ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
КИНЕМАТИКА
Учебное пособие

Приведены основные положения и материал по курсу «Теоретическая механика» для самостоятельного изучения раздела «Кинематика».

Предназначено для студентов направлений 140700, 141200, 190600, 220700, 151000 всех форм обучения.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Кинематика – это раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел с чисто геометрической точки зрения, без рассмотрения сил, вызывающих это движение.

Кинематика делится на кинематику материальной точки и на кинематику абсолютно твёрдого тела.

Напомним, материальная точка – это материальное тело, размерами которого при решении данной задачи можно пренебречь.

Траекторией движения материальной точки называется пространственная кривая, которую описывает материальная точка при движении. Таким образом, траектория есть след материальной точки в пространстве.

Задать движение материальной точки, это значит указать правило, согласно которому, можно однозначно определить положение точки в пространстве в любой момент времени t.

Время t в системе СИ измеряется в секундах и является скалярным аргументом всех задач кинематики и динамики. Время увеличивается от момента начала рассмотрения движения тела $t_0=0$, называемым начальным моментом времени.

Существует III способа задания движения материальной точки: векторный, координатный и естественный.

1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1.1. Векторный способ задания движения материальной точки

Пусть материальная точка М движется в пространстве по некоторой криволинейной траектории, а точка О – неподвижный центр (рис. 1).

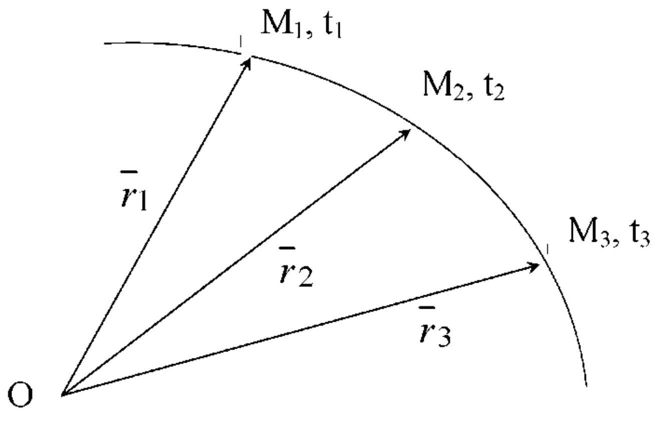


Рис. 1

Точки M_1, M_2 и M_3 - лежат на траектории движения материальной точки и она пересекает эти точки соответственно в моменты времени t_1, t_2 и t_3.

Положение точек M_1, M_2 и M_3 в пространстве относительно неподвижного центра О можно задать с помощью векторов $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ (рис.1.), где $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ - радиусы – векторы положения материальной точки соответственно в моменты времени t_1, t_2 *и* t_3.

Как видно из рис. 1, с течением времени радиус – вектор точки меняется и по величине (модулю), и по направлению. Следовательно, радиус – вектор положения материальной точки в пространстве является векторной функцией скалярного аргумента времени *t*, таким образом можно записать:

$$\bar{r} = \bar{r}(t). \qquad (1)$$

Напомним из математики: задать векторную функцию $\bar{r}$ скалярного аргумента t, т. е. $\bar{r} = \bar{r}(t)$ - это значит указать правило, согласно которому каждому значению момента времени t можно однозначно сопоставить вектор $\bar{r}$, т. е. задать его величину (модуль) и направление. И если это сделано, то векторное равенство $\bar{r} = \bar{r}(t)$ полностью определяет характер движения материальной точки в пространстве, поэтому (1) называется векторным уравнением движения материальной точки.

1.2. Скорость материальной точки при векторном способе задания движения

Пусть, материальная точка движется по криволинейной траектории. Точка О – неподвижный центр (рис. 2).

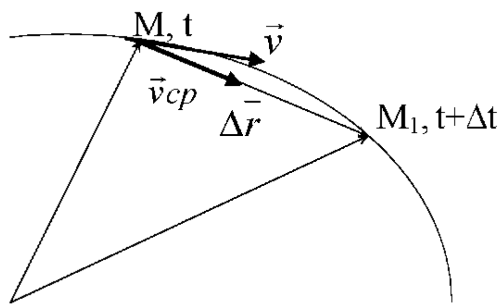


Рис. 2

В момент времени t точка находилась в точке M траектории и её радиус – вектор был $\bar{r}$, а в момент $t+\Delta t$ она переместилась по траектории в точку M_1 и её радиус – вектор стал $\bar{r}_1$. Тогда вектор $\overline{MM_1} = \bar{r}_1 - \bar{r} = \overline{\Delta r}$ - есть геометрическое приращение радиуса – вектора $\bar{r}$ за интервал времени от t до $t+\Delta t$.

Отметим, что вектор $\overline{\Delta r}$ направлен по секущей к траектории.

Определение: <u>средней скоростью движения материальной точки</u>, на некотором интервале времени, называется скорость такого равномерного и прямолинейного движения, при которой точка из начального положения попадает в конечное за тот же промежуток времени, т. е.:

$$\bar{v}_{cp} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t}. \qquad (2)$$

Следовательно, вектор средней скорости $\bar{v}_{cp}$ направлен также как и вектор $\overline{\Delta r}$, т.е. по секущей к траектории.

Предельное значение средней скорости, при безграничном уменьшении интервала времени движения Δt, называется <u>мгновенной скоростью:</u>

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Напомню из математики: производная от функции y по скалярному аргументу x определяется выражением: $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Следовательно, мгновенная скорость точки - это векторная производная от радиус – вектора $\bar{r}$ положения материальной точки в пространстве по скалярному аргументу времени t:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \qquad (3)$$

Если $\Delta t \to 0$, то точка M_1 бесконечно приближается к точке M, а секущая MM_1, поворачиваясь вокруг точки M, безгранично приближается по направлению к касательной (по определению: касательная к кривой – это прямая, проходящая через две бесконечно близкие точки, лежащие на кривой). Таким образом, <u>вектор мгновенной скорости материальной точки всегда направлен по касательной к траектории в сторону движения.</u>

1.3. Ускорение материальной точки при векторном способе задания движения

Рассмотрим материальную точку, движущуюся по некоторой траектории. Пусть в момент времени t материальная точка находилась в точке M траектории и имела мгновенную скорость $\bar{v}$ (рис. 3), а в момент времени $t+\Delta t$ она находится в точке M_1 траектории, и её мгновенная скорость равна $\bar{v}_1$.

Перенесём вектор $\bar{v}_1$ параллельно самому себе в точку M, тогда вектор $\overline{ab} = \bar{v}_1 - \bar{v} = \Delta\bar{v}$, где $\Delta\bar{v}$ - геометрическое приращение вектора скорости $\bar{v}$ за время Δt. С изменением интервала времени Δt конец вектора $\bar{v}_1$ – перенесённый в точку M будет описывать в пространстве некоторую кривую называемую <u>годографом вектора скорости</u>. Заметим, что вектор $\Delta\bar{v}$ направлен по секущей к годографу вектора скорости в сторону вогнутости траектории (рис. 3).

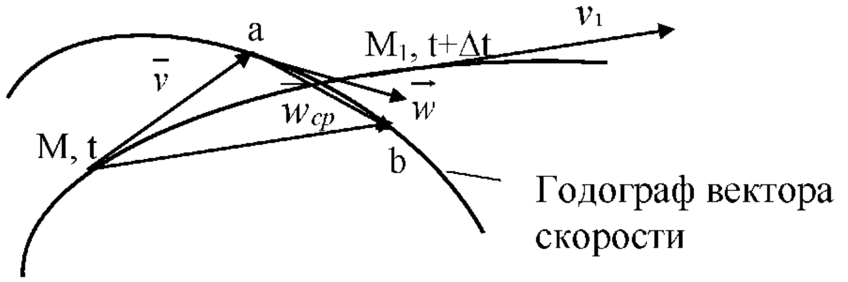


Рис. 3

<u>Средним ускорением движения</u> материальной точки на некотором интервале времени называется вектор, равный отношению геометрического приращения вектора скорости $\Delta\bar{v}$ к интервалу времени Δt, за который произошло приращение $\Delta\bar{v}$:

$$\bar{w}_{cp} = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}.$$

Среднее ускорение направлено по секущей к годографу вектора скорости.

Предельное значение среднего ускорения при безграничном уменьшении интервала времени Δt называется мгновенным ускорением, т.е.

$$\bar{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}.$$

Следовательно, ускорение является $1^{\underline{ой}}$ векторной производной от скорости по времени или $2^{\underline{ой}}$ векторной производной от радиуса – вектора по времени:

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}. \tag{4}$$

Если $\Delta t \to 0$, то точка b стремится к точке a, а точка M_1 к точке M, и плоскость треугольника Mab, поворачиваясь вокруг стороны Ma безгранично приближается к некоторому предельному положению. Это положение плоскости треугольника Mab называется <u>соприкасающейся плоскостью</u> к кривой в данной точке.

Определение: <u>соприкасающаяся плоскость</u> – это плоскость, проведённая через две бесконечно близкие касательные к кривой.

Таким образом, вектор мгновенного ускорения лежит в соприкасающейся плоскости и направлен по касательной к годографу вектора скорости в сторону вогнутости траектории.

1.4. Координатный способ задания движения материальной точки

Рассмотрим произвольное движение материальной точки M. Введём декартовую неподвижную прямоугольную систему координат $Oxyz$ (рис. 4).

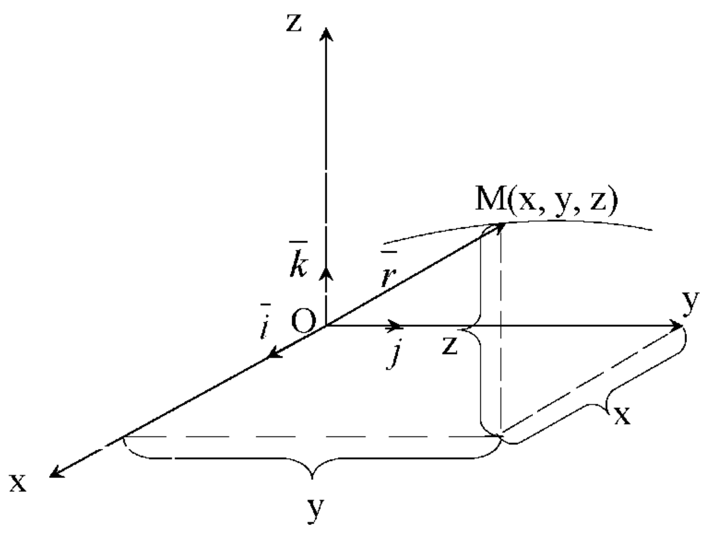


Рис. 4

Пусть x, y, z – декартовые координаты положения материальной точки M в момент времени t. С течением времени декартовые координаты материальной точки меняются, следовательно, они являются скалярными функциями времени:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Задание этих 3^{ёх} скалярных функций полностью определяет закон движения материальной точки в координатным способом.

Вместе с тем $\overline{OM} = \bar{r}$ - радиус-вектор положения материальной точки в пространстве. И через свои проекции x, y, z на оси ox, oy и oz и орты $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ (единичные по модулю вектора, совпадающие по направлению с соответствующими осями координат, см. рис. 4) декартовой системы координат он запишется в виде:

$$\bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}. \tag{6}$$

Пользуясь равенством (6) можно по известным декартовым координатам точки определить её радиус – вектор по модулю и направлению. Поэтому равенство (6) выражает связь между векторным и координатным способами задания движения материальной точки.

Продифференцируем выражение (6) по времени, при этом учтём, что:

1) $\dfrac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}$;

2) $\dfrac{d\bar{i}}{dt} = \dfrac{d\bar{j}}{dt} = \dfrac{d\bar{k}}{dt} = 0$, поскольку орты декартовой системы константы не меняются ни по модулю, ни по направлению;

3) операцию дифференцирования величины по времени в теоретической механике принято обозначать точкой сверху:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x},\ \frac{dy}{dt} = \dot{y},\ \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

После дифференцирования, с учетом условий 1-3 получим выражение для вектора скорости при координатном способе задания движения:

$$\bar{v} = \dot{x} \cdot \bar{i} + \dot{y} \cdot \bar{j} + \dot{z} \cdot \bar{k}. \qquad (7)$$

Из выражения (7) видно, что проекции вектора скорости на оси координат равны производным по времени от соответствующих координат положения материальной точки:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \dot{x} \\ v_x &= \dot{y} \\ v_z &= \dot{z} \end{aligned} \right\}. \qquad (8)$$

Модуль вектора скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$. (9)

Косинусы углов (направляющие косинусы) между вектором скорости и осями координат определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\bar{v}; x) &= \frac{\dot{x}}{v} \\ \cos(\bar{v}; y) &= \frac{\dot{y}}{v} \\ \cos(\bar{v}; z) &= \frac{\dot{z}}{v} \end{aligned} \right\}. \qquad (10)$$

Продифференцируем выражение (7) по времени, так как $\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{w}$, то получаем следующее координатное представление вектора ускорения:

$$\bar{w} = \ddot{x} \cdot \bar{i} + \ddot{y} \cdot \bar{j} + \ddot{z} \cdot \bar{k}. \qquad (11)$$

Отсюда следует, что проекции вектора ускорения $\bar{w}$ на координатные оси равны вторым производным по времени от соответствующих координат положения материальной точки в пространстве:

$$\begin{cases} w_x = \ddot{x} \\ w_y = \ddot{y} \\ w_z = \ddot{z} \end{cases}. \qquad (12)$$

Модуль вектора ускорения w определяется:

$$w = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \qquad (13)$$

Косинусы углов (направляющие косинусы) между вектором $\bar{w}$ и осями координат определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned}\cos(\overline{w}; x) &= \frac{\ddot{x}}{w}\\ \cos(\overline{w}; y) &= \frac{\ddot{y}}{w}\\ \cos(\overline{w}; z) &= \frac{\ddot{z}}{w}\end{aligned}\right\}. \qquad (14)$$

Записанные выше формулы (9, 10) и (13, 14) позволяют определить величину и направление векторов $\overline{v}$ и $\overline{w}$ материальной точки в любой момент времени.

2. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

2.1. Радиус кривизны пространственной кривой

Рассмотрим пространственную кривую и две точки M и M_1 на ней (рис. 5). Проведём в этих точках касательные I и II к кривой. Перенесём касательную II параллельно самой себе в точку M. Угол Q между касательными называется углом смежности кривой на дуге MM_1.

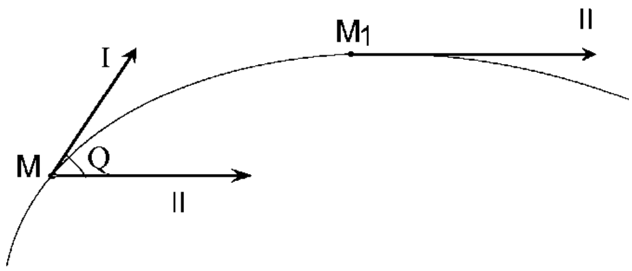


Рис. 5

Средним радиусом кривизны на некоторой дуге кривой называется отношение длины данной дуги к соответствующему углу смежности на этой дуге:

$$\rho_{cp} = \frac{\overset{\frown}{MM_1}}{Q}. \qquad (1)$$

Предельное значение среднего радиуса кривизны при безграничном уменьшении длины дуги называется <u>радиусом кривизны кривой в данной точке</u>:

$$\rho = \lim_{\overset{\frown}{MM_1} \to 0} \frac{\overset{\frown}{MM_1}}{Q}. \tag{2}$$

В случае прямой линии, очевидно, что Q=0, следовательно,

$$\rho_{cp} = \rho = \infty.$$

Определим радиус кривизны окружности (рис. 6).

Пусть имеется окружность радиуса R. Возьмём на ней две точки M и M_1. Тогда угол смежности Q равен $\angle MOM_1$ (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами). Следовательно, длина дуги

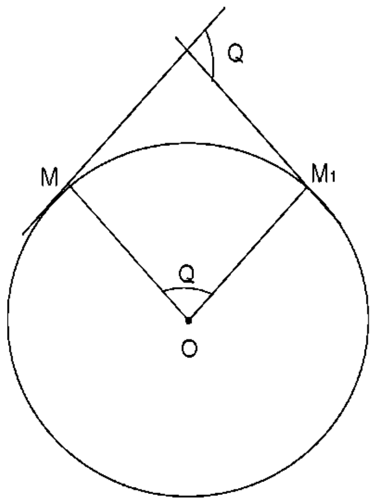


Рис. 6

$\breve{M}M_1 = R \cdot Q$ (угол Q в радианах). Откуда получаем, что $\rho_{cp} = \rho = R$; т. е. и средний радиус кривизны окружности на любой её дуге, и локальный, в каждой точке, равны её радиусу.

2.2. Естественное уравнение кривой

На любой пространственной кривой можно задать криволинейную систему координат. Для этого необходимо задать положительное направление отсчета на кривой S, и точку M_0, криволинейная координата которой равна нулю.

Так, если имеется кривая (рис. 7), то криволинейная координата точки M равна дуговому расстоянию S от точки M до точки M_0 (криволинейная координата которой равна нулю).

Если на этой кривой выбрать положительное направление отсчета как указано на рис. 7, то координата точки M равная $S = \overset{\frown}{M_0 M} > 0$ - положительная. А криволинейная координата точки M_1, равная $S_1 = -\overset{\frown}{M_0 M_1} < 0$ - отрицательная.

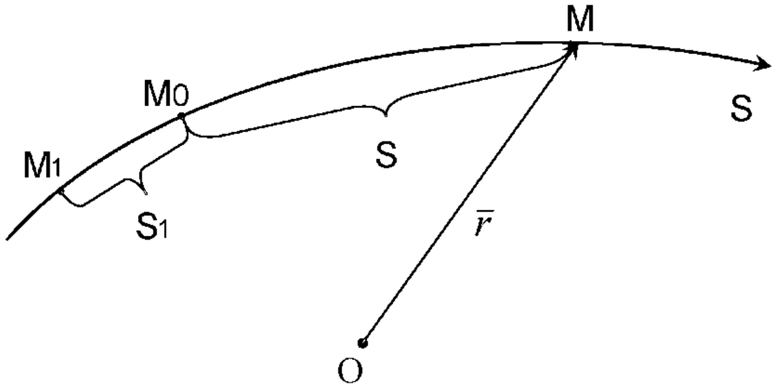


Рис. 7

Таким образом, каждой точке на кривой соответствует своя криволинейная координата.

Пусть точка O – полюс, а $\bar{r} = \overline{OM}$ - радиус–вектор положения точки M в пространстве. Очевидно, что с изменением криволинейной координаты радиус – вектор меняется и по модулю, и по направлению, следовательно, радиус – вектор, движущейся по траектории материальной точки, является функцией криволинейной координаты:

$$\bar{r} = \bar{r}(S). \tag{3}$$

Векторное уравнение (3) полностью определяет форму кривой и её положение в пространстве. Оно называется естественным или натуральным уравнением кривой.

2.3. Естественные оси кривой

Пусть имеется кривая, на которой заданы начало отсчёта и положительное направление отсчёта криволинейной координаты S (рис. 8).

Проведём к какой – нибудь точке *M* кривой касательную. Ось касательной τ к кривой в точке *M* направим в сторону увеличения криволинейной координаты S.

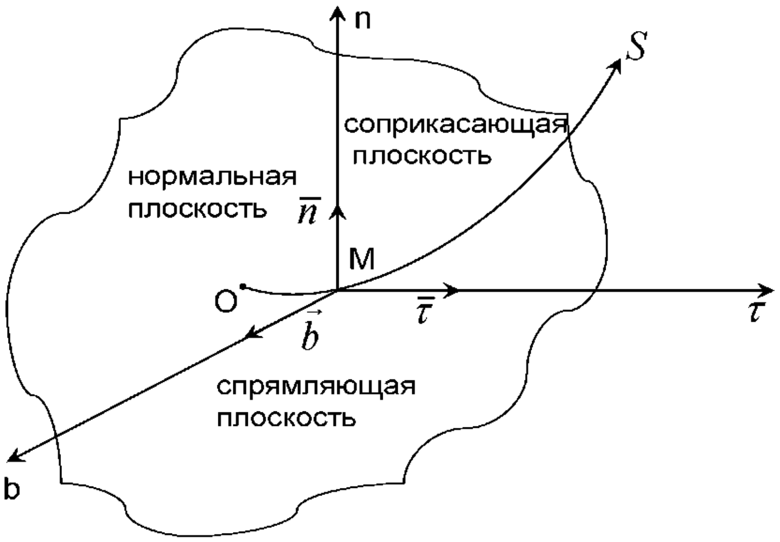


Рис. 8

Построим плоскость, перпендикулярную оси τ, и проходящую через точку *M*. Плоскость, перпендикулярная к касательной в данной точке кривой, называется нормальной плоскостью к кривой в точке *M*. Как ранее отмечали, плоскость, проходящая через две бесконечно близких касательных к кривой, называется соприкасающейся плоскостью к кривой в данной точке. Построим эту плоскость в точке *M*. Так как соприкасающаяся плоскость включает в себя касательную к кривой в точке *M*, а нормальная плоскость перпендикулярна касательной, то соприкасающаяся плоскость перпендикулярна нормальной плоскости в каждой точке кривой.

Плоскость, проходящая через т. M перпендикулярно нормальной и соприкасающейся плоскостям, называется спрямляющей плоскостью в этой точке кривой.

В результате этих построений получены три взаимно перпендикулярные плоскости (рис. 8).

Любая прямая, проходящая через точку M кривой, и лежащая в нормальной плоскости, называется нормалью к кривой в точке M. Нормаль, лежащая на пересечении нормальной и соприкасающейся плоскостей и направленная в сторону вогнутости кривой, называется осью главной нормали к точке M кривой.

n – главная нормаль в точке M к кривой (см. рис. 8);

b – линия пересечения нормальной и спрямляющей плоскостей носит название бинормали.

Система трёх взаимно перпендикулярных осей τ, n, b однозначно определена в каждой точке пространственной кривой. Эти оси называются естественными осями кривой в данной точке. Как и для декартовой системы координат введём для каждой естественной оси орты (единичные по модулю вектора, показывающие направление соответствующих осей):

$\bar{\tau}$ - орт касательной оси направлен по касательной к данной точке кривой,

$\bar{n}$ - орт нормали направлен вдоль главной нормали к кривой в данной точке,

$\bar{b}$ - орт, направленный по оси бинормали в этой же точке кривой.

С изменением криволинейной координаты естественные оси и, соответственно, орты осей меняют свои направления (при этом по модулю орты остаются равными единице). Следовательно, орты являются функциями криволинейной координаты, то есть $\bar{\tau} = \bar{\tau}(S), \bar{n} = \bar{n}(S), \bar{b} = \bar{b}(S)$.

2.4. Лемма

Лемма: производная от вектора постоянного по модулю, но переменного по направлению, по скалярному аргументу есть вектор, перпендикулярный дифференцируемому вектору.

Доказательство.

Пусть имеется не равная нулю векторная функция $\bar{a}$ скалярного аргумента (u), т. е. $\bar{a} = \bar{a}(u)$; Причём с изменением u модуль вектора

$a = const(u)$. Для определения направления производной от векторной функции по скалярному аргументу будем исходить из равенства, что $\bar{a}^2 = a^2$ (скалярное произведение вектора самого на себя равно квадрату его модуля).

Продифференцируем это равенство по u, получим

$$2\bar{a} \cdot \frac{d\bar{a}}{du} = 2a \cdot \frac{da}{du},\text{ но } \frac{da}{du} = 0,\text{ так как } a = const(u),$$

следовательно:

$$\bar{a} \cdot \frac{d\bar{a}}{du} = 0.$$

Скалярное произведение двух векторов равно нулю в следующих 3-ёх случаях:

1. $\bar{a} = \bar{o}$, но это не так по условию;
2. $\frac{d\bar{a}}{du} = 0$, это тоже не так, так как $\bar{a} = \bar{a}(u)$;
3. $\bar{a} \perp \frac{d\bar{a}}{du}$ - следовательно, лемма доказана.

2.5. Производная от радиуса-вектора по криволинейной координате

Пусть имеется произвольная кривая, на которой задана криволинейная система координат S (рис. 9). Точки M и M_1 лежат на кривой и имеют соответственно криволинейные координаты S и $S + \Delta S$ относительно выбранного начала отсчёта. Выберем в пространстве произвольный центр точку O и проведём из точки O радиус – вектора $\bar{r}$ и $\bar{r}_1$ точек M и M_1.

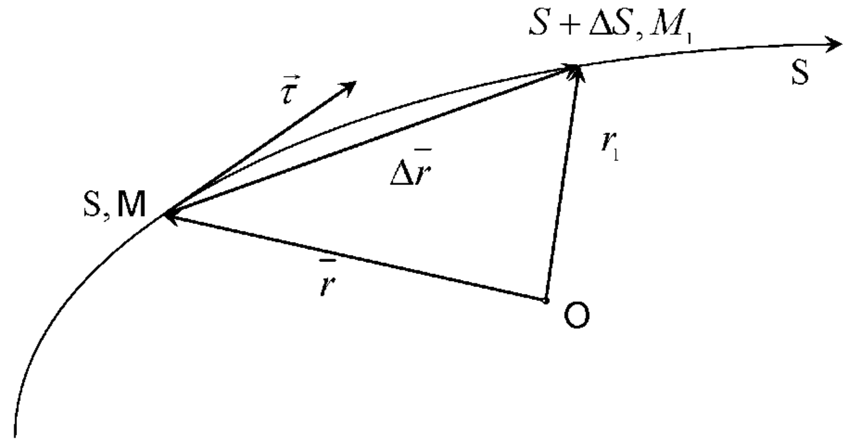


Рис. 9

Вектор $\overline{\Delta r}$ - это приращение вектора $\bar{r}$, при изменении криволинейной координаты точки от значения S, до величины $S+\Delta S$. По определению векторной производной имеем:

$$\frac{d\bar{r}}{dS} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\overline{\Delta r}}{\Delta S} = \lim_{\breve{M}M_1 \to 0} = \frac{\overline{MM_1}}{\breve{M}M_1}.$$

Если дуга $\breve{M}M_1 = \Delta S \to 0$, то вектор $\overline{\Delta r}$ по своему направлению приближается к касательной, следовательно, производная от радиуса вектора по криволинейной координате $\frac{d\bar{r}}{dS}$- направлена по касательной к кривой в сторону увеличения криволинейной координаты. Тогда, если $\bar{\tau}$ - орт касательной оси (вектор единичный по величине и направленный вдоль оси τ),

$$\text{то } \frac{d\bar{r}}{dS} = \left|\frac{d\bar{r}}{dS}\right| \cdot \bar{\tau}, \text{ а модуль } \left|\frac{d\bar{r}}{dS}\right| = \lim_{\breve{M}M_1 \to 0} \frac{MM_1}{\breve{M}M_1} = 1$$

поскольку длина бесконечно малой дуги отличается от длины стягивающей её хорды на величину высшего порядка малости. Отсюда

$$\frac{d\bar{r}}{dS} = \bar{\tau}.$$

<u>Производная от радиуса – вектора по криволинейной координате равна орту касательной оси.</u>

2.6. Производная от орта касательной по криволинейной координате

Пусть имеется произвольная кривая. Точки M и M_1, имеющие криволинейные координаты S и $S+\Delta S$ лежат на данной кривой (рис. 10). Пусть $\bar{\tau}$ и $\bar{\tau}_1$ - орты касательных осей в точках M и M_1 к кривой.

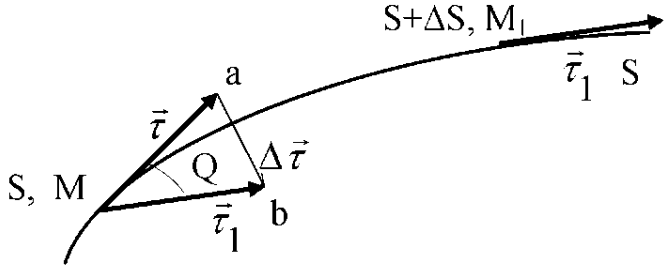


Рис. 10

Требуется определить величину и направление вектора $\frac{d\bar{\tau}}{dS}$.

Перенесём орт $\bar{\tau}_1$ параллельно самому себе в точку M. Тогда вектор $\overline{ab}=\overline{\Delta\tau}=\overline{\tau_1}-\bar{\tau}$ - является геометрическим приращением орта касательной, а $\angle Q$ - углом смежности кривой на дуге MM_1. Следовательно, векторная производная $\frac{d\bar{\tau}}{dS}$, согласно определению:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dS}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta S}=\lim_{MM_1\to 0}\frac{\overline{ab}}{MM_1}.$$

Мы знаем, что если $\Delta S\to 0$, то плоскость ΔMab безгранично приближается к <u>соприкасающейся</u> <u>плоскости</u>, следовательно, векторная производная $\frac{d\bar{\tau}}{dS}$ лежит в соприкасающейся плоскости.

С другой стороны мы знаем, что орт $\bar{\tau}$ с изменением скалярного аргумента S меняется по направлению, оставаясь неизменным по модулю. Поэтому, согласно лемме § 4, этой главы о том, что производная от вектора, постоянного по модулю, но переменного по направлению по скалярному аргументу, есть вектор, перпендикулярный дифференциальному вектору, следует, $\frac{d\bar{\tau}}{dS}\perp\bar{\tau}$.

Это означает, что вектор $\frac{d\bar{\tau}}{dS}$ - лежит и в нормальной плоскости естественной системы координат. Так как вектор $\frac{d\bar{\tau}}{dS}$ лежит одновременно и в нормальной, и в соприкасающейся плоскостях, а также направлен в сторону вогнутости кривой, то он имеет направление главной нормали. Таким образом, направление вектора $\frac{d\bar{\tau}}{dS}$ определено и можно записать, что $\frac{d\bar{\tau}}{dS} = \left|\frac{d\bar{\tau}}{dS}\right| \cdot \vec{n}$.

Найдём величину модуля вектора $\frac{d\bar{\tau}}{dS}$. По определению

$$\left|\frac{d\bar{\tau}}{dS}\right| = \lim_{MM_1 \to 0} \frac{ab}{\breve{M}M_1}.$$

Рассмотрим подробнее ΔaMb (рис. 11). Он является равнобедренным, так как $aM = bM = 1$, $\angle aMb = Q$. Опустим из вершины треугольника M высоту (медиану, биссектрису) на сторону ab, тогда $\angle cMb = \angle cMa = \frac{Q}{2}$.

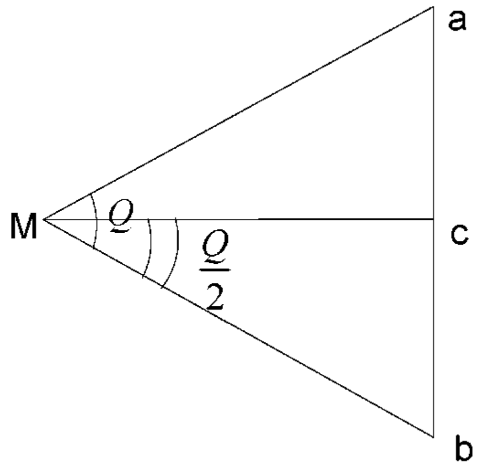


Рис. 11

Отсюда получаем, что $ab = 2Ma \cdot \sin\frac{Q}{2} \approx 2 \cdot 1 \cdot \frac{Q}{2} = Q$, так как при $\breve{M}M_1 \to 0, \angle Q \to 0$ и синус бесконечно малого угла эквивалентен этому углу в радианах без учёта величин более высокого порядка малости: $\sin\frac{Q}{2} \approx \frac{Q}{2}$. Тогда $\left|\frac{d\bar{\tau}}{dS}\right| = \lim\limits_{MM_1 \to 0} \frac{Q}{\breve{M}M_1} = \frac{1}{\rho}$.

(см. 2.1 этой главы), где ρ - радиус кривизны кривой в точке M. Отсюда сам вектор производной $\frac{d\bar{\tau}}{dS} = \frac{1}{\rho} \cdot \bar{n}$, где $\bar{n}$ - орт оси главной нормали. Векторная производная от орта касательной по криволинейной координате равна орту главной нормали, делённому на радиус кривизны в данной точке кривой.

3. ЕСТЕСТВЕННЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

3.1. Уравнения движения материальной точки при естественном способе задания

При естественном способе раздельно задаются траектория движения точки и закон её движения по траектории.

Траектория точки – это пространственная кривая, поэтому её можно задать различными способами (графически или аналитически). В кинематике принято уравнение траектории задавать естественным или натуральным уравнением кривой (см. §2 предыдущей главы). Для этого на траектории задаётся криволинейная система координат S. Естественное векторное уравнение кривой имеет вид:

$$\bar{r} = \bar{r}(S). \qquad (1)$$

Это уравнение полностью определят форму и положение в пространстве траектории движения.

С течением времени криволинейная координата точки S меняется, поэтому она является скалярной функцией времени:

$$S = S(t). \qquad (2)$$

Выражение (2) определяет закон движения материальной точки по траектории. Следовательно, задать движение материальной точки в пространстве с помощью естественного способа, это значит задать одну векторную функцию (1) и одну скалярной функцию (2). Совокупность этих равенств однозначно определяет радиус – вектор $\bar{r}$ положения материальной точки в пространстве как сложную функцию времени. Причём криволинейная координата S выступает как промежуточный аргумент.

Исключая из равенств (1) и (2) промежуточный аргумент S можно перейти от естественного способа задания движения к векторному:

$$\bar{r} = \bar{r}(t).$$

3.2. Скорость материальной точки при естественном способе задания движения

Пользуясь правилом сложного дифференцирования, продифференцируем векторное равенство (1) по времени:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt}. \qquad (3)$$

В выражении (3) $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}$ - (согласно векторному способу задания движения) это вектор скорости движения материальной точки.

$\frac{d\bar{r}}{dS} = \bar{\tau}$ - орт касательной к траектории (см. § 5 предыдущей главы)

$\frac{dS}{dt} = \dot{S}$ - производная от криволинейной координаты по времени.

Следовательно, <u>скорость точки при естественном способе задания движения определяется выражением</u>:

$$\bar{v} = \dot{S} \cdot \bar{\tau} \qquad (4)$$

Спроектируем вектор скорости на естественные оси координат, тогда получим:

- $v_n = v_b = 0$,
- $v_\tau = \dot{S}$.

Отсюда модуль вектора скорости $v = |v_\tau| = |\dot{S}|$.

Если направление вектора скорости совпадает с направлением касательной оси, то проекция вектора $v_{\tau} = \dot{S} > 0$, т.е. имеет место движение вперед по траектории (рис. 12).

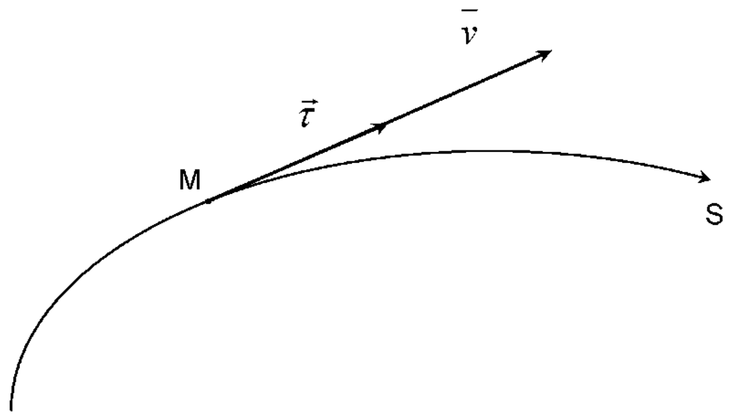


Рис. 12

Если вектор скорости направлен в противоположную сторону касательной оси, то $v_{\tau} = \dot{S} < 0$ и имеет место движение назад (рис. 13).

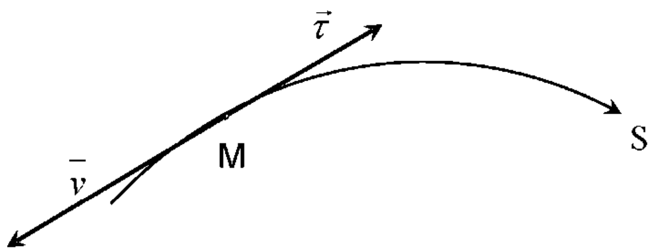


Рис. 13

3.3. Ускорение материальной точки при естественном способе задания движения

Продифференцируем левую и правую части выражения (4) $\bar{v} = \dot{S} \cdot \bar{\tau}$ по времени.

Тогда получим:
$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \ddot{S} \cdot \bar{\tau} + \dot{S} \cdot \frac{d\bar{\tau}}{dt}. \tag{5}$$

Мы знаем, что $\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{w}$ - вектор ускорения точки.

Известно, что $\bar{\tau} = \bar{\tau}(S)$, а S=S(t), следовательно $\bar{\tau} = \bar{\tau}(S)$- сложная функция аргумента t, с промежуточным аргументом S.

Согласно правилам дифференцирования сложной функции имеем:

$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{dS} \cdot \dot{S} = \frac{\bar{n}}{\rho} \cdot \dot{S}$, где ρ - радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке (см. § 6 предыдущей главы).

Подставим полученные значения в формулу (5), получим выражение для определения ускорения материальной точки при естественном способе задания движения:

$$\bar{w} = \ddot{S}\bar{\tau} + \frac{\dot{S}^2}{\rho} \cdot \bar{n}. \qquad (6)$$

Проекции вектора ускорения на естественные оси τ, n и b будут:

$w_\tau = \ddot{S} = \dot{v}_\tau$ - проекция ускорения на касательную ось τ;

$w_n = \frac{\dot{S}^2}{\rho} = \frac{v_\tau^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho}$ - проекция ускорения на ось главной нормали n;

$w_b = 0$ - проекция на ось бинормали равна 0.

Таким образом, вектор ускорения можно представить в виде суммы двух векторных составляющих $\bar{w} = \overline{w_\tau} + \overline{w_n}$, где

$\overline{w_\tau} = w_\tau \cdot \bar{\tau} = \dot{v}_\tau \cdot \bar{\tau}$ - касательное ускорение точки;

$\overline{w_n} = w_n \cdot \bar{n} = \frac{v^2}{\rho} \cdot \bar{n}$ - нормальное ускорение точки.

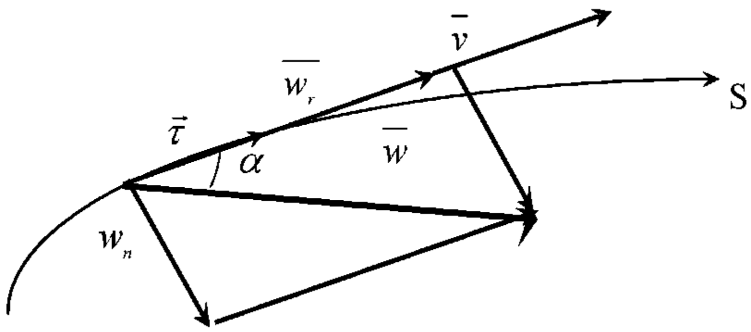
3.4. Различные случаи движения точки

Определение: движение точки в данный момент времени называется ускоренным (замедленным), если модуль скорости в этот момент увеличивается (уменьшается).

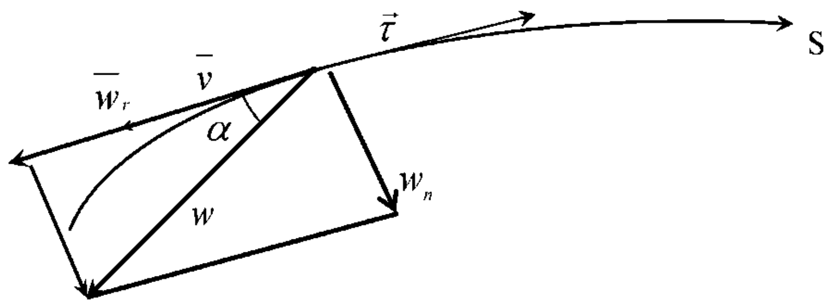
При ускоренном движении точки модуль скорости в данный момент увеличивается, следовательно, $\frac{dv}{dt} > 0$, а при замедленном $\frac{dv}{dt} < 0$.

Мы знаем, что $v^2 = v_\tau^2$ (*), а $v = |v_\tau| = |\dot{S}|$. Продифференцируем равенство (*) по t: $2v_\tau \cdot \dot{v}_\tau = 2v \cdot \frac{dv}{dt} \Rightarrow v_\tau \cdot w_\tau = v \cdot \frac{dv}{dt}$ (**)

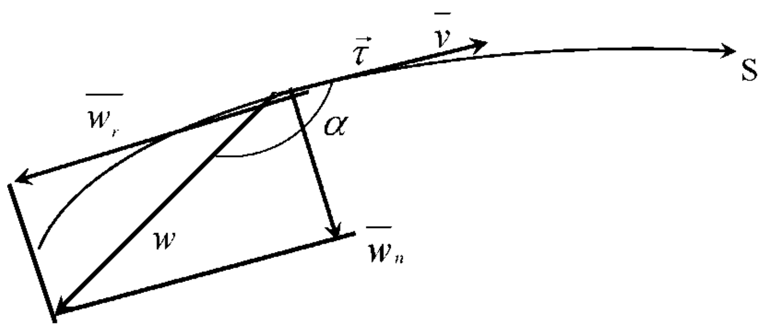
Рассмотрим следующие случаи движения:



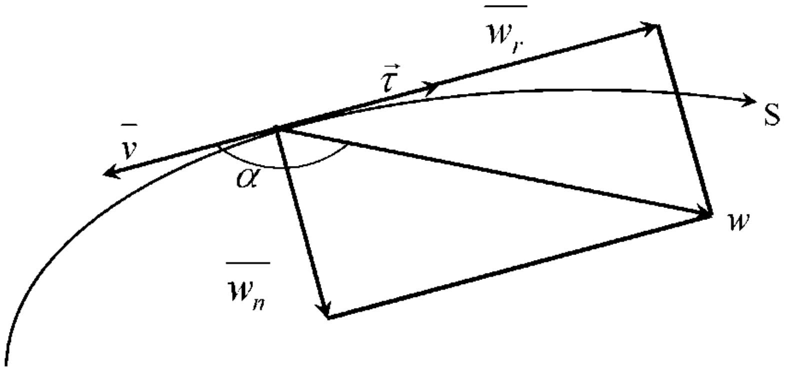
1. $v = v_\tau > 0$, $w_\tau > 0$, тогда из (**) $v_\tau \cdot w_\tau > 0 \Rightarrow w = \frac{dv}{dt} > 0$, т. е. имеет место ускоренное движение вперёд.



2. $w_\tau < 0$, $v_\tau < 0$, тогда $v_\tau \cdot w_\tau > 0$, из (**) $v > 0$, $w = \frac{dv}{dt} > 0$ – следовательно, имеет место ускоренное движение назад.



3. $v = v_\tau > 0$, $w_\tau < 0$, $v_\tau \cdot w_\tau < 0 \Rightarrow$ из (**) $w = dv/dt < 0$, отсюда имеет место замедленное движение вперёд.



4. $v_\tau < 0$, $v > 0$, $w_\tau > 0 \Rightarrow w = dv/dt < 0$ – имеет место замедленное движение назад.

Как видно из этих рисунков, угол между векторами $\overline{v}$ и $\overline{w}$ тупой (больше 90 °) при замедленном движении и острый (меньше 90 °) при ускоренном движении материальной точки. Здесь же мы видим, что касательное ускорение материальной точки w_τ характеризует быстроту изменения скорости по модулю, а нормальное ускорение w_n характеризует быстроту изменения скорости по направлению.

Для прямолинейного движения радиус кривизны ρ траектории равен ∞, отсюда при движении по прямолинейной траектории $w_n = v^2/\rho = 0$, а полное ускорение $\overline{w} = \overline{w_\tau}$. Для равномерного криволинейного движения:

$$v = const \text{ и } \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow w_\tau = 0, \text{ следовательно, } \overline{w} = \overline{w_n}.$$

4. КИНЕМАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЁРДОГО ТЕЛА

4.1. Поступательное движение твёрдого тела

Определение: движение твёрдого тела называется поступательным, если любая прямая или плоскость жестко связанные с телом во всё время движения остаются параллельными самим себе.

При поступательном движении тела траектории движения его точек могут быть как прямолинейными, так и криволинейными.

Очевидно, что если все точки тела движутся прямолинейно, то движение тела является поступательным.

Приведём пример не прямолинейного поступательного движения тела. Пусть даны два одинаковых колеса I и II, вращающиеся в одном направлении вокруг точек O_1 и O_2 по одинаковому закону (рис. 14). В сходственных точках колёс шарнирно укреплена штанга AB такая, что $AB = O_1O_2$ и AB параллельна O_1O_2. В этом случае штанга AB будет параллельна O_1O_2 в любой момент движения, таким образом, несмотря на то, что каждая точка штанги описывает окружность при своем движении, сама штанга совершает поступательное движение, так как ось штанги всегда параллельна O_1O_2.

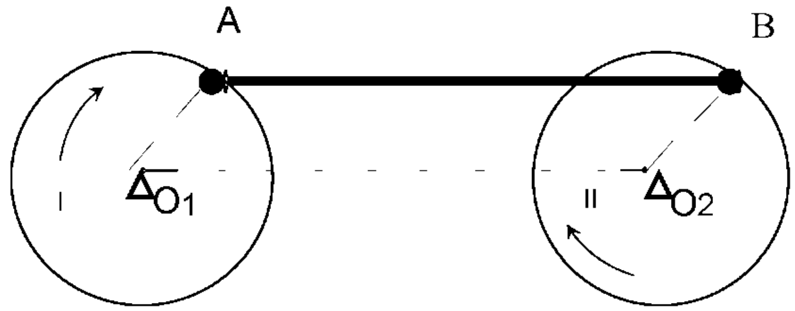


Рис. 14

Свойства поступательного движения тела отражены в следующей теореме:

Теорема: При поступательном движении тела вектора скоростей всех его точек в любой момент времени одинаковы.

Доказательство:

Пусть некоторое твердое тело совершает поступательное движение (рис. 15).

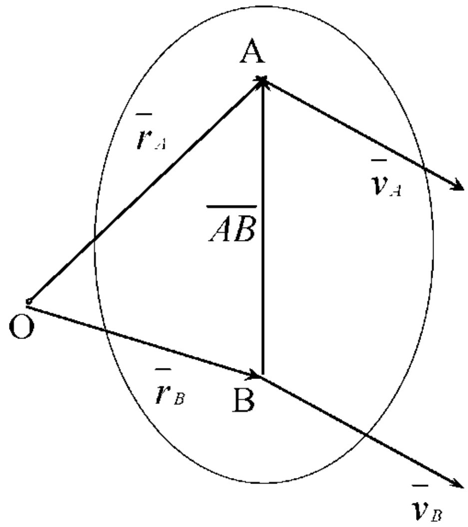


Рис. 15

Выберем две произвольные точки тела A и B, $\overline{r}_A$ и $\overline{r}_B$ соответственно радиус- вектора этих точек относительно точки O - неподвижного центра. Построим вектор $\overline{AB}$, соединяющий точки A и B.

Согласно правилам векторного сложения двух векторов в любой момент времени справедливо соотношение:

$$\overline{r}_A = \overline{r}_B + \overline{AB}. \qquad (1)$$

Продифференцируем выражение (1) по времени t:

$$\frac{d\overline{r}_A}{dt} = \frac{d\overline{r}_B}{dt} + \frac{d\overline{AB}}{dt}.$$

Согласно кинематике точки:

$\dfrac{d\overline{r}_A}{dt} = \overline{v}_A$ - скорость движения точки A,

$\dfrac{d\overline{r}_B}{dt} = \overline{v}_B$ - скорость движения точки B,

$\frac{d\overline{AB}}{dt} = 0$ так как вектора $\overline{AB}$ не меняется ни по величине, ни по направлению. (Точки A и B принадлежат одному твёрдому телу, следовательно, длина вектора $\overline{AB}$ не меняется. Вектор $\overline{AB}$ не меняется по направлению, так как все время он остается параллелен самому себе (см. определение поступательного движения тела)).

Следовательно
$$\overline{v_A} = \overline{v_B}. \tag{2}$$

В силу произвольности выбора точек A и B внутри тела теорема доказана.

Следствие 1: Вектора ускорений всех точек тела совершающего поступательное движение в каждый момент времени равны и параллельны друг другу.

Доказательство.

Продифференцируем выражение (2) по времени t:

$$\frac{d\overline{v_A}}{dt} = \frac{d\overline{v_B}}{dt};$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\overline{w_A} = \overline{w_B} \Rightarrow \overline{w_A} = \overline{w_B}. \tag{3}$$

Следствие 2: В силу равенства скоростей и ускорений всех точек твёрдого тела при поступательном движении, траектории всех точек одинаковые параллельные друг другу кривые.

Таким образом, все точки тела в поступательном движении в каждый момент времени имеют соответственно одинаковые скорости, ускорения и траектории движения. Тогда полное суждение о характере поступательного движения твёрдого тела можно составить, если известно движение, хотя бы одной любой его точки.

Следовательно, кинематика поступательного движения твёрдого тела сводится к кинематике материальной точки.

4.2. Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси

Определение: Вращательным называется такое движение твёрдого тела, при котором мы сумели обнаружить в нем хотя бы две точки, остающиеся неподвижными во всё время движения тела.

Прямая, проходящая через эти две неподвижные точки, называется осью вращения (рис. 16).

Так как расстояния между точками твёрдого тела должны оставаться постоянными, то при вращательном движении все точки, лежащие на оси вращения, будут также неподвижными. Остальные точки тела будут описывать окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения, а центры их лежат на оси.

Проведём через ось вращения Az две полуплоскости: полуплоскость I – неподвижную и полуплоскость II подвижную, жёстко связанную с вращающимся телом. Тогда угол между плоскостями I и II – угол φ, будет однозначно определять положение тела в любой момент времени. Угол φ называется <u>углом поворота тела.</u> Будем считать $\varphi>0$, если он отложен от неподвижной плоскости в направлении против хода часовой стрелки для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси Az, и отрицательным ($\varphi<0$), если он отложен по ходу часовой стрелки.

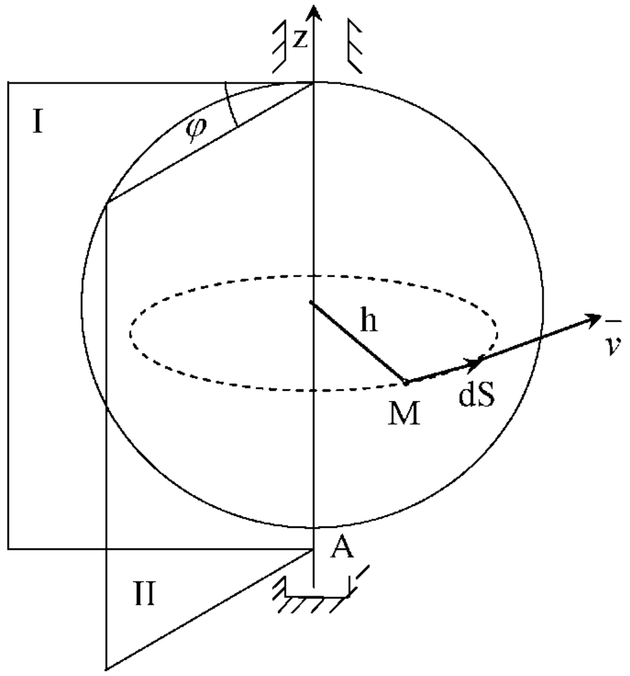


Рис. 16

Следовательно, для того чтобы задать положение твёрдого тела, при вращательном движении, необходимо и достаточно знать закон изменения угла поворота тела со временем, то есть знать

$$\varphi = \varphi(t). \qquad (4)$$

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения тела является его угловая скорость ω и угловое ускорение ε.

Определение: если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t_0$ тело совершает поворот на угол $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$, то средняя угловая скорость тела за этот промежуток времени определится выражением:

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \tag{5}$$

Определение: угловой скоростью вращения тела в данный момент времени t называется предел, к которому стремится значение ω_{cp}, если $\Delta t \to 0$, т. е. (согласно определению производной):

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \tag{6}$$

Легко видеть, что если для наблюдателя находящегося со стороны положительного направления оси z вращение происходит по часовой стрелке то, то $\omega<0$, если против часовой стрелки, то $\omega>0$.

Размерность угловой скорости вращения в системе СИ: $[\omega]$ = рад/с.

Угловую скорость вращения тела можно представить в виде вектора $\overline{\omega}$, модуль которого $\omega = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right| = \dot{\varphi}$, а направлен он вдоль оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки, например см. рис. 17.

Угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости тела с течением времени.

Определение: если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t_0$ угловая скорость тела изменяется на величину $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0$, то среднее угловое ускорение тела за этот промежуток времени равно:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \tag{7}$$

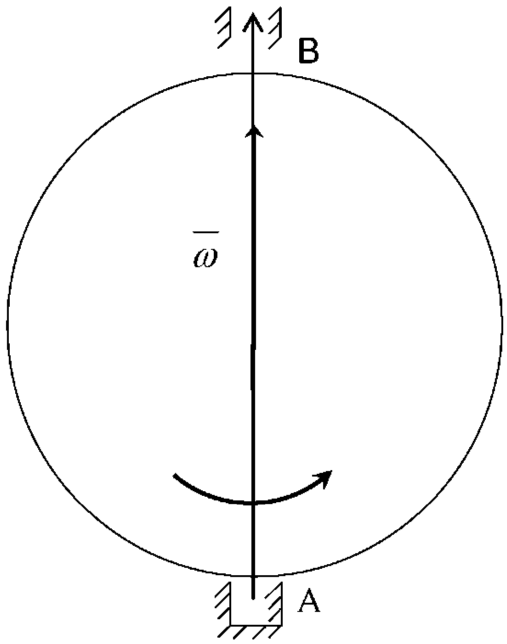


Рис. 17

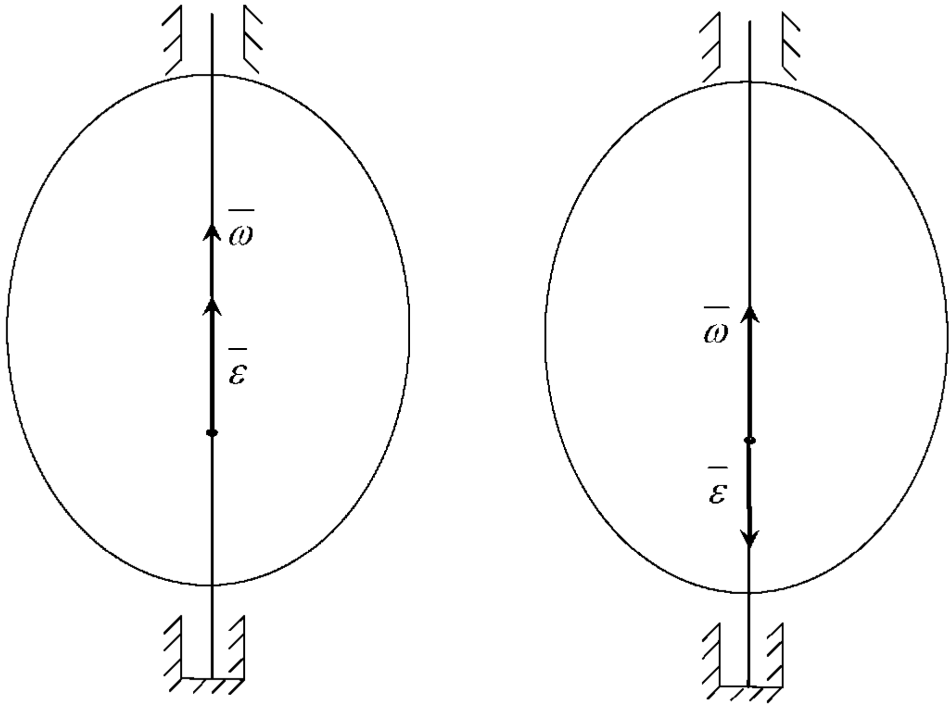
Угловым ускорением в данный момент времени t называется предел:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}, \tag{8}$$

или, принимая во внимание (6) получим: $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$.

Размерность углового ускорения в системе СИ: [ε] = рад/с^2.

Угловое ускорение тела (по аналогии с угловой скоростью) можно представить вектором $\overline{\varepsilon}$, модуль которого $\varepsilon = \left|\dfrac{d\omega}{dt}\right| = \left|\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}\right| = |\ddot{\varphi}|$, направлен он вдоль оси вращения тела. При этом направление $\overline{\varepsilon}$ совпадает с направлением $\overline{\omega}$, когда тело вращается ускоренно, и противоположно $\overline{\omega}$, при замедленном движении (см. рис. 18).



ускоренное вращение   замедленное движение

Рис. 18

4.3. Скорости и ускорения точек твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Рассмотрим движение какой – либо точки M абсолютно твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (рис. 16). Пусть h - кратчайшее расстояние от точки M до оси вращения. Тогда точка M при своём движении будет описывать окружность радиуса h.

Нарисуем плоскость, в которой движется точка M в плоскости чертежа (рис. 19). Точка O - след оси вращения.

Пусть I – след неподвижной полуплоскости, а II – след подвижной полуплоскости, связанной с точкой М. Зададим направление положительного отсчёта криволинейной координаты S совпадающим с положительным направлением отсчёта угла поворота тела φ. И в начальный момент времени I и II полуплоскости совпадают. Тогда текущее значение криволинейной координаты точки М определится выражением:

$$S = \breve{M}M_0 = h \cdot \varphi,$$

где размерность угла поворота тела φ в радианах.

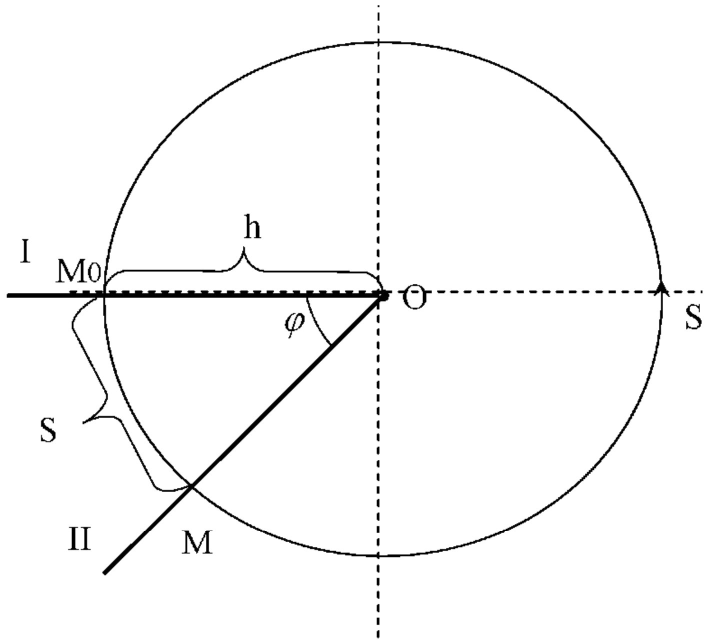


Рис. 19

Следовательно, модуль вектора скорости движения точки M по окружности найдется из выражения:

$$v = \left|\frac{dS}{dt}\right| = \left|\frac{d(h \cdot \varphi)}{dt}\right| = h \cdot \left|\frac{d\varphi}{dt}\right| = h \cdot |\dot{\varphi}| = h \cdot \omega, \qquad (9)$$

где ω - модуль угловой скорости вращения твёрдого тела.

Направлен вектор скорости $\bar{v}$ по касательной к траектории в сторону вращения (см. рис. 16, 19). $\bar{v}$ - носит название <u>линейной скорости точки вращающегося тела.</u>

Из выражения (9) следует, что модуль вектора скорости любой точки твёрдого тела равен произведению модуля угловой скорости вращения на кратчайшее расстояние от точки до оси вращения.

Найдём ускорение точки, пользуясь формулами для касательного и нормального ускорений:

1. Касательное ускорение:

$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(h \cdot \omega)}{dt} = h \cdot \varepsilon$ - это ускорение направлено по касательной к окружности в туже сторону, что и скорость v_τ, если вращение ускоренное и направлено в противоположную сторону, если вращение замедленное.

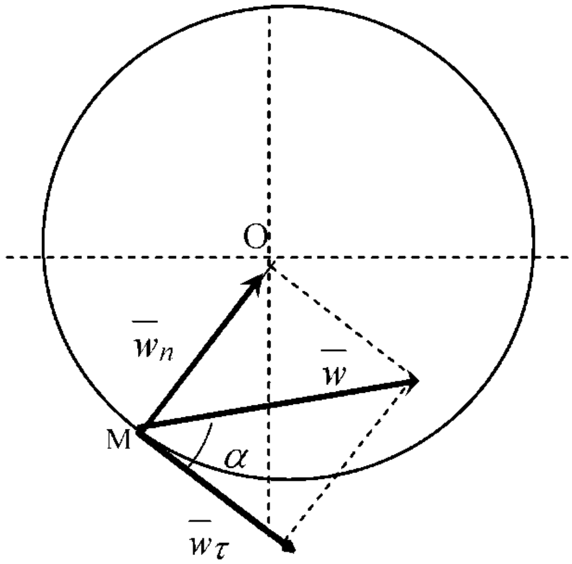


Рис. 20

2. Нормальное ускорение:

$w_n = \dfrac{v^2}{\rho} = \dfrac{\omega^2 h^2}{h} = \omega^2 h$- это ускорение направлено по радиусу окружности к центру вращения ($\rho = h$, радиус кривизны для любой точки окружности равен радиусу этой окружности). Так как $\overline{w_\tau} \perp \overline{w_n}$, то модуль полного ускорения определяется по формуле (теореме Пифагора):

$$W = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = h\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \qquad \text{а} \qquad tg\alpha = \frac{|\overline{w_n}|}{|w_\tau|} = \frac{\omega^2}{\varepsilon}. \qquad (10)$$

4.4. Векторные формулы для определения скорости и ускорения точки вращающегося тела

Рассмотрим твёрдое тело (рис. 21), вращающееся вокруг неподвижной оси z.

Пусть $\overline{\omega}$ - вектор угловой скорости вращения тела. Рассмотрим движение точки M, она совершает движение вокруг оси z по окружности радиуса $MA = h$. Пусть $\overline{v}$ скорость движения точки M по своей траектории.

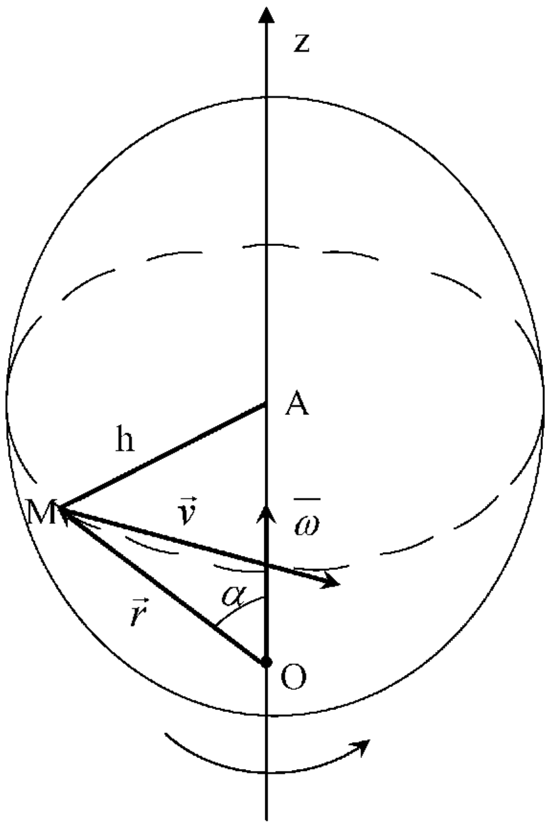


Рис. 21

Докажем, что $\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}$, где $\overline{r} = \overline{OM}$ - радиус – вектор точки M, $\overline{O}$ - полюс, находящийся на оси вращения z.

Для этого надо доказать:

1. вектора $\overline{v}$ и $\overline{\omega} \times \overline{r}$ равны по модулю;
2. они одинаковы по направлению.

Докажем 1^{oe}:

Согласно векторному произведению векторов: $\left|\overline{\omega} \times \overline{r}\right| = \omega \cdot OM \cdot \sin\alpha$.

Так как ΔOAM прямоугольный, то

$OM \cdot \sin\alpha = AM \Rightarrow \left|\overline{\omega} \times \overline{r}\right| = \omega \cdot AM$, но и

$v = \omega \cdot AM$ (см. предыдущий параграф), следовательно,

$$|v| = \left|\overline{\omega} \times \overline{r}\right|.$$

Докажем $2^{\underline{oe}}$:

Вектор $\overline{v}$ направлен по касательной к траектории в сторону вращения, следовательно, он перпендикулярен плоскости ΔOAM. Но вектор $\overline{\omega}\times\overline{r}$ также перпендикулярен плоскости ΔOAM, так как он перпендикулярен плоскости, в которой лежат перемножаемые вектора $\overline{\omega}$ и $\overline{r}$. Направлен вектор $\overline{\omega}\times\overline{r}$ в ту сторону, откуда совмещение вектора $\overline{\omega}$ с вектором $\overline{r}$ видится поворотом на наименьший угол против хода часовой стрелки, т. е. туда же, куда направлен и вектор $\overline{v}$. Равенство

$$\overline{v}=\overline{\omega}\times\overline{r} \tag{11}$$

доказано.

Продифференцируем по времени левую и правую части выражения (11):

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\text{, но }\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{w};$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\vec{\varepsilon};\quad \frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}\Rightarrow\vec{w}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}. \tag{12}$$

Покажем, что первое слагаемое в этой формуле $\vec{\varepsilon}\times\vec{r}=\vec{w_\tau}$ - вектор касательного ускорения, а второе слагаемое $\vec{\omega}\times\vec{v}=\vec{w_n}$ - вектор нормального ускорения.

1. Доказываем первое: Так как векторы $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{\omega}$ лежат на одной оси вращения и направлены в одну сторону (рис. 22), если вращение ускоренное, и направлены в противоположные стороны (рис. 23), если вращение замедленное, то векторы $\vec{\varepsilon}\times\vec{r}$ и $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ так же направлены в одну сторону, если вращение ускоренное (см. рис. 22), или направлены в противоположные стороны, если вращение замедленное (см. рис. 23).

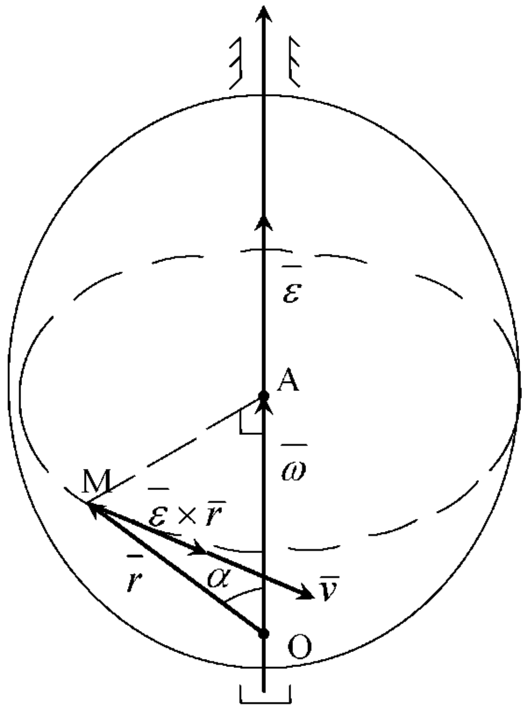


Рис. 22

Таким образом, вектор $\vec{\varepsilon}\times\vec{r}$ направлен по касательной к траектории точки M и он совпадает с вектором скорости $\vec{v}$, если вращение ускоренное и направлен в противоположную сторону, если вращение замедленное, т. е. так же как и вектор $\overrightarrow{w_\tau}$.

По величине:

$$\left|\vec{\varepsilon}\times\vec{r}\right| = \varepsilon\cdot r\cdot\sin\alpha .$$

Но из прямоугольного ΔOMK получим: $r\cdot\sin\alpha = MA = h \Rightarrow$ $\left|\vec{\varepsilon}\times\vec{r}\right| = \varepsilon\cdot h = \left|\overrightarrow{w_\tau}\right|$, следовательно, они совпадают и по величине

$$\Rightarrow \overrightarrow{w_\tau} = \vec{\varepsilon}\times\vec{r} . \qquad (13)$$

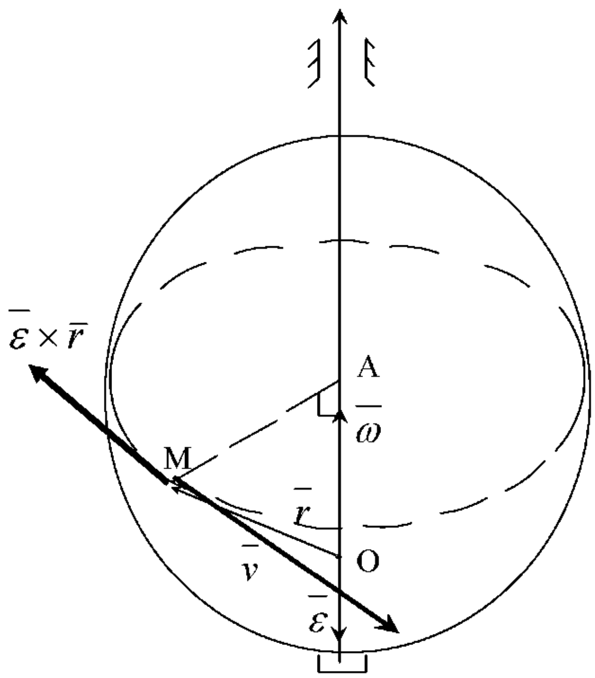


Рис. 23

2. Докажем второе, что $\overrightarrow{w_n} = \vec{\omega} \times \vec{v}$. Согласно определению векторного произведения двух векторов, направлен вектор $\vec{\omega} \times \vec{v}$ перпендикулярно плоскости, в которой лежат перемножаемые вектора $\overline{\omega}$ и $\vec{v}$. Так как вектора $\overline{\omega}$ и $\vec{v}$ взаимно перпендикулярны, то направлен вектор $\vec{\omega} \times \vec{v}$ по MA - радиусу окружности (именно радиус МА перпендикулярен векторам $\overline{\omega}$ и $\vec{v}$). Таким образом, векторное произведение $\vec{\omega} \times \vec{v}$ и вектор $\overrightarrow{w_n}$ направлены одинаково.

По модулю $\left|\vec{\omega} \times \vec{v}\right| = \omega \cdot v \cdot \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} = \omega \cdot v = \omega^2 \cdot h = \dfrac{v^2}{h}$.

Так как модуль вектора нормального ускорения:
$w_n = \dfrac{S^2}{\rho} = \dfrac{v^2}{\rho} = \dfrac{v^2}{h} = \omega^2 \cdot h = \omega \cdot v$, (радиус кривизны любой точки окружности равен радиусу окружности, $\rho = h$), то, с учетом доказательства 1, показано, что вектор нормального ускорения

$$\overrightarrow{w_n} = \vec{\omega} \times \vec{v}. \qquad (14)$$

5. СОСТАВНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

5.1. Основные понятия и определения

Пусть точка M движется внутри или по поверхности тела A (рис. 24), которое перемещается относительно другого, условно неподвижного, тела B. Тогда точка M участвует одновременно в $2^{х}$ движениях:

1. Движение относительно тела A.
2. Движение вместе с телом A относительно неподвижного тела B.

Если мы сумели рассмотреть два таких движения материальной точки, то говорят, что точка совершает <u>составное или сложное движение</u>.

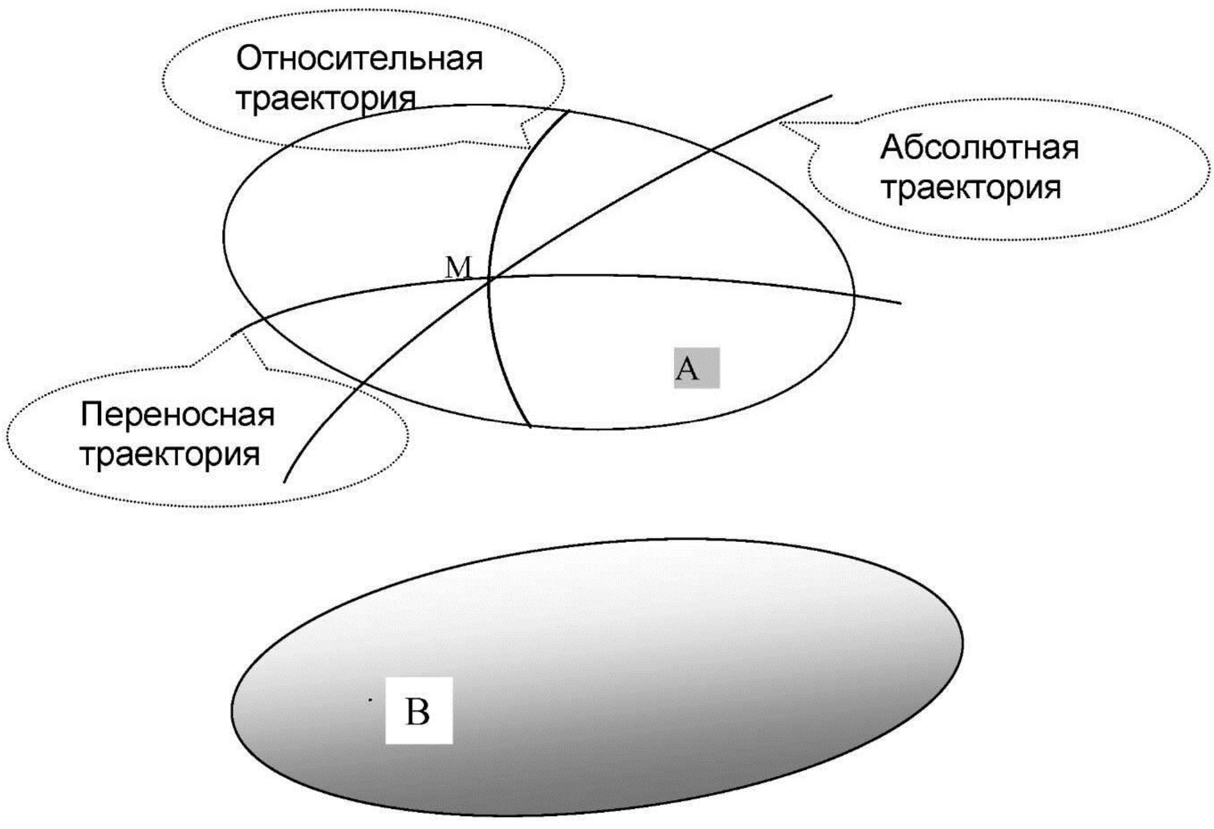


Рис. 24

Движение точки M, относительно подвижного тела A, называется <u>относительным движением точки М</u>. Движение точки M, относительно неподвижного тела B, называется <u>абсолютным движением точки М</u>.

Движение точки тела A, в которой в данный момент времени находится точка M, относительно неподвижного тела B называется <u>переносным движением точки М</u>. Само тело A ещё называют <u>переносной средой.</u>

Во всех этих движениях точка M имеет свою траекторию, скорость и ускорение (рис. 24).

Траектория точки M в абсолютном движении называется <u>абсолютной траекторией</u>. Скорость движения точки М, относительно неподвижного тела В, называется абсолютной скоростью ($\overline{v_a}$). Ускорение движения точки М относительно неподвижного тела В называется абсолютным ускорением движения точки М ($\overline{w_a}$).

<u>Относительная траектория</u> точки M в относительном движении неизменно связана с переносной средой (телом A) и перемещается вместе с ней. Скорость движения точки М относительно подвижного тела А называется относительной скоростью ($\overline{v_r}$), ускорение движения точки М относительно подвижного тела А называется относительным ускорением движения точки М ($\overline{w_r}$).

<u>Переносной траекторией</u> называется траектория той точки переносной среды (подвижного тела А), в которой в данный момент времени находится точка M, соответственно, скорость и ускорение этой точки тела А, в которой находится точка М, называются - переносные скорость и ускорение точки M ($\overline{v_e}$ и $\overline{w_e}$).

Заметим, что в разные моменты времени точка M совпадает с разными точками переносной среды (тела A), каждая из которых в общем случае имеет свою траекторию, т. е. каждому положению материальной точки М на теле А соответствует своя переносная траектория движения.

Рассмотрим пример:

Диск вращается вокруг своей оси, вдоль его радиуса движется ползун (рис. 25). Вращающийся диск - это переносная среда. Ползун – наблюдаемая точка. Тогда переносная траектория – это окружность, которую описывает точка диска, в которой, в данный момент времени, находится ползун (1 на рис. 25).

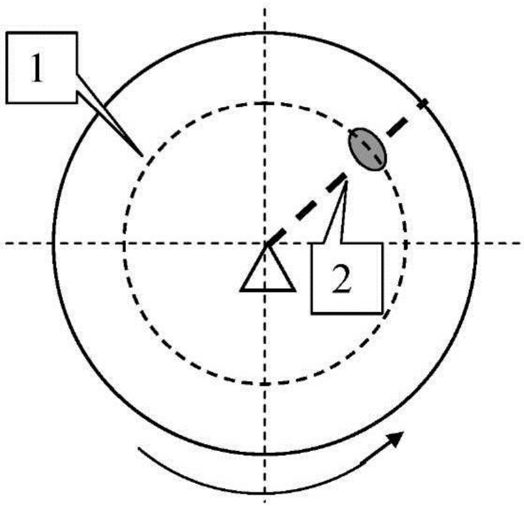


Рис. 25

Траектория относительного движения – прямая, направленная от центра диска к периферии (2 на рис 25). Траектория абсолютного движения имеет вид раскручивающейся спирали от центра диска к периферии.

5.2. Скорости и ускорения материальной точки в составном движении

Пусть $Oxyz$ - неподвижная система координат, жёстко связана с неподвижным телом B (см. $\S$ 5.1 этой главы), а $C\xi\eta\zeta$ (С, кси, этта, дзетта) – подвижная система координат жёстко связанная с переносной средой (подвижным телом A) рис. 26.

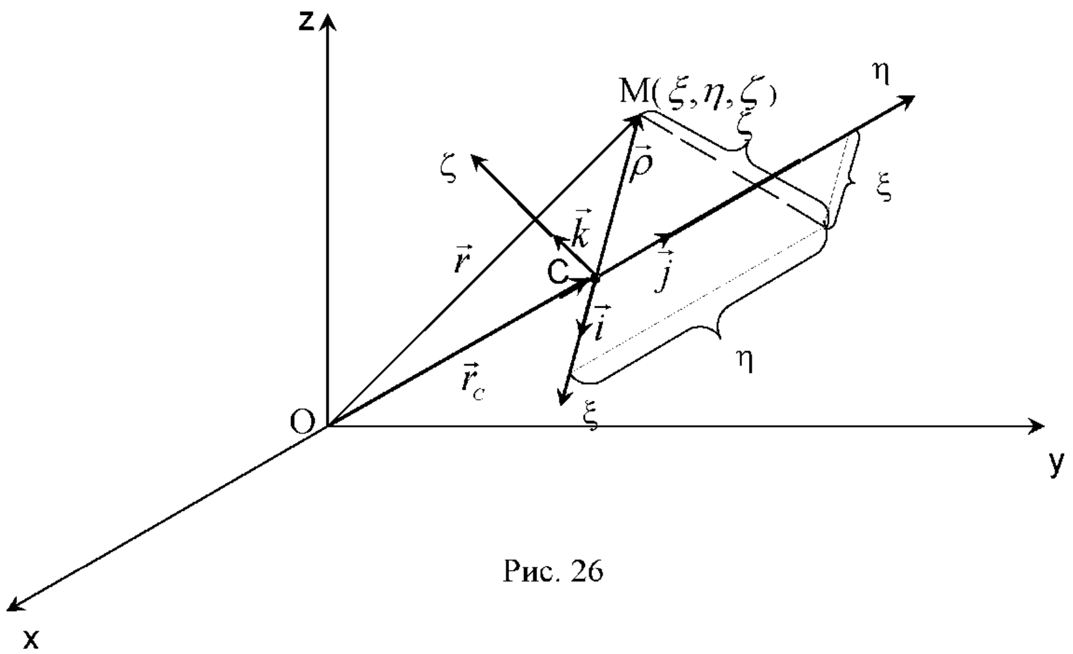


Рис. 26

Пусть $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - орты подвижной системы координат $C\xi\eta\zeta$, точка M - наблюдаемая материальная точка. Проведём радиусы – векторы наблюдаемой точки:

$\bar{r}$ - абсолютный радиус – вектор точки M;

$\bar{\rho}$ - относительный радиус – вектор точки M;

$\bar{r}_c$ - радиус – вектор начала координат подвижной системы координат $C\xi\eta\zeta$ относительно неподвижной.

Пусть ξ, η, ζ - текущие координаты наблюдаемой точки М в относительном движении.

Очевидно, что в любой момент времени справедливо равенство:

$\bar{r} = \bar{r}_c + \bar{\rho}$.

Координатное представление относительного радиуса – вектора можно записать в следующем виде: $\bar{\rho} = \xi \cdot \bar{i} + \eta \cdot \bar{j} + \zeta \cdot \bar{k}$, откуда

$$\bar{r} = \bar{r}_c + \xi \cdot \bar{i} + \eta \cdot \bar{j} + \zeta \cdot \bar{k}. \qquad (1)$$

С течением времени положение точки С и направление координатных ортов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ меняется. Так же меняются относительные координаты ξ, η и ζ положения материальной точки, поэтому все записанные параметры в выражении (1) являются функциями времени:

$\bar{r}_c = \bar{r}_c(t)$, $\bar{i} = \bar{i}(t)$, $\bar{j} = \bar{j}(t)$, $\bar{k} = \bar{k}(t)$, $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$, $\zeta = \zeta(t)$.

Согласно определению относительного движения материальной точки для нахождения относительной скорости и относительного ускорения мы не должны рассматривать переносное движение, и поэтому можем считать, что подвижная система $C\xi\eta\zeta$ условно неподвижна.

Тогда относительная скорость $\bar{v}_r = \left.\frac{d\bar{r}}{dt}\right|_{\bar{r}_c,\ \bar{i},\bar{j}\text{ и }\bar{k} = const}$. (2)

Дифференцируя уравнение (1) по скалярному аргументу t с учётом (2), получим выражение для определения вектора скорости точки в относительном движении:

$$\bar{v}_r = \dot{\xi} \cdot \bar{i} + \dot{\eta} \cdot \bar{j} + \dot{\zeta} \cdot \bar{k}. \tag{3}$$

Продифференцируем выражение (3) по скалярному аргументу времени t, при условии, что для относительного ускорения:

$$\overline{W}_r = \left.\frac{dv_r}{dt}\right|_{\bar{r}_c,\ \bar{i},\bar{j}\text{ и }\bar{k} = const}.$$

получим выражение для определения относительного ускорения точки:

$$\overline{W}_r = \dot{\xi} \cdot \bar{i} + \dot{\eta} \cdot \bar{j} + \dot{\zeta} \cdot \bar{k}. \tag{4}$$

При определении переносной скорости и переносного ускорения мы не должны рассматривать относительное движение. И поэтому должны считать, что координаты ξ,η,ζ условно постоянны.

Тогда переносная скорость:

$$\bar{v}_e = \left.\frac{d\bar{r}}{dt}\right|_{\xi,\eta,\zeta = const} = \frac{d\bar{r}_c}{dt} + \xi\frac{d\bar{i}}{dt} + \eta\frac{d\bar{j}}{dt} + \zeta\frac{d\bar{k}}{dt}. \tag{5}$$

А переносное ускорение:

$$\bar{w}_e = \left.\frac{dv_e}{dt}\right|_{\xi,\eta,\zeta = const} = \frac{d^2\bar{r}_c}{dt^2} + \xi\frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + \eta\frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + \zeta\frac{d^2\bar{k}}{dt^2}. \tag{6}$$

При определении абсолютных скоростей и ускорений необходимо дифференцировать выражение (1) по времени без всяких предположений:

$$\overline{v_a} = \frac{d\bar{r}}{dt}, \qquad \bar{w}_a = \frac{d\overline{v_a}}{dt}.$$

5.3. Теорема о сложении скоростей в составном движении

Определение теоремы:

Абсолютная скорость материальной точки в составном движении равна геометрической сумме её переносной и относительной скоростей:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r .$$

Доказательство:

Продифференцируем по времени равенство (1) предыдущего параграфа без всяких предположений, получим:

$$\bar{v}_a = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_c}{dt} + \left(\dot{\xi}\bar{i} + \xi\frac{d\bar{i}}{dt}\right) + \left(\dot{\eta}\bar{j} + \eta\frac{d\bar{j}}{dt}\right) + \left(\dot{\zeta}\bar{k} + \zeta\frac{d\bar{k}}{dt}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{d\bar{r}_c}{dt} + \xi\frac{d\bar{i}}{dt} + \eta\frac{d\bar{j}}{dt} + \zeta\frac{d\bar{k}}{dt}}_{\bar{v}e} + \underbrace{\dot{\xi}\cdot\bar{i} + \dot{\eta}\cdot\bar{j} + \dot{\zeta}\cdot\bar{k}}_{\bar{v}r}. \qquad (7)$$

Следовательно: $$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r . \qquad (8)$$

Теорема доказана.

Пример (рис. 27):

Пусть диск вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своей оси. Ползун M в момент времени $t = 0$ выходит из центра и движется вдоль радиуса диска с постоянной по модулю скоростью $\vec{v}$. Очевидно при таком движении относительная скорость:

$$\vec{v}_r = \vec{v} .$$

Переносная скорость – это скорость точки подвижной среды (диска), в которой в данный момент времени находится точка М, следовательно: $v_e = OM \cdot \omega$, где $OM = v \cdot t$, окончательно, $v_e = v \cdot t \cdot \omega$. Согласно ранее доказанной теореме: $\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r$,

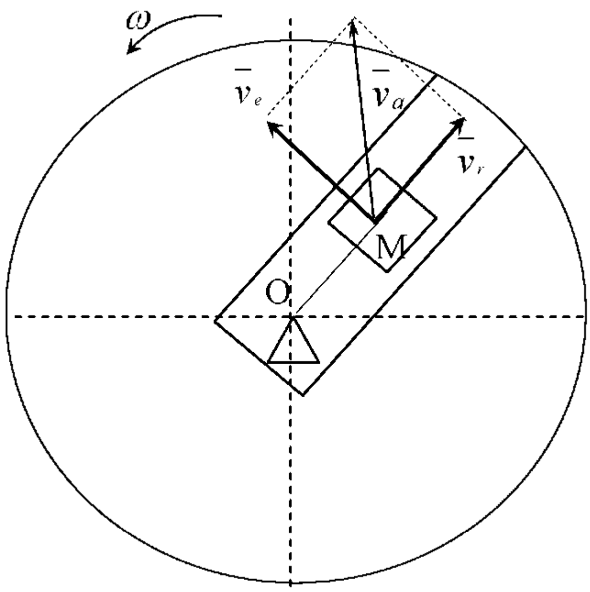


Рис. 27

тогда модуль вектора абсолютной скорости точки М в таком движении определится выражением:

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = v\sqrt{\omega^2 t^2 + 1}\,.$$

5.4. Теорема о сложении ускорений в составном движении (теорема Кориолиса)

Определение теоремы:

Абсолютное ускорение материальной точки в составном движении равно геометрической сумме переносного, относительного и Кориолисова ускорений:

$$\bar{w}_a = \bar{w}_e + \bar{w}_r + \bar{w}_c\,.$$

Доказательство:

Продифференцируем по времени выражение (7), полученное в предыдущем параграфе:

$$\bar{w}_a = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{r}_c}{dt^2} + \left(\dot{\xi}\frac{d\bar{i}}{dt} + \xi\frac{d^2\bar{i}}{dt^2}\right) + \left(\dot{\eta}\frac{d\bar{j}}{dt} + \eta\frac{d^2\bar{j}}{dt^2}\right) + \left(\dot{\zeta}\frac{d\bar{k}}{dt} + \zeta\frac{d^2\bar{k}}{dt^2}\right) +$$

$$\left(\ddot{\xi}\bar{i} + \dot{\xi}\frac{d\bar{i}}{dt}\right) + \left(\ddot{\eta}\bar{j} + \dot{\eta}\frac{d\bar{j}}{dt}\right) + \left(\ddot{\zeta}\bar{k} + \dot{\zeta}\frac{d\bar{k}}{dt}\right) = \underbrace{\frac{d^2\bar{r}_c}{dt^2} + \xi\frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + \eta\frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + \zeta\frac{d^2\bar{k}}{dt^2}}_{\bar{w}e|\text{из } (6)|} +$$

$$\underbrace{\ddot{\xi}\bar{i} + \ddot{\eta}\bar{j} + \ddot{\zeta}\bar{k}}_{\bar{w}r|\text{из } (4)|} + \underbrace{2\dot{\xi}\frac{d\bar{i}}{dt} + 2\dot{\eta}\frac{d\bar{j}}{dt} + 2\dot{\zeta}\frac{d\bar{k}}{dt}}_{\vec{w}_C}. \qquad (9)$$

Обозначим последнее выражение $\bar{w}_c$ и назовём его

Кориолисовым ускорением, тогда получим: $\bar{w}_a = \bar{w}_e + \bar{w}_r + \bar{w}_c$ / (10)

Теорема доказана.

5.5. Частные случаи движения переносной среды

1. Поступательное движение переносной среды

Если переносная среда движется поступательно, то оси жёстко связанной с ней подвижной системы $C\xi\eta\zeta$ остаются всё время параллельными самим себе, следовательно, орты этой системы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - не меняются по направлению (а по модулю они всегда равны единице)

Тогда $\frac{d\bar{i}}{dt} = \frac{d\bar{j}}{dt} = \frac{d\bar{k}}{dt} = 0$ (производные от $const$ равны нулю).

В этом случае согласно выражению (9) Кориолисово ускорение обращается в ноль: $\bar{w}_c = 0$.

Кориолисово ускорение появляется только при поворотах переносной среды. И поэтому ещё называется вращательным ускорением.

При поступательном движении переносной среды абсолютное ускорение равно геометрической сумме только переносного и относительного ускорений:

$$\bar{w}_a = \bar{w}_e + \bar{w}_r.$$

2. Переносная среда вращается вокруг неподвижной оси

Пусть имеется неподвижная система координат $Oxyz$, а переносная среда вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\overline{\omega}_e$. Выберем подвижную систему координат $C\xi\eta\zeta$ с ортами осей $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ так, что её центр точка С лежит на оси вращения (рис. 28), тогда система координат $C\xi\eta\zeta$ - будет вращающейся вокруг точки С прямоугольной системой координат.

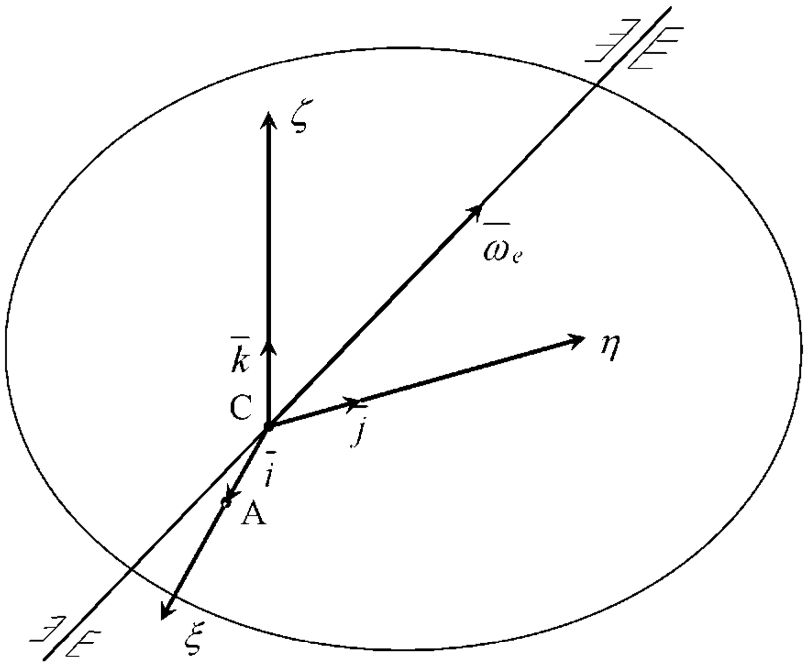


Рис. 28

Рассмотрим точку A переносной среды находящуюся на конце вращающегося орта $\bar{i}$. Абсолютная скорость этой точки согласно кинематике точки определяется по формуле:

$$\bar{v} = \frac{d\overline{r_A}}{dt} = \frac{d\bar{i}}{dt}. \qquad (*)$$

С другой стороны, по векторной формуле из кинематики вращательного движения тела имеем:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}_A \Rightarrow \bar{v} = \overline{\omega}_e \times \bar{i}. \qquad (**)$$

Сравнивая выражения (*) и (**), получаем векторное равенство:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{i}. \qquad (11)$$

Если аналогично определить скорости точек на концах ортов $\bar{j}$ и $\bar{k}$ двумя способами, то получим:

$$\frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{j}, \qquad (12)$$

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{k}. \qquad (13)$$

Подставим эти выражения в выражение (9) для определения Кориолисова ускорения, получим:

$$\bar{w}_c = 2(\dot{\xi}\cdot\bar{\omega}_e \times \bar{i} + \dot{\eta}\cdot\bar{\omega}_e \times \bar{j} + \dot{\zeta}\cdot\bar{\omega}_e \times \bar{k}) =$$
$$= 2\bar{\omega}_e \times \underbrace{(\dot{\xi}\cdot\bar{i} + \dot{\eta}\cdot\bar{j} + \dot{\zeta}\cdot\bar{k})}_{\vec{v}_r \text{ из выр.}(3)} = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r; \qquad (14)$$

Откуда следует, что <u>Кориолисово ускорение равно удвоенному векторному произведению вектора угловой скорости вращения переносной среды на вектор относительной скорости движения наблюдаемо точки.</u>

Так как в каждый данный момент времени любое движение переносной среды можно представить как сумму поступательного и вращательного движения, а при поступательном движении переносной среды вектор Кориолисова ускорения $\bar{w}_C = 0$, то и для произвольного движения переносной среды вектор Кориолисова ускорения определяется по формуле:

$$\vec{w}_C = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r. \qquad (15)$$

Пример (рис. 29):

Пусть имеется шар, вращающийся с угловой скоростью $\bar{\omega}_e$, вокруг оси AB, проходящей через центр шара точку С.

По поверхности шара, в сторону от B к A, в верхнем полушарии, движется точка M со скоростью $\bar{v}_r$.

Требуется определить величину и направление вектора Кориолисова ускорения точки M.

Перенесём мысленно вектор угловой скорости $\overline{\omega_e}$ в точку M параллельно самому себе.

Тогда согласно определению $\overline{w_c} = 2 \cdot (\overline{\omega_e} \times \overline{v_r})$. Модуль вектора ускорения определится выражением: $w_c = 2\omega_e \cdot v_r \cdot \sin\alpha$.

В силу определения векторного произведения 2^{ух} векторов, направлен вектор $\vec{w}_c$ перпендикулярно плоскости, в которой лежат перемножаемые векторы $\overline{\omega_e}$ и $\overline{v_r}$ в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение первого вектора $\overline{\omega_e}$ со вторым вектором $\overline{v_r}$, видится поворотом вектора $\overline{\omega_e}$ против хода часовой стрелки на наименьший угол. Т. е. он перпендикулярен плоскости $ACBM$, в которой лежат и вектор $\overline{\omega_e}$, и вектор $\overline{v_r}$ и направлен, как показано на рис. 29.

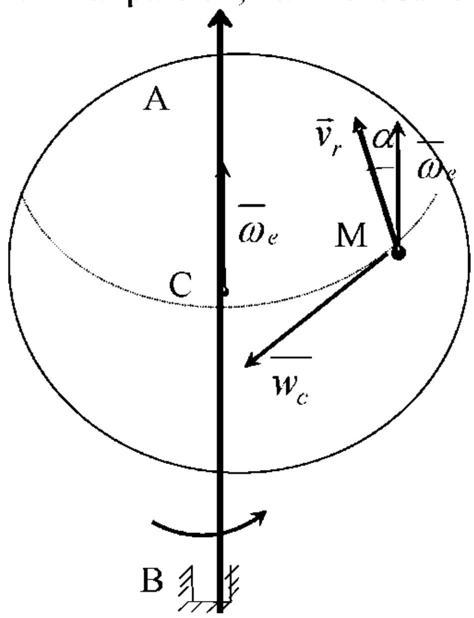


Рис. 29

6. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА

6.1. Основные понятия и определения

Определение: Движение абсолютно твёрдого тела называется плоско - параллельным, если расстояние от любой точки тела до некоторой неподвижной плоскости со временем не меняется.

Пусть имеется твёрдое тело, совершающее плоско – параллельное движение. Плоскость P - та плоскость, расстояние до которой от всех точек тела при его движении остаётся без изменения (рис. 30). Мысленно рассечём тело плоскостью $Q \parallel P$. В сечении получим некоторую плоскую фигуру S. Выберем внутри этой фигуры произвольную точку M. Опустим из точки M перпендикуляр MN на плоскость P. При плоско – параллельном движении твёрдого тела расстояние MN от точки M до пл. P со временем не меняется. Следовательно, точка M, как и вся плоская фигура S, всё время движутся внутри плоскости Q. А все точки тела, лежащие на перпендикуляре MN, движутся точно также как точка M. Поэтому полное суждение о характере плоско – параллельного движения тела можно получить, если известно движение фигуры сечения S тела внутри плоскости Q.

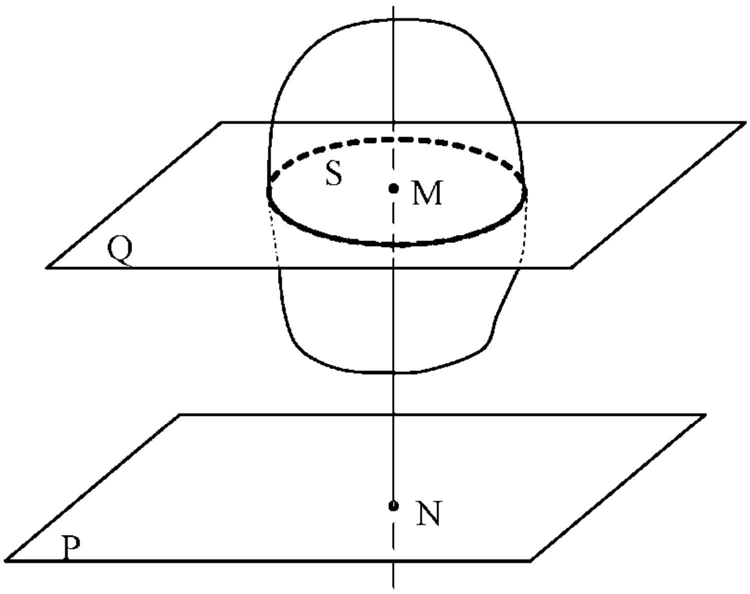


Рис. 30

При плоско – параллельном движении траектории всех точек твёрдого тела являются плоскими кривыми. Если тело вращается вокруг некоторой оси, то траектории его точек имеют вид плоских окружностей, следовательно, вращение – частный случай плоско – параллельного движения. Очевидно, что пространственное поступательное движение тела не является плоско – параллельным.

Так как при таком движении расстояния от точек тела до плоскости параллельной движению могут меняться на одну и туже величину.

6.2. Уравнения плоскопараллельного движения твёрдого тела

Рассмотрим движение плоской фигуры S внутри плоскости Q (рис. 31). Введём в этой плоскости неподвижную прямоугольную систему координат oxy. Возьмём на фигуре сечения S произвольную точку A и построим подвижную систему координат $Ax'y'$, жёстко связанную с точкой A, движущуюся поступательно и такую, что $Ax' \parallel ox$ и $Ay' \parallel oy$.

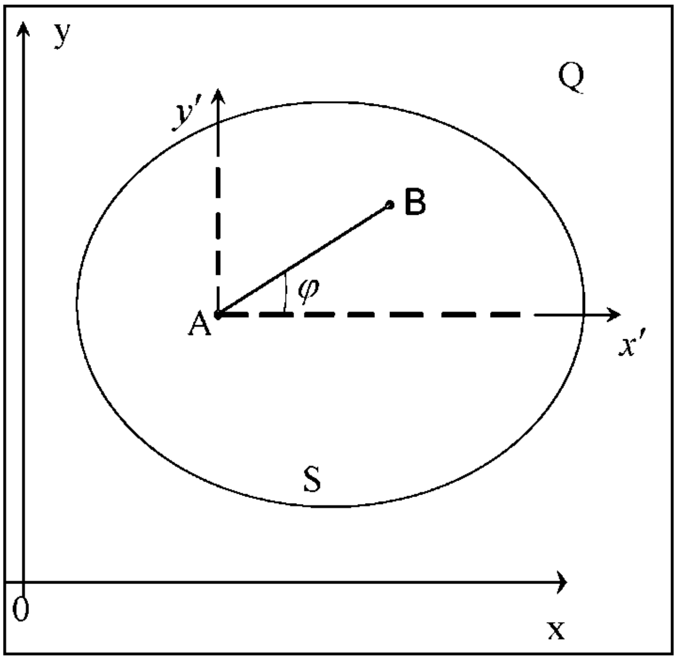


Рис. 31

Положение фигуры S на плоскости известно в любой момент времени, если известно положение жёстко связанного с фигурой произвольного отрезка AB. Положение отрезка AB на плоскости однозначно определено, если:

1. известны в любой момент времени декартовые координаты любой его точки, например т. А $- x_A$ и y_A, тогда эту точку называют полюсом,

2. задан $\angle\varphi$ между отрезком AB и, например, осью $Ax' \parallel ox$.

Поэтому уравнения движения плоской фигуры могут быть записаны в следующем виде:

$$x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t), \quad \varphi = \varphi(t). \qquad (1)$$

Таким образом, закон плоско – параллельного движения тела сводится к заданию $3^{\underline{x}}$ скалярных уравнений (1). Движение точки B, а также любой другой точки фигуры сечения S можно рассматривать как составное. При этом переносная среда мыслится условно, она жёстко связана с неподвижной системой координат $Ax'y'$ и движется поступательно.

В системе уравнений (1) уравнения $x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t)$ описывают переносное движение любой точки фигуры сечения S. Относительное движение любой точки фигуры сечения S - это вращение вокруг полюса, оно описывается уравнением $\varphi = \varphi(t)$.

Различные точки плоской фигуры движутся по-разному, поэтому с изменением полюса уравнения переносного поступательного движения меняются, при этом уравнение относительного движения $\varphi = \varphi(t)$ от выбора полюса не зависит.

Следовательно, вне зависимости от положения полюса внутри фигуры сечения можно говорить об угловой скорости $\omega = |\dot{\varphi}|$ и угловом ускорении $\varepsilon = |\ddot{\varphi}|$ относительного вращения плоской фигуры, а значит и всего тела, совершающего плоско – параллельное движение.

6.3. Метод полюса, определения скоростей точек плоской фигуры

Пусть известно, что точка A - полюс, $\bar{v}_A$ - скорость точки A известна по величине и направлению (рис. 32), также известно направление и величина угловой скорости $\bar{\omega}$ вращения плоской фигуры. Требуется определить скорость произвольной точки B фигуры сечения. Нарисуем рассматриваемую плоскость и плоскую фигуру S на ней.

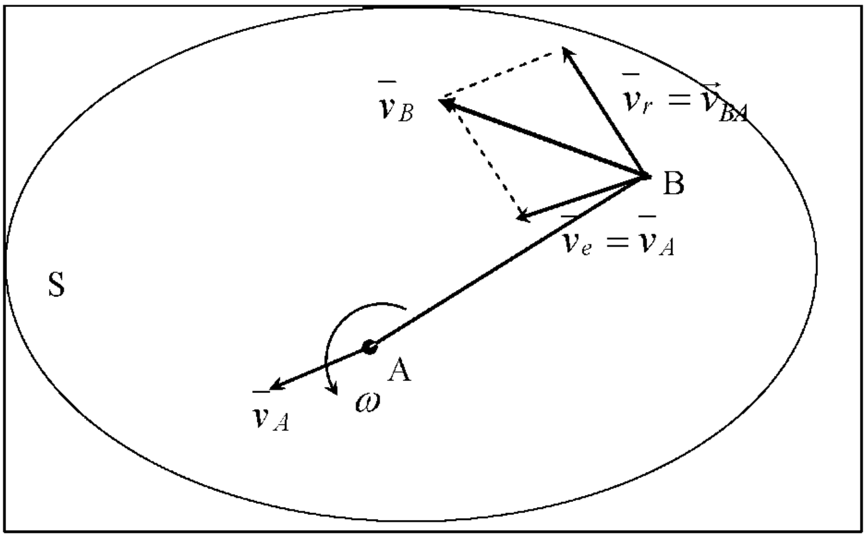


Рис. 32

Движение точки B можно представить как составное, поэтому согласно теореме о сложении скоростей в составном движении, имеем:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_e + \bar{v}_r.$$

Переносное движение любой точки фигуры сечения является поступательным вместе с полюсом т. А. Поэтому, переносная скорость любой точки фигуры сечения равна скорости полюса:

$$\bar{v}_e = \bar{v}_A.$$

Относительное движение - это вращение фигуры сечения вокруг полюса. Согласно кинематике вращательного движения, относительная скорость $\bar{v}_r = \bar{v}_{BA}$ - скорости вращения точки B вокруг точки A, удовлетворяющей следующим условиям:

1. $\bar{v}_{BA} \perp AB$;
2. $\bar{v}_{BA}$ - направлен в сторону относительного вращения;
3. величина (модуль): $v_{BA} = AB \cdot \omega$.

Тогда получаем:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}. \qquad (2)$$

Таким образом, для определения скорости любой точки фигуры сечения S, достаточно знать скорость одной её точки (полюса), а также направление и величину угловой скорости её относительного вращения.

6.4. Понятие о мгновенном центре скоростей

Определение: Точка внутри фигуры сечения или на её мысленном продолжении, скорость которой в данный момент времени равна нулю, называется мгновенным центром скоростей (МЦС).

Покажем, что МЦС всегда существует, если угловая скорость вращения фигуры не равна нулю (рис. 33).

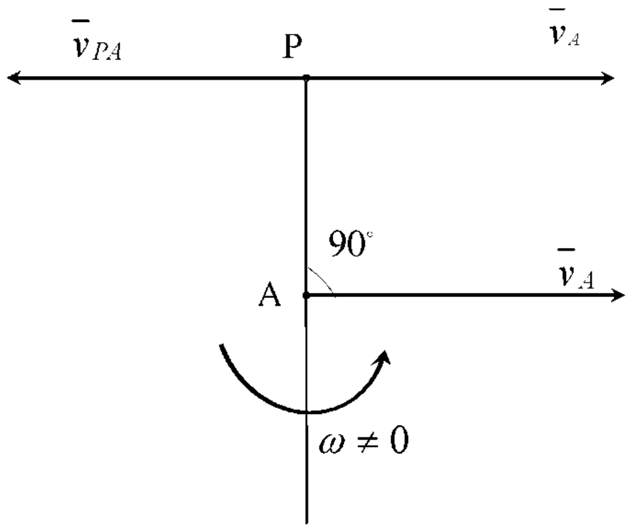


Рис. 33

Пусть точка A - полюс, $\bar{v}_A$ - известная скорость движения полюса т. A, а ω- известная и по величине, и по направлению угловая скорость вращения фигуры сечения в относительном движении ($\omega \neq 0$). Проведём линию, перпендикулярную вектору скорости $\bar{v}_A$. На полученной прямой отложим отрезок $AP = \dfrac{v_A}{\omega}$.

Его размерность в системе СИ: $[AP] = \dfrac{м/с}{рад/с} = м$.

Определим скорость точки P по методу полюса. Её скорость равна геометрической сумме скоростей относительного движения $\bar{v}_{PA}$ (скорости вращения т. Р вокруг т. A) и переносного движения $\bar{v}_A$ (движение вместе с переносной средой):

$$\bar{v}_P = \bar{v}_{PA} + \bar{v}_A. \quad (3)$$

Скорость $\bar{v}_{PA}$ относительного движения точки P вокруг точки A удовлетворяет следующим условиям:

1. вектор $\bar{v}_{PA} \perp AP$;

2. вектор $\bar{v}_{PA}$ направлен в сторону относительного вращения, т. е. $\bar{v}_{AP}$ и $\bar{v}_A$ направлены в противоположные стороны;

3. модуль относительной скорости:

$$v_{PA} = AP \cdot \omega = \frac{v_A}{\omega} \cdot \omega = v_A.$$

Следовательно, вектора скоростей $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_{PA}$ равны по модулю, лежат на одной прямой и направлены в противоположные стороны: $\bar{v}_A = -\bar{v}_{PA}$.

Тогда из (3) получаем, что $\bar{v}_P = 0$. Таким образом построенная точка P и есть МЦС.

Замечание: если угловая скорость $\omega \to 0$, то $AP \to \infty$ говорят, что МЦС уходит на бесконечность (∞).

6.5. Распределение скоростей точек фигуры сечения вокруг точки МЦС

Пусть известно, что в данный момент времени точка P является мгновенным центром скоростей (рис. 34), и известна угловая скорость вращения ω фигуры сечения S. Выберем мгновенный центр скоростей т. P за полюс, тогда согласно определению скоростей точек по методу полюса, скорость произвольной точки A можно определить как

$$\bar{v}_A = \bar{v}_P + \bar{v}_{PA}.$$

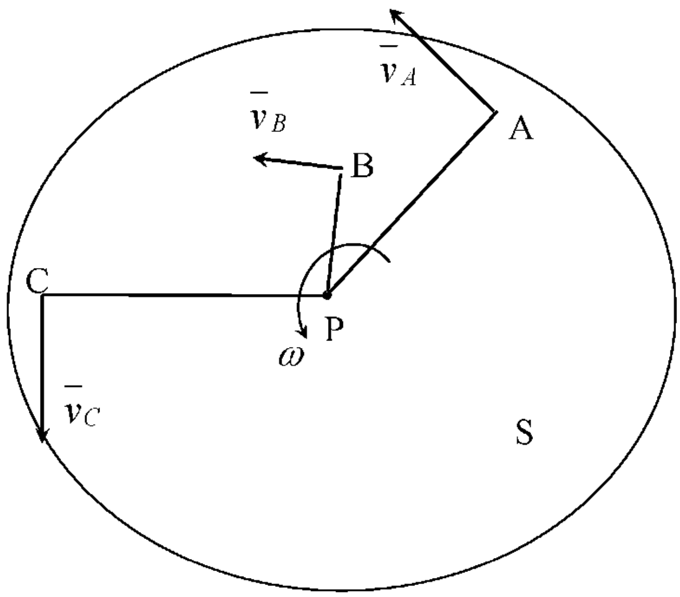


Рис. 34

Если т. P - МЦС, то $\bar{v}_P=0 \Rightarrow \bar{v}_A = \bar{v}_{PA}$, т. е. скорость точки плоской фигуры равна скорости её относительного вращения вокруг точки МЦС.

Отсюда следует, что

1. вектор $\bar{v}_A \perp PA$;
2. $\bar{v}_A$ – направлен в сторону относительного вращения;
3. модуль вектора: $v_{BA} = AP \cdot \omega$.

Общий вывод: скорости точек плоской фигуры распределяются вокруг точки МЦС так, как если бы фигура вращалась вокруг точки МЦС (см. т. В и т. С рис. 34). Однако в следующий момент времени положение т. МЦС относительно фигуры S изменится, поэтому, такое вращение происходит за бесконечно малый промежуток времени.

Мгновенной осью вращения называется ось, проведённая через МЦС перпендикулярно плоскости движения фигуры сечения S.

Пусть P – МЦС. Проведём ось $Pz_0 \perp$пл. Q (рис. 35), где Q плоскость параллельная плоскости движения Р. Тогда плоско – параллельное движение представляется как совокупность бесконечно малых поворотов вокруг мгновенной оси вращения, которая смещается и в пространстве, и относительно самого тела параллельно самой себе.

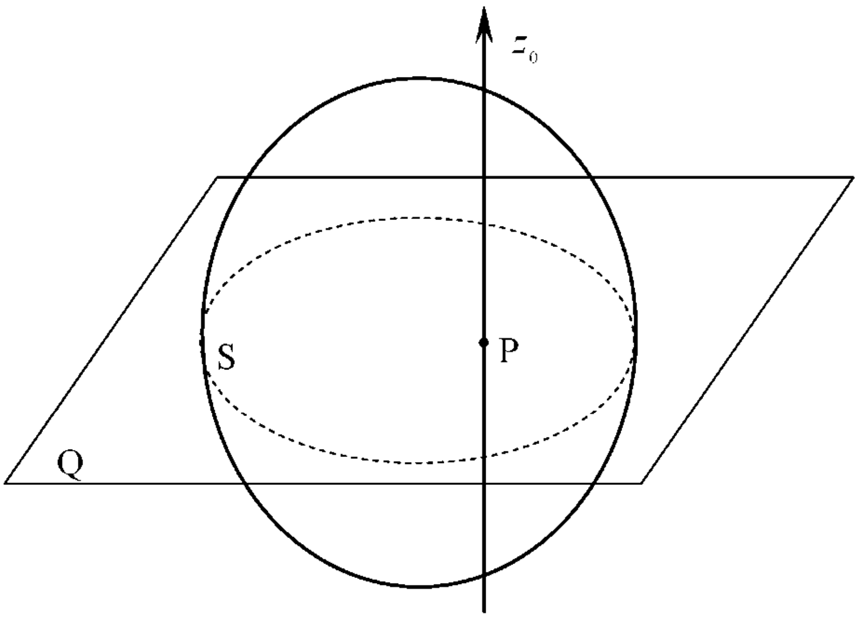


Рис. 35

6.6. Способы определения положения МЦС

Пусть известны:

1. величина и направление вектора скорости $\bar{v}_A$ т. A;

2. линия направления вектора скорости движения любой, другой точки B (рис. 36). Тогда мгновенный центр скоростей точка P лежит на пересечении перпендикуляров к линиям скоростей в точках A и B.

Угловая относительная скорость вращения $\omega = \dfrac{v_A}{AP}$, а величина скорости $v_B = \omega \cdot PB = \dfrac{v_A}{AP} \cdot PB$. Направлен вектор $\vec{v}_B$ по известной линии в сторону относительного вращения.

1 способ.

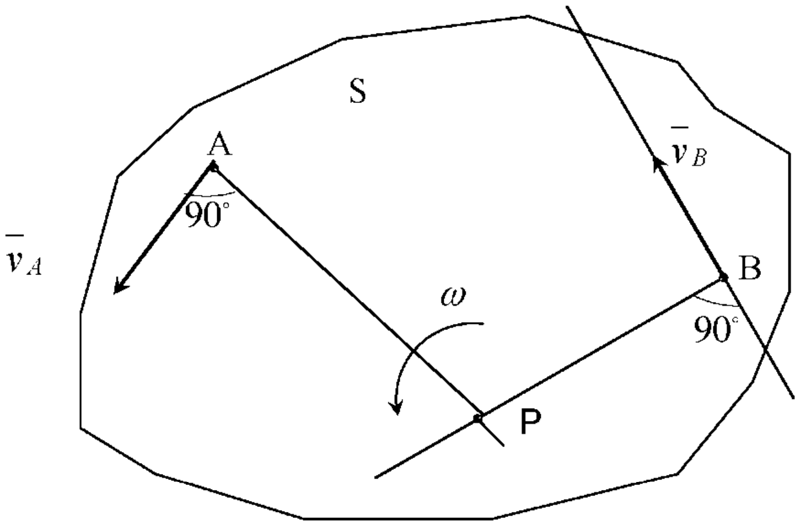


Рис. 36

Пример: Кривошипно-ползунный механизм (рис. 37).

Кривошип OA вращается в плоскости чертежа с угловой скоростью ω. Ползун B совершает поступательное движение вдоль оси OB. Скорость точки A $\bar{v}_A \perp OA$, направлена в сторону относительного вращения кривошипа, модуль вектора $v_A = OA \cdot \omega$. Требуется определить скорость $\bar{v}_B$ ползуна B.

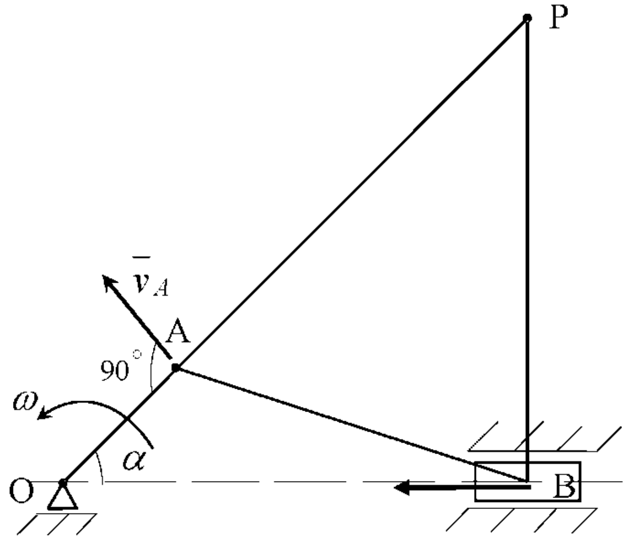


Рис. 37

Направлен вектор $\bar{v}_B$ по OB в сторону относительного вращения, а модуль v_B определим следующим образом. Проведём линии PB и PA соответственно перпендикулярно линиям направления векторов

скорости $\bar{v}_B$ и $\bar{v}_A$. Точка их пересечения P - есть МЦС шатуна AB. С помощью выше разобранного способа получаем:

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{OA}{AP} \cdot \omega, \text{ а } v_B = PB \cdot \omega_{AB} = \frac{PB \cdot OA}{AP} \cdot \omega,$$

где ω_{AB} - угловая скорость вращения шатуна AB.

Величины PB и AP легко определяются из прямоугольного ΔOPB при известных длинах кривошипа OA, шатуна AB и значения угла α.

<u>2 способ.</u> Известно, что $\bar{v}_A \parallel \bar{v}_B$ и они перпендикулярны линии AB, тогда: а) если $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ имеют одно направление и $\bar{v}_A \neq \bar{v}_B$ (рис. 38), то т. МЦС (т. P) лежит на пересечении прямых, соединяющих начала и концы векторов скоростей $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$.

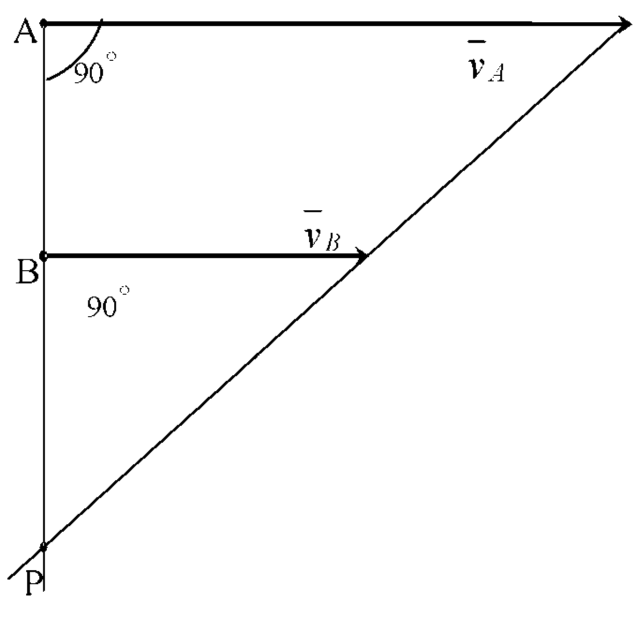


Рис. 38

Угловая скорость вращения фигуры сечения определяется из выражения:

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{PB}.$$

б) $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ - направлены противоположно (рис. 39).

В этом случае, как и в случае а), т. МЦС (т. Р) лежит на пересечении прямых, соединяющих начала и концы векторов скоростей $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$. Угловая скорость вращения фигуры сечения определится выражением:

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{PB}.$$

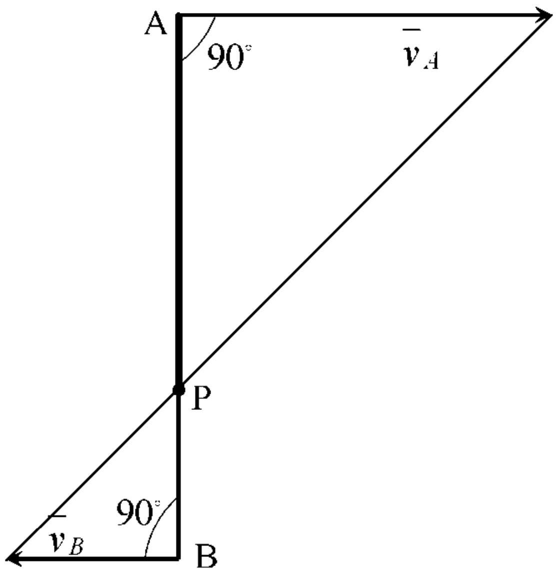


Рис. 39

в) $v_A = v_B$ и векторы $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ направлены в одну сторону (рис. 40).

Тогда прямые AB и CD являются параллельными и следовательно не пересекаются. В этом случае говорят, что МЦС уходит на бесконечность. Следовательно, $\omega = 0$, т. е. фигура сечения совершает поступательное движение, а скорости всех точек фигуры одинаковы ($\bar{v}_A = \bar{v}_B$) (тело совершает мгновенное поступательное движение).

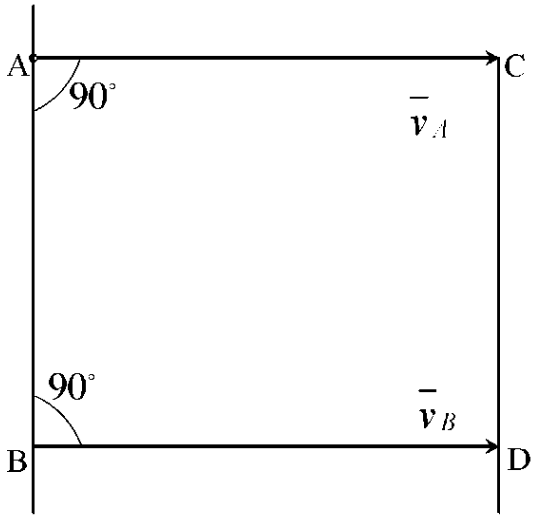


Рис. 40

3 способ. Цилиндрическое тело катится по неподвижной поверхности без проскальзывания (рис. 41). В силу отсутствия проскальзывания скорость точки P тела, касающейся неподвижной поверхности, имеет скорость $v_P = 0$. Поэтому точка касания P и есть МЦС.

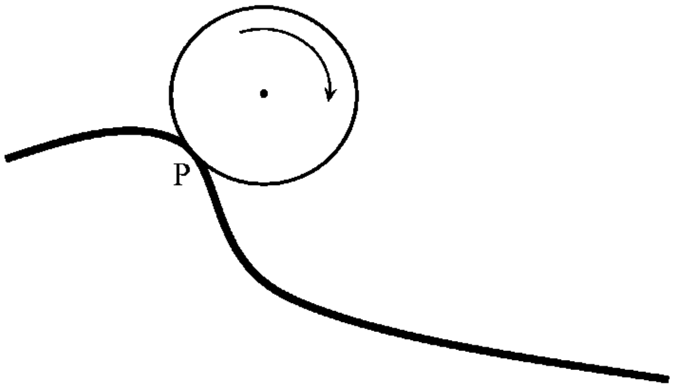


Рис. 41

6.7. Определение ускорений точек плоской фигуры по методу полюса

Дано: точка A - полюс. $\overline{w_A}$ - вектор ускорения точки A в неподвижной системе координат, $\overline{\omega}$ и $\overline{\varepsilon}$ - векторы угловой скорости и углового ускорения вращения плоской фигуры сечения S вокруг точки A (рис. 42).

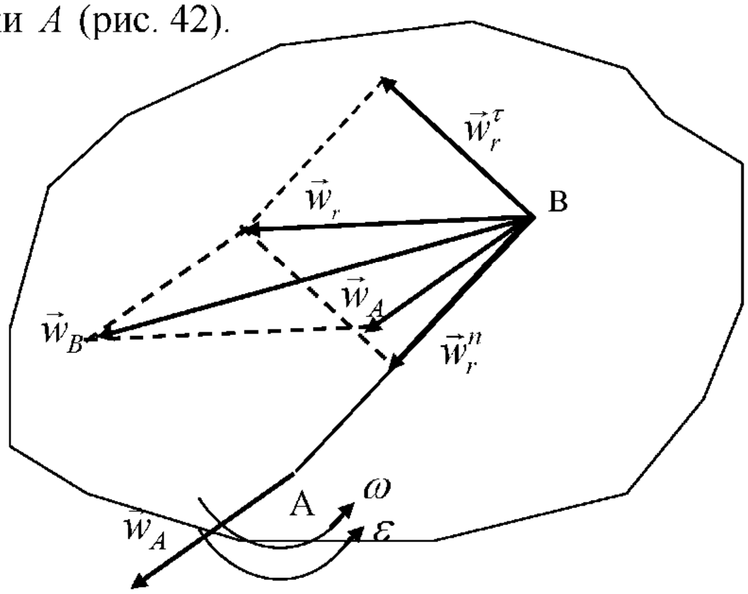


Рис. 42

Требуется определить вектор ускорения $\overline{w_B}$ произвольной точки B фигуры сечения.

Для этого движение точки B рассматривается как составное. За условную переносную среду возьмем среду жестко связанную с полюсом А и движущуюся поступательно. Тогда, согласно теореме о сложении ускорений в составном движении (теореме Кориолиса), имеем: $\overline{w_B} = \overline{w_e} + \overline{w_r} + \overline{w_C}$, (*) где:

1. $\overline{w_e} = \overline{w_A}$ - так как переносное движение является поступательным вместе с полюсом А, то переносное ускорение для всех точек фигуры сечения будет равно ускорению т. А;

2. $\overline{w_C} = 2\overline{\omega_e} \times \overline{v_r} = 0$, (так как при поступательном движении переносной среды вектор её угловой скорости вращения $\overline{\omega_e} = 0$);

3. Относительное ускорение $\overline{w_r}$ - это ускорение вращения точки B вокруг полюса A. Согласно кинематике вращательного движения

тела, ускорение точки вращающегося тела можно записать как геометрическую сумму касательного и нормального ускорений:

$$\overline{w_r} = \overline{w_r^{\tau}} + \overline{w_r^{n}}, \quad \text{где}$$

- $\overline{w_r^{\tau}} \perp AB$;

- направлен вектор $\overline{w_r^{\tau}}$, в сторону относительного вращения, если оно ускоренное, и в противоположную сторону, если оно замедленное;

- модуль вектора: $w_r^{\tau} = AB \cdot \varepsilon$ (где ε - угловое ускорение вращения фигуры сечения);

Нормальная составляющая относительного ускорения $\overline{w_r^{n}}$:

- направлена по радиусу вращения к полюсу;
- по модулю равна: $w_r^n = AB \cdot \omega^2$.

Так как векторы $\overline{w_r^{\tau}}$ и $\overline{w_r^{n}}$ взаимно перпендикулярны, то модуль вектора относительное ускорения $\overline{w_r}$ определится по формуле:

$$w_r = \sqrt{(w_r^n)^2 + (w_r^{\tau})^2} = \sqrt{AB^2 \cdot \varepsilon^2 + AB^2 \cdot \omega^4} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Направление вектора относительное ускорения $\overline{w_r}$ задаётся диагональю прямоугольника, построенного на векторах $\overline{w_r^{\tau}}$ и $\overline{w_r^{n}}$.

Тогда, подставив полученные значения $\overline{w_e}$ и $\overline{w_r}$ в формулу (*) получим:

$$\overline{w_B} = \overline{w_A} + \overline{w_r} = \overline{w_A} + \overline{w_r^{\tau}} + \overline{w_r^{n}}$$ - выражение для определения вектора ускорения произвольной точки фигуры сечения методом полюса.

6.8. Мгновенный центр ускорений

Мгновенным центром ускорений (МЦУ) называется такая точка фигуры сечения или её мысленного продолжения, ускорение которой в данный момент времени равно нулю.

Покажем, что МЦУ всегда существует, если фигура сечения совершает вращательное движение.

Пусть дана фигура сечения S тела, точка A полюс, $\vec{w}_A$ - ускорение полюса, ω и ε угловая скорость и угловое ускорение вращения фигуры сечения S (рис. 43).

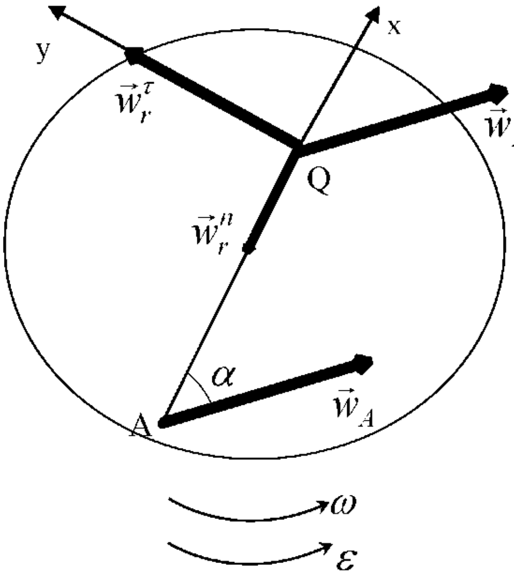


Рис. 43

Отложим отрезок AQ под углом α к вектору $\vec{w}_A$ в сторону в направлении ε. Величины α и AQ выберем из условий:

$$\alpha = arctg\frac{\varepsilon}{\omega^2}\ ,\quad AQ = \frac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Покажем, что т. Q и есть мгновенный центр ускорений, т. е. её ускорение в данный момент времени равно нулю. Для этого определим ускорение т. Q по методу полюса:

$$\vec{w}_Q = \vec{w}_A + \vec{w}_r^\tau + \vec{w}_r^n.$$

Для этого введем прямоугольную систему координат Qxy (рис. 43). Тогда проекции вектора $\vec{w}_Q$ на оси координат определятся выражениями:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{на ось x:} & w_{Qx} = -w_r^n + w_A \cdot \cos\alpha \quad (*) \\ \text{на ось y:} & w_{Qy} = w_r^\tau - w_A \cdot \sin\alpha \quad (**) \end{array}\right\}$$

Но

$$w_r^n = \omega^2 \cdot AQ = \frac{\omega^2 \cdot w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}; \quad w_r^\tau = \varepsilon \cdot AQ = \frac{\varepsilon \cdot w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Если $\alpha = arctg\dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$, то $\alpha = \arcsin\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \arccos\dfrac{\omega^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$.

Следовательно $w_A \cdot \cos\alpha = w_A \cdot \dfrac{\omega^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$, а

$$w_A \cdot \sin\alpha = w_A \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Подставляя полученные значения в выражения (*) и (**) получим:

$w_{Qx} = 0$, $w_{Qy} = 0$, следовательно, и $w_Q = 0$, , т. е. точка Q в данный момент времени имеет ускорение равное нулю и является МЦУ.

7. СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Определение: движение твёрдого тела называется сферическим, если за всё время движения мы сумели обнаружить только одну неподвижную точку в этом теле.

В этом случае из – за твёрдости тела любая другая его точка будет перемещаться по поверхности сферы, центром которой будет увиденная нами неподвижная точка. Радиусом этой сферы будет расстояние от рассматриваемой точки до неподвижной точки тела.

Траектории движения всех точек тела расположатся на поверхностях соответствующих сфер. Такие кривые называются сферическими. От этого и произошло название такого движения твёрдого тела – сферическое. Примером сферического движения может быть движение вращающегося волчка с неподвижным острием.

Заметим, что для того, чтобы задать однозначно положение твёрдого тела в пространстве при сферическом движении достаточно задать положение или трёх его точек (рис. 44), не лежащих на одной прямой (одна из которых, например, и есть неподвижная точка).

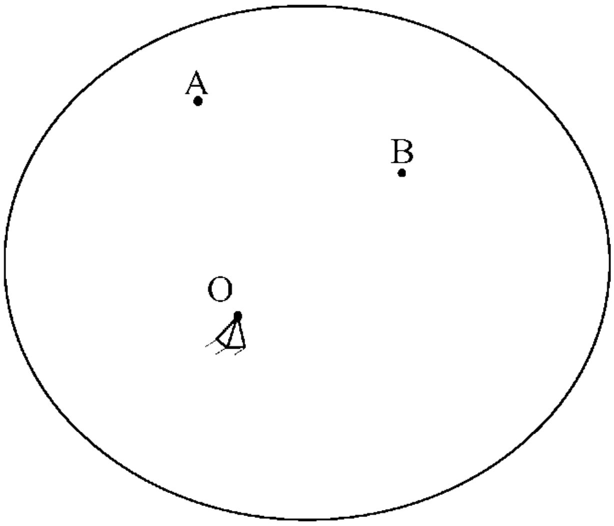


Рис. 44

Кроме этого (рис. 45), если известно положение неподвижной точки О, и ввести ось $O\xi$ жёстко связанную с телом, то зная углы α и β между осью $O\xi$ и осями Ох и Оу соответственно, а также угол γ поворота, тела вокруг оси $O\xi$, то мы также однозначно определим положение твёрдого тела при сферическом движении.

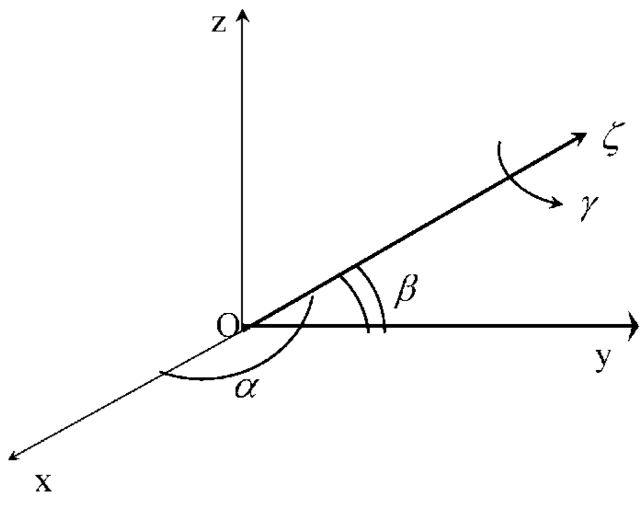


Рис. 45

Следовательно, при сферическом движении тело имеет три степени свободы, т. е. однозначно положение тела в пространстве задаётся тремя независимыми параметрами. Эти параметры, вообще говоря, могут быть любые, но традиционно положение тела в пространстве при сферическом движении определяется с помощью трёх углов Эйлера (рис. 46).

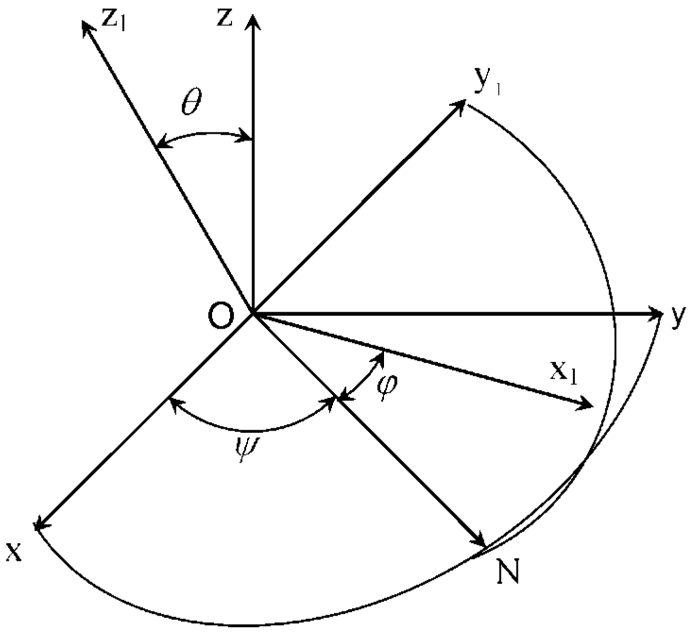


Рис. 46

А именно: пусть некоторое тело совершает сферическое движение. O – неподвижная точка тела. Введём две прямоугольные системы координат с началом точки O:

1. Неподвижная $Oxyz$.

2. Подвижная, $Ox_1y_1z_1$, жёстко связанная с вращающимся телом.

Пусть ON – линия пересечения плоскостей Oxy и Ox_1y_1. Эта линия (или ось) называется линией узлов или осью узлов.

Угол ψ, отсчитываемый от оси Ox до ON ($\angle XON = \Psi$), называется углом прецессии.

Угол φ, отсчитываемый от линии узлов ON до оси Ox_1 ($\angle NOX_1 = \phi$) – называется углом собственного вращения тела.

Угол θ, отсчитываемый от оси Oz до оси Oz_1 в плоскости, перпендикулярной линии узлов ON $(\angle ZOZ_1 = \theta)$, называется углом нутации.

Углы ψ, φ и θ называются углами Эйлера. Эти углы определяют в любой момент времени положение твёрдого тела в пространстве при сферическом движении.

Действительно, если эти углы известны, то соответствующее положение тела получим, поворачивая его вокруг оси Oz на угол прецессии ψ, затем поворачивая вокруг оси узлов ON на угол нутации θ и, наконец, - на угол собственного вращения φ вокруг оси Oz_1.

С течением времени углы ψ, φ и θ меняются, следовательно, они являются некоторыми функциями времени: $\psi = \psi(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\theta = \theta(t)$. И если эти функции известны, то они полностью и однозначно определяют положение тела в пространстве при сферическом движении.

8. СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Тело называется свободным, если оно не скреплено и не соприкасается с другими телами, и может перемещаться в пространстве в любом направлении.

Пусть имеется твёрдое тело, совершающее произвольное свободное перемещение в пространстве. Введём в пространстве неподвижную систему координат $Oxyz$ (рис. 47). Возьмём в теле произвольную точку O_1 и назовём её полюсом. Введём подвижную систему координат $O_1x_1y_1z_1$, жёстко связанную с полюсом O_1, движущуюся поступательно и такую, что $O_1x_1 \parallel Ox$, $O_1y_1 \parallel Oy$, $O_1z_1 \parallel Oz$ за всё время движения тела.

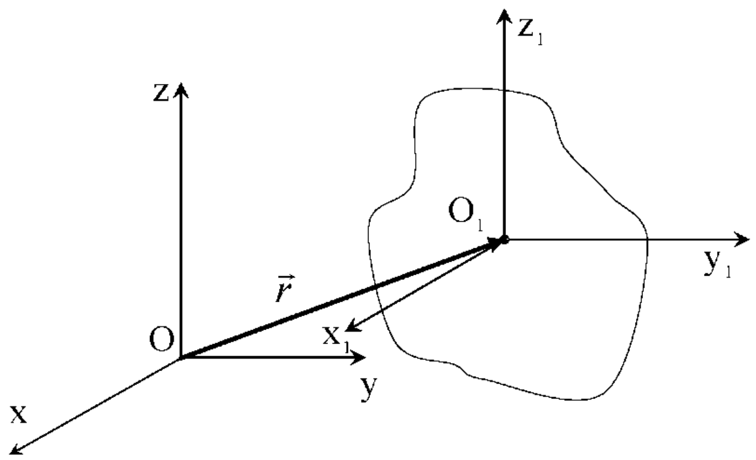


Рис. 47

Пусть $\vec{r}$ - радиус вектор положения начала подвижной системы координат точки O_1 относительно начала неподвижной системы координат $(\vec{r} = \vec{OO_1})$. В таком случае произвольное свободное движение тела можно рассматривать, как сумму его пространственного поступательного перемещения вместе с полюсом и вращения вокруг полюса.

Поступательное движение полюса можно задать координатным способом:

$$\begin{cases} x_{O_1} = x_{O_1}(t), & (1) \\ y_{O_1} = y_{O_1}(t), & (2) \\ z_{O_1} = z_{O_1}(t). & (3) \end{cases}$$

Сферическое движение вокруг полюса можно задать углами Эйлера:

<u>угол прецессии</u>: $\psi = \psi(t)$, (4)

<u>угол собственного вращения тела:</u> $\varphi = \varphi(t)$, (5)

<u>угол нутации:</u> $\theta = \theta(t)$. (6)

Таким образом, произвольное, свободное, пространственное движение твёрдого тела описывается шестью уравнениями $(1)-(6)$.