ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
КИНЕМАТИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ
Методические указания

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ ПО ЗАДАННЫМ УРАВНЕНИЯМ ЕЕ ДВИЖЕНИЯ..... 5
   - 1.1. Определение скорости и ускорения точки при заданном ее движении.... 5
   - 1.2. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения (задание К 1 [8])..... 6
   - 1.3. Тестовые задания 8
2. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЕЕ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ..... 11
   - 2.1. Движение точки эллипсографа 11
   - 2.2. Составление уравнений движения точки и определение ее скорости и ускорения (задание К 2 [8])..... 13
   - 2.3. Тестовые задания 16
3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ И ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИЯХ..... 19
   - 3.1. Определение скорости движения груза..... 19
   - 3.2. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях (задание К 3 [8])..... 20
   - 3.3. Тестовые задания..... 22
4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ..... 27
   - 4.1. Определение скоростей и ускорений точек при движении колеса..... 27
   - 4.2. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при плоском движении (задание К 4 [8])..... 28
   - 4.3. Тестовые задания..... 33
5. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ..... 35
   - 5.1. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки в случае вращательного переносного движения..... 35
   - 5.2. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки в случае вращательного переносного движения (задание К 5 [8])..... 39
   - 5.3. Моделирование движения кулисного механизма 42
   - 5.4. Тестовые задания..... 44
6. СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА..... 46
   - 6.1. Определение скоростей и ускорений твердого тела, катящегося без скольжения по неподвижной поверхности и имеющего неподвижную точку (задание К 8 [8])..... 46
   - 6.2. Тестовые задания..... 49

ЗАКЛЮЧЕНИЕ..... 51

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК..... 51

ВВЕДЕНИЕ

При изучении дисциплины «Теоретическая механика» рабочими программами предусмотрено самостоятельная работа студентов при изучении тем, выполнение расчетно-проектировочных и контрольных заданий по следующим разделам:

1. Статика;
2. Кинематика;
3. Динамика.

Данные методические указания содержат примеры выполнения расчетно-проектировочных и контрольных заданий раздела «Кинематика» по темам:

1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения.
2. Составление уравнений движения точки и определение ее скорости и ускорения.
3. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях.
4. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при плоском движении.
5. Определение скорости и ускорения точки при сложном ее движении.
6. Сферическое движение твердого тела.

Расчетные схемы заданий с нумерацией К 1, К 2 и т. д. соответствуют расчетным схемам и примерам выполнения заданий сборника заданий для курсовых работ по теоретической механике (раздел: Кинематика) под редакцией проф. А. А. Яблонского.

Учитывая, что номер темы в зависимости от года издания сборника может быть различным, принятая выше нумерация тем ориентирована на методические указания Манжосова В. К. и Новиковой О. Д. «Расчетно-проектировочные и контрольные задания по теоретической механике. Часть 2. Кинематика». – Ульяновск, УлГТУ. 2006. – 28 с.

В методических указаниях каждый раздел сопровождается тестовыми заданиями, которые могут быть использованы для самостоятельной работы и контроля знаний.

Методические указания составлены в соответствии с учебными программами по дисциплине «Теоретическая механика» для направлений «Машиностроительные технологии и оборудование», «Транспортные машины и транспортно-технологические комплексы», «Эксплуатация транспорта и транспортного оборудования», «Строительство».

Методические указания предназначены для студентов при изучении раздела «Кинематика», выполнении контрольных и расчетно-проектировочных заданий по данной теме, самостоятельной работе.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ ПО ЗАДАННЫМ УРАВНЕНИЯМ ЕЕ ДВИЖЕНИЯ

1.1. Определение скорости и ускорения точки при заданном ее движении

Дано: Точка M совершает колебательное движение согласно уравнениям

$$x = a\cos(2kt - e), \qquad y = b\cos kt. \tag{1.1}$$

Определить траекторию точки M. При каких значениях e траектория точки обращается в параболу? Найти скорость точки в начальный момент времени.

Решение

Для определения траектории точки надо исключить из уравнении движения время. Для этого преобразуем первое уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= a\left[\cos 2kt \cdot \cos e + \sin 2kt \cdot \sin e\right] = \\ &= a\left[\cos^2 kt \cdot \cos e - \sin^2 kt \cdot \cos e + 2\sin kt \cdot \cos kt \cdot \sin e\right]. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Из второго уравнения находим

$$\cos kt = \frac{y}{b}, \qquad \sin kt = \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Подставляя **эти** значения в уравнение (1.2), получаем уравнение траектории точки M

$$\frac{x}{a} = (2\frac{y^2}{b^2} - 1)\cos e + 2\frac{y}{b}\sin e\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}. \tag{1.3}$$

Из уравнений (1.1) следует, что при любых значениях e координаты x и y не превышают соответственно значений $\pm a$ и $\pm b$. Таким образом, траектории точки М вписываются в прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$. Уравнение (1.3) обращается в уравнение параболы при $e_1 = 0$ и $e_2 = \pi$:

$$y^2 = \frac{b^2}{2}(1 \pm \frac{x}{a}).$$

Переходим к определению скорости и ускорения точки M. Проекции этой скорости равны первым производным от координат по времени, а ускорений – вторым производным от координат по времени:

$$v_x = \dot{x} = -2ak\sin(2kt - e), \qquad a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -4ak^2 \cdot \cos(2kt - e),$$

$$v_y = \dot{y} = -bk\sin kt, \qquad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = -bk^2 \cdot \cos kt.$$

Находим значение этих проекций в начальный момент времени, полагая $t = 0$,

$$v_{x0} = 2ak\sin e, \qquad a_{x0} = -4ak^2\cos e, \qquad v_{y0} = 0, \qquad a_{y0} = -bk^2. \tag{1.4}$$

Таким образом, в начальный момент времени скорость точки направлена по оси *x*, а ее модуль определяется по формуле

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \qquad v_0 = 2ak\sin e. \tag{1.5}$$

Ускорение точки в начальный момент времени направлено по оси *x*, а ее модуль определяется по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \qquad a_0 = k^2\sqrt{16a^2\cos^2 e + b^2}. \tag{1.6}$$

Модуль касательного ускорения точки

$$a_\tau = |dv/dt| \quad \text{или} \quad a_\tau = |\vec{v}\cdot\vec{a}/v|; \qquad a_\tau = \left|\left(v_x a_x + v_y a_y\right)/v\right|.$$

Тогда модуль касательного ускорения в начальный момент времени будет равен

$$a_{\tau 0} = -4ak^2\cos e.$$

Модуль нормального ускорения можно определить и следующим образом:

$$a_n = \sqrt{a^2 + a_\tau^2}; \qquad a_{n0} = \sqrt{a^2 + a_\tau^2} = k^2\sqrt{32a^2\cos^2 e + b^2}.$$

После того, как найдено нормальное ускорение, радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке определяется из выражения

$$\rho = v^2/a_n. \qquad \rho = \frac{4a^2\sin^2 e}{\sqrt{32a^2\cos^2 e + b^2}}.$$

1.2. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения (задание К 1 [8])

Дано: уравнения движения точки вида

$$x = 4t;\ y = 16t^2 - 1;\ (x \text{ и } y - \text{в см}). \tag{1.7}$$

По заданным уравнениям движения точки *M* установить вид ее траектории и для момента времени $t = t_1$ ($t_1 = 0{,}5$ с) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории в соответствующей точке

Решение

Уравнения движения (1.7) можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Чтобы получить уравнения траектории в координатной форме, исключим время из уравнений (1.7).

Получаем $y = x^2 - 1$, т. е. траекторией точки является парабола, показанная на рис. 1.1.

Вектор скорости точки

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}. \tag{1.8}$$

Вектор ускорения

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}\,.$$

Здесь $\vec{i}, \vec{j}$ — орты осей x и y; v_x, v_y, a_x, a_y – проекции скорости и ускорения точки на оси координат.

Найдем их, дифференцируя по времени уравнения движения (1.7):

$$v_x = \dot{x} = 4\ \text{см/с};\quad a_x = \ddot{x} = 0;$$

$$v_y = \dot{y} = 32t;\quad a_y = \ddot{y} = 32\ \text{см/с}^2. \qquad (1.9)$$

По найденным проекциям определяются модуль скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad (1.10)$$

и модуль ускорения точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\,. \qquad (1.11)$$

Модуль касательного ускорения точки

$$a_\tau = \left|dv/dt\right|, \qquad (1.12)$$

или $a_\tau = \left|\vec{v}\cdot\vec{a}/v\right|$; $a_\tau = \left|\left(v_x a_x + v_y a_y\right)/v\right|$,

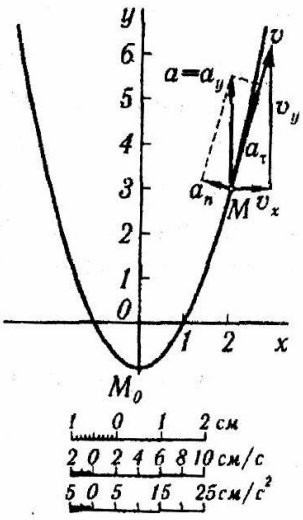


Рис. 1.1. Траектория, скорость и ускорение точки M

где dv/dt выражает проекцию ускорения точки на направление ее скорости. Знак «+» при dv/dt означает, что движение точки ускоренное, направления a_τ и v совпадают; знак «–», что движение замедленное.

Модуль нормального ускорения точки

$$a_n = v^2/\rho\,. \qquad (1.13)$$

Если радиус кривизны траектории ρ в рассматриваемой точке неизвестен, то a_n можно определить по формуле

$$a_\tau = \left|\vec{v}\times\vec{a}/v\right|. \qquad (1.14)$$

При движении точки в плоскости формула (1.14) принимает вид

$$a_n = \left|\left(v_x a_y + v_y a_x\right)/v\right|. \qquad (1.15)$$

Модуль нормального ускорения можно определить и следующим образом:

$$a_n = \sqrt{a^2 + a_\tau^2}\,. \qquad (1.16)$$

После того, как найдено нормальное ускорение по формулам (1.14) или (1.16), радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке определяется из выражения

$$\rho = v^2/a_n\,. \qquad (1.17)$$

Результаты вычислений по формулам (1.9)–(1.12), (1.14) и (1.17) для заданного момента времени $t_1 = 0{,}5$ с приведены в табл. 1.1.

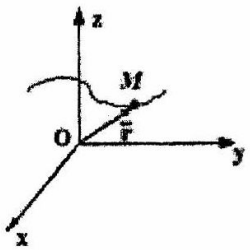
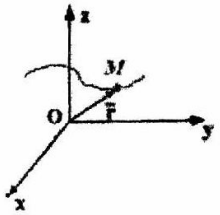
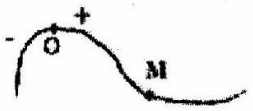
Таблица 1.1

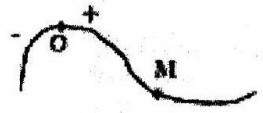
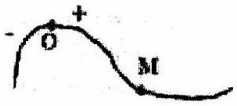
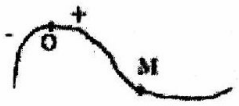
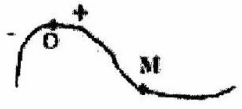
Координаты, см		Скорость, см/с			Ускорение, см/с^2					Радиус кривизны, см
x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a	a_τ	a_n	ρ
2,0	3,0	4,0	16,0	16,5	0	32,0	32,0	31,0	7,8	35,0

На рис. 1.1 показано положение точки M в заданный момент времени. Вектор $\vec{v}$ строим по составляющим $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_y$, причем этот вектор должен по направлению совпадать с касательной к траектории. Вектор $\vec{a}$ строим по составляющим $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_y$ и затем раскладываем на составляющие $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$. Совпадение величин a_τ и a_n, найденных из чертежа, с их значениями, полученными аналитически, служит контролем правильности решения.

1.3. Тестовые задания

К1 Уравнения $\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t) \end{cases}$ используются при способе задания движения точки….	Варианты ответов: 1) векторном 2) естественном 3) координатном (в цилиндрической системе координат) 4) координатном (в полярной системе координат) 5) координатном (в декартовой системе координат)
К2 Уравнения $\begin{cases} \rho = f_1(t), \\ \varphi = f_2(t), \end{cases}$ используются при способе задания движения точки….	Варианты ответов: 1) векторном 2) естественном 3) координатном (в цилиндрической системе координат) 4) координатном (в полярной системе координат) 5) координатном (в декартовой системе координат)
К3 Уравнения $\begin{cases} R = f_1(t), \\ \varphi = f_2(t), \\ \theta = f_3(t) \end{cases}$ используются при способе задания движения точки….	Варианты ответов: 1) векторном 2) естественном 3) координатном (в цилиндрической системе координат) 4) координатном (в полярной системе координат) 5) координатном (в декартовой системе координат)

К4 Уравнения $\begin{cases}\rho = f_1(t),\\ \varphi = f_2(t),\\ z = f_3(t)\end{cases}$ используются при способе задания движения точки….	Варианты ответов: 1) векторном 2) естественном 3) координатном (в цилиндрической системе координат) 4) координатном (в полярной системе координат) 5) координатном (в декартовой системе координат)
К5 Уравнения $\begin{cases}y = f_1(t),\\ z = f_2(t),\end{cases}$ используются при способе задания движения точки….	Варианты ответов: 1) векторном 2) естественном 3) координатном (в цилиндрической системе координат) 4) координатном (в полярной системе координат) 5) координатном (в декартовой системе координат)
К16  **К16** Материальная точка М движется по закону $\bar{r} = 2t\,\bar{i} - \cos \pi t\,\bar{j} + e^4 t\,\bar{k}$. Тогда ускорение точки будет направлено….	Варианты ответов: 1) параллельно плоскости XY 2) параллельно оси z 3) перпендикулярно оси y 4) перпендикулярно плоскости XY 5) параллельно оси y
К17  Материальная точка М движется по закону $\bar{r} = 7e^{2t}\,\bar{i} + 5\bar{j} + \sqrt{t+1}\,\bar{k}$. Тогда ускорение точки будет направлено….	Варианты ответов: 1) в плоскости YZ 2) параллельно оси x 3) параллельно плоскости XZ 4) параллельно оси y 5) перпендикулярно плоскости XZ
К6  Движение точки по известной траектории $OM = \sigma$ задано уравнением $\sigma = 6t^2 + 4t - 5$ (м). В момент времени $t = 1$ с нормальное ускорение равно a_n = 8 м/с^2, радиус кривизны траектории ρ (в метрах) равен…	Варианты ответов: 1) 3,2 2) 15 3) 2 4) 32 5) 20

К7  Движение точки по известной траектории $OM = \sigma$ задано уравнением $\sigma = 5 - 4t + 3t^3$ (м). В момент времени $t = 1$ с нормальное ускорение равно a_n = 10 м/с^2, радиус кривизны траектории ρ (в метрах) равен…	Варианты ответов: 1) 10 2) 25,6 3) 2,5 4) 5 5) 8
К8  Движение точки по известной траектории $OM = \sigma$ задано уравнением $\sigma = 4 + t^2 - t^3$ (м). Скорость точки (в м/с) в момент времени $t = 1$ с равна…	Варианты ответов: 1) – 1 2) 3 3) – 6 4) 4 5) – 4
К9 Движение точки по известной траектории $OM = \sigma$ задано уравнением $\sigma = 7 - 8t + 2t^3$ (м). Скорость точки (в м/с) в момент времени $t = 1$ с равна…	Варианты ответов: 1) 5 2) 1 3) 4 4) – 2 5) – 4
К10 Движение точки по известной траектории $OM = \sigma$ задано уравнением $\sigma = t^2 - 4t - 5$ (м).  В момент времени $t = 1$ с нормальное ускорение равно a_n = 2 м/с^2, радиус кривизны траектории ρ (в метрах) равен…	Варианты ответов: 1) 4,5 2) 2 3) 1,5 4) 1 5) 4
К11  Движение точки по известной траектории $OM = \sigma$ задано уравнением $\sigma = 6 + 5t - t^2$ (м). В момент времени $t = 1$ с нормальное ускорение равно a_n = 5 м/с^2, радиус кривизны траектории ρ (в метрах) равен…	Варианты ответов: 1) 0,6 2) 3,2 3) 0,8 4) 1,8 5) 2

2. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЕЕ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ

2.1. Движение точки эллипсографа

Дано: Линейка эллипсографа $AB=l$ скользит концом A по оси абсцисс и концом B по оси ординат (рис. 2.1). Линейка приводится в движение кривошипом $OC = 0{,}5l$, шарнирно прикрепленным в ее середине. Расстояния $AM = d$, $BM = b$ известны. Угол φ между осью абсцисс и кривошипом изменяется пропорционально времени $\varphi = kt$.

Найти уравнения движения точки M эллипсографа и уравнение ее траектории. Определить также радиус кривизны траектории точки M, ее скорость, касательное, нормальное и полное ускорения при произвольном положении механизма и, в частности, в моменты времени $t_1 = 0$ и $t_2=\pi/(2k)$

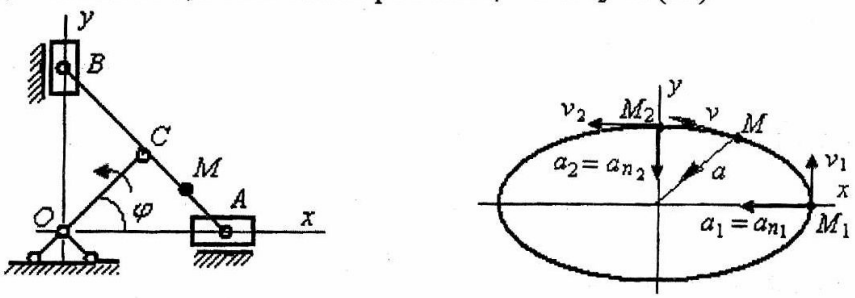


Рис. 2.1. Схема эллипсографа и траектории точки M

Решение

Для составления уравнений движения точки M рассмотрим треугольник OAC. Он равнобедренный: $OC=AC=0{,}5l$, следовательно, $\angle COA = \angle CAO = \varphi = kt$. Тогда координаты точки M будут

$$x = BM\cos\varphi = b\cos kt, \quad y = AM\sin\varphi = d\sin kt \qquad (2.1)$$

или в векторном виде

$$r = xi + yj = b\cos kt\cdot i + d\sin kt\cdot j,$$

где i, j – орты осей координат x, y. Этими равенствами определяются уравнения движения точки M.

Для нахождения траектории точки представим уравнения движения в виде

$$\frac{x}{b} = \cos kt, \qquad \frac{y}{d} = \sin kt,$$

возведем эти равенства в квадрат и сложим их:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1.$$

Таким образом, траектория точки M – эллипс с полуосями b, d.

Для определения скорости точки M вычисляем первые производные от координат по времени, равные проекциям скорости точки на соответствующие

оси координат:

$$v_x = \dot{x} = -k\sin kt, \qquad v_y = \dot{y} = dk\cos kt.$$

Модуль скорости определяется формулой

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = k\sqrt{b^2\sin^2 kt + d^2\cos^2 kt}. \tag{2.2}$$

Направляющие косинусы вектора скорости будут

$$\cos(\vec{v}, x) = \frac{v_x}{v} = \frac{-b\sin kt}{\sqrt{b^2\sin^2 kt + d^2\cos^2 kt}},$$

$$\cos(\vec{v}, y) = \frac{v_y}{v} = \frac{d\cos kt}{\sqrt{b^2\sin^2 kt + d^2\cos^2 kt}}.$$

В векторном виде скорость может быть представлена так:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = -bk\sin kt\cdot\vec{i} + dk\cos kt\cdot\vec{j}.$$

Находим проекции ускорения на оси координат, вычисляя первые производные по времени от проекций скорости или вторые производные по времени от координат точки:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -bk^2\cos kt, \qquad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = -dk^2\sin kt. \tag{2.3}$$

Модуль ускорения определится по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = k^2\sqrt{b^2\cos^2 kt + d^2\sin^2 kt}.$$

Направление ускорения может быть найдено путем сопоставления уравнений движения точки (2.1) и формул, определяющих проекции ускорения на оси координат (2.3). Последние могут быть представлены в виде

$$a_x = -k^2 x, \qquad a_y = -k^2 y.$$

Таким образом,

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = -k^2(x\vec{i} + y\vec{j}) = -k^2\vec{r}.$$

Следовательно, ускорение точки M направлено по радиусу-вектору, проведенному из M в O, и по модулю прямо пропорционально расстоянию точки M от начала координат. Проекция ускорения на касательную определится как производная от проекции скорости на касательную по времени (в данном случае $v_\tau = v$)

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{k^2(b^2 - d^2)\sin kt\cos kt}{\sqrt{b^2\sin^2 kt + d^2\cos^2 kt}}.$$

Но модуль полного ускорения связан с касательным и нормальным ускорениями зависимостью

$$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2 .$$

Теперь, после несложных преобразований, найдется модуль нормального ускорения точки M

$$a_n = \sqrt{a^2 + a_\tau^2} = \frac{k^2 db}{\sqrt{d^2 \cos^2 kt + b^2 \sin^2 kt}} . \qquad (2.4)$$

Зная модуль нормального ускорения точки (2.4) и ее скорость (2.2), находим радиус кривизны траектории

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(d^2 \cos^2 kt + b^2 \sin^2 kt)^{3/2}}{db} .$$

Пользуясь полученными формулами, определяющими основные кинематические величины в любой момент времени, находим их значения (табл. 2.1):

Таблица 2.1

Кинематические величины	$kt_1=0$	$kt_2=\pi/2$	Кинематические величины	$kt_1=0$	$kt_2=\pi/2$
x	b	0	a_τ	0	0
y	0	d	a_n	$k^2 b$ $-k^2 b\vec{i}$	$k^2 d$ $-k^2 d\vec{j}$
v	dkj	$-bki$	ρ	d^2/b	b^2/d

2.2. Составление уравнений движения точки и определение ее скорости и ускорения (задание К 2 [8])

Задание: Для точки M заданного механизма (рис. 2.2) составить уравнения движения, вычертить участок ее траектории и для момента времени $t = t_1$ найти скорость точки, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории в соответствующей точке.

Исходные данные:
$\varphi = \pi t$ рад; r = 20 см; R = 100 см; t_1 = 1/3 с.

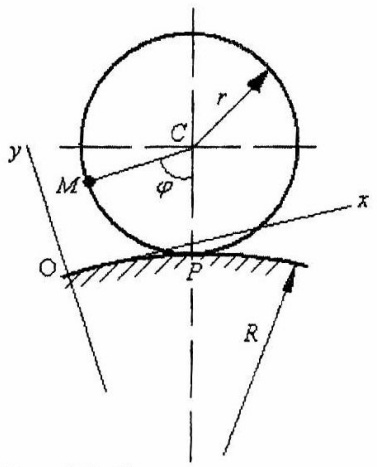


Рис. 2.2. Схема механизма

Решение

Из условия $O\breve{P} = M\breve{P}$ имеем:

$$R\alpha = r\varphi; \qquad \alpha = \frac{r}{R}\varphi = 0{,}2\pi t .$$

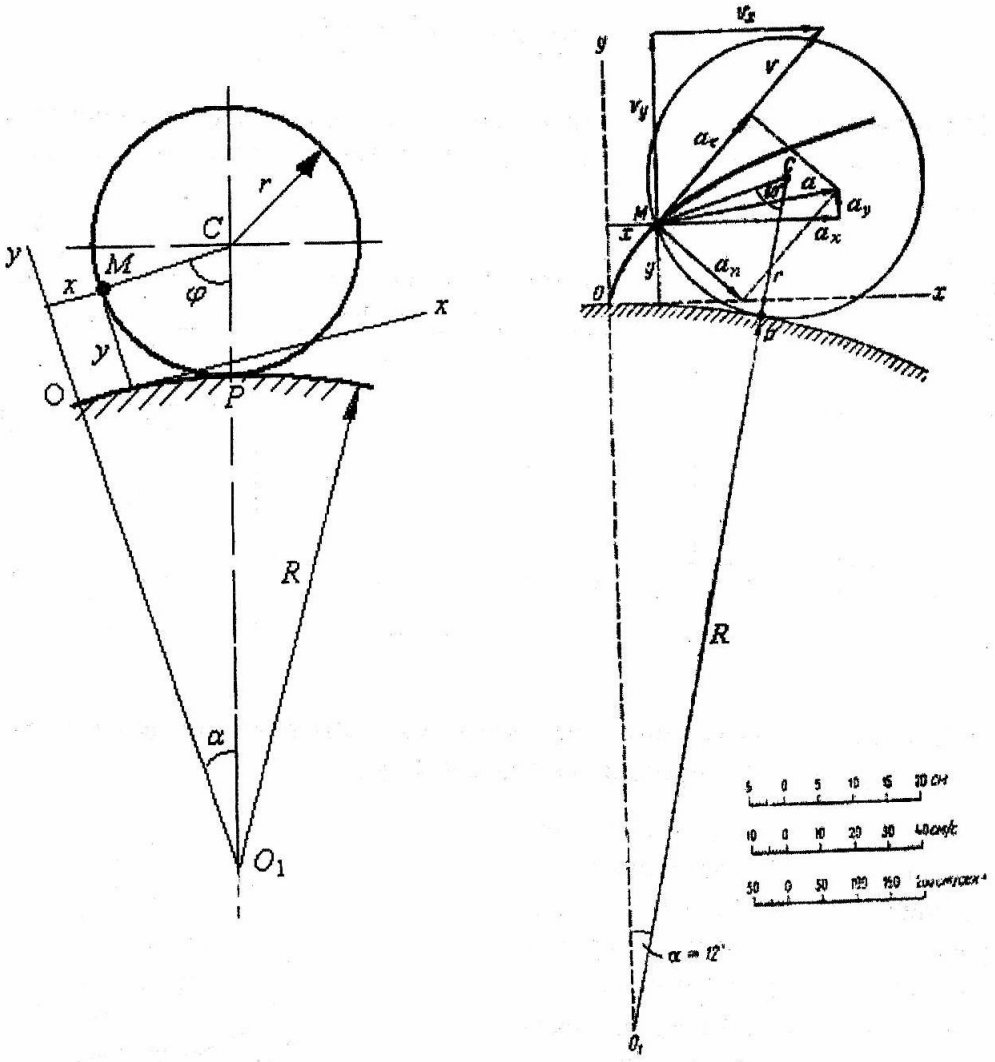
При t= 1/3 с, $\varphi = 60°$, α= 12°.

Уравнения движения точки M (рис. 2.3):

$$x = (R+r)\sin\alpha - r\sin(\varphi+\alpha); \qquad y = (R+r)\cos\alpha - R - r\cos(\varphi+\alpha)$$

или окончательно

$$x = 20(6\sin 0{,}2\pi t - \sin 1{,}2\pi t)\ \text{см}; \qquad y = 20(6\cos 0{,}2\pi t - \cos 1{,}2\pi t - 5)\ \text{см}. \quad (2.5)$$



а) б)

Рис. 2.3. Схема механизма, траектория, скорость и ускорение точки M

Эти уравнения являются параметрическими уравнениями траектории точки – эпициклоиды.

Проекции скорости точки на оси координат:

$$v_x = \dot{x} = 24\pi(\cos 0{,}2\pi t - \cos 1{,}2\pi t)\ \text{см/с}; \quad v_y = \dot{y} = 24\pi(-\sin 0{,}2\pi t + \sin 1{,}2\pi t)\ \text{см/с}.$$

Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}; \qquad v = 24\pi\sqrt{2 - 2(\cos 0{,}2\pi t \cdot \cos 1{,}2\pi t + \sin 0{,}2\pi t \cdot \sin 1{,}2\pi t)};$$

$$v = 24\pi\sqrt{2(1 - \cos \pi t)}$$

или окончательно

$$v = 48\pi\left|\sin\frac{\pi t}{2}\right|\ \text{см/с}. \tag{2.6}$$

Проекции ускорения точки на оси координат:

$$a_x = \ddot{x} = 4{,}8\pi^2(-\sin 0{,}2\pi t + 6\sin 1{,}2\pi t)\ \text{см/с}^2;$$

$$a_y = \ddot{y} = 4{,}8\pi^2(-\cos 0{,}2\pi t + 6\cos 1{,}2\pi t)\ \text{см/с}^2.$$

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 4{,}8\pi^2\sqrt{37 - 12(\sin 0{,}2\pi t \cdot \sin 1{,}2\pi t + \cos 0{,}2\pi t \cdot \cos 1{,}2\pi t)}$$

или

$$a = 4{,}8\pi^2\sqrt{37 - 12\cos \pi t}\ \text{см/с}^2.$$

Так как в данном примере для модуля скорости точки получено простое выражение, то модуль касательного ускорения находим не по формуле

$$a_\tau = \left|\frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}\right|,$$

а непосредственным дифференцированием выражения (2.6)

$$a_\tau = \left|\frac{dv}{dt}\right|$$

или

$$a_\tau = 24\pi^2\left|\cos\frac{\pi t}{2}\right|\ \text{см/с}^2.$$

Модули скорости и ускорения точки, их проекции на оси координат, а также касательное и нормальное ускорения, вычисленные для заданного момента времени t = 1/3 с, приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Скорость, см/с			Ускорение, см/с^2					Радиус кривизны,см
v_x	v_y	v	ω_x	ω_y	ω	ω_τ	ω_n	ρ
50,4	56,0	75,4	260	41	263	204	166	34,3

Нормальное ускорение точки

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{263^2 - 204^2} = 166 \text{ см/с}^2.$$

Радиус кривизны

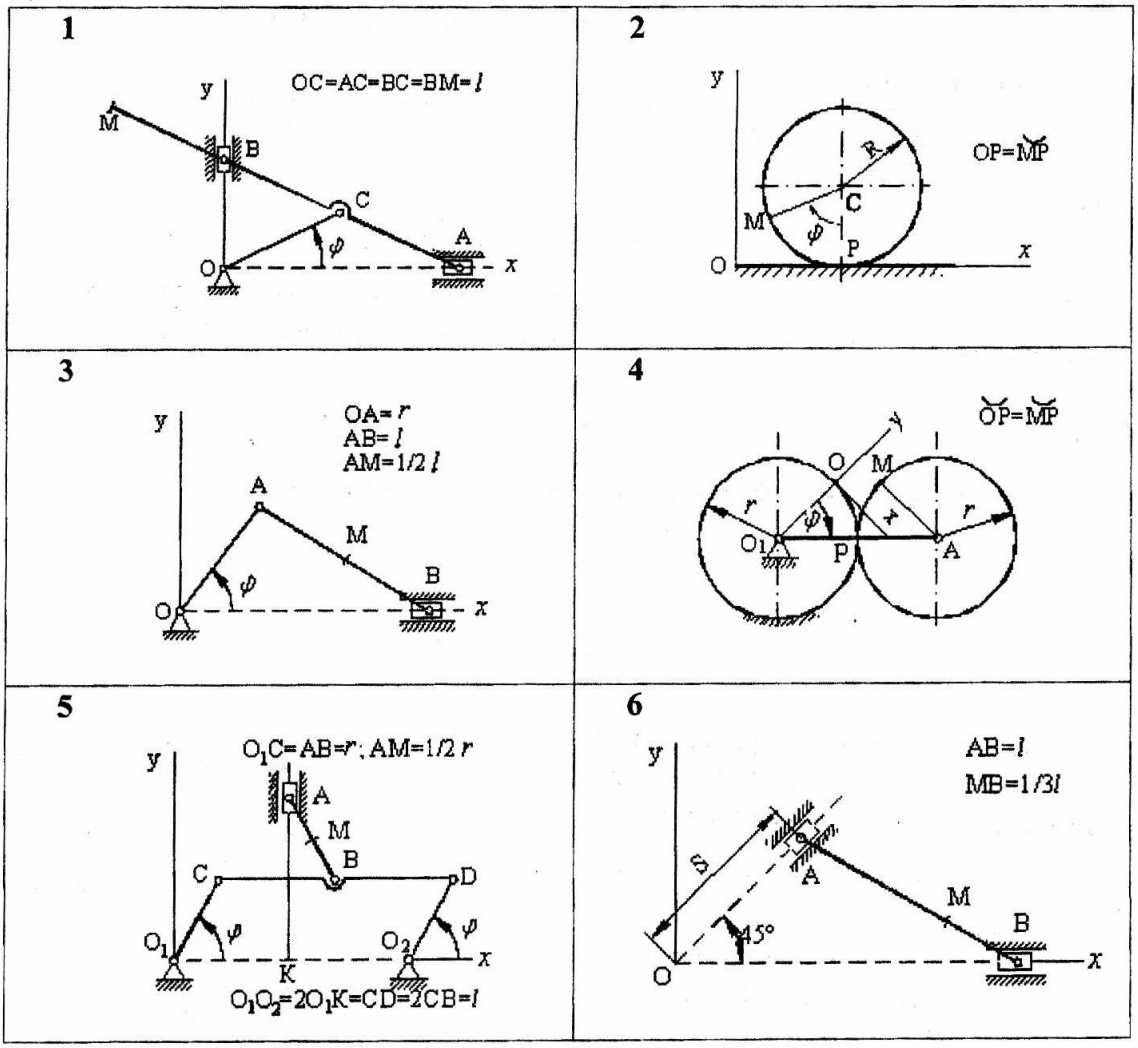
$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{75,4^2}{166} = 34,3 \text{ см}.$$

Значения ω_n и ρ также приведены в табл. 2.2.

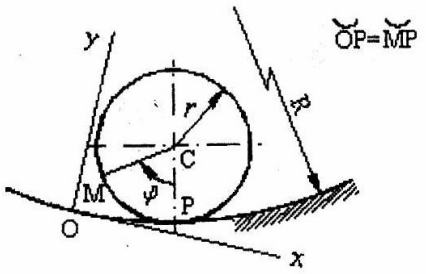
На схеме рис. 2.3, б показан участок траектории точки *M,* построенный по уравнениям (2.5), а также ее скорость, ускорение и все их составляющие. Таким образом, как и при выполнении задания К1, осуществляется графическая проверка правильности вычислений.

2.3. Тестовые задания

Для точки М заданного механизма составить уравнения движения при $\varphi = 10 \cdot t$; $s = 0,5AB \cdot \sin(\pi t)$.

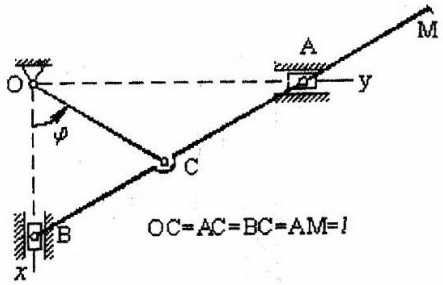


7



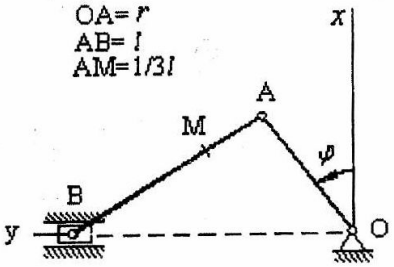
$\overset{\frown}{OP}=\overset{\frown}{MP}$

8



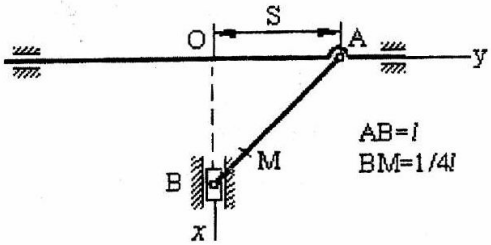
$OC=AC=BC=AM=l$

9



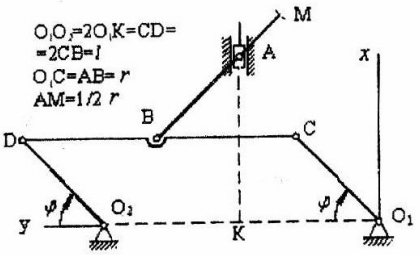
$OA=r$
$AB=l$
$AM=1/3l$

10



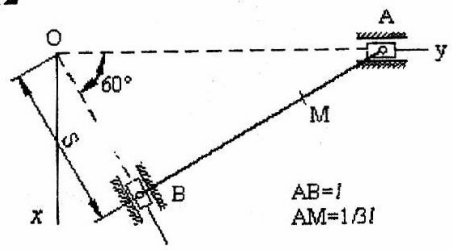
$AB=l$
$BM=1/4l$

11



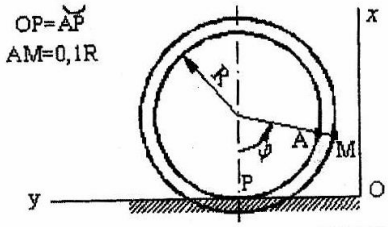
$O_1O_2=2O_1K=CD=$
$=2CB=l$
$O_1C=AB=r$
$AM=1/2\ r$

12



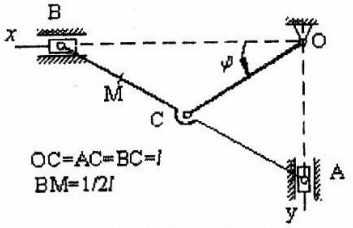
$AB=l$
$AM=1/3l$

13



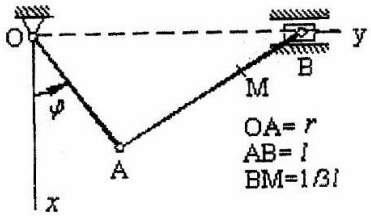
$\overset{\frown}{OP}=\overset{\frown}{AP}$
$AM=0,1R$

14



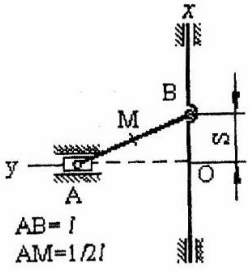
$OC=AC=BC=l$
$BM=1/2l$

15



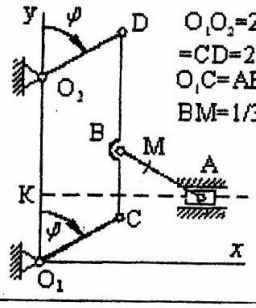
$OA=r$
$AB=l$
$BM=1/3l$

16



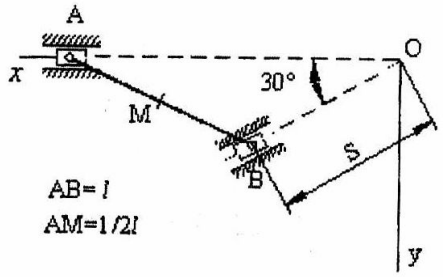
$AB=l$
$AM=1/2l$

17



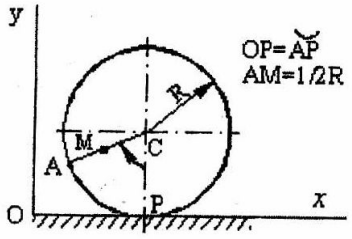
$O_1O_2=2O_1K=$
$=CD=2CB=l$
$O_1C=AB=r$
$BM=1/3\ r$

18



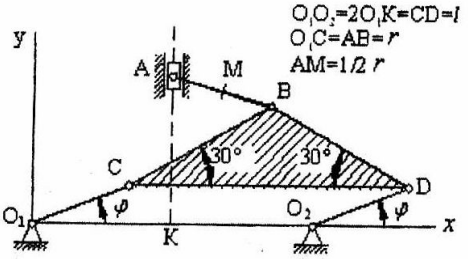
$AB=l$
$AM=1/2l$

19



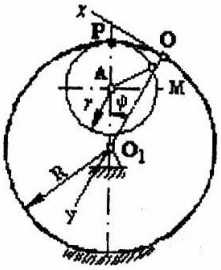
$OP=\overset{\smile}{AP}$
$AM=1/2R$

20



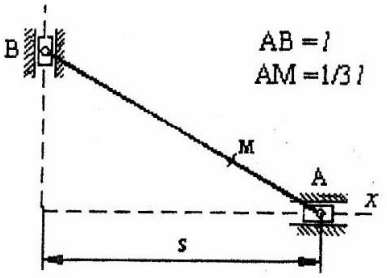
$O_1O_2=2O_1K=CD=l$
$O_1C=AB=r$
$AM=1/2\ r$

21



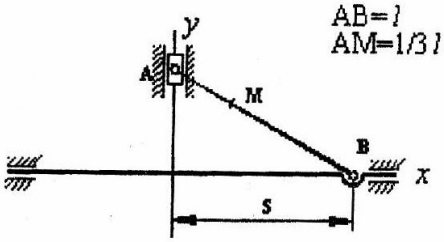
$\overset{\smile}{OP}=\overset{\smile}{MP}$

22



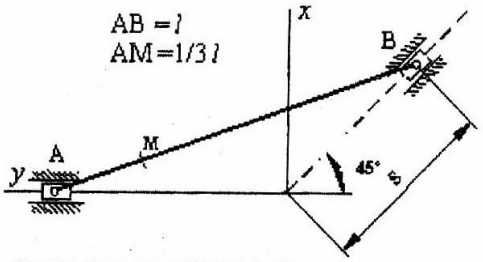
$AB=l$
$AM=1/3\ l$

23



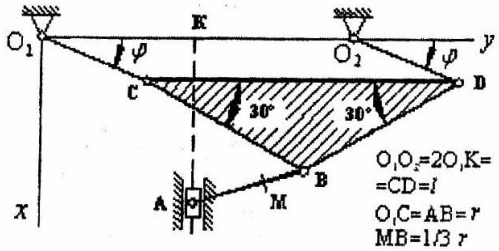
$AB=l$
$AM=1/3\ l$

24



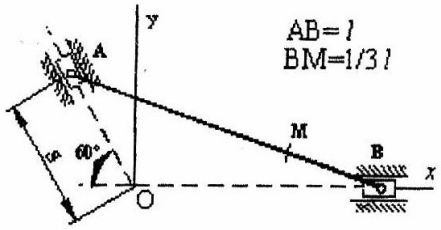
$AB=l$
$AM=1/3\ l$

25



$O_1O_2=2O_1K=$
$=CD=l$
$O_1C=AB=r$
$MB=1/3\ r$

26



$AB=l$
$BM=1/3\ l$

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ И ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИЯХ

3.1. Определение скорости движения груза

Задание: Для спуска груза *M*, привязанного к концу троса, намотанного на барабан *III*, вытягивают со скоростью *v* канат *A*, намотанный на барабан 1. На одной оси с барабаном 1 радиусом r_1 насажено зубчатое колесо 1 радиусом R_1, жестко скрепленное с ним. Зубчатое колесо 1 сцеплено с зубчатым колесом 2 радиусом r_2, которое вращается как одно целое вместе с зубчатым колесом *II* радиусом R_2. Последнее сцеплено с зубчатым колесом 3 радиусом r_3, вращающимся как одно целое с барабаном *III* радиусом R_3 (рис. 3.1).

Определить скорость, с которой спускается груз *M*, если оси всех зубчатых колес неподвижны.

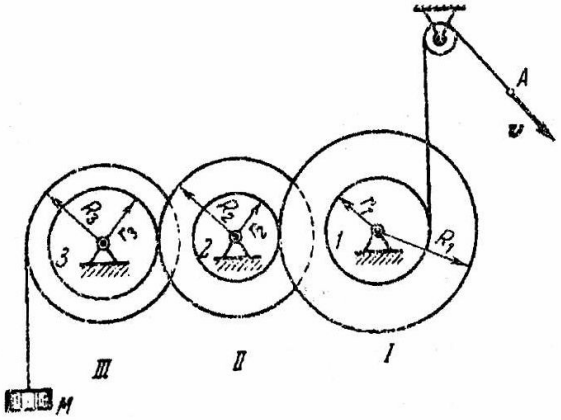


Рис. 3.1. Схема механизма

Решение

Модуль скорости точки на ободе барабана 1 радиусом r_1 равен модулю скорости точек каната *v*. Определим скорость точки на ободе зубчатого колеса 1 радиусом R_1. Модуль угловой скорости барабана 1 и зубчатого колеса 1 равен

$$\omega_1 = \frac{v}{r_1} \text{ рад/с.}$$

Модуль скорости точки на ободе зубчатого колеса 1

$$v_1 = \omega_1 R_1 = \frac{v}{r_1} R_1 .$$

Зубчатое колесо 1 находится в сцеплении с зубчатым колесом 2 радиусом r_2, следовательно, скорости точек на ободе этих колес равны. Определяем модуль угловой скорости зубчатых колес 2 и *II*

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2} = \frac{vR_1}{r_1 r_2} \text{ рад/с}$$

и, далее, находим модуль скорости точки на ободе зубчатого колеса *II* радиусом R_2:

$$v_2 = \omega_2 R_2 = \frac{v}{r_2} R_2 = \frac{vR_1R_2}{r_1r_2}.$$

Это и есть одновременно модуль скорости точки на ободе зубчатого колеса 3 радиусом r_3, сцепленного с зубчатым колесом *II*.

Следовательно, модуль угловой скорости зубчатого колеса 3 и барабана *III* равен

$$\omega_3 = \frac{v_2}{r_3} = \frac{vR_1R_2}{r_1r_2r_3} \text{ рад/с.}$$

Модуль скорости точки на ободе барабана *III* радиусом R_3 равный искомой скорости груза М, дается формулой

$$v_3 = \omega_3 R_3 = \frac{vR_1R_2R_3}{r_1r_2r_3}.$$

3.2. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях (задание К 3 [8])

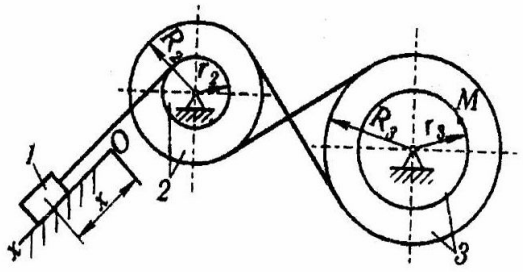


Рис. 3.2. Схема механизма

Дано: схема механизма (рис. 3.2); R_2 = 50 см, r_2 = 25 см, R_3 = 65 см, r_3 = 40 см, x_0 = 14 см, v_0 = 5 см/с, x_2 = 168 см, t_1 = 1 с, t_2 = 2 с.

Груз движется равноускоренно. Найти уравнение движения груза, а также скорости и ускорения груза и точки M в момент времени $t = t_1$.

Решение

Уравнение движения груза 1 при равноускоренном движении имеет вид

$$x = c_2t^2 + c_1t + c_0. \quad (3.1)$$

Коэффициенты c_0, c_1, c_2 могут быть определены из следующих условий:

при $t = 0$ $x_0 = 14$ см, $\dot{x}_0 = 5$ см/с, (3.2)

при $t_2 = 2$ с $x_2 = 168$ см. (3.3)

Скорость груза 1

$$v = \dot{x} = 2c_2 + c_1. \quad (3.4)$$

Подставляя (3.2) и (3.3) в формулы (3.1) и (3.4), находим коэффициенты

$$c_0 = 14 \text{ см}, \quad c_1 = 5 \text{ см/с}, \quad c_2 = 36 \text{ см/с}^2.$$

Таким образом, уравнение движения груза 1

$$x = 36t^2 + 5t + 14. \tag{3.5}$$

Скорость груза 1

$$v = \dot{x} = 72t + 5. \tag{3.6}$$

Ускорение груза 1

$$a = \ddot{x} = 72 \text{ см/с}^2.$$

Для определения скорости и ускорения точки M запишем уравнения, связывающие скорость груза v и угловые скорости колес ω_2 и ω_3.

В соответствии со схемой механизма

$$v = r_2 \omega_2, \qquad R_2 \omega_2 = R_3 \omega_3. \tag{3.7}$$

Откуда

$$\omega_3 = vR_2/(r_2R_3),$$

или с учетом (3.6) после подстановки данных

$$\omega_3 = 2{,}215t + 0{,}154.$$

Угловое ускорение колеса 3

$$\varepsilon_3 = \omega_3 = 2{,}215 \text{ рад/с}^2.$$

Скорость точки M, ее вращательное, центростремительное и полное ускорения определяются по формулам

$$v_м = r_3 \omega_3; \quad a^в_м = r_3 \varepsilon_3; \quad a^ц_м = r_3 \omega_3^2;$$

$$a_м = \sqrt{(a^ц_м)^2 + (a^в_м)^2}\ .$$

Скорости и ускорения тела 1 и точки M показаны на рис. 3.3.

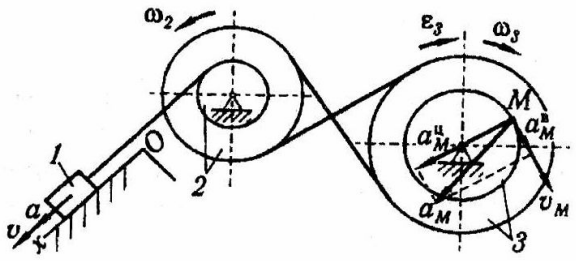


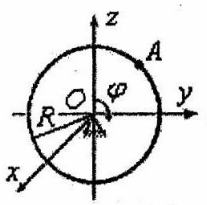
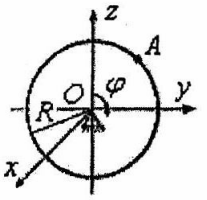
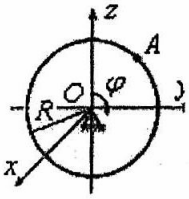
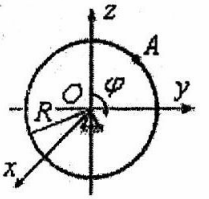
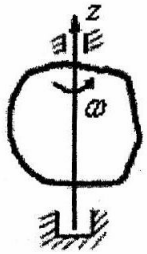
Рис. 3.3. Схема скоростей и ускорений

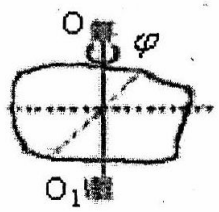
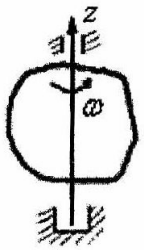
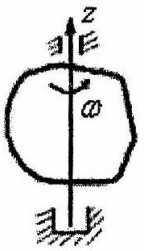
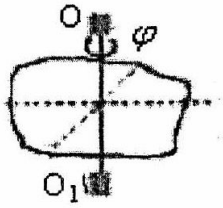
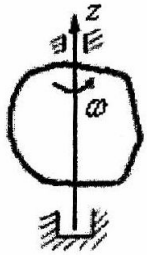
Результаты вычислений для заданного момента времени t = 1 с приведены в табл. 3.1.

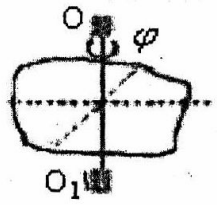
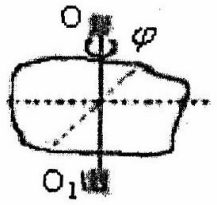
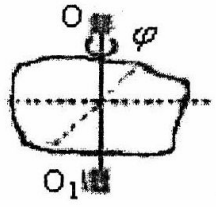
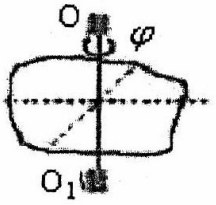
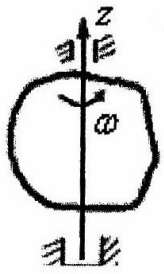
Таблица 3.1

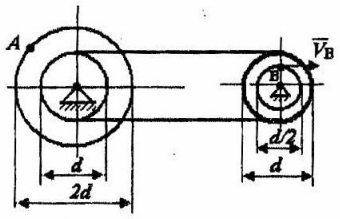
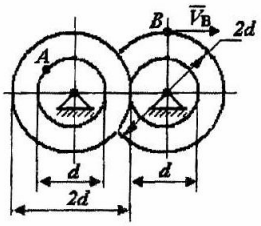
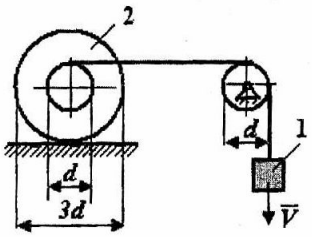
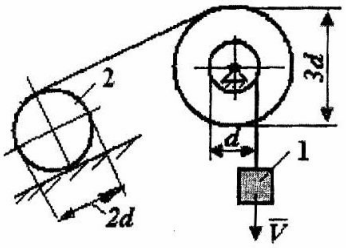
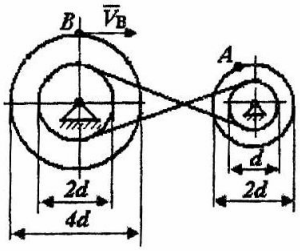
v, см/с	a, см/с^2	ω_3, рад/с	ε_3, рад/с^2	$v_м$, см/с	$a^ц_м$, см/с^2	$a^в_м$, см/с^2	$a^в$, см/с^2
77	72	2,37	2,22	94,8	224	88,6	241

3.3. Тестовые задания

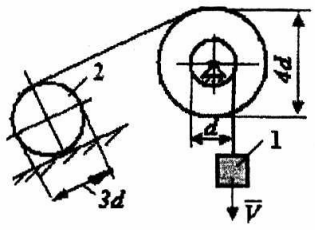
Вращение вокруг неподвижной оси	
К18  Тело радиуса R = 10 см вращается вокруг оси Ox по закону $\varphi = 1 + 2t + 3t^2$ рад. В момент времени t = 1 с точка А имеет нормальное ускорение, равное…	Варианты ответов: 1) 360 см/с^2 2) 640 см/с^2 3) 360 см/с^2 4) 360 см/с^2
К19  Тело радиуса R = 10 см вращается вокруг оси Ox по закону $\varphi = 2t + t^2$ рад. В момент времени t = 1 с точка А имеет нормальное ускорение, равное…	Варианты ответов: 1) 360 см/с^2 2) 640 см/с^2 3) 80 см/с^2 4) 160 см/с^2
К20  Тело радиуса R = 10 см вращается вокруг оси Ox по закону $\varphi = t + t^2$ рад. В момент времени t = 1 с точка А имеет нормальное ускорение, равное…	Варианты ответов: 1) 40 см/с^2 2) 20 см/с^2 3) 90 см/с^2 4) 30 см/с^2
К21  Тело радиуса R = 10 см вращается вокруг оси Ox по закону $\varphi = 5 + 2t^2$ рад. В момент времени t = 2 с точка А имеет нормальное ускорение, равное…	Варианты ответов: 1) 640 см/с^2 2) 810 см/с^2 3) 490 см/с^2 4) 1690 см/с^2
К22  Тело равномерно вращается вокруг оси z с угловой скоростью $\omega = \pi$ с$^{-1}$. За время t = 3 с тело повернется на угол…	Варианты ответов: 1) 540^0 2) 60^0 3) $\frac{1}{3}$ рад 4) 3 рад

К23  Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси OO_1 по закону $\varphi = (1-2t)^2 + 13$. В момент времени t = 3 с тело будет вращаться…	Варианты ответов: 1) равноускоренно 2) ускоренно 3) равнозамедленно 4) замедленно 5) равномерно
К24  Тело равномерно вращается вокруг оси z с угловой скоростью $\omega = 5\ c^{-1}$. За время t = 0,8 с тело повернется на угол…	Варианты ответов: 1) 4 рад 2) 900^0 3) 3,2рад 4) 720^0
К25  Тело равномерно вращается вокруг оси z с угловой скоростью $\omega = 8\ c^{-1}$. За время t = 2 с тело повернется на угол…	Варианты ответов: 1) 4 рад 2) 640^0 3) 160^0 4) 16 рад
К26  Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси OO_1 по закону $\varphi = (t-3)^2 - 9$. В момент времени t = 3 с тело будет вращаться…	Варианты ответов: 1) замедленно 2) равномерно 3) равноускоренно 4) равнозамедленно 5) ускоренно
К27  Тело равномерно вращается вокруг оси z с угловой скоростью $\omega = 1{,}5\pi\ c^{-1}$. За время t = 2 с тело повернется на угол…	Варианты ответов: 1) $0{,}75\pi$ 2) 2π 3) 540^0 4) 270^0

К28  Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси OO_1 по закону $\varphi = (1-2t)^3 - 8$. В момент времени t = 1 с тело будет вращаться…	Варианты ответов: 1) равнозамедленно 2) равномерно 3) ускоренно 4) равноускоренно 5) замедленно
К29  Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси OO_1 по закону $\varphi = \sqrt{5} - 2t + 3t^2$. В момент времени t = 1 с тело будет вращаться…	Варианты ответов: 1) равномерно 2) равномерно 3) равноускоренно 4) равнозамедленно 5) ускоренно
К30  Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси OO_1 по закону $\varphi = (t-2)^3$. В момент времени t = 1 с тело будет вращаться…	Варианты ответов: 1) равномерно 2) равномерно 3) равноускоренно 4) равнозамедленно 5) ускоренно
К31  Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси OO_1 по закону $\varphi = (3-t)^2 + 11$. В момент времени t = 1 с тело будет вращаться…	Варианты ответов: 6) равномерно 7) равномерно 8) равноускоренно 9) равнозамедленно 10) ускоренно
К32  Тело равномерно вращается вокруг оси z с угловой скоростью $\omega = 4\ с^{-1}$. За время t = 0,5 с тело повернется на угол…	Варианты ответов: 1) 120^0 2) 2 рад 3) 8 рад 4) 360^0

Преобразование вращательного движения	
К34 	Точка В одного из шкивов ременной передачи имеет скорость V_B = 12 см/с. Тогда скорость точки А другого шкива равна…	Варианты ответов: 1) V_B = 24 см/с 2) V_B = 3 см/с 3) V_B = 6 см/с 4) V_B = 48 см/с
К35 	Точка В одного из колес передачи имеет скорость V_B = 16 см/с. Тогда скорость точки А другого колеса равна…	Варианты ответов: 1) V_B = 8 см/с 2) V_B =64 см/с 3) V_B = 32 см/с 4) V_B = 4 см/с
К36 	Груз 1 имеет скорость V. Тогда угловая скорость ступенчатого колеса 2 равна…	Варианты ответов: 1) 3V/2d 2) 6V/d 3) V/2d 4) 8V/3d 5) 2V/3d
К37 	Груз 1 имеет скорость V. Тогда угловая скорость катящегося цилиндра 2 равна…	Варианты ответов: 1) 4V/3d 2) V/3d 3) 8V/3d 4) V/6d 5) 3V/2d
К38 	Точка В одного из шкивов ременной передачи имеет скорость V_B = 30 см/с. Тогда скорость точки А другого шкива равна…	Варианты ответов: 1) V_B = 30 см/с 2) V_B = 15 см/с 3) V_B = 120 см/с 4) V_B = 60 см/с

К39

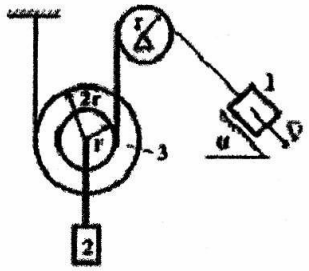


Груз 1 имеет скорость V. Тогда угловая скорость колеса 2 равна…

Варианты ответов:

1) 2V/3d
2) 3V/2d
3) 8V/d
4) V/12d
5) 3V/4d

К40

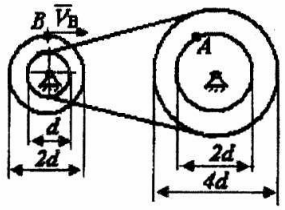


Груз 1 имеет скорость V. Тогда угловая скорость подвижного блока 1 равна…

Варианты ответов:

1) 2V/3d
2) 6V/d
3) 2V/d
4) 4V/3d
5) 3V/d

К41



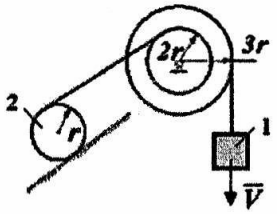
Точка В одного из шкивов ременной передачи имеет скорость $V_B = 12$ см/с.

Тогда скорость точки А другого шкива равна…

Варианты ответов:

1) $V_B = 24$ см/с
2) $V_B = 6$ см/с
3) $V_B = 3$ см/с
4) $V_B = 48$ см/с

К42

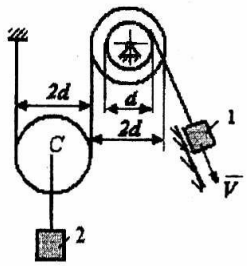


Груз 1 имеет скорость V. Тогда угловая скорость катящегося цилиндра 2 равна…

Варианты ответов:

1) 3V/2r
2) 3V/4r
3) V/3r
4) V/6r
5) 2V/3r

К43



Груз 1 имеет скорость V. Тогда угловая скорость подвижного блока равна…

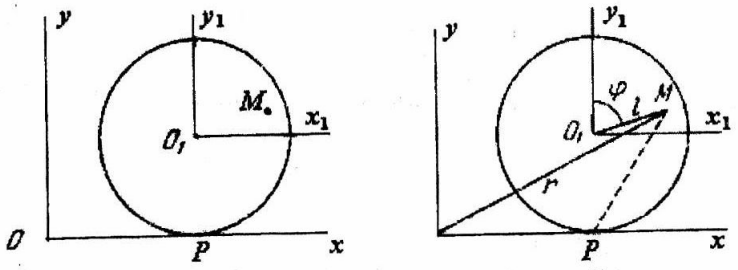
Варианты ответов:

1) 3V/d
2) 2V/3d
3) 4V/d
4) V/d
5) 4V/3d

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ

4.1. Определение скоростей и ускорений точек при движении колеса

Дано: Колесо радиусом b катится без скольжения по прямолинейному рельсу (рис. 4.1, а). Скорость центра колеса постоянна и равна v_{O_1}.



а) б)

Рис. 4.1. Схема плоского движения колеса

Определить уравнения движения, скорость и ускорение точки M, жестко связанной с колесом и находящейся на расстоянии $O_1M = l$ от центра колеса.

Решение

Выбираем неподвижную систему координат x–y и подвижную систему координат x_1 –y_1. Подвижная система координат перемещается поступательно вместе с центром колеса, а ее оси остаются параллельными осям неподвижной системы.

Модуль угловой скорости колеса определится из равенства (рис. 4.1, б)

$$v_{O_1} = PO_1 \cdot \omega = b\omega ,$$

так как мгновенный центр скоростей находится в точке P соприкосновения колеса с неподвижным рельсом. Следовательно,

$$\omega = \frac{v_{O_1}}{b} . \tag{4.1}$$

Умножая (4.1) на dt и учитывая, что $\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}$, имеем

$$d\varphi = \frac{v_{O_1}}{b} dt .$$

Интегрируя, находим

$$\varphi = \frac{v_{O_1}}{b} t + C_1 . \tag{4.2}$$

Полагая $\varphi = 0$ при $t = 0$, находим из (4.2), что произвольная постоянная интегрирования $C_1 = 0$ и, окончательно,

$$\varphi = \frac{v_{O_1}}{b} t .$$

Координаты точки M в подвижной системе координат:

$$x_1 = l\sin\varphi = l\sin\frac{v_{O_1}}{b}t, \qquad y_1 = l\cos\varphi = l\cos\frac{v_{O_1}}{b}t. \tag{4.3}$$

Координаты точки M в неподвижной системе координат складываются из координат точки O_1, начала подвижной системы, и координат (4.3):

$$x = x_{O_1} + x_1 = v_{O_1}t + l\sin\frac{v_{O_1}}{b}t, \qquad y = y_{O_1} + y_1 = b + l\cos\frac{v_{O_1}}{b}t,$$

тогда радиус-вектор точки M в неподвижной системе координат будет

$$\vec{r} = (v_{O_1}t + l\sin\frac{v_{O_1}}{b}t)\vec{i} + (b + l\cos\frac{v_{O_1}}{b}t)\vec{j},$$

где i, j – орты осей координат.

Скорость точки M определится как производная радиуса-вектора по времени

$$\vec{v} = (v_{O_1} + \frac{lv_{O_1}}{b}\cos\frac{v_{O_1}}{b}t)\cdot\vec{i} - \frac{lv_{O_1}}{b}\cos\frac{v_{O_1}}{b}t\cdot\vec{j}.$$

Скорость точки M направлена перпендикулярно мгновенному радиусу PM. Ускорение точки M есть производная от скорости по времени

$$\vec{a} = -\frac{lv_{O_1}^2}{b^2}(\sin\frac{v_{O_1}}{b}t\cdot\vec{i} + \cos\frac{v_{O_1}}{b}t\cdot\vec{j}). \tag{4.4}$$

Замечая, с учетом (4.3), что радиус-вектор $\vec{OM}$ равен

$$r_1 = O_1M = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} = l(\sin\frac{v_{O_1}}{b}t\cdot\vec{i} + \cos\frac{v_{O_1}}{b}t\cdot\vec{j}),$$

представим ускорение (4.4) в виде

$$\vec{a} = -\frac{v_{O_1}^2}{b^2}r_1.$$

Таким образом, ускорение точки M постоянно по модулю и направлено от точки M к центру колеса.

4.2. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при плоском движении (задание К 4 [8])

Дано: схема механизма в заданном положении (рис. 4.2); исходные данные (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Размеры, см			ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
OA	AB	AC		
10	60	20	1,5	2

Решение

1. Определение скоростей точек и угловой скорости звена AB.

Вычисляем модуль скорости пальца A кривошипа OA при заданном положении механизма:

$$v = \omega_{OA} OA.$$

Скорость точки A перпендикулярна кривошипу OA. Скорость ползуна B направлена по вертикали. Мгновенный центр скоростей P_{AB} шатуна AB находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных из точек A и B к их скоростям (рис. 4.3).

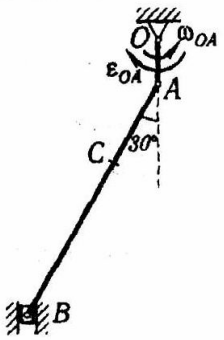


Рис. 4.2. Схема механизма

Угловая скорость звена AB

$$\omega_{AB} = v / AP_{AB}.$$

Модули скоростей точек B и C

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB}, \quad v_C = \omega_{AB} \cdot CP_{AB}.$$

Расстояния AP_{AB}, BP_{AB} и CP_{AB} определяются из рассмотрения треугольников ABP_{AB} и ACP_{AB}:

$AP_{AB} = 52{,}0$ см; $BP_{AB} = 30{,}0$ см; $CP_{AB} = 36{,}1$ см.

В соответствии с этим

$v_A = 15{,}0$ см; $\omega_{AB} = 0{,}29$ рад/с;

$v_B = 8{,}7$ см/с; $v_C = 10{,}5$ см/с.

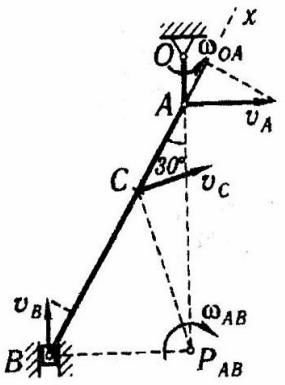


Рис. 4.3. Схема механизма и скорости звеньев

Вектор $\vec{v}_C$ направлен перпендикулярно отрезку CP_{AB} в сторону, соответствующую направлению вращения звена AB.

Для проверки определим скорость точки B другим способом. Воспользуемся теоремой о равенстве проекции скоростей точек на ось, проведенную через эти точки.

Направим ось x вдоль шатуна AB в направлении от B к A.

Имеем $v_A \cos(\vec{v}_A, x) = v_B \cos(\vec{v}_B, x)$ или, как видно из рис. 4.3,

$$v_A \cos 60° = v_B \cos 30°.$$

Отсюда $v_B = 8{,}7$ см.

Полезно убедиться, что и найденная ранее скорость точки C удовлетворяет этой теореме.

2. Определение ускорений точек и углового ускорения звена (рис. 4.4).

Ускорение точки А складывается из вращательного и центростремительного ускорений:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{B} + \vec{a}_A^{Ц}; \quad a_A^{B} = \varepsilon_{OA} \cdot OA; \quad a_A^{Ц} = \omega_{OA}^2 \cdot OA;$$

Согласно теореме об ускорениях точек плоской фигуры,

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^{B} + \vec{a}_{AB}^{Ц}; \qquad \vec{a}_B = \vec{a}_A^{B} + \vec{a}_A^{Ц} + \vec{a}_{AB}^{B} + \vec{a}_{AB}^{Ц}. \tag{4.5}$$

Центростремительное ускорение точки B во вращательном движении шатуна AB вокруг полюса A

$$a_{AB}^{Ц} = \omega_{AB}^2 \cdot AB.$$

По приведенным формулам вычисляем:

$$a_A^{B} = 20{,}0 \text{ см/с}^2; \quad a_A^{Ц} = 22{,}5 \text{ см/с}^2; \quad a_{AB}^{Ц} = 5{,}0 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_A^{Ц}$ направлен от A к O. Вектор $\vec{a}_A^{B}$ перпендикулярен вектору $\vec{a}_A^{Ц}$ и направлен противоположно v_A (вращение кривошипа OA замедленное).

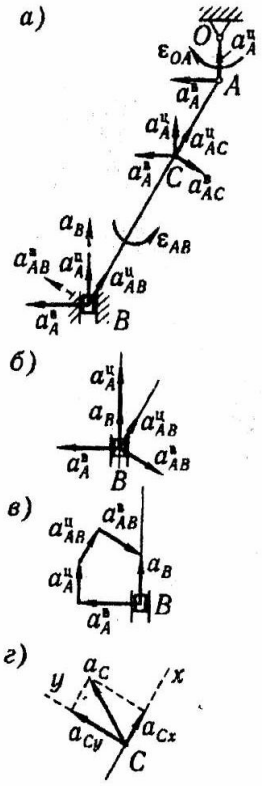


Рис. 4.4. Схема механизма и ускорения звеньев

Вектор $\vec{a}_{AB}^{Ц}$ направлен от B к A. Что касается ускорения $\vec{a}_B$ точки B и вращательного ускорения $\vec{a}_{AB}^{B}$, то известны только линии действия этих векторов: $\vec{a}_B$ – по вертикали вдоль направляющих ползуна, $\vec{a}_{AB}^{B}$ – перпендикулярно AB.

Зададимся произвольно их направлениями по указанным линиям (рис. 4.4, а). Эти ускорения определим из уравнений проекций векторного равенства (4.1) на оси координат. Знак в ответе показывает, соответствует ли истинное направление вектора, принятому при расчете.

Выбрав направление осей x и y, как показано на рис. 4.4, г, получаем:

$$a_B \cos 30° = -a_A^{B} \cos 60° + a_{AB}^{Ц} \cos 30° + a_{AB}^{Ц}; \tag{4.6}$$

$$a_B \cos 60° = -a_A^{B} \cos 30° + a_A^{Ц} \cos 60° + a_{AB}^{B}. \tag{4.7}$$

Из уравнения (4.6) находим

$$a_B = 16{,}7 \text{ см/с}^2.$$

Ускорение $\vec{a}_B$ направлено, как показано на рис 4.4, а.

Из уравнения (4.7) получаем

$$a_{AB}^{B} = -20{,}2 \text{ см/с}^2.$$

Направление $\vec{a}_{AB}^{B}$ противоположно показанному на рис. 4.4, а.

Ускорение $\vec{a}_B$ и все его составляющие с учетом их истинных направлений и масштаба показаны на рис. 4.4, б.

Угловое ускорение шатуна AB с учетом того, что здесь a_{AB}^{B} – алгебраическая величина, определяется по формуле

$$\varepsilon_{AB} = \left|a_{AB}^{B}\right| / AB.$$

Вычисляя, находим

$$\varepsilon_{AB} = 0{,}34 \text{ рад/с}^2.$$

Направление ускорения $\vec{a}_{AB}^{Ц}$ относительно полюса A определяет направление углового ускорения ε_{AB}. Здесь под направлением углового ускорения понимается направление дуговой стрелки, которое при ускоренном вращении звена совпадает с направлением его вращения, а при замедленном – противоположно ему. В данном случае угловое ускорение противоположно направлению вращения шатуна.

Определить $\vec{a}_B$ и $\vec{a}_{AB}^{B}$ можно и графически – построением многоугольника ускорений.

Отложим из точки B согласно (4.5) в выбранном масштабе последовательно векторы $\vec{a}_A^{B}$, $\vec{a}_A^{Ц}$, $\vec{a}_{AB}^{Ц}$ (рис. 4.4, в). Через конец вектора $\vec{a}_{AB}^{Ц}$ проведем прямую, параллельную вращательному ускорению $\vec{a}_{AB}^{B}$, т. е. перпендикулярно $\vec{a}_B$, до пересечения ее с прямой, по которой направлено ускорение $\vec{a}_B$.

Последнее определяется как замыкающая сторона многоугольника ускорений.

Модули a_B и a_{AB}^{B} могут быть найдены измерением на чертеже.

Определяем ускорение точки C

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A^{B} + \vec{a}_A^{Ц} + \vec{a}_{AC}^{B} + \vec{a}_{AC}^{Ц}.$$

Вращательное и центростремительное ускорения точки C во вращательном движении AB вокруг полюса A

$$a_{AC}^{B} = \varepsilon_{AB} \cdot AC;\ a_{AC}^{Ц} = \omega_{AB}^{2} \cdot AC,$$

или

$$a_{AC}^{B} = 6{,}8 \text{ см/с}^2; \qquad a_{AC}^{Ц} = 1{,}7 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_{AC}^{B}$ перпендикулярен вектору $\vec{a}_{AC}^{Ц}$ и направлен соответственно угловому ускорению ε_{AB}.

Ускорение точки C находим способом проекций (рис. 4.4, а):

$$a_{Cx} = a_{AC}^{Ц} + a_A^{Ц}\cos 30° - a_A^{B}\cos 60°,$$

$$a_{Cy} = a_A^{Ц}\cos 60° + a_A^{B}\cos 30° - a_{AC}^{B}, \quad a_C = \sqrt{(a_{Cx})^2 + (a_{Cy})^2}.$$

В результате вычислений получаем:

$a_{Cx} = 11{,}2 \text{ см/с}^2$; $a_{Cy} = 21{,}8 \text{ см/с}^2$; $a_C = 24{,}5 \text{ см/с}^2$ (рис. 4.4, г).

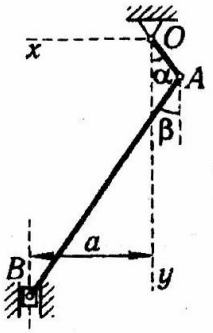


Рис. 4.5. Схема механизма

Приведем решение этой же задачи другим, более общим методом. На рис. 4.5 показана схема механизма в некотором произвольном положении.

Проведем оси координат. Уравнениями связи для данного механизма являются условия:

$$\vec{r}_B = \vec{OA} + \vec{AB}, \tag{4.8}$$

где ($\vec{r}_B$ – радиус-вектор точки B, проведенный из центра О),

$$x_B = a = const. \tag{4.9}$$

Проецируя (4.8) на ось x, с учетом (4.9) имеем

$$-OA\sin\alpha + AB\sin\beta = a. \tag{4.10}$$

Для определения угловой скорости $\omega_{AB} = \dot{\beta}$ звена AB и углового ускорения $\varepsilon_{AB} = \ddot{\beta}$ нет необходимости выражать β из (4.10). Проще непосредственно дважды продифференцировать (4.10).

Имея в виду, что $\dot{\alpha} = \omega_{AB}$, получаем в результате первого дифференцирования

$$-OA\cdot\cos\alpha\cdot\omega_{OA} + AB\cdot\cos\beta\cdot\omega_{AB} = 0. \tag{4.11}$$

Отсюда

$$\omega_{AB} = \omega_{OA}\cdot OA\cdot\cos\alpha/(AB\cdot\cos\beta). \tag{4.12}$$

Дифференцируя (4.11) и учитывая, что $\dot{\omega}_{OA} = \varepsilon_{AB}$, имеем

$$OA\cdot\sin\alpha\cdot\omega_{OA}^2 - OA\cdot\cos\alpha\cdot\varepsilon_{OA} - AB\cdot\sin\beta\cdot\omega_{AB}^2 + AB\cdot\cos\beta\cdot\varepsilon_{AB} = 0;$$

$$\varepsilon_{AB} = \omega_{AB}^2 tg\beta + OA(\varepsilon_{OA}\cos\alpha - \omega_{OA}^2\sin\alpha)/(AB\cdot\cos\beta). \tag{4.13}$$

Выражения (4.12) и (4.13) позволяют вычислять ω_{AB} и ε_{AB} для любого положения механизма, в частности, для заданного ($\alpha = 0°$, $\beta = 30°$).

Заметим, что ω_{OA} и ε_{OA} входят в эти выражения со знаком «+» или «–» в соответствии с принятым направлением отсчета угла α. В данном случае ω_{OA} = 1,5 рад/с, ε_{OA} = –2,0 рад/с^2. Смысл знаков ω_{AB} и ε_{AB} определяется направлением отсчета угла β.

Модуль скорости точки B $v_B = |\dot{y}_B|$. Модуль ускорения $a_B = |\ddot{y}_B|$. Проецируя (4.8) на ось y, получаем

$$\dot{y}_B = OA\cdot\cos\alpha + AB\cdot\cos\beta.$$

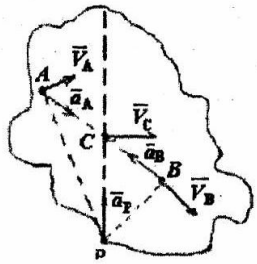
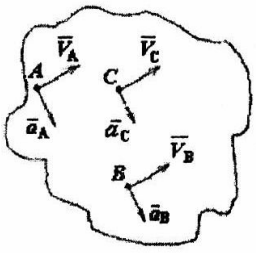
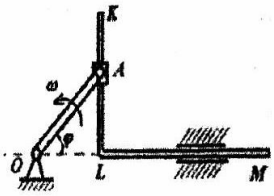
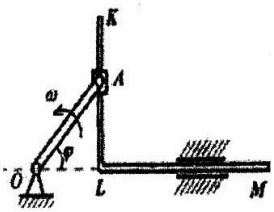
Отсюда после дифференцирования получаем

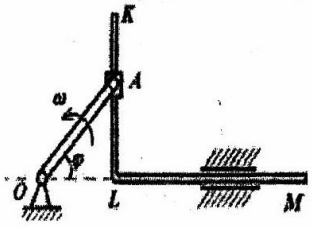
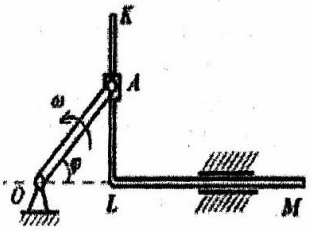
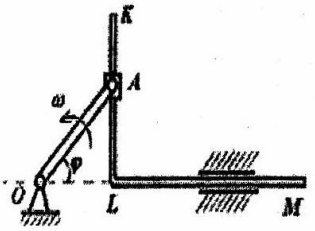
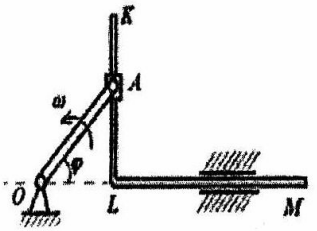
$$\ddot{y}_B = -OA\cdot\sin\alpha\cdot\omega_{OA} - AB\cdot\sin\beta\cdot\omega_{AB};$$

$$\ddot{y}_B = -OA \cdot \cos\alpha \cdot \omega_{OA}^2 - OA \cdot \sin\alpha \cdot \varepsilon_{OA} - AB \cdot \cos\beta \cdot \omega_{AB}^2 - AB \cdot \sin\beta \cdot \varepsilon_{AB}.$$

Для определения скорости и ускорения точки C следует составить уравнения ее движения в координатной форме, проецируя радиус-вектор $\vec{r}_C = \vec{OA} + \vec{AC}$ на оси x и y.

4.3. Тестовые задания

К47  Тело двигается так, что точки его имеют направления скоростей и ускорений, показанные на рисунке. В этом случае справедливо будет утверждение, что тело…	Варианты ответов: 1) вращается ускоренно вокруг оси, проходящей через точку С 2) двигается плоско-параллельно, не имея ускорения в точке С 3) двигается поступательно, криволинейно, ускоренно 4) равномерно вращается вокруг оси, проходящей через точку Р
К48  Тело двигается так, что точки его имеют направления скоростей и ускорений, показанные на рисунке. В этом случае справедливо будет утверждение, что тело…	Варианты ответов: 1) ускоренно вращается вокруг неподвижной оси 2) двигается поступательно, прямолинейно, ускоренно 3) двигается поступательно по окружности 4) равномерно вращается вокруг неподвижной оси
К49  В кривошипно-кулисном механизме кривошип ОА = 10 см вращается с угловой скоростью ω = 6 с$^{-1}$. В тот момент, когда угол φ = 90^0, скорость кулисы KLM будет равна…	Варианты ответов: 1) V = 60 см/с 2) V = $60\sqrt{3}$ см/с 3) V = $30\sqrt{3}$ см/с 4) V = 30 см/с
К50  В кривошипно-кулисном механизме кривошип ОА = 10 см вращается с угловой скоростью ω = 6 с$^{-1}$. В тот момент, когда угол φ = 30^0, скорость кулисы KLM будет равна…	Варианты ответов: 1) V = 60 см/с 2) V = $60\sqrt{3}$ см/с 3) V = 30 см/с 4) V = $30\sqrt{3}$ см/с

К51 	В кривошипно-кулисном механизме кривошип ОА = 10 см вращается с угловой скоростью $\omega = 6\ с^{-1}$. В тот момент, когда угол $\varphi = 0^0$, относительная скорость ползуна А будет равна…	Варианты ответов: 1) $V = 60\sqrt{2}$ см/с 2) V = 30 см/с 3) V = 60 см/с 4) $V = 30\sqrt{2}$ см/с
К52 	В кривошипно-кулисном механизме кривошип ОА = 10 см вращается с угловой скоростью $\omega = 6\ с^{-1}$. В тот момент, когда угол $\varphi = 120^0$, скорость кулисы KLM будет равна…	Варианты ответов: 1) $V = 30\sqrt{3}$ см/с 2) V = 60 см/с 3) V = 30 см/с 4) $V = 60\sqrt{3}$ см/с
К53 	В кривошипно-кулисном механизме кривошип ОА = 10 см вращается с угловой скоростью $\omega = 6\ с^{-1}$. В тот момент, когда угол $\varphi = 120^0$, относительная скорость ползуна А будет равна…	Варианты ответов: 1) V = 60 см/с 2) $V = 60\sqrt{3}$ см/с 3) $V = 30\sqrt{3}$ см/с 4) V = 30 см/с
К54 	В кривошипно-кулисном механизме кривошип ОА = 10 см вращается с угловой скоростью $\omega = 6\ с^{-1}$. В тот момент, когда угол $\varphi = 90^0$, относительная скорость ползуна А будет равна…	Варианты ответов: 1) V = 60 см/с 2) $V = 60\sqrt{3}$ см/с 3) V = 30 см/с 4) V = 0 см/с

5. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

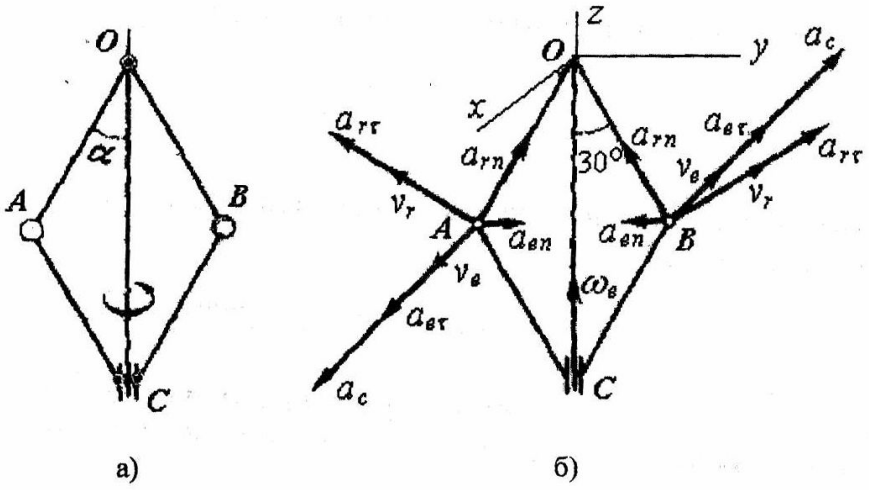
5.1. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки в случае вращательного переносного движения

Дано: В переходном режиме при пуске в ход главного судового двигателя шары центробежного регулятора Уатта (рис. 5.1, а) расходятся так, что угол α изменяется согласно уравнению

$$\alpha = \omega_{01} t + \frac{\varepsilon_1 t^2}{2}, \tag{5.1}$$

где

$$\omega_{01} = \frac{\pi}{90} \text{ рад/с}, \ \varepsilon_1 = \frac{\pi}{900} \text{ рад/с}^2 .$$



а) б)

Рис. 5.1. Схема регулятора

Угол поворота регулятора вокруг вертикальной оси является заданной функцией времени

$$\varphi = kt^3, \tag{5.2}$$

где постоянный коэффициент k= 0,3 рад/с^3.

Длина стержней $OA = OB = C = BC = l$ = 90 см.

Определить в момент t = 10 с абсолютную скорость и абсолютное ускорение шаров регулятора, рассматриваемых как точки.

Решение

Абсолютное движение шаров раскладываем на два движения: переносное движение – вращение вокруг вертикальной оси, происходящее согласно уравнению (2), и относительное движение – вращение вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O и перпендикулярной плоскости $OABC$, происходящее по закону (5.1).

Систему координат *xyz* выбираем с началом в точке *O*: ось *x* направляем перпендикулярно плоскости *OABC* (в момент t = 10 с) на читателя, ось *y* – в плоскости *OABC* по горизонтали вправо, ось *z* – по вертикальной оси вращения вверх.

Находим, пользуясь уравнением (5.1) значение угла α в момент t_1 = 10 с:

$$\alpha = \frac{\pi}{90}\cdot 10 + \frac{\pi}{900}\cdot\frac{100}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Далее, определяем проекцию относительной угловой скорости на ось *x*, т. е. на ось, вокруг которой происходит относительное вращение. Эта проекция равна производной от угла α по времени

$$\omega_{rx} = \dot{\alpha} = \omega_{01} + \varepsilon_1 t\,.$$

В момент t = с проекция относительной угловой скорости

$$\omega_{rx} = \frac{\pi}{45}\text{рад/с}.$$

Проекция относительного углового ускорения на ту же ось *x* равна производной от ω_{rx} по времени

$$\varepsilon_{rx} = \dot{\omega}_{rx} = \ddot{\alpha} = \varepsilon_1 = \frac{\pi}{900}\ \text{рад/с}^2.$$

Для того чтобы найти относительную скорость и относительное ускорение шаров, остановим мысленно переносное движение. Модуль относительной скорости шаров

$$v_r = l\omega_{rx} = 90\frac{\pi}{45} = 2\pi\ \text{см/с}=0{,}02\pi\ \text{м/с}.$$

Относительная скорость направлена соответственно перпендикулярно стержням *OA* и *OB* (рис. 5.1, б).

Переходим к определению относительного ускорения шаров. Так как относительное движение есть вращение вокруг оси, то целесообразно вычислить отдельно относительное нормальное и относительное касательное ускорения. Первое из них равно по модулю

$$a_{rn} = l\omega_r^2 = 90\frac{\pi^2}{45^2} = \frac{2\pi}{45}\ \text{см/с}^2 \approx 0{,}0044\ \text{м/с}^2$$

и направлено от шара к точке *O*. Значение относительного касательного ускорения определится по формуле

$$a_{r\tau} = l\varepsilon_r = 90\frac{\pi}{900} = \frac{\pi}{10}\ \text{см/с}^2 = \pi\cdot 10^{-3}\ \text{м/с}^2.$$

Это ускорение совпадает по направлению с относительной скоростью каждого шара (рис. 5.1, б).

Переходим к определению переносной скорости и переносного ускорения шаров. Переносное движение – вращение регулятора вокруг вертикальной оси согласно уравнению (5.2). Чтобы вычислить скорость и ускорение шаров в переносном движении, остановим мысленно относительное движение. Проекция угловой скорости переносного движения на ось вращения равна производной от угла φ по времени

$$\omega_{ez} = \dot{\varphi} = 3kt^2 .$$

При $t = 10$ с эта проекция равна

$$\omega_{ez} = 3 \cdot 0{,}3 \cdot 10^2 = 90 \text{ рад/с}.$$

Проекция углового ускорения в переносном движении на ось вращения определяется как производная от ω_{ez} по времени

$$\varepsilon_{ez} = \dot{\omega}_{ez} = \ddot{\varphi} = 6kt .$$

В момент $t_1 = 10$ с

$$\varepsilon_{ez} = 6 \cdot 0{,}3 \cdot 10 = 18 \text{ рад/с}^2.$$

Переносная скорость есть скорость шара при вращении регулятора вокруг вертикальной оси *OC*. Она равна по модулю произведению радиуса вращения на переносную угловую скорость. В момент $t_1 = 10$ с

$$v_e = l \sin\alpha \cdot \omega_e = 40{,}5 \text{ м/с}.$$

Переносная скорость шаров направлена параллельно оси *x*; для шара *A* она совпадает с положительным направлением, для шара *B* – *c* отрицательным направлением оси (при $t = t_1$).

Переносное ускорение складывается из нормального и касательного ускорений. При $t = 10$ с модуль нормального переносного ускорения

$$a_{en} = l \sin\alpha \cdot \omega_e^2 = 90 \sin 30° \cdot 90^2 \text{ см/с}^2 = 3645 \text{ м/с}^2.$$

Это ускорение направлено перпендикулярно к оси вращения *OC*.

Модуль переносного касательного ускорения равен произведению радиуса вращения на значение углового ускорения

$$a_{e\tau} = l \sin\alpha \cdot \varepsilon_e = 90 \sin 30° \cdot 18 \text{ см/с}^2 = 8{,}1 \text{ м/с}^2.$$

Оно направлено параллельно оси *x* и совпадает с направлением переносной скорости каждого шара (рис. 5.1, б).

Переходим к определению кориолисова ускорения:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r .$$

Модуль кориолисова ускорения будет

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) .$$

Замечая, что угол между $\vec{\omega}_e$ и $\vec{v}_r$ равен 60°, находим значение a_c в момент t_1 =10 с:

$$a_c = 2 \cdot 90 \cdot 2\pi \sin 60° \text{ см/с} = 1{,}8\sqrt{3}\pi \text{ м/с}^2.$$

Направление кориолисова ускорения определяется по правилу векторного произведения. Кориолисово ускорение направлено перпендикулярно к плоскости, определенной векторами $\vec{\omega}_e$ и $\vec{v}_r$, в ту сторону, с которой поворот от вектора $\vec{\omega}_e$ к $\vec{v}_r$ на наименьший угол виден против часовой стрелки. В нашем случае ускорение Кориолиса направлено по переносной скорости (рис. 5.1, б).

Найдем теперь абсолютную скорость и абсолютное ускорение шара, пользуясь методом проекций. Проекции абсолютной скорости на оси находим, проектируя на них векторное равенство

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

Имеем для шара *A*

$$v_{ax} = v_e = 40{,}5 \text{ м/с},$$

$$v_{ay} = -v_r \cos 30° = -0{,}01\sqrt{3}\pi \text{ м/с},$$

$$v_{az} = v_r \cos 60° = 0{,}01\pi \text{ м/с}.$$

Модуль абсолютной скорости равен

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2 + v_{az}^2} \approx 40{,}5 \text{ м/с},$$

а ее направление определяется значениями направляющих косинусов:

$$\cos(\vec{v}_a, x) = \frac{v_{ax}}{v_a} = 0{,}999,$$

$$\cos(\vec{v}_a, y) = \frac{v_{ay}}{v_a} = -0{,}00134,$$

$$\cos(\vec{v}_a, z) = \frac{v_{az}}{v_a} = 0{,}000775.$$

Согласно теореме сложения ускорений абсолютное ускорение

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{rr} + \vec{a}_{rn} + \vec{a}_{en} + \vec{a}_{e\tau} + \vec{a}_c.$$

Проектируя это векторное равенство на оси координат, находим проекции абсолютного ускорения шара *A:*

$$a_{ax} = a_{e\tau} + a_c \approx 17{,}9 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{ay} = a_{en} + a_{rn}\sin 30° - a_{r\tau}\cos 30° \approx 3645 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{az} = a_{rn}\cos 30° + a_{r\tau}\sin 30° \approx 0{,}0055 \text{ м/с}^2.$$

Модуль и направление абсолютного ускорения определяются по обычным формулам:

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} \approx 3646 \text{ м/с}^2,$$

$$\cos(\vec{a}_a, x) = \frac{a_{ax}}{a_a} \approx 0{,}005,$$

$$\cos(\vec{a}_a, y) = \frac{a_{ay}}{a_a} \approx 0{,}999,$$

$$\cos(\vec{a}_a, z) = \frac{a_{az}}{a_a} \approx 1{,}37 \cdot 10^{-6}.$$

5.2. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки в случае вращательного переносного движения (задание К 5 [8])

Дано: схема механизма (рис. 5.2),

$s_r = OM = 16 - 8\cos 3\pi t$ см; $\varphi_e = 0{,}9t^2 - 9t^3$ рад; $t_1 = 2/9$ с.

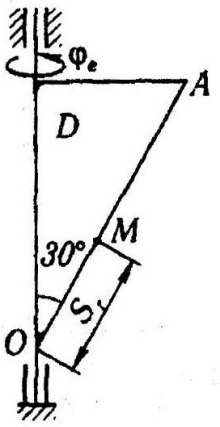


Рис. 5.2. Схема механизма

Решение

Будем считать, что в заданный момент времени плоскость чертежа (рис. 5.2) совпадает с плоскостью треугольника D. Положение точки M на теле D определяется расстоянием $s_r = OM$.

При $t = 2/9$ с

$$s_r = 16 - 8\cos(3\pi \cdot \frac{2}{9}) = 20{,}0 \text{ см}.$$

Абсолютную скорость точки M найдем как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

Модуль относительной скорости

$$v_r = |\tilde{v}_r|,$$

где $\tilde{v}_r = ds_r/dt = 24\pi \sin 3\pi t$.

При $t = 2/9$ с $\quad \tilde{v}_r = 65{,}2$ см/с; $\quad v_r = 65{,}2$ см/с.

Положительный знак у $\tilde{v}_r$ показывает, что вектор $\vec{v}_r$ направлен в сторону возрастания s_r. Модуль переносной скорости

$$v_e = R\omega_e, \qquad (5.3)$$

где R – радиус окружности L, описываемой той точкой тела, с которой в данный момент совпадает точка M; $r = s_r \sin 30° = 10{,}0$ см; ω_e – модуль угловой скорости тела:

$$\omega_e = |\widetilde{\omega}_e|;\ \widetilde{\omega}_e = d\varphi_e / dt = 1{,}8t - 27t^2.$$

При $t = 2/9$ с

$$\widetilde{\omega}_e = 0{,}93 \text{ рад/с};\ \omega_e = 0{,}93 \text{ рад/с}.$$

Отрицательный знак у величины ω_e показывает, что вращение треугольника происходит вокруг оси Oz в сторону, обратную направлению отсчета угла φ. Поэтому вектор $\vec{\omega}_e$ направлен по оси Oz вниз (рис. 5.3, а).

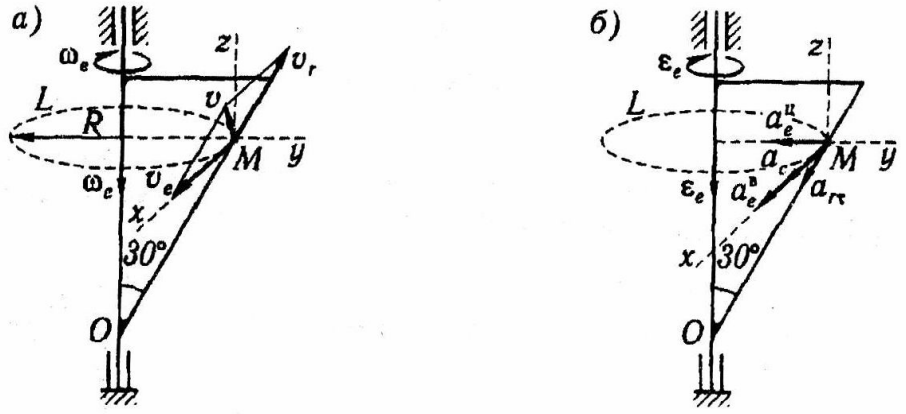


Рис. 5.3. Схема механизма с изображением направлений составляющих скорости и ускорения точки M

Модуль переносной скорости, по формуле (5.3), $v_e = 9{,}3$ см/с. Вектор $\vec{v}_e$ направлен по касательной к окружности L в сторону вращения тела.

Так как $\vec{v}_e$ и $\vec{v}_r$ взаимно перпендикулярны, модуль абсолютной скорости точки M

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2},$$

или

$$v = 65{,}9 \text{ см/с}.$$

Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c,$$

или в развернутом виде

$$\vec{a} = \vec{a}_{rr} + \vec{a}_{rn} + \vec{a}_e^{\,B} + \vec{a}_e^{\,U} + \vec{a}_c.$$

Модуль относительного касательного ускорения

$$a_{rr} = |\widetilde{a}_{rr}|,$$

где $\widetilde{a}_{rr} = d^2 s_r / dt^2 = 72\pi^2 \cos 3\pi t$.

При $t = 2/9$ с

$$\tilde{a}_{rr} = -355\,\text{см/с}^2; \qquad a_{rr} = 355\,\text{см/с}^2.$$

Отрицательный знак $\tilde{a}_{rr}$ показывает, что вектор $\vec{a}_{rr}$ направлен в сторону отрицательных значений s_r. Знаки $\tilde{v}_{rr}$ и $\tilde{a}_{rr}$ различны: следовательно, относительное движение точки M замедленное.

Относительное нормальное ускорение

$$a_{rn} = v_r^2 / \rho = 0,$$

так как траектория относительного движения – прямая ($\rho = \infty$).

Модуль переносного вращательного ускорения

$$a_e^B = R\varepsilon_e, \tag{5.4}$$

где $\varepsilon_e = |\tilde{\varepsilon}_e|$ – модуль углового ускорения тела D:

$$\tilde{\varepsilon}_e = d^2\varphi_e / dt^2 = 1{,}8 - 54t.$$

При t=2/9 с $\quad \tilde{\varepsilon}_e = -10{,}2\,\text{рад/с}^2; \qquad \varepsilon = 10{,}2\,\text{рад/с}^2.$

Знаки $\tilde{\varepsilon}_e$ и $\tilde{\omega}_e$ одинаковы: следовательно, вращение треугольника D ускоренное, направления векторов $\vec{\omega}_e$ и $\vec{\varepsilon}_e$ совпадают (рис. 5.3, а, б).

Согласно (5.4),

$$a_e^B = 102\,\text{см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_e^B$ направлен в ту же сторону, что и $\vec{v}_e$.

Модуль переносного центростремительного ускорения

$$a_e^Ц = R\omega_e^2 \quad \text{или} \quad a_e^Ц = 9\,\text{см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_e^Ц$ направлен к центру окружности L.

Кориолисово ускорение

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r.$$

Модуль кориолисова ускорения

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r),$$

где $\quad \sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = \sin 150° = 0{,}5.$

С учетом найденных выше значений ω_e и v_r получаем

$$a_c = 61\,\text{см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_c$ направлен согласно правилу векторного произведения (рис. 5.3, б).

Модуль абсолютного ускорения точки M находим способом проекций:

$$a_x = a_e^B + a_c; \qquad a_y = -a_e^Ц - a_{rr}\cos 60°;$$

$$a_z = -a_{rr}\cos 30°; \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Результаты расчета сведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

$\tilde{\omega}_e$,	Скорость, см/с			$\tilde{\varepsilon}_e$,	Ускорение, см/с^2								
рад/с	v_e	$\tilde{v}_r$	v	рад/с^2	$a_e^{Ц}$	a_e^{B}	a_m	$\tilde{a}_{rr}$	a_c	a_x	a_y	a_z	a_c
-0,93	9,3	65,2	65,9	-10,2	9	102	0	-355	61	163	-186	308	395

5.3. Моделирование движения кулисного механизма

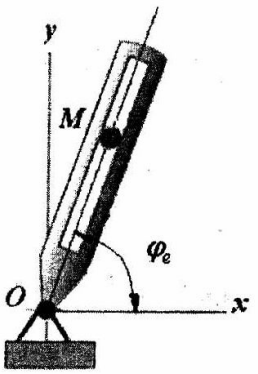


Рис. 5.4. Схема кулисного механизма

Кинематический анализ механизмов предполагает расчет параметров движения звеньев механизма, определения их положения в заданный момент времени, траектории движения заданных точек, определение скорости и ускорения характерных точек механизма. В этой связи важное значение приобретает подход, основанный на компьютерном моделировании движения механизма с анимацией процесса движения на мониторе персонального компьютера.

Данный подход реализован при разработке программного продукта для моделирования движения кулисного механизма [10], схема которого представлена на рис. 5.4.

Движение кулисы задано уравнением движения вида $\varphi_e = A_j t + B_j t^2$, где A_j, B_j – постоянные, задаваемые при формировании исходных данных. Кулиса имеет паз, вдоль которого перемещается точка M. Относительное движение точки M задано уравнением вида

$$OM = R_0 + A(1 + \sin 2\pi t),$$

где R_0 – минимально допустимое расстояние точки M до оси вращения, A – амплитуда колебаний точки M.

В правом верхнем углу поля экрана монитора персонального компьютера (рис. 5.5) расположена панель управления с окнами для ввода исходных данных: R_0, A, A_j, B_j. Здесь же на панели размещены гнезда, обозначив которые с помощью курсора, пользователь определяет необходимость вывода на экран информации о скорости или ускорении (кориолисове и абсолютном) точки M.

На панели управления внизу расположены три кнопки управления процессом моделирования. Обозначив курсором левую кнопку (кнопку «Старт»), пользователь осуществляет запуск процесса моделирования. На экране монитора реализуется анимационный процесс движения кулисы, воспроизводится траектория движения точки M.

Под панелью управления моделируется работа компьютерного осциллографа, который воспроизводит осциллограммы скорости и ускорения точки M.

Рис. 5.5. Воспроизведение на экране монитора траектории движения точки *M*, диаграммы изменения скорости точки *M* во времени

В левом верхнем углу экрана монитора в режиме реального времени воспроизводятся числовые значения параметров движения: время, угол поворота кулисы, скорость и ускорение точки *M*.

Если возникает необходимость фиксации параметров движения при интересующем пользователя положении кулисы, курсором на панели управления обозначается кнопка «Пауза». Движение кулисы прекращается, фиксируется траектория движения цифровые значения параметров движения, время.

Проанализировав результаты, пользователь может продолжить процедуру моделирования, воспользовавшись вновь кнопкой «Старт».

На рис. 5.6, а, б показаны воспроизведенные и зафиксированные на экране монитора траектория движения точки *M* с иллюстрацией направления абсолютной скорости *V* точки *M* при различных положениях кулисы. Отметим, что в режиме анимации движения вектор скорости непрерывно меняет свое направление. Вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории движения.

На рис. 5.6, в, г показаны воспроизведенные и зафиксированные на экране монитора траектория движения точки *M* с иллюстрацией направления абсолютного *a* и кориолисового $a_к$ ускорений точки *M* при различных положениях кулисы.

В режиме анимации движения вектора абсолютного *a* и кориолисового $a_к$ ускорений точки *M* непрерывно меняют свои направления. Отметим, что кориолисово ускорение $a_к$ всегда перпендикулярно вектору относительной скорости точки *M*, совпадающему с направлением паза кулисы.

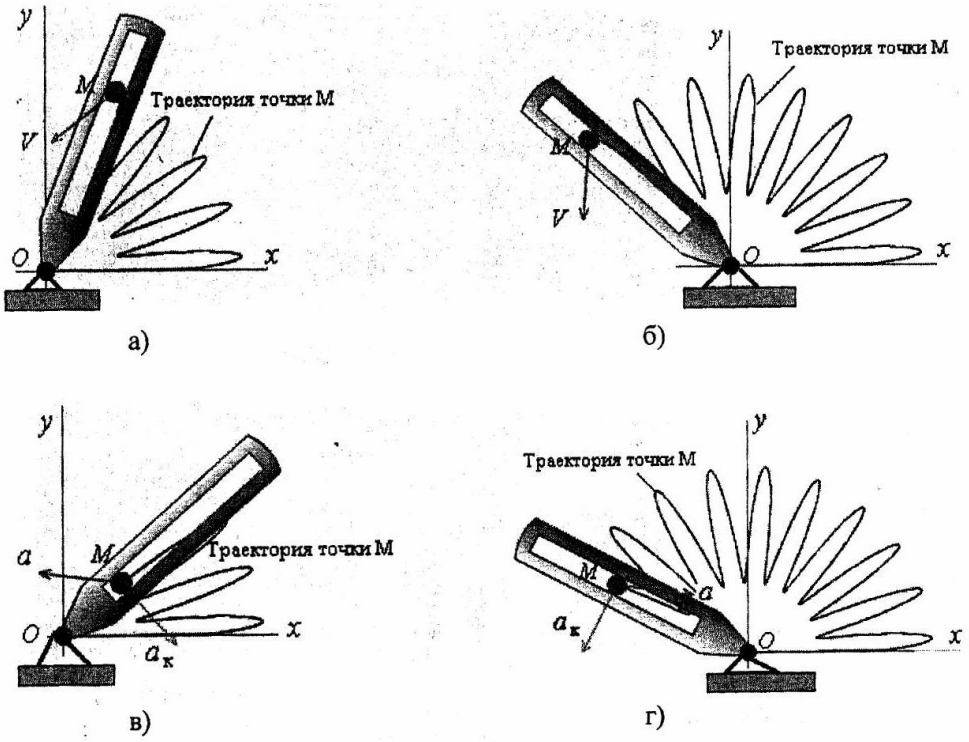
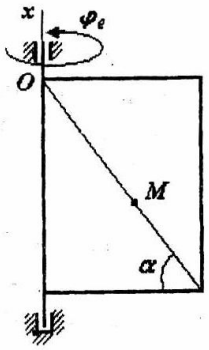


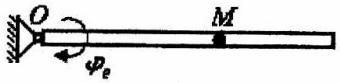
Рис. 5.6. Воспроизведение на экране монитора траектории движения точки M с иллюстрацией направления абсолютной скорости точки M, абсолютного и кориолисова ускорения точки M при различных положениях механизма

Для моделирования процесса движения при других исходных данных пользователь на управляющей панели отмечает с помощью курсора кнопку «Стоп», вводит в соответствующие окна управляющей панели необходимые данные и кнопкой «Старт» вновь моделирует процесс.

5.4. Тестовые задания

Сложное движение точки	
К65  Прямоугольная пластинка вращается вокруг вертикальной оси по закону $\varphi_e = 5t$ рад. По диагонали пластинки двигается точка M по закону $OM = (4t+3)$ м. Ускорение Кориолиса для точки M равно…	Варианты ответов: 1) $20\sqrt{3}$ м/с^2 2) 20 м/с^2 3) $10\sqrt{3}$ м/с^2 4) 20 м/с^2

К66

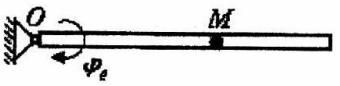


Горизонтальный стержень вращается вокруг вертикальной оси по закону $\varphi_e = \pi t/3$ рад. Вдоль стержня двигается точка М по закону ОМ = $6t$ м. Ускорение Кориолиса для точки М равно…

Варианты ответов:

1) $4\pi t$ м/с^2
2) 4π м/с^2
3) $2\pi/3$ м/с^2
4) $\frac{2\pi}{3}t$ м/с^2

К67

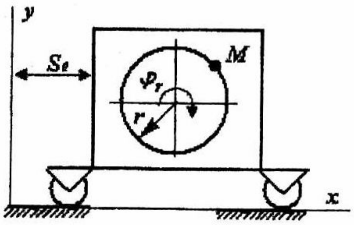


Горизонтальный стержень вращается вокруг вертикальной оси по закону $\varphi_e = t/2$ рад. Вдоль стержня двигается точка М по закону ОМ = $4t$ м. Ускорение Кориолиса для точки М равно…

Варианты ответов:

1) 2 м/с^2
2) $4t$ м/с^2
3) 4 м/с^2
4) $2t$ м/с^2

К68

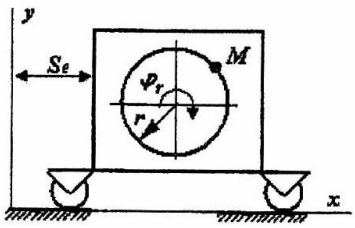


Тележка двигается по горизонтальной прямой по закону $S_e = 3 + 0{,}5t$ м. На тележке по вертикальной окружности $r = 0{,}5$ м двигается точка М по закону $\varphi_r = 3t$ рад. Ускорение Кориолиса для точки М равно…

Варианты ответов:

1) 0 м/с^2
2) $3t$ м/с^2
3) 3 м/с^2
4) 3/2 м/с^2

К69

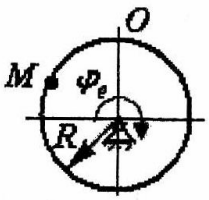


Тележка двигается по горизонтальной прямой по закону $S_e = 3t$ м. На тележке по вертикальной окружности $r = 0{,}5$ м двигается точка М по закону $\varphi_r = \frac{\pi}{2}t$ рад. Ускорение Кориолиса для точки М равно…

Варианты ответов:

1) $\frac{3\pi}{4}$ м/с^2
2) $\frac{3\pi}{2}$ м/с^2
3) 0 м/с^2
4) $\frac{3\pi}{2}t$ м/с^2

К70



Круглая пластинка радиуса R вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр по закону $\varphi_e = \frac{\pi}{4}t$ рад. Ускорение Кориолиса для точки М равно…

Варианты ответов:

1) $\frac{3\pi}{4}$ м/с^2
2) $\frac{3\pi}{2}$ м/с^2
3) 0 м/с^2
4) $\frac{3\pi}{2}t$ м/с^2

6. СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

6.1. Определение скоростей и ускорений твердого тела, катящегося без скольжения по неподвижной поверхности и имеющего неподвижную точку (задание К 8 [8])

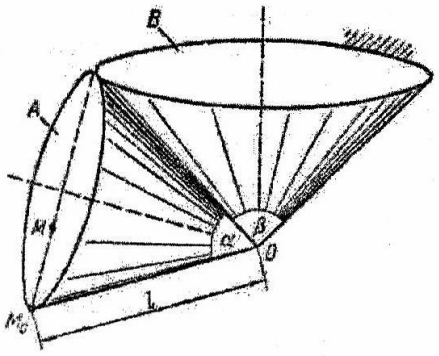


Рис. 6.1. Схема движения

Задание. Тело A катится без скольжения по поверхности неподвижного тела B, имея неподвижную точку O. Тела A и B представляют собой прямые круглые конусы (рис. 6.1).

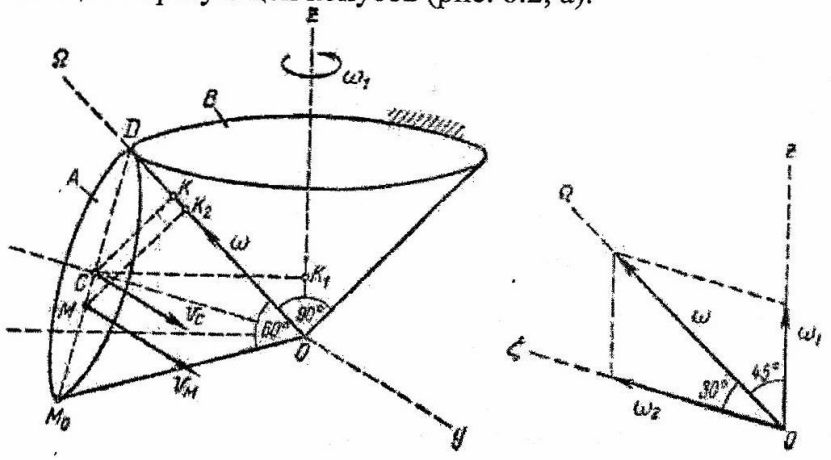
Определить угловую скорость и угловое ускорение тела A, а также скорость и ускорение точки M при заданном положении тела A, если его ось $O\xi$ вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 вокруг неподвижной оси Oz.

Исходные данные: $\alpha = 60°$; $\beta = 90°$; $OM_0 = l = 30$ см; $\omega_1 = 1{,}2$ с$^{-1}$; $M_0M = 10$ см.

Решение

1. *Определение угловой скорости тела A.*

Конус A совершает сферическое движение. Мгновенная ось вращения $O\Omega$ совпадает с общей образующей конусов (рис. 6.2, а).



а) б)

Рис. 6.2. Схемы для определения линейных и угловых скоростей

Скорость v_c точки C является вращательной скоростью вокруг мгновенной оси. Следовательно, угловая скорость конуса

$$\omega = \frac{v_c}{CK}.$$

С другой стороны, скорость точки C, описывающей окружность радиусом CK_1, можно определить по формуле

$$v_c = CK_1 \cdot \omega_1.$$

По рис. 6.2, а

$$CK_1 = l \cdot \cos 30^\circ \cdot \sin 75^\circ = 30 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}966 = 25{,}1 \text{ см}.$$

Поэтому

$$v_c = 25{,}1 \cdot 1{,}2 = 30{,}1 \text{ см/с}.$$

Так как

$$CK = l \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 60^\circ = 30 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}866 = 13 \text{ см},$$

то

$$\omega = \frac{30{,}1}{13} = 2{,}32 \text{ с}^{-1}.$$

Направление вектора $\vec{\omega}$ определяется направлением вектора $\vec{v}_c$ (рис. 6.2, а).

Угловую скорость конуса A можно найти также путем сложения вращений вокруг пересекающихся осей – построением параллелограмма угловых скоростей (рис. 6.2, б). На рис. 6.2, б $\vec{\omega}_2$ – угловая скорость конуса A во вращении относительно собственной оси $O\xi$.

По теореме синусов

$$\frac{\omega}{\sin 75^\circ} = \frac{\omega_1}{\sin 30^\circ},$$

откуда

$$\omega = \omega_1 \frac{\sin 75^\circ}{\sin 30^\circ} = 1{,}2 \cdot \frac{0{,}966}{0{,}5} = 2{,}32 \text{ с}^{-1}.$$

2. *Определение углового ускорения тела A.*

Угловое ускорение конуса A геометрически равно скорости $\vec{u}$ конца вектора $\vec{\omega}$, который описывает окружность радиусом $\omega \cdot \sin 45^\circ$ вокруг оси Oz (рис. 6.3):

$$u = \omega \cdot \sin 45^\circ \cdot \omega_1 = 2{,}32 \cdot 0{,}707 \cdot 1{,}2 = 1{,}97 \text{ с}^{-1};$$

$$\varepsilon = u = 1{,}97 \text{ с}^{-2}.$$

Вектор $\vec{\varepsilon}$ приложен в точке O и направлен перпендикулярно к плоскости $zO\xi$. Следовательно, ось углового ускорения OE совпадает с осью Oy.

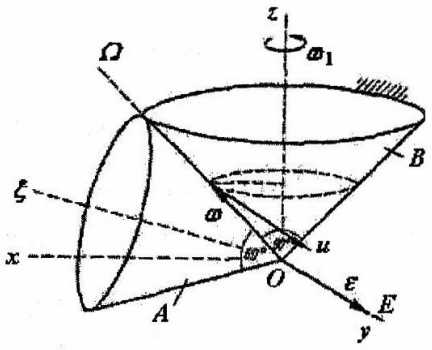


Рис. 6.3. Схема для определения углового ускорения

2. *Определение скорости точки M тела A.*

Скорость точки M определяем как вращательную скорость вокруг мгновенной оси:

$$v_M = MK \cdot \omega = MD \cdot \cos 30^\circ \cdot \omega;$$

$$MD = 2l \cdot \sin 30^\circ - M_0M = 2 \cdot 30 \cdot 0{,}5 - 10 = 20 \text{ см};$$

$$v_M = 20 \cdot 0{,}866 \cdot 2{,}32 = 40{,}2 \text{ см/с}.$$

Вектор $\vec{v}_M$ параллелен вектору $\vec{v}_c$ и имеет одинаковое с ним направление (рис. 6.2, а).

4. *Определение ускорения точки M тела A.*

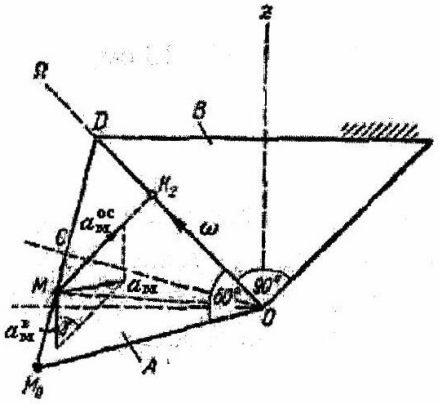


Рис. 6.4. Схема для определения ускорения точки M

Ускорение точки M тела A находим как геометрическую сумму осестремительного и вращательного ускорений:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_M^{\text{ос}} + \vec{a}_M^{\text{в}}.$$

Осестремительное ускорение направлено по перпендикуляру к мгновенной оси вращения (рис. 6.4) и определяется как

$$\vec{a}_M^{\text{ос}} = MK_2 \cdot \omega^2 = MD \cdot \cos 30^\circ \cdot \omega^2 =$$

$$= 20 \cdot 0{,}866 \cdot 2{,}32^2 = 93{,}22 \text{ см/с}^2.$$

Вращательное ускорение направлено перпендикулярно к OM в плоскости $zO\xi$, как показано на рис. 6.5,

$$a_M^{\text{в}} = OM \cdot \varepsilon; \quad OM = \sqrt{l^2 + (M_0M)^2 - 2l \cdot M_0M \cdot \cos 60^\circ};$$

$$OM = \sqrt{900 + 100 - 2 \cdot 30 \cdot 10 \cdot 0{,}5} = 26{,}5 \text{ см};$$

$$a_M^{\text{в}} = 26{,}5 \cdot 1{,}97 = 52{,}2 \text{ см/с}^2.$$

Обе составляющие расположены в плоскости $zO\xi$ (zOx). Величину $\vec{a}_M$ найдем как диагональ параллелограмма, построенного на этих составляющих:

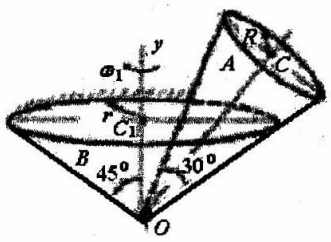
$$a_M = \sqrt{(a_M^{\text{ос}})^2 + (a_M^{\text{в}})^2 - 2a_M^{\text{ос}} \cdot a_M^{\text{в}} \cdot \cos\gamma};$$

$$\cos\gamma = \cos(< K_2OM) = \frac{l - MD \cdot \sin 30^\circ}{\text{OM}} = \frac{30 - 20 \cdot 0{,}5}{26{,}5} = 0{,}75;$$

$$a_M = \sqrt{93{,}22^2 + 52{,}2^2 - 2 \cdot 93{,}22 \cdot 52{,}2 \cdot 0{,}75} = \sqrt{4115{,}7} = 64{,}2 \text{ см/с}^2.$$

6.2. Тестовые задания

К55



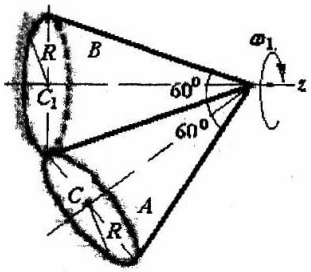
Подвижный конус А катится без проскальзывания по неподвижному конусу В так, что угловая скорость вращения оси ОС вокруг оси OC_1 неподвижного конуса постоянна и равна ω_1.

Если известны углы и радиус основания $R = 1$ м, мгновенная угловая скорость тела А равна…

Варианты ответов:

1) $\Omega = 0,52\omega_1$ с$^{-1}$
2) $\Omega = 0,35\omega_1$ с$^{-1}$
3) $\Omega = 1,9\omega_1$ с$^{-1}$
4) $\Omega = 2,7\omega_1$ с$^{-1}$
5) $\Omega = 0,7\omega_1$ с$^{-1}$

К57

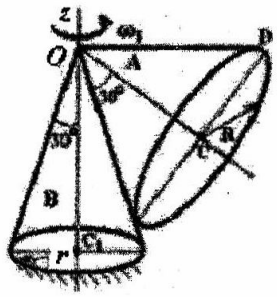


Подвижный конус А катится без проскальзывания по неподвижному конусу В так, что угловая скорость вращения оси ОС вокруг оси OC_1 неподвижного конуса постоянна и равна ω_1. Если известны углы и радиус основания $R = 1$ м, мгновенная угловая скорость тела А равна…

Варианты ответов:

1) $\Omega = 0,5\omega_1$ с$^{-1}$
2) $\Omega = \omega_1$ с$^{-1}$
3) $\Omega = \sqrt{3}\omega_1$ с$^{-1}$
4) $\Omega = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_1$ с$^{-1}$
5 $\Omega = \frac{2\sqrt{3}}{3}\omega_1$ с$^{-1}$

К58

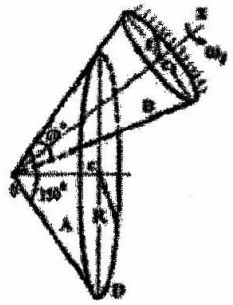


Подвижный конус А катится без проскальзывания по неподвижному конусу В так, что угловая скорость вращения оси ОС вокруг оси OC_1 неподвижного конуса постоянна и равна ω_1. Если известны углы и радиус основания $R = 1$ м, мгновенная угловая скорость тела А равна…

Варианты ответов:

1) $\Omega = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_1$ с$^{-1}$
2) $\Omega = \frac{2\sqrt{3}}{3}\omega_1$ с$^{-1}$
3) $\Omega = \omega_1$ с$^{-1}$
4) $\Omega = \sqrt{3}\omega_1$ с$^{-1}$
5) $\Omega = 0,5\omega_1$ с$^{-1}$

К59

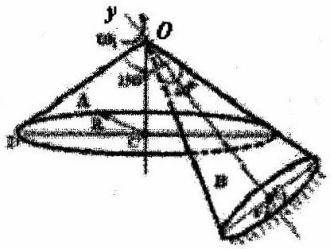


Подвижный конус А катится без проскальзывания по неподвижному конусу В так, что угловая скорость вращения оси ОС вокруг оси OC_1 неподвижного конуса постоянна и равна ω_1. Если известны углы и радиус основания $R = 1$ м, мгновенная угловая скорость тела А равна…

Варианты ответов:

1) $\Omega = 0,73\omega_1$ с$^{-1}$
2) $\Omega = 0,52\omega_1$ с$^{-1}$
3) $\Omega = 1,37\omega_1$ с$^{-1}$
4) $\Omega = 0,28\omega_1$ с$^{-1}$
5) $\Omega = 1,92\omega_1$ с$^{-1}$

К60

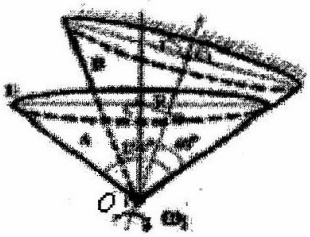


Подвижный конус А катится без проскальзывания по неподвижному конусу В так, что угловая скорость вращения оси ОС вокруг оси OC_1 неподвижного конуса постоянна и равна ω_1. Если известны углы и радиус основания $R = 1$ м, мгновенная угловая скорость тела А равна…

Варианты ответов:

1) $\Omega = 0,52\omega_1$ с$^{-1}$
2) $\Omega = 0,28\omega_1$ с$^{-1}$
3) $\Omega = 1,37\omega_1$ с$^{-1}$
4) $\Omega = 0,73\omega_1$ с$^{-1}$
5) $\Omega = 1,92\omega_1$ с$^{-1}$

К62

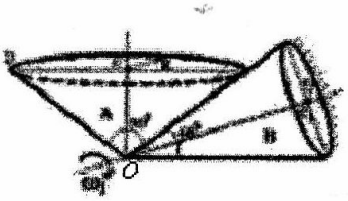


Подвижный конус А катится без проскальзывания по неподвижному конусу В так, что угловая скорость вращения оси ОС вокруг оси OC_1 неподвижного конуса постоянна и равна ω_1. Если известны углы и радиус основания $R = 1$ м, мгновенная угловая скорость тела А равна…

Варианты ответов:

1) $\Omega = 0,43\omega_1$ с$^{-1}$
2) $\Omega = 1,1\omega_1$ с$^{-1}$
3) $\Omega = 3,7\omega_1$ с$^{-1}$
4) $\Omega = 1,92\omega_1$ с$^{-1}$
5) $\Omega = 0,52\omega_1$ с$^{-1}$

К63



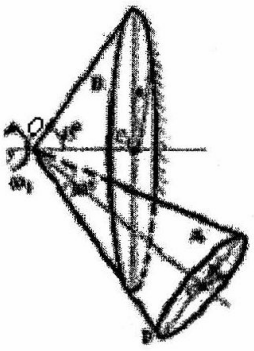
Подвижный конус А катится без проскальзывания по неподвижному конусу В так, что угловая скорость вращения оси ОС вокруг оси OC_1 неподвижного конуса постоянна и равна ω_1.

Если известны углы и радиус основания $R = 1$ м, мгновенная угловая скорость тела А равна…

Варианты ответов:

1) $\Omega = 0,73\omega_1$ с$^{-1}$
2) $\Omega = 0,52\omega_1$ с$^{-1}$
3) $\Omega = 1,37\omega_1$ с$^{-1}$
4) $\Omega = 0,28\omega_1$ с$^{-1}$
5) $\Omega = 1,92\omega_1$ с$^{-1}$

К64



Подвижный конус А катится без проскальзывания по неподвижному конусу В так, что угловая скорость вращения оси ОС вокруг оси OC_1 неподвижного конуса постоянна и равна ω_1.

Если известны углы и радиус основания $R = 1$ м, мгновенная угловая скорость тела А равна…

Варианты ответов:

1) $\Omega = 0,7\omega_1$ с$^{-1}$
2) $\Omega = 0,52\omega_1$ с$^{-1}$
3) $\Omega = 0,35\omega_1$ с$^{-1}$
4) $\Omega = 1,9\omega_1$ с$^{-1}$
5) $\Omega = 2,7\omega_1$ с$^{-1}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания составлены в соответствии с учебными программами по дисциплине «Теоретическая механика» для направлений «Машиностроительные технологии и оборудование», «Транспортные машины и транспортно-технологические комплексы», «Эксплуатация транспорта и транспортного оборудования», «Строительство». Данные методические указания могут быть использованы студентами других специальностей при изучении раздела «Кинематика».

В методических указаниях представлены примеры решения задач и выполнения расчетных и контрольных заданий по теоретической механике (раздел «Кинематика»).

В методических указаниях каждый раздел сопровождается тестовыми заданиями, которые могут быть использованы для самостоятельной работы и контроля знаний.

Рассмотрены задачи по определению скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения; составлению уравнений движения точки и определению ее скорости и ускорения; определению скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях; определению скоростей и ускорений точек твердого тела при плоском движении; определению абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки в случае вращательного переносного движения; определению скоростей и ускорений твердого тела, катящегося без скольжения по неподвижной поверхности и имеющего неподвижную точку.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бутенин Н. В. Курс теоретической механики: учеб. пособие для втузов / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. Т 1. – М.: Наука, 1985. – 250 с.
2. Яблонский А. А. Курс теоретической механики. Часть 1. Статика, кинематика / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – М.: Высшая школа, 1977. – 368 с.
3. Добронравов В. В. Курс теоретической механики / В. В. Добронравов, Н. Н. Никитин. – М.: Высшая школа, 1983. – 576 с.
4. Яблонский А. А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учеб. пособие для тех. вузов / А. А. Яблонский, С. С. Норейко, С. Н. Вульфсон и др. – М.: Интеграл-Пресс, 2005. – 382 с.
5. Мещерский И. В. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие / И. В. Мещерский. – СПб.: Лань: Омега – Л, 2005. – 448 с.
6. Бать М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов: в 3 т. Т. 1 / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – М.: Наука, 1984. – 502 с.