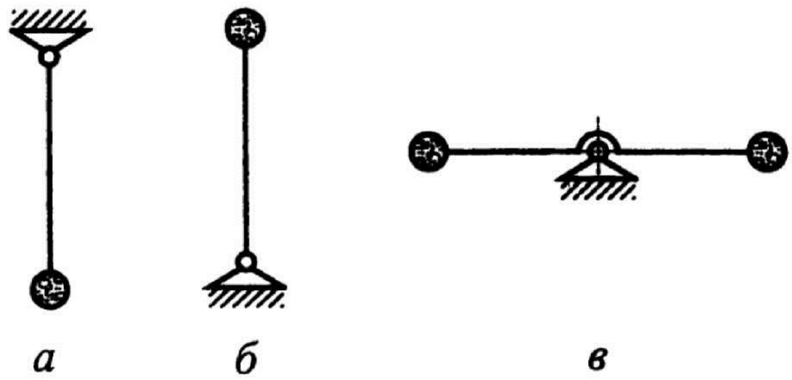
ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ
Курс лекций

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрим основные свойства *малых колебаний* механических систем с одной и двумя степенями свободы. Механическая система может совершать малые колебания только вблизи *устойчивого* положения *равновесия*. Обобщенные координаты системы в положении равновесия принимают равными нулю, т. е. отсчитывают их от положения равновесия. Тогда *колебательным движением* механической системы в общем случае считают всякое ее движение, при котором все обобщенные координаты или часть из них изменяются не монотонно, а имеют колебательный характер, т.е. принимают нулевые значения по крайней мере несколько раз.

1. УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Для наглядности рассмотрим положение равновесия на примере одного твердого тела (рис. 1.1). Пусть таким телом является стержень с горизонтальной осью вращения, проходящей через точку O. Стержень имеет два положения равновесия при $\varphi = 0°$ и $\varphi = 180°$. В положении равновесия силы, приложенные к стержню, составляют уравновешенную систему сил.



а *б* *в*

Рис. 1.1

Чтобы установить, будет ли рассматриваемое положение равновесия стержня устойчивым, следует дать стержню достаточно малое начальное отклонение от положения равновесия, а в общем случае сообщить ему еще достаточно малую начальную угловую скорость и рассмотреть его последующее движение.

Если существует такое достаточно малое начальное отклонение стержня от положения равновесия, при котором силы стремятся вернуть стержень в положение равновесия, то такое положение равновесия считается *устойчивым.*

Положение равновесия стержня при $\varphi = 0°$ (рис. *а*) является устойчивым, так как при начальном ею отклонении на малый угол силы, действующие на стержень, стремятся вернуть его в положение равновесия.

В том случае, когда силы еще дальше отклоняют стержень от положения равновесия, положение равновесия является *неустойчивым.*

Положение равновесия стержня при $\varphi = 180°$ может служить примером неустойчивого положения равновесия (рис.б).

Если стержень, получив любое малое начальное отклонение от положения равновесия, остается в равновесии в новом отклоненном положении, то такое положение равновесия называется *безразличным.*

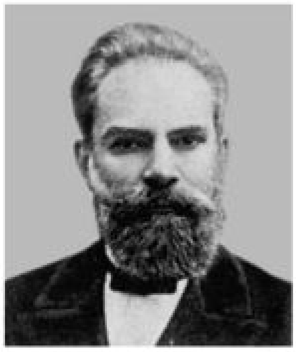
Строгое определение понятия устойчивости положения равновесия было дано в конце прошлого века в работах русского ученого А.М.Ляпунова. Приведем это определение для системы с любым конечным числом степеней свободы s.

Условимся обобщенные координаты $\left\{q_j\right\}_s$ отсчитывать от положения равновесия системы, т. е. принимать их равными нулю в положении равновесия. Начальное возмущение системы состоит в общем случае из начальных значений обобщенных координат $\left\{q_{j0}\right\}_s$, и начальных обобщенных скоростей $\left\{\dot{q}_{j0}\right\}_s$.

По Ляпунову, *равновесие системы называется устойчивым, если для любого достаточно малого* $\varepsilon > 0$ *можно выбрать два других таких малых числа* $\eta_1 > 0$ *и* $\eta_2 > 0$, *что при удовлетворении начальными значениями обобщенных координат и скоростей неравенств* $\left|q_{j0}\right| < \eta_1$ $\left|\dot{q}_{j0}\right| < \eta_2$ *в любой момент времени все обобщенные координаты подчиняются условиям* $\left|q_j(t)\right| < \varepsilon$.

Таким образом, но Ляпунову, положение равновесия считается устойчивым, если можно задать достаточно малую область изменения начальных значений обобщенных координат в окрестности положения равновесия и область начальных обобщенных скоростей, для которых величины обобщенных координат при последующем движении системы ограничены заданной ε

окрестностью вблизи положения равновесия.



Ляпунóв Александр Михайлович, род. 25.5(6.6).1857, Ярославль - ум. 3.11.1918, Одесса.

Русский математик и механик, академик Петербургской АН (с 06.10.1901; чл.-корр. с 02.12.1900). Ученик П.Л.Чебышёва. В 1880 окончил Петербургский университет. С 1885 доцент, с 1892 профессор Харьковского университета; с 1902 работал в Петербурге.

Ляпунов создал современную строгую теорию устойчивости равновесия и движения механических систем, определяемых конечным числом параметров. Основным трудом в этой области является докторская диссертация Ляпунова "Общая задача об устойчивости движения" (1892).

Большой цикл исследований Ляпунова посвящен теории фигур равновесия равномерно вращающейся жидкости, частицы которой взаимно притягиваются по закону всемирного тяготения.

Небольшим по объёму, но весьма важным для дальнейшего развития науки был цикл работ Ляпунова по некоторым вопросам математической физики.

В теории вероятностей Ляпунов предложил новый метод исследования (метод "характеристических функций"), замечательный по своей общности и плодотворности; обобщая исследования П.Л.Чебышева и А.А.Маркова, Ляпунов доказал так называемую центральную предельную теорему теории вероятностей при значительно более общих условиях, чем его предшественники. В целом ряде работ Ляпунова содержится большое число принципиально новых понятий математического анализа. Язык и расуждения Ляпунова отличаются большой точностью, и высказываемое мнение о трудности чтения его работ очень часто объясняется только особой сложностью рассматриваемых проблем. Все исследования Ляпунова являются источником новых работ во многих направлениях математики.

Теорема Лагранжа – Дирихле

В положении равновесия механической системы каждая обобщенная сила Q_j равна нулю. Для случая потенциального силового поля обобщенные силы через потенциальную энергию вычисляются по формулам

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \; j = 1, s.$$

Следовательно, в положении любого равновесия $\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0$, поэтому потенциальная энергия при этом может достигать своего экстремального значения.

Малые колебания системы могут длительно совершаться только в окрестности устойчивого положения равновесия системы. Поэтому важное значение имеет теорема Лагранжа – Дирихле, устанавливающая *достаточные* условия устойчивости положения равновесия системы.

Теорема:

Для устойчивости положения равновесия системы, подчиненной голономным, идеальным, стационарным и неосвобождающим связям и находящейся в стационарном потенциальном силовом поле, достаточно, чтобы потенциальная энергия в положении равновесия имела изолированный относительный минимум.

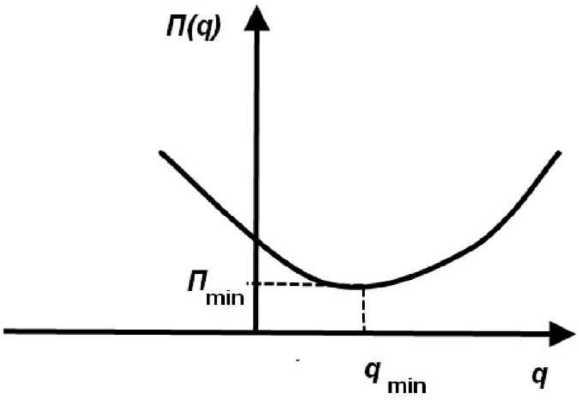


Рис. 1.2

Принимаем эту теорему без доказательства.

В положении равновесия потенциальная энергия имеет экстремум.

Согласно теореме Лагранжа-Дирихле если этот экстремум представляет минимум, то положение равновесия устойчиво.

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j^2}\right)_0 \geq 0.$$

Знак равенства относится к случаю, когда о наличии минимума потенциальной энергии приходится судить по производным высших порядков.

Таким образом:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j^2} \geq 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \textit{Равновесие консервативной} \\ \textit{голономной системы} \\ \textit{с идеальными связями} \\ \textit{устойчиво} \end{pmatrix}$$

Задача

Определить, при каких условиях маятник длиной l будет находиться в устойчивом равновесии. Масса маятника m, жесткость пружины c (рис. 1.3).

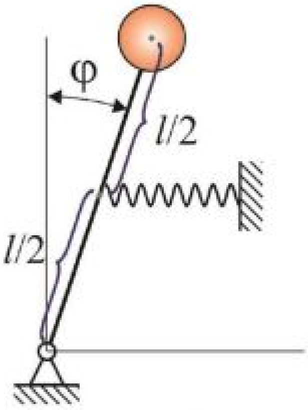


Рис. 1.3

Рассмотрим движение маятника вблизи положения, определяемого углом $\varphi = 0$. $s = 1$; $q = \varphi$.

Заданные силы:

$$\bar{P};\ P = mg.\ \bar{F};\ F = c\frac{l}{2}\varphi.$$

Эти силы потенциальны.

Потенциальная энергия:

$$\Pi = \Pi_{\text{пр}} + \Pi_{\text{м}}.$$

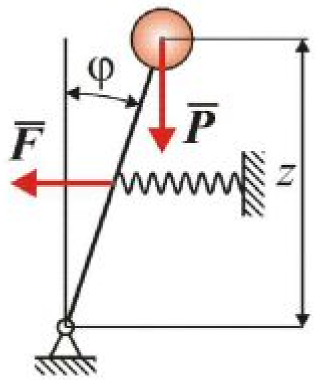


Рис. 1.4

$$\Pi_{\text{пр}} = \frac{c\cdot\Delta l^2}{2} = \frac{c\cdot\left(0{,}5l\varphi\right)^2}{2} = \frac{c\cdot\left(l\varphi\right)^2}{8},$$

$$\Pi_{\text{м}} = mgz = mgl\cos\varphi = mgl\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right).$$

Поскольку при малых углах

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} \approx \sqrt{1-\varphi^2} \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}.$$

Имеем

$$\Pi = \frac{l^2}{8}c\varphi^2 + mgl - \frac{mgl}{2}\varphi^2 = \varphi^2\left(\frac{l^2}{8}c - \frac{mgl}{2}\right) + mgl = \frac{\varphi^2}{2}\left(\frac{cl^2}{4} - mgl\right) + mgl.$$

Чтобы маятник был устойчивым, достаточно чтобы в положении равновесия

$$1)\ \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \varphi\left(\frac{cl^2}{4} - mgl\right) = 0 \Rightarrow \varphi = 0.$$

$$2)\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} > 0 \Rightarrow \frac{cl^2}{4} - mgl > 0 \Rightarrow c > \frac{4mg}{l}.$$

2. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Механическая система с одной степенью свободы имеет одну обобщенную координату q, и ее движение описывается одним уравнением Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)-\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}=Q$$

Обобщенную силу Q можно считать состоящей из трех частей:

$$Q=Q^{П}+Q^{R}+Q^{B}.$$

Здесь $Q^{П}$ обобщенная сила потенциальных сил. $Q^{П}=\partial П/\partial q$.

В Q^{R} включим ту часть обобщенной силы, которая получается от действия сил сопротивления. В дальнейшем рассматриваемся случай линейного сопротивления, когда силы сопротивления точек системы пропорциональны скоростям этих точек и направлены в стороны, противоположные скоростям.

Часть обобщенной силы Q^{B} получается от так называемых вынуждающих, или возмущающих сил, зависящих прежде всего от времени. Ниже рассмотрен случай гармонической возмущающей силы, когда Q^{B} изменяется с течением времени по синусоидальному закону. В общем случае зависимости Q^{B} от времени ее можно разложить в ряд Фурье и рассматривать дифференциальные уравнения движения для каждого из синусоидальных слагаемых.

Собственные линейные колебания системы

Рассмотрим малые колебания системы с одной степенью свободы под действием одних потенциальных сил. т. с. когда $Q=Q^{П}=\partial П/\partial q$.

Такие колебания называются *собственными* или *свободными*. Колебания считаются малыми, если при движении системы обобщенные координата, скорость и ускорение достаточно малы и в уравнении Лагранжа можно пренебречь всеми слагаемыми второго и более высокого порядков относительно $q, \dot{q}$ и $\ddot{q}$, т. е. слагаемыми, в которые входят квадраты этих величин, произведения и т. д. В случае малых колебаний системы получается линейное дифференциальное уравнение для обобщенной координаты q. Колебания, для которых дифференциальное уравнение является линейным, называются *линейными.* Малые колебания принадлежат к числу линейных. Но линейными могут быть не обязательно малые колебания.

Дифференциальное уравнение собственных линейных колебаний системы. Для вывода уравнения малых собственных колебаний следует кинетическую и потенциальную энергии разложить в ряды в окрестности положения равновесия системы, где $q=0$.

Пусть система, на которую наложены голономные, идеальные, неосвобождающие и стационарные связи, состоит из n точек и движется вблизи положения равновесия. Её кинетическая энергия

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{r}_k^2 .$$

При сделанных допущениях о стационарности связей радиус-вектор каждой точки системы зависит от времени только через обобщенную координату, следовательно,

$$\dot{r}_k=\frac{\partial r_k}{\partial q}\dot{q}.$$

Подставляя это в выражение кинетической энергии, получаем

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k\left(\frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q}\right)^2 \dot{q}^2=\frac{1}{2}A\dot{q}^2,$$

где $A=\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\left(\frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q}\right)^2$.

Величина A, как и $\overline{r}_k$, может зависеть только от q и не может зависеть от $\dot{q}$. Разлагая A в окрестности $q=0$ в степенной ряд, имеем

$$A(q)=A_0+\left(\frac{\partial A}{\partial q}\right)_0 q+\left(\frac{\partial^2 A}{\partial q^2}\right)_0 \frac{q^2}{2}+\ldots .$$

Здесь и дальше индекс 0 означает, что соответствующие величины следует вычислять при $q=0$.

Для получения в разложении кинетической энергии слагаемых не выше второго порядка по отношению к q и $\dot{q}$ достаточно из разложения $A(q)$ взять только постоянное значение A_0, которое обозначим a. При учете других слагаемых из разложения $A(q)$ появляются члены третьего и более высокого порядков.

Итак, выражение кинематической энергии с можно представить в виде

$$T = \frac{1}{2} a\dot{q}^2.$$

Положительная постоянная a называется *коэффициентом инерции.* Обычно по размерности коэффициент инерции является или массой, или моментом инерции.

Потенциальная энергия системы Π для стационарного силового поля и стационарных связей является функцией только обобщенной координаты q. Разлагая ее в степенной ряд в окрестности $q=0$, получаем

$$\Pi(q) = \Pi_0 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_0 q + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0 \frac{q^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 \Pi}{\partial q^3}\right)_0 \frac{q^3}{3!} + \dots .$$

Потенциальную энергию Π_0 в положении равновесия при $q=0$ примем равной нулю. Величина $(\Pi/q)_0$ есть значение обобщенной силы Q в положении равновесия системы, равное нулю.

Будем считать, что в положении равновесия потенциальная энергия имеет минимум. Это является достаточным условием устойчивости положения равновесия системы. В этом случае величина $\left(\partial^2 \Pi / \partial q^2\right)_0$ положительна.

Обозначим ее *с*. Постоянную *с* называют *коэффициентом жесткости* или просто *жесткостью.*

Таким образом, отбрасывая слагаемые третьего и более высокого порядков, имеем

$$\Pi(0) = \frac{1}{2} c q^2.$$

Подставляя эти значения производных в уравнение Лагранжа, получим следующее дифференциальное уравнение малых собственных колебаний системы с одной степенью свободы:

$$a\ddot{q} + cq = 0.$$

Интегрирование дифференциального уравнения собственных колебаний. Если разделить обе части уравнения на a и обозначить положительную величину $c/a = k^2$ то получим дифференциальное уравнение собственных линейных колебаний системы с одной степенью свободы в окончательной форме:

$$\ddot{q} + k^2 q = 0. \qquad (1)$$

Постоянная величина k называется *круговой* (или *циклической) частотой колебаний.*

Размерность круговой частоты $[k] = \text{с}^{-1}$.

Круговая частота выражается в тех же единицах, что и угловая скорость.

Дифференциальное уравнение (1) является однородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение можно искать в виде $q = e^{\lambda t}$. После подстановки этого выражения в (1) получаем характеристическое уравнение.

$$\lambda^2 + k^2 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет два чисто мнимых корня:

$$\lambda_{1,2} = \pm ki.$$

На основе теории дифференциальных уравнений решение уравнения (1) можно представить в виде

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \qquad (2)$$

и для обобщенной скорости

$$\dot{q} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий:

$$t = 0,\ q = q_0,\ \dot{q} = \dot{q}_0.$$

Используя эти выражения, получаем $C_1 = q_0$, $C_2 = \dfrac{\dot{q}_0}{k}$.

Подставляя их значения в (2), имеем

$$q = q_0 \sin kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \cos kt.$$

Представим выражение для q в другой, так называемой *амплитудной*, форме:

$$q = A\sin\left(kt + \alpha\right). \tag{3}$$

Из сравнения этого выражения с (2) для новых постоянных получим формулы

$$A = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{k^2}}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{q_0 k}{\dot{q}_0}.$$

Величину A считают положительной и называют *амплитудой колебаний.* Она определяет наибольшее отклонение обобщенной координаты от положения равновесия, соответствующего значению $q_0 = 0$. Обобщенная координата изменяется в пределах $-A \le q \le A$.

Безразмерная постоянная α называется *начальной фазой колебаний.* Она является значением *фазы колебаний* $\left(k t + \alpha\right)$ при $t = 0$. Начальная фаза может изменяться в пределах от 0 до 2π.

Движение системы, определяемое (2) или эквивалентной ему амплитудной формой (3), называется *гармоническим.* Гармоническими называются такие колебания, при которых обобщенная координата изменяется с течением времени по закону синуса или косинуса (рис. 2.1).

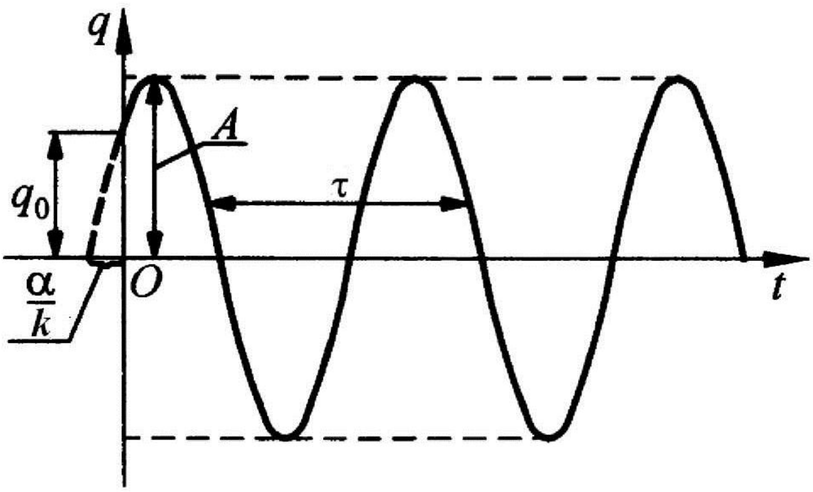


Рис. 2.1

Собственные линейные колебания системы с одной степенью свободы являются гармоническими. Гармонические колебания полностью определяются амплитудой колебаний, периодом и начальной фазой. Значение периода колебаний τ получим из условия

$$\tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{c}}.$$

Величина, обратная периоду $\upsilon = 1/\tau$, называется частотой колебаний. Частота колебаний обычно определяется числом колебаний в секунду или в герцах

Круговая частота k выражается через период колебаний и частоту в форме

$$k = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi\upsilon.$$

Собственные колебательные движения, кроме графика колебаний, можно изобразить на фазовой плоскости – плоскости переменных $(q, \dot{q})$ которые называются *фазовыми переменными.* Построим фазовый портрет гармонических колебаний точки (рис. 2.2). Имеем

$$q = A\sin(kt+\alpha),\ \dot{q} = Ak\cos(kt+\alpha).$$

Исключая из этих уравнений время, получаем на фазовой плоскости семейство эллипсов:

$$\frac{\dot{q}}{A^2k^2} + \frac{q^2}{A^2} = 1$$

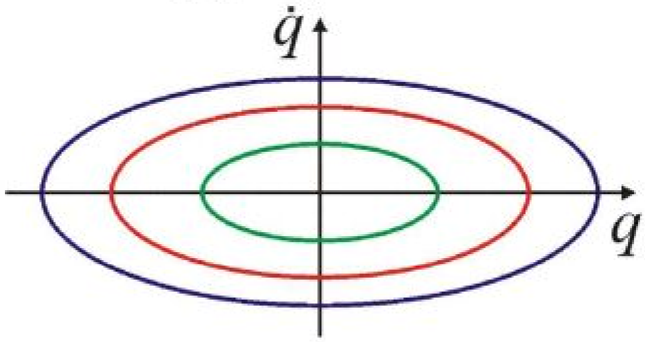


Рис. 2.2

Эти кривые, зависящие от параметра A, называют *фазовыми траекториями.* Семейство фазовых траекторий зависти от амплитуды колебаний, которая, в свою очередь, определяется начальными условиями. Каждой фазовой траектории соответствует пара начальных значений $q_0, \dot{q}_0$.

Положению равновесия точки на фазовой плоскости соответствует начало координат. Каждому моменту времени на фазовой плоскости соответствует определенное положение изображающей точки. Каждой фазовой траектории соответствует определенное значение полной механической энергии.

$$E = T + \Pi = \frac{a\dot{q}^2}{2} + \frac{cq^2}{2} = \frac{1}{2}\left(a\dot{q}^2 + cq^2\right) = \text{const}.$$

В тех случаях, когда дифференциальное уравнение колебательного движения является нелинейным, исследование движения с помощью фазовых траекторий – один из часто применяемых методов.

3. ЛИНЕЙНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ И ДИССИПАТИВНАЯ ФУНКЦИЯ

Если на точки системы с одной степенью свободы кроме потенциальных сил действуют еще силы сопротивления, то дифференциальное уравнение Лаграпжа выразится в форме

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = Q^{\Pi} + Q^{R}.$$

где $Q^{\Pi} = \partial\Pi/\partial q$ обобщенная сила потенциальных сил; Q^{R} обобщенная сила сил сопротивления.

Рассмотрим случай линейного сопротивления, когда силы сопротивления $\left\{\overline{F}_k^R\right\}_n$ точек системы линейно зависят от скоростей этих точек, т. е.

$$\overline{F}_k^R = -\mu_k \dot{\overline{r}}_k.$$

где μ_k – постоянный коэффициент сопротивления.

Вычислим обобщенную силу сопротивления. Согласно определению обобщенной силы, имеем

$$Q^R = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^R \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q} = -\sum_{k=1}^{n} \mu_k \dot{\overline{r}}_k \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q}.$$

Для дальнейшего преобразования используем первое тождество Лагранжа $\frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q} = \frac{\partial \dot{\overline{r}}_k}{\partial \dot{q}}$, получим $Q^R = -\sum_{k=1}^{n} \mu_k \left(\dot{\overline{r}}_k \frac{\partial \dot{\overline{r}}_k}{\partial \dot{q}}\right) = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k \dot{\overline{r}}_k^2}{2}$.

Введем обозначение:

$$R = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k \dot{\overline{r}}_k^2}{2}.$$

Функцию R называют *диссипативной функцией* или функцией Релея. Эта функция по своей структуре аналогична кинетической энергии системы, только в нее вместо массы точек входят коэффициенты сопротивления.

Выразим функцию R через обобщенные скорости. Учитывая, что $\dot{\bar{r}}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q}\dot{q}$, получаем

$$R = \frac{1}{2}\dot{q}^2\sum_{k=1}^{n}\mu_k\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q}\right)^2 = \frac{1}{2}B\dot{q}^2, \text{ где } B = \sum_{k=1}^{n}\mu_k\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q}\right)^2.$$

Функция B зависит только от q и не зависит от $\dot{q}$.

Джон Уильям Стретт, третий барон Рэлей, Лорд Рэлей (Рэйли) (*John Strutt, 3rd Baron Rayleigh*) (1842 – 1919) – британский физик, открывший (с Уильямом Рамзаем) газ аргон и получивший за это Нобелевскую премию по физике в 1904 году.

Стретт в 1861 году поступил в Тринити-колледж Кембриджского университета для изучения математики. В 1865 году он получил степень бакалавра и в 1868 – магистра. После этого он был принят на работу сотрудником факультета

Титул лорда Рэлея Стретт получил в 1873 году, после смерти его отца, Джона Стретта, второго барона Релея. В этом же году стал членом Лондонского королевского общества.

После смерти Джеймса Максвелла в 1879 году стал вторым Кавендишским профессором этого университета и директором Кавендишской лаборатории.

Для выяснения физического смысла диссипативной функции получим энергетическое соотношение, которому она удовлетворяет. Для этого умножим на $\dot{q}$ уравнение Лагранжа:

$$\dot{q}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = Q\dot{q}.$$

Но $Q\dot{q} = \sum W^e + \sum W^i = \frac{dT}{dt}$. В свою очередь $\dot{q}Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}\dot{q} - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}}\dot{q}$.

Имеем $R = \frac{1}{2}B(q)\dot{q}^2$ следовательно,

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = B(q)\dot{q};\ \dot{q}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = B(q)\dot{q}^2 = 2R.$$

Потенциальная энергия для случая стационарного потенциального поля зависит от времени только через координату q.

Следовательно,

$$\dot{q}\frac{\partial \Pi}{\partial q} = \frac{d\Pi}{dt}.$$

Получим

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{d\Pi}{dt} - 2R \text{ или } \frac{dE}{dt} = -2R.$$

Окончательно имеем *энергетическое соотношение.*

Это соотношение показывает, *что диссипативная функция* R *характеризует скорость убывания полной механической энергии системы вследствие действия сил линейного сопротивления.*

Разложим диссипативную функцию в ряд в окрестности положения равновесия системы. Имеем

$$B(q) = B(0) + \left(\frac{\partial B}{\partial q}\right)_0 q + \left(\frac{\partial^2 B}{\partial q^2}\right)_0 \frac{q^2}{2} + \ldots .$$

Подставляя это разложение в $R = \frac{1}{2}B\dot{q}^2$ и оставляя в нем только $B(0) = \mu$ получаем $R = \frac{1}{2}\mu\dot{q}^2$.

Положительная постоянная величина μ называется *обобщенным коэффициентом сопротивления.*

4. ВЛИЯНИЕ ЛИНЕЙНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ НА МАЛЫЕ СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Вблизи положения равновесия системы имеем следующие выражения для кинетической и потенциальной энергий и диссипативной функции:

$$T = \frac{a\dot{q}^2}{2};\ \Pi = \frac{cq^2}{2};\ R = \frac{\mu\dot{q}^2}{2}.$$

Подставляя их в уравнение Лагранжа, получаем:

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0;\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\dot{q};\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = a\ddot{q};\ \frac{\partial \Pi}{\partial q} = cq;\ \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = \mu\dot{q}.$$

В итоге имеем $a\ddot{q}+\mu\dot{q}+cq=0$

Это приближенное уравнение. При его получении отброшены все слагаемые второго и более высокого порядков.

Если разделить обе части уравнения на a и ввести обозначения $k^2=c/a,\ 2n=\mu/a$ то получим дифференциальное уравнение движения системы в окончательной форме:

$$\ddot{q}+2n\dot{q}+k^2q=0. \tag{4}$$

Постоянная k является круговой частотой собственных колебаний системы без учета сопротивления. Величина n называется *коэффициентом затухания*. Ее размерность такая же, как и у круговой частоты. Вместо n иногда употребляют величину $\tau_0=1/n$, которая называется *постоянной времени затухания* и имеет размерность времени.

Дифференциальное уравнение (4) является однородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение следует искать в форме $q=e^{\lambda t}$, где постоянная λ определяется из характеристического уравнения $\lambda^2+2n\lambda+k^2=0$, которое получается после подстановки решения в дифференциальное уравнение.

Характеристическое уравнение имеет два корня:

$$\lambda_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-k^2}\,. \tag{5}$$

Могут представиться три случая:

1) **Затухающие колебания.** Если $n<k$ то величина под знаком квадратного корня (5) отрицательна. Обозначим $k_1=\sqrt{k^2-n^2}$. Тогда из (5) получим следующие значения для корней характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2}=-n\pm k_1 i$$

Соответственно общее решение дифференциального уравнения (4) зависящее от двух произвольных постоянных, выразится в виде

$$q=e^{-nt}\left(C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t\right), \tag{6}$$

где C_1 и C_2 произвольные постоянные.

Решение (6) можно также представить в другой, амплитудной, форме:

$$q=Ae^{-nt}\sin\left(k_1t+\alpha\right),$$

где A и α тоже произвольные постоянные. Раскрывая синус суммы, получим

$$C_1 = A\sin\alpha;\ C_2 = A\cos\alpha;\ A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2};\ \mathrm{tg}\,\alpha = C_1/C_2.$$

Постоянные определяются из начальных условий.

Величина A положительна. Она не является амплитудой. Начальная фаза α может иметь значения в пределах от 0 до 2π.

Для выяснения изменения функции построим ее график (рис. 4.1).

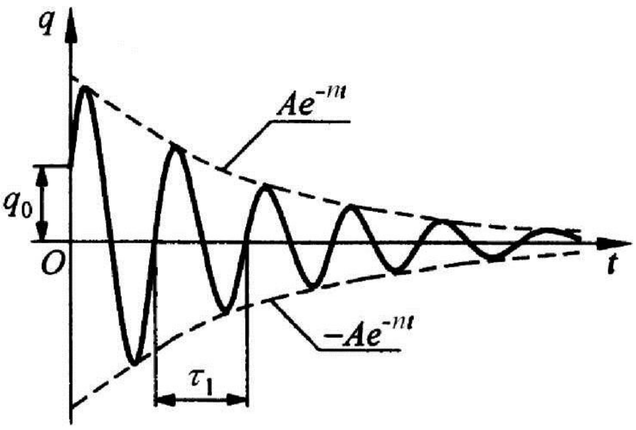


Рис. 4.1

Из графика функции следует, что величины последовательных наибольших отклонений q от положения равновесия уменьшаются с увеличением времени, стремясь к нулю при неограниченном возрастании времени. В соответствии с ним движение, определяемое (6), называют *затухающими колебаниями.*

Условным периодом затухающих колебаний (или *периодом)* называют период: $\sin(k_1 t + \alpha)$. Он является периодом прохождения системы через положения равновесия.

Следовательно, $\tau_1 = \dfrac{2\pi}{k_1}$.

Период затухающих колебаний величина постоянная, не зависящая от начальных условий. Он больше периода собственных колебаний при отсутствии сопротивления $\tau = \dfrac{2\pi}{k}$.

В действительности функция $q(t)$ не является периодической.

Переменную величину Ae^{-nt} называют *условной амплитудой* затухающих колебаний. Она не является максимальным значением функции.

Декрементом колебаний Δ называют отношение двух последовательных (взятых через условный период τ_1) максимальных значений обобщенной координаты. Пусть для t_i $q_{\max i} = Ae^{-nt_i}$. Через промежуток времени, равный периоду затухающих колебаний τ_1, в момент $t_i + \tau_1$, $q_{\max(i+1)} = Ae^{-n(t_i+\tau_1)} = Ae^{-nt_i}e^{-n\tau_1}$.

$$\Delta = \frac{q_{\max i}}{q_{\max(i+1)}} = e^{n\tau_1}.$$

Логарифмическим декрементом колебаний δ называют натуральный логарифм от декремента колебаний:

$$\delta = \ln\Delta = n\tau_1.$$

Таким образом, из проведенного исследования можно заключить, что *малое линейное сопротивление незначительно увеличивает период колебаний по сравнению со случаем отсутствия сопротивления, но сильно уменьшает последовательные точения условных амплитуд, которые уменьшаются с течением времени по экспоненциальному закону.*

2) **Затухающие движения**. Рассмотрим случай, когда $n > k$ (случай большого сопротивления). Корни характеристического уравнения в этом случае имеют значения

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -n \pm k_2.$$

где введено новое обозначение для положительной величины $k_2 = \sqrt{n^2 - k^2}$.

Оба корня характеристического уравнения действительны и отрицательны, так как $k_2 < n$. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения (4) имеет вид

$$q = e^{-nt}\left(C_1 e^{k_2 t} + C_2 e^{k_2 t}\right),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, которые можно определить по начальным условиям

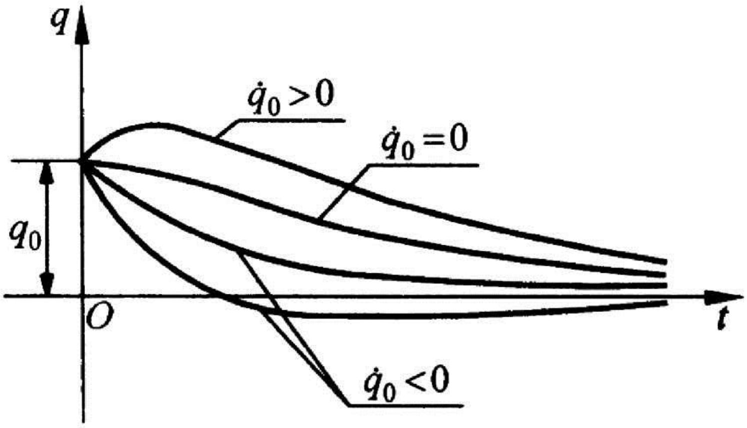


Рис. 4.2

Могут представиться три случая в зависимости от знака и значения q_0 .

Во всех случаях движение является затухающим, неколебательным, которое иногда называют также *апериодическим.*

При $n=k$ (случай критического сопротивления) характеристическое уравнение имеет кратный отрицательный корень $\lambda_1=\lambda_2=-n$.

Соответственно этому решение дифференциального уравнения (4) имеет вид

$$q=e^{-nt}\left(C_1t+C_2\right).$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются по начальным условиям. В этом случае при t, стремящемся к бесконечности, $q(t)$ стремится к нулю при любых конечных значениях постоянных.

Таким образом, *случай критического сопротивления тоже дает затухающее движение* (рис 4.2).

Анализ влияния линейного сопротивления на собственные малые колебания показывает, что линейное сопротивление не может сделать устойчивое положение равновесия неустойчивым. Если в окрестности устойчивого положения равновесия система совершает незатухающие малые колебания, то линейное сопротивление превратит их в затухающие или сделает даже затухающими движениями.

5. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

В случае, когда обобщенная сила $Q^B(t)$, характеризующая внешнее воздействие на колебательную систему, изменяется во времени по закону синуса или косинуса:

$$Q^B(t) = Q_0 \sin(pt + \beta),$$

где Q_0, p, β – соответственно амплитуда, частота и начальная фаза обобщенной силы, имеет место гармоническое возбуждение колебаний.

Способы возбуждения вынужденных колебаний. Определение обобщенной силы Q(t)

Способы возбуждения колебаний можно условно разделить на группы. На рисунке приведены три наиболее характерных способа возбуждения вынужденных колебаний простейшей колебательной системы. Система представляет собой тело массой m. имеющее возможность двигаться по гладкой горизонтальной поверхности. С телом скреплена пружина, жесткость которой c. Обобщенная координата x сосчитывается от положения равновесия системы (при отсутствии внешнего воздействия), когда пружина не напряжена.

1. ***Силовое возбуждение*** (рис. 5.1). Система находится под воздействием силы $F(t) = F_0 \sin(pt + \beta)$, приложенной извне и не зависящей от параметров системы.

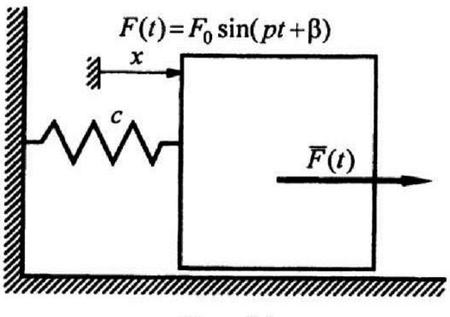


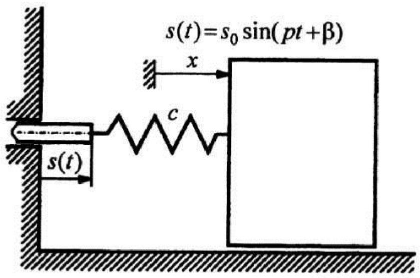
Рис. 5.1

В этом случае для получения $Q(t)$ необходимо задать вариацию обобщенной координаты δx и, вычислив возможную работу только от действия силы $F(t)$, разделить ее на δx :

$$Q(t) = \frac{F(t)\delta x}{\delta x} = F_0 \sin(pt + \beta).$$

2. ***Кинематическое возбуждение*** (рис. 5.2). Вынужденные колебания возникают в результате задаваемого извне перемещения точки крепления пружины $s(t) = s_0 \sin(pt + \beta)$, не зависящего от параметров системы.

Изменение условной потенциальной энергии пружины при одновременном



б

Рис. 5.2

перемещении ее концов равно

$$\varPi' = \frac{1}{2}c\lambda^2 = \frac{1}{2}c\left(x - s(t)\right)^2.$$

Тогда

$$Q^{\varPi} = \frac{\partial \varPi}{\partial x} = -cx + cs(t) = Q^{\varPi} + Q(t).$$

где $Q^{\varPi} = -cx$; $Q(t) = cs_0\sin(pt+\beta)$.

3. ***Инерционное возбуждение***. Возможны два случая.

А. Вынужденные относительные колебания (рис. 5.3). Механическая система находится на подвижном основании, перемещение которого, независящее от параметров системы, задается извне, причем необходимо исследовать относительные (по отношению к подвижному основанию) колебания.

Система координат, связанная с подвижным основанием, движется вместе с ним поступательно, прямолинейно, но неравномерно. Поэтому при составлении дифференциального уравнения вынужденных относительных колебаний необходимо учитывать переносную силу инерции $\bar{\varPhi}_e = -m\bar{a}_e$, направление которой противоположно направлению переносного ускорения. Переносное ускорение $a_e = \ddot{s}(t)$ при этом считается сонаправленным с $s(t)$.

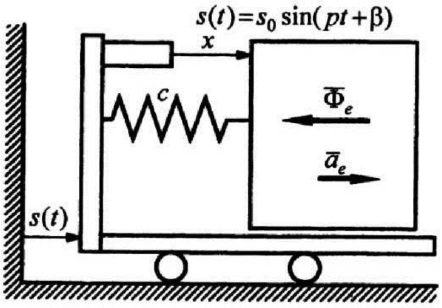


Рис. 5.3

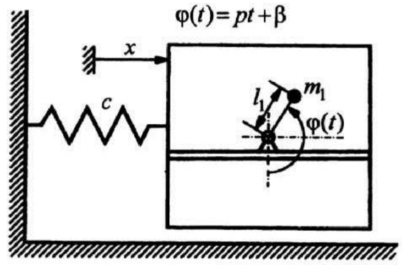


Рис. 5.4

Обобщенная сила $Q(t)$ будет определяться $\bar{\varPhi}_e$, т. е.

$$Q(t) = \frac{-m\ddot{s}(t)\delta x}{\delta x} = -m\ddot{s}(t) = mp\sin(pt+\beta).$$

В. Вынужденные колебания, вызываемые вращающимся эксцентриком (рис. 5.4). Тело скреплено с эксцентриком, имеющим массу $m_1 \ll m$, эксцентриситет l_1 и вращающимся с постоянной угловой скоростью. Обозначив через $\varphi = pt + \beta$ угол отклонения эксцентрика от вертикали, выразим $Q(t)$ через проекцию на горизонталь центробежной силы $m_1 p^2 l_1$:

$$Q(t) = \frac{m_1 p^2 l_1 \sin(pt+\beta)\delta x}{\delta x} = m_1 p^2 l_1 \sin(pt+\beta)$$

Отметим, что при инерционном возбуждении колебаний, в отличие от силового и кинематического возбуждений, амплитуда обобщенной силы пропорциональна p^2.

Приведенные примеры, естественно, не охватывают все способы возбуждения вынужденных колебаний, например возбуждение колебаний вследствие перемещения точки прикрепления демпфера. Возможно и комбинированное возбуждение колебаний, объединяющее несколько способов.

Вынужденные колебания при отсутствии вязкого сопротивления

При гармоническом возбуждении дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$a\ddot{q} + cq = H\sin(pt+\beta),$$

или

$$\ddot{q} + k^2 q = h\sin(pt+\beta), \tag{5.1}$$

где $k^2 = \dfrac{c}{a}$, $h = \dfrac{H}{a}$.

Известно, что общее решение линейного неоднородного уравнения можно представить в виде суммы общего решения q_1 однородного уравнения $\ddot{q} + k^2 q = 0$ и частного решения q^* неоднородного уравнения:

$$q = q_1 + q^*$$

Общее решение однородного уравнения

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt .$$

Частное решение неоднородного уравнения определяется в зависимости от соотношения частот свободных колебаний и возмущающей силы. Возможны два случая: отсутствие резонанса $p \neq k$ и резонанс $p = k$.

1. ***Отсутствие резонанса***. В этом случае частное решение следует искать в виде

$$q^* = B\sin(pt + \beta),$$

где B – искомая постоянная величина.

Подстановка q^* в (5.1) приводит к соотношению

$$B = \frac{h}{k^2 - p^2}.$$

Общее решение уравнения (1) будет иметь вид

$$q = C_1\cos kt + C_2\sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin(pt + \beta),$$

или

$$q = A\sin(kt + \alpha) + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin(pt + \beta).$$

Произвольные постоянные C_1, C_2 определим из начальных условий.

Как следует из уравнений, движение состоит из двух гармонических колебаний с частотами k и p соответственно.

Первые (с частотой k) можно по аналогии со случаем отсутствия возмущающей силы условно назвать свободными колебаниями, а вторые (с частотой p) – вынужденными колебаниями системы.

Условность названия «свободные колебания» связана с тем, что определяющие их произвольные постоянные зависят не только от начальных условий $(q_0, \dot{q}_0)$, но и от параметров возмущающей силы (h, p, β), и, следовательно, первые колебания в решении фактически также являются вынужденными колебаниями. Однако данное название получило широкое распространение лишь потому, что вторые колебания имеют частоту p возмущающей силы, в то время как первые – частоту k свободных колебаний (собственную частоту).

Отметим, что в реальных системах, где всегда присутствуют силы вязкого сопротивления, колебания с частотой k со временем затухают и устанавливаются не зависящие от начальных условий стационарные вынужденные колебания с частотой p, т. е.

$$q = \frac{h}{k^2 - p^2}\sin\left(pt + \beta\right).$$

Если $p < k$, то установившиеся вынужденные колебания будут совпадать по фазе с возмущающей силой, если же $p > k$, то вынужденные колебания будут находиться в противофазе (сдвинуты по фазе на π) по отношению к возмущающей силе.

Амплитуду B вынужденных колебаний можно представить в виде:

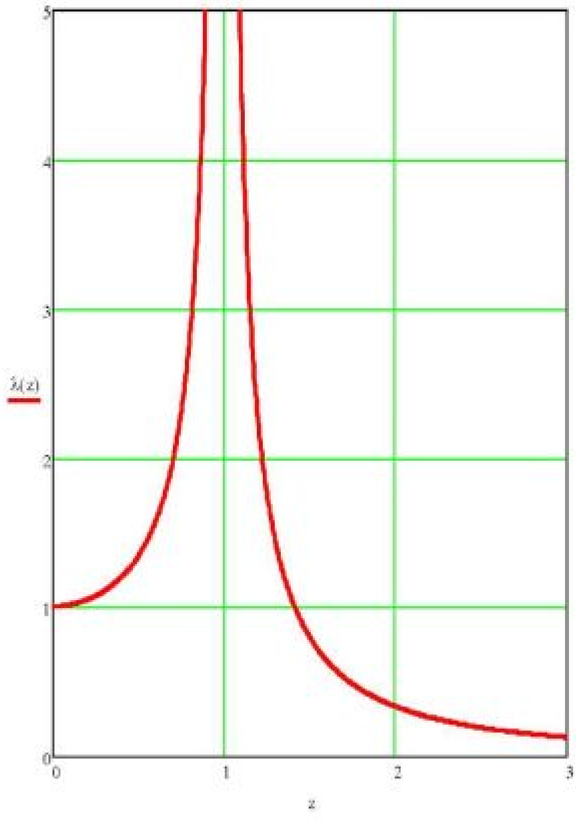


Рис. 5.5

$$B = \frac{h}{k^2} \cdot \frac{1}{\left|1 - p^2 / k^2\right|}.$$

Здесь $\frac{h}{k^2} = \frac{H}{a \cdot \frac{c}{a}} = \frac{H}{c}$ – *статическое смещение* системы под действием силы H, равной амплитуде возмущающей силы. Обозначим $B_0 = h / k^2$.

Теперь

$$B = \frac{B_0}{\left|1 - p^2 / k^2\right|}.$$

Величину

$$\lambda = \frac{B}{B_0} = \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right|}$$

называют коэффициентом динамичности. Коэффициент динамичности показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний при гармоническом воздействии больше статического смещения.

$z = p/k$ – *коэффициент расстройки*, или относительная частота возмущающей силы. Получаем

$$\lambda = \frac{1}{\left|1 - z^2\right|}.$$

Этот результат не следует переносить на реальные системы

Резонанс. Биения

В случае совпадения частоты возмущающей силы с частотой свободных колебаний (собственной частотой) возникает явление резонанса.

При отсутствии сил вязкого сопротивления в случае резонанса амплитуда вынужденных колебаний, нарастая во времени, стремится к бесконечности. Это объясняется тем, что, если колебания происходят с собственной частотой, то инерционные силы уравновешиваются квазиупругими при любых амплитудах колебаний. Возмущающая сила оказывается при этом неуравновешенной и увеличивает амплитуду колебании.

Рассмотрим случай, когда возмущающая сила изменяется по закону $Q = H\cos pt$, тогда уравнение вынужденных колебаний будет иметь вид:

$$q = A\sin\left(kt + \alpha\right) + \frac{h}{k^2 - p^2}\cos pt.$$

Определяя A и α при нулевых начальных условиях, получим

$$\alpha = \frac{\pi}{2},\ A = \frac{h}{k^2 - p^2}.$$

В итоге

$$q = \frac{h}{k^2 - p^2}\left(\cos pt - \cos kt\right) = \frac{2h}{k^2 - p^2}\sin\frac{\left(k - p\right)t}{2}\sin\frac{\left(k + p\right)t}{2}.$$

Обозначим $A'\left(t\right) = \frac{2h}{k^2 - p^2}\sin\frac{\left(k - p\right)t}{2} = \frac{2h}{\left(k + p\right)\left(k - p\right)}\sin\frac{\left(k - p\right)t}{2}$.

Теперь

$$q = A'(t)\sin\frac{k+p}{2}t$$

При $p \to k \Rightarrow A'(t) = \frac{2h}{2k\delta}\sin\delta t$, где $\delta = \frac{k-p}{2}$ и $\frac{k+p}{2} \to k$.

Получаем

$$q = A'(t)\sin kt$$

Анализируя решение, можно сделать вывод, что получили наложение вынужденных колебаний с довольно малой частотой δ на собственные колебания с частотой k. Движение можно представить как колебания с частотой $\frac{p+k}{2} \approx k$ и амплитудой $A'(t)$, которая является периодической функцией с периодом $\tau' = \frac{2\pi}{\delta} >> \tau = \frac{2\pi}{k}$ значительно большим периода собственных колебаний. Это т.н. *биения*.

$h := 1$

$k := 1$

$\delta := 0.1$

$A(t) := \frac{2 \cdot h}{2 \cdot k \cdot \delta} \cdot \sin(\delta \cdot t)$

$q(t) := A(t) \cdot \sin(k \cdot t)$

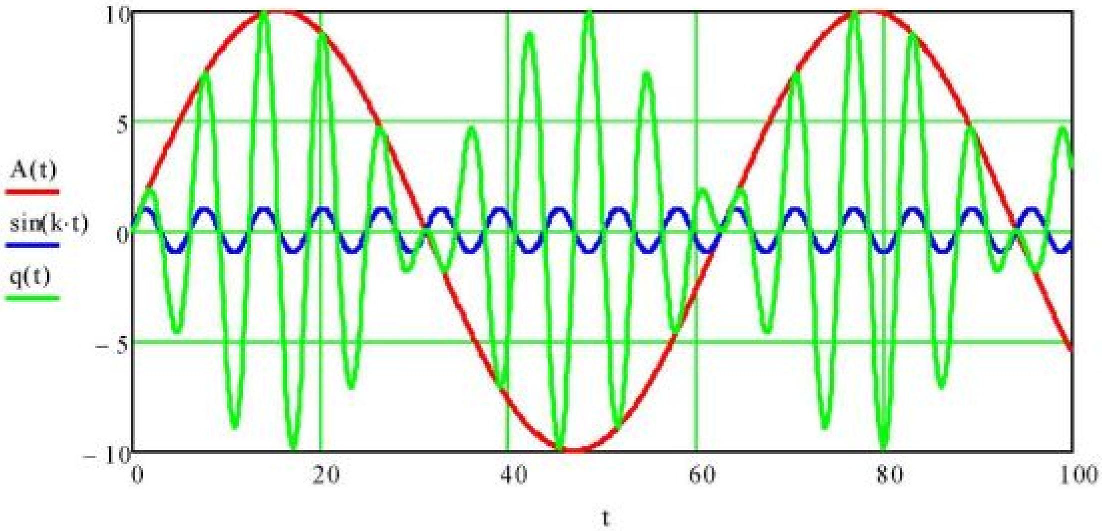


Рис. 5.6

При резонансе

$$\lim_{p \to k} A'(t) = \lim_{\delta \to 0} \frac{ht}{k\delta t} \sin \delta t = \frac{ht}{k};$$

$$q(t) = \frac{ht}{k} \sin kt.$$

С одной стороны, вынужденные колебания при резонансе смещены по фазе от возмущающей силы на $\pi/2$. С другой стороны, можно заметить, что вынужденные колебания при резонансе происходят с нарастающей пропорционально времени амплитудой.

$$B(t) := \frac{h \cdot t}{k}$$

$$q(t) := B(t) \cdot \sin(k \cdot t)$$

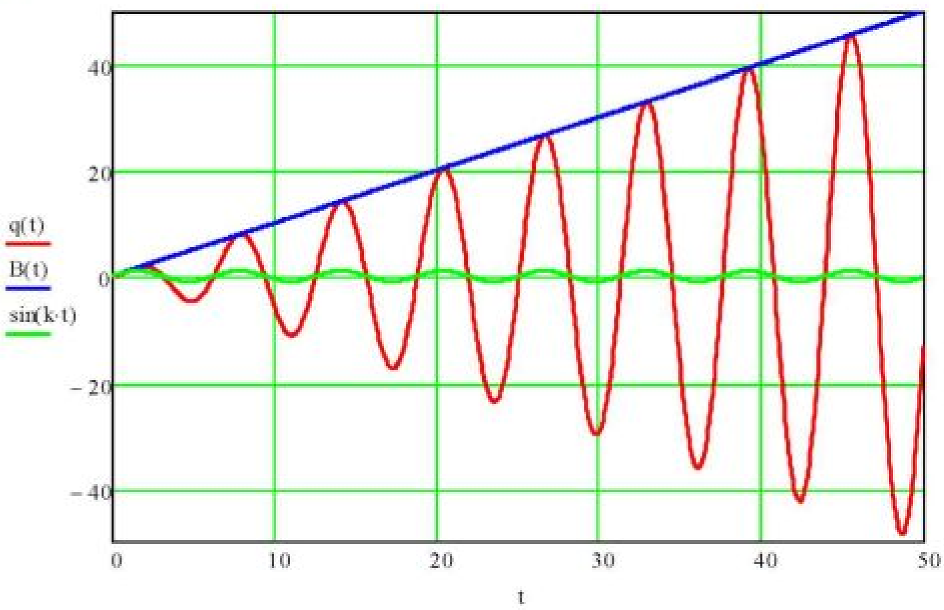


Рис. 5.7

Отметим, однако, что в реальной колебательной системе, во-первых, всегда имеется сопротивление, во-вторых, при достижении больших амплитуд колебаний нарушается допущение об их малости и становятся существенными нелинейные восстанавливающие силы. Все это приводит к тому, что амплитуда колебаний при резонансе в реальной колебательной системе хотя и может достигать больших значений, но не является неограниченно возрастающей.

Резонанс, сопровождающийся нарастанием амплитуды колебаний пусть до конечных, но больших значений, может стать причиной разрушения конструкции или возникновения опасных напряжений, сокращающих срок ее службы. Поэтому при проектировании машиностроительных конструкций надо, по возможности, избегать резонанса.

6. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

При гармоническом возбуждении дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$a\ddot{q} + \mu\dot{q} + cq = H\sin(pt + \beta),$$

или

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = h\sin(pt + \beta),$$

где $2n = \dfrac{\mu}{a}$, $k^2 = \dfrac{c}{a}$, $h = \dfrac{H}{a}$.

Решение будем искать в виде суммы общего решения однородного уравнения $\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0$ и частного решения неоднородного.

$$q = q_1 + q^*.$$

Было показано, что общее решение однородного уравнения q_1 может быть представлено в зависимости от соотношения между n и k в одной из трех форм:

$q_1 = e^{-nt}\left(C_1\cos k_1 t + C_2\sin k_1 t\right)$ при $n < k$;

$q_1 = e^{-nt}\left(C_1 e^{k_2 t} + C_2 e^{k_2 t}\right)$ при $n > k$;

$q_1 = e^{-nt}\left(C_1 t + C_2\right)$ при $n = k$.

Частное решение уравнения представим в виде

$$q^* = B\sin(pt + \beta - \varepsilon).$$

Постоянные B и ε определяют, подставляя $q^*, \dot{q}^*$ и $\ddot{q}^*$ в исходное дифференциальное уравнение.

В итоге получим

$$B = \frac{h}{\sqrt{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2 p^2}}; \ \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}.$$

Структура общего решения неоднородного уравнения такова, что при любых отличных от нуля значениях ε с течением времени из-за наличия множителя e^{-nt} оно стремится к нулю, и в решении остается только частное решение. В этом случае говорят об *установившихся вынужденных колебаниях.*

На основании решения можно сформулировать основные свойства установившихся вынужденных колебаний:

- это незатухающие колебания; они длятся так долго, как долго действует возмущающая сила;
- эти колебания не зависят от начальных условий;
- при гармоническом возбуждении они происходят с частотой возмущающей силы;
- эти колебания отстают по фазе от возмущающей силы на величину ε, изменяющуюся, как будет показано ниже, от 0 до π.

Амплитуда B установившихся вынужденных колебаний и сдвиг по фазе ε зависят от соотношения между частотами p и k и от коэффициента затухания n. Проанализируем эти зависимости, называемые *амплитудно-частотной* и *фазочастотной характеристиками.*

Для большей общности результатов перейдем к безразмерным параметрам.

Безразмерным коэффициентом затухания d называют отношение $d = 2n / k$.

Если $n << k$, следовательно, $\tau \approx \tau_1$, то безразмерный коэффициент затухания можно связать с логарифмическим декрементом колебаний:

$$d = \frac{2n}{k}\frac{\tau_1}{\tau}\frac{\tau}{\tau_1} = \frac{2n\tau_1}{2\pi}\frac{\tau}{\tau_1} = \frac{\delta}{\pi}\frac{\tau}{\tau_1} \approx \frac{\delta}{\pi}.$$

Добротностью Д называют величину, обратную *d*: $Д = 1 / d = k / 2n$.

Очевидно, что при малом затухании добротность, как и безразмерный коэффициент затухания, может быть выражена через логарифмический декремент колебаний: $Д = \pi / \delta$.

Исследуем амплитуду B и сдвиг по фазе ε вынужденных колебаний.

$$B=\frac{h}{\sqrt{\left(k^2-p^2\right)^2+4n^2p^2}}=\frac{h}{k^2\sqrt{\left(1-p^2/k^2\right)^2+4n^2p^2/k^4}}.$$

Обозначим:

$\frac{p}{k}$ – коэффициент расстройки, или относительная частота;

$\frac{h}{k^2}=B_0$ – статическое смещение, смещение системы под действием постоянной возмущающей силы, равной по модулю амплитуде возмущающей силы.

Отношение $\frac{B}{B_0}=\lambda$ – коэффициент динамичности при наличии вязкого сопротивления.

Исследуем зависимость коэффициента динамичности λ от z и d, представляющую собой амплитудно-частотную характеристику системы в безразмерном виде:

при $z\to\infty$ $\lambda\to 0$;

при $z\to 1$ $\lambda=\frac{1}{d}=Д$.

Таким образом, *добротность* Д *представляет собой значение коэффициента динамичности при резонансе;* она показывает, во сколько раз амплитуда колебаний при резонансе отличается от статического смещения. В отличие от случая отсутствия вязкого сопротивления, амплитуда при резонансе имеет конечное значение.

Если частота p изменения возмущающей силы мала по сравнению с частотой со свободных колебаний, т. е. $p<<k$, то амплитуда вынужденных колебаний близка к статическому смещению, а коэффициент динамичности близок к единице. Если же $p>>k$, то колебательная система ведет себя как фильтр, т. е. практически не воспринимает возмущения с частотами, существенно превышающими собственную частоту.

Выражение для коэффициента динамичности показывает, что при малых значениях d вязкое сопротивление становится существенным лишь в достаточно узкой зоне в окрестности резонанса, когда величина d^2z^2 становится соизмеримой с $\left(1-z^2\right)^2$. Это же демонстрирует график (рис. 5.8). Поэтому при определении амплитуды вынужденных колебаний в реальных системах с малым вязким сопротивлением последнее можно не учитывать, если известно, что частота p возмущающей силы далека от собственной частоты k.

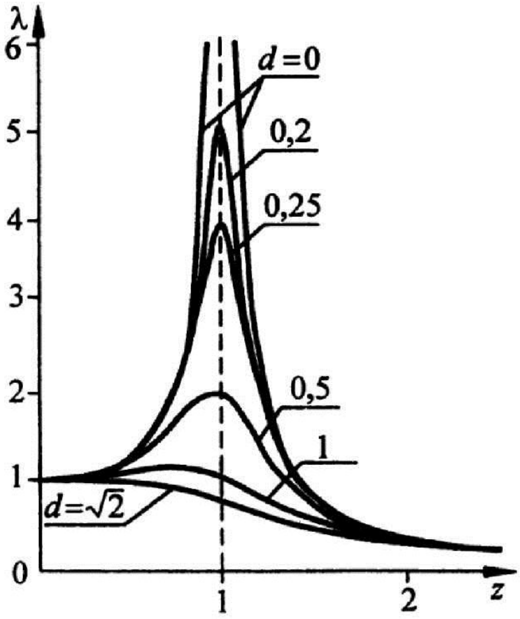


Рис.5.8

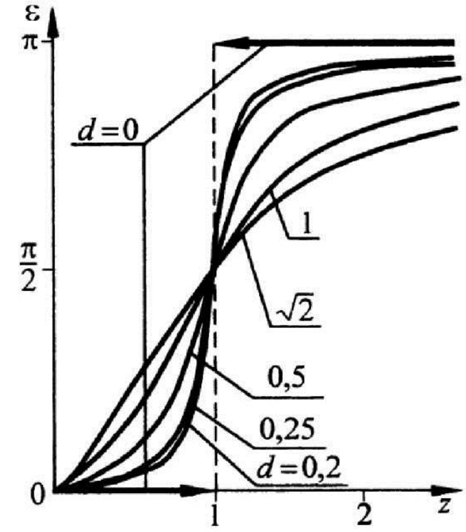


Рис.5.9

Для исследования фазочастотной характеристики в безразмерном виде разделим числитель и знаменатель аргумента арктангенса на k^2:

$$\varepsilon = \operatorname{arctg}\frac{2np}{k^2 - p^2} = \operatorname{arctg}\frac{2dz}{1-z^2}.$$

Учтем, что производная $\varepsilon(z)$ по z независимо от значения d (кроме $d = 0$) положительна при всех значениях z, т. е. $\varepsilon(z)$ представляет собой монотонно возрастающую функцию. Тогда

при $z = 0 \Rightarrow \varepsilon = \operatorname{arctg}(0) = 0;$

при $z = 1 \;\Rightarrow \varepsilon = \operatorname{arctg}(\infty) = \dfrac{\pi}{2};$

при $z \to \infty \;\Rightarrow \varepsilon = \operatorname{arctg}(-0) = \pi.$

Отметим, что при резонансе фазовое запаздывание $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ независимо от значения коэффициента d, характеризующего вязкое сопротивление.

На рисунке 5.9 представлены кривые, характеризующие зависимость $\varepsilon(z)$ при различных значениях d . При $d = 0$ (отсутствие вязкого сопротивления) $\varepsilon(z)$ представляет собой разрывную функцию. Отметим, что с ростом d меняется характер фазовой кривой, она трансформируется из кривой с двумя перегибами в кривую с одним перегибом.

ОГЛАВЛЕНИЕ