ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ
Конспект лекций

Введение. Макромир и микромир. Их взаимосвязь. Современная картина мира

Физика — это наука о природе. Она возникла из стремления понять и описать окружающий нас мир. Мир наш необычайно сложен и интересен: Солнце, Луна, приливы и отливы, день и ночь, море, облака, шум деревьев, ветер, горы, землетрясения, дождь, животный и растительный мир, наконец человек — венец творения природы (а может быть, и нет). Человек как часть этого мира пытается понять, как он устроен. Возможно ли это? Мы знаем, что ответ на этот вопрос положителен. Из нашего собственного опыта мы знаем, что мир познаваем и что многое известно об основных физических законах, которые приводят к тому многообразию явлений, которое нас окружает.

Что же мы знаем? Пожалуй, самое важное, к чему мы пришли, — это то, что все окружающие нас тела состоят из **атомов**[1]. Атомы являются кирпичиками мироздания, они находятся в беспрерывном движении, притягиваются на больших расстояниях, но отталкиваются, когда мы стремимся приблизить их друг к другу. Размер атома $\approx 10^{-8}$ см $= 1$ Å (если яблоко увеличить до размеров Земли, то атомы яблока сами станут размером с яблоко). Например, молекула воды H_2O состоит из двух атомов водорода и одного атома кислорода.

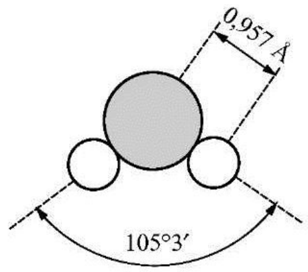

Рис. 1.1. Молекула воды, H_2O.

Можно ли увидеть атом? Можно — в туннельный микроскоп (1981 г.)[2]. "Глядя" в такой микроскоп, мы можем пересчитывать их поштучно, как яблоки.

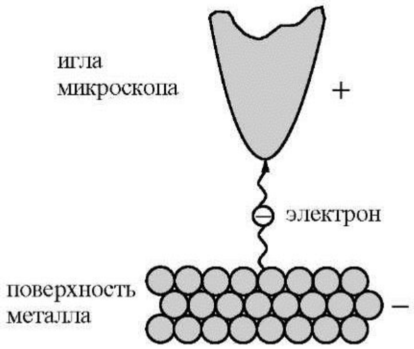

Рис. 1.2. Туннельный микроскоп. Туннельный ток зависит от расстояния между иглой и поверхностью.

Какая польза от того, что мы знаем, что мир состоит из атомов? Например, тогда можно понять, почему существуют твердые, жидкие и газообразные тела, с какой скоростью распространяется звук, почему летает самолет, что такое температура и многое, многое другое.

А из чего состоят атомы? Атомы состоят из положительно заряженного ядра и движущихся вокруг него отрицательно заряженных электронов. Размер электрона до сих пор не поддается измерению. Известно лишь, что радиус электрона заведомо меньше 10^{-16} см. Размер ядра намного больше,

[1] Исключение составляют Солнце и звезды, где вещество находится в состоянии плазмы.

[2] В обычный микроскоп атомы увидеть нельзя, так как нельзя увидеть объект размером меньше длины световой волны $\lambda \simeq 0{,}5$ мкм $\simeq 5000$ Å.

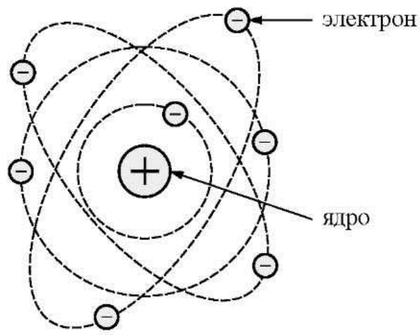

Рис. 1.3. Структура атома.

порядка $10^{-4} \div 10^{-5}$ Å $= 10^{-12} \div 10^{-13}$ см. В свою очередь, ядра состоят из протонов и нейтронов. Вся масса атома сосредоточена в ядре. Электрон почти в 2000 раз легче протона и нейтрона:

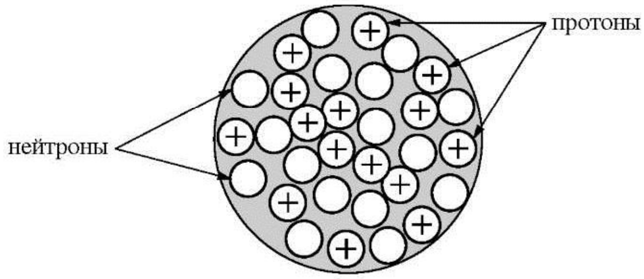

Рис. 1.4. Структура ядра.

$$m_p \approx m_n \approx 1{,}67 \cdot 10^{-24}\text{г}. \tag{1.1}$$

Можно задать следующий вопрос. А из чего состоят протоны и нейтроны? Ответ известен. Они состоят из кварков. А электрон? Сам по себе он ни из чего не состоит. Однако мы остановимся пока на этом и не будем продолжать задавать вопросы о том, что из чего состоит. Таким образом можно достаточно быстро подойти к границе неизведанного, после чего остается лишь повторять: “Не знаю, не знаем” и т.д. Вернемся поэтому к атомам.

Атом пуст. Если ядро атома увеличить до размеров яблока, то расстояние от ядра до других электронов будет порядка 1 км. Если бы электроны и ядра не были заряжены, атомы спокойно проходили бы друг через друга, нисколько не мешая соседу.

Где все это находится? “Большой ящик”, где разыгрываются все явления природы, называется **Вселенной**. Размеры Вселенной порядка 10^{28} см $\approx 10^{10}$ световых лет[3]. Для сравнения, расстояние от Земли до Солнца равно $1{,}5 \cdot 10^{13}$ см (150 млн. км.), а радиус Земли равен $6{,}4 \cdot 10^{8}$ см (6400 км). Общее число протонов и нейтронов во Вселенной равно 10^{80} ($10^{78} \div 10^{82}$). В составе Солнца $\approx 10^{57}$ протонов и нейтронов, в составе Земли — $4 \cdot 10^{51}$. Число звезд с массой порядка массы Солнца, $M_{\odot}$, равно примерно $10^{80}/10^{57} \sim 10^{234}$. Звезда имеет массу от 0,01 до $100\,M_{\odot}$.

Все состоит из атомов, в том числе и мы с вами. Жизнь — это наиболее сложное явление во Вселенной. Человек, одно из наиболее сложно устроенных живых существ, состоит из $\approx 10^{16}$ клеток. Клетка представляет собой элементарную физиологическую ячейку, содержащую $10^{12} \div 10^{14}$, атомов. В любую клетку любого живого организма входит хотя бы одна длинная молекулярная нить ДНК (дезоксирибонуклеиновой кислоты). В молекуле ДНК $10^{8} \div 10^{10}$ атомов, точное расположение которых может изменяться от индивидуума к индивидууму. Можно сказать, что молекула ДНК является носителем генетической информации.

Неотделимым от атомов является понятие **взаимодействия**. Чем атомы скрепляются между собой в твердом теле, почему Земля движется вокруг Солнца по круговой орбите, не улетая от него (или почему яблоко падает на Землю)? Наконец, почему протоны в ядре (положительно заряженные частицы, которые электрически отталкиваются друг от друга) не разлетаются? Что держит их вместе? В настоящее время в природе обнаружено четыре основных вида взаимодействия:

- **электромагнитное**,

[3]Один световой год равен расстоянию, которое свет проходит за год. Это составляет примерно $9{,}5 \cdot 10^{12}$ км $\approx 10^{18}$ см.
[4]Оценить с помощью этих чисел среднее расстояние между звездами (ответ: ~ 100 световых лет).

- **гравитационное**,
- **сильное** и
- **слабое**.

Первое обусловливает взаимодействие между заряженными частицами. Когда вы пальцем пытаетесь продавить стол, вы имеете дело со взаимодействием электромагнитной природы. Есть притяжение и отталкивание.

Гравитационное взаимодействие, основным проявлением которого является закон всемирного тяготения, — всегда притяжение (гравитационное отталкивание пока не обнаружено). Свидетельством этого являются те же яблоки, которые всегда падают на Землю (к счастью, не всегда на голову)[5]. Притяжение между Землей и Солнцем заставляет Землю двигаться по круговой орбите вокруг Солнца. Сила тяжести — это та сила, которая заставляет загораться звезды. Она сообщает ядрам атомов необходимую для сближения кинетическую энергию (для преодоления силы электрического отталкивания), чтобы началась реакция термоядерного синтеза — основной источник энергии большинства звезд во Вселенной.

Сильное взаимодействие, в отличие от первых двух, является короткодействующим. Радиус его действия порядка $10^{-12} \div 10^{-13}$ см, то есть порядка размеров ядра атома. Это взаимодействие между нуклонами, протонами и нейтронами, и оно всегда имеет характер притяжения[6].

Наконец, последнее взаимодействие — это слабое взаимодействие. Посредством слабого взаимодействия реагирует с веществом такая неуловимая частица, как нейтрино. В полете сквозь космическое пространство, столкнувшись с Землей, она этого не замечает и прошивает ее насквозь. Примером процесса, в котором проявляется слабое взаимодействие, является так называемый β-распад нейтрона. С учетом слабого взаимодействия свободный нейтрон нестабилен и распадается на протон, электрон и антинейтрино примерно через 15 минут:

$$n \to p + e + \tilde{\nu}_e. \tag{1.2}$$

В последнее время благодаря усилиям теоретиков удалось объединить электромагнитное и слабое взаимодействия в одно, что уменьшает число основных взаимодействий до трех. Сравнительная сила этих ваимодействий такова: если считать, что относительная величина взаимодействия нуклонов (протонов и нейтронов) в ядре равна единице, то следующим по силе будет электромагнитное взаимодействие, 10^{-2}, затем слабое, 10^{-5}. И самым слабым в этом смысле является гравитационное взаимодействие, $\sim 10^{-40}$.

Природа сильного взаимодействия все еще остается не вполне понятной. Точнее, его теория все еще не достроена. Тем не менее, человечество уже научилось использовать ядерные силы, создав атомную бомбу. На самом деле правильнее называть ее ядерной бомбой, так как взрыв бомбы обусловлен процессами, происходящими в ядрах атомов, — делением и слиянием этих ядер. Природа давно научилась использовать эти силы. Термоядерная реакция на Солнце — источник тепла на Земле, причина свечения звезд в ночном небе, благодаря которому мы видим звезды, находящиеся от нас на расстоянии в тысячи и миллионы световых лет.

Одним из важнейших понятий, введенных в современную физику, является понятие **поля**. Пространство, в котором нет частиц и которое поэтому можно назвать "пустым", на самом деле таковым не является. В "пустом" (от частиц) пространстве могут существовать различные поля, примером которых является электромагнитное поле. Эти поля могут существовать и вполне самостоятельно, независимо от частиц, их породивших. Эта форма существования — теперь хорошо известные волны. Электромагнитные волны вошли в нашу повседневную жизнь. Радио и телевидение кажутся нам столь же естественными, как и автомобиль.

Гравитационные волны пока еще не обнаружены экспериментально, но их существование уверенно предсказывает общая теория относительности Эйнштейна. И по-видимому, их обнаружение не за горами. Уже сейчас реально создание сверхчувствительных детекторов гравитационных волн, которые способны зарегистрировать взрыв сверхновой в галактике, удаленной от нас на расстояние в миллионы световых лет. И тогда одновременно со вспышкой света до нас дойдет гравитационная волна, которая тоже распространяется со скоростью света. Совпадение во времени этих событий было бы убедительным доказательством существования гравитационных волн.

Однако вернемся на Землю. Какие взаимодействия определяют все многообразие явлений на Земле? Гравитационное взаимодействие является очень слабым, однако оно обеспечивает то, что мы не улетаем с этой "сцены" Земли в космическое пространство, то есть тяготение важно в том смысле, что оно удерживает на поверхности Земли воду, воздух и нас с вами. Ядерные силы на Земле, слава

[5] Тот факт, что яблоки падают на Землю, заставляет предположить, что они к Земле притягиваются.

[6] Отталкивание на очень малых расстояниях.

Богу, проявляются не слишком сильно, иначе связанная с ними гигантская энергия уничтожила бы все живое, как взрыв атомной бомбы "Малыш", сброшенной на Хиросиму 6 августа 1945 г., погубил в первые же секунды до ста тысяч человек.

Таким образом, основной движущей силой почти всех происходящих на Земле процессов являются электромагнитные силы и явления, ими вызываемые. Знание этих сил является основой для понимания химических реакций, биологических процессов, а значит и жизни, движения воздуха, воды и даже землетрясений. В последних трех случаях гравитационные силы, несомненно, играют важную роль, например конвективные потоки воздуха в атмосфере. И все это скрывается в такой крошечной частичке, как атом, который состоит из положительно заряженного ядра и движущихся вокруг него отрицательно заряженных электронов.

Но почему, спросите вы, электроны не падают на ядро, ведь они к нему притягиваются? И чем вообще определяется столь малый размер атома (≈ 1 Å)? Можно было бы думать, что причина та же, что и при вращении Земли вокруг Солнца. Земля вращается и не падает. Но тут есть одна серьезная проблема. Дело в том, что электрически заряженная частица, движущаяся с ускорением, излучает электромагнитные волны. Так устроены радио- и телепередающие антенны — по ним пропускают переменный ток и они излучают в пространство электромагнитные волны, которые мы ловим своими телевизорами и приемниками. Эти волны уносят с собой энергию. В результате электрон должен в конце концов свалиться на ядро, а этого не происходит — атом относительно устойчив (наше с вами существование — тому доказательство). В чем же причина стабильности атома? Дело в том, что законы, управляющие движением электрона относительно ядра атома, — это не те законы классической механики, которые управляют движением Земли вокруг Солнца. В атоме действуют законы квантовой механики.

Квантовая механика, или **квантовая физика** — одно из величайших научных достижений нашего века. Она описывает законы движения частиц в микромире, то есть движения частиц малой массы (электрона или атома) в малых участках пространства. Квантовая механика — это более общая наука, включающая в себя классическую механику как частный случай. К чему же сводится основное утверждение квантовой механики? Оно сводится к тому, что частицы не могут иметь одновременно определенные значения координаты и импульса, то есть в квантовой механике не существует понятия траектории частицы. Если Δx — это неопределенность координаты частицы, а Δp — неопределенность ее импульса, то эти величины в квантовой механике ограничены неравенством

$$\Delta x\,\Delta p \geq \hbar/2 \tag{1.3}$$

(Гейзенберг, 1927 г.), где $\hbar$ — это так называемая постоянная Планка,

$$\hbar = 1{,}054 \cdot 10^{-27}\text{эрг} \cdot \text{сек}. \tag{1.4}$$

Это соотношение, называемое **соотношением неопределенности**, говорит нам о том, что если бы электрон упал на ядро (а оно ведь очень маленькое), то мы знали бы его координату и $\Delta x = 0$. Но отсюда следует, что в этом случае неопределенность импульса Δp была бы равна ∞ (бесконечности) и электрон с такой энергией вылетел бы из ядра снова, преодолев силы притяжения. Невозможность локализации электрона является в конечном итоге следствием того, что на самом деле электрон — не частица, а волна[7] с длиной волны

$$\lambda = \frac{h}{p}, \tag{1.5}$$

где p — импульс (так называемая волна де Бройля). А как известно, волну нельзя локализовать в пространстве с размерами, меньшими ее длины волны.

Давайте оценим размер атома. Для этого воспользуемся соотношением неопределенности $\Delta r\,\Delta p \approx \hbar$, где Δr — неопределенность координаты электрона, а Δp — неопределенность его импульса. По порядку величины $\Delta r \approx r$ и $\Delta p \approx p$, где r — характерное расстояние электрона от ядра (то есть размер атома), а p — характерное значение импульса электрона. При движении в кулоновском поле потенциальная энергия порядка кинетической энергии. Поэтому имеем два соотношения для определения p и r:

$$\begin{cases} \dfrac{e^2}{r} \approx \dfrac{p^2}{2m}, \\ r \cdot p \approx \hbar. \end{cases} \tag{1.6}$$

[7]Лучше все-таки считать, что электрон — частица, но с несколько не обычными для нее свойствами, делающими его похожим на волну.

Из первого условия получаем, что $p \approx \sqrt{2me^2/r}$. Подставляя это выражение во второе уравнение, находим, что

$$r \approx \frac{\hbar^2}{2me^2}. \tag{1.7}$$

Приближенно $h \approx 10^{-27}$ эрг·сек, $m \approx 10^{-27}$ г и $e \approx 5 \cdot 10^{-10}$ СГСЕ. Подставляя это в формулу (1.7), получаем

$$r \approx \frac{10^{54}}{10^{-27} \cdot 25 \cdot 10^{-20}} \text{ см } = \frac{10^{-7}}{25} \text{ см } = 0{,}4\,\text{Å}. \tag{1.8}$$

Таким образом, атом устойчив (а вместе с ним и мы с вами) благодаря существованию принципа неопределенности. Квантовая механика необходима для понимания химических и биологических процессов, а значит для понимания того, как мы устроены. Однако вследствие ее относительной сложности начинать следует с более простых вещей — с классической механики, к изучению которой мы сейчас и приступаем.

"Наблюдение, размышление и опыт — вот что составляет так называемый научный метод".

Р. Фейнман, ФЛФ.

Границы применимости классической механики. Кинематика. Пространственно-временные системы отсчета. Основы векторной алгебры. Перемещение, скорость и ускорение материальной точки. Равноускоренное движение. Путь

Раньше других разделов физики стала развиваться **механика**. **Механика есть наука о движении и равновесии тел.** В широком смысле слова движение материи есть всякое ее изменение. Однако в механике под движением понимается только простейшая его форма, а именно перемещение тела относительно других тел. Принципы механики были впервые сформулированы Ньютоном (1643–1727 гг.) в его основном труде "Математические начала натуральной философии" (1687 г.).

После Ньютона механика начала быстро развиваться, однако до начала XX века это развитие шло в основном в направлении совершенствования математических методов механики и применения ее законов ко все новым и новым областям знания. Несомненные в то время успехи механики привели к представлению, что законов механики достаточно для объяснения всех явлений природы (**механистический взгляд на природу вещей**).

Положение в корне изменилось с открытием электрических и магнитных явлений, особенно с открытием электромагнитных волн. И их, конечно, пытались объяснить механистически, как волны в некоторой пронизывающей все пространство среде, называемой **эфиром** (как волны на поверхности воды или звук в воздухе). Однако эти попытки не увенчались успехом.

Окончательный отказ от механистических представлений произошел в начале XX века. Первое, что выяснилось, — это то, что механика Ньютона применима лишь к сравнительно медленным движениям со скоростями, заметно меньшими скорости света в вакууме $c \approx 300000$ км/с. Движения, скорости которых приближаются к скорости света, называют **релятивистскими**. Но скорость света огромна. В повседневной жизни мы имеем дело со скоростями, заметно меньшими. Так, скорость реактивного самолета может в 2–3 раза (обычно не больше) превысить скорость звука в воздухе, $v \approx 300$ м/с $= 0,3$ км/с[1]. Скорость спутника или космического корабля порядка 10 км/с. Такого же порядка скорость движения Земли по орбите вокруг Солнца (30 км/с). Наконец, скорость движения Солнца по своей орбите вокруг центра нашей Галактики (кстати, ее называют Млечным путем) порядка 300 км/с, что меньше скорости света в 1000 раз.

Второе ограничение классической механики заключается в ее неприменимости к описанию явлений микромира, то есть к движениям тел малой массы в малых участках пространства. Более общей наукой, описывающей такие движения, является квантовая механика, согласно которой неопределенность в знании значений координат и импульса определяется соотношением неопределенности Гейзенберга

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2. \tag{2.1}$$

В применении к обычным телам, например к футбольному мячу весом 0,5 кг, движущемуся со скоростью 30 м/сек, с хорошей точностью применима механика классическая. Так, если мы не знаем скорость с точностью выше, чем $\Delta v = 10^{-3}$ мкм/с (то есть $\Delta v/v = 3 \cdot 10^{-11}$ — огромная точность), а $\Delta x \simeq 10^{-3}$ мкм (10 Å), то $\Delta p \cdot \Delta x \simeq 5 \cdot 10^{-12}$ эрг · сек $\gg \hbar \approx 10^{-27}$ эрг · сек. Таким образом, классическая механика Ньютона изучает медленные движения макроскопических тел.

Что такое движение и как его описывать? На этот вопрос отвечает **кинематика**, описывающая движение тел. Движение — это перемещение тела относительно других тел (изменение его положения в пространстве). Таким образом, описывая движение тела, мы всегда привязываемся к какой-то координатной системе, относительно которой тело движется[2], или к **системе отсчета**. Движение тела определяется движением всех его точек (маленьких кусочков тела), поэтому мы начнем с описания движения **материальной точки**.

Материальной точкой называется тело, размерами которого можно пренебречь, считая, что вся масса тела сосредоточена в одной точке.

[1]Такого же порядка скорость точки на поверхности Земли при ее вращении вокруг своей оси (≈ 470 м/с).

[2]Например, сидя в вагоне едущего поезда, мы не движемся относительно вагона, но вместе с ним движемся относительно Земли и т.д.

Прежде всего, выберем систему координат. Самая простая система — это **декартова система координат**, три взаимно перпендикулярных оси x, y, z. Различают два вида координатных систем: правую и левую (рис. 2.1). Никаким пространственным поворотом их нельзя совместить друг с дру-

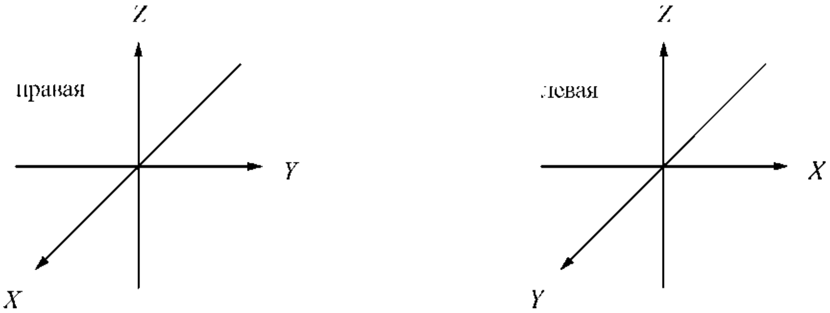

Рис. 2.1. Правая и левая декартовы системы координат.

гом, как нельзя вложить правую перчатку в левую. Но если перчатку вывернуть, то последнее оказывается возможным. Так и левая система переходит в правую при изменении направления одной из осей, например оси x, на противоположное ($x \to -x$) (рис. 2.2). После этого обе системы можно

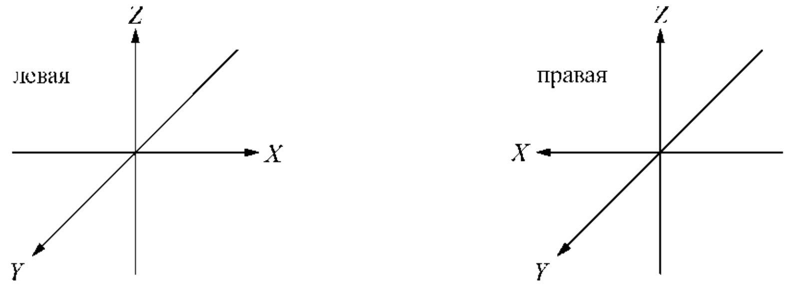

Рис. 2.2. Переход левой системы координат в правую при изменении знака одной из осей $x \to -x$.

совместить взаимным поворотом и перемещением в пространстве. Такая операция (замена $x \to -x$) называется **зеркальным отражением**. И именно поэтому левая система координат в зеркале кажется правой.

Левая система координат переходит в правую также и при изменении направления всех трех координатных осей ($x \to -x$, $y \to -y$, $z \to -z$) с последующим поворотом. Такая операция (изменение

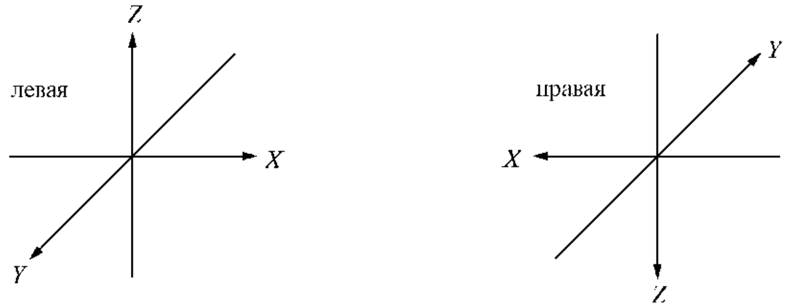

Рис. 2.3. Операция инверсии.

знака всех трех осей) называется **инверсией** (см. рис. 2.3).

Законы природы, очевидно, должны быть записаны в форме, которая не зависит от выбора системы координат. Мы для определенности будем пользоваться правой системой. Положение точки в выбранной нами системе координат задается **радиус-вектором**[3] $\mathbf{r}$, проекции которого на оси координат равны соответственно x, y, z. Таким образом, вектор $\mathbf{r}$ вполне однозначно определяется заданием трех его проекций, хотя это могут быть и другие три числа, например длина r и два угла θ и φ (так называемая **сферическая система координат**) (рис. 2.4). Декартовы координаты со сферическими

[3] В школьном курсе физики вектор — это физическая величина, характеризуемая своей длиной и направлением в пространстве. Сложение векторов осуществляется по правилу параллелограмма.

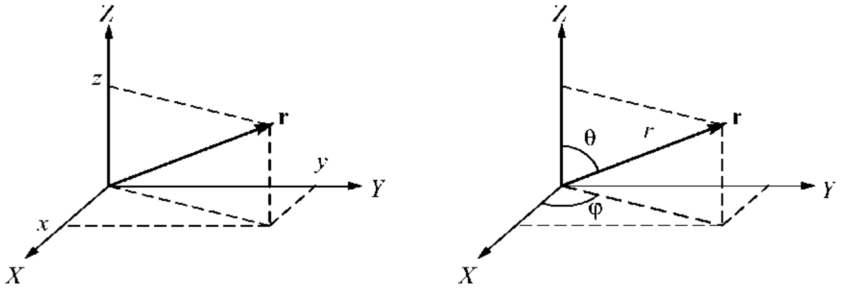

Рис. 2.4. Радиус-вектор в декартовой и сферической системах координат.

связаны друг с другом соотношениями

$$\begin{cases} z = r\cos\theta, \\ x = r\sin\theta\,\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\,\sin\varphi. \end{cases} \tag{2.2}$$

Если ввести три единичных вектора $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, направленные вдоль координатных осей (**единичные орты**), то радиус-вектор $\mathbf{r}$ можно представить в виде суммы трех векторов:

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}, \quad |\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1. \tag{2.3}$$

Это следует из известного еще в школе закона сложения векторов по правилу параллелограмма (рис. 2.5).

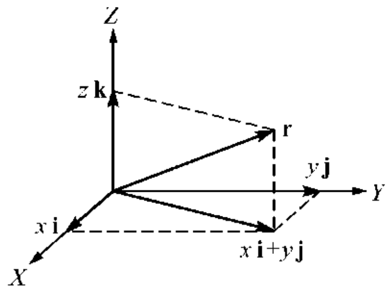

Рис. 2.5. Разложение радиус-вектора на составляющие вдоль координатных осей.

Длину вектора $\mathbf{r}$ можно найти, скалярно умножив его на себя самого. Вы знаете еще со школьных времен, что скалярным произведением двух векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называется число

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\,\cos(\widehat{\mathbf{AB}}), \tag{2.4}$$

равное произведению длин векторов на косинус угла между ними. Очевидно, что если два вектора перпендикулярны друг другу, то их скалярное произведение равно нулю. Скалярное произведение радиус вектора $\mathbf{r}$ на себя самого равно

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = |\mathbf{r}|\,|\mathbf{r}|\,\cos(\widehat{\mathbf{rr}}) = r^2, \tag{2.5}$$

так как $\cos(\widehat{\mathbf{rr}}) = 1$ (угол равен нулю). С другой стороны,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = {} & (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})\cdot(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}) = \\ & = x^2\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} + 2xy\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + \\ & + 2xz\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} + 2yz\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Но в силу взаимной ортогональности векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ их скалярные произведения равны нулю,

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0. \tag{2.7}$$

В итоге мы приходим к известному результату, что квадрат длины вектора равен сумме квадратов его проекций:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{2.8}$$

Аналогичным образом может быть доказано равенство

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \tag{2.9}$$

Это легко сделать, если представить каждый из векторов в виде

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} \tag{2.10}$$

и аналогично для вектора $\mathbf{B}$. После этого остается только их скалярно перемножить и воспользоваться равенствами (2.7).

Рассмотрим теперь движение материальной точки, траектория которой изображена на рис. 2.6, и определим такие важные для дальнейшего понятия, как скорость материальной точки $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{a}$. Пусть радиус-вектор материальной точки в момент времени t_1 равен $\mathbf{r}_1$, а в момент времени t_2 равен $\mathbf{r}_2$. Таким образом, при движении радиус-вектор $\mathbf{r}$ изменяется со временем, иными словами, он является функцией времени $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Если нам известен закон этого изменения, то мы знаем, где в каждый момент времени находится материальная точка, то есть мы знаем закон ее движения. Задание функции $\mathbf{r}(t)$ эквивалентно заданию трех функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ — координат материальной точки, поскольку

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}. \tag{2.11}$$

Разность векторов $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_1$

$$\Delta\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \tag{2.12}$$

называется **перемещением** материальной точки. Очевидно, что это тоже вектор и он направлен из точки 1 в точку 2. Ясно, что

$$\mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{r}_2, \tag{2.13}$$

и вы узнаете известное еще в школе правило треугольника для сложения векторов. Отношение перемещения материальной точки $\Delta\mathbf{r}_{12}$ к интервалу времени $\Delta t_{12} = t_2 - t_1$, то есть $\Delta\mathbf{r}_{12}/\Delta t_{12}$, тоже является вектором, причем коллинеарным вектору перемещения.

Очевидно, что если мы будем уменьшать величину интервала Δt_{12} (приближая t_2 к t_1), то соответственно будет уменьшаться и длина вектора $\Delta\mathbf{r}_{12}$, то есть величина перемещения. Предел отношения перемещения $\Delta\mathbf{r}_{12}$ к интервалу Δt_{12}, когда последний стремится к нулю, называют **производной** вектора $\mathbf{r}(t)$ по времени t:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t_{12}\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}_{12}}{\Delta t_{12}}. \tag{2.14}$$

Этот вектор направлен по касательной к траектории материальной точки в точке t_1. По определению, **скорость** материальной точки равна

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{2.15}$$

Это, очевидно, вектор, направленный по касательной к траектории в точке, соответствующей моменту времени t, с компонентами

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left\{\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right\}, \quad \text{или}\\
\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}, \quad \text{или}\\
v_x &= \frac{dx}{dt}, \quad upsilon_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

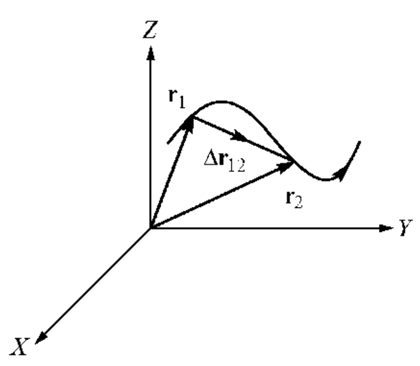

Рис. 2.6. Траектория и перемещение материальной точки.

Вектор скорости частицы $\mathbf{v}(t)$ так же, как и радиус-вектор, является функцией времени t. Аналогичным образом можно определить вектор, характеризующий скорость изменения скорости частицы и называемый **ускорением**:

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \tag{2.17}$$

Если величина и направление этого вектора не изменяются со временем, то есть если

$$\mathbf{a} = \mathrm{const}, \tag{2.18}$$

то такое движение называется **равноускоренным** (равнозамедленным). Для равноускоренного движения скорость материальной точки $\mathbf{v}(t)$ и ее радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ изменяются со временем по закону

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}(0) + \mathbf{a}t, \\ \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}(0)t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2, \end{aligned} \tag{2.19}$$

где $\mathbf{v}(0)$ и $\mathbf{r}(0)$ — соответственно скорость и радиус-вектор материальной точки в начальный момент времени $t = 0$ (проверка дифференцированием). Траекторией точки при равноускоренном движении является, как известно, парабола[4]. Частным случаем равноускоренного движения является движение с ускорением, равным нулю. Такое движение называется **равномерным**. Очевидно, что оно происходит по прямой.

Рассмотрим теперь вопрос, как найти **путь**[5], проходимый материальной точкой при ее движении. Рассмотрим произвольного вида траекторию, по которой движется материальная точка. Пусть в момент времени t_1 материальная точка занимала положение на траектории, характеризуемое радиус-вектором $\mathbf{r}_1$, а в момент времени t_2 — радиус-вектором $\mathbf{r}_2$, см. рис. 2.8. Спрашивается, какой путь прошла материальная точка между этими двумя положениями. Перемещение материальной точки определяется вектором $\Delta\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, но длина этого вектора, очевидно, не определяет пройденный материальной точкой путь, за исключением того случая, когда траектория материальной точки между двумя положениями представляет собой прямую линию. Это подсказывает способ нахождения пути при криволинейном движении. Для этого разобьем временной интервал $t_2 - t_1$ на много одинаковых интервалов очень малой продолжительности Δt, так что в каждом таком малом интервале движение практически прямолинейное (рис. 2.9). Число таких интервалов равно

$$n = \frac{t_2 - t_1}{\Delta t}. \tag{2.20}$$

Изобразим векторы перемещения материальной точки $\Delta\ \mathbf{r}_i\,(i = 1, 2,\ \ldots, n)$ в каждом из этих интервалов времени. Очевидно, что при достаточно малом Δt пройденный путь S может быть аппроксимирован суммой длин этих векторов:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} |\Delta\mathbf{r}_i|. \tag{2.21}$$

По мере стремления Δt к нулю это приближение становится все лучше и лучше и в конце концов при бесконечном n обращается в точное равенство.

Разделим и домножим каждое слагаемое в этой сумме на Δt:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{|\Delta\mathbf{r}_i|}{\Delta t}\Delta t. \tag{2.22}$$

[4]В частных случаях эта парабола может вырождаться в отрезок прямой.

[5]То есть длину траектории частицы.

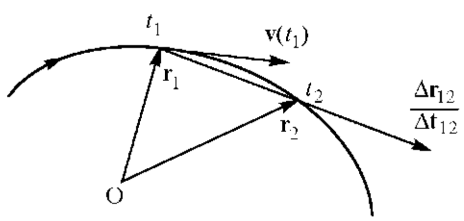

Рис. 2.7. Скорость материальной точки.

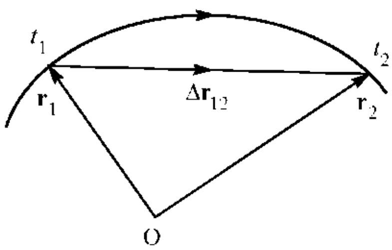

Рис. 2.8. Как найти путь?

Как мы уже сказали, точное равенство получается в пределе $\Delta t \to 0$:

$$S = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{|\Delta \mathbf{r}_i|}{\Delta t} \Delta t. \tag{2.23}$$

Очевидно, можно поменять местами операции суммирования и предельного перехода (предел суммы равен сумме пределов) и вспомнить, что предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta t} = \mathbf{v}_i \tag{2.24}$$

равен скорости частицы $\mathbf{v}$ в i – том интервале. Тогда путь может быть представлен в виде суммы бесконечного числа бесконечно малых слагаемых:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} |\mathbf{v}_i|\, dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{v}(t)|\, dt. \tag{2.25}$$

Такая операция в математике называется вычислением **определенного интеграла**. Напомним, что существует еще и **неопределенный интеграл**. Так, для некоторой функции $f(t)$

$$\int f(t)\, dt \equiv F(t) + \text{const}, \tag{2.26}$$

где $dF/dt = f(t)$, и функция $F(t)$ называется **первообразной** по отношению к $f(t)$. Определенный интеграл в пределах от t_1 до t_2 от функции $f(t)$ вычисляется при этом по правилу:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt = F(t)\big|_{t_1}^{t_2} \equiv F(t_2) - F(t_1). \tag{2.27}$$

Это разность значений первообразной на верхнем и нижнем пределах.

Таким образом, мы пришли к такому результату, что

путь, пройденный частицей в интервале ее движения от t_1 до t_2, равен определенному интегралу по времени в этих пределах от модуля скорости частицы.

Рис. 2.9. Способ нахождения пути при криволинейном движении.

Вращательное движение. Равномерное движение точки по окружности. Вектор угловой скорости. Угловое ускорение

При равноускоренном движении частица движется все время в одной плоскости, образуемой начальным вектором скорости $\mathbf{v}(0)$ и постоянным ускорением $\mathbf{a}$ (докажите это). Однако очевидно, что далеко не всякое плоское движение является равноускоренным. Пример плоского неравноускоренного движения, известный вам из школьного курса физики, — это **равномерное движение по окружности**. Давайте рассмотрим его здесь. Поскольку это движение плоское, выберем в качестве этой плоскости плоскость XY. Начало координат выберем в центре окружности (рис. 3.1).

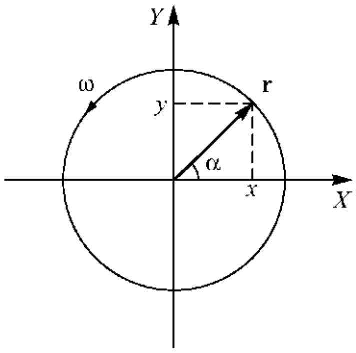

Рис. 3.1. Равномерное движение по окружности.

Координаты частицы выразим через величину радиуса окружности r и угол α:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\alpha, \\ y &= r\sin\alpha. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Поскольку движение происходит по окружности, r от времени не зависит. Функцией времени является только угол $\alpha(t)$. Производная от угла по времени называется угловой скоростью вращения ω:

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}. \tag{3.2}$$

При равномерном вращении по окружности $\omega = \mathrm{const}$ и можно проинтегрировать это уравнение. В результате

$$\alpha = \omega t + \mathrm{const}\,. \tag{3.3}$$

Константа интегрирования выбирается из условия $\alpha(0) = 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} x(t) &= r\cos\omega t, \\ y(t) &= r\sin\omega t. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Это **полностью** определяет движение. Так, скорость материальной точки определяется производными по времени от координат:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = -\omega r\sin\omega t, \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \omega r\cos\omega t. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Скалярное произведение равно

$$\begin{aligned} \mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = xv_x + yv_y = r\cos\omega t\,(-\omega r\sin\omega t) + \\ + r\sin\omega t\,(\omega r\cos\omega t) = 0, \end{aligned} \tag{3.6}$$

что означает перпендикулярность векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$, то есть скорость действительно направлена по касательной к окружности. Абсолютная величина скорости равна

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\omega^2 r^2 \sin^2 \omega t + \omega^2 r^2 \cos^2 \omega t} =$$
$$= \omega r = \mathrm{const}, \tag{3.7}$$

она не зависит от времени, движение действительно равномерное (но по окружности).

Дифференцируя по времени скорость, мы можем определить ускорение:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 r \cos \omega t,$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\omega^2 r \sin \omega t, \tag{3.8}$$

откуда следует, что ускорение зависит от времени, то есть движение не является равноускоренным. Абсолютная величина ускорения (модуль), тем не менее, остается постоянной:

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \omega^2 r, \tag{3.9}$$

или, так как $\omega r = v$, то мы получаем

$$|\mathbf{a}| = \frac{v^2}{r} \tag{3.10}$$

— известную из школьного курса физики формулу для центростремительного ускорения. Почему центростремительного? Да потому, что вектор $\mathbf{a}$ направлен к центру. В этом нетрудно убедиться, подсчитав скалярное произведение:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = a_x x + a_y y = -(\omega^2 r \cos \omega t)\, r \cos \omega t +$$
$$+ (-\omega^2 r \sin \omega t)\, r \sin \omega t = -\omega^2 r^2. \tag{3.11}$$

С другой стороны,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{a}|\, |\mathbf{r}| \cos(\widehat{\mathbf{ar}}) = \omega^2 r^2 \cos(\widehat{\mathbf{ar}}). \tag{3.12}$$

Из сравнения двух этих выражений получаем, что $\cos(\widehat{\mathbf{ar}}) = -1$. Таким образом, вектор ускорения антипараллелен вектору $\mathbf{r}$, то есть направлен к центру. В результате картина направлений векторов выглядит, как показано на рис. 3.2.

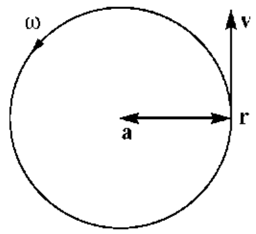

Рис. 3.2. Радиус-вектор, скорость и ускорение материальной точки при равномерном движении по окружности.

До сих пор при рассмотрении вращательного движения мы оперировали проекциями векторов на оси координат. Между тем, часто бывает полезно иметь соотношения, не зависящие от выбора системы координат, или, как говорят, записанные в **векторной форме**. Примером таких соотношений является выражение для координаты и скорости частицы при равноускоренном движении (см. лекцию 2).

При рассмотрении вращательного движения мы ввели угловую скорость вращения ω как производную по времени от угла поворота α: $\omega = d\alpha/dt$. Давайте теперь зададимся вопросом, какой величиной, скалярной или векторной, является угол поворота. Ведь когда говорят о повороте, нужно указывать не только величину угла поворота, но и то, вокруг какой оси происходит вращение (поворот) и в какую сторону (по часовой стрелке или против). В разобранном выше примере осью вращения была ось z и, поскольку мы использовали правую систему координат, вращение происходило по часовой стрелке (если смотреть в положительном направлении вдоль оси z) (рис. 3.3). С этой точки зрения угол поворота должен быть величиной векторной. Однако, как мы убедимся на следующей лекции, произвольный угол поворота вектором, вообще говоря, не является. Понятие вектора применимо лишь по отношению к бесконечно малым углам поворота.

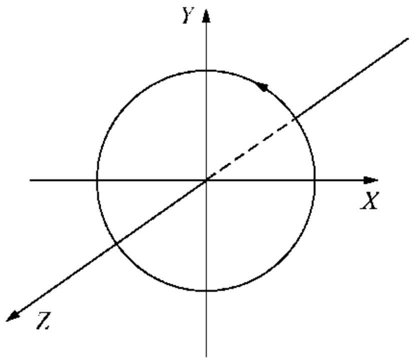

Рис. 3.3. Направление вращения.

Поэтому, говоря о повороте на какой-то малый угол $\Delta\alpha$, можно приближенно говорить о векторе $\Delta\boldsymbol{\alpha}$, величина которого равна углу поворота, а направление показывает направление оси вращения так, чтобы поворот происходил по часовой стрелке, или в соответствии с правилом буравчика. В нашем конкретном случае вектор $\Delta\boldsymbol{\alpha}$ коллинеарен с направлением оси z. Зададимся вопросом, как связано перемещение материальной точки $\Delta\mathbf{r}$ при повороте ее радиус-вектора $\mathbf{r}$ на малый угол $\Delta\boldsymbol{\alpha}$ (рис. 3.4).

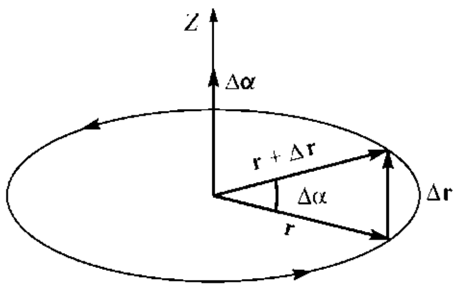

Рис. 3.4. Связь вектора перемещения с углом поворота.

На этот вопрос легко ответить, если речь идет о бесконечно малых поворотах $d\boldsymbol{\alpha}$. Тогда бесконечно малым является и перемещение $d\mathbf{r}$. Его величина (равная длине хорды) совпадает теперь с длиной дуги, то есть

$$|d\mathbf{r}| = r\,d\alpha, \tag{3.13}$$

а по направлению вектор $d\mathbf{r}$ совпадает с касательной, то есть перпендикулярен $\mathbf{r}$. В результате мы имеем три взаимно перпендикулярные вектора $\mathbf{r}$, $d\mathbf{r}$ и $d\boldsymbol{\alpha}$, образующие правую тройку (рис. 3.5), причем $|d\mathbf{r}| = |d\boldsymbol{\alpha}|\,|\mathbf{r}|$. Те, кто помнят из школьного курса о **векторном произведении** векторов, без

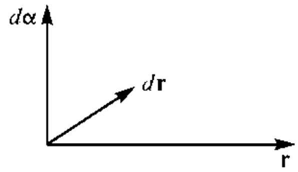

Рис. 3.5. Взаимная ориентация трех векторов.

труда сообразят, что искомое соотношение можно записать в виде векторного равенства

$$d\mathbf{r} = [d\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}]. \tag{3.14}$$

Действительно, по определению, векторным произведением двух векторов $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]$ называется вектор

$$\mathbf{C} = [\mathbf{A} \times \mathbf{B}], \tag{3.15}$$

который направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат (или которую образуют) два вектора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, в сторону от этой плоскости, соответствующую правилу буравчика (см. рис. 3.6). Величина же вектора $\mathbf{C}$ равна произведению модулей векторов на синус угла между ними:

$$|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\,\sin(\widehat{\mathbf{AB}}). \tag{3.16}$$

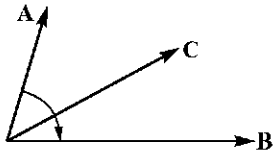

Рис. 3.6. Ориентация трех векторов в векторном произведении.

В нашем случае угол между векторами $d\boldsymbol{\alpha}$ и $\mathbf{r}$ равен 90°, так что синус равен единице. А поскольку, как мы уже писали, $|d\mathbf{r}| = r\,d\alpha$, то мы убеждаемся в справедливости векторного соотношения $d\mathbf{r} = [d\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}]$.

Разделив обе стороны этого равенства на бесконечно малый временной интервал dt, в течение которого произошло изменение вектора $\mathbf{r}$ на $d\mathbf{r}$, мы получим

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left[\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} \times \mathbf{r}\right]. \tag{3.17}$$

Но величина, стоящая в левой части равенства, есть не что иное, как скорость частицы $\mathbf{v}$, а производная

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \tag{3.18}$$

называется **вектором угловой скорости**. Ее мы вначале ввели по абсолютной величине, а теперь показали, что имеет смысл говорить об угловой скорости вращения как о векторе. Ее величина определяет величину угловой скорости (скорость вращения, или скорость изменения угла), а направление параллельно оси вращения, причем так, что имеет место правило буравчика. Итак, мы получили, что

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]. \tag{3.19}$$

Ориентация этих трех векторов показана на рис. 3.7.

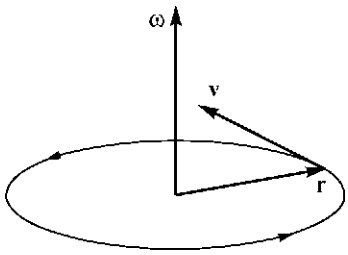

Рис. 3.7. Ориентация радиус-вектора, вектора скорости и угловой скорости.

Чтобы получить ускорение $\mathbf{a}$, надо от обеих частей взять производную по времени. Если $\boldsymbol{\omega}$ постоянно (как по величине, так и по направлению)[1], то

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left[\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right] = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}], \tag{3.20}$$

то есть ускорение оказывается перпендикулярным угловой скорости вращения $\boldsymbol{\omega}$ и скорости движения $\mathbf{v}$. А поскольку последняя направлена по касательной, то, значит, ускорение направлено либо параллельно $\mathbf{r}$, либо антипараллельно. Как именно, можно выяснить, подставив в вышеприведенную формулу значение $\mathbf{v}$:[2]

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}] = [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]] = \\ &= \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \omega^2\mathbf{r}.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Поскольку в рассматриваемом нами примере начало координат выбрано в центре окружности, то угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ и радиус-вектор $\mathbf{r}$ перпендикулярны друг другу а, следовательно, их скалярное произведение равно нулю (вообще говоря, как мы сейчас увидим, далеко не всегда $\boldsymbol{\omega}\perp\mathbf{r}$) и мы получаем

$$\mathbf{a} = -\omega^2\mathbf{r}, \tag{3.22}$$

[1] Равномерное вращение.

[2] Здесь мы воспользовались формулой для двойного векторного произведения $[\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$.

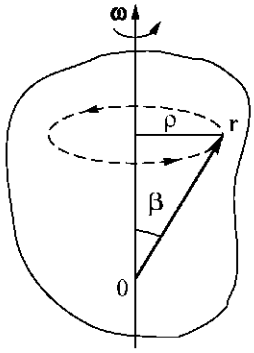

Рис. 3.8. Вращение твердого тела.

то есть антипараллельность векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{r}$ (вспомните термин"центростремительное ускорение"). По величине они таковы: $|\mathbf{a}| = \omega^2|\mathbf{r}|$, то есть имеем уже знакомый результат.

Вы можете спросить, зачем нам понадобилось иметь дело с векторным и с двойным векторным произведением, если мы уже разобрали движение по окружности, дифференцируя по времени проекции материальной точки на оси координат (причем получили результаты, известные со школьной скамьи). Стоит ли игра свеч? Да, стоит, во-первых, потому, что мы записали законы движения в **инвариантной**, как говорят, форме, не зависящей от выбора конкретной системы координат. Во-вторых, записанные нами соотношения справедливы и в более общем случае, когда мы рассматриваем вращение системы материальных точек или твердого тела как целого (рис. 3.8).

Имея в виду эту картину, нетрудно показать, что здесь, хотя $\boldsymbol\omega$ и $\mathbf{r}$ не перпендикулярны друг другу, тем не менее, выполняется прежнее соотношение для скорости движения некоторой выбранной нами точки с радиус-вектором $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol\omega \times \mathbf{r}]. \tag{3.23}$$

Действительно, как следует из рис. 3.8, точка движется по окружности радиуса $\rho = r\sin\beta$ со скоростью $v = \omega\rho = \omega r\sin\beta$. Но поскольку β — это угол между векторами $\boldsymbol\omega$ и $\mathbf{r}$, мы убеждаемся в справедливости этой формулы.

Теперь нам понятно происхождение дополнительного слагаемого в центростремительном ускорении (см. рис. 3.9):

$$\mathbf{a} = \boldsymbol\omega(\boldsymbol\omega\cdot\mathbf{r}) - \omega^2\mathbf{r}. \tag{3.24}$$

Таким образом, ускорение $\mathbf{a}$ на самом деле направлено не к центру, а к оси вращения, поэтому его

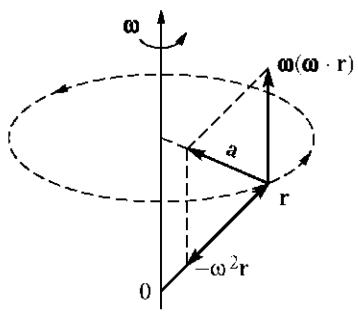

Рис. 3.9. Центростремительное ускорение.

можно было бы называть **осестремительным**. Но, разумеется, дело не в названиях.

В пользу соотношения $\mathbf{v} = [\boldsymbol\omega\times\mathbf{r}]$ говорит и то, что оно справедливо в более общем случае, когда вектор угловой скорости $\boldsymbol\omega$ не является постоянным и зависит от времени: $\boldsymbol\omega(t)$. Тогда формула для ускорения изменится — в ней появится дополнительное слагаемое:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left[\frac{d\boldsymbol\omega}{dt}\times\mathbf{r}\right] + \left[\boldsymbol\omega\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right] =$$

$$= [\boldsymbol\beta\times\mathbf{r}] + [\boldsymbol\omega\times\mathbf{v}]. \tag{3.25}$$

Величина $\boldsymbol\beta = d\boldsymbol\omega/dt$ называется **угловым ускорением**. Оно появляется, если меняется по величине угловая скорость (замедляется, например, вращение вокруг фиксированной оси) либо поворачивается с течением времени сама ось вращения (либо и то и другое).

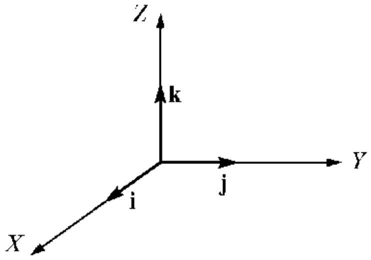

Рис. 3.10. Взаимное расположение единичных ортов.

В заключение для справок приведем выражение для декартовых компонент векторного призведения $\mathbf{C} = [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]$:

$$\begin{aligned} C_x &= [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_x = A_y B_z - A_z B_y, \quad \{xyz\}, \\ C_y &= [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_y = A_z B_x - A_x B_z, \quad \{yzx\}, \\ C_z &= [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_z = A_x B_y - A_y B_x, \quad \{zxy\}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Здесь для запоминания следует использовать указанные выше циклические перестановки. Эти соотношения легко доказываются, если записать каждый вектор в виде

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \tag{3.27}$$

и, аналогично, вектор $\mathbf{B}$. Затем следует учесть, что векторные призведения единичных ортов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ между собой равны соответственно (см. рис. 3.10)

$$[\mathbf{i} \times \mathbf{j}] = \mathbf{k}, \quad [\mathbf{k} \times \mathbf{i}] = \mathbf{j}, \quad [\mathbf{j} \times \mathbf{k}] = \mathbf{i} \tag{3.28}$$

и что при изменении порядка сомножителей изменяется знак векторного произведения:

$$[\mathbf{j} \times \mathbf{i}] = -[\mathbf{i} \times \mathbf{j}] \text{ и т. д.} \tag{3.29}$$

Далее нужно произвести векторное умножение

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = [(A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \times (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k})], \tag{3.30}$$

воспользовавшись приведенными выше правилами.

Векторы. Преобразование векторов. Матрица направляющих косинусов. Полярные и аксиальные векторы. Условие инвариантности физических законов по отношению к преобразованию координатных систем

Понятие вектора и основные операции векторной алгебры мы считаем известными из курса физики средней школы. Так, вектор — это физическая величина, определяемая величиной и направлением, которые не зависят от выбора системы координат. Он отличается от скаляра, который характеризуется только величиной (не зависящей от системы координат). К скалярным величинам относятся масса, энергия, температура, электрический заряд, путь, пройденный частицей, и т. д. Примерами векторов являются скорость, ускорение, сила, напряженность электрического и магнитного полей. В качестве дополнения к приведенному определению следует указать, что не всякие направленные величины являются векторами, а только такие, которые складываются **геометрически**, то есть по правилу параллелограмма.

Пример. Как мы видели, угол поворота тела вокруг какой-то оси можно, казалось бы, рассматривать как вектор в том смысле, что он имеет численное значение, равное углу поворота, и направление, совпадающее с направлением оси вращения, которое определяется по правилу буравчика. Однако два таких поворота не складываются по закону сложения векторов, если только углы поворота не являются бесконечно малыми.

В качестве примера рассмотрим два последовательных поворота на угол π вокруг двух осей, пересекающихся под углом φ (Oa и Ob) (рис. 4.1). При первом повороте на угол π вокруг оси Oa

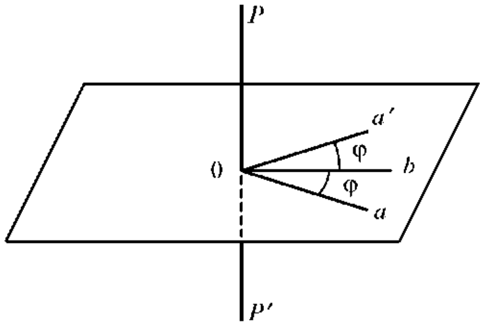

Рис. 4.1. Произведение двух поворотов.

точка P переходит в P', а P' — в P. При этом ось Oa остается на месте. При втором повороте на угол π вокруг оси Ob $P' \to P$ и $P \to P'$, то есть точки P и P' возвращаются на свои места.

Таким образом, после двух поворотов линия PP' (перпендикулярная плоскости aOb) остается неподвижной и, следовательно, является осью результирующего поворота. Для определения угла этого поворота замечаем, что в результате первого поворота ось Oa остается на месте, а после второго — переходит в позицию Oa', образующую с Oa угол 2φ. Таким образом, два последовательных поворота вокруг осей Oa и Ob представляют собой поворот вокруг оси PP' (на угол 2φ), перпендикулярной плоскости ab. Если считать каждый поворот вектором, направленным вдоль Oa и Ob соответственно, то "сумма" этих векторов должна лежать в плоскости ab, в то время как вектор результирующего поворота перпендикулярен этой плоскости. В результате правило "сложения" этих двух векторов (поворотов) не соответствует правилу параллелограмма. Более того, заметим, что при изменении порядка поворотов (сначала вокруг оси Ob, а затем вокруг оси Oa) получается поворот в противоположном направлении, то есть результат этого "сложения" некоммутативен, он зависит от порядка, в каком производятся эти повороты[1].

Правилу сложения векторов подчиняются только повороты на бесконечно малый угол, поэтому, например, угловые скорости $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ можно складывать, в результате чего будем иметь вращение с

[1] На самом деле правильно говорить не о сумме, а о произведении поворотов, так как матрицы направляющих косинусов двух последовательных поворотов перемножаются.

угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$.

Как мы уже знаем, для задания вектора в трехмерном пространстве достаточно задать три числа — его проекции, например на оси декартовой системы координат:

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{n}_1 + x_2\mathbf{n}_2 + x_3\mathbf{n}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\mathbf{n}_i \equiv x_i\mathbf{n}_i, \tag{4.1}$$

где x_1, x_2, x_3 — проекции, а $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ — единичные векторы (орты), направленные вдоль трех взаимно перпендикулярных осей. Последний знак тождественного равенства отражает так называемое **правило суммирования Эйнштейна** — по дважды повторяющимся индексам (i в данном случае) подразумевается суммирование[2]. Если мы повернем координатную систему, то в новой системе координат проекции того же самого вектора $\mathbf{r}$ на оси новой системы будут уже другими, другими будут и единичные орты $\mathbf{n}'_1$, $\mathbf{n}'_2$, $\mathbf{n}'_3$ (рис. 4.2).

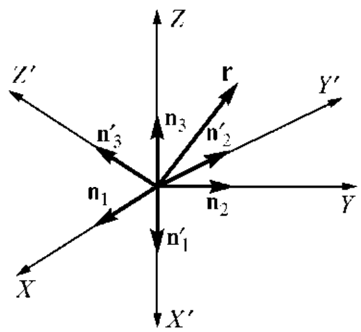

Рис. 4.2. Старая и новая (повернутая) системы координат.

Вектор $\mathbf{r}$ можно записать и в новой системе координат как

$$\mathbf{r} = x'_1\mathbf{n}'_1 + x'_2\mathbf{n}'_2 + x'_3\mathbf{n}'_3 = \sum_{i=1}^{3} x'_i\mathbf{n}'_i \equiv x'_i\mathbf{n}'_i. \tag{4.2}$$

Оба выражения представляют собой один и тот же вектор, поэтому они равны:

$$x_1\mathbf{n}_1 + x_2\mathbf{n}_2 + x_3\mathbf{n}_3 = x'_1\mathbf{n}'_1 + x'_2\mathbf{n}'_2 + x'_3\mathbf{n}'_3. \tag{4.3}$$

Домножим скалярно это равенство последовательно на $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ и $\mathbf{n}_3$ и воспользуемся взаимной ортогональностью векторов $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_3$:

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}'_1) + x'_2(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}'_2) + x'_3(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}'_3),\\ x_2 &= x'_1(\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{n}'_1) + x'_2(\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{n}'_2) + x'_3(\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{n}'_3),\\ x_3 &= x'_1(\mathbf{n}_3\cdot\mathbf{n}'_1) + x'_2(\mathbf{n}_3\cdot\mathbf{n}'_2) + x'_3(\mathbf{n}_3\cdot\mathbf{n}'_3). \end{aligned} \tag{4.4}$$

В результате мы получили соотношение, выражающее старые проекции через новые. Можно было бы выразить новые проекции через старые. Для этого надо вышеупомянутое равенство $\mathbf{r}$ в двух системах координат (4.3) домножить скалярно на $\mathbf{n}'_1$, $\mathbf{n}'_2$ и $\mathbf{n}'_3$. Например, таким образом получаем

$$x'_1 = x_1(\mathbf{n}'_1\mathbf{n}_1) + x_2(\mathbf{n}'_1\mathbf{n}_2) + x_3(\mathbf{n}'_1\mathbf{n}_3) \tag{4.5}$$

и аналогично два других равенства.

Коэффициенты

$$\alpha_{ik} = \mathbf{n}_i\mathbf{n}'_k = \cos(\widehat{ik'}), \tag{4.6}$$

характеризующие ориентацию новой системы координат относительно старой, называются направляющими косинусами. Используя их, получим

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1\alpha_{11} + x'_2\alpha_{12} + x'_3\alpha_{13},\\ x_2 &= x'_1\alpha_{21} + x'_2\alpha_{22} + x'_3\alpha_{23},\\ x_3 &= x'_1\alpha_{31} + x'_2\alpha_{32} + x'_3\alpha_{33}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

[2]Индекс i называется **немым** индексом. Его можно обозначать любой буквой.

Если использовать правило суммирования Эйнштейна, то эти три равенства можно записать компактно в виде одного равенства
$$x_i = \alpha_{ik} x'_k. \tag{4.8}$$
Здесь i — это так называемый **свободный индекс**, который пробегает три значения, $i = 1, 2, 3$. По немому индексу k производится суммирование от 1 до 3. Обратное преобразование столь же компактно запишется в виде
$$x'_i = \alpha_{ki} x_k. \tag{4.9}$$

Вектором $\mathbf{A}$ мы будем называть физическую величину, характеризуемую тройкой чисел A_1, A_2, A_3, которые при повороте координатной системы преобразуются по закону (4.8):
$$A_i = \alpha_{ik} A'_k, \tag{4.10}$$
то есть так же, как координаты x_1, x_2, x_3.

А поворот системы координат характеризуется **матрицей направляющих косинусов** (или просто **матрицей поворота**)
$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

Выясним свойства элементов этой матрицы. Для этого выразим старые орты через новые:
$$\mathbf{n}_1 = \alpha_{11}\mathbf{n}'_1 + \alpha_{12}\mathbf{n}'_2 + \alpha_{13}\mathbf{n}'_3 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{1i}\mathbf{n}'_i = \alpha_{1i}\mathbf{n}'_i. \tag{4.12}$$

Умножим это равенство скалярно на $\mathbf{n}_1$:
$$1 = \alpha_{11}\underbrace{(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}'_1)}_{\alpha_{11}} + \alpha_{12}\underbrace{(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}'_2)}_{\alpha_{12}} + \alpha_{13}\underbrace{(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}'_3)}_{\alpha_{13}}. \tag{4.13}$$

Иными словами,
$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = 1, \tag{4.14}$$
то есть сумма квадратов направляющих косинусов первой строки матрицы $\hat{\alpha}$ равна единице. Аналогичным образом записав
$$\mathbf{n}_2 = \alpha_{21}\mathbf{n}'_1 + \alpha_{22}\mathbf{n}'_2 + \alpha_{23}\mathbf{n}'_3, \tag{4.15}$$
можно после скалярного умножения этого равенства на $\mathbf{n}_2$ получить
$$\alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 = 1 \tag{4.16}$$
и таким же образом —
$$\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 = 1, \tag{4.17}$$
то есть сумма квадратов элементов **каждой** строки матрицы $\hat{\alpha}$ равна единице. Точно так же можно доказать, что сумма квадратов элементов каждого столбца матрицы $\hat{\alpha}$ равна единице. Например,
$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 = 1. \tag{4.18}$$

Теперь возьмем равенство
$$\mathbf{n}_1 = \alpha_{11}\mathbf{n}'_1 + \alpha_{12}\mathbf{n}'_2 + \alpha_{13}\mathbf{n}'_3 \tag{4.19}$$
и умножим его скалярно на вектор $\mathbf{n}_2$, ортогональный вектору $\mathbf{n}_1$:
$$0 = \alpha_{11}(\mathbf{n}'_1 \cdot \mathbf{n}_2) + \alpha_{12}(\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}'_2) + \alpha_{13}(\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}'_3), \tag{4.20}$$
или
$$0 = \alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} + \alpha_{13}\alpha_{23}. \tag{4.21}$$
Таким образом, попарное произведение элементов первой строки матрицы поворота на вторую и последующее суммирование дают нуль. Точно так же можно показать, что нуль дадут любые два

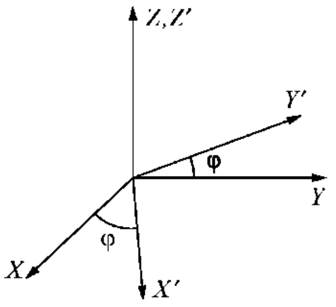

Рис. 4.3. Поворот системы координат на угол φ вокруг оси z.

попарные произведения разных строк друг на друга. Об этом свойстве говорят как о взаимной **ортогональности строк** матрицы $\widehat{\alpha}$. Аналогичным образом можно доказать **ортогональность столбцов** матрицы $\widehat{\alpha}$. Все эти свойства, используя правило суммирования Эйнштейна, можно коротко записать в виде

$$\alpha_{ik}\alpha_{jk} = \alpha_{ki}\alpha_{kj} = \delta_{ij}. \tag{4.22}$$

Первое равенство выражает собой ортогональность и нормировку строк, а второе, соответственно, столбцов. Свободные индексы i и j — два произвольных индекса из набора 1, 2, 3, а по дважды повторяющимся (немым) индексам (k) в формуле (4.22) подразумевается суммирование. Символ δ_{ij}, определяемый равенством

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \tag{4.23}$$

— это так называемый **символ Кронекера**. Символ Кронекера также можно записать в виде матрицы

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

У нее на диагонали стоят единицы, а все остальные (недиагональные) элементы равны нулю. Очевидно, что так же выглядит матрица **тождественного преобразования**, когда новая координатная система совпадает со старой.

Пользуясь свойствами матрицы $\widehat{\alpha}$, легко доказать, что скалярное произведение двух векторов не зависит от выбора системы координат:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \equiv A_i B_i. \tag{4.25}$$

Старые и новые проекции связаны соотношениями

$$\begin{aligned} A_i &= \alpha_{ik} A'_k; \\ B_i &= \alpha_{ij} B'_j. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Умножим их друг на друга и воспользуемся ортогональностью столбцов матрицы $\widehat{\alpha}$:

$$A_i B_i = \alpha_{ik}\alpha_{ij} A'_k B'_j = \delta_{kj} A'_k B'_j = A'_j B'_j. \tag{4.27}$$

В результате мы получили, что $A_i B_i = A'_j B'_j$, то есть скалярное произведение $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ инвариантно относительно поворота системы координат.

Найдем вид матрицы $\widehat{\alpha}$ для одного частного случая, когда система координат поворачивается на угол φ вокруг оси z. Поскольку $\alpha_{ik} = \cos(\widehat{ik'})$, то, глядя на рис. 4.3, легко находим

$$\widehat{\alpha}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.28}$$

До сих пор речь шла о поворотах систем координат. Однако, как известно, существует две системы координат, правая и левая. Очевидно, что при поворотах правая система координат всегда остается правой, а левая — левой. Но существуют такие преобразования координат, которые правую систему преобразуют в левую и наоборот. Например, это может быть инверсия одной из осей, $y \to -y$ (рис. 4.4).

Очевидно, что при этом между проекциями одного и того же радиус-вектора $\mathbf{r}$ в новой и старой координатных системах имеются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} x &= x', \\ y &= -y', \\ z &= z', \end{aligned} \qquad \widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.29}$$

Поскольку $\cos(\widehat{yy'}) = -1$, то координаты радиус-вектора при инверсии одной из осей преобразуются по тем же правилам, что и при поворотах системы координат. Но это оказывается справедливым не для всех векторов.

Рассмотрим, например, вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, описывающий вращение в положительном направлении вокруг оси z (рис. 4.5). Изменим теперь знак одной из осей, например оси y. Это можно себе представить как отражение системы координат в зеркале, плоскость которого перпендикулярна этой оси (рис. 4.6).

Однако очевидно, что при отражении в зеркале изменяется и направление вращения. Из вращения по часовой стрелке оно превратилось во вращение против часовой стрелки, то есть изменился знак проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на ось z,

$$\omega_z = -\omega'_z, \tag{4.30}$$

в то время как координата z обычного радиус-вектора осталась бы прежней,

$$z = z'. \tag{4.31}$$

Это означает, что радиус-вектор точки $\mathbf{r}$ и угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ преобразуются по-разному, если поменять правую систему координат на левую.

В связи с этим радиус-вектор $\mathbf{r}$ называют **полярным вектором**, а вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ — **аксиальным вектором**. При поворотах системы координат оба вектора преобразуются одинаковым образом:

$$\begin{aligned} x_i &= \alpha_{ik} x'_k, \\ \omega_i &= \alpha_{ik} \omega'_k. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Но если матрица $\widehat{\alpha}$ переводит правую систему координат в левую (и наоборот), то законы преобразования этих векторов не совпадают:

$$\begin{aligned} x_i &= \alpha_{ik} x'_k, \\ \omega_i &= -\alpha_{ik} \omega'_k, \end{aligned} \tag{4.33}$$

отличаясь знаком.

Примерами полярных векторов в физике являются радиус-вектор, скорость, ускорение, сила:

$$\mathbf{r}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a}. \tag{4.34}$$

Примеры аксиальных векторов: угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$, напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$, момент импульса $\mathbf{M}$.

При инверсии системы координат (то есть при изменении знака всех осей) правая система переходит в левую и полярные векторы меняют свой знак:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\to -\mathbf{r}, \\ \mathbf{v} &\to -\mathbf{v}, \\ \mathbf{a} &\to -\mathbf{a}, \\ \mathbf{F} &\to -\mathbf{F}, \end{aligned} \tag{4.35}$$

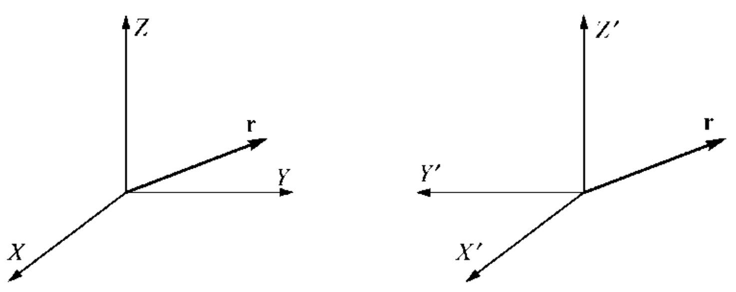

Рис. 4.4. Преобразование компонент вектора при инверсии одной из осей.

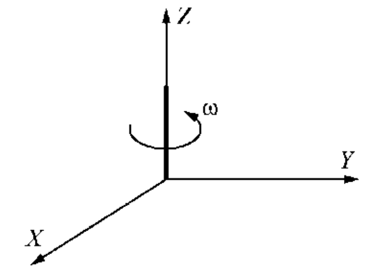

Рис. 4.5. Вектор угловой скорости.

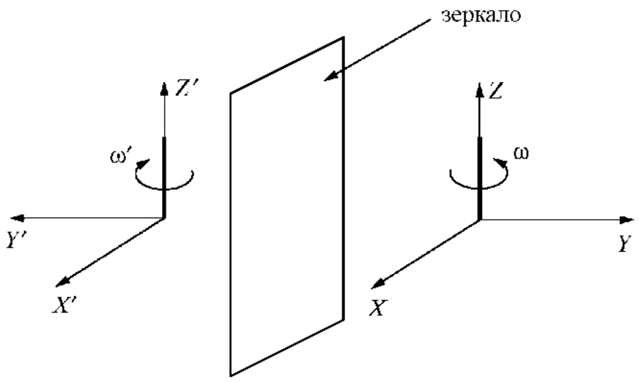

Рис. 4.6. При таком зеркальном отражении направление вращения меняется на противоположное!

а аксиальные векторы при этом не изменяются (потому что их закон преобразования отличается знаком минус):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &\to \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{H} &\to \mathbf{H}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

В физике все физические законы должны выражаться в инвариантной форме, то есть не должны зависеть от выбора системы координат. Это, в частности, означает, что невозможно, например, равенство аксиального и полярного векторов, потому что оно будет выглядеть по-разному в левой и правой системах координат. Например, если некий закон в правой системе выглядит как

$$\textbf{акс} = \textbf{пол}, \tag{4.37}$$

то в левой системе — как

$$\textbf{акс} = -\textbf{пол}. \tag{4.38}$$

Таким образом, физический закон выглядит по-разному в левой и правой системах координат, в природе же такого различия не существует. Левая система ничем не хуже правой. По той же причине нельзя складывать (вычитать) аксиальный и полярный векторы, так же как нельзя складывать величины разной размерности, например секунды и граммы.

Поэтому всегда при записи какого-либо векторного равенства необходимо проверять, не изменяется ли оно при переходе от правой системы координат к левой. Поскольку правая система координат переходит в левую при инверсии, а закон преобразования векторов при инверсии выглядит особенно просто,

$$\begin{aligned} \textbf{пол} &\to -\textbf{пол} \quad (\ ), \\ \textbf{акс} &\to \textbf{акс} \quad (\ ), \end{aligned} \tag{4.39}$$

то нужно к обеим частям равенства применить инверсию.

Например, исследуем таким образом равенство

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] \tag{4.40}$$

для скорости движения материальной точки, радиус-вектор которой $\mathbf{r}$ вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Поскольку $\mathbf{v}$ — полярный вектор (производная от полярного вектора $\mathbf{r}$ по времени), то при инверсии левая часть равенства меняет знак. Чтобы равенство осталось инвариантным по отношению к инверсии, необходимо, чтобы и правая часть $[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$ изменила знак при инверсии. Угловая скорость при инверсии не изменяет свой знак (это аксиальный вектор), а радиус-вектор $\mathbf{r}$ — изменяет (это полярный вектор). Поэтому

$$[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] \to [(\boldsymbol{\omega}) \times (-\mathbf{r})] = -[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}], \tag{4.41}$$

то есть и правая часть нашего равенства изменила знак при инверсии, а следовательно, это тоже полярный вектор. Таким образом, после инверсии системы координат равенство осталось прежним,

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}], \tag{4.42}$$

и мы, следовательно, имеем равенство двух полярных векторов.

Из этого рассуждения можно легко прийти к выводу, что векторное произведение двух полярных векторов есть вектор аксиальный,

$$[\textbf{пол}_1 \times \textbf{пол}_2] = \textbf{акс}, \tag{4.43}$$

поскольку при инверсии левая часть знака не изменяет:

$$[(-\textbf{пол}_1) \times (-\textbf{пол}_2)] \quad [\textbf{пол}_1 \times \textbf{пол}_2] \,. \tag{4.44}$$

Векторное произведение двух аксиальных векторов также является аксиальным вектором.

А что будет, если скалярно перемножить между собой полярный и аксиальный векторы?

$$\textbf{пол} \cdot \textbf{акс} = \ . \tag{4.45}$$

Полученная величина, очевидно, инвариантна к любым пространственным поворотам системы координат, то есть можно сказать, что она является скалярной. Однако это не совсем обычный скаляр, так как он изменяет знак при инверсии системы координат. Такую величину называют **псевдоскаляром**. Например, если бы существовал элементарный магнитный заряд, то он был бы псевдоскалярной величиной. Таким образом, скалярные величины бывают двух типов: **истинный скаляр**, инвариантный к любым преобразованиям системы координат (не только к вращениям, но и к инверсии), и **псевдоскаляр**, инвариантный к вращениям и меняющий знак, когда правая система переходит в левую (и наоборот).

Литература

[1] Сивухин Д. В. Общий курс физики. Механика. М., Наука, 1979 — 520 с.
[2] Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Берклеевский курс физики, том 1, Механика. М., Наука, 1975 — 480 с.
[3] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике (1–2 тома). М., Мир, 1976 — 440 с.
[4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика в 10 томах, том 1, Механика. М., Наука, 1973 — 208 с.
[5] Иродов И.Е. Задачи по общей физике. М., Наука, 1988 — 416 с.

Оглавление