ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
КИНЕМАТИКА
Учебное пособие с примерами решения задач

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

1.1. Основные сведения из теоретического курса

В курсе кинематики:

– изучается движение точек, систем точек и твердых тел вне зависимости от причин, вызывающих это движение;

– считаются заданными как функции времени или определяются в ходе решения задачи параметры, определяющие положение тела по отношению к некоторой системе координат;

– при изучении движения всегда устанавливается начало отсчета времени $t = t_0$;

– движение считается известным, если известны траектория движения объекта, его скорость, ускорение и характер движения (участки ускорения/замедления, особые точки на траектории).

Траекторией точки называется непрерывная кривая, которую описывает точка при своем движении. В зависимости от вида траектории движение точки может быть прямолинейным или криволинейным.

Движение точки по отношению к выбранной системе отсчета считается заданным, если известен способ, с помощью которого можно определить положение точки в любой момент времени.

Способы задания движения:

1. Векторный способ. Положение точки в пространстве определено, если в любой момент времени известны модуль и направление ее радиуса-вектора $\vec{r}$, проведенного из заданного центра.

2. Координатный способ. При рассмотрении движения в прямоугольной декартовой системе координат движение будет задано, если координаты x, y, z точки представлены в виде известных функций времени:

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t).$$

3. Естественный способ. В этом случае должны быть заданы:

- траектория точки;

- закон ее движения по этой траектории $\sigma = M_0M = \sigma(t)$ (M_0 – некоторая фиксированная точка на траектории, рис. 1.1);

- направление положительного отсчета дуги по траектории.

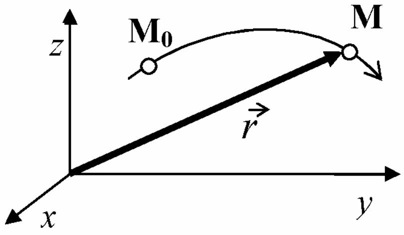


Рис. 1.1

Все названные выше способы задания движения взаимосвязаны. Если движение точки задано векторным способом

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = r_x(t)\vec{i} + r_y(t)\vec{j} + r_z(t)\vec{k},$$

то проекции радиуса-вектора точки на координатные оси представляют собой координаты точки:

$$x = r_x(t), \quad y = r_y(t), \quad z = r_z(t).$$

Следовательно, можно записать

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Модуль $\vec{r}$ определяется по формуле

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

а направление – с помощью направляющих косинусов

$$\cos(x,\vec{r}) = x/r, \ \cos(y,\vec{r}) = y/r, \ \cos(z,\vec{r}) = z/r.$$

Перейти от координатного способа к естественному можно следующим образом:

$$\sigma = \pm\int_0^t \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}\,dt.$$

Знаки «+» и «-»указывают на направление движения точки. Если точка движется в сторону выбранного положительного отсчета дуги, то следует брать знак «+», в противном случае – знак «-».

Скоростью точки в данный момент времени называется предел отношения вектора перемещения точки к промежутку времени, за который произошло это перемещение, при стремлении этого промежутка времени к нулю:

$$\vec{V} = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}.$$

Скорость точки равна производной радиуса-вектора по времени. Вектор скорости **всегда** направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.

При **координатном способе** задания движения точки ее скорость определяется по следующей формуле:

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k},$$

где $\dot{x} = V_x$, $\dot{y} = V_y$, $\dot{z} = V_z$ – проекции скорости на соответствующие оси.

Тогда модуль скорости и направление вектора скорости рассчитываются по формулам

$$V = \sqrt{V_x{}^2 + V_y{}^2 + V_z{}^2} = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2},$$

$$\cos(x,\vec{V}) = V_x/V, \ \cos(y,\vec{V}) = V_y/V, \ \cos(z,\vec{V}) = V_z/V.$$

Если модуль скорости не изменяется с течением времени, то движение называется *равномерным*.

При **естественном способе** задания движения векторная скорость точки

$$\vec{V} = V_\tau \vec{\tau} = \frac{d\sigma}{dt}\vec{\tau},$$

где $\sigma = \dot{\sigma}(t)$ – закон движения по траектории, $\vec{\tau}$ – орт касательной.

Модуль этого вектора $V = \dot{\sigma}(t)$.

Направление вектора скорости определяется знаком производной $\frac{d\sigma}{dt}$. Если производная положительная ($V_\tau = V$), то вектор скорости направлен в сторону положительного отсчета дуги, а если же отрицательная ($V_\tau = -V$) – в противоположную сторону.

Ускорением точки в данный момент времени называется векторная величина, равная первой производной по времени от скорости рассматриваемой точки, или, что то же самое, второй производной по времени от радиуса-вектора этой точки:

$$\vec{W} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}.$$

При **координатном способе** задания движения вектор ускорения можно представить в виде

$$\vec{W} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k},$$

где $\ddot{x} = W_x$, $\ddot{y} = W_y$, $\ddot{z} = W_z$ – проекции ускорения на соответствующие оси.

Модуль ускорения определяется по формуле

$$W = \sqrt{W_x{}^2 + W_y{}^2 + W_z{}^2} = \sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 + (\ddot{z})^2}.$$

Зная проекции ускорения и его модуль, найдем направляющие косинусы вектора ускорения:

$$\cos(x,\vec{W}) = W_x / W;\ \cos(y,\vec{W}) = W_y / W;\ \cos(z,\vec{W}) = W_z / W.$$

При **естественном способе** задания движения вектор ускорения представляется в виде векторной суммы двух взаимно перпендикулярных векторов:

$$\vec{W} = \vec{W}_n + \vec{W}_\tau.$$

Составляющая $\vec{W}_\tau$ называется *касательным*, или *тангенциальным*, *ускорением* точки и определяется по формуле

$$\vec{W}_\tau = \frac{dV_\tau}{dt}\vec{\tau}.$$

Вектор $\vec{W}_\tau$ **всегда** направлен по касательной к траектории точки, и модуль его равен абсолютному значению первой производной по времени от проекции скорости на эту касательную:

$$|W_\tau| = \left|\frac{dV_\tau}{dt}\right|.$$

Если производная больше нуля, то $\vec{W}_\tau$ направлен от точки в сторону положительного отсчета дуги траектории, и наоборот.

Если знак $\frac{dV_\tau}{d\tau}$ совпадает со знаком V_τ, то вектор касательного ускорения направлен в одну сторону с вектором скорости и угол между векторами скорости и полного ускорения будет острым (в этом случае точка движется *ускоренно*). Если же знаки не совпадают, то векторы направлены в противоположные стороны и тот же угол будет тупым (точка движется *замедленно*).

Вторая составляющая вектора ускорения точки $\vec{W}_n$ называется *нормальным* ускорением. Его модуль определяется по формуле

$$W_n = \frac{V^2}{\rho},$$

где V – модуль скорости точки, ρ – радиус кривизны траектории в данной точке. Вектор нормального ускорения точки **всегда** направлен по нормали к траектории в сторону ее вогнутости (рис.1.2).

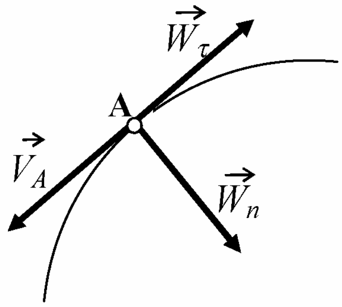


Рис. 1.2

Касательное ускорение характеризует изменение скорости по **величине**, а нормальное ускорение – по **направлению**.

Модуль полного ускорения находится по формуле

$$W = \sqrt{W_n^2 + W_\tau^2}.$$

1.2. Решение задач

Задача 1.1

Задан закон движения точки по траектории $s = t^3 - 3t$ (м). Найти путь, пройденный точкой за промежуток времени [0; 3].

Решение

В данном случае закон движения точки задан в естественной форме. Если *s(t)* – монотонная функция, то пройденный путь на промежутке времени [t_1; t_2] вычисляется как $l = s(t_2) - s(t_1)$. Если же функция на рассматриваемом промежутке не является монотонной, то ее нужно разбить на промежутки монотонности и просуммировать пути по каждому промежутку.

Исследуем функцию $s(t)$. Продифференцируем её по времени и приравняем к нулю:

$$\dot{s} = 3t^2 - 3 = 0 .$$

Это квадратное уравнение имеет два корня: $t_1 = 1,\ t_2 = -1$, но второй корень лежит вне промежутка [0; 3]. Следовательно, имеются два промежутка монотонности функции и путь, пройденный точкой за время [0; 3],

$$l_{03} = l_{01} + l_{13} = |s(1) - s(0)| + |s(3) - s(1)| =$$
$$= |1 - 3| + |27 - 9 - 1 + 3| = 2 + 20 = 22 \text{ (м)}.$$

Задача 1.2

Точка движется в плоскости согласно уравнениям $x = 8\cos(24t)$, $y = 7\sin^2(12t)$. Найти уравнение траектории точки, закон ее движения по траектории, отсчитывая расстояние от начального положения, скорость и ускорение при $t_1 = {}^{7\pi}\!/_{48}$ ($\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ даны в метрах, $\boldsymbol{t}$ – в секундах).

Решение

Движение точки задано координатным способом.

Найдем уравнение траектории, исключив из уравнений движения параметр $\boldsymbol{t}$:

$$x = 8\cos(24t) = 8(\cos^2(12t) - \sin^2(12t)) = 8(1 - 2\sin^2(12t)).$$

Отсюда

$$\sin^2(12t) = (8 - x)/16.$$

Подставив это значение в зависимость $y(t)$, получим

$$y = 3{,}5 - 7x/16. \qquad \text{(а)}$$

Это уравнение прямой, но траекторией точки является только отрезок M_0M_1 (рис. 1.3), так как согласно заданным уравнениям движения координата x лежит в диапазоне $(-8;\ 8)$, а координата y – в диапазоне $(0;\ 7)$.

Найдем закон движения точки по траектории. Для этого продифференцируем зависимости $x(t)$ и $y(t)$:

$$dx = -8\cdot 24\sin(24t)dt = -192\sin(24t)dt;$$
$$dy = 168\sin(12t)\cos(12t)dt = 84\sin(24t)dt.$$

Тогда

$$d\sigma = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{192^2 + 84^2}\,\sin(24t)dt = 209{,}57\,\sin(24t)dt . \qquad \text{(б)}$$

Чтобы получить уравнение $\sigma(t)$, проинтегрируем выражение (б):

$$\sigma(t) = -8{,}73\cos(24t) + C. \qquad \text{(в)}$$

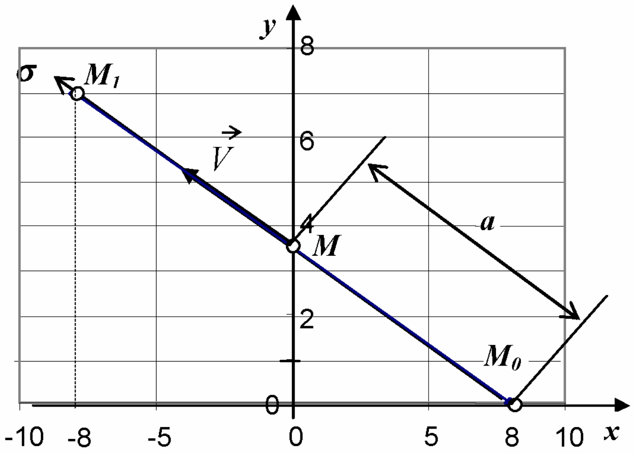


Рис. 1.3

Координата σ отсчитывается от начального положения точки, поэтому при $t = 0$ $\sigma = 0$ и уравнение (в) примет вид

$$0 = -8{,}73 + C,$$

откуда $C = 8{,}73.$

Окончательно закон движения будет иметь вид

$$\sigma(t) = 8{,}73(1 - \cos(24t)).$$

Это гармонические колебания с амплитудой $a = 8{,}73$ *м* и периодом колебаний $\tau = \pi/48$ *с*.

В начале движения, при $t = 0$, точка находится в крайнем положении M_0 *(8; 0)*, а в момент времени $t = \pi/48$ *с*, когда $\cos(24t) = 0$, – в центре колебаний *M (0; 3,5)*. При $t = \pi/24$ *с* точка достигает второго крайнего положения M_1 *(-8; 7)*. Для заданного $t = 7\pi/48$ *с* координаты $x = 0$, $y = 3{,}5$ *м*, то есть точка находится в центре колебаний.

Для определения проекций вектора скорости на координатные оси следует продифференцировать по времени соответствующие функции:

$$V_x = \dot{x} = -8 \cdot 24 \sin(24t) = -192 \sin(24t);$$

$$V_y = \dot{y} = 168 \sin(12t)\cos(12t) = 84 \sin(24t).$$

Модуль скорости

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{192^2 \sin^2(24t) + 84^2 \sin^2(24t)} = 209{,}57 \cdot |\sin(24t)|.$$

В момент времени $t_1 = {}^{7\pi}\!/_{48}$

$$V_x = 192 \text{ м/с}, \; V_y = -84 \text{ м/с},$$

$$V = 209{,}57 \cdot \left|\sin\left(\frac{24}{48} \cdot 7\pi\right)\right| = 209{,}57 \text{ м/с}.$$

Направление $\vec{V}$ с учетом знаков проекций V_X, V_Y показано на рис. 1.3.

Определим ускорение точки. Проекции ускорения на оси координат

$$W_x = \ddot{x} = -192 \cdot 24 \cos(24t) = -4608 \cos(24t),$$
$$W_y = \ddot{y} = 84 \cdot 24 \cos(24t) = 2016 \cos(24t).$$

При $t_1 = {}^{7\pi}\!/_{48}$

$$W_x = -4608 \cos(\frac{7\pi}{2}) = 0, \ W_y = 2016 \cos(\frac{7\pi}{2}) = 0.$$

Следовательно, полное ускорение точки $W = 0$. Отметим, что для прямолинейной траектории радиус ее кривизны $\rho = \infty$.

Задача 1.3

Точка описывает окружность радиусом R с начальной скоростью V_0 (рис.1.4). Ускорение точки образует с направлением ее скорости постоянный угол α. Определить величину скорости точки как функцию времени.

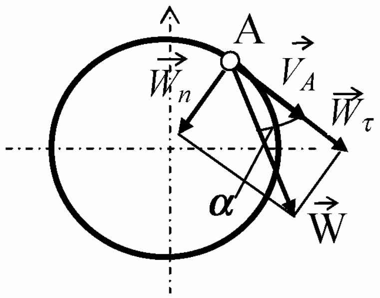


Рис. 1.4

Решение

Поскольку ускорение точки образует угол α с касательной к траектории, то можно записать $W_n = W \sin\alpha$, $W_\tau = W \cos\alpha$. С другой стороны,

$$W_n = \frac{V^2}{R}, \text{ а } W_\tau = \frac{dV_\tau}{dt}.$$

Известно, что $\alpha = const$. Следовательно,

$$ctg\alpha = \frac{W_\tau}{W_n} = \frac{\dot{V}_\tau R}{V^2} = const.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Проинтегрируем его и найдем зависимость скорости точки от времени:

$$\int \frac{dV_\tau}{V^2} = \int \frac{ctg\alpha}{R} dt, \ -\frac{1}{V} = \frac{ctg\alpha}{R} t + C. \qquad \text{(a)}$$

Постоянную интегрирования получим из начального условия. Известно, что при $t_0 = 0$ скорость точки $V = V_0$. Подставив эти значения в уравнение (а), найдем $C = -\dfrac{1}{V_0}$.

Тогда зависимость $V(t)$ будет иметь вид

$$V = -\frac{1}{\dfrac{ctg\alpha}{R}t - \dfrac{1}{V_0}} = \frac{V_0 R}{R - V_0 t \cdot ctg\alpha}.$$

Задача 1.4

Пушка береговой охраны с высоты $h = 30$ *м* выстреливает снаряд с начальной скоростью $V_0 = 1000$ *м/с* под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. На каком расстоянии от пушки упадет снаряд, если пренебречь сопротивлением воздуха?

Решение

В этой задаче не задан в явном виде закон движения точки, поэтому его следует установить, используя известные условия.

Введем оси координат, связав ось x с горизонтом и ось y с вертикалью. Запишем уравнения движения снаряда в координатной форме. Если не учитывать сопротивление воздуха, то нет сил, которые могли бы сообщить снаряду ускорение вдоль оси x, то есть $W_x = \ddot{x} = 0$.

По оси y на снаряд действует сила тяжести, которая вызывает ускорение свободного падения, то есть $W_y = \ddot{y} = -g$.

Проинтегрировав дважды эти уравнения, получим

$$V_x = \int \ddot{x}\,dt = \int 0\,dt = C_1 \quad \text{и} \quad x = \int V_x dt = \int C_1 dt = C_1 t + C_3,$$

$$V_y = \int \ddot{y}\,dt = \int(-g)dt = -gt + C_2 \quad \text{и} \quad y = \int V_y dt = \int(-gt + C_2)dt = \frac{-gt^2}{2} + C_2 t + C_4.$$

Постоянные интегрирования найдем из начальных условий. Известно, что при $t = 0$

$$x(0) = 0,\ y(0) = h,\ V_X = V_0 \cos\alpha,\ V_Y = V_0 \sin\alpha.$$

Тогда

$V_X = V_0 \cos\alpha = C_1$, $\qquad 0 = V_0 \cos\alpha \cdot 0 + C_3 \Rightarrow C_3 = 0$,

$V_Y = V_0 \sin\alpha = -g\cdot 0 + C_2$, $\qquad h = -g0/2 + V_0 \sin\alpha \cdot 0 + C_4 \Rightarrow C_4 = h$.

Закон движения снаряда с учетом значений констант:

$$x = (V_0 \cos\alpha)t; \qquad \text{(а)}$$

$$y = -gt^2/2 + (V_0 \sin\alpha)t + h. \qquad (б)$$

Искомое расстояние можно найти из уравнения (а), если подставить в него время полета снаряда. Последнее определим из уравнения (б), учитывая, что в момент падения на землю координата $y = 0$.

Подставив известные величины, получим

$$-4{,}9t^2 + 707t + 30 = 0.$$

Решив это квадратное уравнение, найдем один реальный корень $t = 144$ *с*. Тогда из уравнения (а) определим искомое расстояние

$$x = 1000 \cdot 0{,}71 \cdot 144 = 101{,}8 \text{ км}.$$

Для справки: максимальная дальность стрельбы современных орудий при такой начальной скорости снаряда составляет немногим более 50 км.

Задача 1.5

Определить траекторию и исследовать характер движения точки M, расположенной на шатуне длиной l кривошипно-шатунного механизма на расстоянии a от места его соединения с кривошипом OA длиной l (рис. 1.5). Угол φ изменяется по закону $\varphi(t) = \pi t$, $AB = OA$.

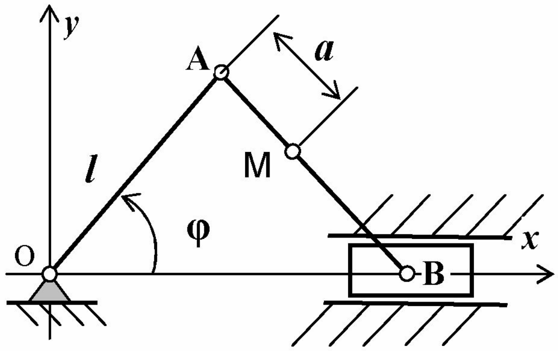


Рис. 1.5

Решение

Здесь, как и в предыдущей задаче, прежде всего, следует составить уравнения движения. В данном случае целесообразно использовать координатный способ. Для этого направим ось абсцисс горизонтально, ось ординат – вертикально и определим координаты точки ***M***:

$$x = (l+a)\cos\varphi;$$

$$y = (l-a)\sin\varphi.$$

Подставим в эти выражения заданную зависимость $\varphi = \pi t$, получим закон движения точки

$$x = (l+a)\cos(\pi t),$$
$$y = (l-a)\sin(\pi t). \qquad (а)$$

Уравнение траектории представляет собой зависимость между координатами точки $y = f(x)$, которую можно получить, исключив из системы (а) параметр t. Обычно это осуществляют следующим образом: выражают время t из одного уравнения и подставляют полученную зависимость в другое (другие). В данном случае целесообразнее использовать такой приём: возвести левую и правую части каждого уравнения в квадрат и сложить их. Тогда получим

$$\frac{x^2}{(l+a)^2}+\frac{y^2}{(l-a)^2}=cos^2(\pi t)+sin^2(\pi t).$$

Обозначив $(l+a)=A$ и $(l-a)=B$ с учетом того, что

$$cos^2(\pi t)+sin^2(\pi t)=1,$$

найдем уравнение траектории

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1,$$

то есть точка описывает эллипс, полуоси которого A и B (рис. 1.6, а).

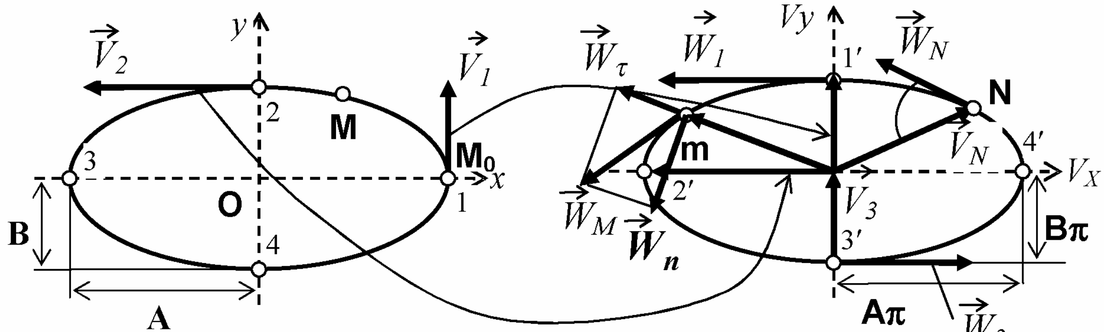


Рис. 1.6

Определим направление движения. Для этого положим в (а) $t=0$. Тогда в начальный момент координаты точки М (А; 0), то есть точка находится в положении 1. При возрастании t координата x уменьшается, а y – увеличивается. Следовательно, точка движется по эллипсу против хода часовой стрелки. При $t = 0{,}5$ *с* координаты точки М (0; В), она находится в положении 2 и т. д.

Отметим, что направление движения можно определить и по направлению вектора скорости. Найдем его проекции:

$$V_x=\dot{x}=-A\pi\, sin(\pi t);$$
$$V_y=\dot{y}=B\pi\, cos(\pi t). \qquad (б)$$

При $t=0$ получим $V_X=0$, следовательно, $V=V_Y=B\pi$ и вектор в начальном положении направлен вертикально вверх, что также указывает на движение точки против хода часовой стрелки.

Убедиться в монотонности движения можно несколькими способами. Аналитические методы исследования функций излагаются в курсе высшей математики. В данном случае воспользуемся графоаналитическим способом, для чего построим г о д о г р а ф скорости.

Напомним, что годографом называется кривая, которую описывает вектор, если его начало закрепить в некоторой неподвижной точке. Годограф скорости строится в координатах V_X, V_Y. Это означает, что в параметрическом виде уравнения годографа скорости имеют вид (б). Тем же способом, что и при построении траектории точки, исключим из уравнений (б) параметр t и получим уравнение годографа скорости

$$\frac{V_x^{\,2}}{(A\pi)^2} + \frac{V_y^{\,2}}{(B\pi)^2} = 1,$$

то есть при движении точки по траектории вектор ее скорости описывает эллипс, полуоси которого $A\pi$ и $B\pi$ (рис. 1. 6, б).

На годографе скорости видно, что на участках 1 - 2 и 3 - 4 модуль $\vec{V}$ возрастает и, следовательно, точка движется ускоренно, а на участках 2 - 3 и 4 - 1 модуль $\vec{V}$ убывает, точка движется замедленно.

Из теоретического курса известно, что характер движения точки изменяется тогда, когда W_τ = 0, то есть скорость достигает экстремальных значений – максимума или минимума. На годографе скорости это точки ***1', 2', 3', 4'***. Поскольку вектор полного ускорения $\vec{W} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$ всегда направлен по касательной к годографу скорости, то в этих точках $\vec{W} = \vec{W}_n$ и угол между $\vec{V}$ и $\vec{W}$ равен $\pi/2$.

Рассмотрим произвольное положение точки М на участке траектории 1 - 2. Этому положению на траектории соответствует точка **m** на годографе скорости (см. рис. 1. 6, а, б). Разложим полное ускорение $\vec{W}$, направленное по касательной к годографу $\vec{V}$, на составляющие $\vec{W}_n$ и $\vec{W}_\tau$. Как известно, $\vec{W}_\tau$ направлено вдоль той же прямой, что и $\vec{V}$, а $\vec{W}_n$ перпендикулярно $\vec{W}_\tau$, тогда $\vec{W} = \vec{W}_n + \vec{W}_\tau$. Отметим, что это участок ускоренного движения, поэтому $\vec{V}$ и $\vec{W}_\tau$ направлены в одну сторону.

1.3. Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте способы задания движения точки.
2. Дайте определение скорости и ускорения точки при векторном способе задания её движения.
3. Дайте определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания её движения.
4. Как разложить вектора скорости и ускорения точки по осям естественного трехгранника?
5. Запишите формулы для скорости, касательного и нормального ускорений точки через дуговую координату.

6. При каких условиях вектор полного ускорения совпадает с вектором: а) нормального ускорения; б) касательного ускорения?
7. Как определяется характер движения точки при векторном способе задания её движения?
8. Как определяется характер движения точки при координатном способе задания её движения?
9. Каковы условия ускоренного, замедленного движения точки при естественном способе задания её движения?
10. Запишите и покажите на рисунке связь между векторами полного, нормального и касательного ускорений.
11. Чему равно скалярное произведение векторов скорости и нормального ускорения точки?

2. ПРОСТЕЙШИЕ ВИДЫ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Простейшими движениями твердого тела являются поступательное движение и вращение вокруг неподвижной оси.

2.1. Поступательное движение

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в теле, перемещается, оставаясь параллельной своему первоначальному положению.

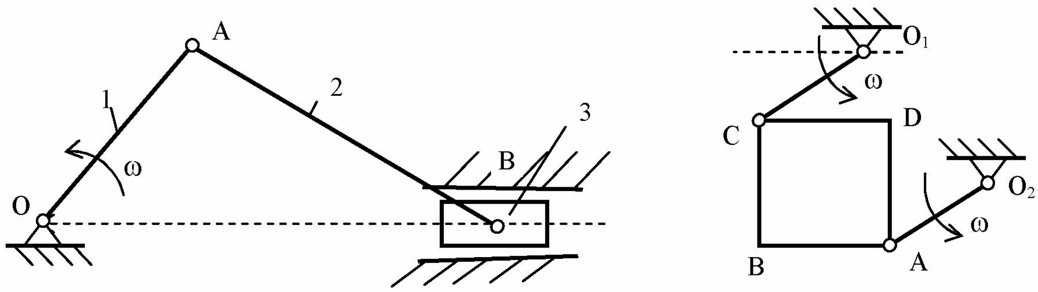
При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые по форме траектории, а скорости и ускорения всех точек в каждый момент времени геометрически равны, т.е.

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_2 = \ldots = \vec{V}_n \quad \text{и} \quad \vec{W}_1 = \vec{W}_2 = \ldots = \vec{W}_n.$$

Это означает, что при исследовании поступательного движения твердого тела можно ограничиться изучением движения одной какой-либо его точки. Таким образом, задача о поступательном движении твердого тела сводится к задаче о кинематике точки.

Приведем примеры поступательного движения.

На рис. 2.1, а поступательно движется ползун ***3,*** на рис. 2.1, б – рама ***ABCD*** ***($O_1C = O_2A$)***, а на рис. 2.2 – кулиса ***3*** в опорах ***K*** и ***L***.



а б

Рис. 2.1

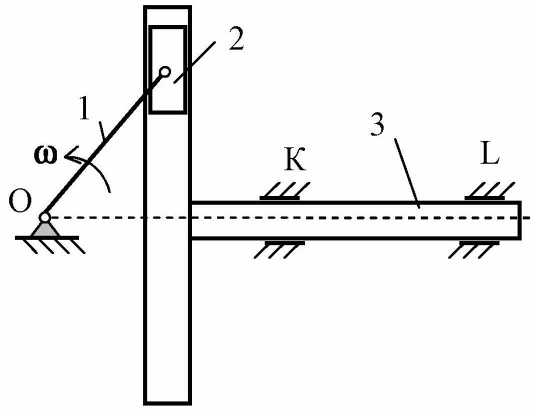


Рис. 2.2

2.2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси в покое остаются точки, лежащие на оси вращения, а все остальные движутся в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, и описывают окружности. Радиусы этих окружностей равны расстояниям от точек до оси.

Единственным параметром, описывающим вращательное движение, является угол поворота $\boldsymbol{\varphi}$. Измеряется этот угол так: через ось вращения проводим неподвижную плоскость σ_1 и подвижную плоскость σ_2, жестко связанную с вращающимся телом (рис. 2.3).

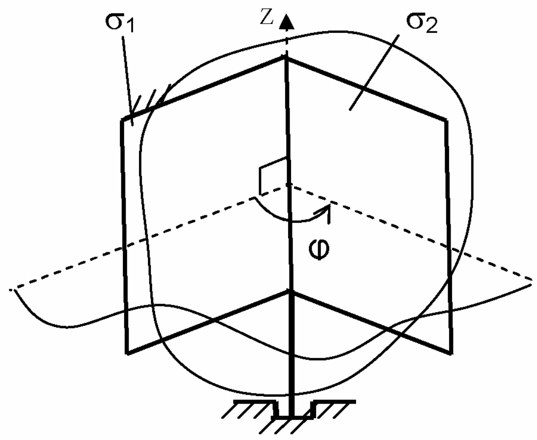
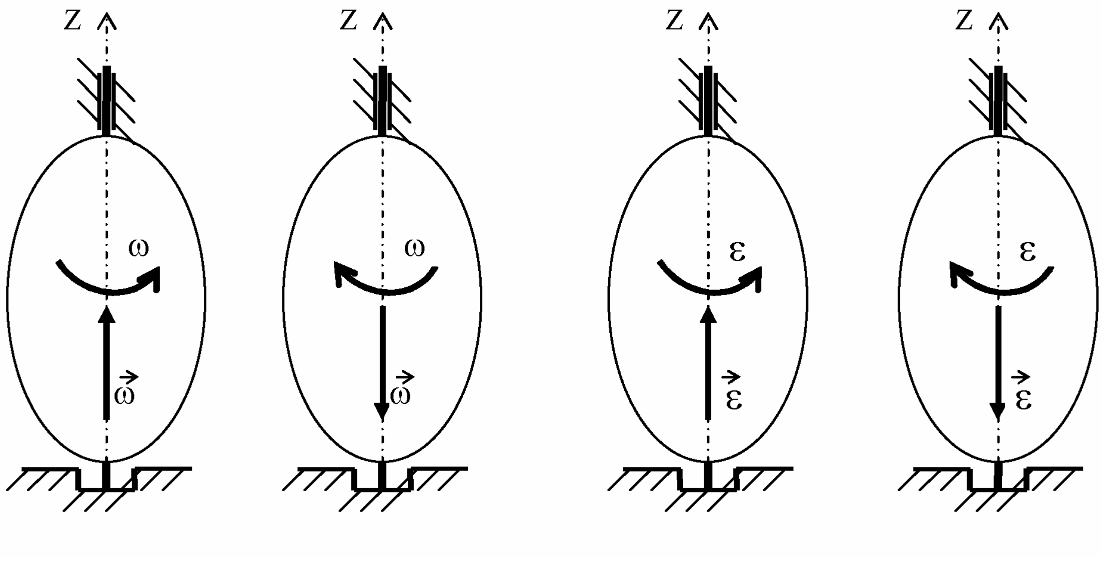


Рис. 2.3

Двухгранный угол φ между этими плоскостями полностью определяет положение тела. Измеряется он линейным углом φ в радианах или оборотах. Один оборот равен 2π радиан.

Кинематическими характеристиками вращающегося тела являются угловая скорость ω и угловое ускорение ε. Особо отметим, что эти понятия ни в коем случае не применимы к материальной точке.

Угловая скорость (***рад/с*** или ***1/с***) характеризует быстроту изменения угла поворота в единицу времени, а угловое ускорение (***рад/с***^{2} или ***1/с***^{2}) – быстроту изменения угловой скорости в единицу времени. Это векторные величины, направленные по оси вращения в ту сторону, откуда поворот тела виден против хода часовой стрелки (рис. 2.4).



Основные характеристики вращательного движения и расчетные формулы приведены в табл. 2.1.

Если угловая скорость постоянна, то вращение называется равномерным и происходит по закону

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_z t\,. \qquad (2.1)$$

Если угловое ускорение постоянно, то вращение называется равнопеременным и происходит согласно уравнениям

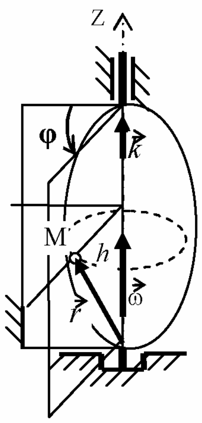
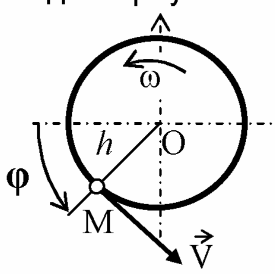
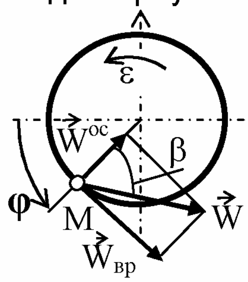
$$\omega_z = \omega_{oz} + \varepsilon_z t\,, \qquad (2.2)$$

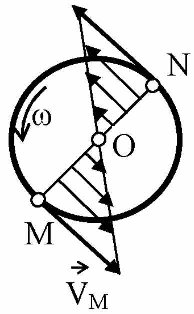
$$\varphi = \varphi_0 + \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2}\,. \qquad (2.3)$$

В некоторых случаях угловая скорость измеряется числом оборотов в минуту ***n*** (об/мин). Связь между ω (рад/с) и ***n*** (об/мин) следующая:

$$\omega = \frac{2\pi \cdot n}{60}\,. \qquad (2.4)$$

Таблица 2.1

Закон вращательного движения	Кинематические характеристики	Определение линейных скоростей	Определение линейных ускорений
 ***φ = φ (t),*** $\vec r$ – радиус-вектор, проведенный из любой точки на оси вращения к точке ***M***;	*Угловая скорость* $\vec\omega = \vec k\omega_z$, где $\omega_z = \dot\varphi$ – проекция $\vec\omega$ на ось вращения. *Угловое ускорение* $\vec\varepsilon = \vec k\varepsilon_z$, где $\varepsilon_z = \ddot\varphi$ – проекция $\vec\varepsilon$ на ось вращения. *Критерий ускоренного вращения* $\dot\varphi \cdot \ddot\varphi > 0$ ($\vec\omega, \vec\varepsilon$ направле-	Вид сверху:  $\vec V = \vec\omega \times \vec r$, $V = \omega \cdot h$, $\vec V \perp \vec{OM}$. Закон распределения скоростей точек твердого тела:	Вид сверху: 

h – кратчайшее расстояние от точки ***M*** до оси вращения	ны в одну сторону)		$\vec{W} = \vec{W}^{oc} + \vec{W}^{вр}$, $\vec{W}^{oc} = \vec{\omega} \times \vec{V}$, $\vec{W}^{вр} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$, $W^{oc} = \omega^2 h$, $W^{вр} = \varepsilon \cdot h$, $W = \sqrt{W_{oc}^2 + W_{вр}^2}$, $W = h\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$, $tg\beta = \dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$

2.3. Преобразование простейших движений твердого тела

Под преобразованием простейших движений следует понимать:

1. Преобразование поступательного движения во вращательное и обратно.
2. Преобразование вращения вокруг одной оси во вращение вокруг другой.
3. Преобразование одного поступательного движения в другое.

На рис. 2.5 тела 1 и 5 совершают поступательное движение, тела 2, 3 и 4 – вращательное.

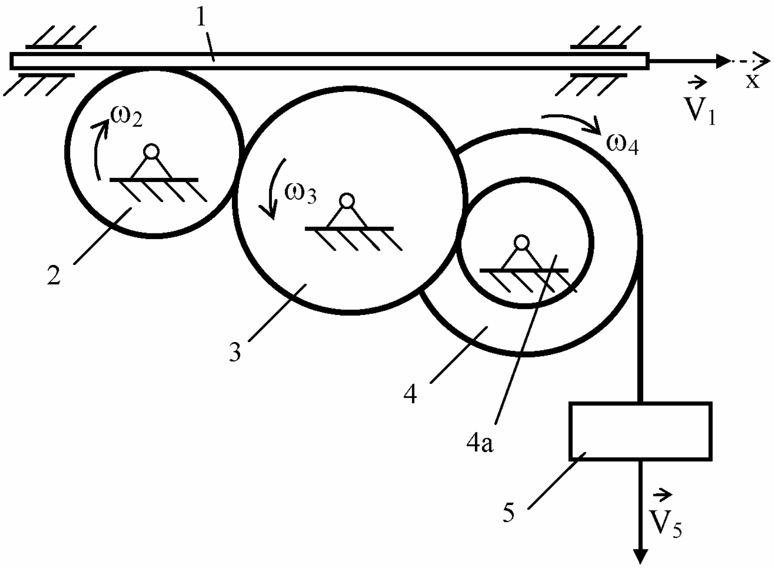


Рис. 2.5

Передача вращательного движения от одного твердого тела к другому осуществляется с помощью зубчатого или фрикционного зацепления двух колес (рис. 2.6, а, б), либо посредством ременной передачи (рис. 2.7, а, б).

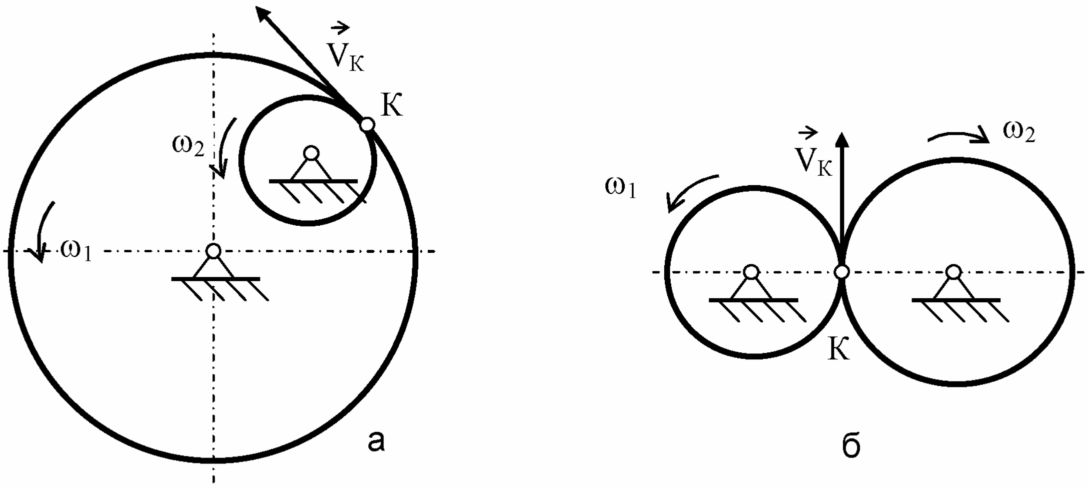


Рис. 2.6

При внутреннем зацеплении (см. рис. 2.6, а) и нескрещивающейся ременной передаче (см. рис. 2.7, а) направление вращения колес не меняется.

При внешнем зацеплении (см. рис. 2.6, б) и скрещивающейся ременной передаче (см. рис. 2.7, б) направление вращения меняется.

Скорости точек касания зубчатых колес $\vec{V}_K$ одинаковы (см. рис. 2.6). Скорости точек ***A*** и ***B*** на ободе шкивов в ременной передаче также одинаковы ($V_A = V_B$, см. рис. 2.7).

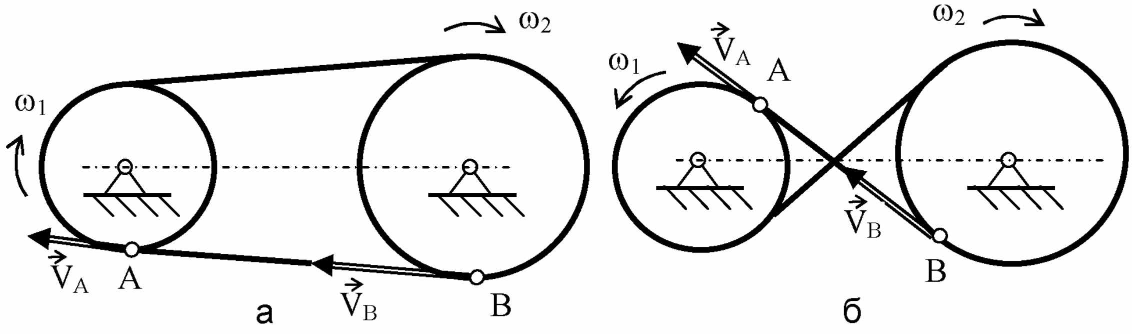


Рис. 2.7

Отсюда следует, что угловые скорости колес обратно пропорциональны их радиусам или диаметрам:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1} \quad \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1}\right). \qquad (2.5)$$

В механизмах часто используется параллельное соединение колес, когда два колеса вращаются вокруг одной неподвижной оси (колеса ***4*** и ***4а*** на рис. 2.5). Если эти колеса жестко соединены, то их угловые скорости одинаковы.

2.4. Решение задач

Решение любой задачи следует начинать с анализа работы механизма: сначала определить характер движения каждого тела, а затем записать кинематические параметры для того тела, закон движения которого известен. Далее с помощью формул кинематики найти искомые параметры.

Задача 2.1

Ускорение точки ***A*** диска, вращающегося вокруг неподвижной оси (рис. 2.8), равно ***8 м/с²***. Определить угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ и угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$ диска, если его радиус ***R = 0,4 м***, а угол $\boldsymbol{\beta = 30°}$.

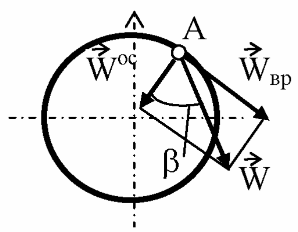


Рис. 2.8

Решение

Разложим ускорение точки ***A*** на осестремительное и вращательное: $\vec{W}_A = \vec{W}^{oc} + \vec{W}^{вр}$. С учетом того, что угол $\boldsymbol{\beta}$ известен, найдем

$$W^{oc} = W_A \cos\beta = 8\cos 30° = 6{,}8 \text{ м/с}^2,$$

$$W^{вр} = W_A \cdot sin\beta = 8 \cdot sin30^\circ = 4 \text{ м/с}^2.$$

Поскольку $W^{ос} = \omega^2 R$ и $W^{вр} = \varepsilon R$, то можно получить угловую скорость и угловое ускорение диска:

$$\omega = \sqrt{\frac{W^{ос}}{R}} = \sqrt{\frac{6,8}{0,4}} = 3,8\left(\frac{1}{c}\right);$$

$$\varepsilon = \frac{W^{вр}}{R} = \frac{4}{0,4} = 10\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

Задача 2.2

Колесо вращается с постоянным угловым ускорением. Вычислить ускорение точки, лежащей на расстоянии ***0,2 м*** от оси, через ***4 с*** после начала вращения из состояния покоя, если угловая скорость в этот момент равна ***0,3 рад/с***.

Решение

Поскольку $\varepsilon = const$ и движение начинается из состояния покоя, то угловую скорость найдем по формуле

$$\omega(t) = \varepsilon t + \omega_0 = \varepsilon t.$$

Подставив в это выражение момент времени ***t = 4 с***, получим угловое ускорение

$$\omega(4) = \varepsilon \cdot 4 \Rightarrow \varepsilon = \frac{\omega(4)}{4} = \frac{0,3}{4} = 0,075 \text{ (рад/с}^2\text{)}.$$

Определим ускорение точки:

$$\vec{W} = \vec{W}^{ос} + \vec{W}^{вр}.$$

Осестремительное ускорение

$$W^{ос} = \omega^2 r = (0,3)^2 \cdot 0,2 = 0,018 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Вращательное ускорение

$$W^{вр} = \varepsilon \cdot r = 0,075 \cdot 0,2 = 0,015 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Полное ускорение точки

$$W = \sqrt{(W^{ос})^2 + (W^{вр})^2} = \sqrt{3,24 + 2,25} \cdot 10^{-2} = 2,34 \cdot 10^{-2} \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Задача 2.3

Тело равноускоренно вращается из состояния покоя с угловым ускорением $\vec{\varepsilon} = \{3,\ 2,\ 2\}$. Найти скорость и ускорение точки тела, радиус-вектор которой $\vec{r} = \{1,\ 2,\ 2\}$, через **2 с** после начала движения.

Решение

Из условия задачи известно, что $\varepsilon_x = 3$, $\varepsilon_y = 2$, $\varepsilon_z = 2$ и начальная угловая скорость $\omega_0 = 0$. Найдем проекции вектора угловой скорости на координатные оси:

$$\omega_x = \int \varepsilon_x dt = \int 3dt = 3t + \omega_{x0} = 3t;$$

$$\omega_y = \int \varepsilon_y dt = \int 2dt = 2t + \omega_{y0} = 2t;,$$

$$\omega_z = \int \varepsilon_z dt = \int 2dt = 2t + \omega_{z0} = 2t.$$

При $t = 2$ с $\omega_x = 3\cdot 2 = 6$, $\omega_y = 2\cdot 2 = 4$, $\omega_z = 2\cdot 2 = 4$.

Определим проекции скорости точки на оси декартовой системы координат по формулам

$$V_x = \omega_y z - \omega_z y = 4\cdot 2 - 4\cdot 2 = 0,$$

$$V_y = \omega_z x - \omega_x z = 4\cdot 1 - 6\cdot 2 = -8,$$

$$V_z = \omega_x y - \omega_y x = 6\cdot 2 - 4\cdot 1 = 8.$$

Тогда величина скорости точки

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{0^2 + (-8)^2 + 8^2} = 11{,}31\,(м/с)..$$

Ускорение точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяется как векторная сумма осестремительного и вращательного ускорений. Первое из них

$$\vec{W}^{oc} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{i}\,(\omega_y v_z - \omega_z v_y) - \vec{j}\,(\omega_z v_x - \omega_x v_z) + \vec{k}\,(\omega_x v_y - \omega_y v_x) =$$

$$= \vec{i}\,(4\cdot 8 + 4\cdot 8) - \vec{j}\,(6\cdot 8 - 0) + \vec{k}\,(-6\cdot 8 - 0) = 64\vec{i} - 48\vec{j} - 48\vec{k}.$$

Модуль осестремительного ускорения

$$W^{oc} = \sqrt{64^2 + 48^2 + (-48)^2} = \sqrt{8704} = 93{,}3\ (м/с^2).$$

Аналогично определяем вращательное ускорение:

$$\vec{W}^{вр} = \vec{\varepsilon}\times\vec{r} = \vec{i}\,(\varepsilon_y r_z - \varepsilon_z r_y) - \vec{j}\,(\varepsilon_z r_x - \varepsilon_x r_z) + \vec{k}\,(\varepsilon_x r_y - \varepsilon_y r_x) =$$

$$= \vec{i}\,(2\cdot 2 - 2\cdot 2) - \vec{j}\,(3\cdot 2 - 2\cdot 1) + \vec{k}\,(3\cdot 2 - 2\cdot 1) = -4\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Модуль вращательного ускорения

$$W^{вр} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 5{,}66\,(м/с^2).$$

Полное ускорение точки

$$W = \sqrt{(W^{oc})^2 + (W^{вр})^2} = \sqrt{8704 + 32} = 93{,}47\ (м/с^2).$$

Задача 2.4

Ротор электродвигателя начал вращение из состояния покоя и за ***5 с*** совершил ***100*** оборотов. Найти угловое ускорение ротора при условии равноускоренного движения.

Решение

Поскольку движение равноускоренное, воспользуемся формулой

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2}.$$

В данном случае движение началось из состояния покоя, поэтому ω_0 и φ_0 равны нулю, поэтому

$$\varepsilon_z = \frac{2\varphi}{t^2}.$$

За один оборот вал поворачивается на угол ***2π рад***, следовательно, за время ***t = 5 с*** вал повернется на угол ***200π рад***. Таким образом,

$$\varepsilon_z = \frac{2 \cdot 200\pi}{5^2} = 50{,}3 \quad (\textbf{рад/с}^2).$$

Задача 2.5

Груз ***1*** перемещается вертикально по закону

$$y = \sqrt{2}\, sin\left(\frac{\pi}{4} t\right) (м)$$

и приводит в движение шкивы ***2*** и ***3***, радиусы которых ***R_2 = 0,5 м, r_2 = 0,2 м, R_3 = 0,4 м*** (рис. 2.9).

Определить скорость и ускорение точки ***М*** при ***t = 1 с***.

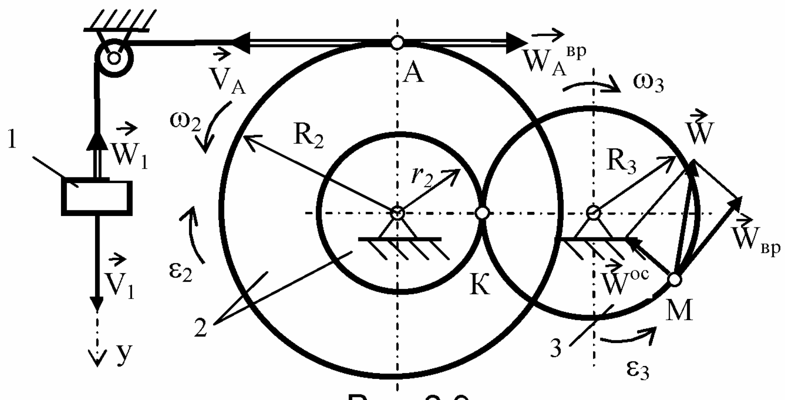


Рис. 2.9

Решение

Поступательное движение тела ***1*** преобразуется во вращательное движение двухступенчатого шкива ***2.*** Так как шкивы ***2*** и ***3*** находятся во внешнем зацеплении, то они вращаются в противоположных направлениях.

Применим следующие обозначения: ω_2 и ε_2 – угловая скорость и угловое ускорение шкива **2**; ω_3 и ε_3 – угловая скорость и угловое ускорение шкива **3**.

Определим скорость и ускорение груза **1** по закону движения:

$$V_{1y} = \dot{y} = \left(\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right)' = \sqrt{2}\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right);$$

$$W_{1y} = \ddot{y} = \dot{V}_{1y} = \left(\sqrt{2}\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right)' = -\sqrt{2}\frac{\pi^2}{16}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right).$$

При $t = 1$ *с* получим $V_{1y} = \frac{\pi}{4}\,(м/с)$, $W_{1y} = -\frac{\pi^2}{16}\,(м/с^2)$.

Точка ***A*** одновременно принадлежит канату и шкиву **2**, поэтому

$$V_A = V_1 = \frac{\pi}{4}\,(м/с) \quad \text{и} \quad W_A^{вр} = W_1 = \frac{\pi^2}{16}\,(м/с^2).$$

Найдем угловую скорость ω_2 и угловое ускорение ε_2 шкива **2**:

$V_A = \omega_2 R_2$, следовательно, $\omega_2 = \frac{V_A}{R_2} = \frac{\pi}{4\cdot 0{,}5} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{c}\right);$

$W_A^{вр} = \varepsilon_2 R$, следовательно, $\varepsilon_2 = \frac{W_A^{вр}}{R_2} = \frac{\pi^2}{16\cdot 0{,}5} = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{1}{c^2}\right).$

С учетом направлений векторов $\vec{V}_A$ и $\vec{W}_A^{вр}$ имеем $\omega_{2z} > 0$ и $\varepsilon_{2z} < 0$ (см. рис. 2.9).

Точка ***К*** является общей для шкивов **2** и **3**, поэтому

$$V_K = \omega_2 r_2 = \omega_3 R_3\,,$$
$$W_K^{вр} = \varepsilon_2 r_2 = \varepsilon_3 R_3.$$

Отсюда получим

$$\omega_3 = \omega_2\frac{r_2}{R_3} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{0{,}2}{0{,}4} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{c}\right) \quad (\omega_{3z}<0),$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2\frac{r_2}{R_3} = \frac{\pi^2}{8}\cdot\frac{0{,}2}{0{,}4} = \frac{\pi^2}{16}\left(\frac{1}{c^2}\right) \quad (\varepsilon_{3z} > 0).$$

Определим скорость и ускорение точки ***М***:

$$V_M = \omega_3 R_3 = \frac{\pi}{4}\cdot 0{,}4 = 0{,}1\pi\,(м/с);$$

$$\vec{W}_M = \vec{W}_{oc} + \vec{W}_{вр};$$

$$W_{oc} = \omega_3^2 R_3 = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot 0{,}4 = \frac{\pi^2}{40}\left(м/c^2\right);$$

$$W_{вр} = \varepsilon_3 R_3 = \frac{\pi^2}{16} \cdot 0{,}4 = \frac{\pi^2}{40}\left(м/c^2\right);$$

$$W_M = \sqrt{W_{oc}^2 + W_{вр}^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi^2}{40}\right)^2 + \left(\frac{\pi^2}{40}\right)^2} = \frac{\pi^2}{40}\sqrt{2}\left(м/c^2\right).$$

Направления векторов $\vec{V}_M, \vec{W}^{oc}, \vec{W}^{вр}, \vec{W}$ показаны на рис. 2.9.

Задача 2.6

Механизм, состоящий из барабана ***6*** и зубчатой передачи, приводится в движение колесом ***1*** (рис. 2.10). Определить модуль и направление скорости $\vec{V}_p$ груза ***P***, если $\boldsymbol{\omega_1 = 4{,}5\ (1/c)}$, а радиусы колес и барабана $\boldsymbol{R_1 = 0{,}2}$ ***м***, $\boldsymbol{R_2 = 0{,}4}$ ***м***, $\boldsymbol{R_3 = 0{,}5}$ ***м***, $\boldsymbol{R_4 = 0{,}25}$ ***м***, $\boldsymbol{R_5 = 0{,}6}$ ***м***.

Колеса ***4*** и ***3,*** а также колесо ***5*** и барабан ***6*** жестко соединены ($\boldsymbol{\omega_3 = \omega_4}$ и $\boldsymbol{\omega_5 = \omega_6}$).

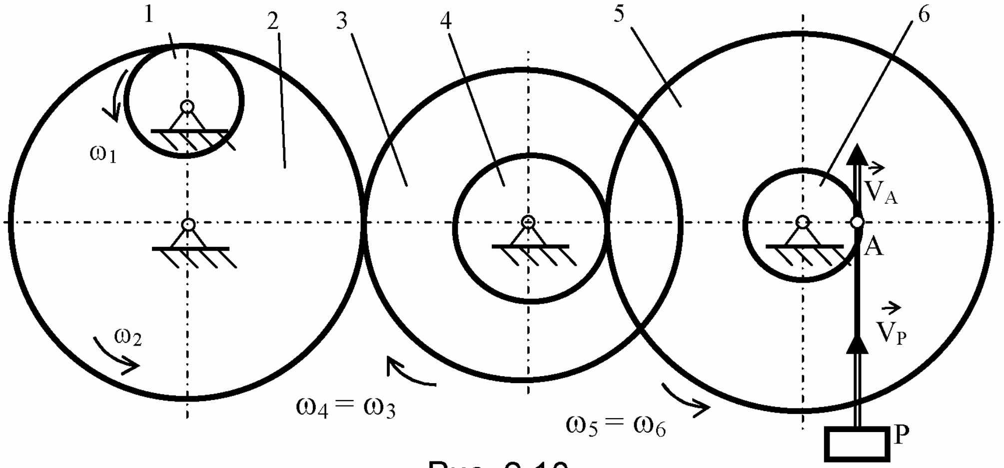


Рис. 2.10

Решение

Для определения скорости груза ***P*** воспользуемся известными соотношениями:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}, \text{ откуда } \quad \omega_2 = \omega_1 \frac{R_1}{R_2}; \qquad \text{(а)}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{R_3}{R_2}, \text{ откуда } \quad \omega_3 = \omega_4 = \omega_2 \frac{R_2}{R_3}; \qquad \text{(б)}$$

$$\frac{\omega_4}{\omega_5} = \frac{R_5}{R_4}, \text{ откуда } \quad \omega_5 = \omega_6 = \omega_4 \frac{R_4}{R_5}. \qquad \text{(в)}$$

Затем, подставив последовательно выражение (а) в (б) и (б) в соотношение (в), получим угловую скорость барабана ***6***

$$\omega_6 = \omega_5 = \omega_1 \frac{R_1 R_4}{R_3 R_5}.$$

Скорость груза ***P*** определим по формуле

$$V_P = V_A = \omega_6 R_6 = \omega_1 \frac{R_1 R_4 R_6}{R_3 R_5} = 4{,}5 \frac{0{,}2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}1}{0{,}5 \cdot 0{,}6} = 0{,}076 \, (м/с).$$

Направления вращения колес показаны на рис. 2.10.

Таким образом, груз ***P*** будет подниматься вверх со скоростью ***0,076 м/с***.

Задача 2.7

Определить скорость ***V*** подъема чашки ***Q*** домкрата, схема которого изображена на рис. 2.11, если рукоятка ***P*** делает ***n = 10*** оборотов в минуту.

Известны $R_1 = 2$ ***м***, $r_2 = 3$ ***м***, $R_2 = 4$ ***м***, $r_3 = 1$ ***м***, $R_3 = 5$ ***м***.

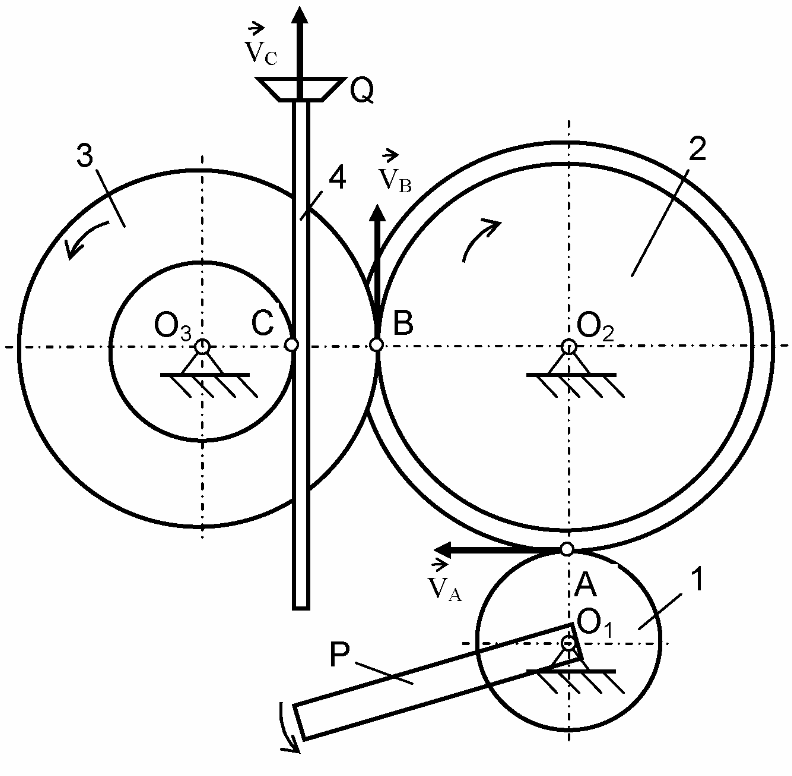


Рис. 2.11

Решение

Проанализируем сначала движение всех звеньев механизма. Колесо ***1***, а также шкивы ***2*** и ***3*** вращаются вокруг неподвижных осей O_1, O_2 и O_3 соответственно. Колесо r_3 цепляется за зубчатую рейку ***4,*** которая вместе с прикрепленной к ней чашкой ***Q*** совершает прямолинейное движение. Таким образом, для нахождения скорости чашки достаточно найти скорость движения зубчатой рейки.

Зная, сколько оборотов в минуту совершает тело ***1***, вычисляем его угловую скорость

$$\omega_1 = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi}{3} \text{ (рад/с)}.$$

Скорость точки на ободе первого колеса

$$V_A = \omega_1 R_1 = \frac{\pi}{3} \cdot 2 \text{ (м/с)}.$$

При отсутствии проскальзывания такую же скорость будут иметь точки на ободе колеса **2**. Тогда его угловая скорость

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2} = \frac{\pi}{6} \text{ (рад/с)}.$$

Определим скорость точки ***B*** колеса ***2***, расположенной на расстоянии r_2 от оси вращения:

$$V_B = \omega_2 r_2 = \frac{\pi}{2} \text{ (м/с)}.$$

Поскольку в точке ***B*** колесо ***2*** соприкасается со шкивом ***3***, то

$$\omega_3 = \frac{V_B}{R_3} = \frac{\pi}{10} \text{ (рад/с)}.$$

Тогда скорость зубчатой рейки, к которой прикреплена чашка домкрата

$$V_C = \omega_3 r_3 = \frac{\pi}{10} \text{ (м/с)}.$$

Чашка домкрата движется вверх со скоростью V_C (см. рис. 2.11).

2.5. Вопросы для самоконтроля

1. Сколько независимых параметров нужно задать для определения положения твердого тела: а) свободного; б) с неподвижной точкой; в) с двумя неподвижными точками?
2. Дайте определение поступательного движения твердого тела. Каковы свойства этого движения?
3. Дайте определение вращательного движения тела вокруг неподвижной оси. Как установить закон вращения?

4. Как найти скорость произвольной точки тела, вращающегося вокруг оси?

5. Каковы величина и направление скорости точки тела, вращающегося вокруг оси?

6. Как определить модуль и направление вектора осестремительного ускорения точки при вращении тела вокруг оси?

7. Как найти модуль и направление вектора вращательного ускорения точки при вращении тела вокруг оси?

8. Как направлены вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ тела, вращающегося вокруг оси?

9. Как определяется характер вращения тела вокруг оси, если задан закон его вращения $\varphi = \varphi(t)$?

3. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

3.1. Уравнения и кинематические характеристики плоского движения

Плоскопараллельным (плоским) движением твердого тела называется такое движение тела, при котором траектории всех его точек лежат в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости. Изучение плоского движения твердого тела можно свести к исследованию движения плоской фигуры, являющейся сечением тела плоскостью, параллельной неподвижной.

Плоское движение можно рассматривать как синтез двух простейших движений: поступательного вместе с произвольно выбранным полюсом A и вращательного вокруг этого полюса.

Выбрав неподвижную систему координат XOY и подвижную $X'AY'$, жестко связанную с плоской фигурой, получим кинематические уравнения плоскопараллельного движения твердого тела (рис. 3.1), полностью определяющие его положение в любой момент времени:

$$x_A = x_A(t);\ \ y_A = y_A(t);\ \ \varphi = \varphi(t). \quad (3.1)$$

Координаты произвольной точки M плоской фигуры могут быть найдены из соотношений

$$x_M = x_A + AM \cdot \cos\varphi,$$
$$y_M = y_A + AM \cdot \sin\varphi, \quad (3.2)$$

где φ – угол поворота вокруг выбранного полюса A.

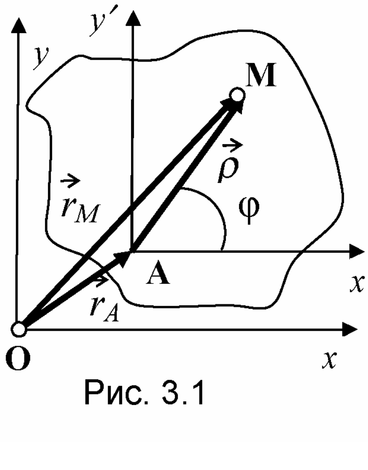


Рис. 3.1

В векторной форме положение

точки M можно определить как

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{\rho}\,, \qquad (3.3)$$

где $\vec{r}_M = \vec{OM}, \vec{r}_A = \vec{OA}, \vec{\rho} = \vec{AM}.$

Кинематическими характеристиками плоского движения **твердого тела** также являются угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ и угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$. Эти векторы направлены вдоль подвижной оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через выбранный полюс (рис. 3.2). Если известен закон изменения угла поворота вокруг полюса $\varphi = \varphi\ (t)$, то

$$\omega_Z = \dot{\varphi} \text{ и } \varepsilon_Z = \ddot{\varphi}. \qquad (3.4)$$

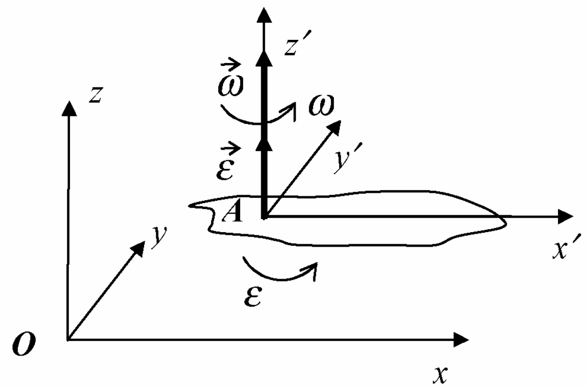


Рис. 3.2

Следует отметить, что характеристики поступательной части плоского движения зависят от выбора полюса, а вращательной – нет. Это означает, что $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ являются характеристиками **всего** вращающегося твердого тела.

3.1.1. Определение скоростей точек плоской фигуры

Скорости точек плоской фигуры могут быть определены аналитическими и графоаналитическими методами.

Аналитические методы основаны на использовании уравнений плоского движения (3.1). Продифференцировав по времени (3.2), получим проекции скорости точки на неподвижные оси:

$$\begin{aligned} V_x &= \dot{x}_M = \dot{x}_A - \omega_Z AM \sin\varphi; \\ V_y &= \dot{y}_M = \dot{y}_A + \omega_Z AM \cos\varphi. \end{aligned} \qquad (3.5)$$

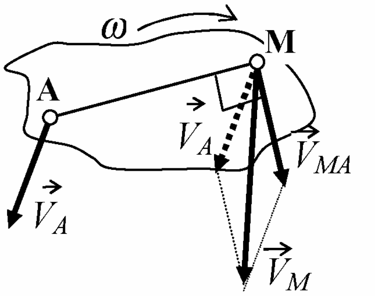
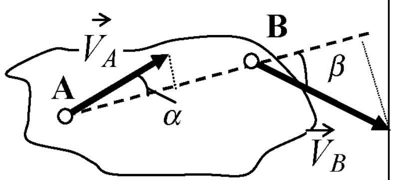
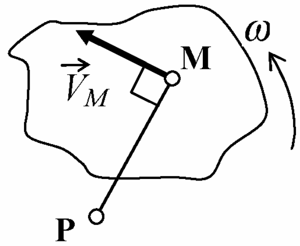
Тогда величину и направление скорости любой точки плоской фигуры определим по формулам

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}\,,$$

$$\cos(\vec{V},\hat{}\,x) = \frac{V_x}{V}, \quad \cos(\vec{V},\hat{}\,y) = \frac{V_y}{V}.$$

При применении графоаналитических методов используют уравнения плоского движения в векторной форме (3.3). Наиболее распространенные на практике способы определения скорости представлены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

1-й способ	2-й способ	3-й способ
По формуле распределения скоростей	По теореме о проекциях скоростей	С помощью мгновенного центра скоростей (МЦС)
$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}$, (3.6) где $\vec{V}_A$ – скорость полюса A; $\vec{V}_{MA}$ – скорость точки M во вращении ее вокруг полюса; $V_{MA} = \omega \cdot AM;$ $\vec{V}_{MA} \perp \vec{AM}$ 	$np_{AB}\vec{V}_A = np_{AB}\vec{V}_B$, (3.7) $\lvert\vec{V}_A\rvert \cos\alpha = \lvert\vec{V}_B\rvert \cos\beta$ 	$V_M = \omega \cdot PM$, (3.8) где P – МЦС 

МЦС – это точка в плоскости движения тела, скорость которой в данный момент времени равна нулю. МЦС находится в плоскости движущейся фигуры и существует только в том случае, когда мгновенная угловая скорость ω отлична от нуля. На рис. 3.3 показаны способы нахождения МЦС.

В каждый момент времени плоское движение можно рассматривать как вращательное вокруг МЦС. Тогда

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP} \text{ и } \omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}. \qquad (3.9)$$

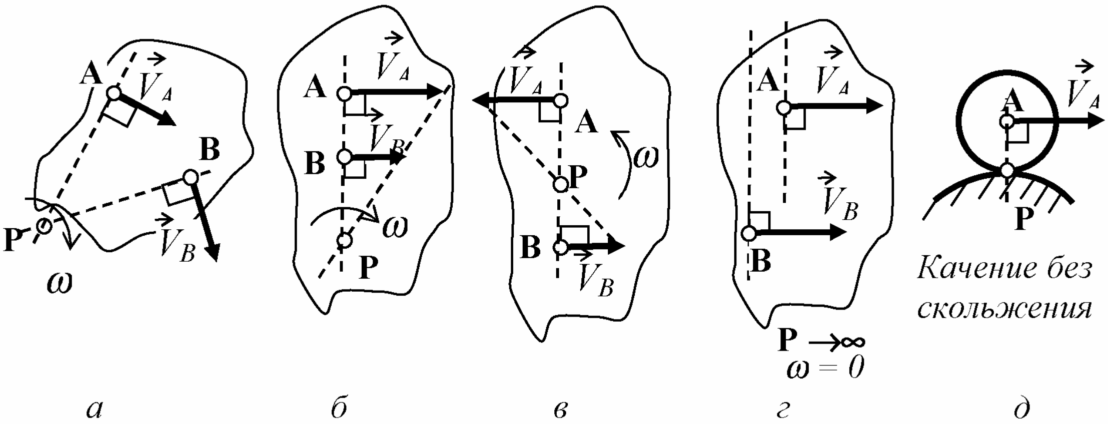


Рис. 3.3

На рис. 3.4 изображено распределение линейных скоростей шатуна AB в кривошипно-шатунном механизме (а) и колеса, катящегося без скольжения (б).

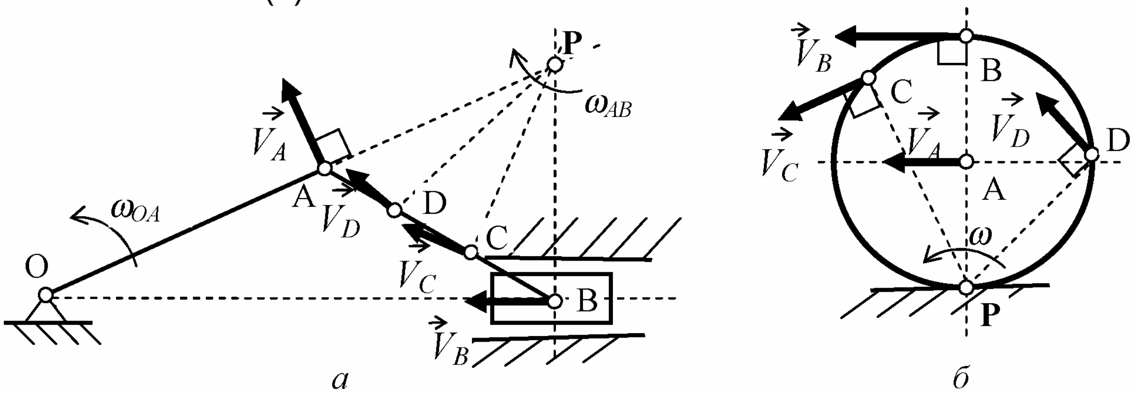


Рис. 3.4

3.1.2. Определение ускорений точек плоской фигуры

Ускорения точек плоской фигуры также могут быть определены аналитическими и графоаналитическими методами.

При аналитическом подходе, когда известен закон движения плоской фигуры (3.1), дифференцированием по времени (3.5) определяем проекции ускорения рассматриваемой точки плоской фигуры на неподвижные оси:

$$\begin{aligned} W_X &= \dot{V}_X = \ddot{x}_M = \ddot{x}_A - \varepsilon_Z AM \sin\varphi - \omega_z^2 AM \cos\varphi; \\ W_y &= \dot{V}_y = \ddot{y}_M = \ddot{y}_A + \varepsilon_Z AM \cos\varphi - \omega_z^2 AM \sin\varphi. \end{aligned} \qquad (3.10)$$

Модуль ускорения и направляющие косинусы находим с помощью формул

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2}, \ \cos(\vec{W}, \hat{} x) = \frac{W_x}{W}, \ \cos(\vec{W}, \hat{} y) = \frac{W_y}{W}.$$

При графоаналитическом подходе для определения ускорения точки плоской фигуры используют, как правило, два способа.

П е р в ы й способ основан на формуле распределения ускорений (рис. 3.5)

$$\vec{W}_M = \vec{W}_A + \vec{W}_{MA}^{oc} + \vec{W}_{MA}^{вр}. \qquad (3.11)$$

Здесь $\vec{W}_A$ – ускорение полюса A, $\vec{W}_{MA}^{oc}$ – осестремительное и $\vec{W}_{MA}^{вр}$ – вращательное ускорения точки M при вращении плоской фигуры вокруг выбранного полюса, причем $W_{MA}^{oc} = \omega^2 AM$ и направлено от точки M к полюсу A, а $W_{MA}^{вр} = \varepsilon\, AM$ и направлено перпендикулярно AM в соответствии со знаком ε_Z (см. рис. 3.5, где $\varepsilon_Z < 0$).

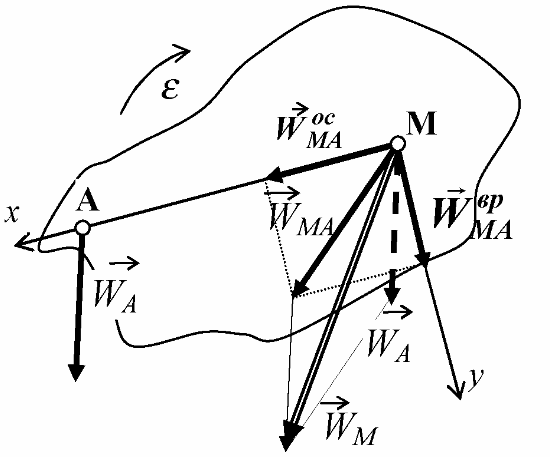


Рис. 3.5

При геометрическом сложении векторов сначала определяют

$$\vec{W}_{MA} = \vec{W}_{MA}^{oc} + \vec{W}_{MA}^{вр},$$

а затем

$$\vec{W}_M = \vec{W}_A + \vec{W}_{MA}.$$

На практике целесообразно выбрать ортогональные оси Mx и My так, чтобы одна из них проходила через исследуемую точку и полюс, а затем спроецировать равенство (3.11) на эти оси (см. рис. 3.5) и найти проекции

$$W_{M_X} = W_{A_X} + W_{MA}^{oc},$$
$$W_{M_y} = W_{A_Y} + W_{MA}^{вр}. \qquad (3.12)$$

Тогда

$$W_M = \sqrt{W_{Mx}^2 + W_{My}^2},$$

а направление $\vec{W}_M$ определяется по направляющим косинусам

$$cos(\vec{W}_M,\hat{\ } x) = \frac{W_{Mx}}{W_M}, \quad cos(\vec{W}_M,\hat{\ } y) = \frac{W_{My}}{W_M}.$$

При проецировании следует учесть, что сонаправленные векторы должны иметь одинаковый знак независимо от того, по какую сторону равенства они находятся.

Формулу распределения ускорений (3.11) целесообразно применять для заданного момента времени, когда известны положение плоской фигуры, мгновенная угловая скорость и направление ускорений точки ***M***.

В т о р о й способ основан на использовании понятия мгновенного центра ускорений (МЦУ). **МЦУ** – это точка, ускорение которой в данный момент времени равно нулю. Положение МЦУ (точка ***Q***) рассчитывается по формулам

$$tg\,\beta = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \qquad (3.13)$$

$$AQ = \frac{W_A}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}}. \qquad (3.14)$$

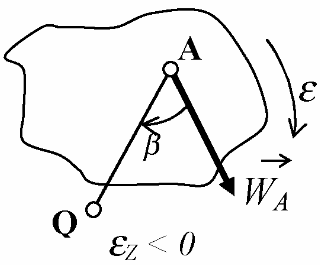


Рис. 3.6

На рис. 3.6 показано, как найти положение МЦУ, если в данный момент известны ускорение точки A, ω и ε_Z плоской фигуры. Угол β откладываем от вектора $\vec{W}_A$ в соответствии со знаком ε_Z (если $\varepsilon_Z < 0$ – по часовой стрелке, если $\varepsilon_Z > 0$ – против), проводим полупрямую, на которой на расстоянии AQ расположен МЦУ.

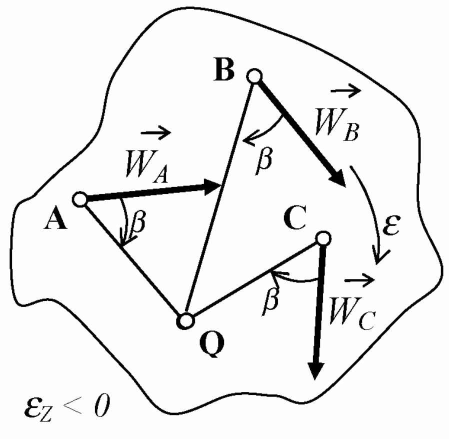
Из формулы (3.14) следует, что МЦУ не существует в том случае, когда мгновенная угловая скорость ω и мгновенное угловое ускорение ε **одновременно** равны нулю (точка $Q \to \infty$).

Приняв МЦУ за полюс, получим картину распределения ускорений точек плоской фигуры

$$\vec{W}_M = \vec{W}_{MQ}^{oc} + \vec{W}_{MQ}^{вр},$$

где $W_{MQ}^{oc} = \omega^2 MQ$, $W_{MQ}^{вр} = \varepsilon\, MQ$. Тогда величину ускорения определим по формуле

$$W_M = MQ\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \qquad (3.15)$$



Ускорение любой точки тела составляет с отрезком, соединяющим эту точку с МЦУ, один и том же угол β (рис. 3.7).

Из рис. 3.7 видно, что распределение ускорений таково, как будто в данный момент времени плоская фигура вращается вокруг оси, проходящей через МЦУ.

3.2. Решение задач

Задача 3.1

Задан закон движения плоской фигуры (рис. 3.8)

$$x_A = 2t^2\ (м),\ y_A = (2t+4)\ (м),\ \varphi = 0{,}5\pi t.$$

Определить скорость точки ***B*** в момент времени ***t = 1 с***, если ***AB = 2 м***.

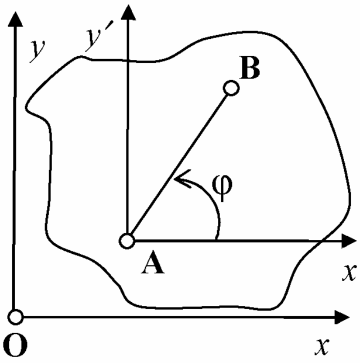


Рис. 3.8

Решение

Запишем уравнения движения точки ***B*** в соответствии с (3.2):

$$x_B = x_A + AB{\cdot}\cos\varphi = 2t^2 + 2\cos(0{,}5\pi t);$$

$$y_B = y_A + AB{\cdot}\sin\varphi = 2t+4+ 2\sin(0{,}5\pi t).$$

Определим проекции скорости точки ***B*** на оси ***OX*** и ***OY***:

$$V_{Bx} = \dot{x}_B = 4t - \pi\sin(0{,}5\pi t);$$

$$V_{By} = \dot{y}_B = 2 + \pi\cos(0{,}5\pi t).$$

При ***t = 1 с*** имеем

$$V_{Bx} = 0{,}86\ (м/с),\ V_{By} = 2\ (м/с).$$

Тогда

$$V = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2} = \sqrt{0{,}86^2 + 2^2} = 2{,}18\ (м/с).$$

Задача 3.2

Две параллельные рейки ***1*** и ***2*** движутся в одну сторону с постоянными скоростями $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ (рис. 3.9). Между рейками зажат диск радиусом ***R***, катящийся по рейкам без скольжения.

Определить угловую скорость диска $\boldsymbol{\omega}$, скорость точки ***C*** и положение МЦС, если ***V_1 = 6 м/с, V_2 = 2 м/с, R = 0,5 м.***

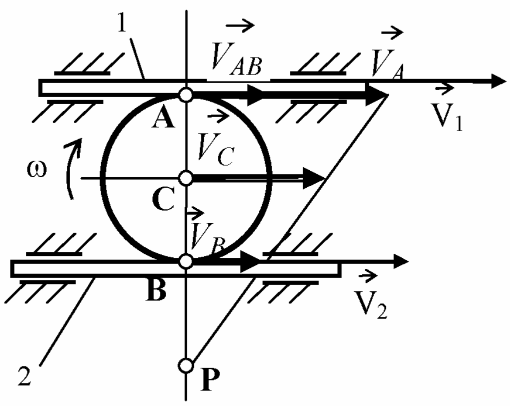


Рис. 3.9

Решение

Скорости точек **А** и **В** диска $V_A = V_1$ и $V_B = V_2$. Выберем точку **В** в качестве полюса и по формуле распределения скоростей получим

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{AB},$$

откуда с учетом параллельности $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ найдем

$$V_{AB} = V_A - V_B.$$

Поскольку

$$V_{AB} = \omega \cdot AB,$$

то

$$\omega = \frac{V_{AB}}{AB} = \frac{V_A - V_B}{AB} = \frac{6-2}{1} = 4 \ \text{(м/с)}.$$

Скорость точки **С** определим как

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB},$$

где

$$V_{CB} = \omega \cdot CB = 4 \cdot 0{,}5 = 2 \ \text{(м/с)}.$$

Тогда $V_C = 4$ ***м/с.***

Положение МЦС найдем из соотношения

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AB+BP}{BP}, \text{ или } \frac{V_1}{V_2} = \frac{2r}{BP} + 1,$$

откуда $BP = 0{,}5$ ***м.***

Заметьте, что в данном случае, когда диск катится по подвижному телу, его МЦС находится **не в точке контакта**, как при качении по неподвижной поверхности. В зависимости от величин и направлений скоростей точек контакта МЦС может оказаться как внутри отрезка между точками контакта, так и вне его.

Задача 3.3

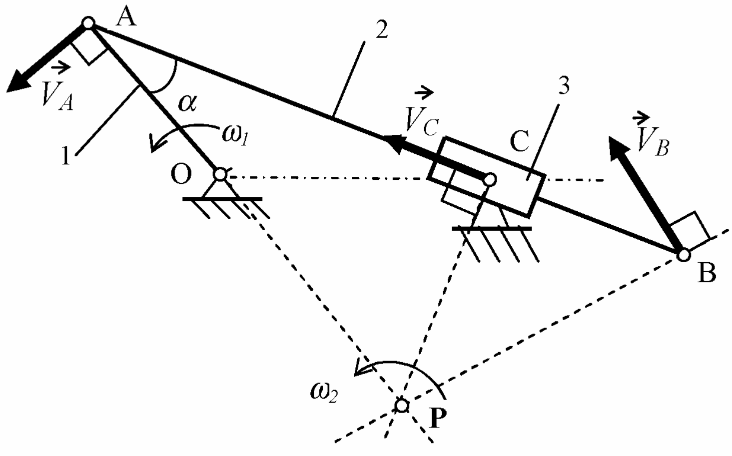


Рис. 3.10

Кривошип **1** длиной $OA = r$ вращается с угловой скоростью ω_1 и приводит в движение шарнирно связанный с ним стержень **2** длиной $AB = 3r$, который проходит через вращающийся относительно неподвижной оси **С** ползун **3** (рис. 3.10). Точки **О** и **С** лежат на горизонтальной прямой, при этом $OC = r$, α

$= 30°$.

Определить скорость точки ***B***.

Решение

Сначала определим скорость точки ***A***:

$$V_A = \omega_1 \cdot OA = \omega_1 \cdot r, \qquad V_A \perp OA.$$

Скорость точки ***C*** стержня ***AB*** направлена вдоль стержня. Тогда МЦС звена ***2*** находится на пересечении перпендикуляров к скоростям точек ***A*** и ***C***, то есть в точке ***P***. Расстояние

$$AP = \frac{AC}{\cos 30^\circ}.$$

Из равнобедренного треугольника OAC

$$AC = 2r \cdot \cos 30^\circ = r\sqrt{3} \ \ \text{(м)}, \text{ тогда } AP = 2r \text{ (м)}.$$

Угловая скорость звена ***2***

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP} = \frac{\omega_1 \cdot r}{2r} = \frac{\omega_1}{2} \ \text{(1/с)}.$$

Скорость точки ***B*** определим с помощью МЦС:

$$V_B = \omega_2 \cdot BP,$$

где

$$BP = \sqrt{AB^2 + AP^2 - 2AB \cdot AP \cos 30^\circ} = \sqrt{9r^2 + 4r^2 - 2 \cdot 3r \cdot 2r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 1{,}7r \text{ (м)}.$$

Тогда $V_B = \dfrac{\omega_1}{2} \cdot 1{,}7r = 0{,}85\,\omega_1 r$ **(м/с).**

Задача 3.4

Стержень ***AB*** длиной $10\sqrt{2}$ **м** (рис. 3.11) совершает плоское движение. В рассматриваемый момент времени известны величины и направления скоростей точек ***A*** и ***B*** ($\vec{V}_A = \vec{V}_B$), направление ускорения точки ***B***, а также величина и направление ускорения точки ***A*** ($W_A = 40$ **м/с^2**). Определить угловое ускорение стержня ***AB***.

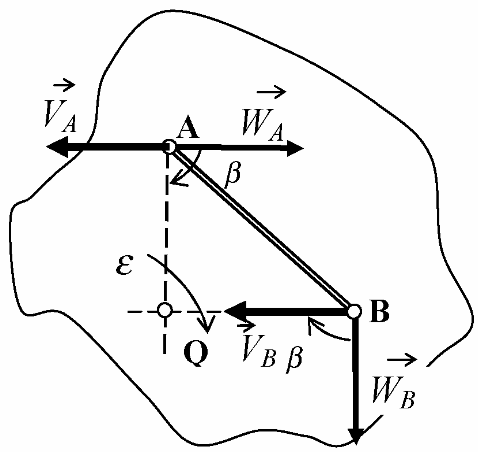


Рис. 3.11

Решение

МЦС стержня ***AB*** в данный момент времени не существует,

36

так как скорости точек ***A*** и ***B*** параллельны и равны по модулю, то есть ***AP***$\to\infty$, следовательно, $\omega = 0$. Найдем положение МЦУ, воспользовавшись формулами (3.13) и (3.14):

$$tg\,\beta = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \infty,$$

то есть

$$\beta = \frac{\pi}{2}.$$

Отложим этот угол от векторов $\vec{W}_A$ и $\vec{W}_B$ и проведем полупрямые. Точка их пересечения ***Q*** – МЦУ. Тогда

$$AQ = AB\sin 45^\circ = 10\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 10\ (м).$$

Определим угловое ускорение стержня ***AB***, воспользовавшись формулой (3.15):

$$W_A = AQ\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}\,.$$

Поскольку $\omega = 0$, то $W_A = AQ\cdot\varepsilon$, откуда

$$\varepsilon = W_A/(AQ) = 40/10 = 4\ (1/c^2).$$

Учитывая направления ускорений $\vec{W}_A$ и $\vec{W}_B$, найдем, что $\varepsilon_Z < 0$.

Задача 3.5

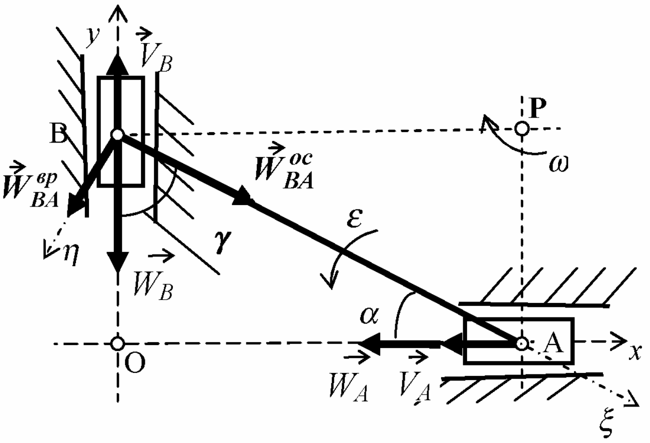


Рис. 3.12

Определить скорость и ускорение точки ***B*** эллипсографа (рис. 3.12), а также угловое ускорение звена ***AB*** и положение МЦУ в данный момент времени, если $V_{Ax} = -2$ м/с, $W_{Ax} = -4$ м/с^2, $AB = 0{,}8$ м.

Решение

Скорость точки ***B*** направлена вверх по оси ***OY***. Следовательно, МЦС находится на пересечении перпендикуляров к скоростям точек ***A*** и ***B***, то есть в точке ***P***. Угловая скорость стержня ***AB*** в данный момент времени

$$\omega = \frac{V_A}{AP},$$

где $AP = AB\cdot\sin\alpha = 0{,}8\cdot\sin 30^\circ = 0{,}4$ (м), тогда $\omega = 5$ (1/с) ($\omega_Z < 0$).

Скорость точки ***B*** определим по теореме о проекциях скоростей

$$\left|\vec{V}_A\right| cos\,\alpha = \left|\vec{V}_B\right| cos\,\gamma,$$

где

$$\gamma = 90 - \alpha = 90 - 30 = 60°.$$

Отсюда

$$V_B = \frac{V_A\,cos\,\alpha}{cos\,\gamma} = 2\frac{cos\,30°}{cos\,60°} = 2\sqrt{3} \text{ (м/с).}$$

Выбрав точку ***A*** в качестве полюса, применим формулу распределения ускорений (3.11) для точки ***B***:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^{oc} + \vec{W}_{BA}^{вр}. \qquad \text{(а)}$$

На рисунке покажем векторы $\vec{W}_B$, $\vec{W}_{BA}^{oc}$, $\vec{W}_{BA}^{вр}$. Проецируем векторное равенство (а) на оси ***Bξ*** и ***Bη*** (см. рис. 3.12):

$$\begin{aligned} W_B{\cdot}cos\gamma &= -W_A{\cdot}cos\alpha + W_{BA}^{oc}; \\ W_B{\cdot}sin\gamma &= -W_A{\cdot}sin\alpha + W_{BA}^{вр}, \end{aligned} \qquad \text{(б)}$$

где

$$W_{BA}^{oc} = \omega^2{\cdot}AB = 25{\cdot}0{,}8 = 20 \text{ (м/с}^2\text{).}$$

Решив систему уравнений (б), найдем

$$W_B = \frac{W_{BA}^{oc} - W_A\,cos\,\alpha}{cos\,\gamma} = \frac{20 - 4\cdot 0{,}85}{0{,}5} = 33{,}2 \text{ (м/с}^2\text{),}$$

$$W_{BA}^{вр} = W_B{\cdot}sin\gamma - W_A{\cdot}sin\alpha = 33{,}2{\cdot}0{,}85 - 4{\cdot}0{,}5 = 28{,}2 \text{ (м/с}^2\text{).}$$

Поскольку

$$W_{BA}^{вр} = \varepsilon{\cdot}AB,$$

то угловое ускорение звена ***AB***

$$\varepsilon = \frac{W_{BA}^{вр}}{AB} = \frac{28{,}2}{0{,}8} = 35{,}2 \text{ (1/с}^2\text{).}$$

По направлению вектора $\vec{W}_{BA}^{вр}$ найдем, что $\varepsilon_z > 0$.

Чтобы найти положение МЦУ, воспользуемся формулой (3.13):

$$tg\,\beta = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{35{,}2}{25} = 1{,}418,$$

то есть $\beta = arctg\ 1{,}418 = 54°48'$.

Откладываем угол $\beta = 54°48'$ от векторов $\vec{W}_B$ и $\vec{W}_A$ против часовой стрелки $(\varepsilon_z > 0)$ и проводим лучи. Точка их пересечения и будет мгновенным центром ускорений (точка **Q** на рис. 3.13). По формуле (3.14) можно определить расстояние от точек **A** и **B** до МЦУ.

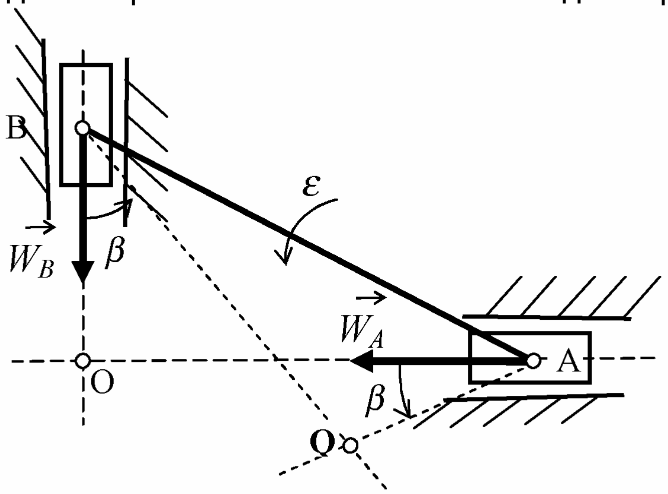


Рис. 3.13

Задача 3.6

Стержень **AB** движется в плоскости чертежа (рис. 3.14). В данный момент времени известны ускорения его концов $W_A = 12\sqrt{2}\,м/с^2$ и $W_B = 2\sqrt{3}\,м/с^2$, а также углы $\alpha = 45°$ и $\beta = 30°$.

Найти угловую скорость и угловое ускорение стержня, а также ускорение точки **C**, если **AB = 1 м** и **AC = BC**.

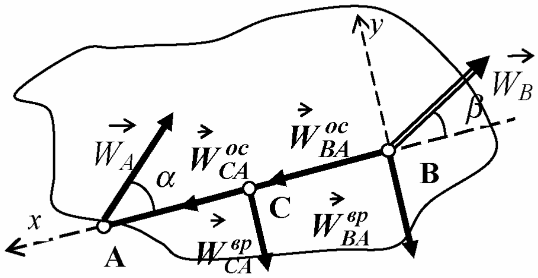


Рис. 3.14

Решение

Воспользуемся формулой распределения ускорений (3.11). Выбрав точку **A** в качестве полюса, имеем

$$\vec W_B = \vec W_A + \vec W_{BA}^{oc} + \vec W_{BA}^{вр}. \qquad (а)$$

Ускорения $\vec W_{BA}^{oc}$, $\vec W_{BA}^{вр}$ покажем на рисунке и спроецируем векторное равенство (а) на оси Bx и By:

$$\begin{aligned} -W_B\cos\beta &= -W_A\cos\alpha + W_{BA}^{oc}, \\ W_B\sin\beta &= W_A\sin\alpha - W_{BA}^{вр}. \end{aligned} \qquad (б)$$

Решив эту систему уравнений, найдем

$$W_{BA}^{вр} = W_A\sin\alpha - W_B\sin\beta = 12\sqrt{2}\sin 45° - 2\sqrt{3}\sin 30° = 10{,}3 \ \textbf{(м/с}^2\textbf{)},$$

$$W_{BA}^{oc} = W_A\cos\alpha - W_B\cos\beta = 12\sqrt{2}\cos 45° - 2\sqrt{3}\cos 30° = 9 \ \textbf{(м/с}^2\textbf{)}.$$

Поскольку $W_{BA}^{oc} = \omega^2 \cdot AB$ и $W_{BA}^{вр} = \varepsilon \cdot AB$, то

$$\omega^2 = \frac{W_{BA}^{oc}}{AB} = 9 \text{ (м/с}^2\text{)} \text{ и } \varepsilon = \frac{W_{BA}^{вр}}{AB} = 10{,}3 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Учитывая направление вектора $\vec{W}_{BA}^{вр}$ (вниз по оси By), находим, что $\varepsilon_Z < 0$.

Для того, чтобы найти ускорение точки ***C*** (точка ***A*** – полюс), воспользуемся формулой распределения ускорений (3.11):

$$\vec{W}_C = \vec{W}_A + \vec{W}_{CA}^{oc} + \vec{W}_{CA}^{вр}. \qquad \text{(в)}$$

В отличие от точки ***B*** ускорение точки ***C*** не известно ни по величине, ни по направлению. Поэтому векторное равенство (в) целесообразно спроецировать на те же оси Bx, By и найти проекции W_{Cx} и W_{Cy}. Составляющие $\vec{W}_{CA}^{вр}$ и $\vec{W}_{CA}^{oc}$ известны (см. рис. 3.14):

$$W_{CA}{}^{oc} = \omega^2 AC = 9 \cdot 0{,}5 = 4{,}5 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$W_{CA}{}^{вр} = \varepsilon AC = 10{,}3 \cdot 0{,}5 = 5{,}15 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Тогда

$$W_{Cx} = -W_A \cdot \cos\alpha + W_{CA}{}^{oc} = -12\sqrt{2}\cos 45° + 4{,}5 = -7{,}5 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

$$W_{Cy} = W_A \cdot \sin\alpha - W_{CA}{}^{вр} = 12\sqrt{2}\sin 45° - 5{,}15 = 6{,}85 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Найдем величину и направление ускорения точки С:

$$W_C = \sqrt{W_{Cx}^2 + W_{Cy}^2} = \sqrt{(-7{,}5)^2 + 6{,}85^2} = 10{,}15 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$\cos(W_C{}^\wedge_, x) = \frac{W_{Cx}}{W_C} = \frac{-7{,}5}{10{,}15} = -0{,}74;$$

$$\cos(W_C{}^\wedge_, y) = \frac{W_{Cy}}{W_C} = \frac{6{,}85}{10{,}15} = 0{,}67.$$

Задача 3.7

Кривошип ***1*** длиной ***ОА = 6 м*** колеблется в вертикальной плоскости и приводит в движение колесо ***2*** радиусом ***r = 2 м***, которое катится без скольжения по цилиндрической лунке (рис. 3.15).

Определить ускорение точек ***М*** и ***Р*** колеса, если в данный момент времени $\omega_1 = 2$ ***рад/с и*** $\varepsilon_1 = 1$ ***рад/с***^{2}.

Решение

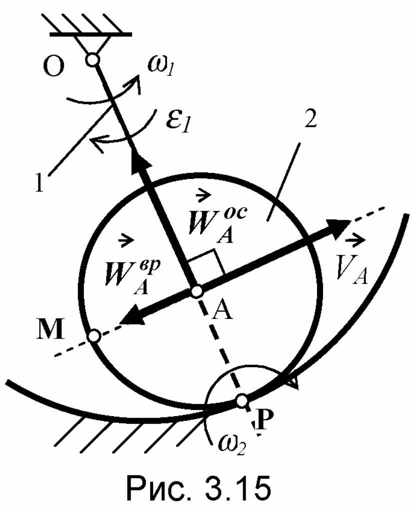


Рис. 3.15

40

Определим скорость точки ***A***:

$$V_A = \omega_1 \cdot OA = 2\cdot 6 = 12 \text{ (м/с)}.$$

Так как МЦС колеса **2** находится в точке ***P***, то угловая скорость колеса **2**

$$\omega_{2z} = -\frac{V_A}{AP} = -\frac{12}{2} = -6 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

Определим ускорение точки ***A***:

$$\vec{W}_A = \vec{W}_{AO}^{oc} + \vec{W}_{AO}^{вр},$$

где $W_A^{oc} = \omega_1^2 OA = 4\cdot 6 = 24 \text{ (м/с}^2\text{)}$, вектор $\vec{W}_A^{oc}$ направлен к оси О;

$$W_A^{вр} = \varepsilon_1 OA = 1\cdot 6 = 6 \text{ (м/с}^2\text{)},\ \vec{W}_A^{вр} \perp OA.$$

Тогда

$$W_A = \sqrt{(W_A^{oc})^2 + (W_A^{вр})^2} = \sqrt{24^2 + 6^2} = 24{,}74 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Рассмотрим колесо **2** (рис. 3.16).

Поскольку при движении колеса по цилиндрической лунке расстояние от точки ***A*** до МЦС не изменяется, то для определения ε колеса воспользуемся приёмом формального дифференцирования:

$$\varepsilon_{2z} = \frac{d\omega_{2z}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{V_A}{AP}\right) = -\frac{1}{AP}\frac{dV_A}{dt} = -\frac{1}{AP}\left(W_A^{вр}\right) = \frac{W_A^{вр}}{AP} = \frac{6}{2} = 3 \text{ (1/с}^2\text{)}.$$

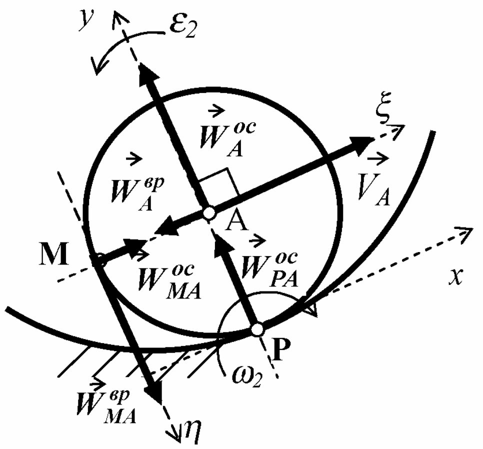


Рис. 3.16

При определении ε_{2z} учитываем, что точка ***A*** движется замедленно: векторы $\vec{V}_A$ и $\vec{W}_A^{вр}$ направлены в разные стороны.

Для определения ускорения точки ***P*** (МЦС), воспользуемся формулой распределения ускорений, выбрав за полюс точку ***A***:

$$\vec{W}_P = \vec{W}_A^{oc} + \vec{W}_A^{вр} + \vec{W}_{PA}^{oc} + \vec{W}_{PA}^{вр}, \qquad \text{(a)}$$

где

$$W_{PA}^{oc} = \omega_2^2 \cdot AP = 6^2\cdot 2 = 72 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

$$W_{PA}^{вр} = \varepsilon_2 \cdot AP = 3\cdot 2 = 6 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Спроецировав (а) на оси Px и Py, получим

$$W_{Px} = -W_A^{вр} + W_{PA}^{вр} = -6 + 6 = 0,$$

$$W_{Py} = W_A^{oc} + W_{PA}^{oc} = 24 + 72 = 96 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Таким образом, ускорение точки ***P*** (МЦС) направлено к центру колеса и равно ***96 м/с***^{2}.

Для определения ускорения точки ***M*** выберем в качестве полюса точку ***A*** и по формуле распределения ускорений получим

$$\vec{W}_M = \vec{W}_A^{oc} + \vec{W}_A^{вр} + \vec{W}_{MA}^{oc} + \vec{W}_{MA}^{вр}, \qquad (б)$$

где

$$W_{MA}{}^{oc} = \omega_2{}^2 \cdot AM = 72 \text{ (м/с}^2), \quad W_{MA}{}^{вр} = \varepsilon_2 \cdot AM = 6 \text{ (м/с}^2).$$

Проецируем (б) на оси $M\xi$ и $M\eta$:

$$W_{Mx\xi} = -W_A{}^{вр} + W_{MA}{}^{oc} = -6 + 72 = 66 \text{ (м/с}^2);$$

$$W_{M\eta} = -W_A{}^{oc} + W_{MA}{}^{вр} = -24 + 6 = 18 \text{ (м/с}^2).$$

Окончательно имеем

$$W_M = \sqrt{W_{M\xi}^2 + W_{M\eta}^2} = \sqrt{18^2 + 66^2} = 68{,}4 \text{ (м/с}^2).$$

Задача 3.8

Кривошип ***OA***, вращаясь по закону $\varphi = \pi/3 \cdot t^3$, приводит в движение колесо ***1*** радиусом $r_1 = 0{,}5$ **м**, которое катится без скольжения по колесу ***2*** радиусом $r_2 = 1$ **м** (рис. 3.17). В момент времени $t = 1$ **с** найти ускорение точки, совпадающей с МЦС колеса ***1***, и положение МЦУ.

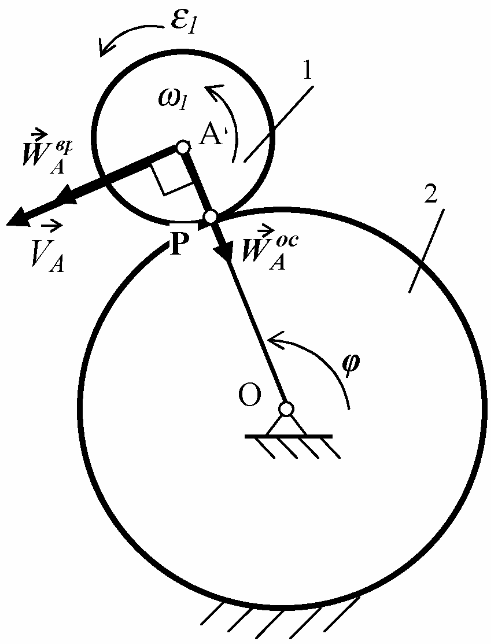


Рис. 3.17

Решение

МЦС колеса ***1***, катящегося без проскальзывания по неподвижному колесу ***2***, находится в точке касания этих колес (точка ***P***).

Определим сначала скорость точки **A**. Угловая скорость кривошипа ***OA*** в момент времени ***t = 1 с***

$$\omega_{OAz} = \dot{\varphi} = \left(\frac{\pi}{3} t^3\right)' = \pi t^2 = \pi \text{ (рад/с)},$$

угловое ускорение

$$\varepsilon_{OAz} = \ddot{\varphi} = (\pi t^2)' = 2\pi t = 2\pi \text{ (рад/с}^2)$$

и скорость

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 1{,}5\pi \text{ (м/с)},$$

так как $OA = r_1 + r_2 = 1{,}5$ **(м)**.

Определим ускорение точки ***A***:

$$\vec{W}_A = \vec{W}_A^{oc} + \vec{W}_A^{вр},$$

где $W_A^{oc} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 1{,}5\pi^2$ **(м/с²)**, вектор $\vec{W}_A^{oc}$ направлен к оси О,

$W_A^{вр} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 3\pi$ **(м/с²)**, $\vec{W}_A^{вр} \perp OA$.

Отметим, что $\omega_{OAz}>0$ и $\varepsilon_{OAz}>0$.

МЦС колеса ***1*** находится в точке ***P***, поэтому его угловая скорость

$$\omega_{1z} = -\frac{V_A}{AP} = \frac{1{,}5\pi}{0{,}5} = 3\pi \text{ (1/с)}.$$

Так как при движении колеса расстояние от точки ***A*** до МЦС не изменяется, то для определения ***ε*** колеса ***1*** воспользуемся приёмом формального дифференцирования:

$$\varepsilon_{1z} = \frac{d\omega_{1z}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{V_A}{AP}\right) = \frac{1}{AP}\frac{dV_A}{dt} = \frac{1}{AP}\left(W_A^{вр}\right) = \frac{W_A^{вр}}{AP} = \frac{3\pi}{0{,}5} = 6\pi \text{ (1/с}^2\text{)}.$$

Для определения ускорения точки ***P*** (МЦС), воспользуемся формулой распределения ускорений, выбрав в качестве полюса точку ***A***:

$$\vec{W}_P = \vec{W}_A^{oc} + \vec{W}_A^{вр} + \vec{W}_{PA}^{oc} + \vec{W}_{PA}^{вр}, \qquad \text{(a)}$$

где $W_{PA}^{oc} = \omega_1^2 \cdot AP = (3\pi)^2 \cdot 0{,}5 = 4{,}5\pi^2$ **(м/с²)**, $W_{PA}^{вр} = \varepsilon_1 \cdot AP = 6\pi \cdot 0{,}5 = 3\pi$ **(м/с²)**.

Спроецировав (а) на оси Px и Py, получим (рис. 3.18)

$$W_{Px} = W_A^{вр} - W_{PA}^{вр} = 3\pi - 3\pi = 0,$$

$$W_{Py} = -W_A^{oc} + W_{PA}^{oc} = 4{,}5\pi^2 - 1{,}5\pi^2 = 3\pi^2 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

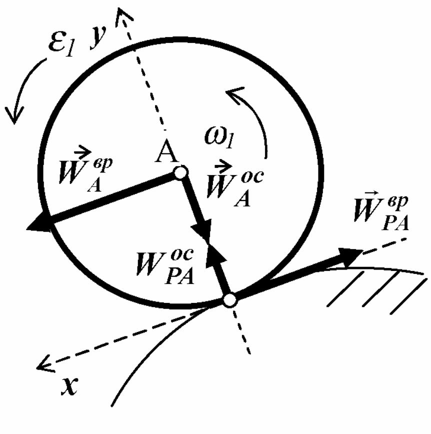


Рис. 3.18

следовательно, ускорение точки ***P*** (МЦС) направлено к центру колеса ***1.***

Найдем положение МЦУ:

$$tg\beta = \frac{\varepsilon_1}{\omega_1^2} = \frac{3\pi}{6\pi} = 0{,}5,$$

то есть $\beta = arctg\ 0{,}5 = 26{,}5^o$. Отложим от вектора $\vec{W}_P$ угол $\beta = 26{,}5^o$ против часовой стрелки $(\varepsilon_z>0)$ и из точки ***P*** проведем луч. На расстоянии

$$PQ = \frac{W_P}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \omega_1^4}} = \frac{3\pi^2}{\sqrt{36\pi^2 + 81\pi^4}} = 0{,}33 \text{ (м)}$$

находится мгновенный центр ускорений.

Задача 3.9

Кривошип **ОА** вращается вокруг центра **О** с постоянной угловой скоростью ω_{OA} **= 2 (рад/с)** и приводит в движение колесо **1** радиусом r_1 **= 0,2 м**, которое катится по колесу **2** радиусом r_2 **= 0,4 м** (рис. 3.19). Колесо **2** вращается относительно точки **О** с постоянной угловой скоростью $\omega_2 = 0{,}5\ (c^{-1})$.

Определить скорость и ускорение точки **В** колеса **1.**

Решение

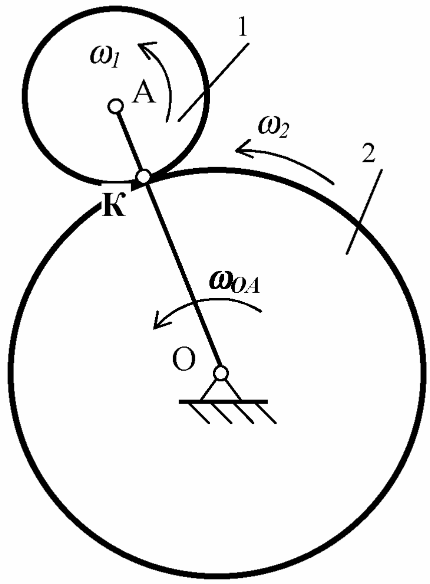


Рис. 3.19

Обратите внимание на то, что в данной задаче точка **К** – точка контакта колес **1** и **2** – не является МЦС для колеса **1**.

Определим скорости точек **А и К**:

$$V_A = \omega_{OA}\cdot OA = \omega_{OA}\cdot(r_1+r_2) = 2\cdot 0{,}6 = 1{,}2\ \text{(м/с)};$$

$$V_K = \omega_2\cdot r_2 = 0{,}5\cdot 0{,}4 = 0{,}2\ \text{(м/с)}.$$

Направления векторов $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_K$ показаны на рис. 3.20. Следовательно, МЦС колеса **1** находится в точке **Р** и для определения угловой скорости колеса **1** можно воспользоваться формулой, полученной в задаче 3.2:

$$\omega_1 = \frac{V_{AK}}{AK} = \frac{V_A - V_K}{r_1} = \frac{1{,}2 - 0{,}2}{0{,}2} = 5\ \ \text{(1/с)}.$$

Поскольку скорость точки плоской фигуры пропорциональна расстоянию до МЦС, можно записать:

$$\frac{V_A}{V_K} = \frac{r_1 + PK}{PK}.$$

Скорость точки **В** определим по формуле $V_B = \omega_1 BP$, подставив в нее ω_1 и $BP = 2r_1 + PK$. Тогда получим

$$V_B = 2V_A - V_K = 2\cdot 1{,}2 - 0{,}2 = 2{,}2\ \text{(м/с)}.$$

Для нахождения ускорения точки **В** воспользуемся формулой распределения ускорений, выбрав в качестве полюса точку **А**:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^{oc} + \vec{W}_{BA}^{вр}. \qquad \text{а)}$$

Определим ускорение точки **А**:

$$\vec{W}_A = \vec{W}_A^{oc} + \vec{W}_A^{вр},$$

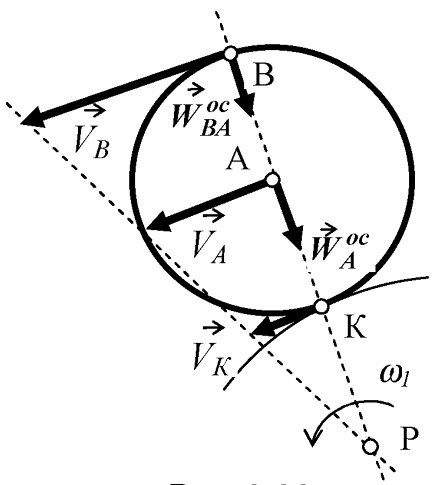


Рис. 3.20

где $W_A^{ос} = \omega_{OA}^2 OA = 2{,}4$ **(м/с²)**, вектор $\vec{W}_A^{ос}$ направлен к оси O; $W_A^{вр} = \varepsilon_{OA} OA = 0$, поскольку $\omega_{OA} = const$ и $\varepsilon_{OA} = 0$.

Тогда $\vec{W}_A = \vec{W}_A^{ос}$. Модули составляющих $\vec{W}_A^{вр}$ и $\vec{W}_{BA}^{ос}$ в выражении (а) вычислим по формулам

$$W_{BA}^{ос} = \omega_1^2 AB = 5^2 \cdot 0{,}2 = 5 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$W_{BA}^{вр} = \varepsilon_1 AB = 0, \text{ поскольку } \omega_1 = const \text{ и } \varepsilon_1 = 0.$$

Вектор $\vec{W}_A^{ос}$ направлен к полюсу A (см. рис. 3.20) и сонаправлен с $\vec{W}_{BA}^{ос}$, поэтому модуль ускорения точки B равен сумме модулей этих векторов:

$$W_B = W_A^{ос} + W_{BA}^{ос} = 2{,}4 + 5 = 7{,}4 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Задача 3.10

В шарнирном четырехзвеннике ***OA = 0,4 м, AB = BO₁ = 0,2 м*** (рис. 3.21). Угловая скорость стержня ***1*** $\omega_{1z} = -2$ ***рад/с***. Для заданного положения четырехзвенника (стержень ***OA*** вертикален) определить угловые скорости и угловые ускорения звеньев ***2*** и ***3***.

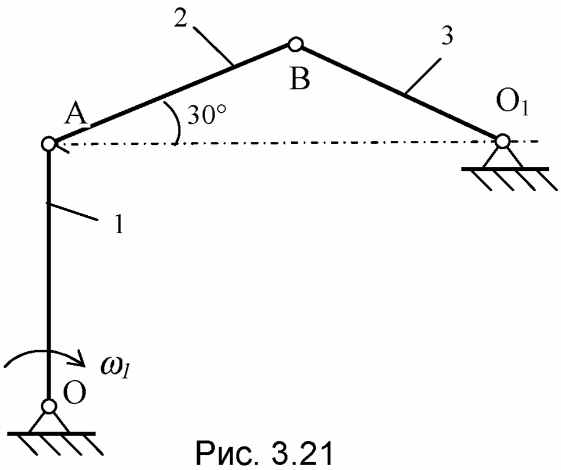


Рис. 3.21

Решение

Отметим, что стержни ***1*** и ***3*** совершают вращательное движение, а стержень ***2*** – плоское.

Определим скорость точки ***A*** $(\vec{V}_A \perp OA)$ (рис. 3.22):

$$V_A = \omega_1 OA = 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8 \text{ (м/с)}.$$

Скорость точки **B** найдем по теореме о проекциях скоростей (учтем, что $\vec{V}_B \perp O_1B$):

$$np_{AB}\vec{V}_A = np_{AB}\vec{V}_B, \quad V_A cos30° = V_B cos\beta,$$

где $\beta = 30°$. Следовательно, $V_A = V_B = 0{,}8$ **(м/с).**

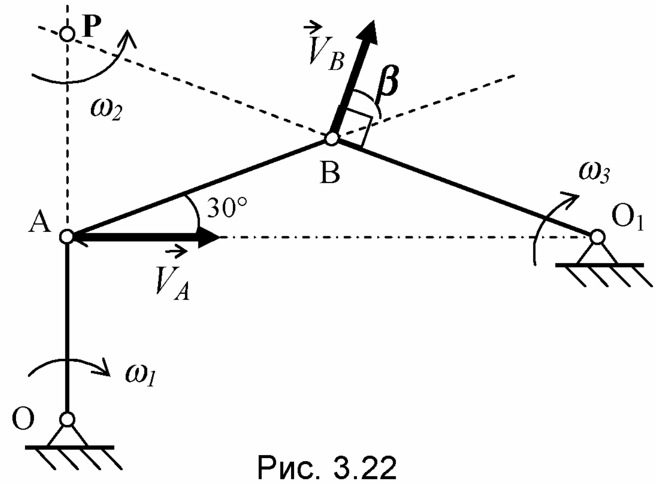


Рис. 3.22

Определим угловые скорости звеньев **2** и **3**. Поскольку звено **2** совершает плоское движение, его угловая скорость $\omega_2 = V_B/BP$, где точка **P** – МЦС, который находится на пересечении перпендикуляров к векторам скоростей точек **A** и **B** (см. рис. 3.22). Треугольник **APB** – равносторонний, следовательно, **BP = AB = 0,2 м.** Тогда

$$\omega_2 = 0{,}8/0{,}2 = 4 \text{ (рад/с) и } \omega_{2z} > 0.$$

Угловая скорость звена **3**, которое вращается вокруг оси O_1,

$$\omega_3 = \frac{V_B}{BO_1} = \frac{0{,}8}{0{,}2} = 4 \text{ (рад/с)}, \ \omega_{3z} < 0.$$

Найдем ускорение точки **A**:

$$\vec{W}_A = \vec{W}_A^{oc} + \vec{W}_A^{вр},$$

где $W_A^{oc} = \omega_1^2 OA = 1{,}6$ **(м/с²)**, $W_A^{вр} = \varepsilon_1 OA = 0,$ поскольку $\omega_1 = const$ и $\varepsilon_1 = 0.$ Тогда $\vec{W}_A = \vec{W}_A^{oc}$ и вектор $\vec{W}_A^{oc}$ направлен к оси **O** (рис. 3.23).

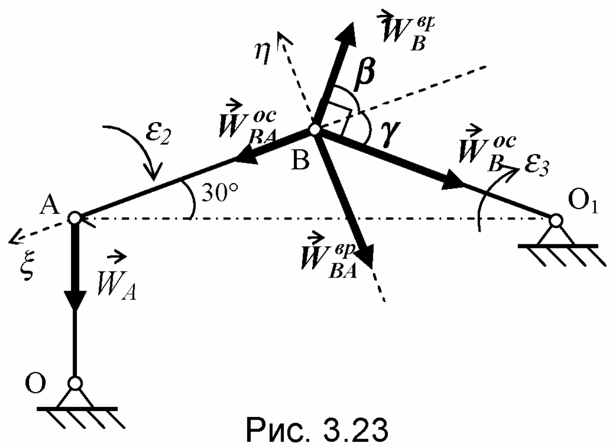


Рис. 3.23

Для определения ускорения точки ***B*** применим формулу распределения ускорений, выбрав в качестве полюса точку ***A*** звена ***2***:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^{oc} + \vec{W}_{BA}^{вр}. \qquad (а)$$

Учтем также, что точка ***B*** совершает вращательное движение вокруг ***O₁*** вместе со звеном ***3***, поэтому можно записать

$$\vec{W}_B = \vec{W}_{BO_1}^{oc} + \vec{W}_{BO_1}^{вр}. \qquad (б)$$

Приравняв выражения (а) и (б), получим

$$\vec{W}_{BO_1}^{oc} + \vec{W}_{BO_1}^{вр} = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^{oc} + \vec{W}_{BA}^{вр}. \qquad (в)$$

В выражении (в) известны величины и направления векторов $\vec{W}_A$, $\vec{W}_B^{oc}$ и $\vec{W}_{BA}^{oc}$:

$W_B^{oc} = \omega_3^2\, BO_1 = 4^2 \cdot 0{,}2 = 3{,}2$ **(м/с²)**, $\vec{W}_B^{oc}$ направлен к оси O_1;

$W_{BA}^{oc} = \omega_2^2 AB = 4^2 \cdot 0{,}2 = 3{,}2$ **(м/с²)**, $\vec{W}_{BA}^{oc}$ направлен к полюсу ***A***,

а также направления $\vec{W}_B^{вр}$ и $\vec{W}_{BA}^{вр}$ ($\vec{W}_B^{вр} \perp \vec{W}_B^{oc}, \vec{W}_{BA}^{вр} \perp \vec{W}_{BA}^{oc}$).

Спроецируем векторное равенство (а) на оси $B\eta$ и $B\xi$ (очевидно, что углы $\beta = 30°$, $\gamma = 60°$) (см. рис. 3.23):

$$\begin{cases} -W_B^{oc}\cos\gamma - W_B^{вр}\cos\beta = W_A\cos 60° + W_{BA}^{oc}; \\ -W_B^{oc}\sin\gamma + W_B^{вр}\sin\beta = -W_A\sin 60° - W_{BA}^{вр}. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, найдем неизвестные величины $W_B^{вр}$ и $W_{BA}^{вр}$:

$$W_B^{вр} = \frac{-W_B^{oc}\cos 60° - W_A\cos 60° - W_{BA}^{oc}}{\cos\beta};$$

$$W_{BA}^{вр} = -W_A\sin 60° + W_B^{oc}\sin 60° - W_B^{вр}\sin 30°.$$

После подстановки известных значений получим

$W_B^{вр} = -6{,}41$ **(м/с²)** и $W_{BA}^{вр} = 4{,}6$ **(м/с²)**.

Знак "–" перед $W_B^{вр}$ указывает на то, что вектор направлен в сторону, противоположную выбранной (см. рис. 3.23).

С учетом того, что $W_B{}^{вр} = \varepsilon_3\, BO_1$ и $W_{BA}{}^{вр} = \varepsilon_2\, AB$, найдем

$$\varepsilon_3 = \frac{\left|W_B^{вр}\right|}{BO_1} = \frac{6{,}41}{0{,}2} = 32 \ \ (рад/с^2),\ \varepsilon_{3z} > 0,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\left|W_{BA}^{вр}\right|}{AB} = \frac{4{,}6}{0{,}2} = 22{,}9\,(рад/с^2),\ \varepsilon_{2z} < 0.$$

3.3. Вопросы для самоконтроля

1. Какое движение твердого тела называется плоскопараллельным? Запишите уравнения этого движения.
2. Как определить угловую скорость и угловое ускорение тела при его плоском движении?
3. Как зависят угловая скорость и угловое ускорение плоской фигуры от выбора полюса?
4. Напишите формулу распределения скоростей точек при плоском движении твердого тела. Покажите все векторы на рисунке.
5. Сформулируйте теорему о проекциях скоростей точек плоской фигуры. Дайте графическую (геометрическую) иллюстрацию.
6. Дайте определение МЦС плоской фигуры. Каковы условия его существования?
7. Какова картина распределения скоростей точек плоской фигуры, если полюс совпадает с МЦС?
8. Назовите способы нахождения МЦС.
9. Для плоской фигуры в рассматриваемый момент времени $\vec{V}_A = \vec{V}_B = \vec{V}_C = ...$ Где находится МЦС? Чему равна угловая скорость?
10. Где находится МЦС подвижной кривой при ее качении без скольжения по неподвижной кривой?
11. Напишите формулу распределения ускорений точек плоской фигуры.
12. Точки ***A, B*** принадлежат плоской фигуре. В данный момент времени $\varepsilon_z < 0, \omega_z < 0$. Покажите на рисунке ускорения $\vec{W}_{AB}^{ос}, \vec{W}_{AB}^{вр}$.
13. Точки ***A, B*** принадлежат плоской фигуре. В данный момент времени $\varepsilon_z > 0, \omega_z < 0$. Как направлены векторы $\vec{W}_{BA}^{ос}$ и $\vec{W}_{BA}^{вр}$?
14. Точки ***A, B*** принадлежат движущейся плоской фигуре. Чему равны $tg\alpha_A$ и $tg\alpha_B$, если $\alpha_A = \vec{W}_{BA}^{ос}\,{}^\wedge\,\vec{W}_{BA}$, $\alpha_B = \vec{W}_{AB}^{ос}\,{}^\wedge\,\vec{W}_{BA}$?

15. Что такое мгновенный центр ускорений точек плоской фигуры? Каковы условия его существования?

4. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

4.1. Основные сведения из теоретического курса

Если точка движется относительно подвижной системы отсчета, то говорят, что точка совершает **сложное движение**. При его исследовании необходимо, прежде всего, выбрать основную (неподвижную) и вспомогательную (подвижную) системы отсчета. **Абсолютным** движением точки называют ее движение относительно неподвижной (основной) системы координат, а **относительным** – ее перемещение относительно подвижной (вспомогательной).

Движение подвижной системы отсчета по отношению к неподвижной называют **переносным**.

Переносное движение точки – это движение той точки подвижной системы координат, с которой в данный момент времени совпадает исследуемая точка, имеющая относительное движение.

Приведем пример. Пусть мимо стоящего на перроне наблюдателя проходит пассажирский поезд, в вагоне которого пассажир движется по коридору. В этом случае перемещение пассажира по коридору представляет собой относительное движение, перемещение пассажира вместе с вагоном мимо наблюдателя – переносное, а движение перемещающегося пассажира относительно земли – абсолютное.

Примем следующие обозначения: $\vec{V}_a, \vec{W}_a$ – соответственно абсолютные скорость и ускорение; $\vec{V}_r, \vec{W}_r$ – относительные скорость и ускорение; $\vec{V}_e$, $\vec{W}_e$– переносные скорость и ускорение.

Основной задачей при рассмотрении сложного движения точки является установление зависимостей между кинематическими характеристиками абсолютного, относительного и переносного движений. Решение этой задачи осуществляется на основании двух теорем:

– о сложении скоростей

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r;$$

– о сложении ускорений (теорема Кориолиса)

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e + \vec{W}_{cor}.$$

Последнее слагаемое в этом выражении $\vec{W}_{cor}$ называют ускорением Кориолиса, или поворотным ускорением.

Отметим, что кориолисово ускорение характеризует изменение относительной скорости за счет переносного движения и изменение переносной скорости за счет относительного движения. Оно равно удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}_e$ на относительную скорость $\vec{V}_r$:

$$\vec{W}_{cor} = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r .$$

Модуль ускорения Кориолиса определяется по формуле

$$W_{cor} = 2\omega_e \cdot V_r \cdot \sin\varphi ,$$

где φ – угол между векторами $\vec{\omega}_e$ и $\vec{V}_r$.

Из последнего выражения видно, что кориолисово ускорение обращается в ноль в случаях, когда:

1) $\omega_e = 0$, то есть переносное движение поступательное;

2) $V_r = 0$, то есть точка не перемещается относительно подвижной системы отсчета;

3) $\sin\varphi = 0$, то есть $\vec{\omega}_e \parallel \vec{V}_r$.

Для определения направления вектора ускорения Кориолиса часто применяют правило Н.Е. Жуковского, согласно которому вектор $\vec{V}_r$ надо спроецировать на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения, и повернуть эту проекцию в сторону вращения на 90°.

4.2. Решение задач

Задача 4.1

Автомобиль движется по экватору с запада на восток (рис. 4.1). Куда направлено его ускорение Кориолиса?

Решение

В сравнении с Землей автомобиль можно считать точкой. Его перемещение по шоссе – относительное движение, а вращение вместе с Землей – переносное. Вектор угловой скорости Земли направлен вдоль ее оси от Южного полюса к Северному. Направление вектора относительной скорости показано на рис. 4.1.

Чтобы получить направление кориолисова ускорения, следует вектор относительной скорости повернуть на прямой угол в направлении переносного вращения. Следовательно,

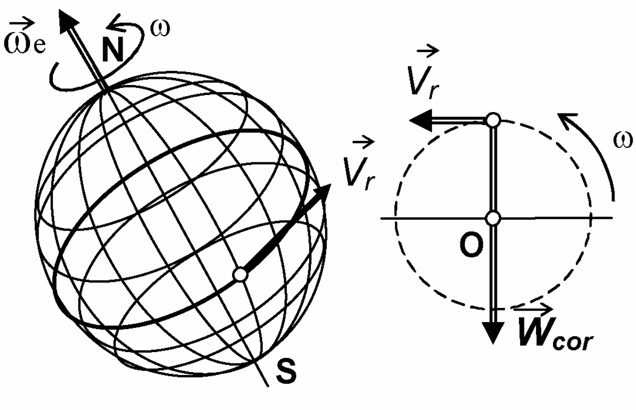


Рис. 4.1

ускорение Кориолиса будет направлено к центру Земли.

Задача 4.2

На платформе, движущейся прямолинейно с постоянной скоростью, расположен равномерно вращающийся барабан радиусом ***R*** с горизонтальной осью. Куда направлено абсолютное ускорение точки ***M*** на ободе барабана (рис. 4.2)?

Решение

Основную систему отсчета (xOy) свяжем с неподвижной плоскостью, а вспомогательную ($x'O_1y'$) – с движущейся платформой. Отметим, что в данном случае переносное движение – прямолинейное поступательное, а относительное – вращательное.

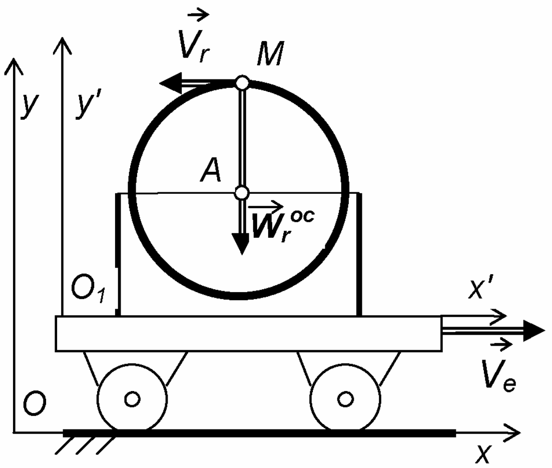


Рис. 4.2

Абсолютное ускорение точки ***M*** определим по теореме Кориолиса

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e + \vec{W}_{cor}.$$

Переносное ускорение $\vec{W}_e$ равно нулю, поскольку платформа движется прямолинейно с постоянной скоростью.

Относительное ускорение равно сумме осестремительного и вращательного ускорений:

$$\vec{W}_r = \vec{W}_r^{oc} + \vec{W}_r^{вр}.$$

Поскольку барабан вращается равномерно ($\omega_r = const$), то

$$\varepsilon_r = \frac{d\omega_r}{dt} = 0.$$

Следовательно,

$$W_e^{вр} = \varepsilon R = 0.$$

Осестремительное ускорение

$$W_r^{oc} = \omega^2 R$$

отлично от нуля и направлено к оси вращения ***A*** (см. рис. 4.2).

Кориолисово ускорение

$$\vec{W}_{cor} = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r,$$

но при поступательном движении переносная угловая скорость ω_e равна нулю, поэтому и эта составляющая абсолютного ускорения равна нулю.

Следовательно, абсолютное ускорение точки М

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r^{oc}$$

и направлено к центру барабана.

Задача 4.3

Кулиса ***AC*** вращается в указанном направлении (рис. 4.3) и через ползун ***C*** приводит в движение кривошип ***BC***. Чему равен угол между векторами абсолютной скорости и кориолисова ускорения?

Решение

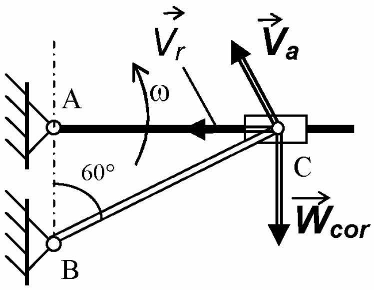


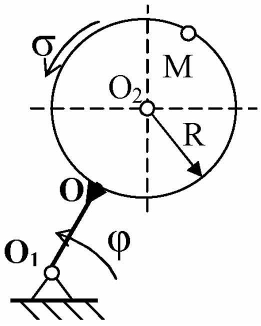
Рис. 4.3

Свяжем вспомогательную систему отсчета с вращающейся кулисой, а основную – с неподвижной плоскостью. Относительным движением ползуна будет его перемещение вдоль ***AC***, а переносным – вращение вместе с ***AC*** вокруг оси, перпендикулярной плоскости чертежа (вектор угловой скорости направлен к нам). Поскольку точка ***C*** жестко связана со звеном ***BC***, ее абсолютная скорость направлена перпендикулярно ***BC*** в направлении вращения, а относительная – от ***C*** к ***A***. Тогда ускорение Кориолиса будет направлено вертикально вниз (вектор $\vec{V}_r$ повернули на 90° в направлении переносного вращения, то есть против часовой стрелки), а искомый угол равен 150°.

Задача 4.4

Полое кольцо радиусом ***R = 0,3 м*** вращается вокруг оси O_1, перпендикулярной плоскости кольца, по закону $\varphi = (t^2 - 6t)$ ***рад*** (рис. 4.4). По кольцу от точки ***O*** против хода часовой стрелки движется точка ***M*** по закону $\sigma(t) = \cup OM = 0{,}3\pi \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ ***(м)***, где $\sigma(t)$ - дуговая координата точки. Расстояние OO_1 ***= 0,1 м***.

Найти абсолютные скорость и ускорение точки при ***t = 1 с***.



Решение

52

Для исследования сложного движения точки выберем системы отсчета. Основную (неподвижную) O_1xyz свяжем с неподвижной точкой O_1, а вспомогательную (подвижную) O_2 – с вращающимся кольцом.

Выделим относительное и переносное движения точки. Для этого мысленно останавливаем движение всей фигуры вокруг O_1, тогда точка будет совершать криволинейное движение по окружности радиусом $R = 0,3$ **м**. Это движение – относительное. Для определения переносного движения мысленно останавливаем движение точки по окружности, как бы приклеиваем точку к фигуре. Тогда точка вместе с фигурой будет вращаться вокруг неподвижной оси, то есть вспомогательная система отсчета совершает вращательное движение вокруг O_1 по известному закону $\varphi(t)$. Это ее переносное движение.

Найдем положение точки в заданный момент времени:

$$\sigma(1) = 0,3\pi\cos\left(\frac{\pi\cdot 1}{3}\right) = \frac{0,3\pi}{2}\ (\text{м}).$$

Вспомним, что при движении точки по окружности центральный угол, длина дуги и радиус окружности связаны соотношением $\sigma = \alpha R$ (рис. 4.5).

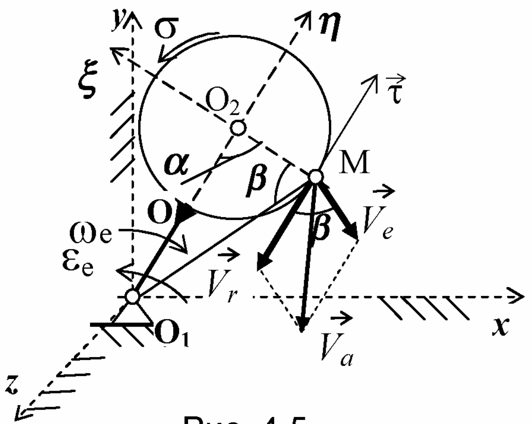


Рис. 4.5

Отсюда

$$\alpha = \frac{\sigma}{R} = \frac{0,3\pi}{2\cdot 0,3} = \frac{\pi}{2}\ (\text{рад}).$$

Расстояние от точки М до оси вращения

$$O_1M = \sqrt{O_1O_2^2 + O_2M^2} =$$

$$= \sqrt{(O_1O + R)^2 + R^2}.$$

Подставив известные величины, получим $O_1M = 0,5$ **м.**

Зная закон вращения кольца, определим переносные угловую скорость и угловое ускорение: $\omega_{ez} = \dot{\varphi} = 2t - 6$, то есть при $t = 1$ **с** $\omega_{ez} = -4$ **(рад/с)**, $\varepsilon_{ez} = \ddot{\varphi} = 2$ **(рад/с)** ($\varepsilon_{ez} = const$).

Таким образом, в заданный момент времени кольцо вращается замедленно ($\varepsilon_{ez} > 0$, $\omega_{ez} < 0$) по ходу часовой стрелки ($\omega_{ez} < 0$).

Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r.$$

Найдем проекцию вектора относительной скорости $\vec{V}_r$ на орт касательной к окружности $\vec{\tau}$. Для этого продифференцируем по времени закон относительного движения, заданный в естественной форме:

$$V_r^{\tau} = \frac{d\sigma}{dt} = 0{,}1\pi^2 \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) \text{ (м/с)}.$$

В момент времени $t = 1$ с относительная скорость

$$V_r^{\tau}(1) = -0{,}05\pi\sqrt{3} = -0{,}86 \text{ (м/с)}.$$

Вектор относительной скорости направлен по касательной к окружности в сторону относительного движения точки.

Так как переносное движение точки – вращение вместе с фигурой вокруг неподвижной оси, проходящей через O_1, то переносную скорость вычислим как произведение угловой скорости тела на кратчайшее расстояние от точки до оси вращения:

$$V_e = \omega_e h = \omega_e O_1 M.$$

Следовательно, при $t = 1$ с $V_e = 4 \cdot 0{,}5 = 2$ м/с.

Вектор переносной скорости направлен перпендикулярно O_1M в сторону вращения фигуры.

Поскольку угол между относительной и переносной скоростями отличен от прямого, абсолютную скорость точки можно найти по теореме косинусов:

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_e V_r \cos\beta}.$$

$\cos\beta$ определим из треугольника O_1O_2M:

$$\cos\beta = \frac{O_2M}{O_1M} = 0{,}6 \Rightarrow \beta \approx 53^\circ.$$

Тогда абсолютная скорость $V_a = 2{,}6$ м/с.

Ускорение точки найдем по теореме Кориолиса

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e + \vec{W}_{cor}. \qquad \text{(а)}$$

Точка в относительном движении перемещается по кольцу криволинейно, поэтому

$$\vec{W}_r = \vec{W}_r^n + \vec{W}_r^{\tau}.$$

Закон относительного движения точки задан в естественном виде. Касательное ускорение найдем как производную по времени от скорости относительного движения:

$$W_r^{\tau} = \frac{dV_r^{\tau}}{dt} = -0{,}033\pi^3 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right).$$

Следовательно, при $t = 1$ **с** $W_r^\tau = -0,5$ **м/с²**.

Знаки W_r^τ и V_r^τ совпадают, то есть вектор касательного ускорения направлен в ту же сторону, что и вектор относительной скорости (рис. 4.6).

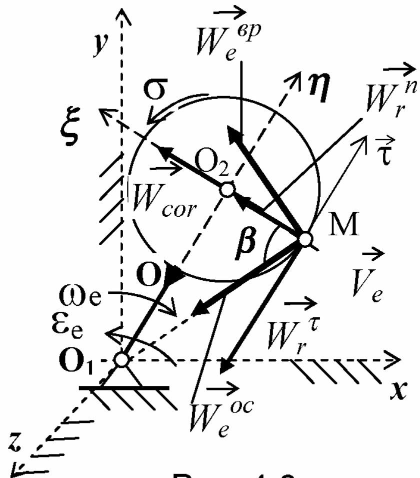


Рис. 4.6

Нормальное ускорение $W_r^n = \dfrac{V_r^2}{\rho}$, где ρ – радиус кривизны траектории точки.

Траектория относительного движения – окружность радиусом ***R***, поэтому радиус кривизны равен ***R***.

Тогда

$$W_r^n = \frac{V_r^2}{R} = \frac{-0,86^2}{0,3} = 2,46 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Нормальное ускорение направлено по главной нормали к траектории относительного движения в сторону вогнутости траектории, то есть к центру окружности.

Как было установлено выше, переносное движение – вращение вокруг неподвижной оси O_1. Ускорение точки ***M*** при этом равно сумме осестремительного и вращательного ускорений.

Осестремительное ускорение

$$W_e^{oc} = \omega_e^2 \cdot O_1M = 4^2 \cdot 0,5 = 8 \text{ (м/с}^2\text{)}$$

и направлено к оси вращения вдоль O_1M.

Вращательное ускорение

$$W_e^{вр} = \varepsilon_e \cdot O_1M = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Векторы вращательного и осестремительного ускорений взаимно перпендикулярны (на рис. 4.6 учтено, что $\varepsilon_{ez} > 0$).

Кориолисово ускорение

$$\vec{W}_{cor} = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r, \quad W_{cor} = 2\omega_e \cdot V_r \cdot \sin\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\vec{\omega}_e$ и $\vec{V}_r$.

Вектор переносной угловой скорости направлен вдоль оси вращения фигуры в сторону, откуда поворот виден против часовой стрелки. Эта ось перпендикулярна рисунку, вращение фигуры происходит по часовой стрелке. Таким образом, вектор угловой скорости на рис. 4.6 направлен от нас. Вектор относительной скорости лежит в плоскости рисунка, поэтому угол $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ и

$$W_{cor} = 2 \cdot 4 \cdot 0{,}86 = 6{,}8 \ (\text{м/с}^2).$$

Вектор $\vec{W}_{cor}$ по правилу векторного произведения должен быть перпендикулярен векторам $\vec{\omega}_e$ и $\vec{V}_r$ (то есть лежать в плоскости рисунка перпендикулярно $\vec{V}_r$) и направлен в ту сторону, откуда кратчайший поворот от $\vec{\omega}_e$ к $\vec{V}_r$ происходит против часовой стрелки, то есть к центру окружности. Отметим, что для определения направления $\vec{W}_{cor}$ можно также воспользоваться правилом Жуковского.

Чтобы найти модуль абсолютного ускорения, перепишем выражение (а) подробнее:

$$\vec{W} = \vec{W}_r^n + \vec{W}_r^\tau + \vec{W}_e^{oc} + \vec{W}_e^{вр} + \vec{W}_{cor}.$$

Спроецируем это векторное равенство на оси $O_2\xi$ и $O_2\eta$ (см. рис. 4.6) и найдем проекции W_{a_ξ} и W_{a_η}:

$$W_{a_\xi} = W_r^n + W_e^{вр} \sin\beta + W_e^{oc} \cos\beta + W_{cor} =$$

$$= 2{,}46 + 1 \cdot 0{,}8 + 8 \cdot 0{,}6 + 6{,}8 = 14{,}86 \ (м/с^2);$$

$$W_{a_\eta} = W_e^{вр} \cdot \cos\beta - W_r^\tau - W_e^{oc} \sin\beta = 1 \cdot 0{,}6 - 0{,}5 - 8 \cdot 0{,}8 = -6{,}3 \ (м/с^2).$$

Тогда

$$W = \sqrt{W_\xi^2 + W_\eta^2} = \sqrt{(14{,}86)^2 + (6{,}3)^2} = 16{,}14 \ (м/с^2).$$

Задача 4.5

Точка **В** (рис. 4.7) движется вдоль диагонали прямоугольной рамки по закону $S = OB = 0{,}8t^2$ **(м).** Рамка вращается в указанном на рисунке направлении по закону $\varphi = t - t^3$.

Определить абсолютные скорость и ускорение точки **В** при $t = 2$ **с** $(\alpha = 30°)$.

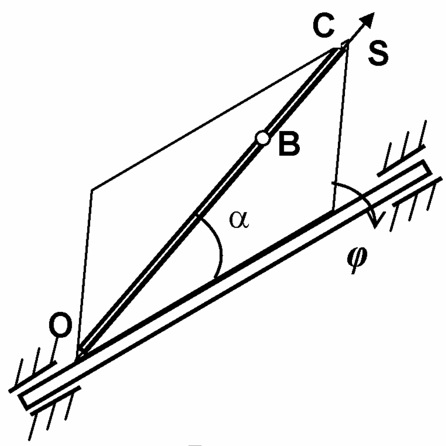


Рис. 4.7

Решение

Свяжем основную систему отсчета – прямоугольные декартовы координаты ***x, y, z*** – с неподвижной осью вращения, а вспомогательную – координаты ***x', y', z'*** – с вращающейся рамкой (ось ***Oy'*** перпендикулярна плоскости рамки). Тогда абсолютным будет движение точки ***B*** относительно основной системы отсчета, переносным – вращение вспомогательной системы (рамки), относительным – перемещение точки ***B*** по оси ***S***, направленной вдоль диагонали рамки (рис. 4.8).

Определим кратчайшее расстояние ***BN*** от точки ***B*** до оси вращения при ***t = 2 c***:

$$OB = 0{,}8\cdot 2^2 = 3{,}2\ (\text{м}) \text{ и } BN = OB\cdot\sin\alpha = 3{,}2\cdot 0{,}5 = 1{,}6\ (\text{м}).$$

Вычислим кинематические характеристики переносного движения при ***t = 2 c***:

– угловую скорость

$$\omega_{ez} = \dot\varphi = \frac{d}{dt}(t - t^3) = 1 - 2t^2 = 1 - 2\cdot 2^2 = -7\ (\text{рад/с});$$

– угловое ускорение

$$\varepsilon_{ez} = \frac{d\omega_{ez}}{dt} = -4t = -8\ (\text{рад/с}^2).$$

Векторы $\vec\omega_e$ и $\vec\varepsilon_e$ показаны на рис. 4.8.

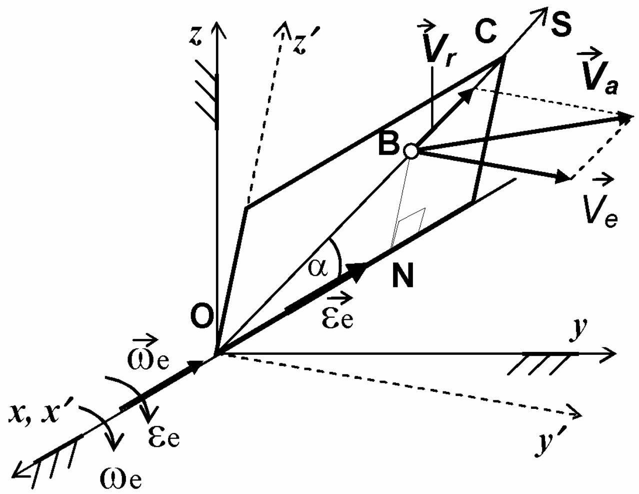


Рис. 4.8

Абсолютная скорость точки ***B*** определим по теореме о сложении скоростей:

$$\vec V_a = \vec V_e + \vec V_r\,.$$

Найдем проекцию относительной скорости на ось ***S***. Поскольку движение задано в естественной форме, эта проекция

$$V_{r_S} = \frac{dS}{dt} = 0{,}8\cdot 2t = 1{,}6t\,. \qquad \text{(a)}$$

При $t = 2$ **с** получим $V_{r_S} = 1{,}6 \cdot 2 = 3{,}2$ **(м/с).** Поскольку проекция скорости положительна, вектор $\vec{V}_r$ направлен по оси ***S*** в сторону увеличения ***OB*** (см. рис. 4.8).

При определении переносной скорости точки ***B*** учтем, что вспомогательная система отсчета вращается вокруг неподвижной оси. Тогда в соответствии с определением переносного движения точки будем иметь

$$\vec{V}_e = \vec{\omega}_e \times \vec{OB}.$$

Отсюда следует, что вектор $\vec{V}_e$ направлен перпендикулярно плоскости рамки (см. рис. 4.8). Модуль переносной скорости

$$V_e = \omega_e BN$$

при $t = 2$ **с** примет значение $V_e = 1{,}6 \cdot 7 = 11{,}2$ **(м/с)**.

Чтобы найти величину абсолютной скорости, сложим геометрически векторы $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$, направления которых уже определены ($\vec{V}_r$ направлен вдоль диагонали рамки, а $\vec{V}_e$ – перпендикулярно ей). Заметим, что угол между $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$ прямой, тогда модуль абсолютной скорости вычислим по теореме Пифагора:

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = \sqrt{11{,}2^2 + 3{,}2^2} = 11{,}65 \text{ (м/с)}.$$

По теореме Кориолиса абсолютное ускорение точки

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e + \vec{W}_{cor}.$$

Проекция вектора относительного ускорения $\vec{W}_r$ на ось ***S*** равна производной по времени от уравнения скорости относительного движения (а):

$$W_{r_S} = \frac{dV_{r_S}}{dt} = 1{,}6 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Поскольку эта проекция положительна, то вектор $\vec{W}_r$ так же, как и вектор $\vec{V}_r$, направлен в сторону увеличения ***OB*** (рис. 4.9).

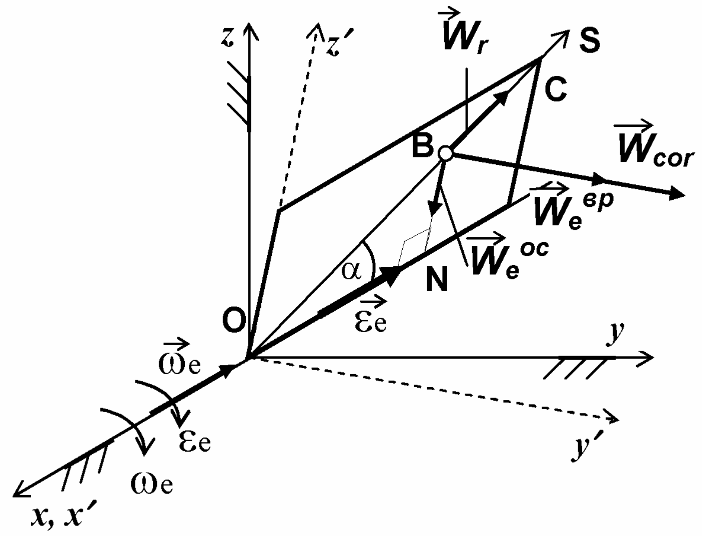


Рис. 4.9

Заметим, что в относительном движении точка перемещается прямолинейно (W_n^r **= 0**) и равноускоренно ($W_r = const$).

Поскольку переносное движение точки вращательное, $\vec{W}_e$ равно сумме осестремительного и вращательного ускорений:

$$\vec{W}_e = \vec{W}_e^{oc} + \vec{W}_e^{вр}.$$

Определим модули и направления этих составляющих. Известно, что $\vec{W}_e = \vec{\omega}_e \times \vec{V}_e$. Следовательно, величина осестремительного ускорения

$$W_e^{oc} = \omega V_e \sin 90^\circ = \omega_e^2 BN = 7^2 \cdot 1{,}6 = 78{,}4 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Вектор $\vec{W}_e^{oc}$ направлен к оси вращения вдоль ***BN***.

Известно, что вращательное ускорение

$$\vec{W}_e^{вр} = \vec{\varepsilon}_e \times \vec{OB}.$$

Модуль его

$$W_e^{вр} = \varepsilon_e BN = 8 \cdot 1{,}6 = 12{,}8 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Вектор вращательного ускорения направлен перпендикулярно плоскости рамки в ту же сторону, что и $\vec{V}_e$ (см. рис. 4.9).

Кориолисово ускорение определим по формуле $\vec{W}_{cor} = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$, из которой следует, что

$$W_{cor} = 2\omega_e \cdot V_r \cdot \sin\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\vec{\omega}_e$ и $\vec{V}_r$, $\varphi = \alpha = 30°$ (см. рис. 4.9). Подставив известные величины, получим

$$W_{cor} = 2 \cdot 7 \cdot 3{,}2 \cdot \sin 30^\circ = 22{,}4 \ \text{(м/с}^2\text{)}.$$

Направление ускорения Кориолиса найдем по правилу Жуковского. Для этого спроецируем вектор $\vec{V}_r$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения, и повернем проекцию в направлении вращения – против часовой стрелки – на прямой угол. Таким образом, направление вектора кориолисова ускорения совпало с направлением вектора переносного вращательного ускорения.

Для того чтобы найти абсолютное ускорение, целесообразно спроецировать векторное равенство

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e^{oc} + \vec{W}_e^{вр} + \vec{W}_{cor}$$

на оси подвижной системы координат:

$$W_{a_{x'}} = -W_r \cos\alpha = -1{,}6 \cdot 0{,}85 = -1{,}36 \ \text{(м/с}^2\text{)};$$

$$W_{a_{y'}} = W_e^{вр} + W_{cor} = 12{,}8 + 22{,}4 = 35{,}2 \ \text{(м/с}^2\text{)};$$

$$W_{a_{z'}} = W_r \sin\alpha - W_e^{oc} = 1{,}6 \cdot 0{,}5 - 78{,}4 = -77{,}6 \ \text{(м/с}^2\text{)}.$$

Тогда абсолютное ускорение

$$W_a = \sqrt{W_{a_{x'}}^2 + W_{a_{y'}}^2 + W_{a_{z'}}^2} = \sqrt{(1{,}36)^2 + (35{,}2)^2 + (77{,}6)^2} = 85{,}2 \ \text{(м/с}^2\text{)}.$$

Задача 4.6

Определить абсолютную скорость точки ***M*** при $t = 1$ ***с***, если закон ее движения по диагонали квадратной пластины $AM = \sigma = 0{,}5t^2$ ***м***.

Кривошипы ***OA*** и ***O₁B*** вращаются по закону $\varphi = 0{,}25\pi t$, расстояние $OA = O_1B = 0{,}5$ ***м*** (рис. 4.10).

Решение

В этой задаче следует обратить внимание на рациональный выбор вспомогательной системы отсчета. Ее целесообразно связать с пластиной ***ABCD***, которая движется поступательно. При этом относительное движение точки – прямолинейное.

Основную систему отсчета (xOy) свяжем с неподвижной осью вращения одного из кривошипов (рис. 4.11).

Из уравнения вращения найдем, что при $t = 1$ ***с*** $\varphi = \pi/4$, следовательно, точки ***O, A*** и ***M*** лежат на одной прямой.

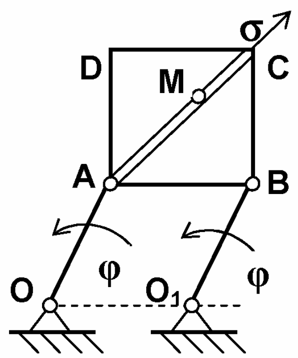


Рис. 4.10

По теореме о сложении скоростей

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r .$$

Исходя из определения переносной скорости точки и свойств поступательного движения получим

$$\vec{V}_e = \vec{V}_A, \text{ то есть } V_e = V_A = \omega_{OA} OA.$$

Угловая скорость кривошипа

$$\omega_{OAz} = \dot{\varphi} = 0{,}25\pi \text{ (рад/с)},$$

следовательно, кривошип вращается против хода часовой стрелки.

Тогда

$$V_e = 0{,}25\pi \cdot 0{,}5 = 0{,}125\pi \text{ (м/с) и } \vec{V}_e \perp \vec{OM} .$$

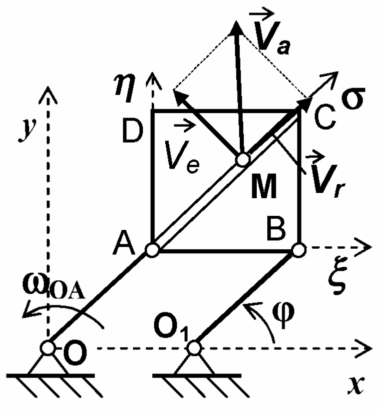


Рис. 4.11

При прямолинейном движении по известному закону

$$V_{r\sigma} = \dot{\sigma} = t$$

в момент времени $t = 1$ **с** относительная скорость точки $V_{r\sigma} = 1$ **м/с.**

Поскольку $V_{r\sigma} > 0$, вектор $\vec{V}_r$ направлен в сторону возрастания σ.

Угол между $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$ прямой, поэтому величину абсолютной скорости найдем по теореме Пифагора:

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = \sqrt{(0{,}125\pi)^2 + 1^2} = 1{,}07 \text{ (м/с)}.$$

4.3. Вопросы для самоконтроля

1. Точка совершает сложное движение. Что называют абсолютным, относительным и переносным движениями?
2. Запишите формулу, выражающую связь между абсолютной и относительной производными вектора, заданного во вспомогательной системе отсчета.
3. Дайте определение, абсолютной, относительной и переносной скоростей точки, совершающей сложное движение.
4. Сформулируйте теорему сложения скоростей для точки, совершающей сложное движение.
5. Точка совершает сложное движение. Переносное движение – вращение вокруг оси. Как определить переносную скорость точки?

6. Точка совершает сложное движение. Переносное движение – поступательное. Как определить переносную скорость точки?

7. Сформулируйте теорему о сложении скоростей при сложном движении точки.

8. Сформулируйте теорему сложения ускорений при сложном движении точки.

9. Точка совершает сложное движение. Переносное движение – вращение вокруг оси. Как определить переносное ускорение точки?

10. Как должна двигаться вспомогательная система отсчета, чтобы переносное ускорение точки (при сложном её движении) было равно нулю?

11. Дайте определение ускорения Кориолиса. Как определяются его модуль и направление?

12. В чем суть метода Н.Е. Жуковского для вычисления и построения вектора ускорения Кориолиса?

13. Когда ускорение Кориолиса равно нулю?

14. Каким должно быть относительное движение точки для того, чтобы её относительное ускорение было равно нулю?

15. Точка совершает сложное движение. Переносное движение – вращение вокруг оси. Как определить переносную скорость точки?

16. Точка совершает сложное движение. Переносное движение – плоскопараллельное. Как найти переносное ускорение точки?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: В 3 т. – М.: Наука, 1975. – Т. 1: Статика и кинематика. – 512 с.

Будник Ф.Г. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Высш. шк., 1987. – 176 с.

Бутенин Н.В. Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Высш. шк., 1985. – Т. 1: Статика и кинематика. – 240 с.

Добронравов В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1983. – 575 с.

Кепе О.Э. Сборник коротких задач по теоретической механике. – М.: Высш. шк., 1989. – 368 с.

Колесников К.С. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1983. – 320 с.

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1986. – 448 с.

Павловский М.А., Акинфиева Л.Ю., Бойчук О.Ф. Теоретическая механика. Статика, кинематика. – К.: Вища шк., 1989. – 360 с.