ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
КИНЕМАТИКА

Методическое пособие с заданиями для контрольных работ

Оглавление

Предисловие

Кинематика является одним из разделов курса теоретической механики, дисциплины, значение и методы при решении задач которой позволяют мыслить абстрактными механическими образами, оперировать с ее моделями, видеть за каждой формулой, ее буквой определенный физический смысл, объект; она учит мыслить логически, позволяет всегда по любому вопросу подготовить алгоритм решения поставленной задачи.

Для изучения кинематики необходимо иметь соответствующую математическую подготовку, совершенно свободно уметь дифференцировать функции одного переменного, строить графики этих функций, быть знакомым с естественными координатными осями, знать основы теории кривых второго порядка, изучаемых в аналитической геометрии, широко использовать векторную алгебру, уметь проецировать на координатные оси векторы, дифференцировать векторы и т. п.

Предлагаемое методическое пособие содержит краткие основные сведения теоретического курса по, практически, всем главным параграфам , приводимых в ряде учебников полного курса теоретической механики раздела кинематики; в конце отдельных глав приводится перечень вопросов для самоконтроля знаний теории, а также примеры решения отдельных задач, в которых используются знания рассмотренных и усвоенных теоретических вопросов, приводятся повариантно контрольные задания для самостоятельной работы студентов, их самоподготовки.

Изучать материал рекомендуется по темам, с параллельным рассмотрением изучаемого вопроса в рекомендованных учебниках, в которых приводится полное изложение рассматриваемой темы. В последующем целесообразно дать письменные ответы на вопросы самоконтроля; только после усвоения теоретического курса темы, рассмотреть примеры решенных задач, а затем начать решение предложенных контрольных заданий (условия их приводятся в таблицах). После твердого усвоения темы и приобретения навыка в решении задач студент будет свободнее владеть материалом и выбирать пути решения задач, может быть, не совпадающие с тем путем, который приведен в методическом пособии.

При составлении методического пособия авторы его руководствовались и использовали материалы учебников и методических указаний, список которых приведен в конце пособия.

1. Введение в кинематику

Кинематикой называется раздел теоретической механики, в котором механическое движение изучается только с его геометрической стороны, без учета взаимодействий, определяющих это движение.

Механическое движение – это изменение положения тела в пространстве в функции времени. Положение тела обычно определяется по отношению к некоторой системе отсчета, неизменно связанной с др. телом, например, землей.

Время, как и пространство, существует объективно, независимо от нашего сознания. Время непрерывно и бесконечно; в классической механике оно принимается универсальным, т.е. одинаковым для всех систем отсчета.

Отсчет времени ведется от некоторого начального момента ($t_0 = 0$), о выборе которого в каждом случае уславливаются. Всякий данный момент времени выражает собой число секунд, прошедших от начального момента времени до данного. Число секунд между двумя последовательными моментами времени называется промежутками времени.

В кинематике рассматриваются две основные задачи:

1) установление математических способов задания движения точки (тела) относительно выбранной системы отсчета, или установление закона движения точки (или тела);
2) определение по заданному закону движения тела всех кинематических характеристик этого движения (траекторий, скорости и ускорения точки или линейных скоростей и ускорений точек тела, угловых скоростей и угловых ускорений тела).

Кинематика делится на две части: кинематика точки и кинематика твердого тела.

2.Кинематика точки

Геометрическое место положений движущейся точки в рассматриваемой системе отсчета называется траекторией точки. Если траектория – прямая линия, то движение точки называется прямолинейным, если траектория кривая линия – то криволинейным.

2.1.Способы задания движения точки

Движение считается заданным, если указан способ, позволяющий определить ее положение относительно выбранной системы отсчета в каждый момент времени.

1. Естественный способ. При этом способе необходимо иметь заданными траекторию движущейся точки и уравнение движения по траектории в виде S=f(t). Помимо этого должны быть заданными начало отсчета (точка 0)

криволинейной координаты «S», положительное и отрицательное направления отсчета этой координаты.

Совокупность этих данных полностью определяет положение точки в пространстве в любой момент времени.

2. <u>Координатный способ</u>. В этом случае задаются уравнения движения точки в координатной форме: $X = f_1(t)$, $Y = f_2(t)$, $Z = f_3(t)$. Приведенные уравнения представляют собой параметрические уравнения траектории точки, в которых роль параметра играет время «t». Чтобы получить уравнение траектории в координатной форме, надо из них исключить параметр «t»

3. <u>Векторный способ.</u> При этом способе положение движущейся точки определяется в каждый момент времени концом переменного радиуса-вектора, заданного векторным уравнением движения точки, т.е. $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$. Очевидно, что траектория точки представляет собой геометрическое место точек концов радиуса-вектора $\vec{r}$ **.**

Вопросы для самоконтроля

1. В чем состоит основная задача кинематики точки?
2. В чем различие понятий «путь» и «дуговая координата» ?
3. Какие существуют способы задания движения точки?
4. Чем является траектория точки при векторном способе задания движения точки?
5. Как по уравнениям движения точки в координатной форме определить ее траекторию?

2.2. Скорость и ускорение точки при векторном способе задания движения

Скорость точки – это величина, характеризующая как быстро и в каком направлении меняется положение точки в пространстве. Поскольку она определяет направление перемещения точки, скорость является величиной векторной. Пусть за время Δt радиус-вектор точки M изменился на величину $\Delta\vec{r}$ **.** Тогда средней скоростью называется векторная величина

$$\vec{v}_{ср} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad \textbf{(2.1)}$$

Этот вектор направлен так же, как и $\Delta\vec{r}$. Предельное значение

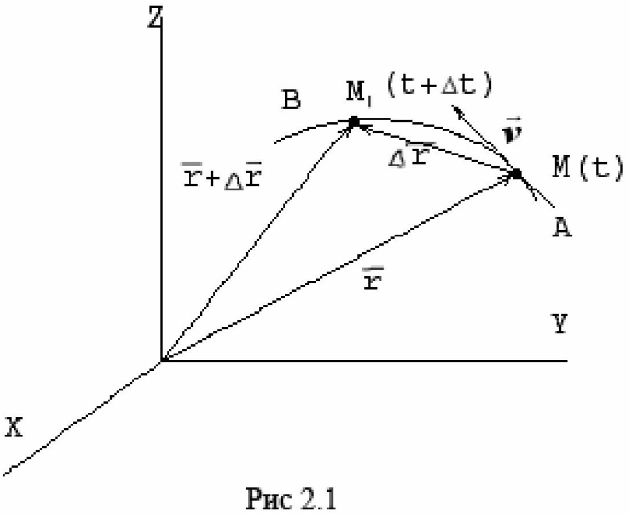


Рис 2.1

$\vec{v}_{cp}$, при стремящемся к нулю Δt, определит мгновенное значение скорости в данный момент времени

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{cp} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \qquad (2.2)$$

При стремлении Δt к нулю хорда MM_1, а значит и вектор $\vec{v}_{cp}$ поворачивается вокруг точки М, приближаясь к касательной к траектории в точке М и в пределе, совпадая с ней. Поэтому вектор $\vec{v}$ направлен по касательной к траектории точки в сторону движения.

В общем случае криволинейного движения вектор скорости изменяется по величине и направлению в функции времени. Следовательно, за время Δt вектор $\vec{v}_1$ можно представить в виде $\vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta\vec{v}$. Ускорение точки в криволинейном движении характеризует быстроту изменения вектора $\vec{v}$ по величине и направлению. Тогда средняя величина ускорения определится $\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$, а мгновенное значение $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{cp} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, или

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (2.3)$$

2.3. Скорость и ускорение точки при координатном способе задания движения

Пусть заданы уравнения движения точки в декартовой системе координат $x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t)$. Положение точки можно определить и через радиус-вектор $\vec{r}$. Он может быть представлен с помощью единичных векторов и координат в виде

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \qquad (2.4)$$

Производная по времени от **(2.4)** будет

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k} \qquad (2.5)$$

Следовательно,

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \qquad (2.6)$$

Модуль скорости определяется формулой

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \qquad (2.7)$$

Направление вектора скорости устанавливается согласно направляющих косинусов

$$\cos(\vec{v}, \wedge x) = \frac{v_x}{v} \qquad \cos(\vec{v}, \wedge y) = \frac{v_y}{v} \qquad \cos(\vec{v}, \wedge z) = \frac{v_z}{v} \qquad (2.8)$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории движения точки. По аналогии, ускорение

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \quad \textbf{(2.9)}$$

Установлено, что ускорение точки есть производная от скорости по времени или вторая производная от радиуса-вектора $\vec{r}$ по времени. Поэтому

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \qquad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \qquad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \quad \textbf{(2.10)}$$

Модуль ускорения вычисляется по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad \textbf{(2.11)}$$

Направление вектора ускорения определяется направляющими косинусами

$$\cos(\vec{a},\wedge x) = \frac{a_x}{a} \qquad \cos(\vec{a},\wedge y) = \frac{a_y}{a} \qquad \cos(\vec{a},\wedge z) = \frac{a_z}{a} \quad \textbf{(2.12)}$$

2.4. Скорость точки при естественном способе задания движения

При заданной траектории точки и законе движения ее по этой траектории в виде $S = f(t)$, численная величина средней скорости будет равна

$$v_{cp} = \frac{S_1 - S}{t_1 - t} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad \textbf{(2.13)}$$

Переходя к пределу, найдем значение скорости точки в данный момент времени «t»

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{cp} = \frac{dS}{dt} = \dot{S} \quad \textbf{(2.14)}$$

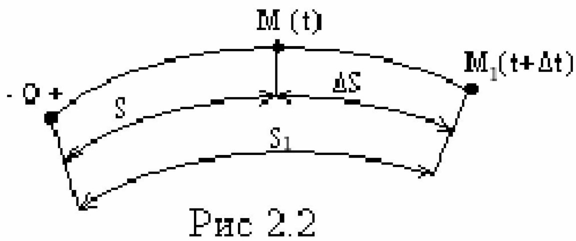
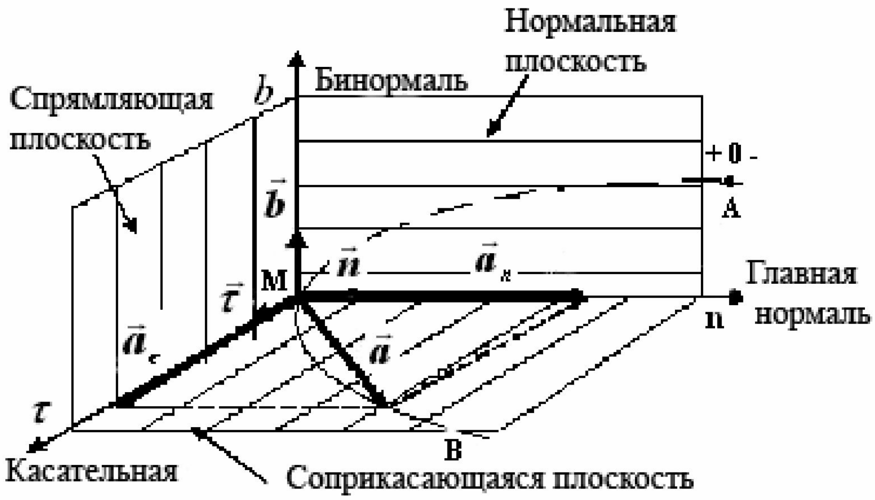


Рис 2.2

Таким образом, величина скорости точки в данный момент времени равна первой производной от расстояния «S» (криволинейной координаты) по времени «t». Формула **(2.14)** определяет значение «v» с определенным законом: если $\dot{S}>0$, то вектор скорости направлен в положительном направлении отсчета расстояния «S», а если $\dot{S}<0$, то в отрицательную сторону. Следовательно, величина скорости определяет одновременно модуль вектора скорости и сторону, в которую он направлен. Направлен вектор скорости по касательной к траектории.

2.5. Естественные координатные оси

Проведем в точке М кривой АВ <u>соприкасающуюся плоскость</u> – плоскость, проходящую через касательную к кривой в данной ее точке М и другую, бесконечно близкую к ней точку кривой.



В случае плоской кривой соприкасающейся плоскостью для всех ее точек является плоскость, в которой лежит сама кривая. Из рис. 2.3 следует:

- плоскость, перпендикулярная к касательной, называется нормальной плоскостью;
- пиния пересечения соприкасающейся и нормальной плоскостей называется главной нормалью кривой;
- отрезок, перпендикулярный к главной нормали, называется бинормалью кривой.

Приведенные понятия и рис. 2.3 позволяют дать определение естественным координатным осям.

Естественными координатными осями называются три взаимноперпендикулярных оси: касательная, направленная в сторону возрастания дуговой координаты (т.е. положительного отсчета «S»); главная нормаль, направленная в сторону вогнутости кривой, и бинормаль, направленная по отношению к касательной и главной нормали так же, как и ось OZ направлена по отношению к осям OX и OY.

Естественные координатные оси имеют начало в точке M кривой и при движении точки M по этой кривой перемещаются вместе с ней, оставаясь взаимноперпендикулярными, но изменяя свое направление в пространстве.

2.6. Разложение вектора ускорения по естественным координатным осям. Частные случаи при различных видах движения точки

Вектор полного ускорения точки M разложим на составляющие по естественным осям координат $\vec{a}_M = a_\tau \cdot \vec{\tau} + a_n \cdot \vec{n} + a_b \cdot \vec{b}$. Для соприкасающейся плоскости $a_b \cdot \vec{b} = 0$, так как $a_b = 0$. Поэтому

$$\vec{a}_M = a_\tau \cdot \vec{\tau} + a_n \cdot \vec{n} \quad (2.15)$$

Так как вектор скорости точки M всегда направлен по касательной к траектории, то

$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau} \quad (2.16)$$

Здесь $\vec{\tau} = \mathbf{var}$ - величина переменная (модуль постоянный, равен 1, а направление переменное, т.к. $\vec{\tau}$ всегда касательный к кривой). Возьмем производную по времени для выражения **(2.16)**

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{\tau} + v\cdot\frac{d\vec{\tau}}{dt} \qquad \textbf{(2.17)}$$

или (приводится зависимость без доказательства)

$$\vec{a}_M = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\cdot\vec{n} \qquad \textbf{(2.18)}$$

Здесь ρ - радиус кривизны кривой траектории в момент времени «t». Первое слагаемое есть не что иное как составляющая полного ускорения точки по координатной оси «касательная» и называется вектором касательного (тангенциального) ускорения

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{\tau} \qquad \textbf{(2.19)}$$

По модулю вектор касательного ускорения равен абсолютному значению производной от скорости по времени, т.е.

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \qquad \textbf{(2.20)}$$

Вектор касательного ускорения всегда направлен по касательной к траектории движения точки в сторону вектора скорости (ускоренное движение точки), или в противоположную сторону (замедленное движение точки).

Второе слагаемое $\frac{v^2}{\rho}\cdot\vec{n}$ представляет собой составляющую полного ускорения точки, направленного по оси «главная нормаль» к центру кривизны и называется нормальным ускорением. По величине это ускорение равно $a_n = \frac{v^2}{\rho}$

(2.21)

Следовательно, полное ускорение точки в криволинейном движении есть геометрическая сумма касательного и нормального ускорений. Значит

$$\vec{a}_M = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \qquad \text{или} \qquad a_M = \sqrt{a_\tau^2 + a_n{}^2} \qquad \textbf{(2.22)}$$

Вектор $\vec{a}_M$ всегда лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости кривой.

Частные случаи

1. Прямолинейное движение точки.

В этом случае $a_n = 0$,так как $\rho = \infty$. Тогда полное ускорение по величине и направлению равно $a_M = a_\tau = \frac{dv}{dt}$.

2. Равномерное криволинейное движение точки.

При таком движении $v = const$, следовательно $a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$. Поэтому

$a_M = a_n = \frac{v^2}{\rho}$ и всегда направленно по оси “главная нормаль ” к центру кривизны кривой.

Установим закон этого движения. Известно $\frac{dS}{dt} = v$, или $\int_{S_0}^{S} dS = v\int_0^t dt$, откуда

$$S = S_0 + v_0 \cdot t, \qquad (2.23)$$

3. Равномерное прямолинейное движение точки. В этом случае $a_\tau = a_n = a_M = 0$.

Из рассмотренного выше материала можно сделать вывод:
- касательное ускорение характеризует быстроту изменения вектора скорости только по величине;
- нормальное ускорение характеризует быстроту изменения вектора скорости только по направлению.

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяются проекции скорости точки на неподвижные оси декартовых координат?
2. Какие существуют способы определения скорости движения точки?
3. Как направлены естественные координатные оси в каждой точке кривой?
4. В какой плоскости расположено ускорение точки и чему равны его проекции на естественные координатные оси?
5. Как найти проекции ускорения точки на оси неподвижной системы координат Декарта?
6. Напишите для $\vec{v}$ и $\vec{a}$ зависимости в случае движения точки в плоскости и по прямой?
7. Как найти проекции ускорения точки на оси естественной системы координат?
8. Что характеризует собой касательное и нормальное ускорения точки?
9. В какой плоскости трёхгранника естественной системы координат расположен вектор ускорения?
10. Как классифицируется движение точки по ускорениям?
11. В каких случаях движения точки обращаются в нуль: а) касательное ускорение; в) нормальное ускорение; с) полное ускорение?

2.7 Контрольные задачи по разделу “Кинематика точки” (Задача К 1)

Точка M движется в плоскости “xy”. Закон движения точки задан уравнениями $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, где x и y заданы в метрах, t - в секундах. Найти уравнение траектории точки и её положение в заданный момент времени $t = t_1$. Определить скорость и ускорение точки, а также касательное и нормальное ускорения, радиус кривизны траектории и вычислить их значение в момент времени $t = t_1$ с.

Зависимости $x = f_1(t)$ и $y = f_2(t)$ приведены в таблице 2.1. Указания: задача К-1 относится к кинематике точки и может быть решена с помощью формул для определения скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения, а также формул для определения формул касательного и нормального ускорений. В некоторых задачах при определении траектории следует учесть формулы тригонометрии

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

Пример решения задачи К 1.

Точка M движется согласно уравнений $x = 5\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right) + 3$; $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right) + 1$;

(x, y - в метрах, t - в секундах).

Определить уравнение траектории точки, для момента времени $t = 1$ с, найти положение точки, а также скорость, полное, касательное, нормальное ускорения точки и радиус кривизны траектории.

Порядок выполнения задания

1. Найдем уравнение траектории точки. Для определения уравнения траектории исключим из уравнений движения время t. Из первого уравнения движения точки найдем $\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right) = \frac{x-3}{5}$$

Из второго уравнения движения найдем $\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right) = \frac{y-1}{2}$$

Возведя полученные значения (правую и левую стороны уравнения) в квадрат и складывая их находим:

$$1 = \frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{4}$$

Следовательно, траекторией точки является эллипс с центром в точке с координатами (3;1).

Вид траектории показан на рисунке 2.4.

Таблица 2.1

Номер варианта	Уравнения движения		t, c
	$X = f_1(t)$, м	$Y = f_2(t)$, м	
1	2	3	4
1	t^2-2	t	2
2	$3\sin(\frac{\pi}{6}t)-2$	$5\cos(\frac{\pi}{6}t)$	1
3	$8\sin^2(\frac{\pi}{3}t)-1$	$4\cos^2\frac{\pi}{3}t+4$	0
4	$4\cos(\frac{\pi}{3}t)-2$	$\sin(\frac{\pi}{3}t)$	1
5	$5\sin(\frac{\pi}{4}t)+1$	$5\cos(\frac{\pi}{4}t)-1$	2
6	t	$6\sin(\frac{\pi}{6}t)$	2
7	t	$2t^2-3$	1
8	$4\cos(\frac{\pi}{6}t)$	$6\sin(\frac{\pi}{6}t)+3$	2
9	$3\cos^2(\frac{\pi}{3}t)-3$	$6\sin^2(\frac{\pi}{3}t)+1$	1
10	$\mathrm{Sin}(\frac{\pi}{3}t)$	$3\cos(\frac{\pi}{3}t)-3$	1
11	$6\sin(\frac{\pi}{4}t)-1$	$6\cos(\frac{\pi}{4}t)+2$	2
12	$3\cos(\frac{\pi}{3}t)$	t	2
13	$4t^2+1$	2t	2
14	$5\sin(\frac{\pi}{3}t)+1$	$3\cos(\frac{\pi}{3}t)$	1
15	$5\sin^2(\frac{\pi}{6}t)-3$	$4\cos^2(\frac{\pi}{6}t)+1$	2
16	$6\cos(\frac{\pi}{6}t)+2$	$\sin(\frac{\pi}{6}t)$	1
17	$6\sin(\frac{\pi}{4}t)+2$	$6\cos(\frac{\pi}{4}t)-1$	2
18	2t	$4\sin(\frac{\pi}{4}t)$	1
19	2t	$4t^2-1$	2

1	2	3	4
20	$6\cos(\frac{\pi}{3}t)+2$	$3\sin(\frac{\pi}{3}t)+1$	1
21	$\cos^2(\frac{\pi}{4}t)+4$	$4\sin^2(\frac{\pi}{4}t)+3$	2
22	$\sin(\frac{\pi}{3}t)$	$2\cos(\frac{2\pi}{3}t)+4$	0
23	$4\sin(\frac{\pi}{2}t)+1$	$4\cos(\frac{\pi}{2}t)$	1
24	$6\cos(\pi t)$	$2t$	1
25	$9t^2-1$	$3t$	1
26	$6\sin(\frac{\pi}{6}t)-1$	$2\cos(\frac{\pi}{6}t)+2$	2
27	$6\sin^2(\frac{\pi}{4}t)-5$	$2\cos^2(\frac{\pi}{4}t)+3$	1
28	$6\cos(\frac{2\pi}{3}t)-2$	$\sin(\frac{\pi}{3}t)$	0
29	$6\cos(\frac{\pi}{3}t)-2$	$6\sin(\frac{\pi}{3}t)-2$	1
30	$2t$	$2\sin(\frac{\pi}{3}t)$	1

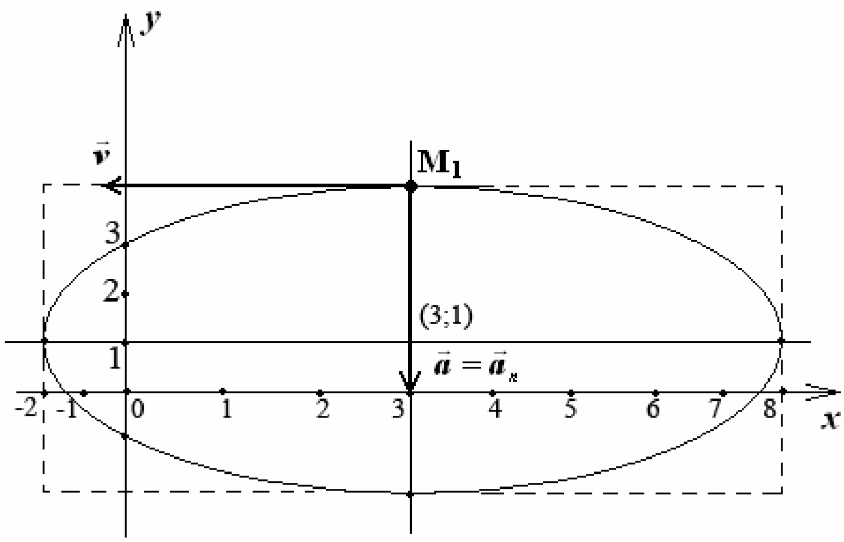


Рис. 2.4

2. Найдем положение точки в момент времени t=1c

$x(1) = 5\cos\frac{\pi}{2}+3 = 3$м; $y(1) = 2\sin\frac{\pi}{2}+1 = 3$м.

Положение точки M_1 показано на рис 2.4.

3. Найдем скорость точки M

$v_M = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$,

Где $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_x = -\frac{5\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}t)$, или в момент времени t_1=1с

$$\dot{x}(1) = -\frac{5\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = -7.85(м/с)$$

$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = v_y = \pi\cos(\frac{\pi}{2}t)$, если в момент времени t_1=1с $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = v_y = \pi\cdot\cos(\frac{\pi}{2}t)$,

$$\dot{y}(1) = \pi\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Следовательно

$$v = \frac{\pi}{2}\sqrt{25\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right) + 4\cos^2\frac{\pi}{2}\cdot t} = \frac{\pi}{2}\sqrt{4 + 21\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)}$$

$$v(1) = \frac{\pi}{2}\sqrt{4 + 21\sin^2\frac{\pi}{2}} = \frac{5\pi}{2} = 7{,}85\left(м/_c\right)$$

4. Найдём ускорение точки.

$$a_M = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2},$$

где $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = a_X = -\frac{5\pi^2}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)$, или $\ddot{x}(1) = -\frac{5\pi^2}{4}\cos\frac{\pi}{2} = 0$,

$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = a_Y = -\frac{\pi^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)$, или $\ddot{y}(1) = -\frac{\pi^2}{2}\sin\frac{\pi}{2} = -4{,}93\left(м/_c\right)$

Следовательно

$$a_M = \frac{\pi^2}{4}\sqrt{25\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right) + 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)} = \frac{\pi^2}{4}\sqrt{4 + 21\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)}$$

$$a(1) = \frac{\pi^2}{4}\sqrt{4 + 21\cos^2\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{2} = 4{,}93\left(м/c^2\right)$$

5. Найдем касательное ускорение точки M,

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

$$a_\tau = \frac{d}{dt}\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{4 + 21\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)}\right] = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{21\cdot 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\cdot\frac{\pi}{2}}{2\sqrt{4 + 21\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)}} =$$

$$=\frac{21\pi^2}{4}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)}{\sqrt{4+21\sin^2\frac{\pi}{2}\cdot t}}$$

$$a_\tau(1)=\frac{21\pi^2}{4}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}}{\sqrt{4+21\sin^2\cdot\frac{\pi}{2}}}=0$$

6. Найдём нормальное ускорение точки M,

$$a_n=\sqrt{a_M^2-a_\tau^2},$$

$$a_n=\frac{\pi^2}{4}\sqrt{4+21\cos^2(\frac{\pi}{2}t)-\frac{21^2\sin^2(\frac{\pi}{2}t)\cos^2(\frac{\pi}{2})t}{4+21\sin^2(\frac{\pi}{2}t)}}=\frac{\pi^2}{4}\frac{10}{\sqrt{4+21\sin^2(\frac{\pi}{2}t)}}$$

$$a_n(1)=\frac{\pi^2}{4}*\frac{10}{\sqrt{4+21\sin^2\frac{\pi}{2}}}=\frac{\pi^2}{2}=4.93\text{ м/с}^2$$

7. Найдем радиус кривизны траектории точки М,

$$\rho=\frac{v_M^2}{a_n},$$

$$\rho=\frac{(\frac{\pi}{2}\sqrt{4+21\sin^2(\frac{\pi}{2}t)})^2}{\frac{\pi^2}{4}*\frac{10}{\sqrt{4+21\sin^2(\frac{\pi}{2}t)}}}=\frac{(\sqrt{4+21\sin^2(\frac{\pi}{2}t)})^3}{10}$$

$$\rho(1)=\frac{(\sqrt{4+21\sin^2\frac{\pi}{2}})^3}{10}=12.5м$$

Направление векторов показано на рис. 2.4.

Ответ:

$v_M(1)$=7.85м/с; $a_M(1)$= 4.93 м/с^2; $a_\tau(1)$=0 ; $a_n(1)$= 4.93м/с^2; $\rho(1)=12.5$ м

3.Кинематика твердого тела

Используя полученные сведения из кинематики точки, перейдём к изучению твердого тела. Абсолютно <u>твердым телом</u> называют такое материальное тело, расстояние между двумя любыми точками которого остаётся неизменным.

Вначале рассмотрим простейшие случаи движения тела: поступательное движение и вращение вокруг неподвижной оси. Эти движения твёрдого тела, помимо непосредственного практического значения, будут рассматриваться как составляющие в случае сложного движения.

3.1. Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение твёрдого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной самой себе.

Примерами этого движения могут быть: движение кузова автомобиля на прямом горизонтальном участке дороги, движение корпуса угольного комбайна вдоль лавы с учетом гипсометрии пласта, движение ползуна кривошипно-шатунного механизма и т. д. Поступательное движение твердого тела может быть прямолинейным и криволинейным.

В основу теории поступательного движения положена следующая теорема: точки тела, движущегося поступательно, описывают одинаковые траектории (при наложении совпадающие) и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

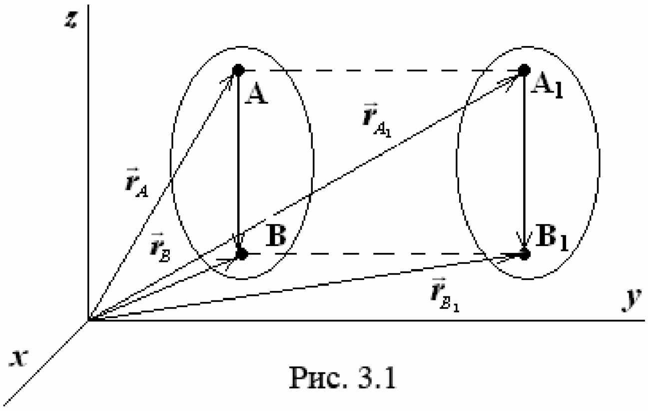


Рис. 3.1

$\overrightarrow{AB}$ = const, по модулю и направлению (твердое тело, поступательное движение).

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB} \qquad \textbf{(3.1)}$$

$$\vec{r}_B = \vec{r}_{A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} \qquad \textbf{(3.2)}$$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} = const$, поэтому при наложении траектория AA_1 совпадает с BB_1.

Возьмём производные $\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt}$. Здесь $\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{v}_B$, $\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A$, $\frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt} = 0$.

Следовательно,

$$v_A = v_B = v_C \qquad \textbf{(3.3)}$$

Взяв производную от **(3.3)**, получим

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_A \qquad \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \vec{a}_B \qquad \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{a}_c$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_C \qquad \textbf{(3.4)}$$

3.2 Вращательное движение твердого тела

Вращательным движением твердого тела называется такое движение, при котором точки тела движутся в плоскостях, перпендикулярных неподвижной прямой, называемой осью вращения тела, и описывают окружности, центры которых лежат на этой оси.

Расстояние от любой точки тела до оси называется радиусом точки.

3.2.1 Уравнение вращательного движения, угловая скорость и угловое ускорение

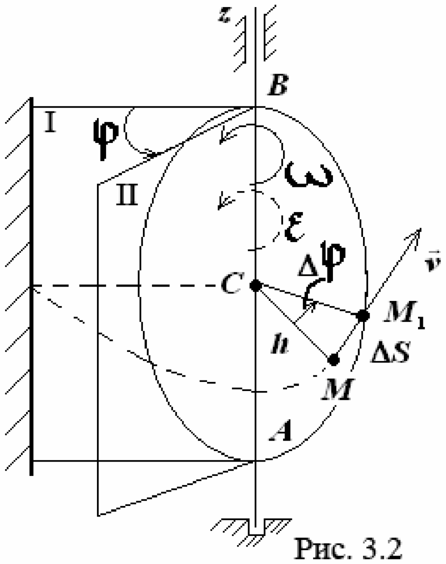


Рис. 3.2

Положение тела в любое время определяется углом “φ” , изменяющимся с течением времени . Следовательно, закон вращательного движения тела

$$\varphi = \mathbf{f}(\mathbf{t}) \qquad (3.5)$$

Угол поворота измеряется в радианах. Он будет положительным, если поворот тела против хода часовой стрелки наблюдается с положительного конца оси AZ, если наоборот - угол отрицательный.

Средней угловой скоростью для промежутка времени Δt будет отношение приращения угла поворота $\Delta\varphi$ к этому промежутку времени, т. е. $\omega_{ср} = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. Тогда мгновенное значение угловой скорости определяется $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \omega_{ср} = \dfrac{d\varphi}{dt}$. Значит

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \qquad (3.6)$$

Если угловая скорость задается через частоту вращения тела «n» (об/мин), тогда она определяется

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}, \left(\frac{1}{c}\right) \qquad (3.7)$$

Угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости тела с течением времени. Поэтому $\varepsilon_{ср} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$. Следовательно, угловое ускорение тела в данный момент времени «t» определяется $\varepsilon = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \varepsilon_{ср} = \dfrac{d\omega}{dt}$. Значит,

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \qquad (3.8)$$

Угловая скорость и угловое ускорение являются основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела.

Эти величины можно изобразить в виде векторов, направленных вдоль оси вращения тела (см. рис.3.3)

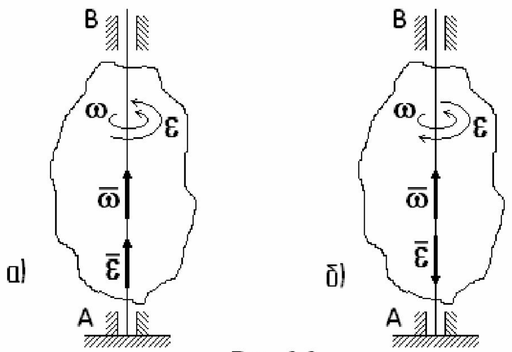


Рис. 3.3

При ускоренном вращательном движении тела направления стрелок (вдоль оси вращения) векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ совпадают (а). В случае разного (б) направления стрелок векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$, вращательное движение тела замедленное.

3.2.2. Равномерное и равнопеременное вращение твердого тела

1. Если твердое тело вращается с $\omega = const$, т. е. ($\varepsilon = 0$), то такое движение называется равномерным. Так как $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$, то интегрируя, получим

$$\varphi = \varphi_o + \omega \cdot t \qquad (3.9)$$

Выражение **(3.9)** есть закон равномерного вращательного движения.

2. Если твердое тело вращается с $\varepsilon = const$, то такое движение называется равнопеременным. Известно $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$. Интегрируя, получим

$$\omega = \omega_o \pm \varepsilon \cdot t \qquad (3.10)$$

Приведенная зависимость позволяет определить угловую скорость в любое время «t». Так как $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$, то $\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega_o \pm \varepsilon \cdot t$. После интегрирования получим закон равнопеременного движения

$$\varphi = \varphi_o + \omega_0 t \pm \varepsilon \frac{t^2}{2} \qquad (3.11)$$

В формулах (3.10) и (3.11) знак плюс принимается в случае ускоренного вращение, при замедленном – знак минус.

3.2.3.Скорость и ускорение точки вращающегося тела

Согласно рис. 3.2. дуга, пройденная точкой тела, $\cup MM_1 = \Delta S = h \cdot \Delta\varphi$. Разделим на Δt, тогда $\dfrac{\Delta S}{\Delta t} = h \cdot \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}(h \cdot \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}) = h \cdot \dfrac{d\varphi}{dt} = h \cdot \omega$,

$$v = h \cdot \omega \qquad (3.12)$$

Следовательно, линейная скорость любой точки вращающегося тела равна произведению угловой скорости на расстояние от данной точки до оси вращения. Направлена эта скорость всегда по касательной к окружности, которую описывает данная точка при своем движении.

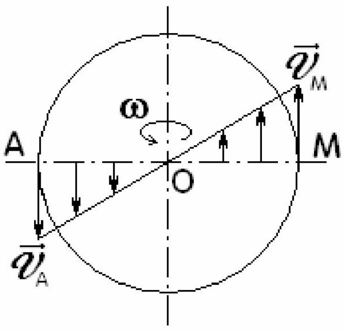


Рис. 3.4

В каждый данный момент времени угловые скорости точек вращающегося тела равны. Поэтому линейные скорости точек тела пропорциональны их расстоянию до оси (рис.3.4), т.е. скорость изменяется по линейному закону.

Так как точки тела совершают криволинейное движение (траектории точек - окружности), то полное ускорение слагается из нормального и касательного ускорений $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$, которые определяются

$$a_n = \frac{v^2}{h} = \frac{(\omega \cdot h)^2}{h},$$

$$a_n = \omega^2 \cdot h \qquad (3.13)$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega \cdot h)}{dt} = h \cdot \frac{d\omega}{dt},$$

$$a_\tau = \varepsilon \cdot h \qquad (3.14)$$

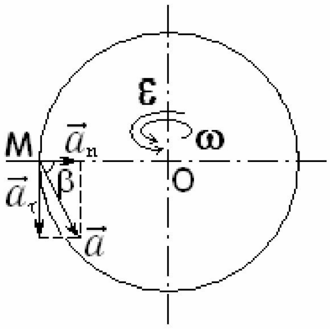


Рис. 3.5

Таким образом полное ускорение точки будет

$$a = \sqrt{a_n^{\,2} + a_\tau^{\,2}} = h \cdot \sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2} \quad tg\beta = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \qquad (3.15)$$

Из формул (3.15) следует, что полное ускорение точки вращающегося тела пропорционально ее расстоянию до оси вращения.

При вращательном движении тела вокруг оси нормальное ускорение $\vec{a}_n$ называют еще центростремительным $\vec{a}_ц$ (вектор направлен по радиусу к центру кривизны), касательное ускорение $\vec{a}_\tau$ называют и иначе – вращательным ускорением $\vec{a}_{вр.}$ (вектор ускорения направлен по касательной).

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите основные виды движения твердого тела.
2. Какое движение твердого тела называют поступательным и какими свойствами оно обладает?
3. Могут ли траектории точек тела при его поступательном движении быть окружностями? Если – да, то приведите примеры.
4. Какими уравнениями задается поступательное движение тела?
5. Какое движение твердого тела называется вращением вокруг неподвижной оси? Как оно осуществляется? Каковы траектории точек тела при этом движении?
6. Каким уравнением задается вращение тела вокруг неподвижной оси?

7. Какие зависимости существуют между углом поворота, угловой скоростью и угловым ускорением тела?
8. Как направлены векторы угловой скорости и углового ускорения?
9. Как определяется скорость точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
10. Как определяется ускорение точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси? Как направлены и чему равны его составляющие?

3.3 Контрольные задачи по поступательному, вращательному движениям твердого тела. (Задача К2)

Используя закон движения одного из тел механизма, определить для заданного момента времени $t = t_1$ с скорость и ускорение точки М, скорость и ускорение тела 3, угловые скорости и угловые ускорения тел 1 и 2.

Схемы механизмов показаны на рисунках 3.7, а необходимые данные приведены в таблице 3.1

Пример выполнения задачи К2.

Для механизма, схема которого показана на рисунке 3.6, определить скорости и ускорения точки М и тела 3, а также угловые скорости и угловые ускорения тел1 и 2, если дано:

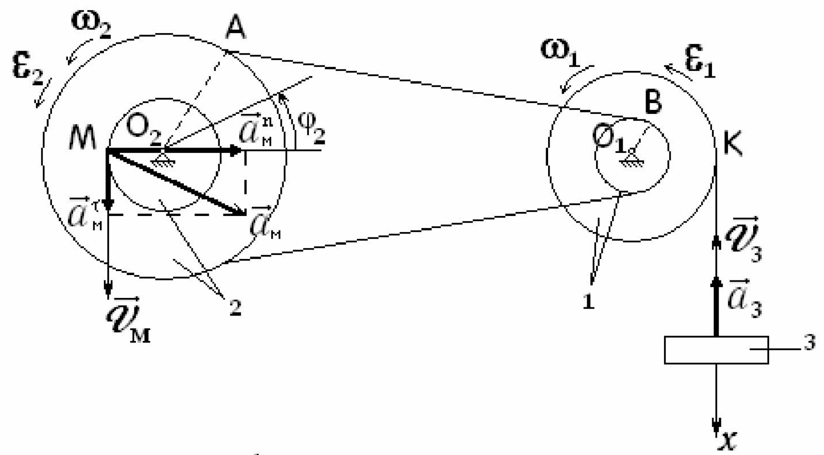


Рис. 3.6

$R_1 = 0.4м$,
$r_1 = 0.2м$,
$R_2 = 0.6м$,
$r_2 = 0.4м$,
$\varphi_2(t) = 3t^2 + t$ рад,
$t_1 = 1c$.

Решение:

Согласно условию задачи вычерчиваем схему механизма (рис. 3.6).

Используя закон движения тела 2 найдем его угловую скорость и угловое ускорение.

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = 6t + 1, \quad \omega_2(1) = 7c^{-1},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = 6, \ \varepsilon_2 = 6c^{-2}$$

Определим скорость и ускорение точки М

$$v_м = \omega_2 \cdot r_2 = 0.4(6t+1),\ v_м(1) = 0.4 \cdot 7 = 2.8\frac{м}{с},$$

$$a^\tau{}_м = \varepsilon_2 \cdot r_2 = 6 \cdot 0.4 = 2.4,\ a^\tau{}_м(1) = 2.4\frac{м}{с^2},$$

$$a^n{}_м = \omega_2{}^2 \cdot r_2 = (6t+1)^2 \cdot 0.4,\ a^n{}_м(1) = 7^2 \cdot 0.4 = 19.6\frac{м}{с^2},$$

$$a_м(1) = \sqrt{(a^\tau{}_м(1))^2 + (a^n{}_м(1))^2} = \sqrt{2.4^2 + 19.6^2} = 19.75\frac{м}{с^2}.$$

Сравнивая линейные скорости тел 2 и 1 в точках А и В, установим соотношение $\omega_1 r_1 = \omega_2 R_2$,

откуда $\omega_1 = \dfrac{R_2}{r_1}\omega_2 = \dfrac{0.6}{0.2}(6t+1) = 18t+3$, $\omega_1(1) = 21c^{-1}$.

Теперь $\varepsilon_1 = \dfrac{d\omega_1}{dt} = 18$, $\varepsilon_1(1) = 18c^{-1}$.

Сравнивая линейные скорости в точке К, находим $v_3 = \omega_1 R_1 = 0.4(18t+3) = 7.2t+1.2$, $v_3(1) = 0.4 \cdot 21 = 8.4\dfrac{м}{с}$.

Ускорение тела 3 будет равно $a_3 = \dfrac{dv_3}{dt} = 7.2$, $a_3(1) = 7.2\dfrac{м}{с^2}$.

Направление векторов показано на рис. 3.6

$v_м, \frac{м}{с}$	$a_м, \frac{м}{с^2}$	$v_{3, \frac{м}{с}}$	$a_3, \frac{м}{с^2}$	ω_1, c^{-1}	ε_1, c^{-1}	ω_2, c^{-1}	ε_2, c^{-1}
2,8	19,75	8,4	7,2	21	18	7	6

4. Сложное движение точки

Наблюдая движение окружающих нас тел, можно убедиться в том, что движение одного и того же тела будет казаться различным в зависимости от той системы, в которой ведется наблюдение за движением данного тела. При решении ряда задач приходится рассматривать движение точки или тела по отношению к нескольким системам отсчета, одна из которых считается условно неподвижной. Примерами указанного может быть движение человека в движущемся поезде, движение Луны вокруг Земли, Земли вокруг Солнца и т.п. Это значит, что наблюдаемые нами движения тел – относительные движения. Движение точки (тела) относительно нескольких систем отсчета называется <u>сложным движением</u>.

Условимся, при изучении сложного движения точки рассматривать две системы отсчета: систему, которую будем <u>условно</u> принимать за <u>неподвижную</u> (абсолютную) и систему <u>подвижную</u>.

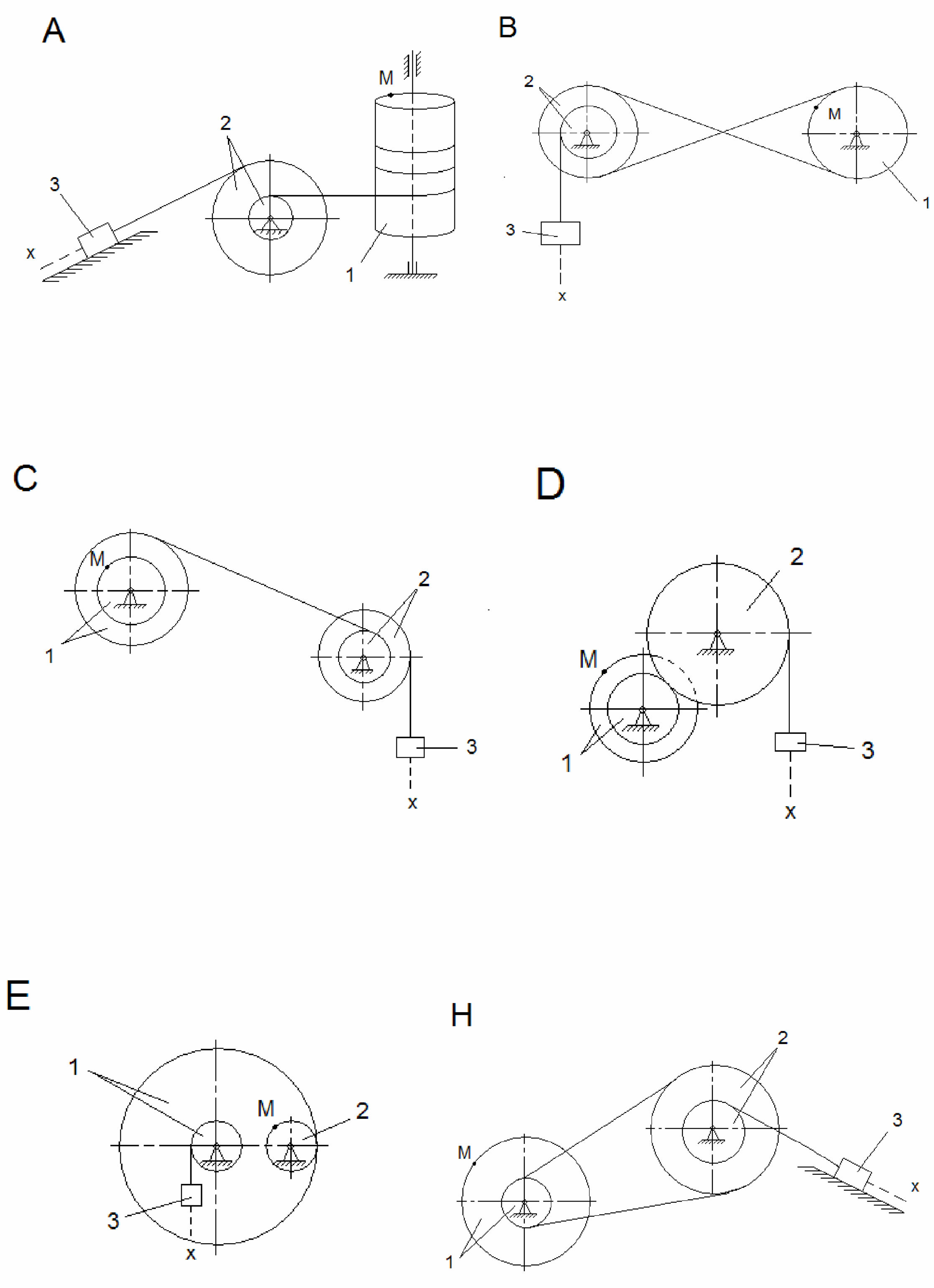


Рис. 3.7

Таблица 3.1

№ вар.	Шифр схемы	Уравнения движения тела	Радиусы, м				t_1, с
			R_1	$r1$	R_2	r_2	
1	A	x_3=0.1t^4+0.8t	0,6	-	0,6	0,3	1
2	B	φ_2=1-t^2	0,5	-	0,5	0,3	0,5
3	C	φ_1=0.5t^2+3	0,8	0,4	0,6	0,4	1
4	D	x_3=0.2t^3+t	0,9	0,8	1,0	-	1
5	E	φ_1=t(1-0.5t)	2,0	0,7	0,7	-	0,5
6	H	φ_2=10t	1,8	0,9	1,8	1,0	-
7	A	φ_1 =3+2.5t^4	1,0	-	0,8	0,4	1
8	B	φ_2=5t^2-2	0,3	-	0,3	0,2	1
9	C	x_3 =0.4t^2+1	0,5	0,3	0,4	0,2	0,5
10	D	φ_1=5t^3+2	0,8	0,7	0,9	-	1
11	E	φ_2=3-6t^2	1,8	0,6	0,6	-	0,5
12	H	x_3=1.2t^3	1,6	0,8	1,6	0,9	0,5
13	A	φ_1=1-t	0,8	-	0,6	0,4	-
14	B	x_3 =t^4+1	0,7	-	0,7	0,5	1
15	C	φ_1=10t^2-4	1,0	0,5	0,8	0,4	1
16	D	φ_2=2t(3-2t^2)	0,7	0,6	0,8	-	0,5
17	E	x_3=5t^2-1	1,7	0,5	0,5	-	0,5
18	H	φ_1=3t^3+t	1,4	0,7	1,4	0,8	1
19	A	x_3=t(1+3t^2)	0,9	-	0,5	0,3	1
20	B	φ_2= -10t^2	0,6	-	0,6	0,4	1
21	C	φ_1=1+20t	1,2	0,6	1,0	0,5	-
22	D	x_3=7+1.6t^2	0,5	0,4	0,6	-	0,5
23	E	φ_1=2.5t^4-8	1,5	0,4	0,4	-	1
24	H	φ_2=t^3-2t	1,2	0,6	1,2	0,7	1
25	A	φ_1=2.5t+1	0,4	-	1,0	0,5	-
26	B	φ_2=3t-4t^3	0,9	-	0,9	0,7	0,5
27	C	x_3=6t+t^4	0,7	0,4	0,5	0,3	1
28	D	φ_1=1-5t^2	0,4	0,3	0,5	-	1
29	E	φ_2=0.6t^2-2t	1,4	0,4	0,4	-	1
30	H	x_3=8t^3+5	1,0	0,5	1,0	0,6	0,5

Примечание к табл. 3.1 : x_3 – текущая абсцисса груза 3 в м; φ_1, φ_2 – углы поворота тел 1 и 2 в рад (положительное направление отсчета φ_1 и φ_2 против хода часовой стрелки).

Движение точки по отношению к неподвижной системе координат называется абсолютным движением. Скорость и ускорение точки в неподвижной системе координат называется абсолютной скоростью $\vec{v}$ и абсолютным ускорением $\vec{a}$.

Движение точки относительно подвижной системы координат называется <u>относительным движением</u>, а ее скорость и ускорение называются $\vec{v}_{отн.}$ и $\vec{a}_{отн.}$ В дальнейшем будем называть, соответственно $\vec{v}_r$ и $\vec{a}_r$.

Движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной называется <u>переносным движением</u>. Скорость переносного движения $\vec{v}_{пер.}$ в дальнейшем будем обозначать $\vec{v}_e$, а ускорение $\vec{a}_{пер}$ через $\vec{a}_e$.

4.1 Теорема о сложении скоростей (параллелограмм скоростей)

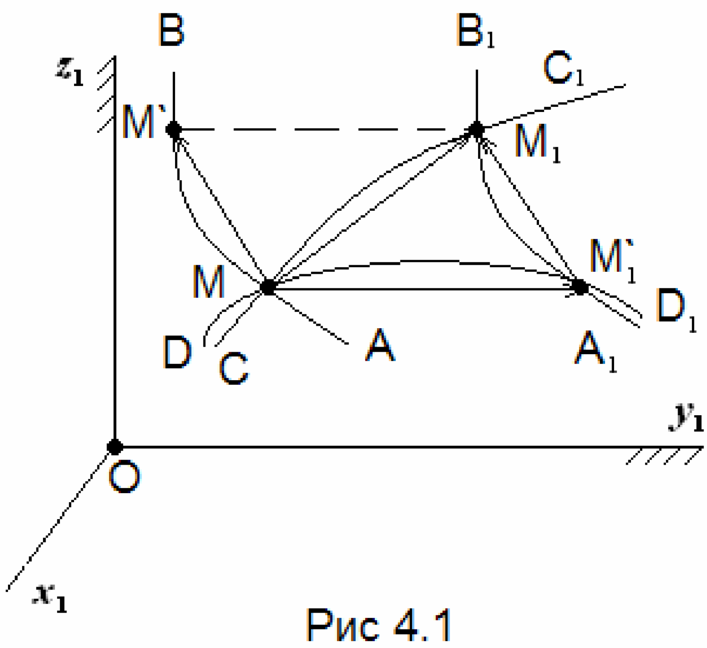


Рис 4.1

Рассмотрим сложное движение точки М (рис. 4.1). Здесь АВ – траектория относительного движения точки М; DD_1 – траектория переносного движения точки М; CC_1 – траектория абсолютного движения точки М. За время $\Delta t = t_1 - t$ точка М переместится в положение M_1, совершит абсолютное перемещение MM_1. Тогда из векторного треугольника **MM_1`M**, имеем

$\vec{MM_1} = \vec{MM_1^`} + \vec{M_1^` M_1}$. Разделив обе части этого равенства на Δt и переходя к пределу, получим

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{MM_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{MM`_1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{M`_1 M_1}}{\Delta t} \qquad (4.1)$$

<u>Здесь</u>: предел отношения вектора абсолютного перемещения точки к Δt называется вектором абсолютной скорости точки М ($\vec{v}$). Вообще, <u>вектором перемещения</u> называется такой вектор, который имеет начало в начальном положении точки и конец – в конечном положении точки. Поэтому $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{MM_1}}{\Delta t} = \vec{v}$. Этот вектор направлен по касательной к абсолютной траектории CC_1 точки М. Предел отношения вектора переносного перемещения точки к Δt

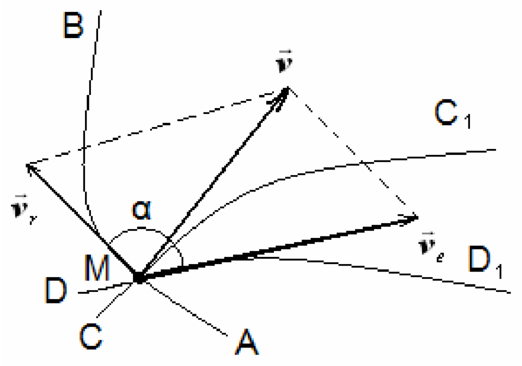


Рис 4.2

называется вектором переносной скорости, т.е. $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{M\vec{M}`_1}{\Delta t}=\vec{v}_e$. Этот вектор направлен (см. рис. 4.2) по касательной к переносной траектории $DD_1$ в точке М. Следовательно, по аналогии $\lim\limits_{\Delta\to t}\dfrac{M`_1 M_1}{\Delta t}=\vec{v}_r$, вектор направлен по касательной к траектории относительного движения точки. Подставим полученные значения в (4.1), получим

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r \tag{4.2}$$

Таким образом доказали теорему о сложении скоростей: при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей. Величина абсолютной скорости определяется

$$v = \sqrt{v_e^{\ 2} + v^2{}_r + 2v_e \cdot v_r \cdot \cos\alpha} \tag{4.3}$$

где **α** – угол между векторами $\vec{v}_e$ и $\vec{v}_r$. Построенная на рис. 4.2 фигура называется параллелограммом скоростей.

4.2 Теорема о сложении ускорений в случае поступательного переносного движения

Известно, $\vec{v}=\vec{v}_e+\vec{v}_r$. Возьмем производную по времени от обеих частей приведенного уравнения $\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{d\vec{v}_e}{dt}+\dfrac{d\vec{v}_r}{dt}$, или

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r \tag{4.4}$$

Следовательно, абсолютное ускорение точки в случае, когда переносное движение – поступательное по величине и направлению определяется диагональю параллелограмма, построенного на векторах переносного и относительного ускорений. Если задан угол «**α**» между векторами переносного и относительного ускорений, то величина абсолютного ускорения определяется:

$$a = \sqrt{a^2{}_e + a^2{}_r + 2a_e \cdot a_r \cdot \cos\alpha} \tag{4.5}$$

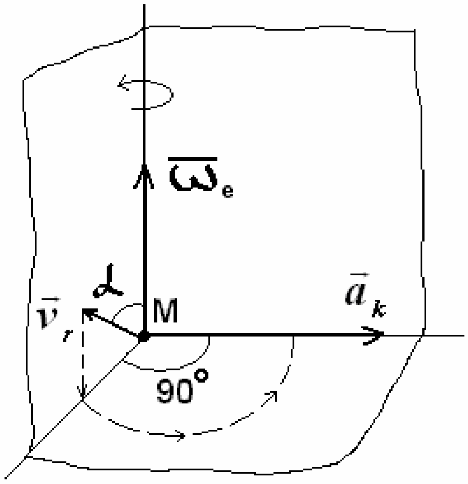


Рис. 4.3

4.3 Теорема о сложении ускорений в случае вращательного переносного движения

В случае вращательного переносного движения точки появляется добавочное ускорение. Оно характеризует изменение относительной скорости в переносном движении и переносной скорости в относительном движении. Открыл это добавочное ускорение французский ученый Г. Кориолис (1792…1843г.). В дальнейшем, в честь его, это ускорение назвали ускорение Кориолиса, $\vec{a}_k$. Таким образом, теорема формулируется: абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного, относительного и кориолисового ускорений. Математическая запись представляется в виде

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k \qquad \textbf{(4.6)}$$

Ускорение, которое выражается удвоенным векторным произведением угловой скорости переносного движения и относительной линейной скорости, называется ускорением Кориолиса, т.е. $\vec{a}_k = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$, причем

$$a_k = 2\omega_e v_r \sin\alpha \qquad \textbf{(4.7)}$$

где **α** – угол между векторами скоростей переносной угловой и относительной линейной. Следовательно, вектор $\vec{a}_k$ перпендикулярен плоскости, в которой расположены $\vec{\omega}_e$ и $\vec{v}_r$. На рис. 4.3 показано как определяется направление вектора $\vec{a}_k$.

Правило определения направления $\vec{a}_k$: вектор $\vec{v}_r$ проецируется на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{\omega}_e$ и этот вектор проекции скорости поворачивается на 90 градусов в сторону направления переносного движения.

Ускорение Кориолиса равно нулю:

1) Если $\omega_e = 0$, т.е. когда переносное движение является поступательным, или если угловая скорость переносного вращательного движения в данный момент времени равна нулю;
2) Если $v_r = 0$, т.е. точка неподвижна в подвижной системе отсчета;
3) Если α = 0 или 180 градусов, т.е. когда относительное движение происходит по направлению, параллельному оси переносного движения (оси вращения).

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определения относительного, переносного и абсолютного движений точки, а также скоростей и ускорений этих движений.
2. Какие применяют системы координат для исследования сложного движения точки?
3. Как определяются скорости точек, совершающих сложное движение?
4. Как построить вектор относительной скорости?
5. Как определяются ускорения точек, совершающих сложное движение в случае, когда переносное движение – поступательное?
6. Как определить ускорение точки в случае, когда переносное движение – вращательное?
7. Каковы причины появления ускорения Кориолиса?
8. Как определяется ускорение Кориолиса?
9. Как определить направление вектора $\vec{a}_k$?
10. В каких случаях ускорение Кориолиса обращается в ноль?
11. По образующей цилиндра, равномерно вращающегося вокруг своей оси, равномерно движется точка. Чему равно и как направлено ее абсолютное ускорение?

4.4 Контрольные задачи по разделу «Сложное движение точки» (задача К-3)

По телу D, которое вращается в горизонтальной плоскости вокруг неподвижной точки O согласно закону $\varphi = f_2(t)$ рад, перемещается точка M; закон ее относительного движения представлен в виде: $AM = f_1(t)$ см. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t = t_1$, с. Схемы движения точки M приведены на рис. 4.5, а законы движения и значения параметров приведены в таблице 4.1.

Пример решения задачи К-3

Треугольная пластина ABO (см. рис. 4.4)вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости пластины, согласно закону $\varphi = 6t^2 + 1$ рад. По стороне AB пластины перемещается точка M по закону $AM = \mathbf{5\sqrt{2}}\, t^2$ см. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$с, если OA = OB = 5 см. и угол AOB прямой.

Решение

Согласно условию задачи нарисуем схему механической системы, рис 4.4., и определим относительное положение точки

$$AM(1) = \mathbf{5\sqrt{2} \cdot 1^2} = \mathbf{5\sqrt{2}} \text{ см.}$$

Положение точки M_1 показано на чертеже. Учитывая, что движение точки M сложное, при этом переносное движение (движение пластины) вращательное, а относительное движение (движение точки M по пластине) прямолинейное, то абсолютную скорость и абсолютное ускорение определим по формулам

$\vec{v}_{абс} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер}$

$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор} = \vec{a}_{отн}^{\ \tau} + \vec{a}^{n}_{отн} + \vec{a}^{\tau}_{пер} + \vec{a}^{n}_{пер} + \vec{a}_{кор}$,

где

$v_{отн} = \dfrac{d(AM)}{dt} = 10\sqrt{2}t$, $\quad v_{отн}(1) = 10\sqrt{2}\cdot 1 = 14{,}2$ см/с,

$a^{\tau}_{отн} = \dfrac{dv_{отн}}{dt} = 10\sqrt{2}$, $\quad a^{\tau}_{отн}(1) = 10\sqrt{2} = 14{,}2$ см/с^2

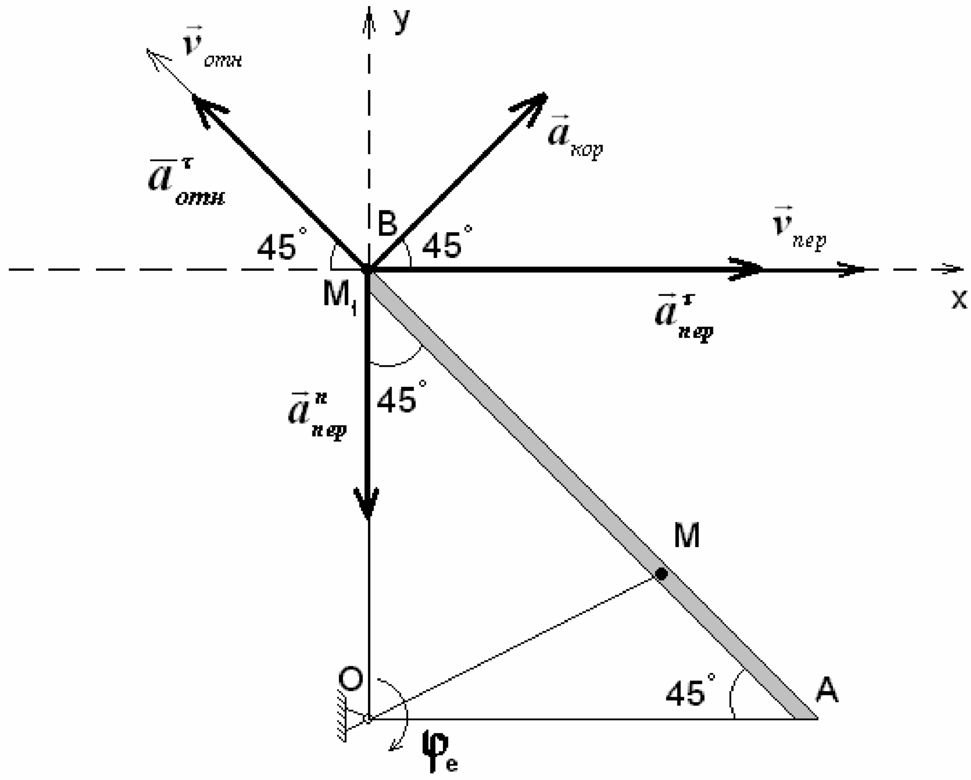


Рис. 4.4

$a^{n}_{отн} = \dfrac{v^2_{отн}}{p} = \dfrac{(10\sqrt{2}t)^2}{\infty} = 0$, $\quad a^{n}_{отн}(1) = 0$,

$\omega_{пер} = \dfrac{d\varphi_e}{dt} = 12t$, $\quad \omega_{пер}(1) = 12\cdot 1 = 12$ с$^{-1}$,

$\varepsilon_{пер} = \dfrac{d\omega_{пер}}{dt} = 12$, $\quad \varepsilon_{пер}(1) = 12$ с$^{-2}$,

$v_{пер} = \omega_{пер}\cdot h = (12t)(MO)$, $\quad v_{пер}(1) = 12\cdot 5 = 60$ см/с,

$a^{\tau}_{пер} = \varepsilon_{пер}\cdot h = 12\cdot(M_1O)$, $\quad a^{\tau}_{пер}(1) = 12\cdot 5 = 60$ см/с^2,

$a^{n}_{пер} = (\omega_{пер})^2\cdot h = (12t)^2(M_1O)$, $\quad a^{n}_{пер}(1) = (12)^2\cdot 5 = 720$ см/с^2,

$$a_{кор} = 2\omega_{пер} \cdot v_{отн} \cdot \sin(\vec{\omega}_{пер} \wedge \vec{v}_{отн}) = 2 \cdot 12t \cdot 10\sqrt{2}t \cdot \sin 90^0,$$

$$a_{кор}(1) = 2 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 10\sqrt{2} \cdot 1 \cdot 1 = 340{,}8 \text{ см/с}^2.$$

Направление векторов всех кинематических характеристик точки M_1 указаны на рисунке 4.4. Используя метод проекций находим:

$$(v_{абс})_x = (v_{отн})_x + (v_{пер})_x = -v_{отн}\cos 45^0 + v_{пер} = -10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 60 = 50,$$

$$(v_{абс})_y = (v_{отн})_y + (v_{пер})_y = v_{отн}\sin 45^0 + 0 = 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10,$$

Следовательно, модуль абсолютной скорости точки М равен

$$v_{абс} = \sqrt{(v_{абс})_x^2 + (v_{абс})_y^2} = \sqrt{(50)^2 + (10)^2} = 51 \text{ см/с},$$

$$(a_{абс})_x = (a^{\tau}_{отн})_x + (a^{n}_{отн})_x + (a^{\tau}_{пер})_x + (a^{n}_{пер})_x + (a_{кор})_x = -a^{\tau}_{отн}\cos 45^0 + 0 + a^{\tau}_{пер} + 0 +$$

$$+ a_{кор}\cos 45^0 = a_{кор}\cos 45^0 == -10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 60 + 240\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 290 см/с$$

$$(a_{абс})_y = (a^{\tau}_{отн})_y + (a^{n}_{отн})_y + (a^{\tau}_{пер})_y + (a^{n}_{пер})_y + (a_{кор})_y =$$

$$= a^{\tau}_{отн}\sin 45^0 + 0 + 0 - a^{n}_{пер} + a_{кор}\sin 45^0 =$$

$$= 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 720 + 240\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -470 \text{ см/с}$$

Тогда модуль абсолютного ускорения определяется

$$a_{абс} = \sqrt{(a_{абс})_x^2 + (a_{абс})_y^2} = \sqrt{(290)^2 + (-470)^2} = 552 \text{ см/с}^2$$

Ответ: $v_{абс} = 51$ см/с, $a_{абс} = 552$ см/с^2.

5. Составное (сложное) движение твердого тела

Задачей кинематики в этом случае является нахождение зависимости между характеристиками относительного, переносного и абсолютного ускорений. Основными кинематическими характеристиками движения тела, как уже знаем, являются его поступательные и угловые скорости и ускорения. В дальнейшем ограничимся определением зависимостей только между поступательными и угловыми скоростями движений.

5.1. Сложение двух поступательных движений

В этом случае как относительное, так и переносное движение являются поступательными, т.е. характеризуются, соответственно, скоростями перемещения всех точек тела, как одного, так и другого - $\vec{v}_r$ и $\vec{v}_e$.

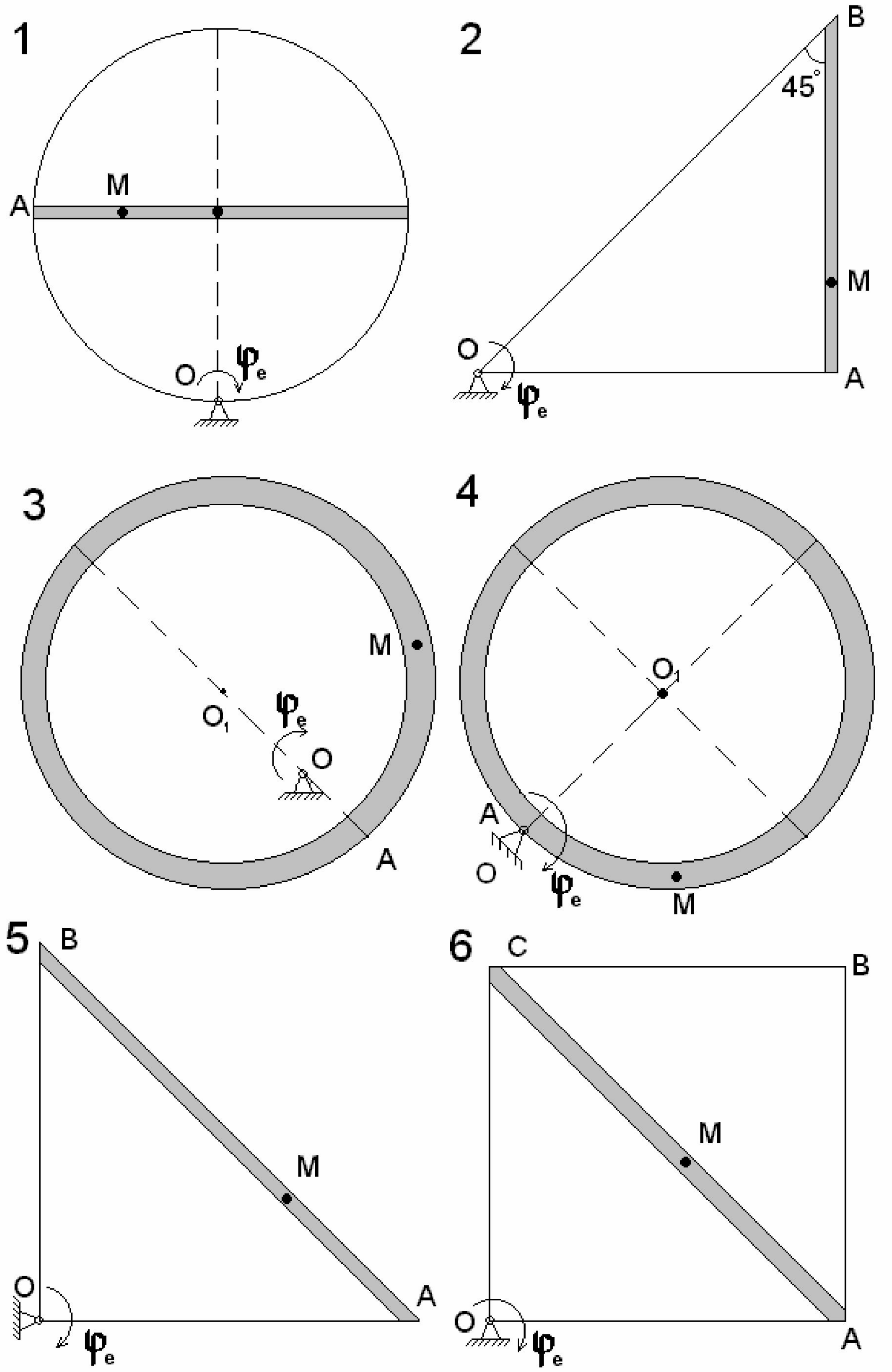

1
A
M
O
φ_e
2
B
45°
M
O
A
φ_e
3
M
O_1
φ_e
O
A
4
O_1
A
O
φ_e
M
5
B
M
O
A
φ_e
6
C
B
M
O
A
φ_e

Рис 4.5

Таблица 4.1

№ вар	№ схемы	Уравнение относительного движения точки М AM = f_1 (t) cm	Уравнение движения тела $\varphi_e = f_2(t)$ рад	t, c	b, cm	R, cm
1	1	$6t^3$	$2t^2-t$	1	-	6
2	2	$8t^2+2$	$4t^2$	½	4	-
3	3	$3\pi t^2$	t^3+t	1	-	3
4	4	$5\pi t^3$	$2t^2$	1	-	10
5	5	$8\sqrt{2}t^2$	πt^2	1	16	-
6	6	$5\sqrt{2}t^3$	t^2-1	1	5	-
7	1	$8t^2$	t^2+t	½	-	1
8	2	$3t^2+2$	$4t^2$	1	5	-
9	3	$8\pi t^2$	πt^2+1	½	-	2
10	4	$4\pi t^2$	$2\pi t^2$	½	-	1
11	5	$3\sqrt{2}t^2$	t^3-t	1	6	-
12	6	$4\sqrt{2}t^2$	t^2+2	1	4	-
13	1	$10t^2+2$	$2\pi t^2$	1	-	6
14	2	$4t^2+2$	t^2+1	1	6	-
15	3	$6\pi t^2$	πt^2	1	-	6
16	4	$4\pi t^2$	$2\pi t^3$	1	-	4
17	5	$2\sqrt{2}t^2$	t^2-1	2	8	-
18	6	$4\sqrt{2}t^3$	$2\pi t^2$	1	8	-
19	1	$12t^2$	t^3	½	-	3
20	2	$2t^2+2$	πt^3	1	4	-
21	3	$16t^2$	t^2	1	-	16
22	4	$10\sqrt{2}t^2$	t^2-t	1	-	$10\sqrt{2}$
23	5	$6\sqrt{2}t^2$	πt^2	1	6	-
24	6	$8\sqrt{2}t^3$	$4t^2$	½	2	-
25	1	$12t^2$	πt^3	1	-	6
26	2	$3t^2+2$	t^3-t	1	5	-
27	3	$10\pi t^2$	πt^2	1	-	10
28	4	$5\pi t^2$	$2\pi t^3$	1	-	10
29	5	$12\sqrt{2}t^3$	t^2+2t	1	24	-
30	6	$7\sqrt{2}t^2$	t^3-2t	1	14	-

Следовательно, по теореме сложения скоростей все точки в абсолютном движении будут иметь одну и ту же скорость $\vec{v} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер}$, или

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e \qquad \textbf{(5.1)}$$

Таким образом, при сложении двух поступательных движений со скоростями $\vec{v}_r$ и $\vec{v}_e$ результирующее движение тела также является поступательным и $\vec{v}$ определяется в виде геометрической суммы $\vec{v}_r$ и $\vec{v}_e$. Задача сложения скоростей в этом случае сводится к задаче кинематики точки.

Примером рассмотренного движения может быть движение тележки (относительное движение) по кран-балке (при этом, перемещение самой кран-балки по цеху является переносным движением).

5.3. Сложение поступательного и вращательного движений

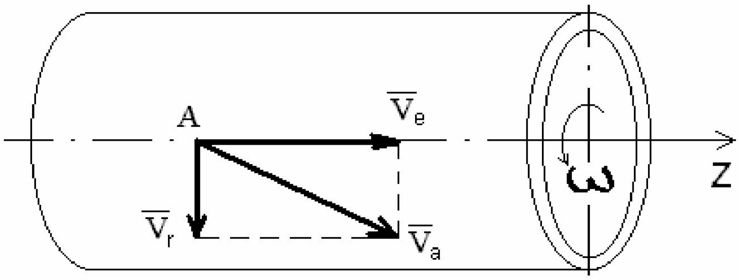


Рис. 5.1

Этот вид движений можно рассмотреть на примере перемещения трубы радиусом R в процессе ее термической обработки, во время которой все точки трубы участвуют в поступательном движении вдоль оси Z и вращательном движении вокруг оси Z (см. рис. 5.1).

Точка А трубы имеет переносную скорость $\vec{v}_{пер} = \vec{v}_e$ (поступательное движение) и относительную скорость $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_r$ (вращательное движение). Известно, что линейная скорость при вращательном движении определяется $v = \omega \cdot R$, т.е. $v_r = \omega_{отн} \cdot R$. Здесь $\omega_{отн} = \omega_r$ - угловая скорость при вращательном (относительном) движении точек трубы. Следовательно, абсолютная скорость точки А трубы равна $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e$.

Значит

$$v = \sqrt{v_e^2 + (\omega_{отн} \cdot R)^2} \qquad \textbf{(5.2)}$$

5.3. Сложение вращений вокруг двух параллельных осей

Рассмотрим случай, когда относительное движение тела «К» является вращение его с угловой скоростью $\omega_{отн} = \omega_r$ вокруг оси «аа$_1$», укрепленной на кривошипе «bа» (см. рис. 5.2а), а переносное – вращением кривошипа «bа» вокруг оси

«bb_1», параллельной оси «aa_1» с угловой скоростью $\omega_{пер} = \omega_e$. Следовательно, движение тела «К» будет плоскопараллельным, с учетом указанных движений и положения плоскости тела «К» (она перпендикулярна названным выше осям). При определении ω_a возможны частные случаи.

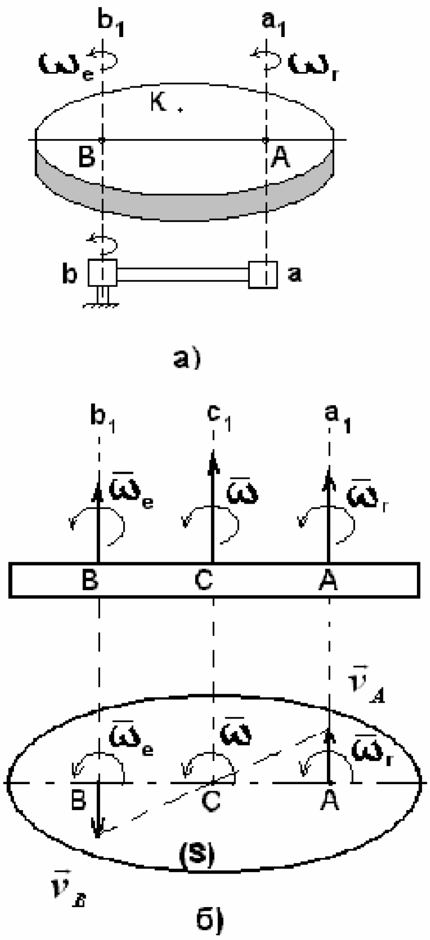


Рис. 5.2

5.3.1. Вращения направлены в одну сторону

Из рис. 5.2б легко видеть, что точка А, лежащая на оси «aa_1», получает скорость только от вращения вокруг оси «bb_1», значит $\boldsymbol{v}_A = \omega_e \cdot \boldsymbol{AB}$. По аналогии $\boldsymbol{v}_B = \omega_r \cdot \boldsymbol{BA}$. При этом $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$ (они оба перпендикулярны АВ) и направлены в разные стороны. Тогда точка «С» будет МЦС – мгновенным центром скоростей (см. раздел 6 «Плоскопараллельное движение твердого тела»), т.е. $\boldsymbol{v}_c = \boldsymbol{0}$ и ось «Cc_1» является мгновенной осью вращения. Для определения угловой скорости ω абсолютного вращения тела вокруг оси «Cc_1»

и положения этой оси воспользуемся равенством (из раздела о МЦС) $\boldsymbol{v}_A = \omega \cdot \boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{v}_B = \omega \cdot \boldsymbol{BC}$, или $\omega_a = \dfrac{\boldsymbol{v}_A}{\boldsymbol{AC}} = \dfrac{\boldsymbol{v}_B}{\boldsymbol{BC}}$. Из свойств пропорции получим

$$\omega = \frac{\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_B}{\boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}} = \frac{\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_B}{\boldsymbol{AB}} \qquad \textbf{(5.3)}$$

Подставляя в (5.3) значение $\boldsymbol{v}_A = \omega_e \cdot \boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{v}_B = \omega_r \cdot \boldsymbol{BA}$, получим $\omega = \omega_e + \omega_r$, или

$$\frac{\omega}{\boldsymbol{AB}} = \frac{\omega_e}{\boldsymbol{AC}} = \frac{\omega_r}{\boldsymbol{BC}} \qquad \textbf{(5.4)}$$

С течением времени мгновенная ось «Cc_1» меняет свое положение, описывая цилиндрическую поверхность.

5.3.2 Вращения направлены в разные стороны

Изобразим сечение (S) тела «К» (см. рис. 5.3) и допустим, для определенности, что $\omega_r > \omega_e$. Тогда, рассуждая, как и в предыдущем случае, найдем скорости точек А и В, численно равные $\boldsymbol{v}_A = \omega_e \cdot \boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{v}_B = \omega_r \cdot \boldsymbol{BA}$; при этом $\vec{v}_A \| \vec{v}_B$ и направлены в одну сторону. Тогда мгновенная ось

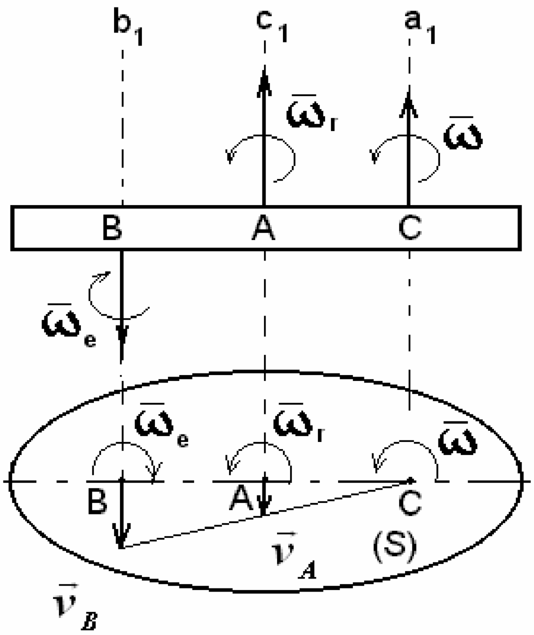


Рис 5.3

вращения проходит через точку «С», причем $\omega = \dfrac{v_B}{BC} = \dfrac{v_A}{AC}$, или по свойствам пропорций

$$\omega = \frac{v_B - v_A}{BC - AC} = \frac{v_B - v_A}{AB} \qquad (5.5)$$

Подставляя в эти равенства значения v_A и v_B найдем окончательно

$$\omega = \omega_r - \omega_e \qquad (5.6)$$

а так же

$$\frac{\omega}{AB} = \frac{\omega_r}{BC} = \frac{\omega_e}{AC} \qquad (5.7)$$

Полученные результаты показывают, что векторы угловых скоростей при вращении вокруг параллельных осей складываются также, как и векторы параллельных сил.

5.4. Сложение вращательных движений вокруг пересекающихся осей

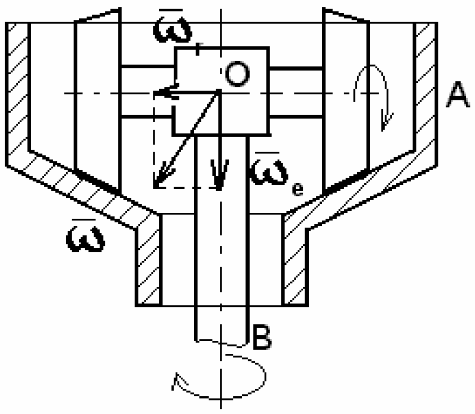


Рис. 5.4

Указанный вид движения можно рассмотреть на примере мельничных бегунов для растирания кусковых материалов (см. рис. 5.4) .

Угловая скорость вращения бегунов относительно геометрической оси ОА будет $\vec{\omega}_r$. Угловая скорость вращения ОВ является переносной угловой скоростью ω_e. Тогда абсолютная угловая скорость определяется $\vec{\omega} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e$, по модулю

$$\omega = \sqrt{\omega_r^2 + \omega_e^2 + 2\omega_r \cdot \omega_e \cdot \cos\alpha} \qquad (5.8)$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что представляет собой абсолютной движение тела, участвующего в нескольких вращениях вокруг сходящихся мгновенных осей?
2. Как определяют угловую скорость твердого тела, вращающегося вокруг двух параллельных осей в одну и в разные стороны?
3. Как формулируется теорема о сложении вращений вокруг параллельных осей? Вокруг пересекающихся осей?

4. Что представляет собой движение твердого тела, участвующего в нескольких вращениях вокруг произвольных осей и в нескольких поступательных движениях?
5. Что такое мгновенная ось вращения, мгновенная угловая скорость, мгновенное угловое ускорение?

6. Плоскопараллельное движение твердого тела

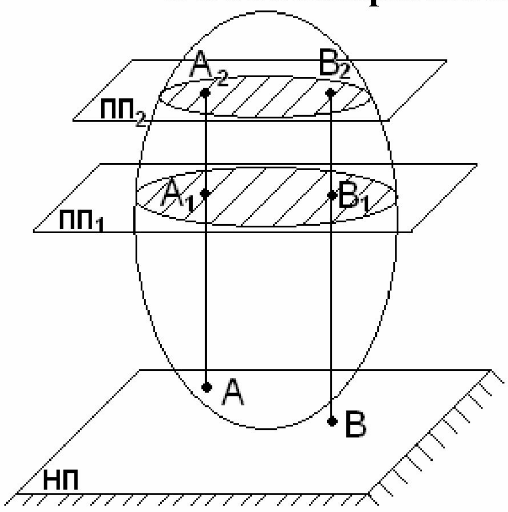


Рис. 6.1

Большое распространение в технике имеет сложное движение твердого тела, называемое плоскопараллельным (или плоским) движением.

Движение любой призмы, основание которой скользит по неподвижной плоскости, качение колеса по прямолинейному рельсу, движение шатуна кривошипно-шатунного механизма – представляют собой случаи движения твердого тела, отвечающие определенной закономерности.

Плоскопараллельным (плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости. Изучение этого движения можно свести к рассмотрению движения плоской фигуры в ее плоскости. Все точки, лежащие на одном перпендикуляре к неподвижной плоскости, будут совершать одинаковые движения. Это значит, что положение тела при плоском движении будет определяться положением произвольного сечения (S), параллельного неподвижной плоскости (НП); подвижные плоскости обозначены $ПП_1$ и $ПП_2$ (см. рис. 6.1). Для определения положения сечения (S) в плоскости ХОУ зададим в этом сечении (см. рис. 6.2) прямую АВ с координатами ее точки А в виде X_A и $У_A$, а также угол «φ», который образует

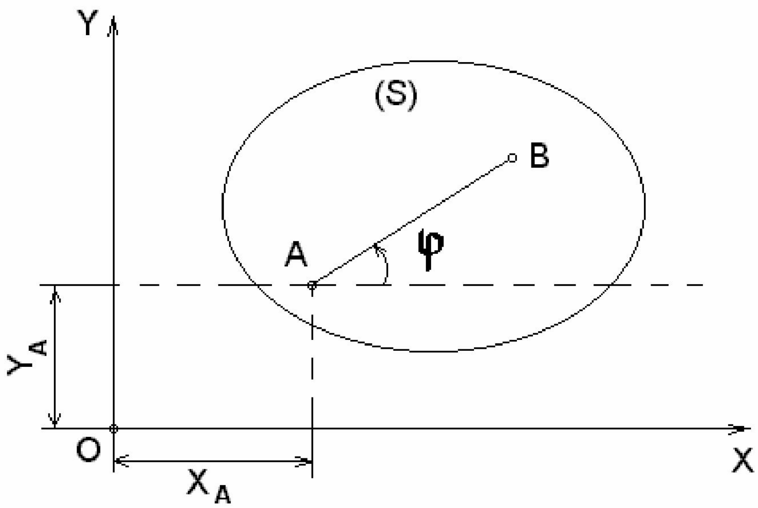


Рис. 6.2

отрезок АВ с осью OX. Тогда точку A, выбранную для определения положения сечения (S), будем в дальнейшем называть <u>полюсом</u>. Очевидно, с течением времени величины X_A, $У_A$ и φ будут изменяться, т.е.

$$X_A = f_1(t),\ Y_A = f_2(t) \text{ и } \varphi = f_3(t) \qquad (6.1)$$

Эти уравнения, определяющие закон происходящего движения, называются уравнениями плоского движения тела.

6.1 Разложение плоского движения на поступательное и вращательное

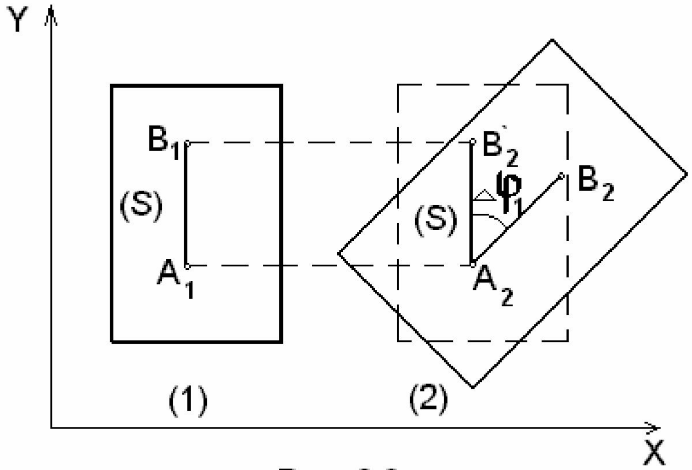


Рис. 6.3

Покажем, что плоское движение твердого тела слагается из (см. рис. 6.3) поступательного и вращательного движений. Рассмотрим два последовательных положения (1) и (2) сечения (S). Переместим сначала тело поступательно так, чтобы полюс A_1, двигаясь вдоль своей траектории, пришел в положение A_2, при этом отрезок A_1B_1 займет положение $A_2B`_2$, а затем повернем сечение вокруг полюса A_2 на угол $\Delta\varphi_1$. Таким же путем можно переместить тело из положения (2) в следующее и т.д.

<u>Вывод:</u> плоское движение твердого тела слагается из <u>поступательного</u> движения, при котором все точки тела движутся так же, как и полюс A, и <u>вращательного</u> их движения вокруг этого полюса.

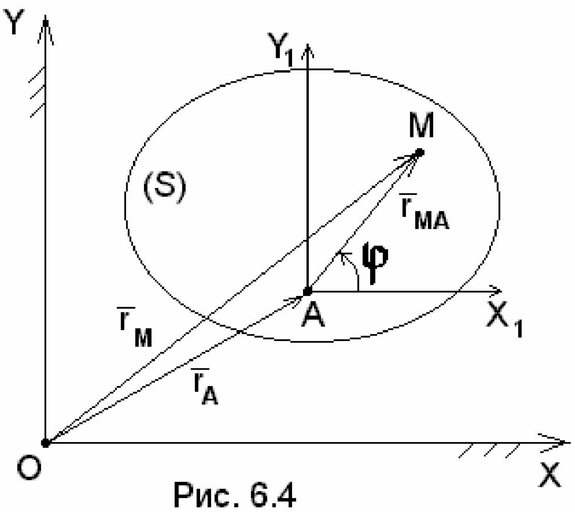


Рис. 6.4

Поступательная часть движения тела описывается уравнениями $X_A = f_1(t)$ и $Y_A = f_2(t)$, а вращение вокруг полюса – уравнением $\varphi = f_3(t)$. Все кинематические параметры плоского движения определяются из приведенных выше уравнений. В качестве полюса можно выбрать любую точку тела; вращательная часть от выбора полюса не зависит.

6.2 Определение скоростей точек тела при плоском движении

Рассмотрим плоское движение твердого тела. Положение любой точки М, лежащей в сечении (S) тела (см. рис. 6.4), определяется по отношению к осям ХОУ радиусом-вектором $\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}_{MA}$, где $\vec{r}_A$ - радиус-вектор полюса А; $\vec{r}_{MA}$ - радиус-вектор, определяющий положение точки М в подвижной системе координат X_1AY_1; $\vec{r}_M$ - радиус-вектор, определяющий положение точки М в абсолютном движении. Тогда $\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{MA}}{dt}$,

здесь

$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{v}_M$ - вектор скорости точки М в абсолютном движении;

$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A$ -вектор скорости точки А, принятой за полюс;

$\frac{d\vec{r}_{MA}}{dt} = \vec{v}_{MA}$ - вектор скорости точки М, относительно подвижной системы координат, т.е. при вращении тела (значит и точки М) вокруг полюса А. Следовательно,

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA} \qquad \textbf{(6.2)}$$

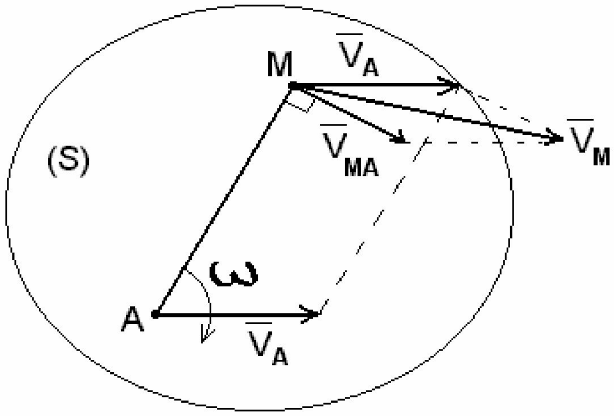


Рис. 6.5

При этом скорость $\vec{v}_{MA}$ во вращательном движении вокруг полюса А определяется по величине как $v_{MA} = \omega \cdot MA$, где ω - угловая скорость твердого тела, $\vec{v}_{MA}$ всегда перпендикулярен вектору $\vec{MA}$.

Вывод: скорость любой точки М тела геометрически складывается из скорости какой-либо другой точки А, принятой за полюс, и скорости точки М в ее вращении вместе с твердым телом вокруг этого полюса.

Модуль и направление скорости $\vec{v}_M$ находятся построением соответствующего параллелограмма (см. рис. 6.5). Согласно (6.2) в точке М строятся векторы $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_{MA}$, при этом величина этой скорости определяется по известным значениям ω и МА.

6.3 Теорема о проекциях скоростей двух точек тела

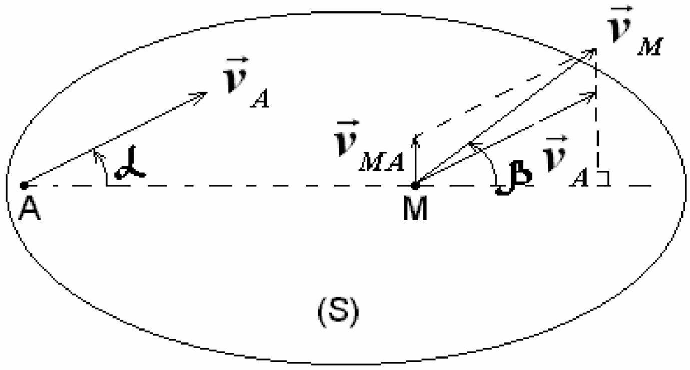


Рис. 6.6

Теорема: проекции скоростей двух точек тела на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой.

Пусть в сечении (S) тела, совершающего плоское движение, известна скорость точки A (см. рис. 6.6.), т.е. $\vec{v}_A$. Известно, $\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}$.

Спроецируем обе части равенства на линию AM и учитывая, что $\vec{v}_{MA} \perp$MA, находим

$$v_M \cdot \cos\beta = v_A \cdot \cos\alpha \qquad \textbf{(6.3)}$$

Этот результат позволяет легко определять скорость данной точки тела, если известны направления движения этой точки и скорость какой-нибудь другой точки того же тела.

6.4. Мгновенный центр скоростей (МЦС)

В процессе движения плоской фигуры в каждый момент времени существует такая точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Эта точка называется мгновенным центром скоростей (МЦС).

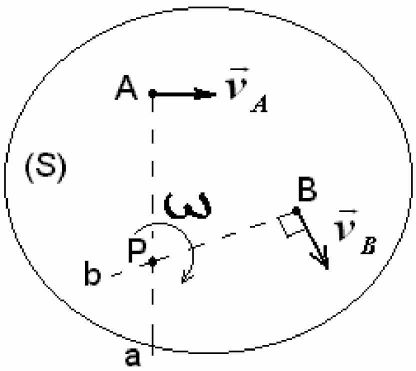


Рис. 6.7

Пусть в данный момент времени t точки A и B тела, лежащие в сечении (S), имеют скорости $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ не параллельные друг другу (см. рис. 6.7). Тогда точка P, лежащая на пересечении перпендикуляров Aa $\perp \vec{v}_A$ и Bb$\perp \vec{v}_B$ будет МЦС и $\vec{v}_p = \mathbf{0}$. Если допустить, что $\vec{v}_P \neq \mathbf{0}$, то по теореме о проекциях скоростей двух точек вектор $\vec{v}_P$ должен быть одновременно перпендикулярен Aa и Bb, что невозможно.

Примем точку P в данный момент времени за полюс. Тогда для точки A скорость $\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PA}$, так как $\vec{v}_P = \mathbf{0}$ (МЦС). Аналогичный результат будет для любой точки тела (в данный момент времени). Следовательно, скорость любой точки тела, лежащей в сечении (S), равна ее вращательной скорости вокруг мгновенного центра скоростей (точки P). Тогда,

$v_A = \omega \cdot PA$, $(\vec{v}_A \perp \vec{PA})$, $v_B = \omega \cdot PB$, $(\vec{v}_B \perp \vec{PB})$, откуда

$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB} \qquad \textbf{(6.4)}$$

Вывод: скорости точек тела пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей.

Полученные результаты показывают:

1) Для определения МЦС необходимо знать только направления скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ каких-нибудь двух точек А и В сечения тела; МЦС находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек А и В к скоростям этих точек.
2) Для определения скорости любой точки тела надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь любой точки А тела и направление скорости другой его точки В.
3) Угловая скорость тела равна в каждый данный момент времени отношению скорости какой-нибудь точки сечения (S) к ее расстоянию от МЦС, т.е.

$$\omega = \frac{v_B}{PB} \qquad \textbf{(6.5)}$$

Рассмотрим некоторые случаи нахождения МЦС (см. рис. 6.8). Из приведенных рисунков видно как найти МЦС (способ нахождения) и согласно $\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}$ определяются расстояния РА или РВ. На рис. 6.8в и 6.8г точка Р находится в бесконечности, т.е. тело совершает мгновенно поступательное движение, $v_A = v_B$.

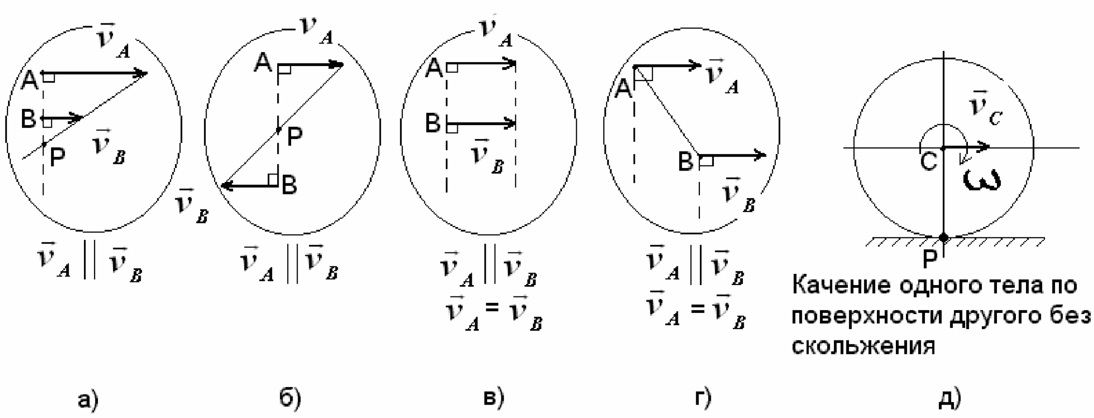


Рис. 6.8

6.5. Определение ускорений точек тела

Ускорение любой точки М твердого тела при плоском движении складывается из ускорений, которые она получает в поступательном и вращательном движениях этого тела. Покажем это, используя рис. 6.4. Из него следует, что $\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}_{MA}$. Продифференцируем приведенное равенство дважды по времени, получим $\dfrac{d^2\vec{r}_M}{dt^2} = \dfrac{d^2\vec{r}_A}{dt^2} + \dfrac{d^2\vec{r}_{MA}}{dt^2}$, где

$\dfrac{d^2\vec{r}_M}{dt^2} = \vec{a}_M$ - ускорение точки М при плоском движении твердого тела;

$\dfrac{d^2\vec{r}_A}{dt^2} = \vec{a}_A$ - ускорение полюса А;

$\dfrac{d^2\vec{r}_{MA}}{dt^2} = \vec{a}_{MA}$ - ускорение, получаемое точкой М, при ее вращении вместе с телом вокруг полюса А. Следовательно,

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA} \qquad \textbf{(6.6)}$$

Из теории вращательного движения известно, что

$$a_{MA} = MA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \text{ и } tg\alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \qquad \textbf{(6.7)}$$

Здесь ω и ε - соответственно, угловая скорость и угловое ускорение тела; α - угол между направлением $\vec{a}_{MA}$ и отрезком $\vec{MA}$.

<u>Вывод</u>: Ускорение любой точки М твердого тела геометрически складывается из ускорения какой-нибудь другой точки, принятой за полюс, и ускорения точки М в ее вращении вместе с телом вокруг этого полюса.

Модуль и направление $\vec{a}_M$ находятся построением соответствующего параллелограмма (рис. 6.9). Однако, графическое определение $\vec{a}_M$ возможно при заданном $\vec{a}_A$, известных величинах ω и ε, а так же вычисленном α. Поэтому при решении задач удобно вектор $\vec{a}_{MA}$ заменить его двумя составляющими $\vec{a}^{\tau}_{MA}$ и $\vec{a}^{n}_{MA}$, определяемыми $a^{\tau}_{MA} = \varepsilon \cdot MA$ и $a^{n}_{MA} = \omega^2 \cdot MA$. При этом вектор $\vec{a}^{\tau}_{MA}$ направлен перпендикулярно к МА в <u>сторону</u> направления вращения, если оно <u>ускоренное</u> и <u>против</u> вращения в случае <u>замедленного</u> движения; вектор $\vec{a}^{n}_{MA}$ всегда направлен от точки М к полюсу А (см. рис. 6.10а и б). Тогда ускорение точки М можно записать в виде

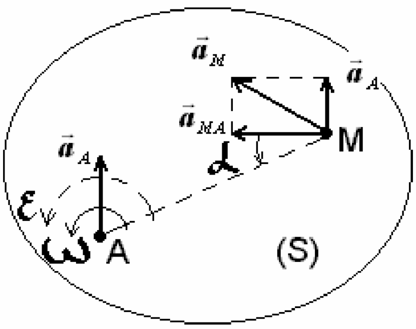


Рис. 6.9

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{MA} + \vec{a}^{n}_{MA} \qquad \textbf{(6.8)}.$$

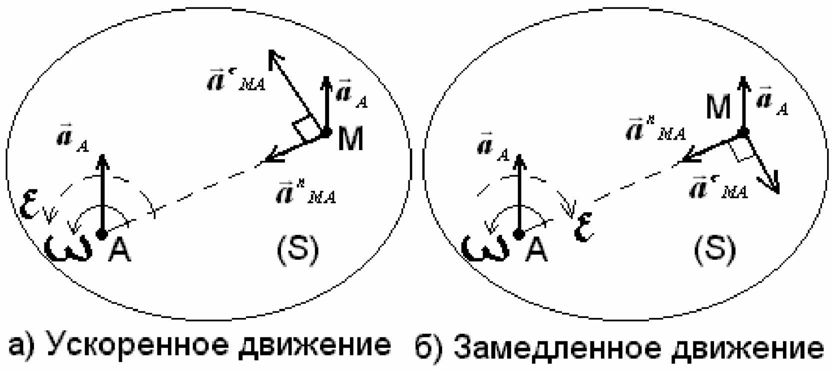


Рис. 6.10

В случае, если полюс А движется не прямолинейно, то и его ускорение может также иметь две составляющие: касательную и нормальную. Тогда полное ускорение точки М может иметь вид:

$$\vec{a}_M = \vec{a}^{\tau}_A + \vec{a}^{n}_A + \vec{a}^{\tau}_{MA} + \vec{a}^{n}_{MA} \tag{6.9}$$

Задача определения ускорения точки М решается проецированием уравнений (6.8) или (6.9) на оси координат «τ » и «n».

Вопросы для самоконтроля

1. Какое движение твердого тела называется плоскопараллельным?
2. К изучению какой фигуры сводится кинематика плоского движения?
3. Какими уравнениями задается плоское движение?
4. Зависит ли поступательное перемещение плоской фигуры и ее вращение от выбора полюса?
5. Как по уравнениям движения плоской фигуры найти скорость полюса и угловую скорость?
6. Как определить скорость любой точки тела при плоскопараллельном движении?
7. Что называется мгновенным центром скоростей плоской фигуры и как он определяется в различных случаях?
8. Где находится МЦС плоской фигуры, совершающей мгновенно поступательное движение?
9. Как определяются скорости точек тела при плоском движении?
10. Какая точка колеса, катящегося без скольжения по неподвижной плоскости, имеет наибольшую скорость?
11. Можно ли рассматривать плоскопараллельное движение тела как сложное движение?
12. Как определяется ускорение любой точки плоской фигуры?
13. Будет ли равно нулю ускорение в точке МЦС?
14. Как направлено ускорение точки М плоской фигуры, если угловая скорость постоянна, а ускорение полюса А направлено по прямой АМ?
15. Как направлено ускорение точки М, если плоская фигура совершает мгновенно поступательное движение, а ускорение точки А перпендикулярно прямой АМ?

16. Что можно сказать об угловой скорости плоской фигуры, если ускорение точки A равно нулю, а ускорение точки M направлено вдоль прямой AM?

6.6. Контрольные задачи по разделу «Плоское движение твердого тела» (задача К-4)

Плоский механизм, положение которого определяется углами α, β, γ, φ, θ, состоит из стержней, длины которых равны соответственно l_1=0.4м, l_2=1.2м, l_3=1.6м, l_4=0.6м. Для заданных значений ω_1 и ε_1 найти линейные скорости узловых точек механизма, положения мгновенных центров скоростей звеньев, угловые скорости звеньев, ускорения точек A и B, а также угловое ускорение звена AB. Схемы механизмов приведены на рис. 6.11. Примечания. Дуговые стрелки на рисунках показывают как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие углы. Заданные угловые скорости и угловые ускорения считать направленными против хода часовой стрелки. Исходные данные приведены в таблице 6.1.

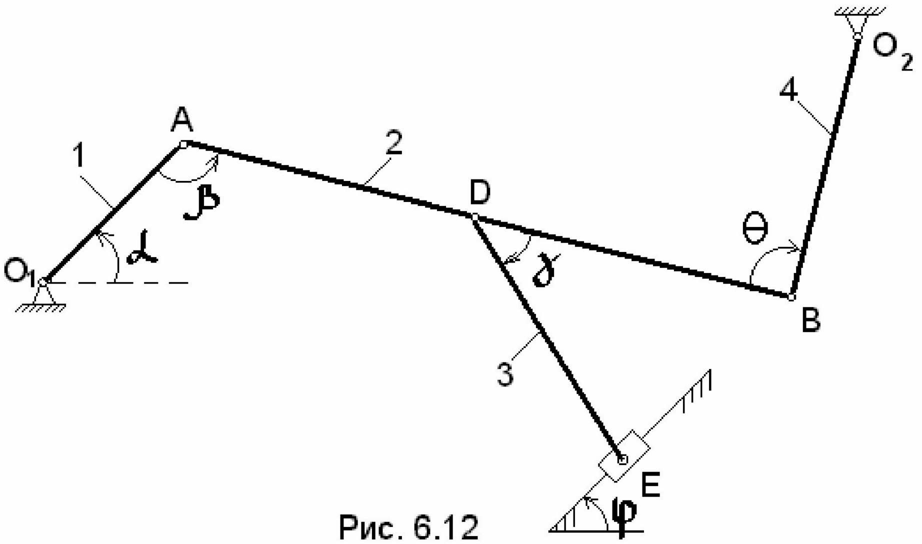


Рис. 6.12

Пример решения задачи

Механизм, см. рис. 6.12, состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна E, соединенных между собой и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами. Определить v_A, v_B, v_D, v_E, ω_2, ω_3, ω_4, a_A, a_B, ε_2 и положение мгновенных центров скоростей звеньев, если дано:

$\alpha=0$, $\beta=60^0$, $\gamma=30^0$, $\varphi=0$, $\theta=120^0$, $\omega_1=6c^{-1}$, $\varepsilon_1=10c^{-2}$, l_1=0.4м, l_2=1.2м, l_3=1.6м, l_4=0.6м.

Решение

Согласно условию задачи вычерчиваем механизм в заданном положении (рис. 6.12). Исходя из направления ω_1, находим направления скоростей точек A, B, E (показано на чертеже). Восстанавливаем перпендикуляры к скоростям $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$

в точках A и B находим положение мгновенного центра скоростей звена AB – точка P_2. Соединив точку D с P_2 и восстановив перпендикуляр к P_2D в точке D, находим направление скорости $\vec{v}_D$. В точке пересечения перпендикуляров к

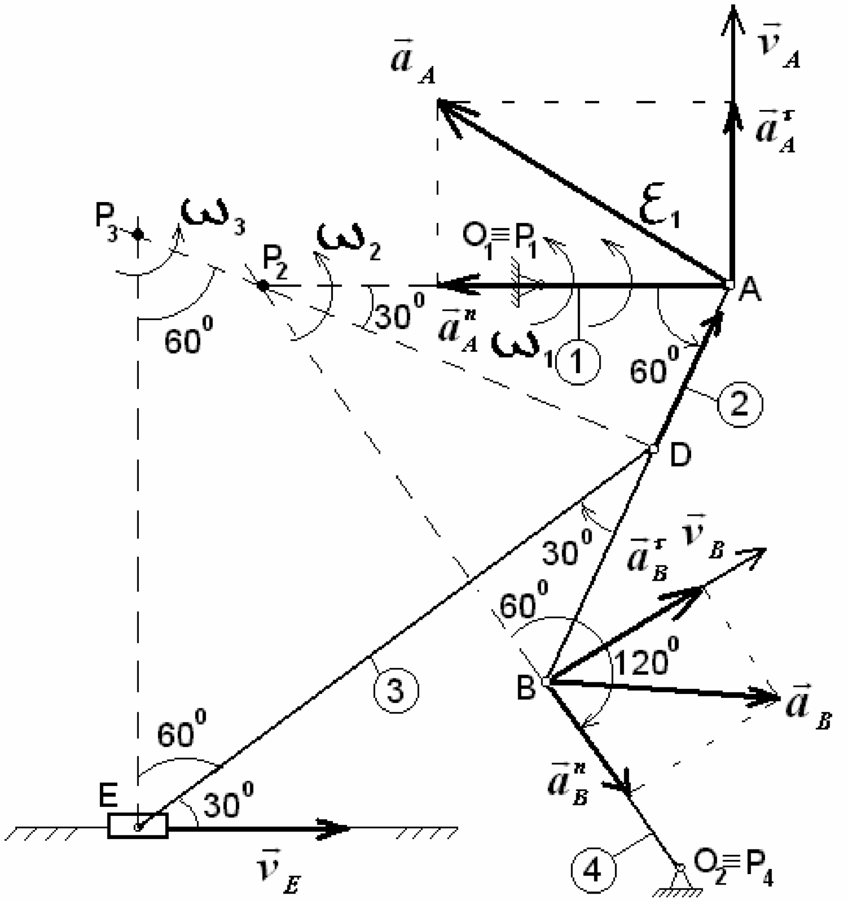


Рис. 6.13

скоростям $\vec{v}_D$ и $\vec{v}_E$ находится мгновенный центр скоростей звена DE – точка P_3. Находим теперь линейные скорости точек A, B, D, E и угловые скорости звеньев ω_2, ω_3, ω_4. Имеем

$$v_A = \omega_1 \cdot O_1A = \omega_1 \cdot l_1 = 6 \cdot 0.4 = 2.4 \text{ м/с}.$$

Так как точка A принадлежит и звену 2, то

$$v_A = \omega_2 \cdot AP_2$$

Из равностороннего треугольника AP_2B следует, что $AP_2=BP_2=AB$, следовательно $AP_2=BP_2=l_2=1.2$ м. Тогда

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AP_2} = \frac{2.4}{1.2} = 2 \text{ с}^{-1}.$$

Значит $v_B = \omega_2 BP_2 = 2 \cdot 1.2 = 2.4$ м/с,

$$v_D = \omega_2 \cdot DP_2 = \omega_2 \cdot l_2 \cdot \cos 30^0 = 2 \cdot 1.2 \cdot 0.87 = 2.09 \text{ м/с}.$$

Однако точка B принадлежит и звену BO_2, поэтому

$$\boldsymbol{v_B = \omega_4 \cdot BO_2},$$

откуда $\omega_4 = \frac{\boldsymbol{v_B}}{\boldsymbol{l_4}} = \frac{\mathbf{2.4}}{\mathbf{0.6}} = \mathbf{4}$ с$^{-1}$.

Точка D принадлежит также звену DE, поэтому

$$\boldsymbol{v_D = \omega_3 \cdot DP_3}$$

Из равностороннего треугольника DP_3E следует, что

$DP_3=EP_3=DE=l_3=1.6$ м.

Следовательно $\omega_3 = \frac{\boldsymbol{v_D}}{\boldsymbol{l_3}} = \frac{\mathbf{2.09}}{\mathbf{1.6}} = \mathbf{1.31}$ с$^{-1}$, поэтому линейная скорость точки E будет $\boldsymbol{v_E = \omega_3 \cdot EP_3} = \mathbf{1.31 \cdot 1.6 = 2.09}$ м/с.

Найдем ускорения точек A и B и угловое ускорение звена AB. Учитывая, что ускорение точки A равно $\boldsymbol{a_A} = \sqrt{(\boldsymbol{a_A^\tau})^2 + (\boldsymbol{a_A^n})^2}$

Где $\boldsymbol{a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot l_1} = \mathbf{10 \cdot 0.4 = 4}$ м/с^2,

$\boldsymbol{a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_1} = \mathbf{(6)^2 \cdot 0.4 = 14.4}$ м/с^2,

значит $\boldsymbol{a_A} = \sqrt{\mathbf{(4)^2 + (14.4)^2}} = \mathbf{14.95}$ м/с^2. Для определения ускорения точки B используем закон распределения ускорений.

$$\vec{\boldsymbol{a}}_B = \vec{\boldsymbol{a}}_A + \vec{\boldsymbol{a}}_{B-A},$$

или $\vec{\boldsymbol{a}}_B^\tau + \vec{\boldsymbol{a}}_B^n = \vec{\boldsymbol{a}}_A^\tau + \vec{\boldsymbol{a}}_A^n + \vec{\boldsymbol{a}}^\tau{}_{B-A} + \boldsymbol{a}_{B-A}^n$,

где

$\boldsymbol{a_B^\tau = \varepsilon_4 \cdot l_4}$, направлено перпендикулярно к O_2B,

$\boldsymbol{a_B^n = \omega_4^2 \cdot l_4} = \mathbf{(4)^2 \cdot 0.6 = 9.6}$ м/с^2, направлено от B к O_2,

$\boldsymbol{a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot l_1} = \mathbf{10 \cdot 0.4 = 4}$ м/с^2, направлено перпендикулярно к O_1A,

$\boldsymbol{a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_1} = \mathbf{(6)^2 \cdot 0.4 = 14.4}$ м/с^2, направлено от A к O_1, $\boldsymbol{a_{B-A}^\tau = \varepsilon_2 \cdot l_2}$, направлено перпендикулярно к AB,

$\boldsymbol{a_{B-A}^n = \omega_2^2 \cdot l_2} = \mathbf{(2)^2 \cdot 1.2 = 4.8}$ м/с^2, направлено от B к A.

Направление векторов показано на рис. 6.14. Используя метод проекций находим $\boldsymbol{a_B^n = a_{B-A}^\tau \cos 30^0 - a_{B-A}^n \cos 60^0 - a_A^\tau \cos 30^0 - a_A^n \cos 60^0}$,

откуда

$$\boldsymbol{a_{B-A}^\tau} = \frac{\boldsymbol{a_B^n + a_{B-A}^n \cos 60^0 + a_A^\tau \cos 30^0 + a_A^n \cos 60^0}}{\mathbf{\cos 30^0}} =$$

$$\frac{\mathbf{9.6 + 4.8 \cdot 0.5 + 4 \cdot 0.866 + 14.4 \cdot 0.5}}{\mathbf{0.866}} = \mathbf{26.17}\,\boldsymbol{м/c^2}$$

Значит $\boldsymbol{\varepsilon_2} = \frac{\boldsymbol{a_{B-A}^\tau}}{\boldsymbol{l_2}} = \frac{\mathbf{26.17}}{\mathbf{1.2}} = \mathbf{21.8}$ с$^{-2}$.

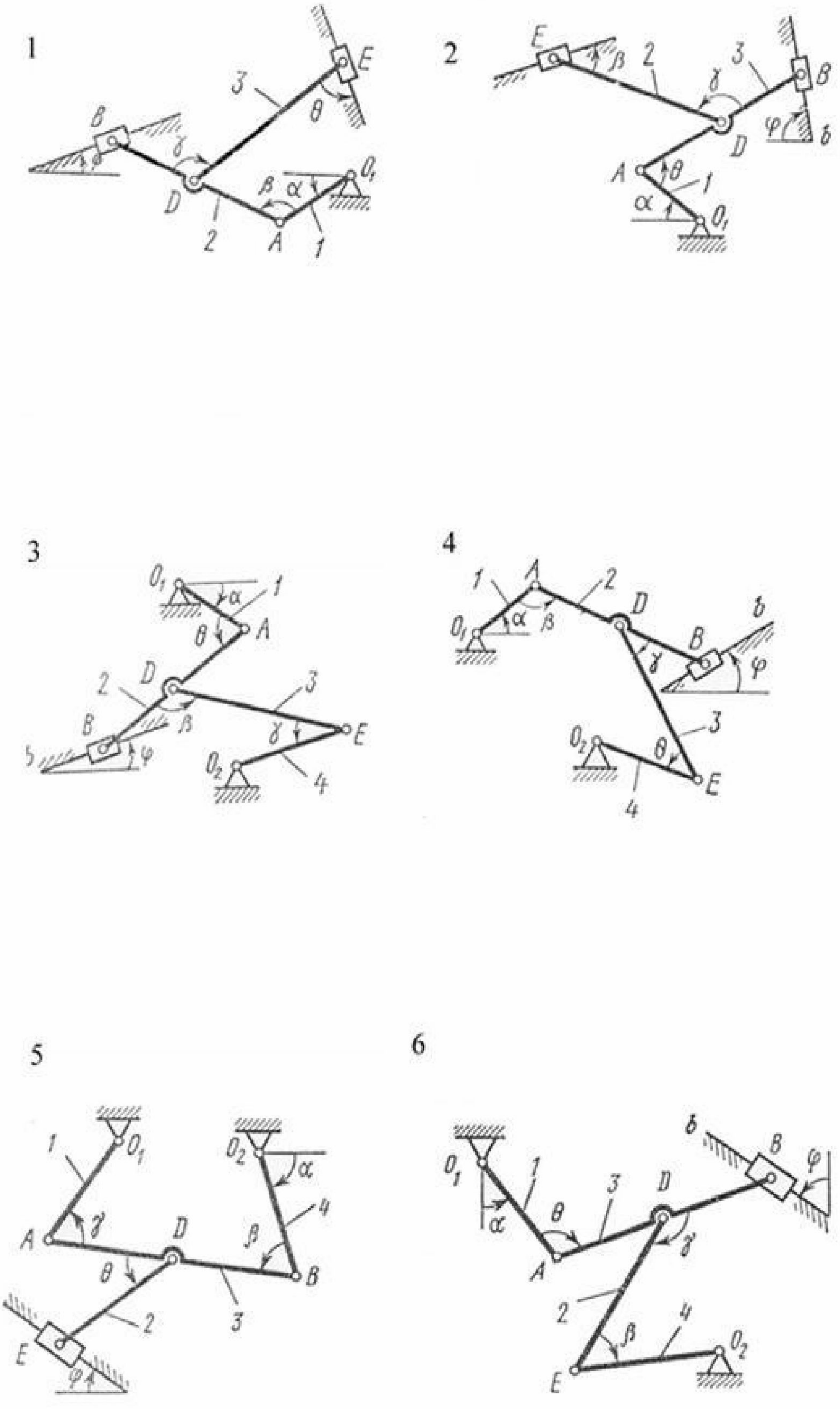


Рис. 6.11

Таблица 6.1

№ вар	№ схемы	Углы, град					ω_1 1/c	ε_1 1/c^2
		α	β	γ	φ	θ		
1	1	120	30	30	90	150	6	10
2	2	0	60	90	0	120	4	8
3	3	60	150	30	90	30	5	6
4	4	0	150	30	0	60	3	5
5	5	30	120	120	0	60	2	6
6	6	90	120	90	90	60	4	8
7	1	0	150	90	0	120	6	10
8	2	30	120	30	0	60	7	9
9	3	90	120	120	90	150	5	8
10	4	60	60	60	90	30	3	7
11	5	120	30	30	90	150	2	6
12	6	0	60	90	0	120	4	5
13	1	60	150	30	90	30	6	4
14	2	0	120	30	30	60	3	5
15	3	30	120	150	30	60	5	6
16	4	90	150	120	60	150	2	7
17	5	0	150	90	0	120	3	8
18	6	30	120	30	0	60	4	9
19	1	90	120	120	90	150	5	10
20	2	60	60	60	90	30	6	9
21	3	120	30	30	90	150	7	8
22	4	30	60	90	0	120	6	7
23	5	60	120	30	90	30	5	6
24	6	30	120	30	30	60	4	5
25	1	30	120	150	30	60	3	4
26	2	90	150	120	60	150	2	5
27	3	0	120	90	30	120	3	6
28	4	30	120	30	30	60	4	7
29	5	90	120	120	90	150	5	8
30	6	60	60	60	90	30	6	9

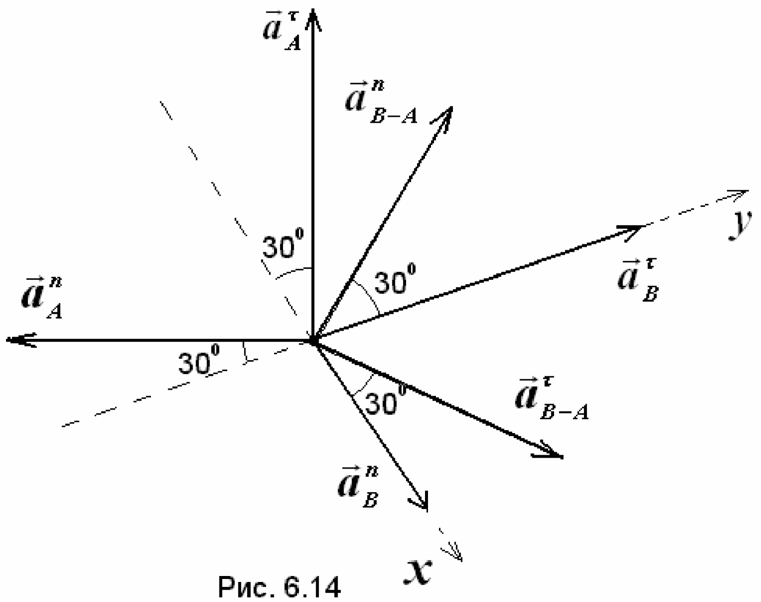


Рис. 6.14

Проецируя на ось «У» определяем

$$a_B^\tau = a_A^\tau \cos 60^0 - a_A^n \cos 30^0 + a_{B-A}^\tau \cos 60^0 + a_{B-A}^n \cos 30^0 =$$
$$= 4 \cdot 0.5 - 14.4 \cdot 0.866 + 26.17 \cdot 0.5 + 4.8 \cdot 0866 = 6.77 \text{ м/с}^2$$

Тогда полное ускорение точки В определяется

$$a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2} = \sqrt{(6.77)^2 + (9.6)^2} = 11.75 \text{ м/с}^2$$

Ответ: $v_A = 2.4$ м/с; $v_B = 2.4$ м/с; $v_D = 2.09$ м/с; $v_E = 2.09$ м/с; $\omega_2 = 2$ с$^{-1}$; $\omega_3 = 1.31$ с$^{-1}$; $\omega_4 = 4$ с$^{-1}$; $a_A = 14.95$ м/с^2; $a_B = 11.75$ м/с^2; $\varepsilon_2 = 21.8$ с$^{-2}$.

Список рекомендованной литературы (для более глубокой проработки теоретического и практического материала)

1. Краткий курс теоретической механики С.М. Тарг.
2. Теоретическая механика. М.В.Попов.
3. Курс теоретической механики. В.В. Добронравов, Н.Н. Никитин.
4. Курс теоретической механики. А.А. Яблонский, В.М. Никифорова.
5. Курс теоретической механики (том1).Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц,Д.Р. Меркин.
6. Теоретическая механика. В.М. Старжинский.
7. Теоретическая механика в примерах и задачах (том 1). М.И.Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон.
8. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Под общей редакцией А.А. Яблонского.
9. Руководство к решению задач по теоретической механике. А.И. Аркуша.
10. Руководство к решению задач по теоретической механике. Т.Б. Айзенберг, И.М. Воронков, В.М. Осецкий.
11. Методические указания к решению задач по теоретической механике. В.Н. Адамов.
12. Сборник задач по теоретической механике. Учебное пособие для вузов. Под редакцией Н.А. Бражниченко.
13. Сборник задач по теоретической механике. И.В. Мещерский.

Примечание: в указанный список могли не войти еще многие из числа известных Вам учебников, учебных пособий. Можно пользоваться ими и указанными выше в перечне, независимо от года издания.

Перечень вопросов к модульному контролю

1. Кинематика. Основные определения и задачи кинематики
2. Кинематика точки. Способы задания движения точки
3. Естественные оси координат. Естественный трехгранник
4. Скорость точки при векторном, координатном и естественном способах задания движения
5. Ускорение точки при векторном и координатном способах задания движения
6. Ускорение точки при естественном способе задания движении. Касательное и нормальное ускорение точки
7. Равномерное и равнопеременное движение точки
8. Поступательное движение твердого тела. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек тела
9. Вращательное движение твердого тела. Уравнение вращательного движения твердого тела. Угловая скорость и угловое ускорение тела. Вектор угловой скорости и вектор углового ускорения
10. Скорости и ускорения точек вращающегося тела
11. Векторные выражения для скоростей и ускорений точек вращающегося тела. Формулы Пуассона
12. Равномерное и равнопеременное вращение твердого тела
13. Сложное движение точки. Абсолютное, относительное и переносное движение точки
14. Абсолютная, относительная и переносная скорости точек. Теорема сложения скоростей в сложном движении точки
15. Абсолютное, относительное и переносное ускорения точки. Теорема сложения ускорений в сложном движении точки (теорема Кориолиса)
16. Ускорение Кориолиса. Правило Жуковского
17. Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела. Разложение движения тела на поступательное и вращательное движения. Угловая скорость и угловое ускорение тела при плоском движении
18. Уравнения плоского движения твердого тела. Уравнения движения точки плоской фигуры относительно условно неподвижной системы координат
19. Определение скоростей точек тела при плоском движении. Теорема о проекциях скоростей двух точек
20. Мгновенный центр скоростей при плоском движении тела. Способы определения мгновенного центра скоростей
21. Вычисление угловой скорости при плоском движении тела
22. Определение ускорений точек при плоском движении
23. Мгновенный центр ускорений
24. Основные способы вычислений углового ускорения при плоском движении тела
25. Сложное движение тела. Сложение поступательных движений
26. Сложение поступательного и вращательного движений твердого тела
27. Сложение вращений тела вокруг пересекающихся осей

28. Сложение вращений тела вокруг параллельных осей (с
29. лучай вращения в одну сторону)
30. Сложение вращений тела вокруг параллельных осей (случай вращения в противоположные стороны)