ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
КИНЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие для
практических занятий

Учебно-методическое пособие предназначено для решения задач по дисциплине «Теоретическая механика» раздел «Кинематика» студентами всех специальностей и форм обучения.

Введение

Главной задачей высшей школы является подготовка специалистов, владеющих способностью осмыслить конкретное в абстрактном, и наоборот, уметь выделить абстрактное в ряде конкретных фактов и явлений. Эта способность развивается при овладении определёнными знаниями, получаемыми при изучении ряда фундаментальных дисциплин. Такие знания, в отличие от конкретных, не стареют.

Одной из таких дисциплин является теоретическая механика. Ей принадлежит ведущая роль в разработке научной базы инженерной подготовки специалистов на основе использования методов физического исследования, математического анализа и вычислительной техники.

Основная цель настоящего пособия – помочь будущему специалисту обрести навыки использования основных принципов и законов механики в решении конкретных инженерных задач. Для облегчения пользования пособием каждому разделу предшествуют конкретные сведения по теории и формулы.

В пособии включены задачи по разделу курса кинематика, выбранные с учётом опыта преподавания на инженерных специальностях

Литература:

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1985, т. 1, 271 с., т 2,543 с.

2. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике: Учеб. Пособие. 38-е изд., – СПб.: Лань, 2001, 448 с.

3. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие для технических вузов. – М.: Интеграл-Пресс, 2002, 384 с.

4. Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах, –. М.: Высш. шк. 1984.

Тема 1. Кинематика точки

Кинематика изучает движение механической системы, в частности абсолютно твёрдого тела, независимо от сил, действующих на эту систему. При движении твердого тела его точки движутся различно, поэтому сначала изучается движение более простого объекта, т.е. точки.

Задачей кинематики точки является определение её основных кинематических параметров: траектории, скорости и ускорения. Но чтобы определить эти параметры точки необходимо задать её движение – определить положение точки по отношению к выбранной системе отсчета в любой момент времени. Чаще описывают движение точки тремя способами; векторным, координатным и естественным.

При векторном способе положение точки определяется её радиусом-вектором ($\vec{r}$), проведённым из неподвижного центра – начала системы отсчёта. Радиус-вектор выражается как векторная функция от времени, т.е.

$$\vec{r} = r(t) \qquad (16)$$

В соответствии с координатным способом положение точки в любой момент задается кинематическими уравнениями:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad z = z(t), \qquad (17)$$

где x, y, z – декартовые координаты точки.

Существенной особенностью естественного способа является то, что заранее должна быть известна траектория движущейся точки.

Положение точки в пространстве однозначно определяется дуговой координатой (S), отсчитываемой от выбранного начала отсчета в положительном или отрицательном направлениях, т.е.

$$S = S(t) \tag{18}$$

Быстроту изменения положения точки по отношению к выбранной системе отсчета характеризует вектор скорости $\vec{V}$. Он всегда направлен по касательной к траектории точки в сторону её движения. При векторном способе задания движения скорость определяется как первая производная по времени от радиуса-вектора точки.

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{19}$$

При координатном способе скорость определяется по ее проекциям на координатные оси.

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x};\ V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y},\ V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \tag{20}$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \tag{21}$$

$$\cos\left(\vec{V},\wedge\vec{i}\right) = \frac{\dot{x}}{V},\ \cos\left(\vec{V},\wedge\vec{j}\right) = \frac{\dot{y}}{V},\ \cos\left(\vec{V},\wedge\vec{k}\right) = \frac{\dot{z}}{V} \tag{22}$$

При естественном способе задания движения точки ее скорость находят по формулам:

$$\vec{V} = \tilde{V}\cdot\vec{\tau}, \tag{23}$$

где $\vec{\tau}$ – орт касательной; $\tilde{V}$ – алгебраическая величина скорости, причем

$$\tilde{V} = \frac{dS}{dt} = \dot{S} = \pm V \tag{24}$$

При движении точки вектор скорости ее может меняться как по величине, так и по направлению. Быстроту изменения вектора скорости характеризует вектор ускорения.

При векторном способе задания вектор ускорения ($\vec{a}$), определяется выражением:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{25}$$

При координатном способе, как и скорость, ускорение определяется по его проекциям:

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x},\ a_y = \dot{V}_y = \ddot{y},\ a_z = \dot{V}_z = \ddot{z} \tag{26}$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \tag{27}$$

$$\cos\left(\vec{a},\wedge\vec{i}\right) = \frac{\ddot{x}}{V},\ \cos\left(\vec{a},\wedge\vec{j}\right) = \frac{\ddot{y}}{V},\ \cos\left(\vec{a},\wedge\vec{k}\right) = \frac{\ddot{z}}{V} \tag{28}$$

Как векторную сумму ускорений определяют ускорение при естественном способе задания движения точки:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \tag{29}$$

где $\vec{a}_\tau$ – касательное (тангенциальное) ускорение; $\vec{a}_n$ – нормальное ускорение.

Вектор ускорения $\vec{a}_\tau$ характеризует быстроту изменения скорости по величине и направлению по касательной к траектории движения.

$$\tilde{a}_\tau = \frac{d\tilde{V}}{dt} = \ddot{S}. \tag{30}$$

Вектор $\vec{a}_n$ характеризует изменение скорости по направлению и всегда направлен по нормали к траектории в сторону ее вогнутости.

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\dot{S}^2}{\rho} \tag{31}$$

где ρ – радиус кривизны траектории в заданной точке.

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \tag{32}$$

т.к. $\vec{a}_\tau \perp \vec{a}_n$.

Связь между координатным и естественным способами выражается равенством:

$$S = \pm\int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\cdot dt \qquad (33)$$

В кинематике точки решаются задачи трех типов:

1. По известным кинематическим уравнениям движения точки находят ее траекторию, скорость, полное, нормальное и касательное ускорения;
2. По известной траектории и закону движения точки по этой траектории находят скорость, полное, нормальное и касательное ускорения;
3. По известному ускорению точки и начальным условиям находят кинематические уравнения движения.

Задача 1:

Движение точки задано уравнениями : $x = 3\sin t$; $y = 3\cos t$. Найти уравнение траектории точки, скорость и ускорение точки. Указать закон движения точки по траектории, отсчитывая расстояние от ее начального положения.

Ответ: $x^2 + y^2 = 3$; $S = 3t$; $a_\tau = 0$; $a_n = 3$.

Задача 2:

Точка движется по дуге окружности радиуса R – 0,2 м по закону $S = 0{,}2\sin\pi\cdot t$ (t – в секундах, S – в метрах). Найти скорость ее и ускорение в момент t = 5 с.

Ответ: V = – 20π, a = 20π.

Задача 3:

Ползун движется по прямолинейной направляющей с ускорением $a = -\pi^2\sin\frac{\pi}{2}t$ (м/с^2). Найти ускорения движения ползуна, если его начальная скорость V_{0x} = 2π м/с, а начальное положение совпадает с началом координат.

Ответ: $x = 4\sin\frac{\pi}{2}t$.

Задача 4:

Снаряд движется в вертикальной плоскости согласно ускорениям $x = 300t$; $y = 400t - 5t^2$ (t – в секундах, x, y – в метрах). Найти: 1) скорость и ускорение в начальный момент, 2) высоту и дальность обстрела, 3) радиусы кривизны траектории в начальной и наивысшей точках.

Ответ: $V_0 = 500$ м/с, a_0 = 10 м/с^2, h = 8000 м, S = 24000 м, ρ_0 = 41670 м, ρ_n = 9000м.

Задача 5:

Точка движется по некоторой траектории по некоторому закону: $S = \frac{t^4}{12} - \frac{t^3}{2} + t^2$ (S – в метрах, t – в секундах). Определить момент времени τ, когда скорость точки приобретает наибольшее значение.

Ответ: τ = 1 с.

Задача 6:

Точка движется по окружности радиуса R = 1 м по закону $S = t^2 - t$ (S – в метрах, t – в секундах). Определить момент времени τ, когда касательное ускорение точки равно ее нормальному ускорению.

О т в е т: $\boldsymbol{\tau = 0{,}5\left(\sqrt{2}+1\right)}$ с.

З а д а ч а 7:
Движение груза *B* математического маятника (рис. 1), задано уравнением $\boldsymbol{S = O\breve{B} = S_0 \cdot \cos pt}$ ($\boldsymbol{S_0}$ и $\boldsymbol{p = \sqrt{\frac{q}{l}}}$ – постоянные величины). Чему равны максимальные касательное и нормальное ускорение груза *B*?

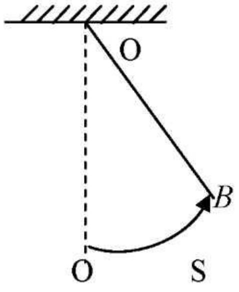

Рис. 1

О т в е т: $\boldsymbol{a_\tau^{\max} = \frac{S_0 \cdot q}{l}}$, $\boldsymbol{a_n^{\max} = \frac{S_0^2 \cdot q}{l^2}}$.

Тема 2. Кинематика твердого тела

Простейшие движения твердого тела.

К простейшим движениям твердого тела относятся поступательное и вращательное вокруг неподвижной оси. Кинематика поступательного движения твердого тела полностью определяется кинематикой любой его точки, т.к. все точки в данном случае движутся одинаково.

Кинематическими параметрами вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси являются угол поворота φ, угловая скорость $\vec{\omega}$, угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$. Закон вращательного движения определяют по уравнению:

$$\boldsymbol{\varphi = \varphi(t)}. \quad (34)$$

Быстроту изменения угла поворота характеризует вектор угловой скорости $\vec{\omega}$, направленный вдоль оси вращения в ту сторону, откуда вращение тела видно происходящим против хода часовой стрелки.

Модуль угловой скорости равен абсолютному значению производной угла поворота по времени:

$$\boldsymbol{\omega = \dot{\varphi}} \quad (35)$$

Единица измерения угловой скорости – радиан в секунду ($с^{-1}$). Быстроту изменения угловой скорости характеризует вектор углового ускорения, который направлен также по оси вращения в сторону вектора $\vec{\omega}$ при ускоренном вращении и в обратную при замедленном.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}, \ \tilde{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad (36)$$

Линейную скорость произвольной точки вращающегося тела определяют по формуле Эйлера.

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (37)$$

где *r* – радиус- вектор этой точки, проведенный из любой точки оси вращения.

Модуль вектора скорости любой точки тела определяют из выражения:

$$\boldsymbol{V = \omega \cdot h} \quad (38)$$

где h – кратчайшее расстояние от точки до оси вращения.

Линейное ускорение точки определяют как векторную сумму касательного и нормального ускорений

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \tag{39}$$

$$a_\tau = \varepsilon \cdot h; \; a_n = \omega^2 h; \qquad a = \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \cdot h \tag{40}$$

В кинематике вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси решаются задачи:

1. На нахождение закона вращательного движения ;
2. На равнопеременное вращение;
3. На определение кинематических параметров движения тела и его отдельных точек по заданному закону вращательного движения.

Задача 1:

Груз M приводится в движение тросом $АВД$, конец $Д$ которого движется с постоянной скоростью (рис. 2). Записать уравнение поступательного движения груза вдоль оси OX, приняв за начало отсчета начальное положение груза, если l_0 – начальная длина части троса A_0B, h – расстояние от верхней точки B блока C.

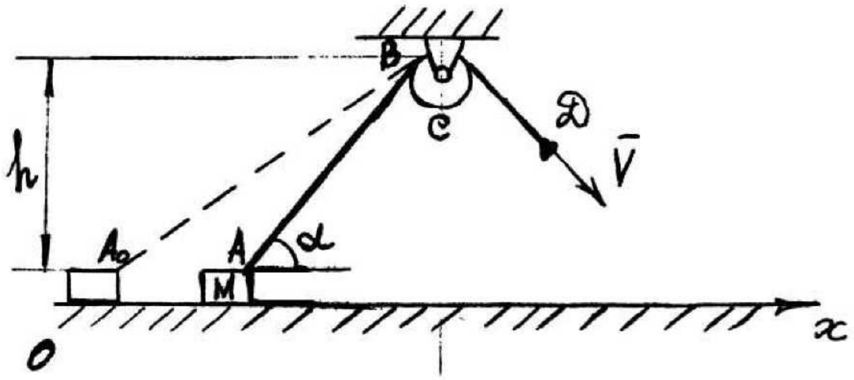

Рис. 2

Ответ: $x = \sqrt{l_0^2 - h^2} - \sqrt{(l_0 - Vt)^2 - h^2}$

Задача 2:

Груз M приводится в движение тросом $АВД$, конец $Д$ которого движется с постоянной скоростью V. Определить скоростьV_M движения груза в функции угла α, приняв за начало отсчет начальное положение груза, если l_0 – начальная длина части троса A_0B, h – расстояние от верхней горизонтальной поверхности груза до верхней точки B блока C. Рис. 2.

Ответ: $V_M = \dfrac{V}{\cos\alpha}$.

Задача 3:

Записать уравнение вращения диска паровой турбины при пуске в ход, если известно, что угол поворота пропорционален кубу времени и при $t = 3$ с угловая скорость диска соответствует $n = 810$ об /мин.

Ответ: $\varphi = \pi \cdot t^3$.

Задача 4:

Тело начинает вращаться равноускоренно из состояния покоя и делает 3600 оборотов в первые 2 мин. Определить угловое ускорение.

Ответ: $\varepsilon = \pi$ (с$^{-2}$).

Задача 5:

Вал радиуса $R = 0{,}1$ м приводится во вращение гирей P, подвешенной к нему на нити (рис. 3). Движение гири выражается уравнением $x = 100\ t$., где x – расстояние от центра тяжести гири до места схода нити с поверхности вала, выраженное в сантиметрах, t – время в секундах. Определить угловую скорость и угловое ускорение вала, а также полное ускорение точки по поверхности вала в момент времени $t = 2$ сек.

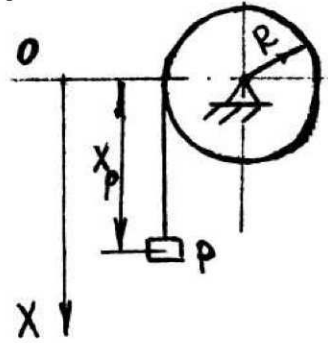

Рис. 3

Ответ: $V = 4$ м/с, $\omega = 40$ с$^{-1}$, $\varepsilon = 20$ с$^{-2}$.

Задача 6:

Определить скорость и ускорение точки, находящейся на поверхности Земли, принимая во внимание только вращение Земли вокруг своей оси. Широта местности 60^0, радиус Земли 6370 км.

Ответ: $V = 0{,}232$ км/с, $a = 0{,}0169$ м/с.

Задача 7:

Определить угловое ускорение минутной стрелки часов, если они в сутки спешат на 1 минуту, (угловое ускорение считать постоянным).

Задача 8:

Ведущий вал I фрикционной передачи (рис. 4), делает 600 об/мин. и на ходу передвигается (направление указано стрелкой) так, что расстояние меняется по закону $d = (\ 10 - 0{,}5t\ )$ см (t – в секундах). Определить:

1. Угловое ускорение вала II как функцию от расстояния.
2. Полное ускорение точки на ободе колеса B в момент, когда $d = r$; ($r = 0{,}05$ м, $R = 0{,}15$ м)

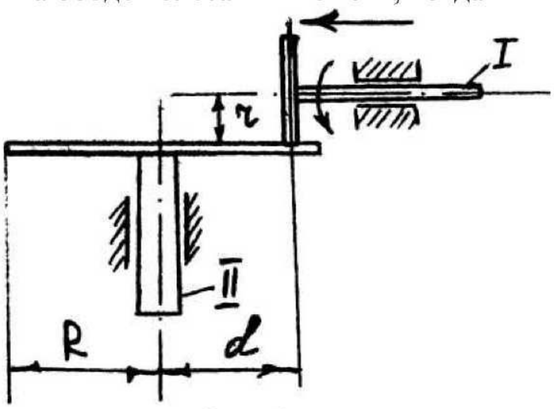

Рис. 4

Ответ: 1) $\varepsilon = \dfrac{\pi \cdot 50}{d^2}$ с$^{-2}$, 2) $a = 30\pi\sqrt{40000\pi^2 + 1}$ см/с^2.

Тема 3. Сложное движение точки

Во многих задачах механики, когда исследуется движение точки, находящейся на каком-либо подвижном объекте, целесообразно рассматривать движение точки одновременно по отношению к двум системам отсчёта. Одна из них условно принимается за неподвижную; другая движется по отношению к первой. В этом случае движение точки рассматривается как сложное, слагающееся из ее движения по отношению к подвижной системе и движения вместе с подвижной по отношению к неподвижной.

Движение точки по отношению к подвижной системе называют относительным. Скорость и ускорение в этом движении $(\vec{V}_r, \vec{a}_r)$ - называют относительными.

Движение подвижной системы координат по отношению к неподвижной называют переносным движением.

Соответственно линейная скорость и линейное ускорение той точки подвижной системы отсчета (подвижной среды) осуществляющей переносное движение, через которую в данный момент вследствие относительного движения проходит исследуемая точка, называются переносной скоростью ($\vec{V}_e$) и переносным ускорением.

Движение точки по отношению к неподвижной системы отсчета называют абсолютным. Скорость и ускорение в этом движении называют абсолютной скоростью ($\vec{V}$) и абсолютным ускорением ($\vec{a}$). В основе теории сложного движения лежат теоремы:

1. Абсолютная скорость точки равна векторной сумме переносной и относительной скоростей:

$$\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r \qquad (41)$$

2. Абсолютное ускорение точки равно векторной сумме трех ускорений: переносного, относительного и ускорения Кориолиса:

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_K \qquad (42)$$

Для определения ускорения Кориолиса используют формулу:

$$\vec{a}_K = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r \qquad (43)$$

где $\vec{\omega}_e$ – угловая скорость переносного движения.

В кинематике сложного движения точки решаются задачи на определение параметров составных движений.

Задача 1:

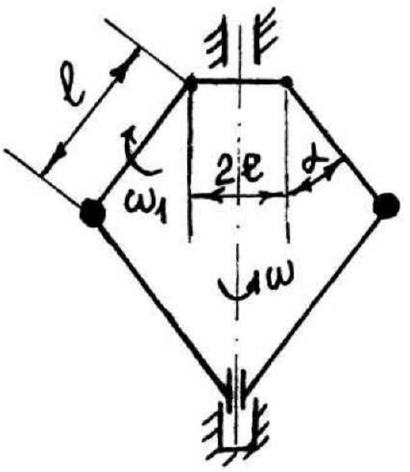

Рис. 5

Шары центробежного регулятора Уатта (рис. 5), вращающегося вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω = 10 c^{-1}, из-за изменения нагрузки машины отходят от этой оси, имея угловую скорость своих стержней ω_1 = 1,2 c^{-1}

Найти абсолютную скорость шаров регулятора в рассматриваемый момент, если длина стержней l = 0,5 см; расстояние между осями их привеса $2l$ = 0,5 см, углы регулятора $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 30^0$ /

Ответ: V = 3,06 (м/с).

Задача 2:

На неподвижном клине, образующем угол α с горизонтом, лежит нерастяжимая нить. Один из концов нити закреплён в точке A. К нижнему концу нити прикреплен небольшой грузик (рис. 6). В некоторый момент времени клин начинает двигаться с постоянным ускорением a^e.

С каким ускорением движется грузик, пока он находится на клине?

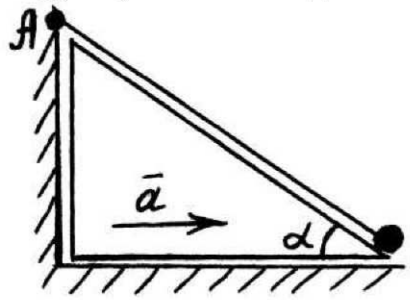

Рис. 6

О т в е т: $a = 2a^e \cdot \frac{\sin\alpha}{2}$.

З а д а ч а 3:

На проволочной окружности радиуса 10 см надето колечко M (рис. 7); через него проходит стержень OA, который равномерно вращается вокруг точки 0, лежащей на той же окружности; угловая скорость стержня такова, что он поворачивается на прямой угол за 5 сек. Определить скорость и ускорение колечка.

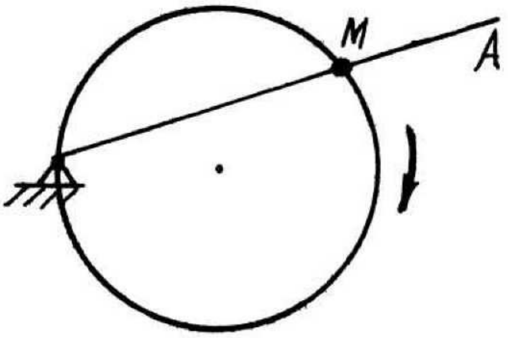

Рис. 7

О т в е т: $V = 0{,}02\pi$ м/с, $a = 0{,}004\pi^2$ м/с^2.

З а д а ч а 4:

Клин A движется поступательно по горизонтальной плоскости и приводит в движение вдоль оси $У$ толкатель B (рис. 8). Определить скорость толкателя , если скорость клина $V_a = 0{,}6$ м/с.

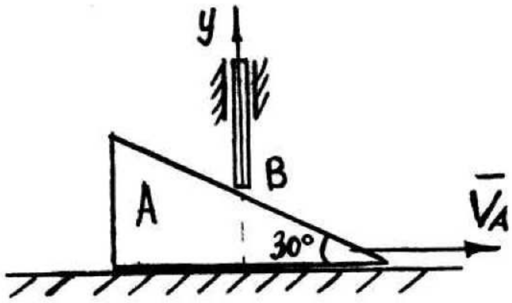

Рис. 8

О т в е т: $V_B = 0{,}2\sqrt{3}$ м/с.

З а д а ч а 5:

Кривошип ОС кривошипно– кулисного механизма (рис. 9), вращается с угловой скоростью ω = 2 с$^{-1}$ вокруг горизонтальной оси OZ. Определить скорость и ускорение кулисы $АВД$ в положении механизма, когда кривошип образует с осью OX угол 30^0, если OC = 0,1 см.

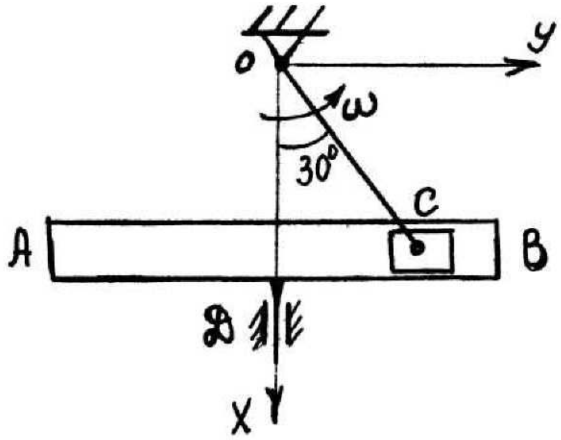

Рис. 9

Ответ: $V = 0{,}1$ м/с, $a = 0{,}346$ м/с^2.

Задача 6:

Стержень OA вращается в вертикальной плоскости вокруг неподвижной оси OZ по закону $\varphi = \sin 2\pi \cdot t$ (рис. 10). Вдоль стержня движется ползун M согласно закона $S = OM = \cos 2\pi \cdot t$ м. Определить в момент времени $t = 1$ с. абсолютное ускорение ползуна.

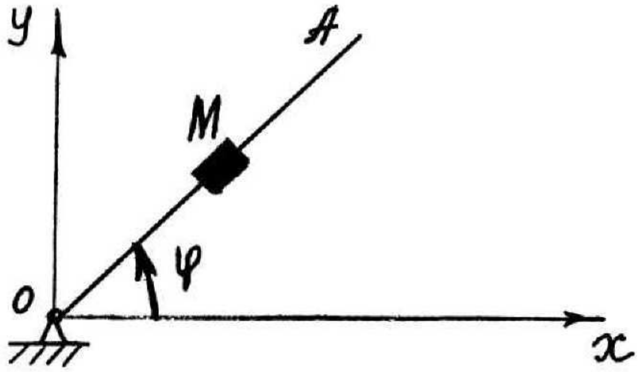

Рис. 10

Ответ: $a = 8\pi^2$ м/с^2.

Задача 7:

Какое ускорение $\vec{a}$ необходимо сообщить клину B, чтобы тело A, находящееся на наклонной плоскости клина (рис. 11), свободно падало вниз, если угол наклона поверхности к горизонтальной плоскости равен α?

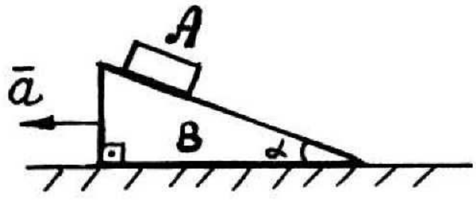

Рис. 11

Ответ: $a = g \cdot tg\alpha$ м/с^2.

Тема 4. Плоское движение тела

Плоским называется такое движение твердого тела, при котором все его точки движутся в плоскостях, параллельной некоторой фиксированной плоскости пространства. Кинематика плоского движения твердого тела полностью определяется кинематикой плоской фигуры, полученной при сечении тела плоскостью, параллельной указанной фиксированной плоскости.

Важно знать, что плоское движение в каждый момент можно представить одновременное мгновенно поступательное движение вместе с некоторой точкой тела, называемой полюсом, и мгновенно вращательное движение вокруг оси, проходящей через полюс и перпендикулярной к плоскому сечению.

Поступательная составляющая плоского движения зависит от выбора полюса, а вращательная не зависит от этого.

С другой стороны плоское движение можно рассматривать как мгновенно вращательное вокруг мгновенного центра скоростей. Однако такое представление можно использовать лишь при нахождении распределения линейных скоростей. При определении линейных ускорений точек тела плоское движение можно представить как вращательное вокруг мгновенного центра ускорений.

Линейную скорость произвольной точки можно найти на основании:

1) теоремы о сложении скоростей.

$$\vec{V}_M = \vec{V}_o + \vec{V}_{Mo} = \vec{V}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}_{oM} \qquad (44)$$

где $\vec{V}_o$ – скорость полюса, $\vec{V}_{Mo}$ – скорость точки M в её относительном вращении вокруг полюса.

2) теоремы о равенстве проекций скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, проходящую через эту точку.

$$np_{AB}\vec{V}_A = np_{AB}\vec{V}_B \qquad (45)$$

3) использование мгновенного центра скоростей (точка P).

$$V_M = \omega \cdot MP \qquad (46)$$

где MP – расстояние от точки M до мгновенного центра скоростей P $\vec{V}_M \perp MP$.

Линейное ускорение любой точки можно найти на основании:

1) теоремы о сложении ускорений:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_o + \vec{a}_{Mo} \qquad (47)$$

где $\vec{a}_o$ – ускорение полюса, $\vec{a}_{Mo}$ – ускорение точки M в её вращении вокруг полюса.

$$\vec{a}_{Mo} = \vec{a}^{\tau}_{Mo} + \vec{a}^{n}_{Mo} \qquad (48)$$

т.е. ускорение вращения вокруг полюса является векторной суммой касательного и нормального относительных ускорений.

2. использования мгновенного центра ускорений (т. Q)

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{MQ} = \vec{a}^{\tau}_{MQ} + \vec{a}^{n}_{MQ} \qquad (49)$$

где $\vec{a}_{MQ}$ – ускорение точки M во вращательном движении относительно мгновенного центра ускорений (Q); $\vec{a}^{\tau}_{MQ}$ и $\vec{a}^{n}_{MQ}$ – соответственно касательное и нормальное ускорения точки во вращении вокруг точки Q.

Задача 1:

Прямая AB движется в плоскости чертежа (рис. 12), причём её конец A постоянно находится на полуокружности $CAД$. Определить скорость точки прямой, совпадающей с точкой C полуокружности в тот момент, когда радиус OA перпендикулярен $KCД$. Известно, что скорость точки A в этот $V_A = 4$ м/с.

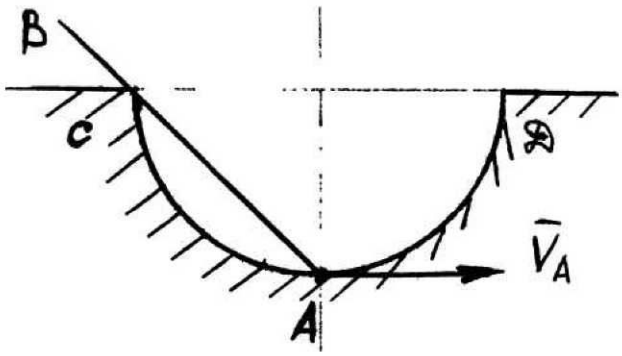

Рис. 12

Ответ: $V_C = 2{,}83$ м/с.

Задача 2:

Колесо радиуса R = 0,5 м катится без скольжения по прямолинейному участку пути (рис. 13) так, что скорость его центра постоянна и равна 10 м/с, Определить скорость верхней точки колеса, его угловую скорость и угловое ускорение.

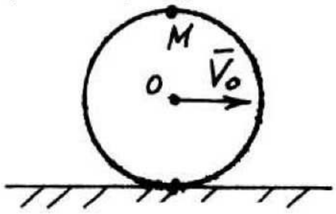

Рис. 13

Ответ: $V_M = 10$ м/с, $\omega = 20$ м/с, $\varepsilon = 0$

Задача 3:

Колесо катится ускоренно без скольжения в вертикальной плоскости по наклонному прямолинейному пути (рис. 14). Найти ускорение точек P и M, если в данный момент скорость центра колеса

V_0 =1 м/с, а ускорение a_0 = 3 м/с^2. Радиус колеса R = 0,5м.

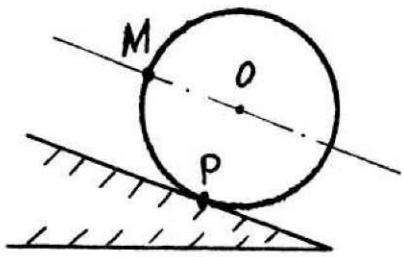

Рис. 14

Ответ: $a_{р}$ = 2 м/с^2; $a_{М} = 2\sqrt{11}$ м/с^2.

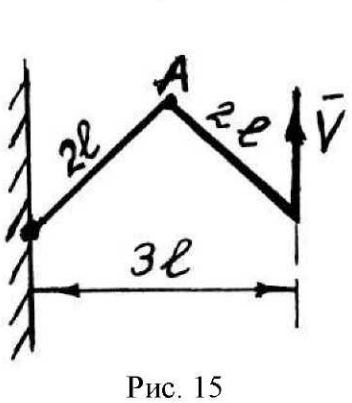

Рис. 15

Задача 4:

Один конец шарнирной конструкции (рис. 15) из двух одинаковых звеньев длины $2l$ закреплён. Другой её конец движется с постоянной скоростью $\overline{V}$ по прямой, расстояние до которой от неподвижного конца конструкции равно $3l$, Найти ускорение шарнира A в тот момент времени, когда: 1) левое звено горизонтально; 2) скорость шарнира равна нулю.

Ответ: 1) $a = \dfrac{V^2}{2l\cos\alpha}$; 2) $a = \dfrac{V^2}{\sqrt{3}\cdot l}$.

Задача 5:

Цилиндр с намотанной на него нитью (рис. 16), второй конец которой закреплен, находится на горизонтальной подставке, движущейся поступательно с постоянной горизонтально направленной скоростью.

Найти скорость оси цилиндра в зависимости от угла, образуемого нитью с вертикалью. Относительно подставки цилиндр не проскальзывает.

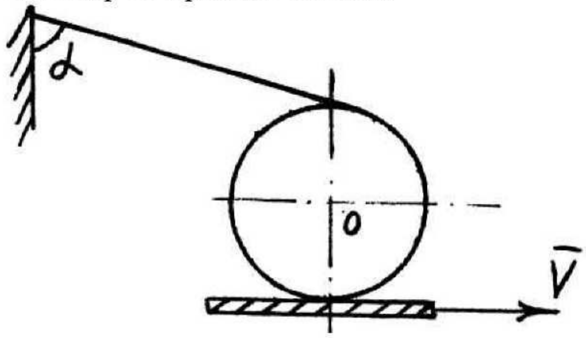

Рис. 16

Ответ: $V_0 = \dfrac{V}{1+\sin\alpha}$.

Задача 6:

В пространстве падает лист фанеры. Оказалось, что в некоторый момент времени скорости двух точек листа A и B одинаковы ($\overline{V_A} = \overline{V_B}$) и лежат в плоскости листа. Оказалось также, что скорость точки листа C, являющейся вместе с точками A и B вершинами равностороннего треугольника, в два раза больше по величине скорости точек A и B ($V_c = 2V_A = 2V_B$). Где в данный момент на листе находятся точки, скорость которых в три раза больше скорости точки C?

Ответ: $h = a\sqrt{2}$, где h – расстояние от точки до прямой AB.

Задача 7:

Конец нити, намотанной на катушку (рис. 17), перекинут через гвоздь, вбитый в стену. Нитку тянут с постоянной скоростью V. С какой скоростью будет двигаться центр O катушки в тот момент, когда нить составляет угол α с вертикалью. Внешний радиус катушки R, внутренний r. Катушка катится без проскальзывания.

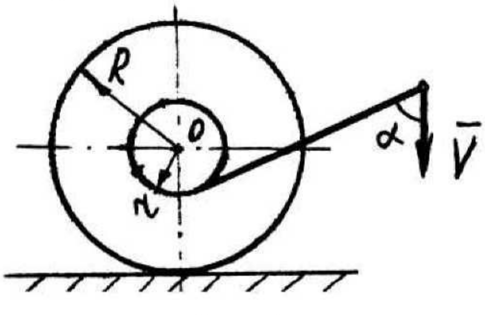

Рис. 17

Ответ: $V_0 = \dfrac{V \cdot R}{R \cdot \sin\alpha - r}$.

Задача 8:

Механизм Уатта состоит из коромысла O_1A (рис. 18), которое, качаясь на оси O_1, передаёт с помощью шатуна AB движение кривошипу OB, свободно насаженному на ось O. На этой же оси сидит колесо I; шатун AB оканчивается колесом II, наглухо связанным с шатуном.

Определить угловые скорости кривошипа OB и колеса I в момент, когда $\angle O_1AB = 60°$, $\angle ABO = 9°$, $r_1 = r_2 = 0{,}3\sqrt{3}$ м, $O_1A = 0{,}75$ м, $AB = 1{,}5$ м и угловая скорость коромысла $\omega_0 = 6$ с$^{-1}$.

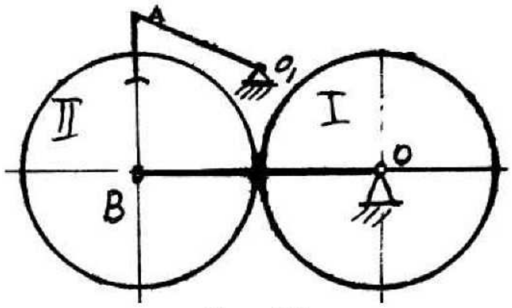

Рис. 18

О т в е т: $\omega_{0B} = 3{,}75$ с$^{-1}$, $\omega_1 = 6$ с$^{-1}$.

З а д а ч а 9:

Отрезок BC движется в плоскости чертежа (рис. 20). Ускорения его концов равны $a_C = 2a_B$ и направлены в данный момент по отрезку навстречу друг другу. Чему равно ускорение точки $Д$ отрезка, если $BД = BC / 4$?

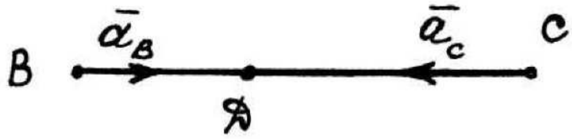

Рис. 19

О т в е т: $a_Д = \dfrac{1}{4}a_B$.

З а д а ч а 10:

В дифференциальном механизме кривошип OA вращается вокруг неподвижной оси O с угловой скоростью $\omega_{OA} = 2$ с$^{-1}$ (рис. 20), колесо I - вокруг той же оси с угловой скоростью $\omega_1 = 4$ с$^{-1}$. Чему равна скорость точки C колеса 2, находящемся на верхнем конце диаметра, совпадающего с кривошипом OA, если радиусы колёс $r_1 = r_2 = 0{,}1$ м. Кривошип и колесо вращаются в одном направлении.

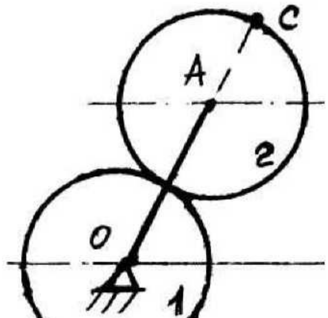

Рис. 20

О т в е т: $V_C = 0{,}4$ м.

Тема 5. Сферическое движение твердого тела

Движение тела, при котором одна его точка остаётся неподвижной, называется сферическим.

Положение тела в пространстве в таком случае определяется углами Эйлера.

$$\varphi = \varphi(t);\ \psi = \psi(t);\ \theta = \theta(t), \quad (50)$$

где φ – угол собственного вращения; ψ – угол процессии; θ – угол нутации.

Сферическое движение в любой момент времени можно представить как вращательное вокруг мгновенной оси вращения. Все точки тела, лежащие на этой оси неподвижны. Но необходимо помнить, что мгновенная ось вращения меняет своё положение в пространстве и в теле.

Скорость любой точки тела определяется формулой :

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (51)$$

где $\bar{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения вокруг мгновенной оси, направленный вдоль этой оси; $\bar{r}$ – радиус - вектор точки, соединяющий неподвижную точку с рассматриваемой.

Модуль скорости точки в данный момент определяется из выражения:

$$V = \omega \cdot h \quad (52)$$

где h – расстояние от точки до мгновенной оси.

Угловым ускорением тела называют производную вектора угловой скорости по времени.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \quad (53)$$

Вектор углового ускорения численно равен скорости конца вектора угловой скорости

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega} \quad (54)$$

где ω_1 – угловая скорость вращения вектора угловой скорости тела.

Ускорение произвольной точки тела, имеющего одну неподвижную точку, представляется как векторная сумма двух ускорений.

$$\bar{a} = \bar{a}^{\text{вр.}} + \bar{a}^{\text{ос.}} \quad (55)$$

где $\bar{a}^{\text{вр.}}$ – вращательное ускорение точки; $\bar{a}^{\text{ос.}}$ – осе стремительное ускорение.

$$\bar{a}^{\text{вр.}} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r};\quad a^{\text{вр.}} = \varepsilon \cdot h_1, \quad (56)$$

где h_1 – расстояние от точки до вектора $\bar{\varepsilon}$.

$$\bar{a}^{\text{ос.}} = \bar{\omega} \times \bar{V};\quad a^{\text{ос.}} = \omega^2 \cdot h. \quad (57)$$

Задача 1:

Коническая шестерня I обкатывает неподвижную шестерню II (рис. 21). Определить угловую скорость шестерни I, если $\angle АОД = \beta$; $\angle СОД = \alpha$; $OC = h$, а скорость центра C шестерни I равна V.

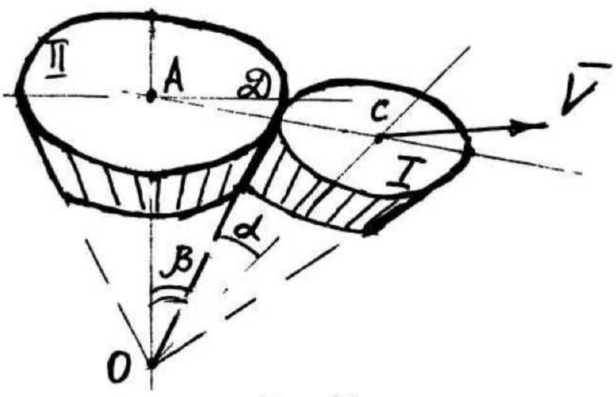

Рис. 21

Ответ: $\omega_1 = \dfrac{V}{h \cdot \sin\alpha}$.

З а д а ч а 2 :

Тело *A* катится без скольжения по поверхности тела *B* (рис. 22). Определить угловую скорость $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ и угловое ускорение $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ тела *A*, а также скорость и ускорение точки *M*, если центр основания конуса движется равномерно и делает полный оборот вокруг вертикальной оси за 2 сек. Радиус основания конуса равен 0,05 м.

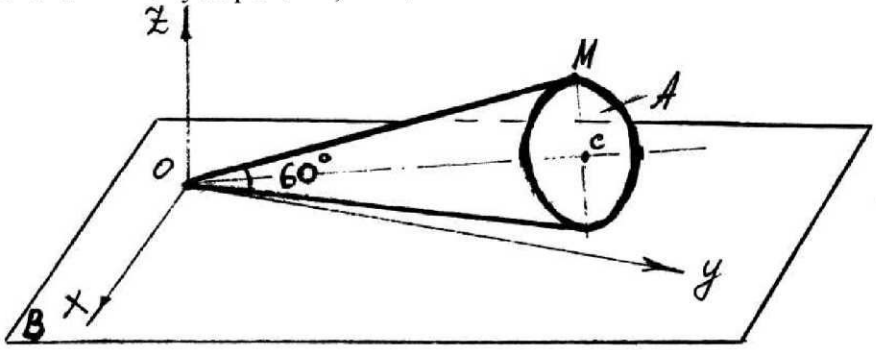

Рис. 22

О т в е т: 1) $\boldsymbol{\varepsilon = \sqrt{3}\pi^2}$ с$^{-2}$;

2) $\boldsymbol{V_M = 0{,}15\pi}$ м/с;

3) $\boldsymbol{a_M = 0{,}50\pi^2}$.

З а д а ч а 3 :

При сферическом движении твердого тела его мгновенная угловая скорость определяется выражением: $\bar{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{2t \cdot \bar{i} + 2t \cdot \bar{j} + \bar{k}}$, (где *i*, *j*, *k* – орты координат неподвижных осей). Определить в момент времени t = 1с скорость точки *M* тела, координаты которой в этот момент времени: $x = 0$; $y = 1$ м; $z = 1$ м.

О т в е т: $V = 3$ м

З а д а ч а 4 :

Конус II с углом при вершине $\alpha_2 = 45°$ катится без скольжения по внутренней стороне неподвижного конуса I с углом при вершине $\alpha_1 = 90°$ (рис. 23). Высота подвижного конуса OO_1 =1 м. Точка O_1 – центр основания подвижного конуса, описывает окружность за 0,5 с. Определить переносную, относительную и абсолютную угловые скорости II конуса, также его абсолютное угловое ускорение.

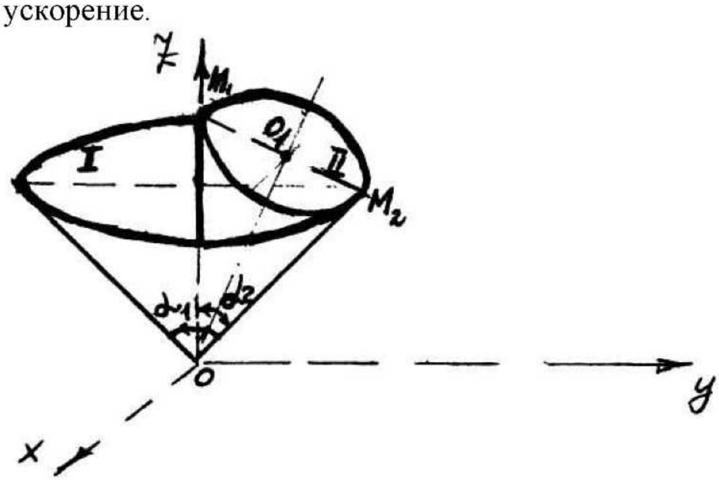

Рис. 23

О т в е т: $\omega_e = 4\pi$ с$^{-1}$; $\omega_2 = 7{,}39$ с$^{-1}$; $\omega = 4\pi$ с$^{-1}$; $\varepsilon = 11{,}3\pi^2$ с$^{-2}$.

Тема 6. Сложение движений твердого тела
6.1. Сложение поступательных движений

При сложении поступательных движений твердого тела результирующее движение будет также поступательным. Скорость результирующего движения равна векторной сумме скоростей составляющих движений.

$$\overline{V} = \sum_{i=1}^{n} \overline{V_i} \qquad (58)$$

Аналогично определяется ускорение абсолютного движения

$$\overline{a} = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} \qquad (59)$$

З а д а ч а 1:
Тело *А* перемещается по поверхности клина *В* (рис. 24). Клин В скользит по горизонтальной плоскости с ускорением $a_B = 2$ м/с^2 ($\alpha = 60°$). Каково ускорение тела *А* по отношению к клину, если абсолютное ускорение его перпендикулярно к поверхности клина.

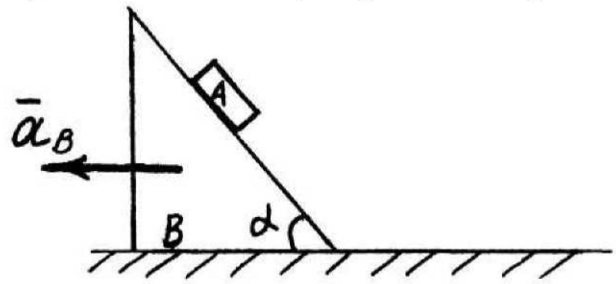

Рис. 24

О т в е т: $a = 1$ м/с^2.

6.2. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей

Совокупность *n* вращений вокруг пересекающихся в одной точке осей эквивалентно сферическому движению тела.

Угловая скорость вращения тела ω вокруг мгновенной оси равна векторной сумме угловых скоростей составляющих вращений.

$$\overline{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\omega_i} \qquad (60)$$

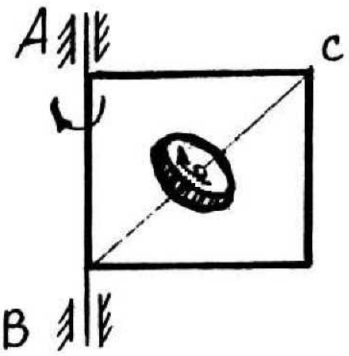

Рис. 25

З а д а ч а 1:
Диск вращается вокруг оси *X* с угловой скоростью $\omega_1 = 3$ с$^{-1}$ и вокруг горизонтальной оси *Y* с угловой скоростью $\omega_2 = 4$ с$^{-1}$. Абсолютная угловая скорость вращения 5 с$^{-1}$. Под каким углом расположены оси вращений?

О т в е т: $\alpha = \pi$.

З а д а ч а 2:
Квадратная рама вращается вокруг оси *АВ* (рис. 25), делая 2 об/мин. Вокруг оси *ВС*, совпадающей с диагональю рамы, вращается диск, делая 2 об/мин. Определить абсолютную угловую скорость и угловое ускорение диска.

О т в е т: $\omega = 0{,}39$ с$^{-1}$; $\varepsilon = 0{,}031$ с$^{-2}$.

Задача 3:
Ось мельничного бегуна OA вращается равномерно вокруг вертикальной оси OZ с угловой скоростью ω_1 (рис. 26). Длина оси $OA = R$, радиус бегуна $AC = r$, Точка C имеет скорость равную нулю.

Определить угловую скорость бегуна ω.

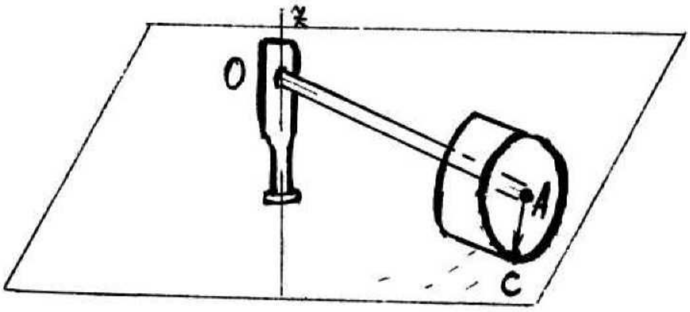

Рис. 26

Ответ: $\omega = \dfrac{\sqrt{R^2 + r^2}}{r} \cdot \omega_1$ с$^{-1}$.

6.3. Сложение вращений вокруг параллельных осей

6.3.1. Вращения происходят в одну сторону

В этом случае абсолютным движением тела будет являться плоское движение. Мгновенная ось этого движения делит внутренним образом расстояние между осями составляющих вращений на части, обратнопропорциональные модулям угловых скоростей. Вектор угловой скорости результирующего движения по модулю равен арифметической сумме угловых скоростей составных движений и направлен в ту же сторону.

$$\overline{\omega} = \overline{\omega_1} + \overline{\omega_2}; \ \omega = \omega_1 + \omega_2 \qquad (61)$$

6.3.2. Вращения происходят в разные стороны с разными по величине угловыми скоростями

Как и в предыдущем случае абсолютное движение будет плоским. Но мгновенная ось вращения делит расстояние между осями на части, обратнопропорциональные угловым скоростям составных вращений, внешним образом.

По модулю абсолютная угловая скорость равна арифметической разности угловых скоростей и направлена в сторону большей с её стороны:

$$\omega = \omega_2 - \omega_1 \quad (\omega_2 > \omega_1) \qquad (62)$$

6.3.3. Вращение происходит в разные стороны с одинаковыми по величине угловыми скоростями (пара вращений)

Тело, участвующее в паре вращений движется поступательно со скоростью, равной моменту пары вращения.

$$\overline{V} = \overline{O_1O_2} \times \overline{\omega_2} = \overline{O_1O_2} \times \overline{\omega_1} \qquad (63)$$

где $\overline{O_1O_2}$ – вектор соединяющий оси вращений, лежащий в плоскости, перпендикулярной этим осям.

Задача 1:

Велосипедист едет со скоростью 21 км/час, диаметр колёс 0,7 м, передаточное число равно трем. Определить сколько оборотов в минуту делает педаль вокруг своей оси, если велосипедист движется без свободного хода.

Ответ: $n = 53$ об/мин

Задача 2:

Найти относительную и абсолютную угловые скорости зубчатого колеса II радиуса r, катящегося по неподвижному зубчатому колесу I с тем же радиусом и приводящегося в движение кривошипом III (рис. 27). Кривошип вращается вокруг оси неподвижного колеса I с угловой скоростью ω_0. За переносное движение принять движение кривошипа.

Ответ: $\omega_r = \omega_0$; $\omega = 2\omega_0$.

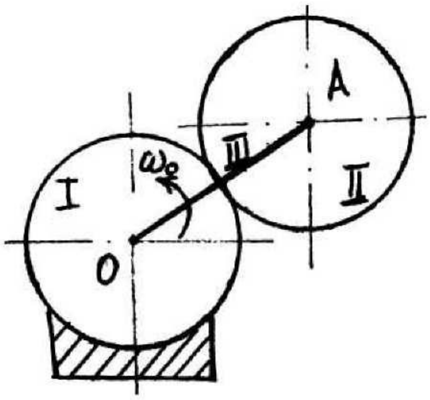

Рис. 27

Задача 3:

Кривошип OA вращается вокруг оси O неподвижной шестерни I с угловой скоростью $\omega_{OA} = 2$ с$^{-1}$ и приводит в движение шестерню III, при этом несет на себе ось шестерни II (рис. 28).

Определить скорость точки K, если радиусы всех шестерен одинаковы: $r_1 = r_2 = r_3 = 0{,}1$ м.

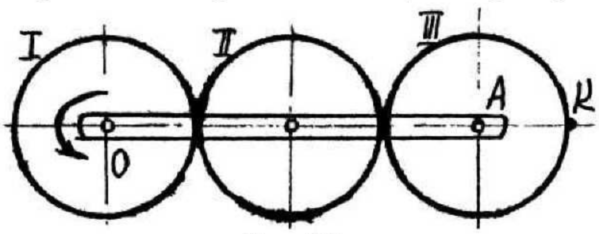

Рис. 28

Ответ: $V_K = 0{,}8$ м/с.

Содержание

Введение	3
Тема № 1 Кинематика точки	3
Тема № 2. Кинематика твёрдого тела	6
Тема № 3. Сложное движение точки	9
Тема № 4. Плоское движение тела	12
Тема № 5. Сферическое движение твёрдого тела	15
Тема № 6. Сложение движений твёрдого тела	18