^n \delta A_k^U = - \sum_{k=1}^n m_k \cdot \vec{a}_k \cdot \delta \vec{r}_k$ - сумма элементарных работ всех сил инерции на возможном перемещении системы.

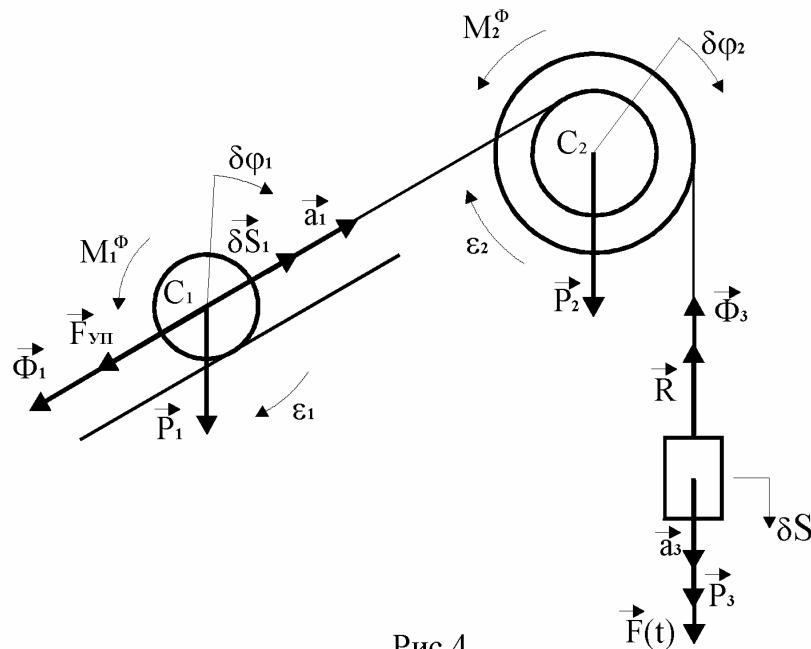


Рис.4

Изобразим на рисунке активные силы и силы инерции (рис.4). Реакции идеальных связей $\vec{N}_1, \vec{F}_{\text{сп}}, \vec{X}_2, \vec{Y}_2$ не учитывают и не отображают на расчетной схеме, поскольку по определению работа их реакций на любом возможном перемещении системы равна нулю. Пружина является неидеальной связью. Введем реакцию этой связи в число активных сил.

Сообщим системе возможное перемещение. Возможная работа активных сил определяется как сумма следующих элементарных работ:

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^a = \delta A_{P_1} + \delta A_{F_{yn}} + \delta A_{P_3} + \delta A_F + \delta A_R. \quad (3.2)$$

Вычисляя последовательно элементарные работы активных сил и суммируя их, получаем после несложных преобразований

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^a = \left[-c \cdot \frac{r_2^2}{R_2^2} \cdot S - \mu \cdot \dot{S} + F(t) \right] \cdot \delta S = F_{np} \cdot \delta S. \quad (3.3)$$

Аналогичное выражение для приведенной силы F_{np} получено ранее [см. (1.23)].

Найдем возможную работу сил инерции:

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^H = -\Phi_1 \cdot \delta S_1 - M_1^\Phi \cdot \delta \varphi_1 - \Phi_3 \cdot \delta S - M_2^\Phi \cdot \delta \varphi_2. \quad (3.4)$$

Для величин главных векторов и главных моментов сил инерции имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= m_1 \cdot a_1 = m_1 \cdot \ddot{S}_1; & M_1^\Phi &= J_{C1} \cdot \varepsilon_1 = J_{C1} \cdot \ddot{\varphi}_1; \\ \Phi_3 &= m_3 \cdot a_3 = m_3 \cdot \ddot{S}; & M_2^\Phi &= J_{C2} \cdot \varepsilon_2 = J_{C2} \cdot \ddot{\varphi}_2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Используя кинематические соотношения (1.7), можно записать

$$\begin{aligned} \delta \varphi_2 &= \frac{1}{R_2} \cdot \delta S; & \ddot{\varphi}_2 &= \frac{1}{R_2} \cdot \ddot{S}; \\ \delta S_1 &= \frac{r_2}{R_2} \cdot \delta S; & \ddot{S}_1 &= \frac{r_2}{R_2} \cdot \ddot{S}; \\ \delta \varphi_1 &= \frac{r_2}{r_1 \cdot R_2} \cdot \delta S; & \ddot{\varphi}_1 &= \frac{r_2}{r_1 \cdot R_2} \cdot \ddot{S}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Тогда возможную работу сил инерции можно преобразовать к виду

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^H = -\left(\frac{3}{2} \cdot m_1 \frac{r_2^2}{R_2^2} + m_2 \frac{i_2^2}{R_2^2} + m_3 \right) \cdot \ddot{S} \cdot \delta S \quad (3.7)$$

или

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^H = -m_{np} \cdot \ddot{S} \cdot \delta S, \quad (3.8)$$

где

$$m_{np} = \frac{3}{2} \cdot m_1 \frac{r_2^2}{R_2^2} + m_2 \frac{i_2^2}{R_2^2} + m_3. \quad (3.9)$$

Аналогичное выражение для приведенной массы системы было получено ранее [см.(1.10)]. Подставляя выражения (3.3) и (3.8) в общее уравнение динамики (3.1), получаем

$$\left[-c \cdot \frac{r_2^2}{R_2^2} \cdot S - \mu \cdot \dot{S} + F(t) \right] \cdot \delta S - m_{np} \cdot \ddot{S} \cdot \delta S = 0. \quad (3.10)$$

Поделив (3.10) на $\delta S \neq 0$, получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний системы:

$$\ddot{S} + 2 \cdot n \cdot \dot{S} + k^2 \cdot S = \frac{F_0}{m_{np}} \cdot \sin(pt), \quad (3.11)$$

где

$$k = \frac{r_2}{R_2} \sqrt{\frac{c}{m_{np}}};$$

$$n = \frac{\mu}{2 \cdot m_{np}}. \quad (3.12)$$

Дифференциальное уравнение (3.11) полностью совпадает с полученным ранее уравнением (1.25).

3.2. Составление дифференциального уравнения движения

механизма с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Составим теперь уравнения Лагранжа 2-го рода. Для механической системы с одной степенью свободы дифференциальное уравнение движения в обобщенных координатах имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{S}} - \frac{\partial T}{\partial S} = Q, \quad (3.13)$$

где Т - кинетическая энергия системы;

Q - обобщенная сила;

S - обобщенная координата;

\dot{S} - обобщенная скорость.

Выражение для кинетической энергии системы было найдено ранее (1.8):

$$T = \frac{1}{2} \cdot m_{np} \cdot V^2,$$

где

$$m_{np} = \frac{3}{2} \cdot m_1 \frac{r_2^2}{R_2^2} + m_2 \frac{i_2^2}{R_2^2} + m_3.$$

Учитывая, что $V^2 = \dot{S}^2$, получаем

$$T = \frac{1}{2} \cdot m_{np} \cdot \dot{S}^2. \quad (3.14)$$

Производные от кинетической энергии

$$\frac{\partial T}{\partial S} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{S}} = m_{np} \dot{S}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{S}} = m_{np} \ddot{S}. \quad (3.15)$$

Для определения обобщенной силы Q сообщим системе возможное перемещение $\delta \vec{S}$ (рис. 4) и вычислим сумму элементарных работ всех активных сил на возможных перемещениях точек их приложения [см. (3.3)]:

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^a = \left[-c \cdot \frac{r_2^2}{R_2^2} \cdot S - \mu \cdot \dot{S} + F(t) \right] \cdot \delta S.$$

С другой стороны для системы с одной степенью свободы

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^a = Q \cdot \delta S. \quad (3.16)$$

Сравнивая два последних соотношения, получаем

$$Q = -c \cdot \frac{r_2^2}{R_2^2} \cdot S - \mu \cdot \dot{S} + F(t). \quad (3.17)$$

Подставляя производные от кинетической энергии (3.15) и обобщенную силу (3.16) в уравнение Лагранжа, получаем

$$m_{np} \cdot \ddot{S} = -c \cdot \frac{r_2^2}{R_2^2} \cdot S - \mu \cdot \dot{S} + F(t)$$

или

$$\ddot{S} + 2 \cdot n \cdot \dot{S} + k^2 \cdot S = \frac{F_0}{m_{np}} \cdot \sin(pt). \quad (3.18)$$

Полученное уравнение (3.18) совпадает с уравнениями (1.25) и (3.11).

Часть 4. АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

4.1. Колебания механической системы при отсутствии сил сопротивления среды

В дифференциальном уравнении движения системы, полученном ранее (1.25), полагаем $n = 0$, тогда уравнение движения примет вид:

$$\ddot{s} + k^2 s = \frac{F_0}{m_{np}} \sin pt \quad (4.1)$$

Начальные условия: при $t = 0$ заданы $s(0) = s_0$ и $\dot{s}(0) = \dot{s}_0$.

4.1.1. Свободные колебания

Если внешнее возмущение отсутствует (т.е. $F_0 = 0$), то дифференциальное уравнение движения становится однородным:

$$\ddot{s} + k^2 s = 0 \quad (4.2)$$

и называется дифференциальным уравнением свободных колебаний, т.е. таких движений системы, которые происходят под действием так называемых восстанавливающих сил. Восстанавливающие силы – это такие силы, каждая из которых стремится вернуть систему в состояние статического равновесия (силы тяжести, упругие силы).

Решение уравнения (4.2) с учетом начальных условий имеет вид:

$$s = a \sin(kt + \alpha) \quad (4.3)$$

$$\text{где } a = \sqrt{s_0^2 + \dot{s}_0^2 / k^2}; \quad \alpha = \arctg \frac{s_0 k}{\dot{s}_0}; \quad k = \sqrt{\frac{c_{np}}{m_{np}}} \quad (4.4)$$

Анализируя решение (4.3) можно сделать следующие выводы:

1. Свободные колебания (приложение 1, рис.1.1) системы с одной степенью свободы представляют собой гармонические колебания.
2. Амплитуда a (максимальное отклонение системы от состояния равновесия) и начальная фаза α зависят от начальных условий.

3. Циклическая частота $k = \sqrt{\frac{c_{np}}{m_{np}}}$ и соответственно период колебаний

$\tau = \frac{2\pi}{k}$ от начальных условий не зависят, а зависят только от жесткой c_{np} и инерционной m_{np} характеристик системы.

4. Отношения амплитуд колебаний различных точек системы не зависят от начальных условий, так как начальные условия влияют на амплитуды только через множитель a , общий для всех точек.

5. Все точки системы всегда находятся в одной фазе, т.е. они одновременно проходят через свои равновесные положения; координаты всех точек одновременно достигают своих максимальных значений.

4.1.2. Вынужденные колебания

При воздействии возмущающей силы ($F_0 \neq 0$) решение неоднородного дифференциального уравнения (4.1) с учетом начальных условий представим в виде:

$$s = \underbrace{s_0 \cos kt + \frac{\dot{s}_0}{k} \sin kt}_{I} - \underbrace{\frac{Hp}{k(k^2 - p^2)} \sin kt}_{II} + \underbrace{\frac{H}{(k^2 - p^2)} \sin pt}_{III} \quad (4.5)$$

где $H = \frac{F_0}{m_{np}}$.

Первые два слагаемых правой части уравнения (4.5):

$$\begin{aligned} s_1 &= s_0 \cos kt + \frac{\dot{s}_0}{k} \sin kt = a_1 \sin(kt + \alpha_1) \\ a_1 &= \sqrt{s_0^2 + \frac{\dot{s}_0^2}{k^2}}; \alpha_1 = \arctg \frac{s_0 k}{\dot{s}_0} \end{aligned} \quad (4.6)$$

соответствуют свободным колебаниям с частотой k (приложение 1, рис. 1.1), т.е. колебаниям, которые совершил бы осциллятор при отсутствии возмущений. При нулевых начальных условиях, т.е. когда $s_0 = \dot{s}_0 = 0$, такие колебания во все времена действия возмущающей силы не возникают.

Третье слагаемое в (4.5)

$$s_2 = -\frac{Hp}{k(k^2 - p^2)} \sin kt = a_2 \sin(kt + \pi) \quad (4.7)$$

- гармоническое колебание, происходящее с собственной частотой k системы, но с амплитудой, зависящей от амплитуды возмущающей силы

$$a_2 = \frac{F_0}{m_{np}} \cdot \frac{p}{k} \cdot \frac{1}{k^2 - p^2} \quad (4.8)$$

Эти колебания также относятся к свободным колебаниям. Они всегда сопровождают вынужденные колебания при любых начальных условиях, от которых они вообще не зависят.

Их называют сопровождающими колебаниями (приложение 1, рис. 1.2).

Четвертое слагаемое в выражении (4.5):

$$s_{внн} = \frac{H}{k^2 - p^2} \sin pt; \quad H = \frac{F_0}{m_{np}} \quad (4.9)$$

представляет собой вынужденные колебания системы (приложение 1, рис. 1.3).

Таким образом, колебания линейного осциллятора в рассмотренном случае представляют собой линейное наложение трех гармонических колебаний: свободных, сопровождающих и вынужденных (приложение 1, рис. 1.4).

Отметим следующие свойства вынужденных колебаний:

1. Вынужденные колебания происходят с частотой возмущающей силы.
2. Вынужденные колебания не зависят от начальных условий, поэтому для изменения, например, амплитуды (при заданной возмущающей силе) вынужденных колебаний необходимы существенные изменения параметров конструкции: ее жесткости, распределения масс, тогда как в свободных колебаниях для этого достаточно изменить начальные условия.

3. Если $k > p$, то знак отклонения $s_{вн}$ будет совпадать со знаком возмущающей силы $F(t)$, т.е. сила и вызванные ею вынужденные колебания будут находиться в одной фазе.

Если $k < p$, то знак отклонения будет противоположен знаку силы.

Переписав для этого случая выражение (4.9) в виде:

$$s_{вн} = \frac{H}{p^2 - k^2} \sin(pt + \pi), \quad (4.10)$$

убеждаемся, что при $k < p$ возмущающая сила и вызванные ею колебания находятся в противоположенных фазах.

Резонанс.

4. Если $k = p$, то выражения (4.7) и (4.9) теряют смысл. Для анализа колебаний в этой ситуации эти выражения рассматриваются совместно

$$s_{2\theta} = s_2 + s_{вн} = H \left[\frac{-p \sin kt + k \sin pt}{k(k^2 - p^2)} \right]_{p=k} = \frac{0}{0} \quad (4.11)$$

т.е. получим неопределенность, которую можно раскрыть по правилу Лопиталя, заменив дробь в (4.11) пределом

$$\frac{-p \sin kt + k \sin pt}{k(k^2 - p^2)} = \lim_{p \rightarrow k} \left[\frac{-\sin kt + kt \cos pt}{-2pk} \right] = \frac{1}{2k^2} \sin kt - \frac{t}{2k} \cos kt.$$

Таким образом, в этом случае общий интеграл (4.5) будет иметь вид:

$$s = s_0 \cos kt + \frac{\dot{s}_0}{k} \sin kt + \frac{H}{2k^2} \sin kt - \frac{Ht}{2k} \cos kt. \quad (4.12)$$

И здесь, как в (4.5) движение осциллятора представляет собой линейное наложение трех колебательных движений, но с одним существенным отличием от (4.5): вынужденные колебания представлены непериодическим слагаемым:

$$s_{вн} = -\frac{Ht}{2k} \cos kt = \frac{H}{2k} t \sin \left(kt - \frac{\pi}{2} \right), \quad (4.13)$$

в коэффициенты которого входит время t .

С течением времени он растет по абсолютной величине безгранично,

причем вынужденные колебания происходят с возрастающей по линейному закону амплитудой.

Такая ситуация при колебаниях называется резонансом.

Биение.

5. Если частота вынужденных колебаний не равна частоте свободных колебаний, но близка к ней, то, записав выражение (4.11) в виде:

$$s_{2\theta} = s_2 + s_{вых} = \frac{H}{k^2 - p^2} \left(-\frac{p}{k} \sin kt + \sin pt \right), \quad (4.14)$$

полагаем $p \neq k$, но $p + k \approx 2k$, $\frac{p}{k} \approx 1$, $k^2 - p^2 = (k + p)(k - p) = 2k(k - p)$ и

преобразовываем (4.14) к виду:

$$s_{2\theta} = \frac{H}{2k(k - p)} [\sin pt - \sin kt]. \quad (4.15)$$

Используя тригонометрическое выражение:

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2},$$

получим

$$s_{2\theta} = s_2 + s_{вых} = \frac{H}{k(k - p)} \sin \frac{p - k}{2} \cdot t \cdot \cos kt, \quad (4.16)$$

т.е. $s_{2\theta} = A_6(t) \cos kt$,

где $A_6 = \frac{H}{k(k - p)} \sin \frac{p - k}{2} \cdot t$ - есть амплитуда колебаний, являющаяся пе-

риодичной функцией времени и меняется весьма медленно с большим перио-

дом $\tau_A = \frac{2\pi}{p - k}$, чем период самих колебаний $\tau_{вых} = \frac{2\pi}{p}$, т.е. $\tau_A \gg \tau_{вых}$, и ма-

лой частотой $\frac{p - k}{2}$.

Подобная рассмотренному случаю ситуация представляет собой биение (приложение 1, рис. 1.5).

Таким образом, когда частота вынужденных колебаний весьма близка к частоте свободных (или собственных) колебаний системы, но не равна ей, в колебательной системе возникает биение.

4.2. Колебания механической системы в вязкой среде

Дифференциальное уравнение движения имеет вид (1.25):

$$\ddot{s} + 2n\dot{s} + k^2 s = \frac{F_0}{m_{np}} \sin pt . \quad (4.17)$$

$$\text{Начальные условия: } s(0) = s_0, \quad \dot{s}(0) = \dot{s}_0 . \quad (4.18)$$

4.2.1. Свободные колебания

Полагая в (4.17) $F_0 = 0$, т.е. возмущения отсутствуют, получим

$$\ddot{s} + 2n\dot{s} + k^2 s = 0 \quad (4.19)$$

Ограничимся случаем малых сопротивлений и примем $n < k$.

Тогда общее решение однородного уравнения (4.19) с учетом начальных условий можно представить в виде (приложение 1, рис. 1.6):

$$s = a e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha), \quad (4.20)$$

$$\text{где } k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}; k = \sqrt{\frac{c_{np}}{m_{np}}} . \quad (4.21)$$

$$a = \sqrt{s_0^2 + \frac{1}{k_1^2} (\dot{s}_0 + ns_0)^2}, \quad \alpha = \arctg \frac{s_0 k_1}{\dot{s}_0 + ns_0} . \quad (4.22)$$

Из закона движения системы (4.20) видно, что в сопротивляющейся среде:

- 1) свободные колебания являются затухающими;
- 2) частота затухающих колебаний $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ меньше частоты незатухающих колебаний $k_1 < k$;

3) амплитуда затухающих колебаний $A = ae^{-nt}$ убывает по экспонциальному закону;

4) период затухающих колебаний $\tau_1 = \frac{2\pi}{k_1}$ больше периода незатухающих

$$\text{колебаний } \tau = \frac{2\pi}{k};$$

5) отношение любых двух соседних амплитуд: $A_i = ae^{-nt}$ и

$$A_{i+1} = ae^{-n\left(t + \frac{1}{2}\tau_1\right)}$$

есть величина постоянная

$$b = \frac{A_i}{A_{i+1}} = e^{\frac{1}{2}n\tau_1}. \quad (4.23)$$

Это отношение называется декрементом затухания. Логарифм этого коэффициента

$$\chi = \ln b = \frac{1}{2}n\tau_1 \quad (4.24)$$

называется логарифмическим декрементом.

Декремент или логарифмический декремент используются для оценки быстроты убывания амплитуды затухающих колебаний.

4.2.2. Вынужденные колебания в сопротивляющейся среде

Дифференциальное уравнение движения в этом случае является неоднородным:

$$\ddot{s} + 2n\dot{s} + k^2 s = \frac{F_0}{m_{np}} \sin pt, \quad (4.25)$$

его общее решение имеет вид:

$$s = C_1 e^{-nt} \cos k_1 t + C_2 e^{-nt} \sin k_1 t + D \sin(pt - \delta). \quad (4.26)$$

При начальных условиях $s(0) = s_0$, $\dot{s}(0) = \dot{s}_0$ постоянные интегрирования будут такими

$$\begin{aligned} C_1 &= s_0 + D \sin \delta; \\ C_2 &= \frac{1}{k_1} [s_0 + n(s_0 + D \sin \delta) - D p \cos \delta] \end{aligned} \quad (4.27)$$

После подстановки постоянных интегрирования (4.27) в общее решение (4.26) получим закон движения механической системы:

$$\begin{aligned} s &= ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha) + \frac{n}{k_1} De^{-nt} \sin \delta \sin k_1 t + \\ &+ De^{-nt} \left(\sin \delta \cos k_1 t - \frac{p}{k_1} \cos \delta \sin k_1 t \right) + D \sin(pt - \delta), \end{aligned} \quad (4.28)$$

где

$$a = \sqrt{s_0^2 + \frac{(\dot{s}_0 + ns_0)^2}{k_1^2}}; \quad (4.29)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{s_0 k_1}{\dot{s}_0 + ns_0};$$

$$D = D_0 \eta; \quad D_0 = \frac{F_0}{c_{np}}; \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{2np}{k^2 - p^2}; \quad (4.30)$$

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2}{k^2} \cdot \frac{p^2}{k^2}}} \text{ - коэффициент динамичности.} \quad (4.31)$$

В выражении (4.28) первое слагаемое представляет собой собственные затухающие колебания (приложение 1, рис. 1.6):

$$s_1 = ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha).$$

Второе и третье слагаемые в совокупности представляют собой сопровождающие колебания (приложение 1, рис. 1.7):

$$s_2 = \frac{n}{k_1} De^{-nt} \sin \delta \sin k_1 t + De^{-nt} \left(\sin \delta \cos k_1 t - \frac{p}{k_1} \cos \delta \sin k_1 t \right). \quad (4.32)$$

Последнее слагаемое

$$s_{\text{свн}} = D \sin(pt - \delta) \quad (4.33)$$

- вынужденные колебания с частотой возмущающей силы (приложение 1, рис. 1.8).

Таким образом, амплитуда вынужденных колебаний при резонансе достигает значительной величины при малых сопротивлениях.

$$D = D_0 \frac{1}{2} \frac{n}{k}. \quad (4.34)$$

Если $p \neq k$, но близка к ней, то, положив $\frac{p}{k_1} \approx 1$, выражение (4.32) для сопровождающих колебаний представится в виде:

$$s_2 = \frac{n}{k} D e^{-nt} \sin \delta \sin k_1 t + D e^{-nt} \sin(k_1 t - \delta). \quad (4.35)$$

Рассматривая (4.33) и (4.35) совместно и, добавив выражение

$$D e^{-nt} \sin(pt - \delta) - D e^{-nt} \sin(pt - \delta),$$

равное нулю, получим закон движения механической системы в виде:

$$\begin{aligned} s = & \frac{n}{k_1} D e^{-nt} \sin k_1 t + D \left(1 - e^{-nt}\right) \sin(pt - \delta) + \\ & + D e^{-nt} [\sin(pt - \delta) - \sin(k_1 t - \delta)] \end{aligned} \quad (4.36)$$

Но выражение в квадратных скобках можно представить так (4.15):

$$\sin(pt - \delta) - \sin(k_1 t - \delta) = 2 \sin\left(\frac{p - k_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{p + k_1}{2}t - \delta\right). \quad (4.37)$$

Тогда получим, положив $p + k_1 \approx 2p$,

$$\begin{aligned} s = & \frac{n}{k_1} D e^{-nt} \sin k_1 t + D \left(1 - e^{-nt}\right) \sin(pt - \delta) + \\ & + 2 D e^{-nt} \sin \frac{p - k_1}{2} t \cos(pt - \delta). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Последнее слагаемое в (4.38) представляет собой колебания биений с затухающей амплитудой

$$A_\delta = 2 D e^{-nt} \sin \frac{p - k_1}{2} t,$$

$$\text{т.е. } s_{\delta} = A_{\delta} \cos(pt - \delta). \quad (4.39)$$

Второе слагаемое в (4.38) – это незатухающие вынужденные колебания

$$s_{\text{вын}} = D(1 - e^{-nt}) \sin(pt - \delta). \quad (4.40)$$

Первое слагаемое в (4.38) – это затухающие сопровождающие колебания

$$s_{\text{con}} = \frac{n}{k_1} D e^{-nt} \sin k_1 t. \quad (4.41)$$

Таким образом, в реальных условиях ($n \neq 0$) колебания биений, вызываемые возмущенной силой с частотой, близкой к частоте затухающих колебаний, могут иметь практическое значение только в начале движения, в так называемый переходный период, и при малом значении коэффициента затухания n . При установившемся движении, которое наступает тем быстрее, чем больше сопротивление, движение системы определяется уравнением:

$$s_{\text{вын}} = D \sin(pt - \delta).$$

4.3. Коэффициент динамичности

Как было отмечено выше (4.31), коэффициентом динамичности называется отношение максимального динамического отклонения механической системы от положения устойчивого равновесия к статическому отклонению под воздействием силы, равной амплитуде возмущающей силы (приложение 1, рис. 1.10).

$$\eta = \frac{D}{D_{cm}}, \quad (4.42)$$

где $D_{cm} = \frac{F_0}{c_{np}}$,

т.е. согласно выражению (4.31):

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4\frac{n^2}{k^2} \cdot \frac{p^2}{k^2}}} = \frac{k^2}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}. \quad (4.43)$$

Максимальное значение η , следовательно, и амплитуды вынужденных колебаний D , достигается при минимальном значении подкоренного выражения (4.43):

$$f(p) = (k^2 - p^2) + 4n^2 p^2. \quad (4.44)$$

Найдем, при каком значении p функция (4.44) минимальная.

$$\frac{\partial f(p)}{\partial p} = -4p(k^2 - p^2) + 2np = 0. \quad (4.45)$$

Из (4.45) следует, что

$$p^2 = k^2 - 2n^2. \quad (4.46)$$

Это возможно, если

$$k^2 - 2n^2 > 0; 2n^2 < k^2; n < \frac{\sqrt{2}}{2}k; \frac{n}{k} < \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (4.47)$$

Подставляя (4.46) в (4.43), получаем

$$\max D_{\text{вын}} = \frac{D_{cm}}{2n\sqrt{(k^2 - n^2)}}. \quad (4.48)$$

При малом значении сопротивления ($n \ll k$):

$$\max D_{\text{вын}} = \frac{D_{cm}}{2nk}. \quad (4.49)$$

При резонансе ($p = k$):

$$D = \frac{D_{cm}}{2np},$$

т.е. максимальное значение амплитуды и ее значение при резонансе весьма близки друг к другу (практически одинаковы).

В области, достаточно удаленной от резонанса, при установившемся движении и малом коэффициенте затухания, силами сопротивления можно пренебречь.

Требования к оформлению.

Пояснительная записка, объемом 20-25 листов, аккуратно оформляется на листах формата А4. Каждый лист должен быть пронумерован и иметь стандартную рамку (20 мм от левого края и 5 мм от остальных). Разделы и параграфы должны быть озаглавлены и пронумерованы. Формулы, на которые есть ссылки в тексте пояснительной записи, обязательно нумеруются.

Пояснительная записка включает в себя:

1. Титульный лист (См. приложение 2).
2. Аннотация (Краткое содержание).
3. Оглавление.
4. Схема механизма и необходимые численные данные для выполнения задания (на отдельном листе).
5. Вывод дифференциального уравнения движения с использованием теоремы об изменении кинетической энергии механической системы.
6. Решение дифференциального уравнения движения (должны быть получены аналитические зависимости $S = S(t)$; $V = V(t)$; $w = w(t)$).
7. Определение реакций внешних и внутренних связей.
8. Получение дифференциального уравнения движения системы двумя другими методами (по указанию преподавателя).
9. Алгоритм вычислений искомых величин для реализации на ЭВМ.
10. Распечатка результатов оптимизации механической системы с помощью ЭВМ (См. приложение 2).
11. Графическая часть (Построенные графики зависимостей $S = S(t)$; $V = V(t)$; $a = a(t)$; $T_{12} = T_{12}(t)$; $T_{23} = T_{23}(t)$; $F_{\text{сц}} = F_{\text{сц}}(t)$) (См. приложение 3).
12. Анализ результатов.

Приложение 1. Графические иллюстрации видов колебаний

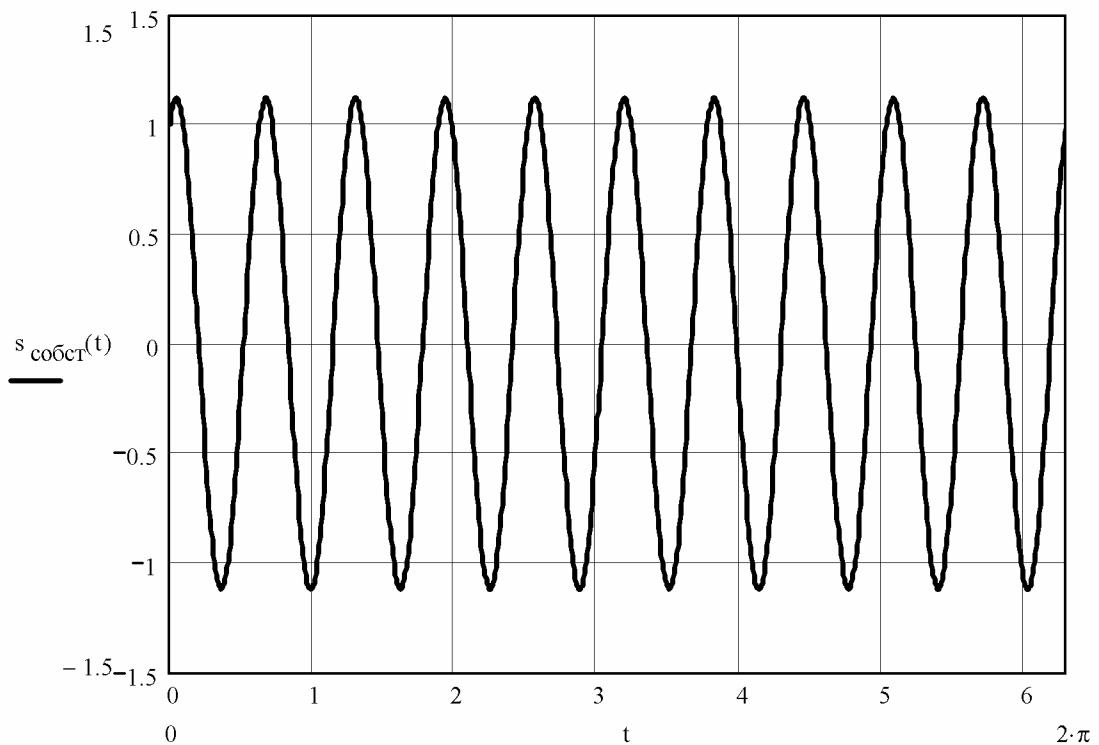


Рис. 1.1. Собственные колебания $s = a \sin(kt + \alpha)$

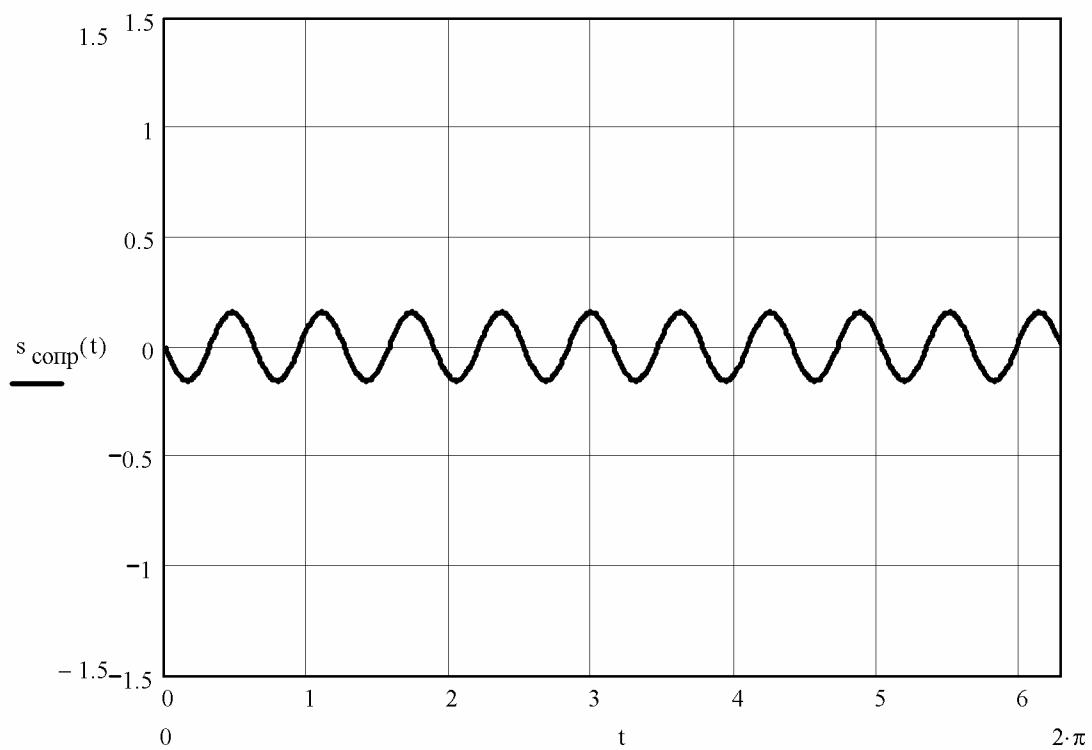


Рис. 1.2 Сопровождающие колебания $s = a_2 \sin(kt + \pi)$

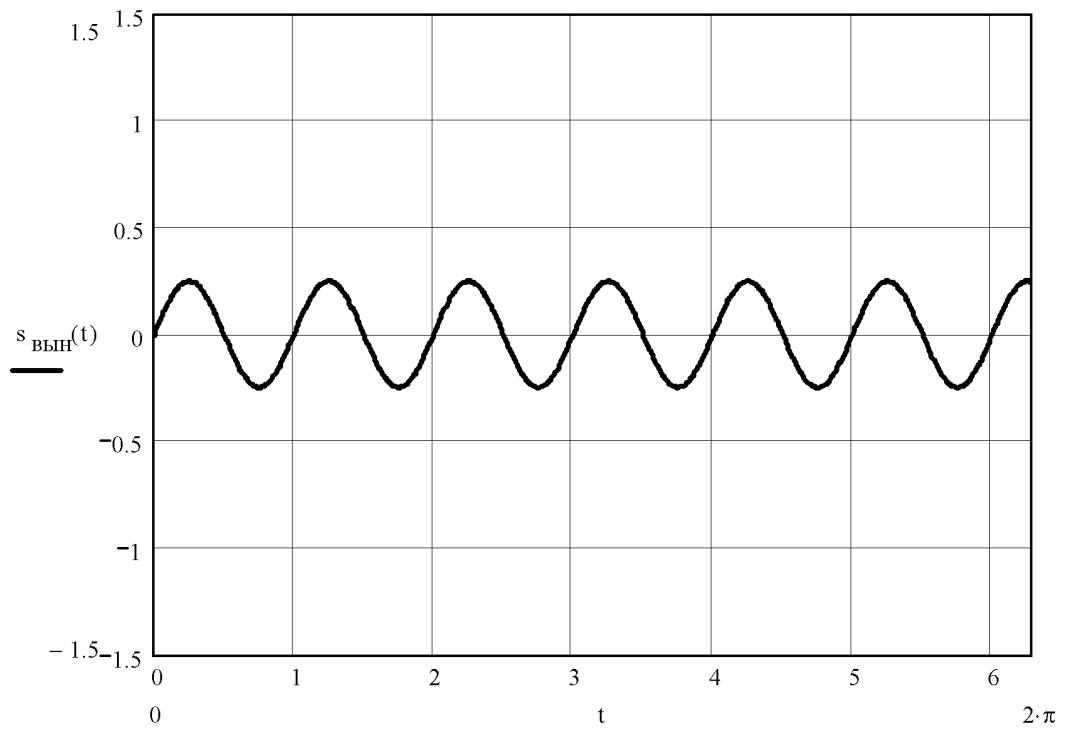


Рис.1.3 Вынужденные колебания $s_{\text{вын}} = \frac{H}{k^2 - p^2} \sin pt$; $H = \frac{F_0}{m_{np}}$

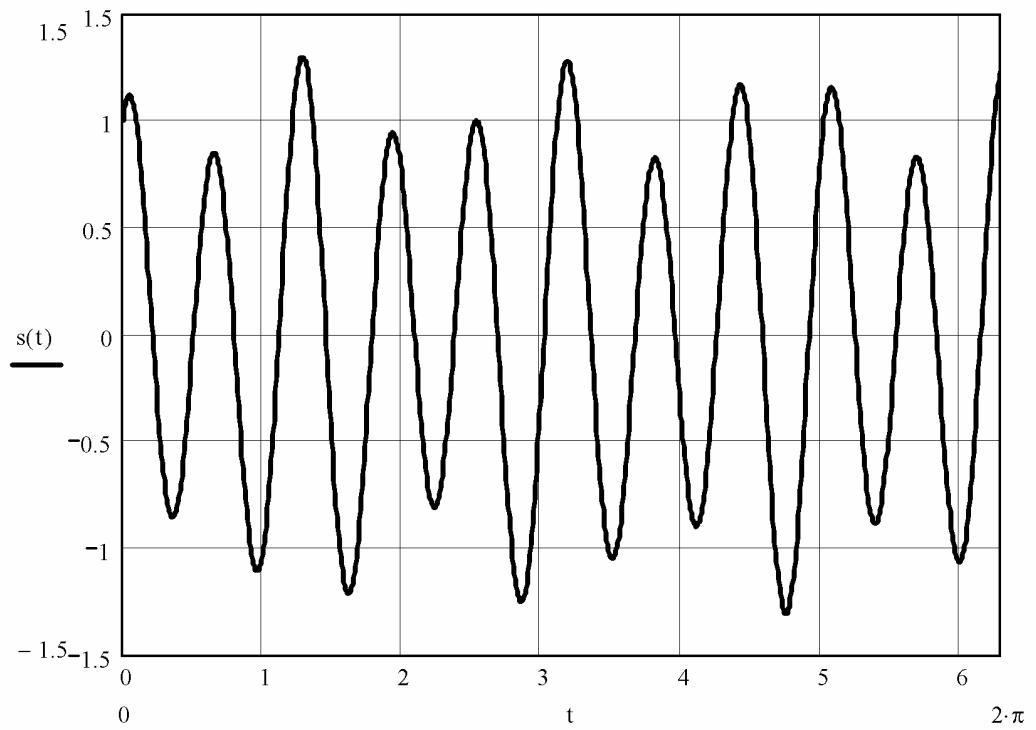


Рис. 1.4 Результирующие колебания

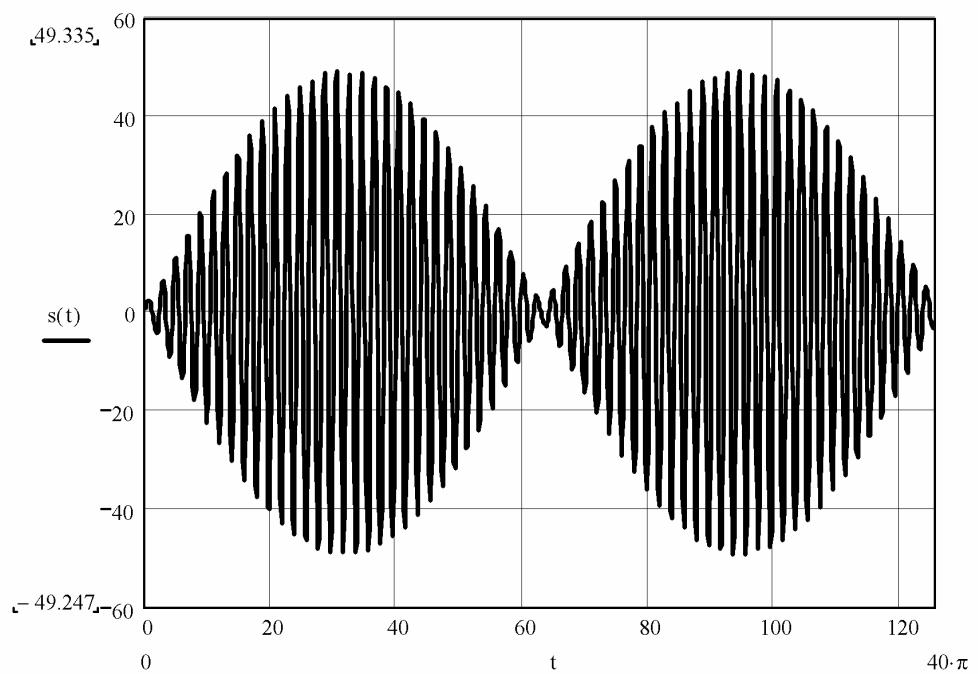


Рис. 1.5 Биения – результирующие колебания

$$s_{2e} = \frac{H}{k(k-p)} \sin \frac{p-k}{2} \cdot t \cdot \cos kt$$

Колебания в вязкой среде

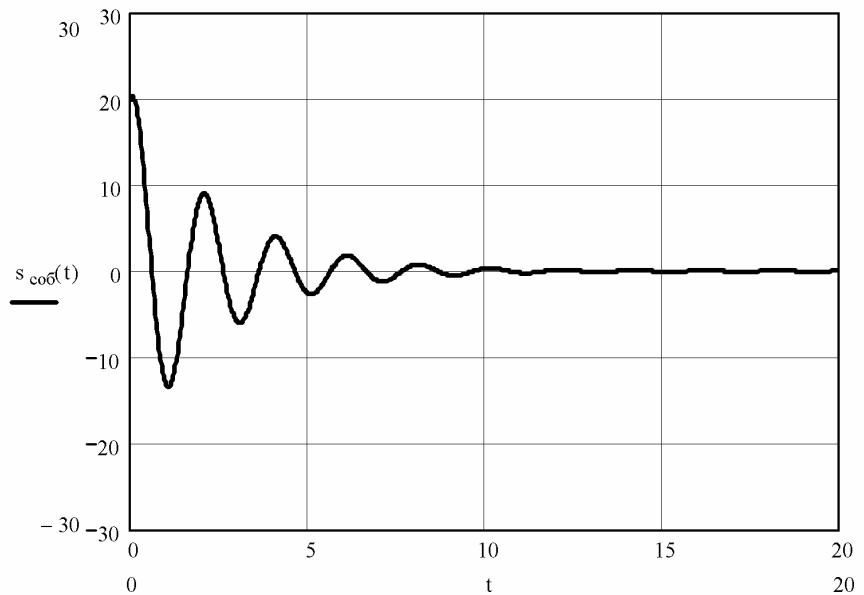


Рис.1.6. Собственные колебания в вязкой среде $s = ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha)$

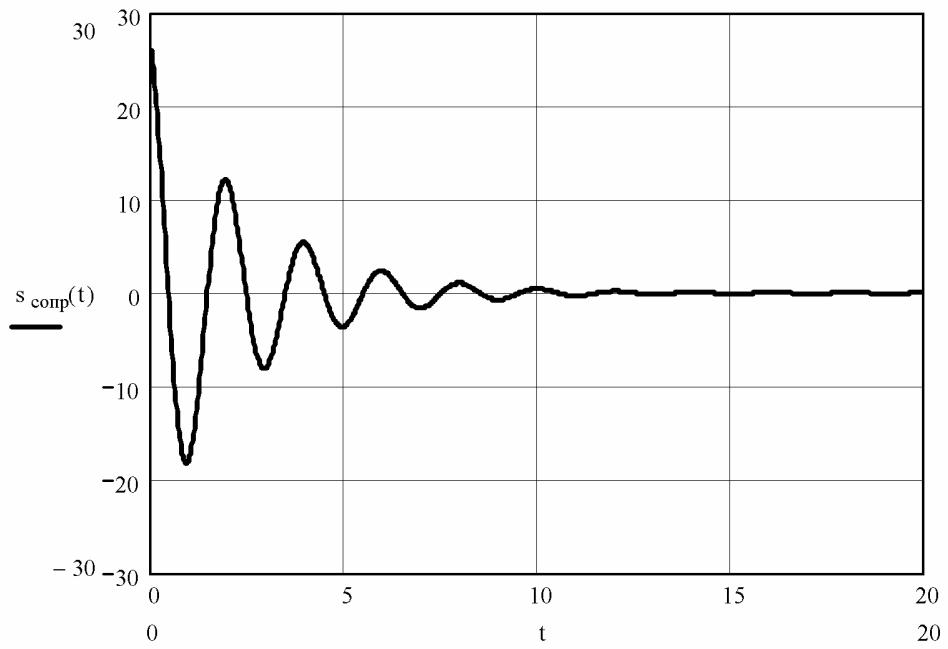


Рис.1.7 Сопровождающие колебания в вязкой среде

$$s_2 = \frac{n}{k_1} D e^{-nt} \sin \delta \sin k_1 t + D e^{-nt} \left(\sin \delta \cos k_1 t - \frac{p}{k_1} \cos \delta \sin k_1 t \right)$$

Вынужденные колебания

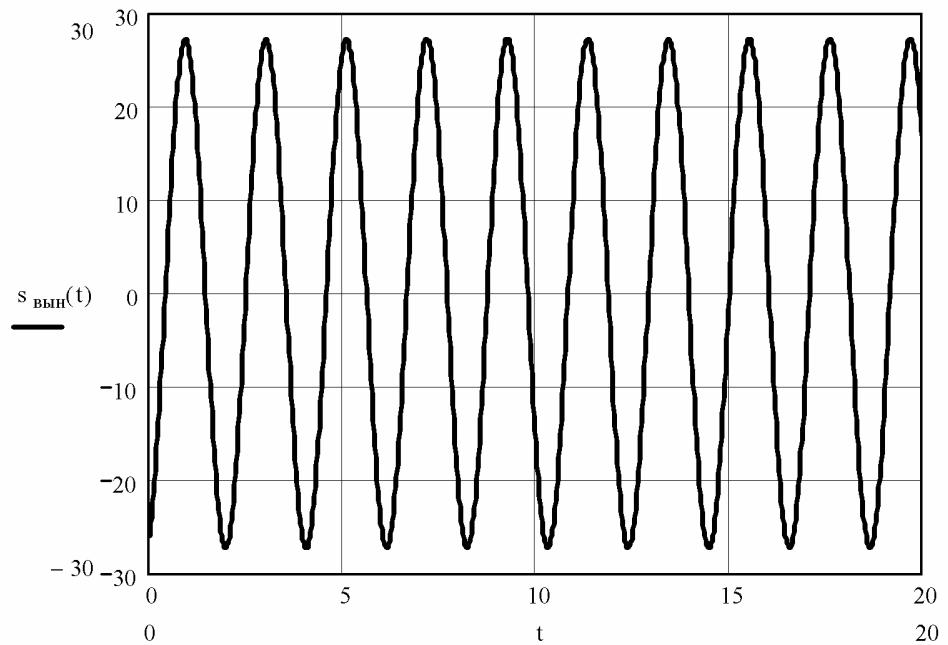


Рис. 1.8. Вынужденные колебания $s_{вых} = D \sin(pt - \delta)$

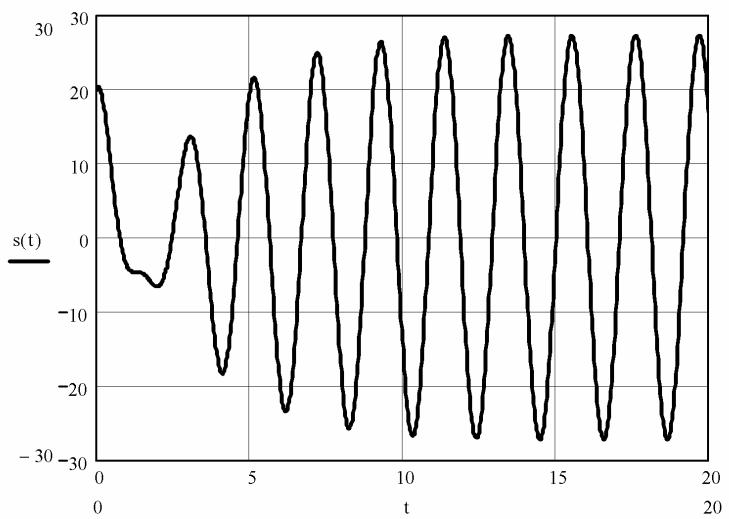


Рис. 1.9 Результирующие колебания в вязкой среде

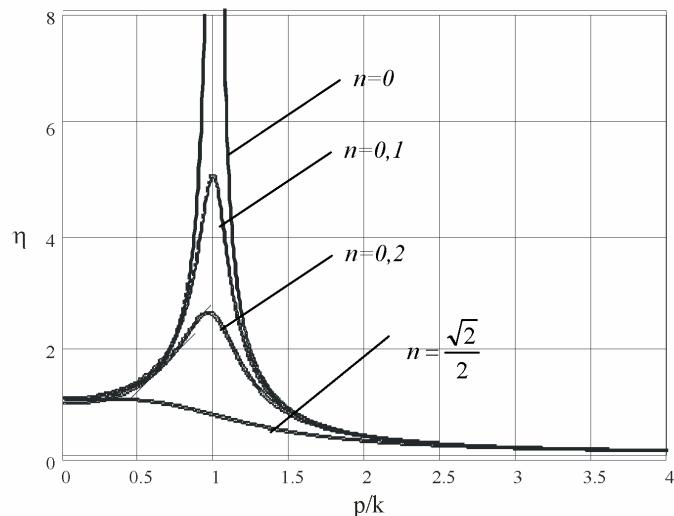


Рис. 1.10 Коэффициент динамичности $\eta = \frac{D}{D_{cm}}$

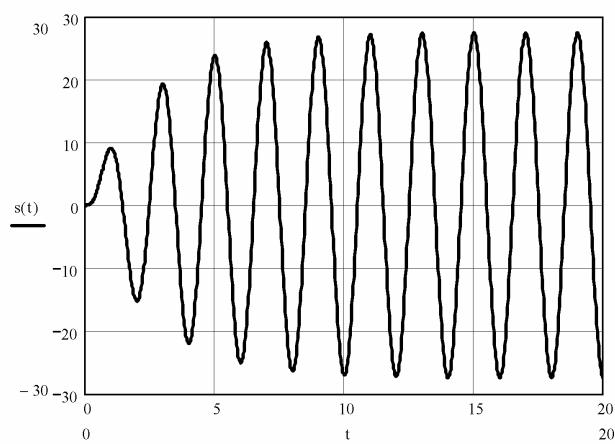


Рис. 1.11. Резонанс ($p=k$) при нулевых значениях начальных перемещения и скорости

Приложение 3.

Фамилия: Сидоров С.С. группа: 621132

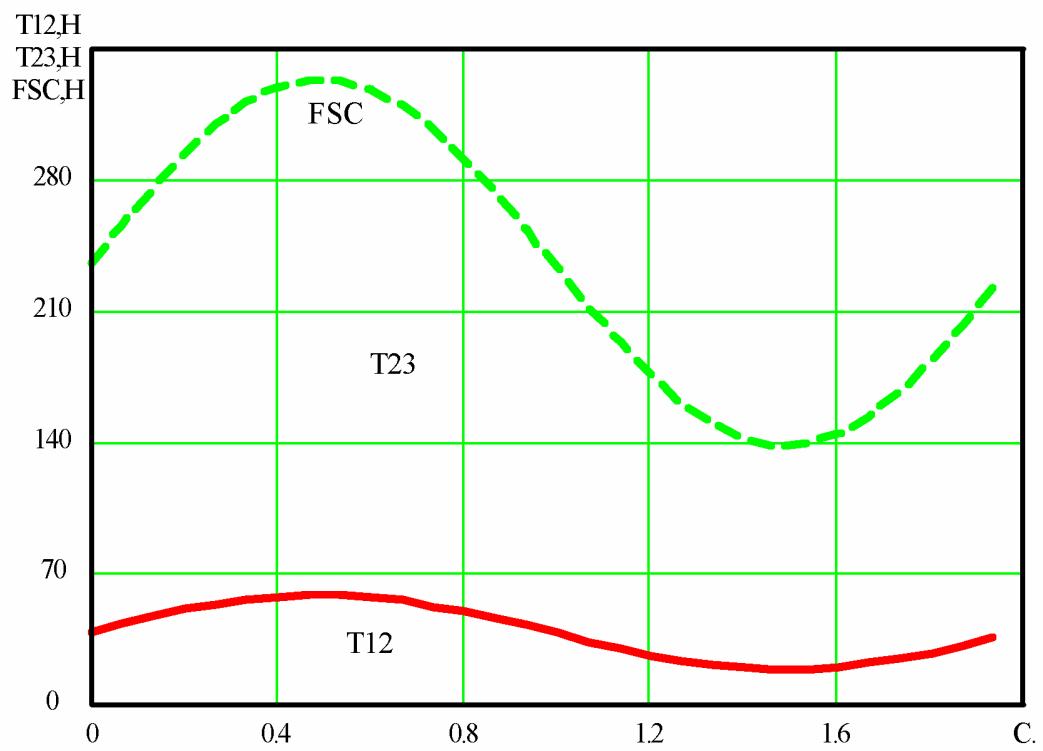
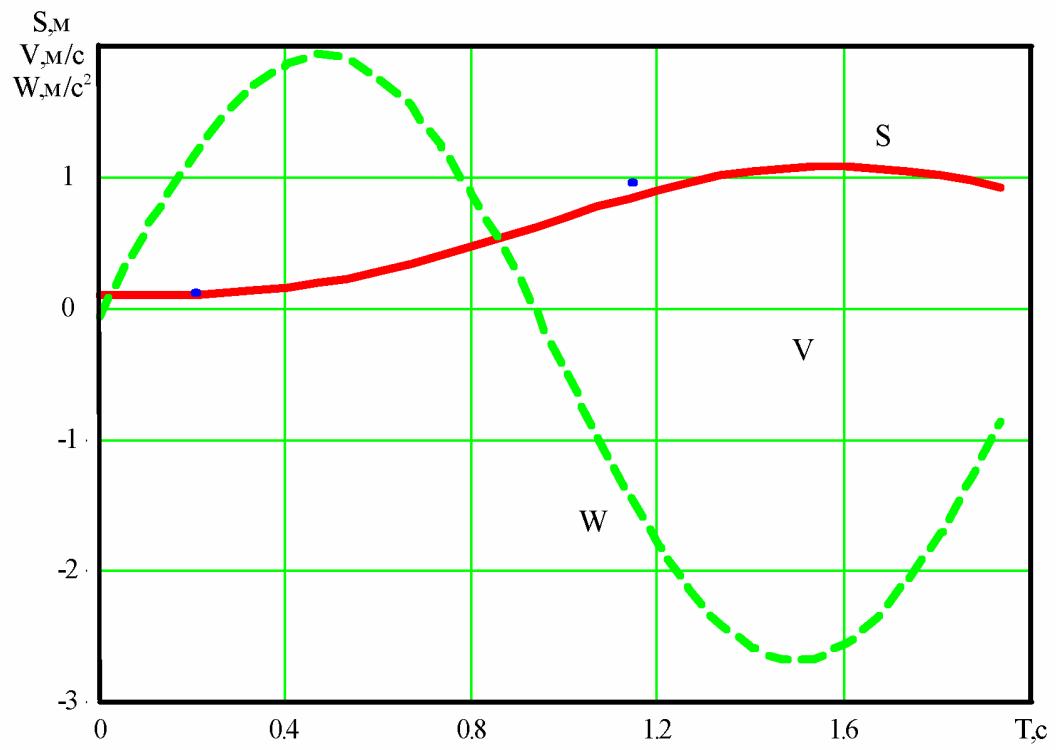
Вариант: 10

M1 = 8.000	M2 = 3.000	M3 = 4.000	M4 = 0.000
I2 = 0.200	I3 = 0.300	I4 = 0.000	
RM2 = 0.100	RM3 = 0.200	RM4 = 0.000	
RB2 = 0.300	RB3 = 0.400	RB4 = 0.000	
MY = 100	C = 4000.00	F0 = 20.000	P1 = 3.140
S0 = 0.100	V0 = 0.000	ALF = 30.000	

K= 0.723 K1= 0.721 MP= 9.494 CP= 4.938 N= 0.053

T	S	V	W	T12	T23	FSC
0.000	0.100	0.025	-0.055	39.215	117.863	235.782
	0.067	0.100	0.030	0.383	43.368	128.573
	0.133	0.102	0.063	0.797	47.311	138.746
	0.200	0.108	0.122	1.169	50.874	147.943
	0.267	0.118	0.203	1.483	53.899	155.768
	0.334	0.135	0.303	1.722	56.257	161.884
	0.400	0.160	0.417	1.876	57.844	166.028
	0.467	0.193	0.538	1.938	58.593	168.026
	0.534	0.235	0.661	1.903	58.469	167.795
	0.600	0.285	0.780	1.773	57.481	165.352
	0.667	0.343	0.888	1.553	55.673	160.807
	0.734	0.408	0.980	1.250	53.123	154.367
	0.800	0.478	1.052	0.879	49.944	146.317
	0.867	0.552	1.098	0.454	46.277	137.015
	0.934	0.628	1.116	-0.006	42.283	126.872
	1.001	0.704	1.104	-0.482	38.136	116.339
	1.067	0.778	1.061	-0.954	34.021	105.880
	1.134	0.847	0.988	-1.402	30.117	95.958
	1.201	0.911	0.888	-1.806	26.596	87.011
	1.267	0.966	0.763	-2.148	23.614	79.436
	1.334	1.012	0.617	-2.416	21.302	73.570
	1.401	1.047	0.456	-2.596	19.763	69.672
	1.467	1.070	0.286	-2.682	19.064	67.919
	1.534	1.082	0.122	-2.670	19.238	68.392
	1.601	1.082	-0.059	-2.560	20.278	71.074
	1.668	1.070	-0.221	-2.358	22.141	75.853
	1.734	1.048	-0.368	-2.072	24.745	82.524
	1.804	1.017	-0.495	-1.715	27.980	90.799
	1.868	0.978	-0.598	-1.302	31.704	100.320
	1.934	0.933	-0.674	-0.852	35.756	110.676
						222.205

Приложение 4.



Приложение 4. Альбом заданий

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

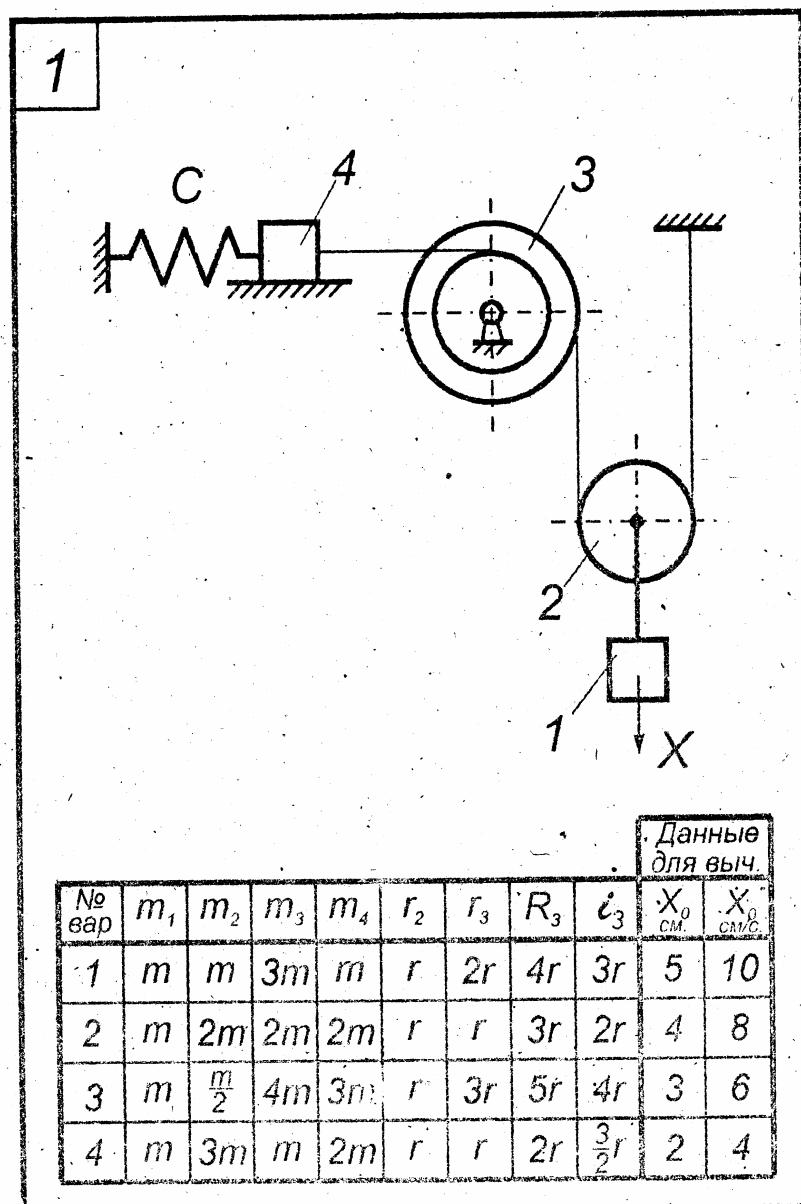
Дана механическая система, представляющая собой совокупность абсолютно твердых тел, связанных друг с другом посредством нерастяжимых нитей. Система снабжена упругой внешней связью, с жесткостью C и испытывает со- противление среды, пропорциональное скорости груза 1, с коэффициентом про- порциональности μ . Инерционные и геометрические характеристики тел систе- мы приведены в таблицах данных.

Требуется исследовать динамическое поведение механической системы. Определить реакции внешних и внутренних связей. Трением качения и сколь- жения пренебречь.

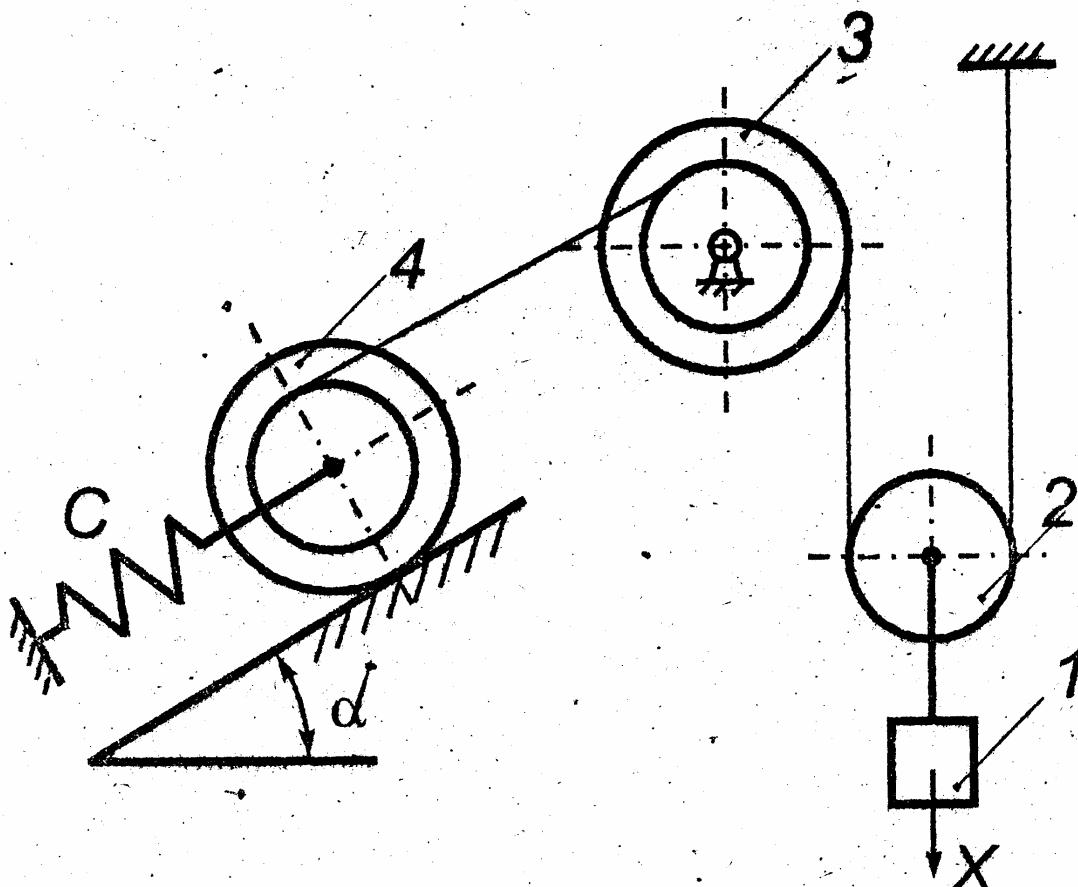
Во всех вариантах задания принять:

$m = 1\text{ кг}$, $r = 0.1 \text{ м}$, $C = 4000 \text{ Н/м}$, $\mu = 100 \frac{\text{Н} \cdot \text{сек}}{M}$, на груз 1 действует

возмущающая сила $F(t) = F_0 \sin(\pi t)$. ($F_0 = 50 \text{ Н}$, $\pi = 3,14 \text{ с}^{-1}$)



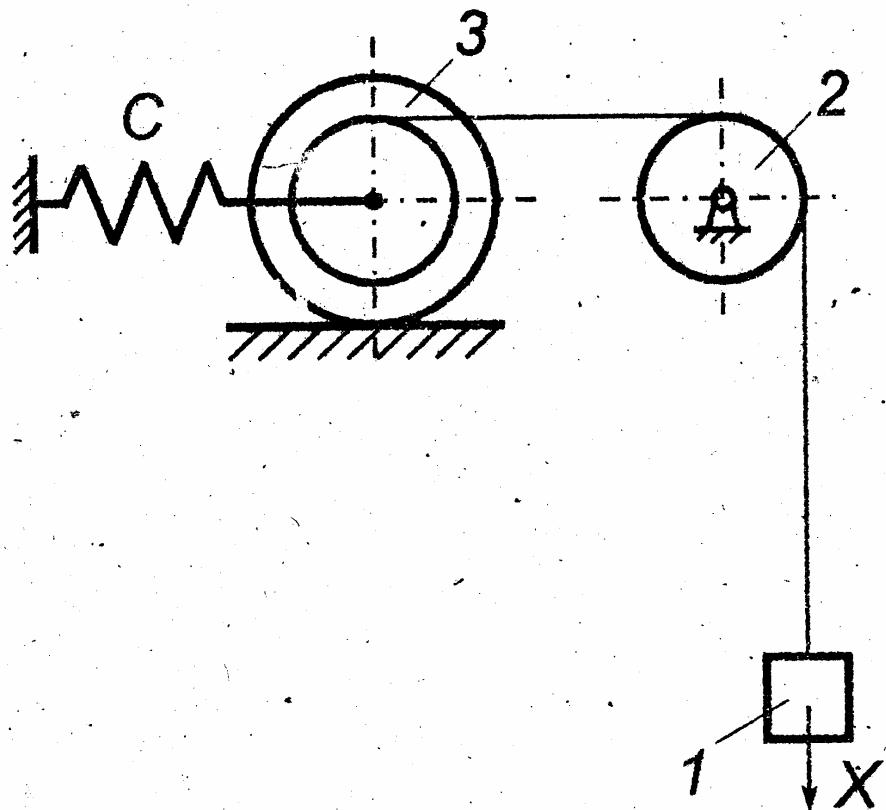
2



Данные
для вычисл.

№ вар	m_1	m_2	m_3	m_4	r_2	r_3	R_3	r_4	R_4	i_3	i_4	d град.	X_0 см.	\ddot{X} см/с
1	$2m$	$2m$	m	m	r	r	$4r$	r	$5r$	$2r$	$3r$	60	2	10
2	$4m$	m	m	$2m$	r	$2r$	$3r$	$2r$	$4r$	$\frac{5}{2}r$	$3r$	45	6	0
3	$3m$	$2m$	m	m	r	$2r$	$4r$	r	$3r$	$3r$	$2r$	45	4	8
4	$2m$	$3m$	m	$2m$	r	r	$5r$	r	$4r$	$3r$	$3r$	30	5	6

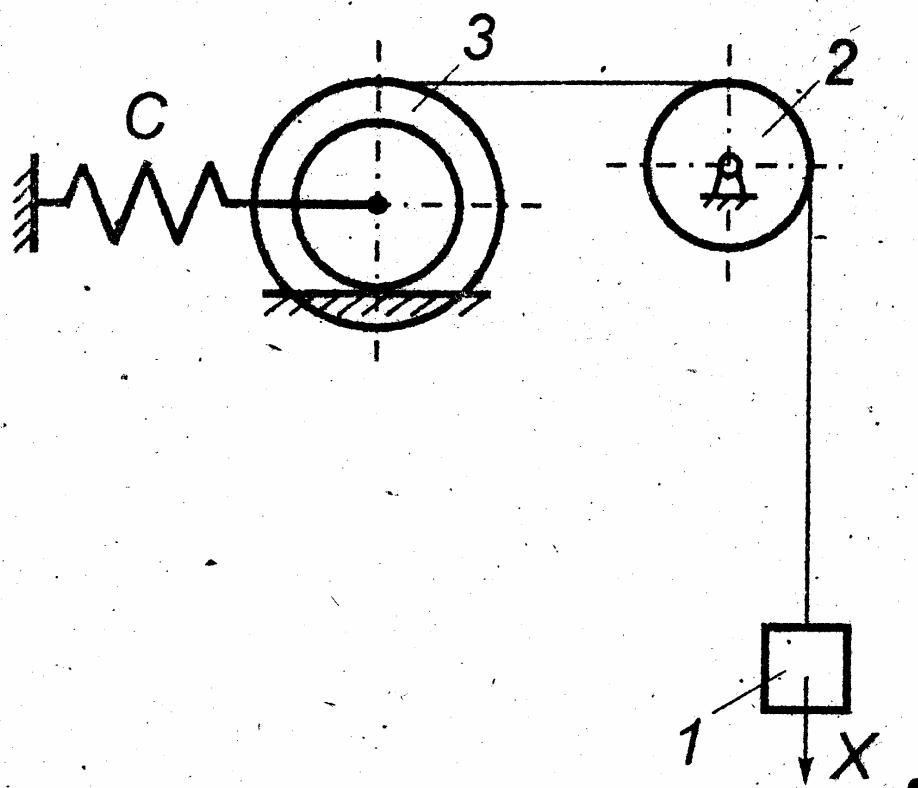
3



Данные
для выч.

№ вар	m_1	m_2	m_3	r_2	r_3	R_3	\dot{c}_3	X_0 см.	\dot{X} см/с.
1	$3m$	m	$2m$	r	$\frac{3}{2}r$	$2r$	$\frac{5r}{3}$	6	10
2	$4m$	$2m$	$2m$	r	$2r$	$3r$	$\frac{5r}{2}$	8	0
3	$5m$	m	m	r	r	$2r$	$\frac{3r}{2}$	4	6
4	$4m$	m	$3m$	r	$3r$	$4r$	$\frac{7r}{2}$	5	8

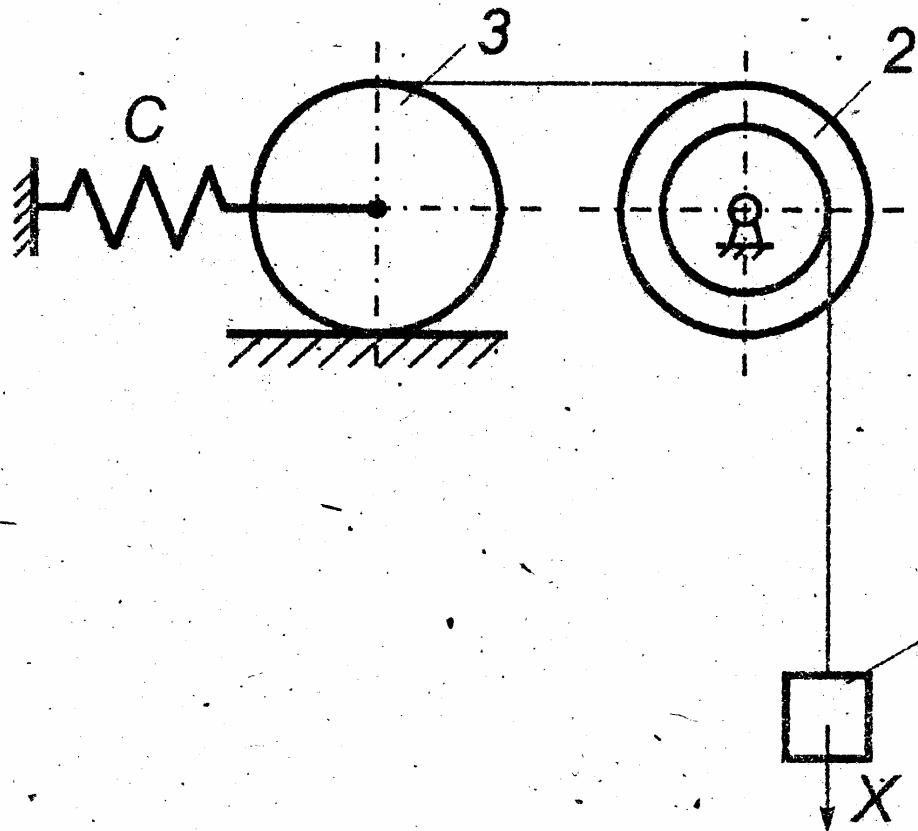
4



Данные
для выч.

$\frac{\text{№}}{\text{вар}}$	m_1	m_2	m_3	r_2	r_3	R_3	c_3	X_0 см.	\dot{X}_0 см/с.
1	$2m$	m	m	r	$3r$	$4r$	$2r$	5	7
2	$3m$	$2m$	$3m$	r	$4r$	$6r$	$3r$	6	8
3	$4m$	m	$2m$	r	$2r$	$3r$	$\frac{5r}{2}$	7	9
4	$5m$	$3m$	$2m$	r	$5r$	$7r$	$4r$	8	10

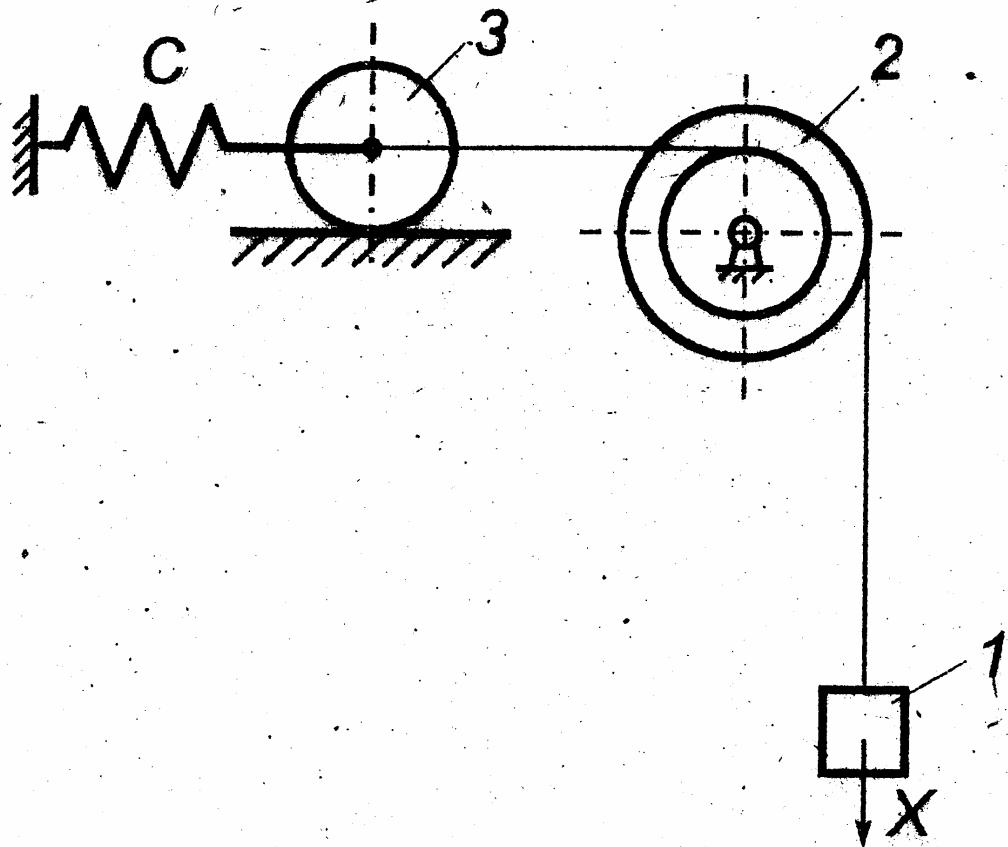
5



Данные
для выч.

№ вар	m_1	m_2	m_3	r_2	R_2	R_3	\dot{c}_2	X_0 см.	\dot{X} см/с.
1	$2m$	m	$2m$	r	$2r$	$2r$	$\frac{3}{2}r$	2	10
2	$4m$	m	$3m$	r	$3r$	$3r$	$2r$	3	8
3	$6m$	m	$4m$	r	$4r$	$4r$	$3r$	4	9
4	$8m$	m	$2m$	r	$5r$	$2r$	$4r$	5	0

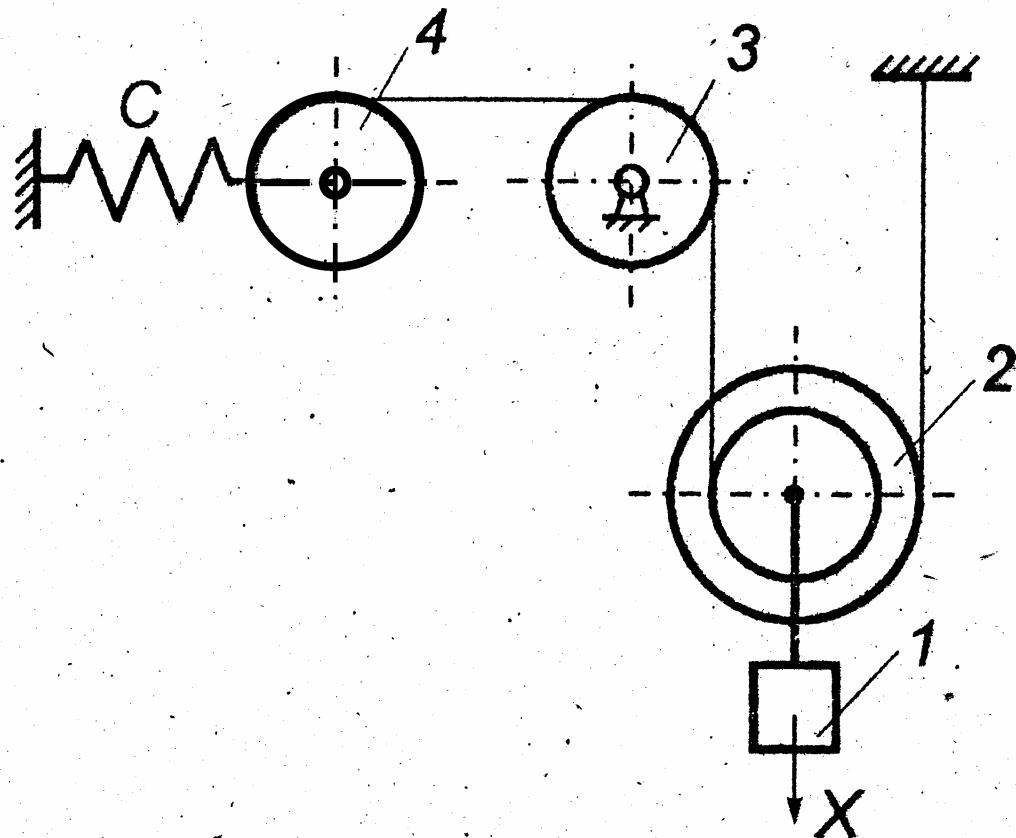
6



Данные
для выч.

№ вар	m_1	m_2	m_3	r_2	R_2	r_3	c_2	X_0 см.	\dot{X} см/с
1	m	$2m$	$2m$	r	$2r$	r	$\frac{3}{2}r$	6	10
2	$2m$	m	m	r	$3r$	$2r$	$2r$	4	0
3	$3m$	m	$2m$	r	$4r$	$2r$	$3r$	2	8
4	$4m$	$3m$	$2m$	r	$3r$	r	$2r$	3	6

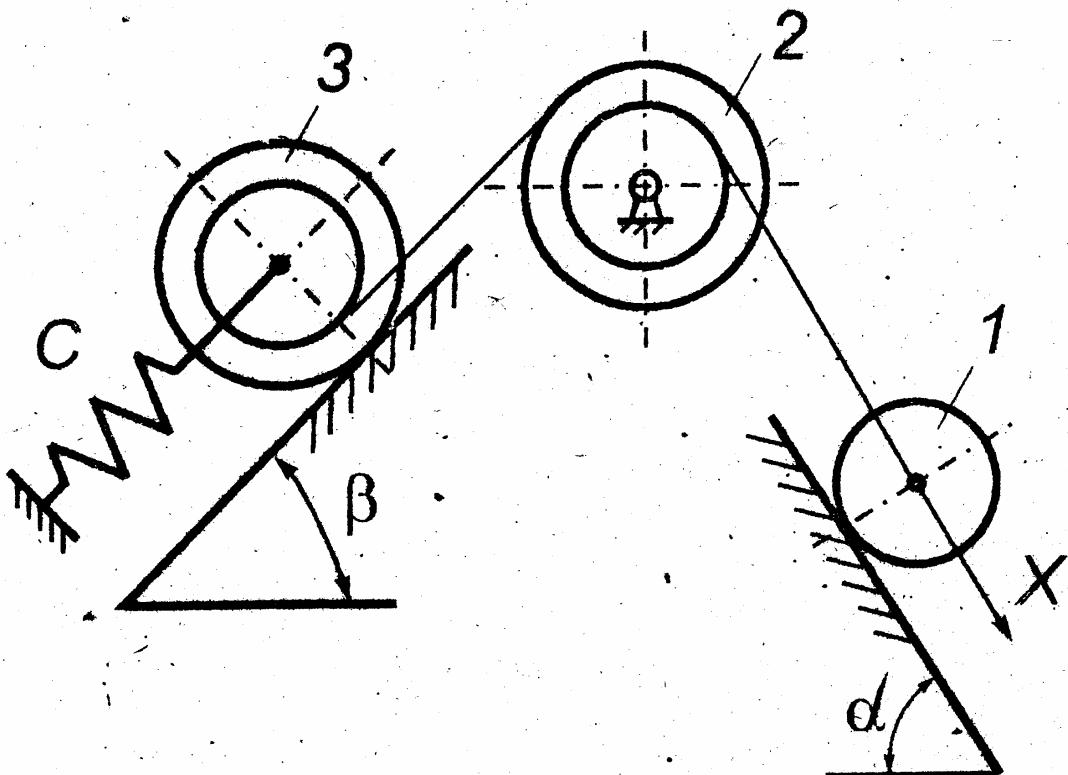
7



Данные
для выч.

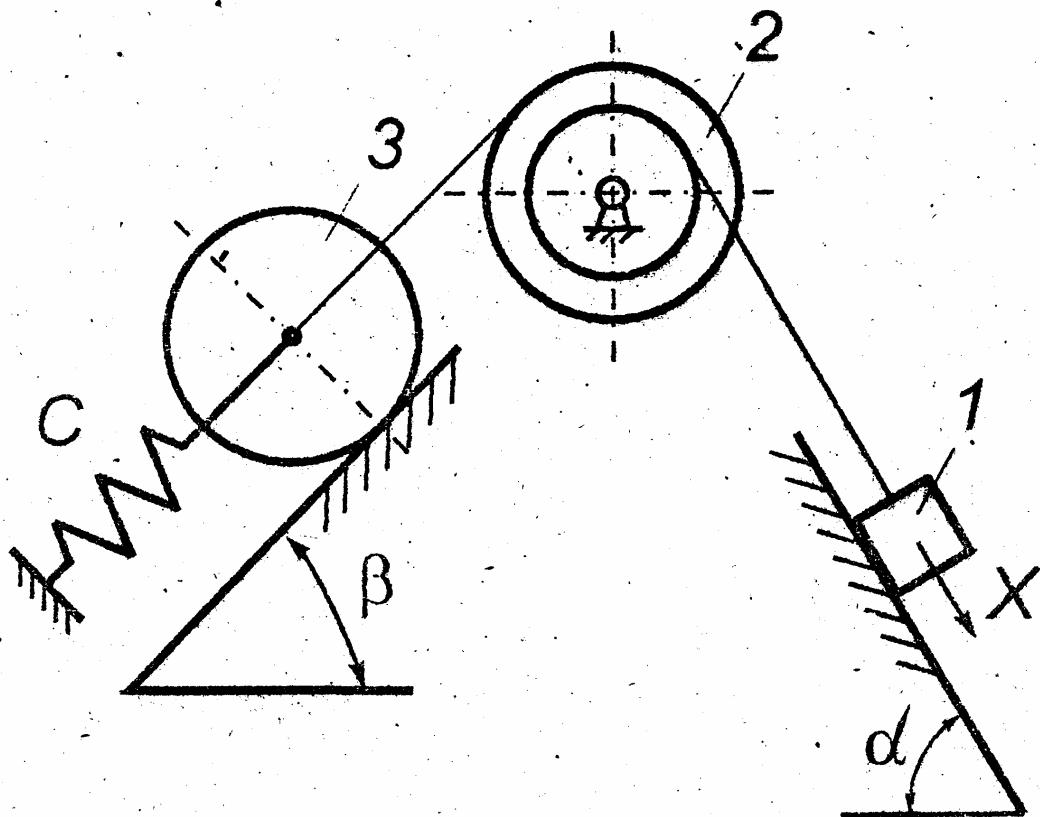
№ вар	m_1	m_2	m_3	m_4	r_2	R_2	r_3	r_4	$\dot{\epsilon}_2$	X_0 см.	\dot{X} см/с.
1	$3m$	m	m	$2m$	r	$3r$	r	$2r$	$2r$	6	0
2	$2m$	$2m$	m	m	$3r$	$4r$	r	$3r$	$\frac{7}{2}r$	4	10
3	$4m$	m	m	$3m$	$4r$	$5r$	r	$4r$	$\frac{9}{2}r$	5	8
4	$6m$	$3m$	m	$2m$	$2r$	$6r$	r	$3r$	$3r$	4	6

8

Данные
для вычисл.

№ вар	m_1	m_2	m_3	r_1	r_2	R_2	r_3	R_3	ζ_2	ζ_3	α град	β град	X см	X см²
1	$3m$	m	m	r	r	$3r$	r	$3r$	$2r$	$2r$	60	30	8	10
2	$5m$	m	$2m$	r	$2r$	$4r$	$2r$	$4r$	$3r$	$3r$	30	60	6	0
3	$2m$	m	m	r	$2r$	$3r$	r	$5r$	$\frac{5}{2}r$	$4r$	45	60	4	7
4	$4m$	m	$3m$	r	r	$5r$	r	$3r$	$3r$	$2r$	30	45	2	8

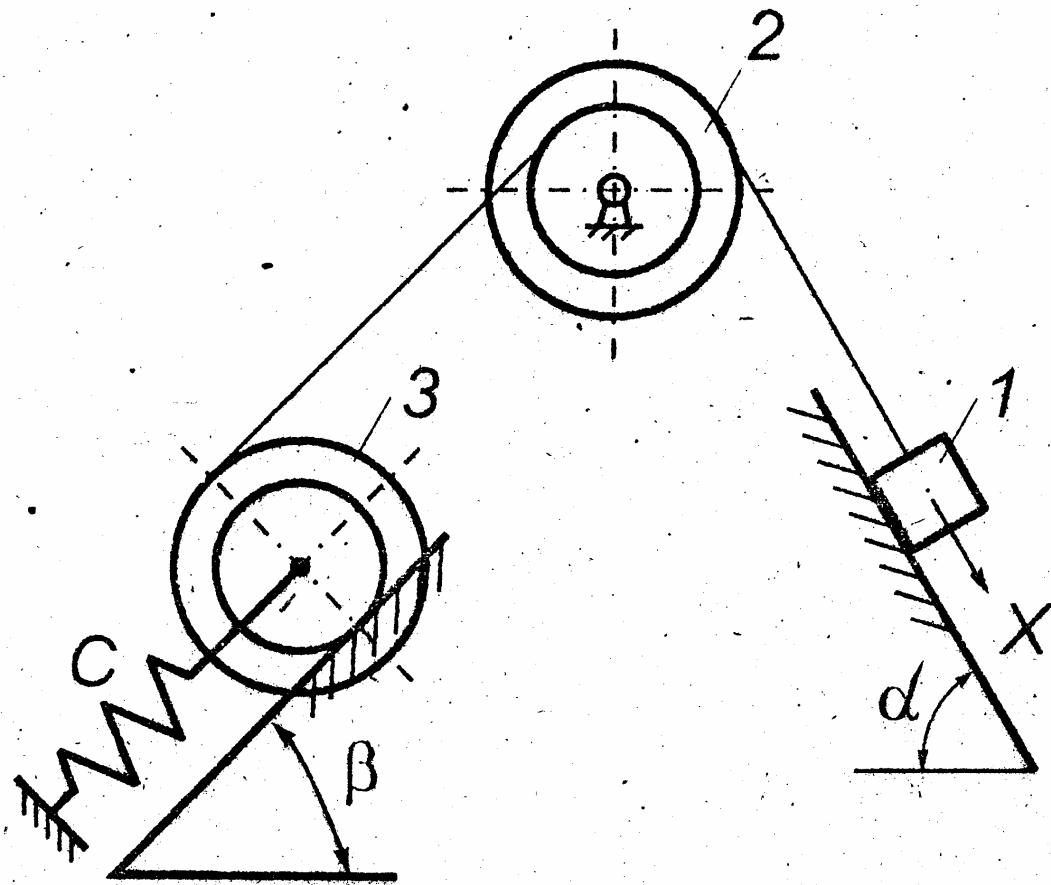
9



Данные
для вычисл.

№ вар	m_1	m_2	m_3	r_2	R_2	R_3	$\dot{\varphi}_2$	α град.	β град.	X_0 см.	\dot{X}_0 см/с
1	$4m$	m	m	r	$2r$	r	$\frac{3}{2}r$	60	30	4	8
2	$3m$	m	$\frac{m}{2}$	r	$3r$	$2r$	$2r$	45	45	2	7
3	$4m$	m	$2m$	r	$4r$	$3r$	$3r$	30	60	3	10
4	$2m$	m	$\frac{m}{2}$	r	$5r$	r	$2r$	30	45	5	0

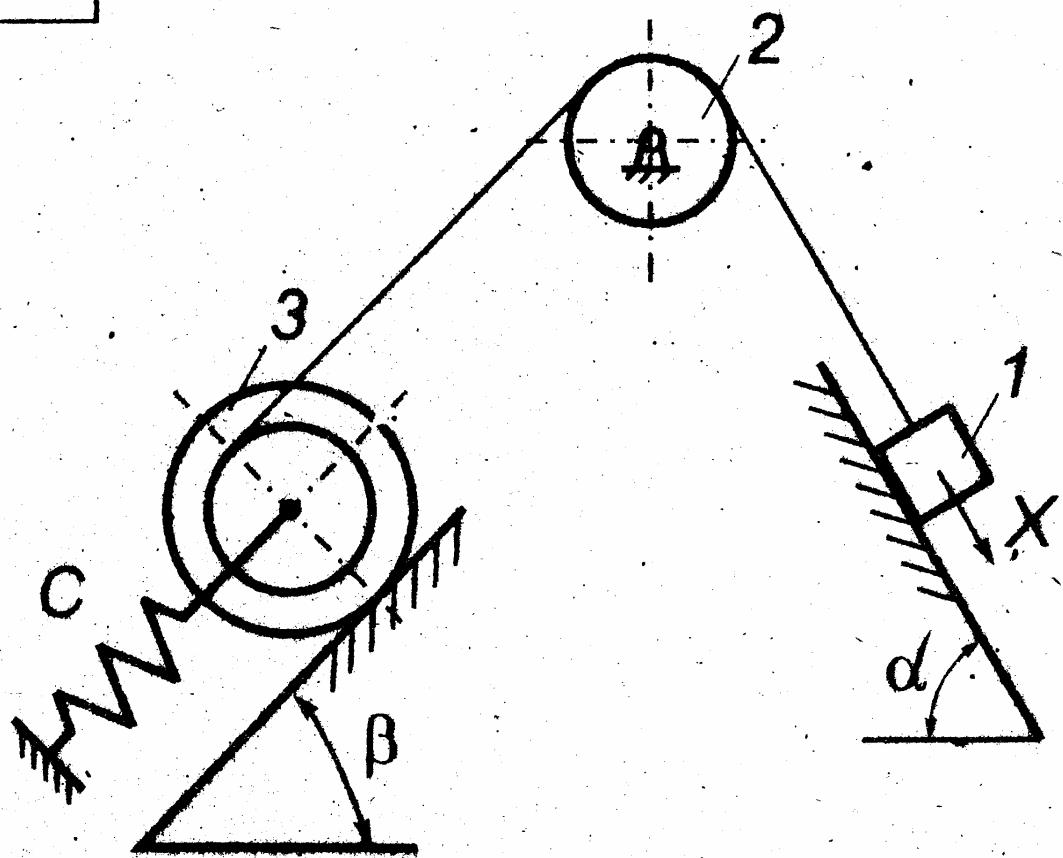
10



Данные
для вычисл.

№ вар	m_1	m_2	m_3	r_2	R_2	r_3	R_3	$\dot{\epsilon}_2$	$\dot{\epsilon}_3$	d град.	β град.	X_0 см.	\dot{X} см/с	P
1	$4m$	m	$2m$	r	$2r$	r	$3r$	$\frac{3}{2}r$	$2r$	60	30	3	4	0,1
2	$5m$	m	$3m$	r	$3r$	$\frac{3}{2}r$	$2r$	$2r$	$\frac{5}{2}r$	30	60	4	0	0,2
3	$6m$	m	$4m$	r	$\frac{3}{2}r$	$2r$	$4r$	$\frac{4}{3}r$	$\frac{5}{3}r$	45	30	5	6	0,3
4	$4m$	m	$2m$	r	$2r$	r	$2r$	$\frac{5}{4}r$	$\frac{3}{2}r$	30	45	6	0	0,4

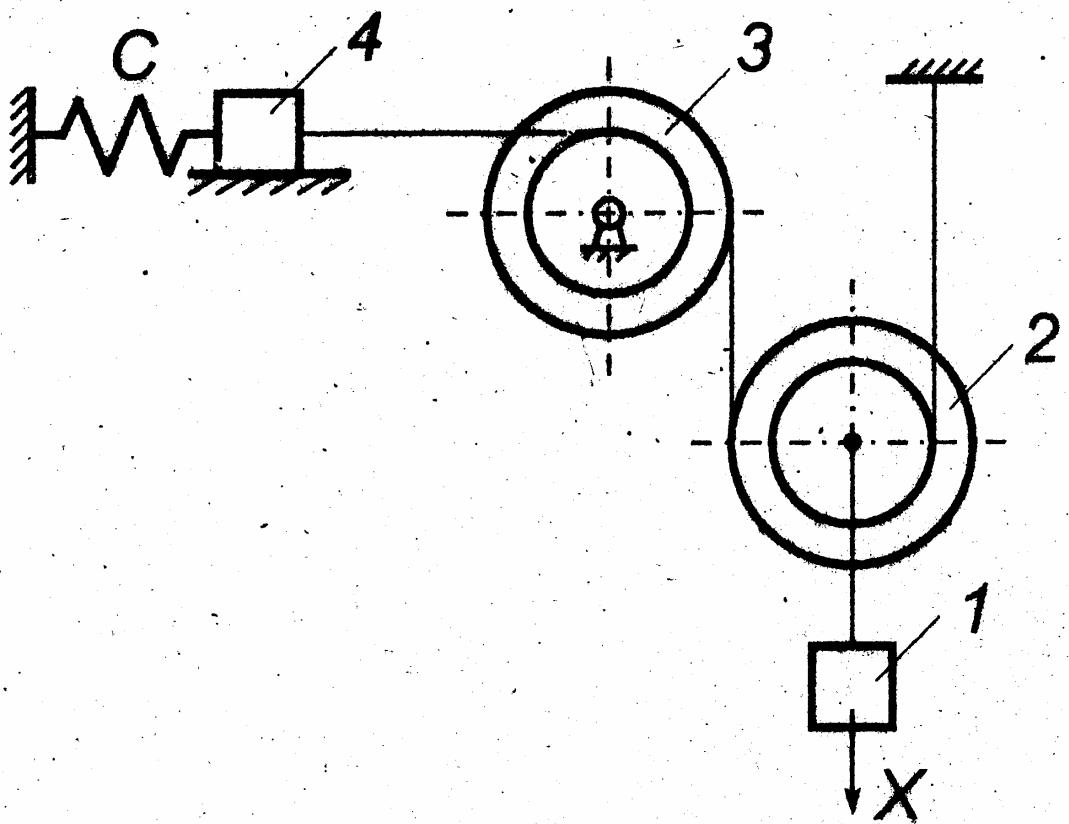
11



Данные
для вычисл.

№ вар	m_1	m_2	m_3	r_2	r_3	R_3	ϵ_3	α град.	β град.	X_0 см.	\dot{X}_0 см/с.
1	$4m$	m	$2m$	r	$2r$	$4r$	$3r$	30	60	0	10
2	$6m$	m	m	r	r	$3r$	$2r$	60	30	3	7
3	$5m$	m	$2m$	r	$3r$	$5r$	$4r$	45	30	5	0
4	$3m$	m	m	r	r	$2r$	$\frac{3}{2}r$	60	45	4	8

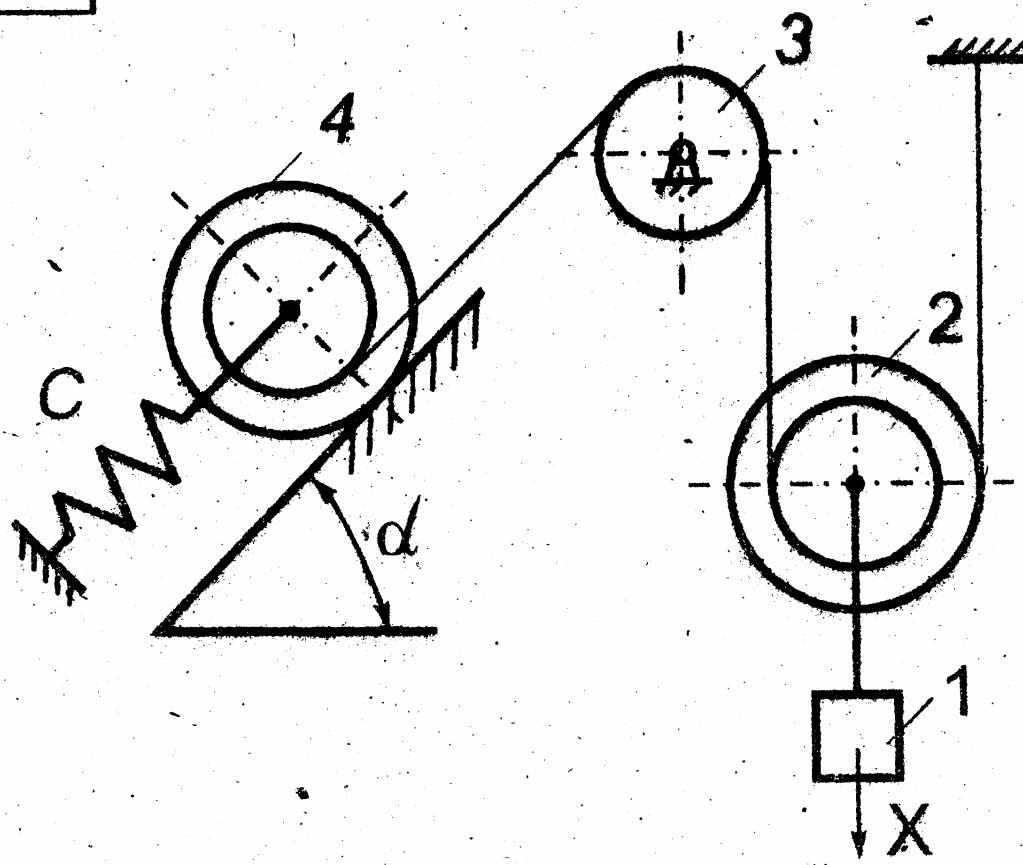
12



Данные
для выч.

№ вар	m_1	m_2	m_3	m_4	r_1	R_2	r_3	R_3	$\dot{\varphi}_2$	$\dot{\varphi}_3$	X см	\dot{X} см/с
1	$4m$	$2m$	m	m	r	$3r$	r	$2r$	$2r$	$\frac{3}{2}r$	10	0
2	$3m$	$2m$	$2m$	m	r	$2r$	$3r$	$4r$	$\frac{3}{2}r$	$\frac{5}{2}r$	9	6
3	$6m$	m	$2m$	m	r	$4r$	$3r$	$5r$	$2r$	$4r$	8	8
4	$4m$	$2m$	m	m	r	$3r$	$2r$	$4r$	$2r$	$3r$	6	10

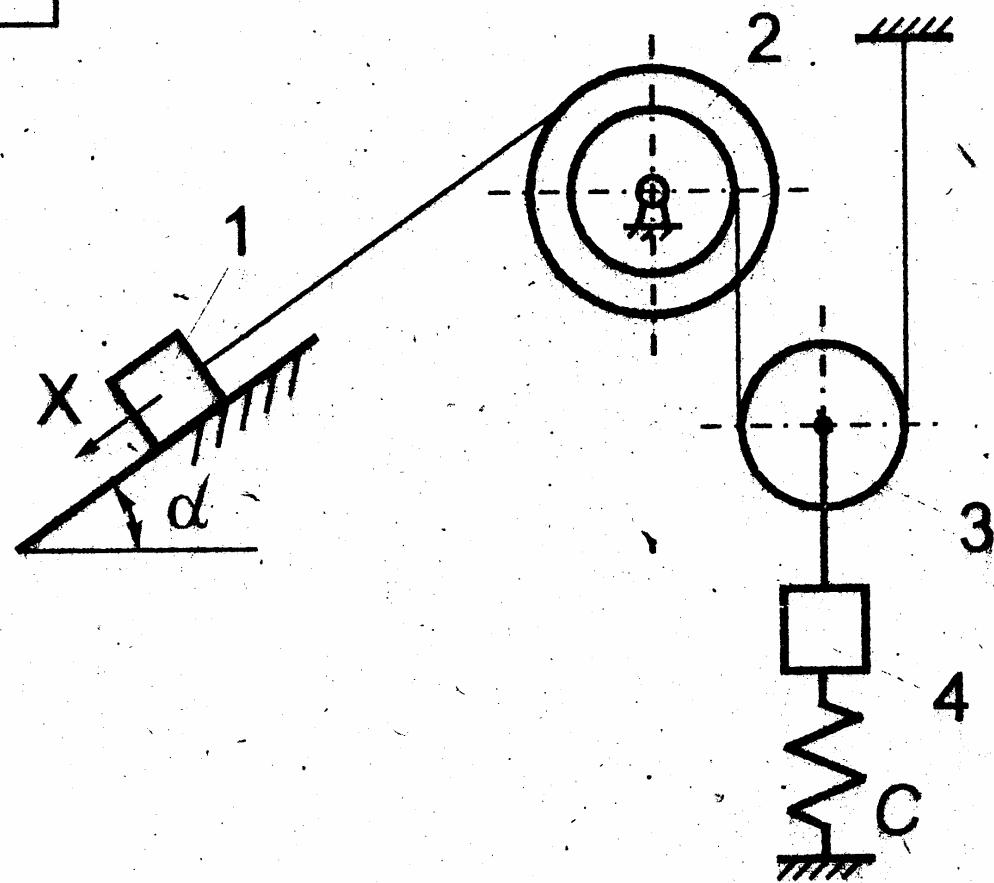
13



Данные
для вычисл.

№ вар	m_1	m_2	m_3	m_4	F_2	R_2	r_3	r_4	R_4	ℓ_2	ℓ_4	d град.	X_0 см.	X см/с
1	m	$2m$	m	$2m$	Γ	$3r$	Γ	Γ	$3r$	$2r$	$2r$	30	2	8
2	m	$3m$	$2m$	m	Γ	$2r$	$2r$	$2r$	$4r$	$\frac{3}{2}r$	$3r$	45	4	6
3	m	$2m$	$2m$	m	Γ	$4r$	Γ	Γ	$3r$	$3r$	$2r$	60	6	7
4	m	$3m$	m	$2m$	Γ	$3r$	$2r$	$2r$	$5r$	$2r$	$3r$	30	5	10

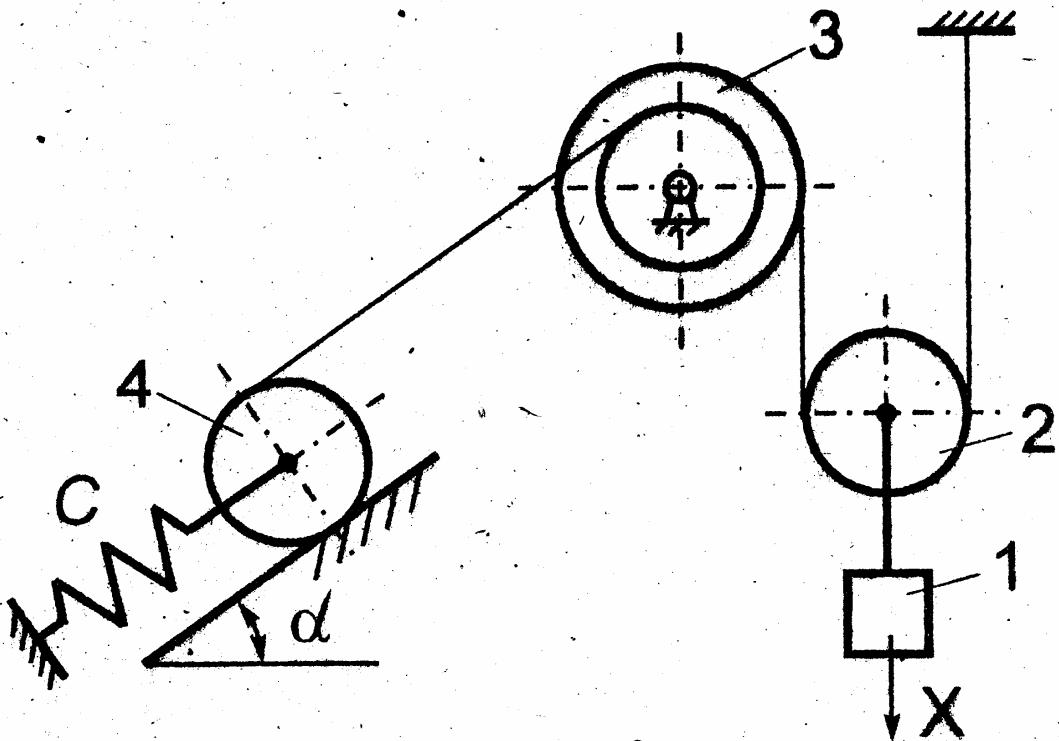
14



Данные
для вычисл.

№ вар	m_1	m_2	m_3	m_4	r_2	R_2	R_3	$\dot{\epsilon}_2$	α град.	X_0 см.	X см.
1	$3m$	m	m	m	r	$2r$	r	$\frac{3}{2}r$	30	8	10
2	$5m$	$2m$	$2m$	m	$2r$	$3r$	r	$\frac{5}{3}r$	45	7	9
3	$6m$	$3m$	m	m	r	$4r$	r	$2r$	60	9	8
4	$4m$	$2m$	m	m	$2r$	$3r$	r	$\frac{5}{3}r$	45	10	4

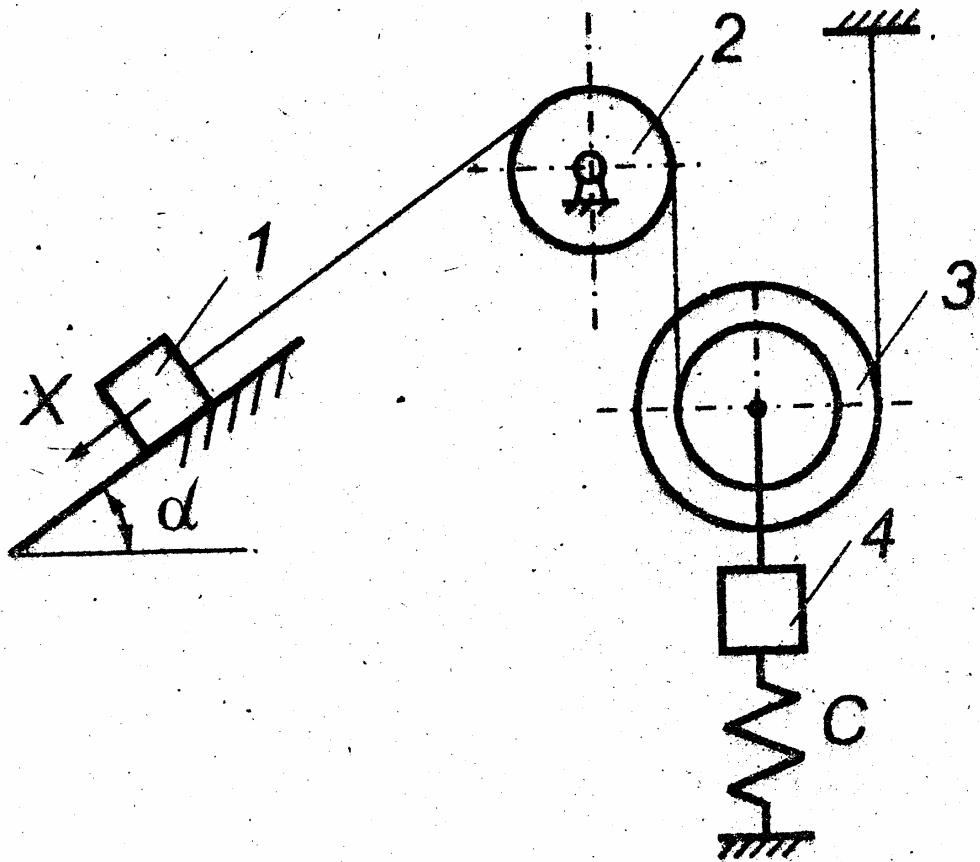
15



Данные
для вычисл.

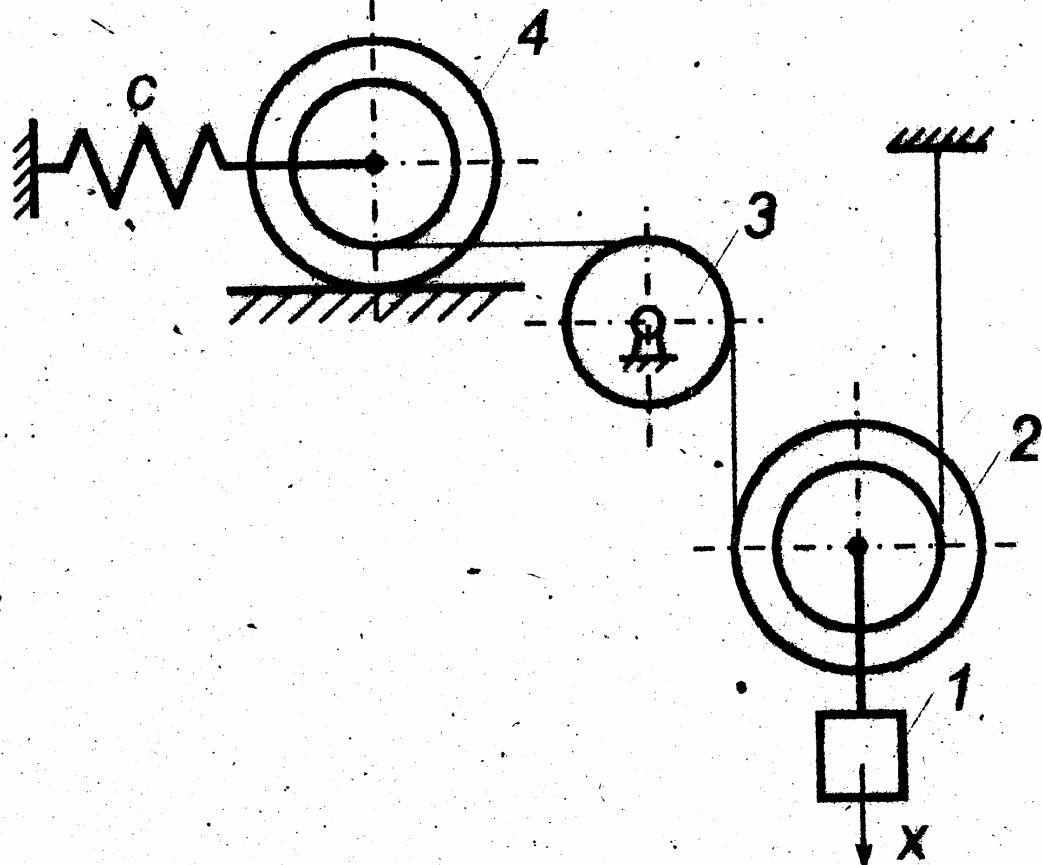
№ вар	m_1	m_2	m_3	m_4	r_2	r_3	R_3	R_4	i_3	α град.	X_0 см.	X см.
1	$3m$	m	$2m$	m	r	r	$4r$	r	$2r$	30	5	10
2	$4m$	$2m$	m	m	r	$2r$	$3r$	$2r$	$\frac{5}{2}r$	45	4	0
3	$5m$	m	$3m$	m	r	r	$2r$	r	$\frac{3}{2}r$	60	3	8
4	$6m$	m	$2m$	m	r	$3r$	$5r$	$3r$	$\frac{5}{2}r$	30	4	6

16

Данные
для вычисл.

№ вар	m_1	m_2	m_3	m_4	r_2	r_3	R_3	ℓ_3	a арсд.	X_1 см?	X_2 см?
1	$2m$	m	m	m	r	r	$3r$	$2r$	30	6	10
2	$3m$	m	$\frac{m}{2}$	$2m$	r	$2r$	$4r$	$\frac{5}{3}r$	60	4	0
3	$4m$	m	m	$\frac{m}{2}$	r	$2r$	$3r$	$\frac{5}{3}r$	45	3	6
4	$5m$	m	$\frac{3}{2}m$	m	r	r	$4r$	$3r$	30	2	8

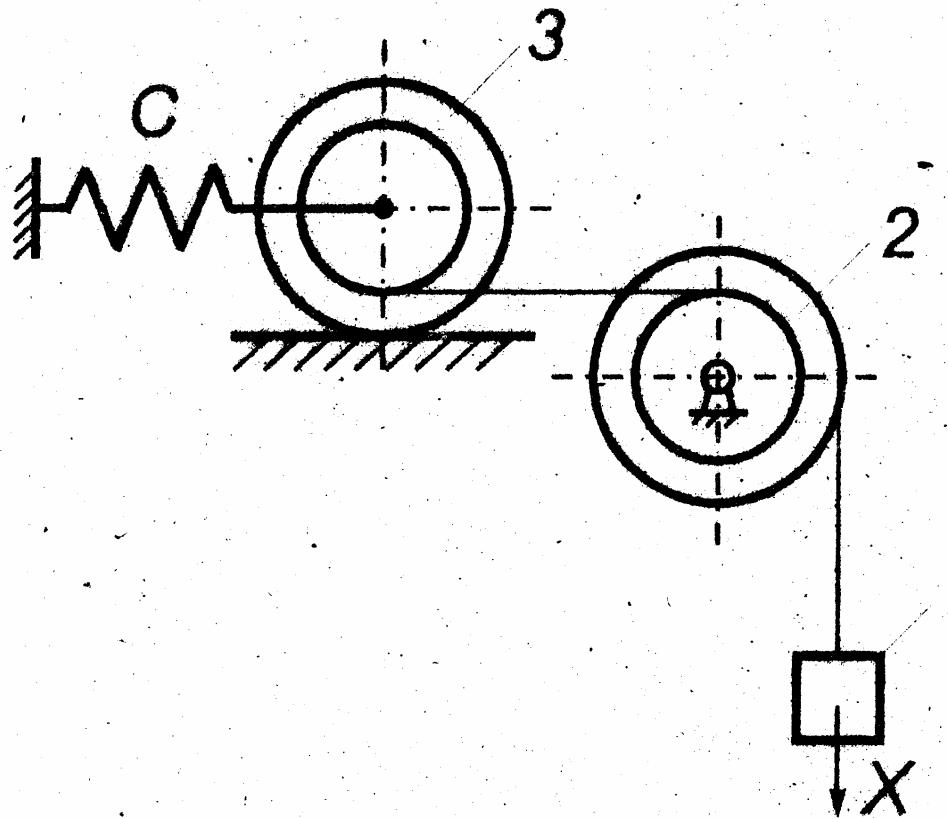
17



**Данные
для выч.**

No exp	m_1	m_2	m_3	m_4	r_2	R_2	R_3	r_4	R_4	i_2	i_4	X_0 cm.	X_{cm} cm.
1	$3m$	m	$2m$	$2m$	r	$2r$	r	$2r$	$4r$	$\frac{3}{2}r$	$3r$	0	10
2	$2m$	m	$3m$	m	r	$3r$	$2r$	r	$3r$	$2r$	$2r$	4	8
3	$4m$	$2m$	m	$3m$	r	$4r$	$2r$	$3r$	$4r$	$3r$	$\frac{7}{2}r$	5	6
4	$5m$	m	$4m$	$4m$	r	$3r$	r	$4r$	$5r$	$2r$	$\frac{9}{2}r$	6	4

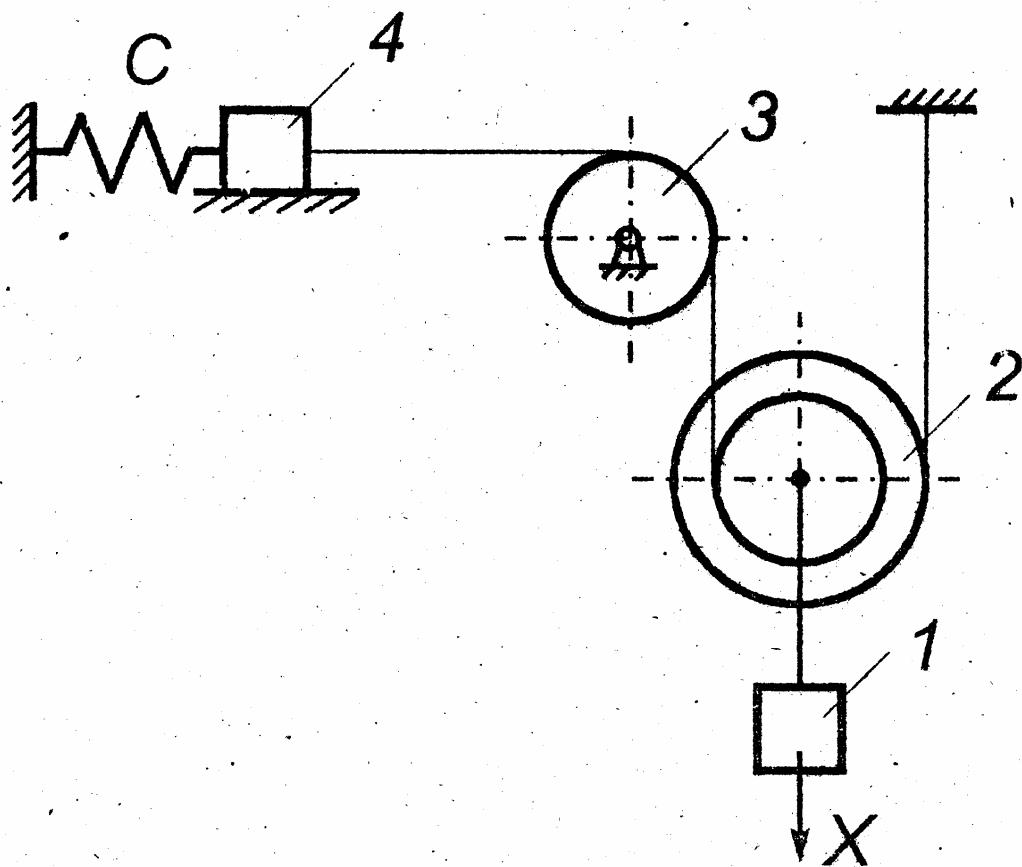
18



Данные
для выч.

№ вар	m_1	m_2	m_3	r_2	R_2	r_3	R_3	\dot{c}_2	\dot{c}_3	x_0 см	\dot{x} см/с
1	$3m$	m	$2m$	r	$2r$	$2r$	$4r$	$\frac{3}{2}r$	$3r$	6	8
2	$4m$	$2m$	$3m$	r	$3r$	r	$2r$	$\frac{3}{4}r$	$\frac{3}{2}r$	7	0
3	$5m$	$3m$	$4m$	r	$2r$	$2r$	$5r$	$\frac{3}{2}r$	$4r$	4	10
4	$6m$	m	$2m$	r	$3r$	r	$2r$	$2r$	$\frac{3}{2}r$	3	0

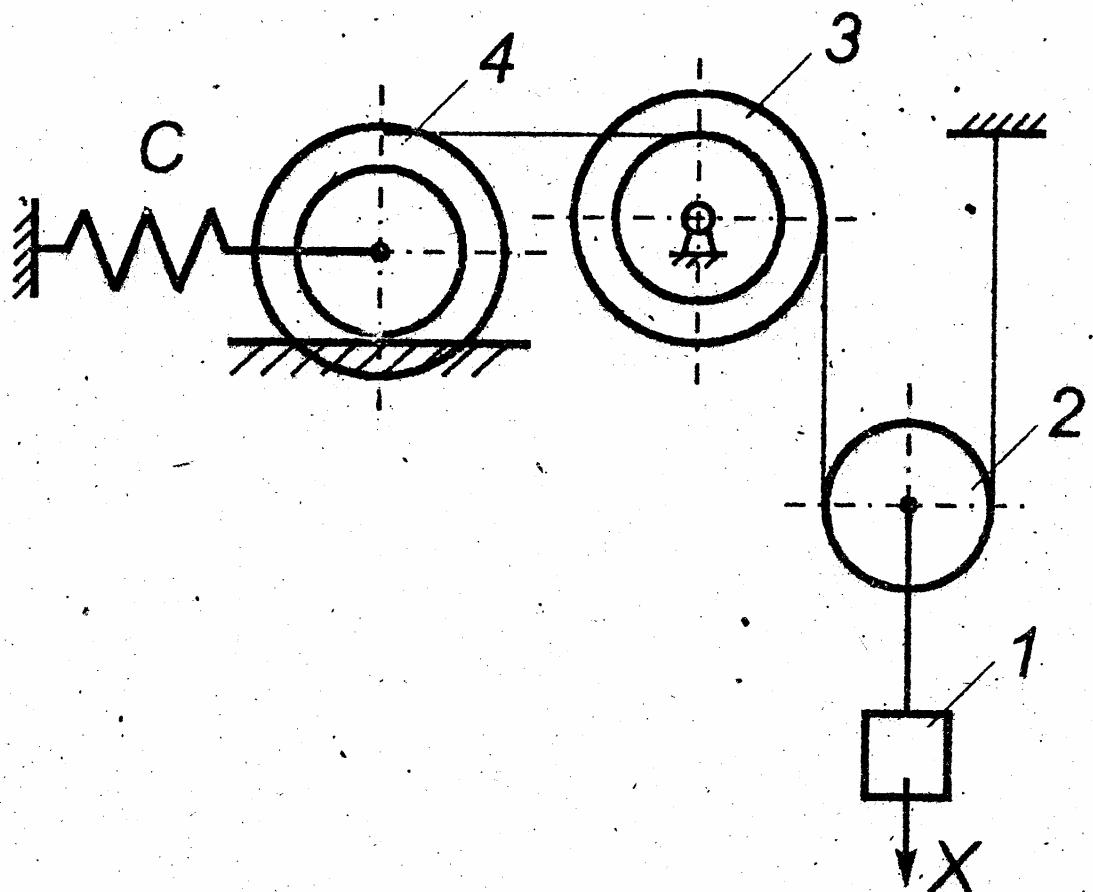
19



Данные
для выч.

№ вар	m_1	m_2	m_3	m_4	r_2	R_2	R_3	ϵ_2	X_0 см	\dot{X} см/с
1	$2m$	$3m$	m	m	r	$2r$	$3r$	$\frac{3}{2}r$	10	7
2	$4m$	$2m$	m	m	r	$3r$	$2r$	$2r$	8	10
3	$6m$	m	$2m$	m	r	$4r$	$2r$	$3r$	8	0
4	$4m$	m	$3m$	m	r	$2r$	$4r$	$\frac{3}{4}r$	6	8

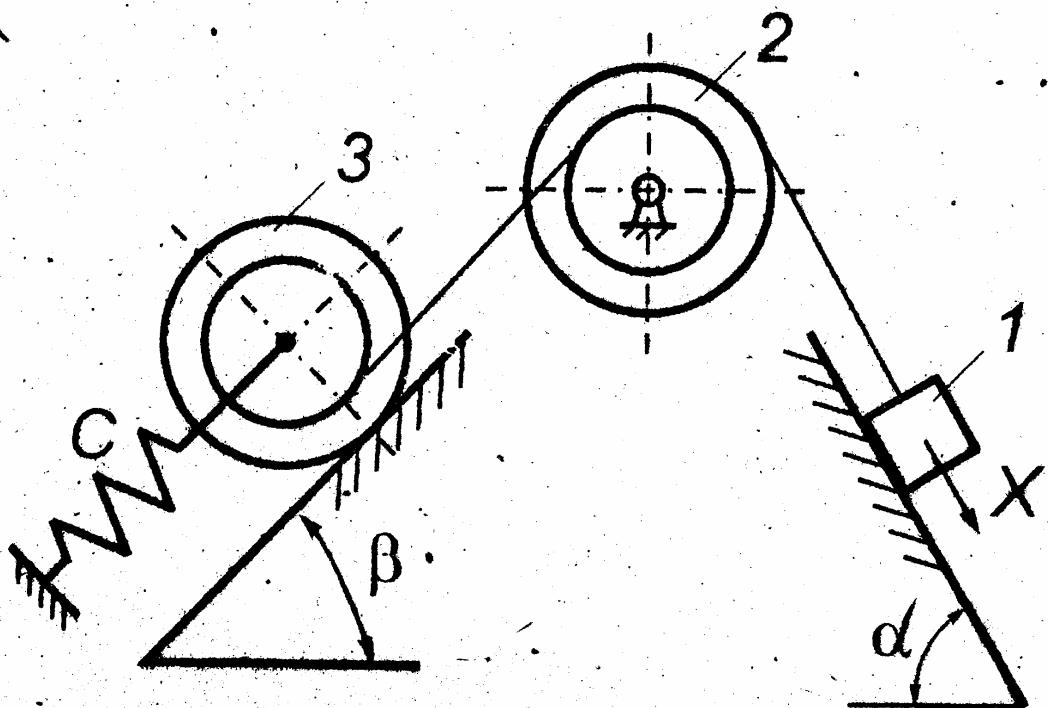
20



Данные
для выч.

№ вар	m_1	m_2	m_3	m_4	r_2	r_3	R_3	r_4	R_4	ℓ_3	ℓ_4	X_0 см.	X_0 см/с
1	$4m$	$3m$	m	m	r	r	$\frac{3}{2}r$	$\frac{1}{2}r$	$2r$	$\frac{3}{2}r$	$\frac{3}{4}r$	1	6
2	$6m$	$4m$	$2m$	$2m$	r	r	$2r$	r	$3r$	$\frac{4}{3}r$	$\frac{5}{3}r$	2	7
3	$3m$	m	$2m$	$2m$	r	r	$3r$	$\frac{3}{2}r$	$3r$	$2r$	$2r$	3	8
4	$7m$	$2m$	$4m$	m	r	r	$2r$	r	$2r$	$\frac{3}{2}r$	$\frac{4}{3}r$	4	5

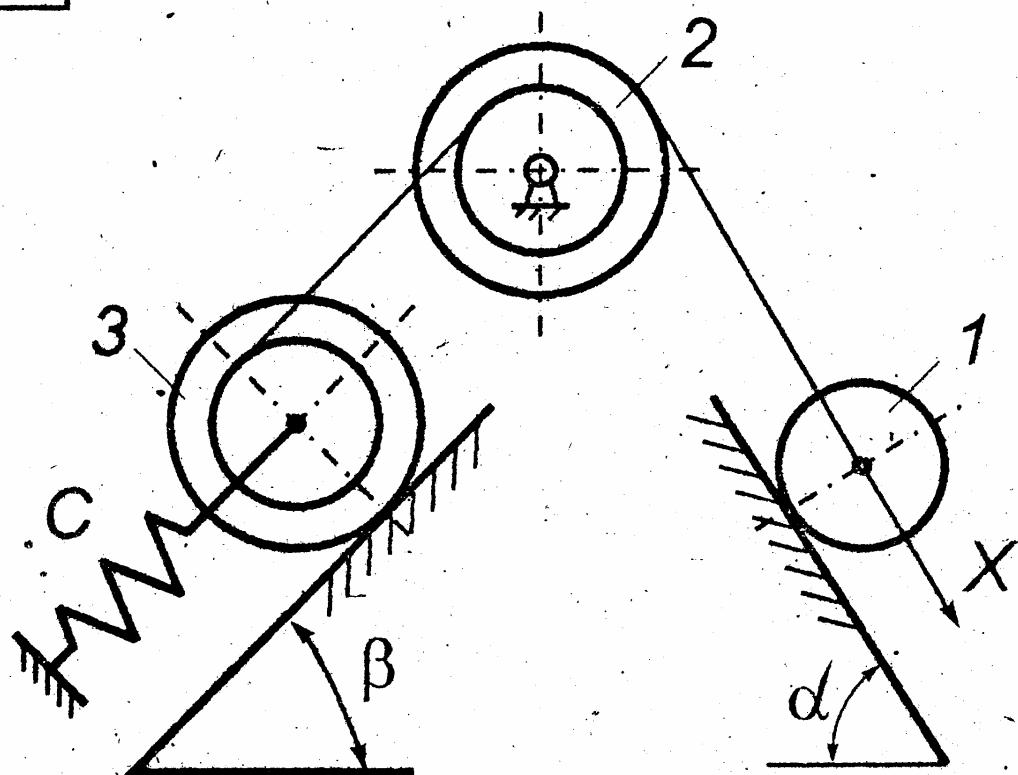
21



Данные
для вычисл.

№ вар	m_1	m_2	m_3	r_2	R_2	r_3	R_3	ℓ_2	ℓ_3	α град	β град	X_p см	X_t см
1	$4m$	m	$2m$	r	$2r$	r	$2r$	$\frac{3}{2}r$	$\frac{3}{2}r$	30	60	3	4
2	$6m$	m	$3m$	r	$3r$	$2r$	$3r$	$2r$	$\frac{5}{2}r$	60	30	4	6
3	$8m$	m	m	r	$4r$	r	$4r$	$3r$	$2r$	45	30	5	8
4	$2m$	m	m	r	$6r$	$2r$	$5r$	$2r$	$3r$	60	45	6	0

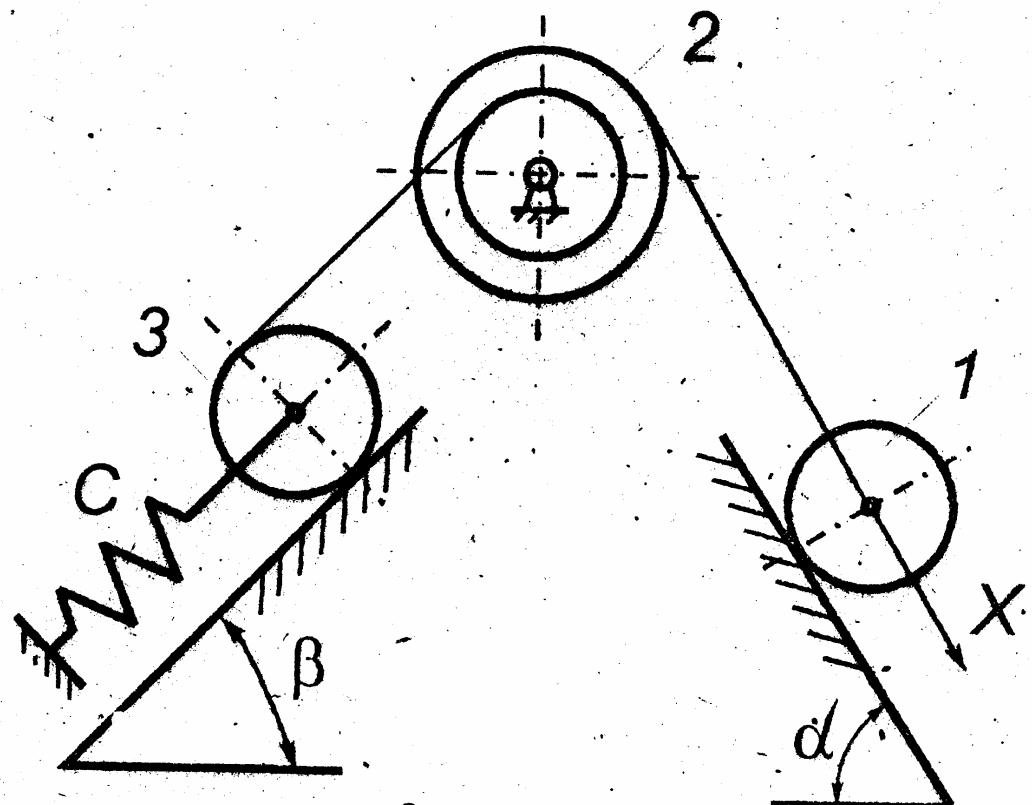
22



Данные
для вычисл.

№ вар	m_1	m_2	m_3	r_1	r_2	R_2	r_3	R_3	ζ_2	ζ_3	d град	β град	X_0 см.	\dot{X} см/с
1	$4m$	m	m	r	$2r$	$4r$	r	$3r$	$3r$	$2r$	60	30	6	8
2	$3m$	$2m$	$2m$	r	r	$2r$	$2r$	$4r$	$\frac{3}{2}r$	$3r$	30	60	4	6
3	$5m$	$2m$	$3m$	r	$2r$	$3r$	r	$3r$	$\frac{5}{2}r$	$2r$	45	30	2	0
4	$6m$	$3m$	m	r	r	$5r$	$2r$	$4r$	$3r$	$3r$	60	45	1	10

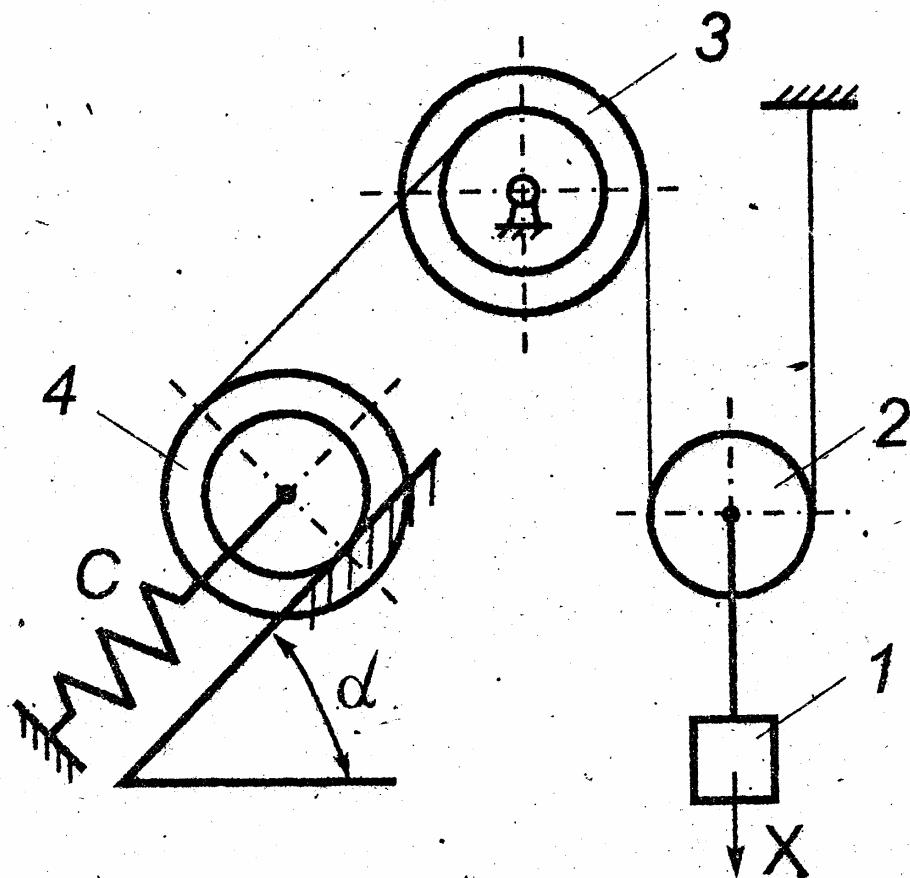
23



Данные
для вычисл.

№ вар	m_1	m_2	m_3	r_1	r_2	R_2	R_3	ζ_2	α град.	β град.	X_0 ом.	X см/с
1	$2m$	m	m	r	$4r$	$5r$	$2r$	$\frac{9}{2}r$	30	60	6	0
2	$4m$	$2m$	$2m$	r	r	$4r$	$3r$	$3r$	60	30	8	4
3	$6m$	$3m$	$2m$	r	$3r$	$4r$	$4r$	$\frac{7}{2}r$	45	30	4	8
4	$8m$	m	$3m$	r	$2r$	$6r$	$2r$	$3r$	30	45	2	10

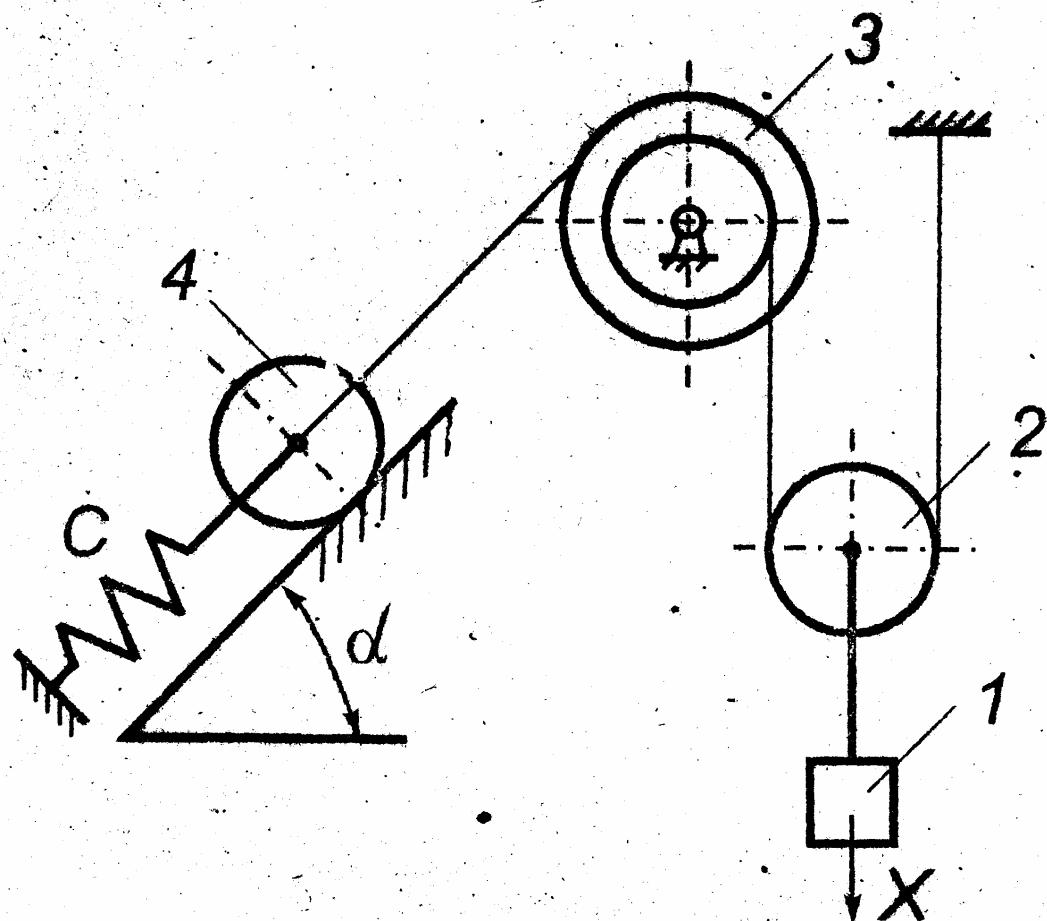
24



Данные
для вычисл.

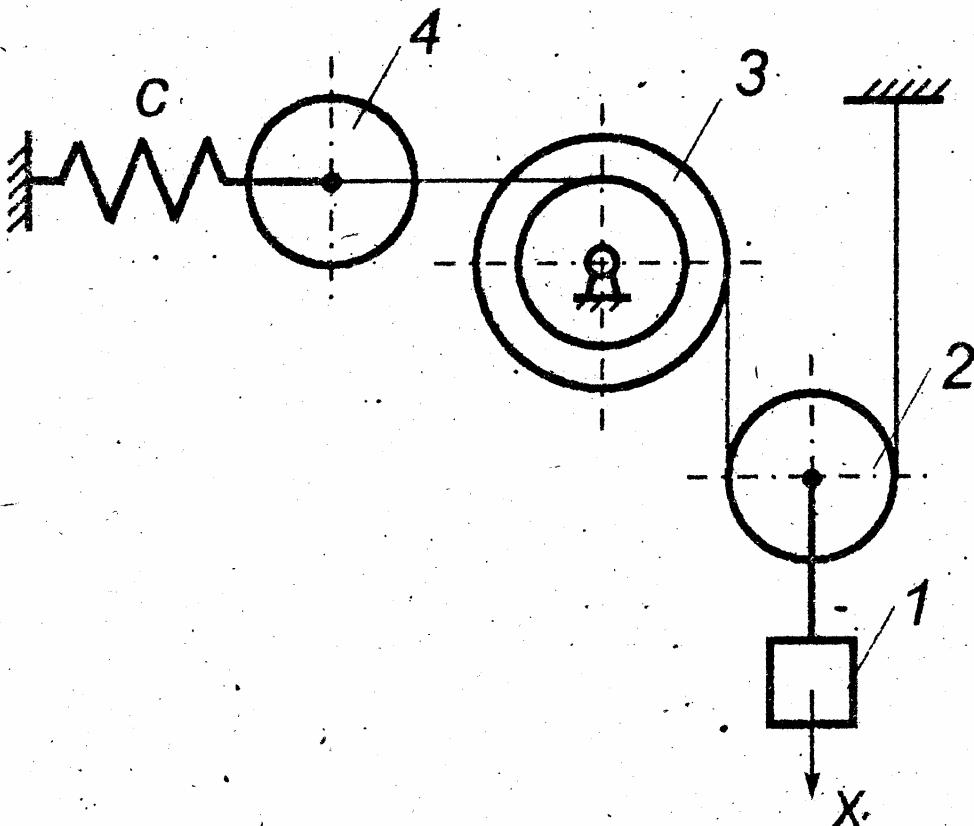
№ зар	m_1	m_2	m_3	m_4	r_2	r_3	R_3	r_4	R_4	$\dot{\epsilon}_3$	$\dot{\epsilon}_4$	d град	X_0 см	X см/с
1	$5m$	m	$2m$	m	r	r	$2r$	r	$3r$	$\frac{3}{2}r$	$2r$	30	2	5
2	$6m$	$2m$	m	$3m$	r	$2r$	$3r$	$\frac{1}{2}r$	$2r$	r	$\frac{5}{3}r$	45	3	6
3	$8m$	$3m$	$2m$	m	r	$\frac{3}{2}r$	$2r$	$2r$	$3r$	$2r$	$\frac{3}{2}r$	60	4	7
4	$3m$	m	m	$2m$	r	r	$3r$	$\frac{3}{2}r$	$2r$	$\frac{3}{4}r$	$\frac{4}{3}r$	30	5	8

25

Данные
для вычисл.

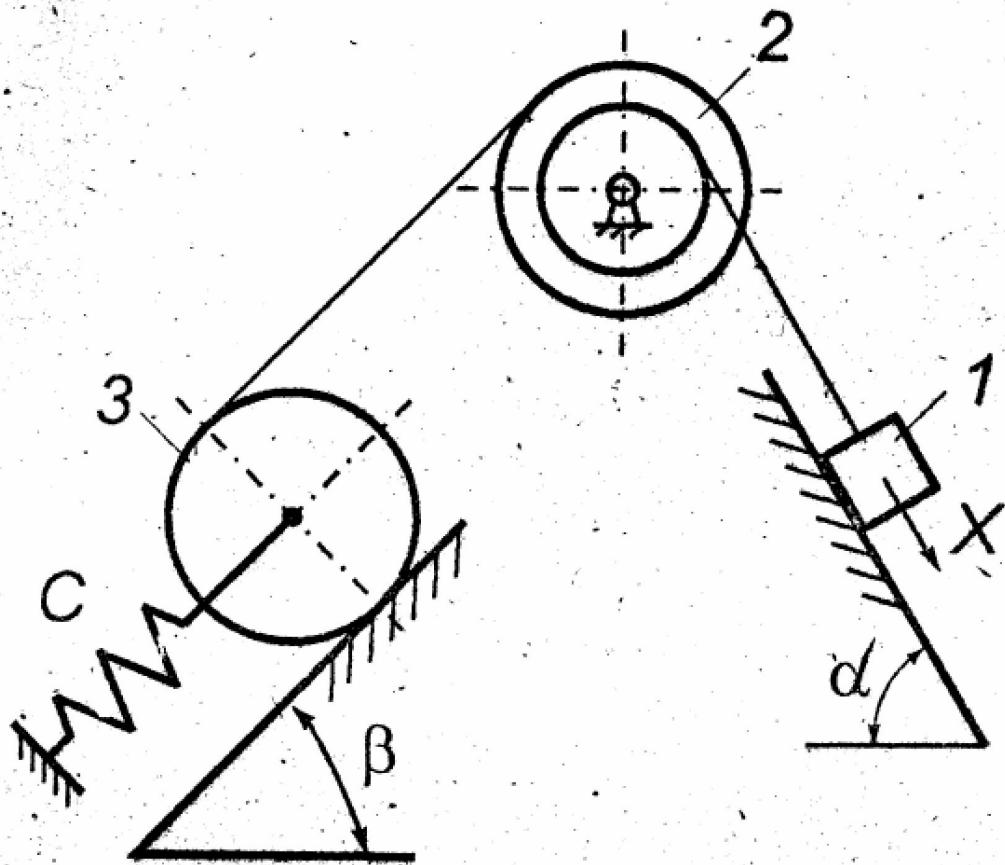
N ^o вар	m_1	m_2	m_3	m_4	r_2	r_3	R_3	r_4	ϵ_3	α аркд	X_0 см	$X_{\text{св}}$
1	$4m$	m	$2m$	m	r	r	$3r$	r	$2r$	30	5	10
2	$6m$	m	$3m$	$2m$	r	$2r$	$4r$	$\frac{3}{2}r$	$3r$	45	6	9
3	$8m$	m	$4m$	m	r	r	$2r$	$\frac{4}{3}r$	$\frac{3}{2}r$	60	7	8
4	$10m$	m	$2m$	$2m$	r	$3r$	$4r$	$2r$	$\frac{5}{3}r$	45	8	0

26

Данные
для выч.

№ вар	m_1	m_2	m_3	m_4	r_2	r_3	R_3	R_4	$\dot{\epsilon}_3$	X_0 см.	\dot{X} см/с.
1	$3m$	m	m	m	r	$2r$	$4r$	r	$3r$	5	10
2	$2m$	$2m$	$3m$	$2m$	r	r	$2r$	$3r$	$\frac{3}{2}r$	6	8
3	$4m$	m	m	$2m$	r	$2r$	$4r$	$2r$	$\frac{5}{2}r$	7	0
4	$2m$	$3m$	$2m$	m	r	r	$3r$	r	$2r$	8	6

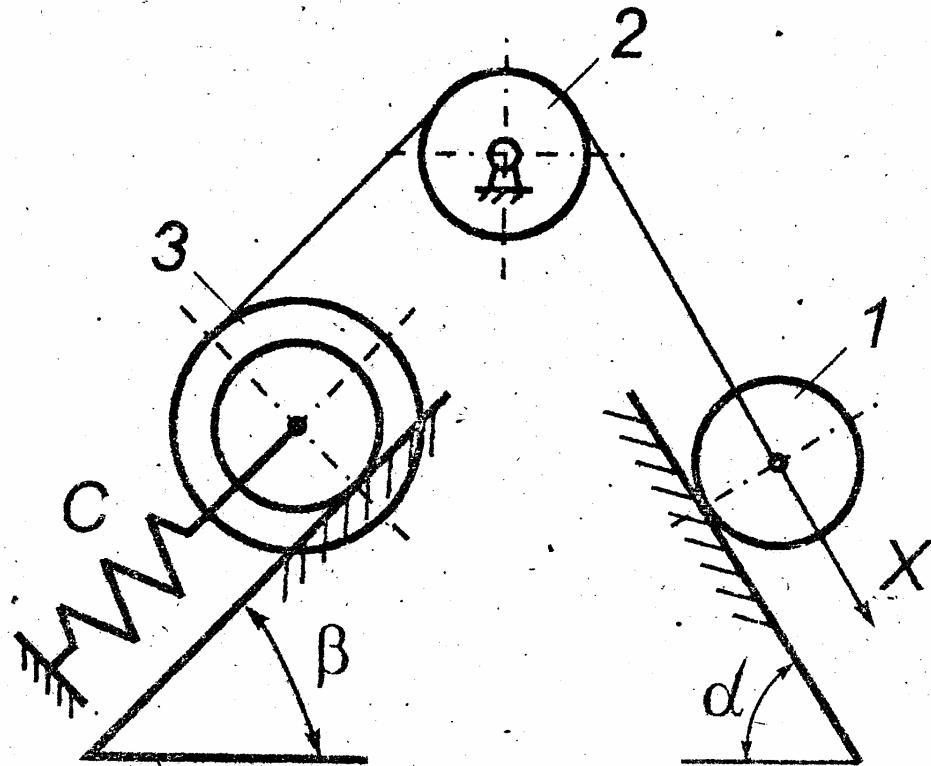
27



Данные
для вычисл.

№ вар	m_1	m_2	m_3	r_2	R_2	R_3	ξ_2	α град.	β град.	X_0 см.	$X_{\text{сн}}$
1	$8m$	m	$3m$	r	$3r$	$2r$	$2r$	60	30	8	0
2	$6m$	$2m$	$2m$	r	$4r$	$3r$	$3r$	45	30	6	8
3	$4m$	m	$2m$	r	$2r$	$4r$	$\frac{3}{2}r$	30	60	7	10
4	$2m$	m	m	r	$3r$	$4r$	$\frac{5}{3}r$	60	45	5	6

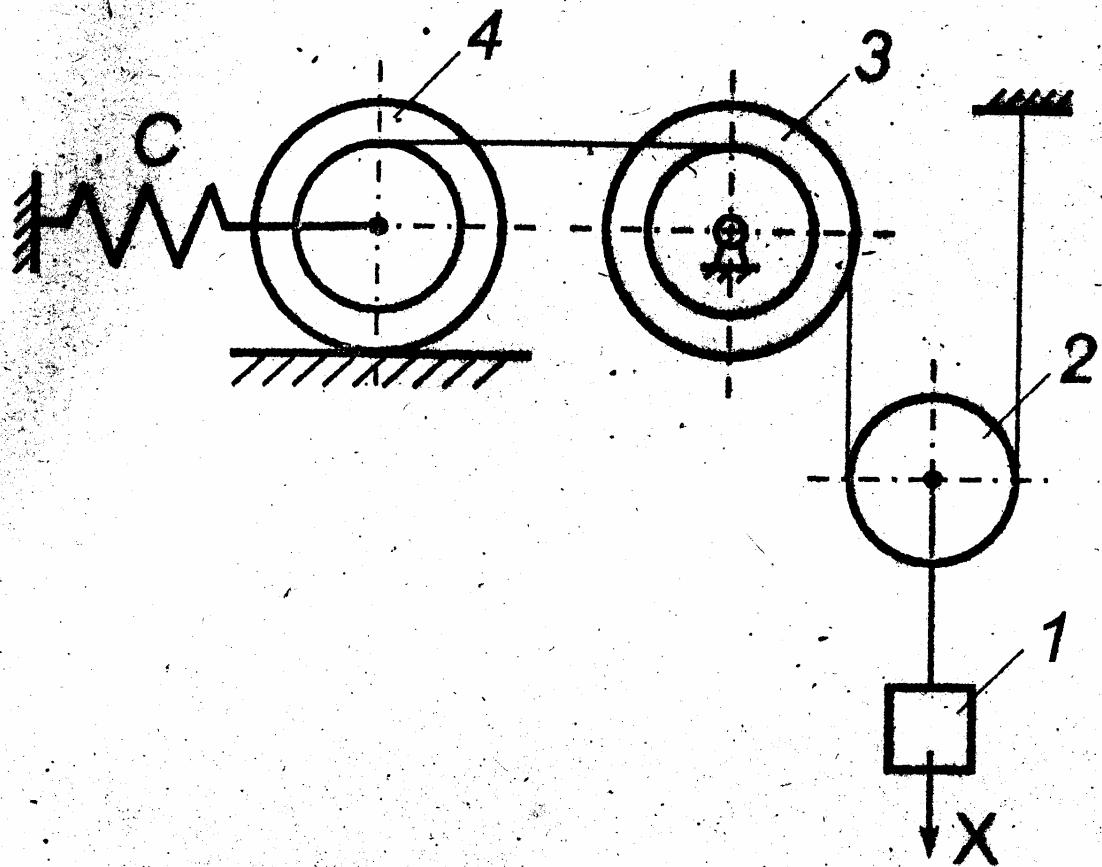
28



Данные
для вычисл.

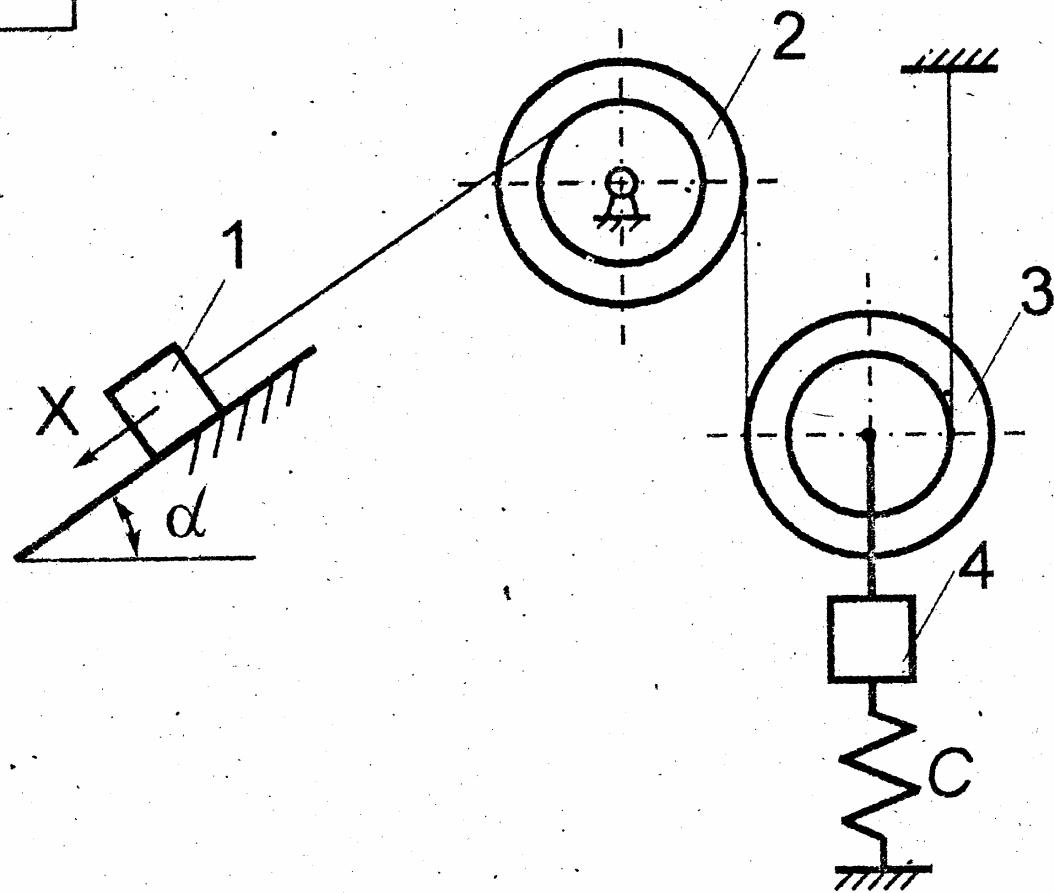
No вар	m_1	m_2	m_3	r_1	r_2	r_3	R_3	$\dot{\epsilon}_3$	α град.	V град	X_0 см	\dot{X}_0 см/с
1	$3m$	m	m	r	r	r	$2r$	$\frac{3}{2}r$	30	60	4	8
2	$4m$	m	$2m$	r	r	$\frac{3}{2}r$	$3r$	$2r$	45	45	3	7
3	$5m$	m	$3m$	r	r	$2r$	$3r$	$\frac{5}{2}r$	60	30	6	9
4	$2m$	m	m	r	r	$\frac{4}{3}r$	$4r$	$3r$	30	30	5	10

29

Данные
для выч.

№ вар	m_1	m_2	m_3	m_4	r_2	r_3	R_3	r_4	R_4	ϵ_3	ϵ_4	X_0 см.	\dot{X} см/с
1	$2m$	m	$2m$	m	r	r	$2r$	$2r$	$4r$	$\frac{3}{2}r$	$3r$	4	10
2	$4m$	m	$3m$	$2m$	r	$2r$	$4r$	r	$3r$	$3r$	$2r$	3	10
3	$3m$	m	m	$2m$	r	$3r$	$5r$	$2r$	$5r$	$4r$	$3r$	0	8
4	$5m$	m	$4m$	$3m$	r	$4r$	$6r$	r	$4r$	$5r$	$2r$	5	4

30



Данные
для вычисл.

№ вар	m_1	m_2	m_3	m_4	r_2	R_2	r_3	R_3	i_2	i_3	d град	X_0 см.	\dot{X}_0 см/с
1	$4m$	m	m	$2m$	r	$2r$	r	$3r$	$\frac{3}{2}r$	$2r$	60	3	4
2	$5m$	m	$2m$	m	r	$3r$	$\frac{1}{2}r$	$4r$	$2r$	$2r$	45	2	6
3	$3m$	m	m	$2m$	r	$4r$	$2r$	$3r$	$3r$	$\frac{5}{2}r$	30	4	8
4	$2m$	m	$\frac{m}{2}$	m	r	$3r$	r	$5r$	$2r$	$3r$	60	5	0