ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ
Учебное пособие

В учебном пособии рассмотрены основы теории колебаний механических систем, которые опираются на общий курс теоретической механики. Особое внимание уделено применению уравнений Лагранжа второго ряда. Пособие состоит из шести глав, каждая из которых посвящена определенному типу колебаний. Одна глава посвящена основам теории устойчивости движения и равновесия механических систем.

Для лучшего освоения теоретического материала, в пособии, приведено большое количество примеров и задач из различных областей техники.

Учебное пособие предназначено для студентов механических специальностей, изучающих курс теоретической механики в полном объеме, может быть также полезным и для студентов других специальностей.

Оглавление

Предисловие 4
Глава I. Краткие сведения из аналитической механики 5
1.1 Потенциальная энергия системы 5
1.2. Кинетическая энергия системы 6
1.3. Диссипативная функция 8
1.4. Уравнение Лангранжа 9
1.5. Примеры на составление уравнений Лангранжа второго рода 11
Глава II. Устойчивость движения и равновесия консервативных систем 20
2.1. Введение 20
2.2. Функции Ляпунова. Критерий Сильвестра 21
2.3. Уравнение возмущенного движения 23
2.4. Теорема Ляпунова об устойчивости движения 26
2.5. Теорема Лагранжа об устойчивости равновесия консервативной системы 29
2.6. Устойчивость равновесия консервативной системы с одной степенью свободы 30
2.7. Примеры на устойчивость равновесия консервативной системы 31
Глава III. Свободные колебания системы с одной степенью свободы 39
3.1. Свободные колебания консервативной системы с одной степенью свободы 39
3.2. Свободные колебания системы с одной степенью свободы при наличии сил сопротивления, пропорциональных скорости 42
3.3. Примеры на свободные колебания системы с одной степенью свободы 46
Глава IV. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы 59
4.1. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы в случае периодической возмущающей силы 59
4.2. Явление резонанса 63
4.3. Явление биения 66
4.4. Коэффициент динамичности 68
4.5. Примеры на вынужденные колебания системы с одной степенью свободы 70
Глава V. Свободные колебания системы с двумя степенями свободы 78
5.1. Дифференциальные уравнения свободных колебаний системы с двумя степенями свободы и их общее решение 78
5.2. Собственные формы 80
5.3. Примеры на свободное колебание системы с двумя степенями свободы 81
Глава VI. Вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы 93
6.1. Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний системы и их общее решение 93
6.2. Динамический гаситель колебаний 95
6.3. Примеры на вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы 98
Библиографический список 107

Предисловие

На современном этапе развития высшей школы в практику преподавания всё шире вводятся проблемные и исследовательские формы обучения.

Динамические процессы в машинах и механизмах имеют определяющее значение как для расчёта на стадии проектирования новых конструкций, так и для определения технологических режимов в процессе эксплуатации. Трудно назвать такую область техники, в которой не были бы актуальными проблемы изучения упругих колебаний и устойчивости равновесия и движения механических систем. Они представляют особую важность для инженеров-механиков, работающих в области машиностроения, транспорта и других областях техники.

В пособии рассмотрены некоторые отдельные вопросы из теории колебаний и устойчивости механических систем. Теоретические сведения пояснены примерами.

Основное назначение настоящего методического пособия – увязать область приложений теоретической и аналитической механики с задачами специальных кафедр, осуществляющих подготовку инженеров-механиков.

Глава I. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

I.I. Потенциальная энергия системы

Потенциальная энергия системы с s степенями свободы, являясь энергией положения, зависит только от обобщённых координат

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, ..., q_s), \tag{1.1}$$

где q_j $\left(j = 1, 2, \ldots, s\right)$ – обобщённые координаты системы.

Рассматривая малые отклонения системы от положения устойчивого равновесия, обобщённые координаты q_j можно рассматривать как величины первого порядка малости. Считая, что положение равновесия системы соответствует началу отсчёта обобщённых координат, разложим выражение потенциальной энергии П в ряд Маклорена по степеням q_j

$$\Pi = \Pi(\mathrm{O}) + \sum_{j=1}^{S}(\frac{\partial \Pi}{\partial q_j})_0 q_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1}^{S}(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j})_0 q_i q_j + \ldots. \tag{1.2}$$

Имея в виду, что потенциальная энергия определяется с точностью до некоторой аддитивной постоянной, потенциальную энергию в положении равновесия можно принять равной нулю

$$\Pi\ (0) = 0. \tag{1.3}$$

В случае консервативных сил обобщённые силы определяются формулой

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad \left(j = 1, 2, \ldots, s\right). \tag{1.4}$$

Так как при равновесии системы сил

$$Q_j = 0 \quad \left(j = 1, 2, \ldots, s\right),$$

то условия равновесия консервативной системы сил имеют вид

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}\right)_0 = 0 \quad \left(j = 1, 2, \ldots, s\right), \tag{1.5}$$

следовательно,

$$\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}\right)_0 q_j = 0. \tag{1.6}$$

Тогда равенство (1.2.) с точностью до членов второго порядка малости принимает вид

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1}^{S}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 q_i q_j . \tag{1.7}$$

Обозначим

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 = c_{ij} = c_{ji}, \tag{1.8}$$

где c_{ij} - обобщённые коэффициенты жёсткости.

Окончательно выражение потенциальной энергии имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1}^{S} c_{ij} q_i q_j . \tag{1.9}$$

Из (1.9.) видно, что потенциальная энергия системы является однородной квадратичной функцией обобщённых координат.

1.2. Кинетическая энергия системы

Кинетическая энергия системы, состоящей из n материальных точек, равна [1]

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2, \tag{1.10}$$

где m_k и $v_к$ – масса и скорость k-ой точки системы.

При переходе к обобщённым координатам будем иметь в виду, что

$$r_{\mathrm{k}} = r_k(q_1, q_2, ..., q_s) \qquad (k = 1, 2, ..., n), \tag{1.11}$$

где $\bar{r}_k$ – радиус-вектор k-ой точки системы.

Воспользуемся тождеством $v_k^2 = \bar{v}_k \cdot \bar{v}_k$ и заменим вектор скорости $\bar{v}_k$ его значением

$$\bar{v}_k = \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}\dot{q}_2 + ... + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s}\dot{q}_s . \tag{1.12}$$

Тогда выражение для кинетической энергии (1.10) примет вид

$$T=\frac{1}{2}(A_{11}\dot{q}_1^2+A_{22}\dot{q}_2^2+\ldots+A_{SS}\dot{q}_S^2+2A_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+\ldots+2A_{S-1,S}\dot{q}_{S-1}\dot{q}_S),\quad(1.13)$$

где

$$A_{11}=\sum_{k=1}^{n}m_k\left(\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1}\right)^2,\ A_{22}=\sum_{k=1}^{n}m_k\left(\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_2}\right)^2,\ldots,$$

$$A_{ss}=\sum_{k=1}^{n}m_k\left(\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_s}\right)^2,\ A_{12}=\sum m_k\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_2},\ldots,$$

$$A_{s-1,s}=\sum_{k=1}^{n}m_k\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_{S-1}}\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_S}\ .$$

Разлагая каждый из этих коэффициентов в ряд Маклорена по степеням обобщённых координат, получаем

$$A_{ij}=(A_{ij})_0+\sum_{j=1}^{S}\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial A_j}\right)_0 q_j+\ldots\qquad(i=j=1,2,\ldots,s).\qquad(1.14)$$

Индекс 0 соответствует значениям функций в положении равновесия. Так как рассматриваются малые отклонения системы от положения равновесия, то в равенстве (1.14) ограничимся только первыми постоянными членами [2]

$$A_{ij}=(A_{ij})_0=a_{ij}\qquad(i=j=1,2,\ldots,s).$$

Тогда выражение для кинетической энергии (1.13) примет вид

$$T=\frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{q}_1^2+a_{22}\dot{q}_2^2+\ldots+a_{SS}\dot{q}_S^2+2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+2a_{S-1,S}\dot{q}_{S-1}\dot{q}_S\right)\quad(1.15)$$

или в общем виде

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1}^{S}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j.\qquad(1.16)$$

Постоянные a_{ij} – обобщённые коэффициенты инерции.

Из (1.16) видно, что кинетическая энергия системы T – однородная квадратичная функция обобщённых скоростей.

1.3. Диссипативная функция

В реальных условиях свободные колебания системы затухают, так как на её точки действуют силы сопротивления. При наличии сил сопротивления происходит рассеивание механической энергии.

Допустим, что силы сопротивления $\bar{R}_k \ (k = 1, 2, ..., n)$, действующие на точки системы, пропорциональны их скоростям

$$\bar{R}_k = -\mu_k \bar{v}_k \qquad (k = 1,\ 2, ..., n),$$

где μ_k – коэффициент пропорциональности.

Обобщённые силы сопротивления для голономной системы определяем по формулам [1]

$$Q_j^R = \sum_{k=1}^{n} \bar{R}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = -\sum_{k=1}^{n} \mu_k \bar{v}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \qquad (j = 1, 2, ..., s). \tag{1.17}$$

Так как

$$\bar{v}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \dot{q}_2 + ... + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_S} \dot{q}_S,$$

то

$$\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}. \tag{1.18}$$

Имея в виду (1.18), обобщённые силы сопротивления (1.17) перепишем в виде

$$Q_j^R = -\sum_{k=1}^{n} \mu_\kappa \bar{v}_\kappa \frac{\partial \bar{v}_\kappa}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_\kappa v_k^2}{2} \qquad (j = 1, 2, ..., s). \tag{1.19}$$

Введём диссипативную функцию, которая определяется формулой [2]

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_\kappa v_k^2}{2}. \tag{1.20}$$

Тогда обобщённые силы сопротивления определяем по формулам

$$Q_j^R = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \qquad (j = 1, 2, ..., s). \qquad (1.21)$$

Диссипативную функцию по аналогии с кинетической энергией системы можно представить в виде однородной квадратичной функции обобщённых скоростей [2]

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{S} \sum_{j=1}^{S} в_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \qquad (1.22)$$

где $в_{ij}$ – обобщенные коэффициенты диссипации.

1.4. Уравнение Лагранжа второго рода

Положение голономной системы, имеющей s степеней свободы, определяется s обобщёнными координатами q_j $(j = 1, 2, ..., s)$.

Для вывода уравнений Лагранжа второго рода воспользуемся общим уравнением динамики [1]

$$\sum_{j=1}^{S} (Q_j + Q_j^u) \delta q_j = 0, \qquad (1.23)$$

где Q_j – обобщённая сила активных сил, соответствующая j-ой обобщённой координате;

Q_j^u – обобщённая сила сил инерции, соответствующая j-ой обобщённой координате;

δq_j – приращение j -ой обобщённой координаты.

Имея в виду, что все δq_j $(j = 1, 2, ..., s)$ между собой независимы, равенство (1.23) будет справедливо лишь в случае, когда каждый из коэффициентов при δq_j в отдельности будет равен нулю, т.е.

$$Q_j + Q_j^u = 0 \quad (j = 1, 2, ..., s)$$

или

$$Q_j = -Q_j^u \qquad (j = 1, 2, ..., s). \qquad (1.24)$$

Выразим Q_j^u через кинетическую энергию системы.

По определению обобщённой силы [1], имеем

$$Q_j^u = \sum_{k=1}^{n} \bar{\Phi}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = -\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, s), \tag{1.25}$$

где $\bar{\Phi}_k = -m_k \bar{a}_k = -m_k \dfrac{d\bar{v}_k}{dt}$ – сила инерции к -ой точки системы.

Далее будем иметь в виду, что

$$\frac{d\bar{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\bar{v}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\right) - \bar{v}_k \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\right), \tag{1.26}$$

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_s),$$

$$\bar{v}_k = \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s}\dot{q}_s,$$

$$\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}, \tag{1.27}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_j}. \tag{1.28}$$

Подставляя значения (1.27) и (1.28) в равенство (1.26), находим

$$\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\bar{v}_k \cdot \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_j}\right) - \bar{v}_k \cdot \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v_k^2}{2\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial v_k^2}{2\partial q_j}. \tag{1.29}$$

С учётом равенства (1.29) выражение (1.25) перепишем в виде

$$-Q_j^u = \sum_{k=1}^{n} m_k \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v_k^2}{2\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial v_k^2}{2\partial \dot{q}_j}\right] = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k v_k^2}{2}\right) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial q_j}\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_j}.$$

Здесь учтено, что сумма производных равна производной от суммы, а $\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k v_k^2}{2}=T$ – кинетическая энергия системы.

Имея в виду равенства (1.24), окончательно находим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_j}=Q_j \quad (j=1,2,\ldots,s). \qquad (1.30)$$

Уравнения (1.30) называются уравнениями Лагранжа второго рода. Число этих уравнений равно числу степеней свободы.

Если силы, действующие на точки системы, имеют потенциал, то для обобщённых сил справедлива формула [1]

$$Q_j=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j=1,2,\ldots,s), \qquad (1.31)$$

где Π – потенциальная энергия системы.

Таким образом, для консервативной системы уравнения Лагранжа перепишутся в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_j}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j=1,2,\ldots,s). \qquad (1.32)$$

1.5. Примеры на составление уравнений Лагранжа второго рода

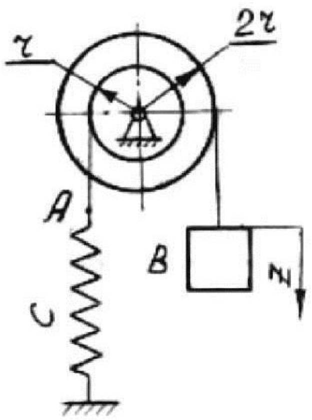


Рис. 1.1

Пример 1. Через блок, вращающийся вокруг горизонтальной оси, перекинута нерастяжимая нить (рис. 1.1). Конец A нити прикреплён к пружине, коэффициент жёсткости которой c, а к другому её концу B прикреплён груз массой m_1.

Считая массу блока m_2 распределённой по его ободу, составить дифференциальные уравнения малых свободных колебаний.

Решение. Система имеет одну степень свободы.

За обобщённую координату системы примем отклонение груза от его равновесного положения. Кинетическая энергия системы определится выражением

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{z}^2+\frac{1}{2}J_x\omega^2.$$

Так как $J_x=m_2R^2$ и $\omega=\frac{\dot{z}}{R}$,

получаем

$$T=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{z}^2.$$

Потенциальную энергию системы определим как сумму потенциальной энергии силы тяжести Π_1 и потенциальной энергии деформированной пружины Π_2:

$$\Pi_1=-m_1gz;\qquad \Pi_2=\frac{c}{2}\left(f+\frac{z}{2}\right)^2-\frac{c}{2}f^2,$$

где f – статическое удлинение пружины.

Следовательно,

$$\Pi=\Pi_1+\Pi_2=-m_1gz+\frac{cfz}{2}+\frac{cz^2}{8}.$$

В положении равновесия при z = 0 должно выполняться равенство

$$\left.\frac{\partial\Pi}{\partial z}\right|_{z=0}=-m_1g+\frac{1}{2}cf=0,$$

т.е. $2m_1f=cf$, следовательно, $\Pi=\frac{1}{8}cz^2$.

Подставляем значение кинетической и потенциальной энергии в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{z}}\right)-\frac{\partial T}{\partial z}=-\frac{\partial\Pi}{\partial z}.$$

Выполняя операции дифференцирования, находим

$$\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{z}}\right)=(m_1+m_2)\dot{z},\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{z}}\right)=(m_1+m_2)\ddot{z},$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial\Pi}{\partial z}=\frac{1}{4}cz.$$

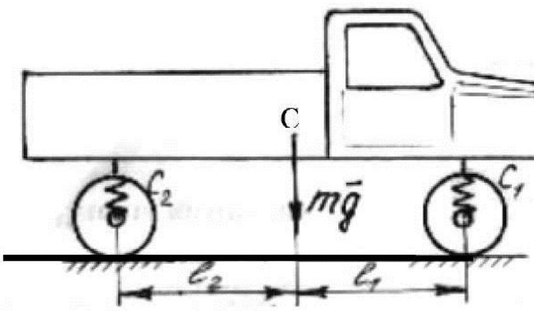
Окончательно имеем

$$(m_1+m_2)\ddot{z}+\frac{1}{4}cz=0 \quad \text{или} \quad \ddot{z}+k^2z=0, \qquad (1)$$

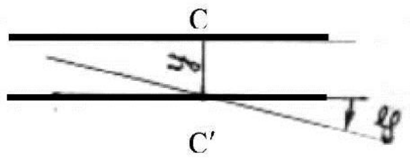
где $k^2=\dfrac{c}{4(m_1+m_2)}$.

Уравнение (1) – дифференциальное уравнение движения заданной системы.

<u>Пример 2</u>. Корпус автомобиля массой m (рис. 1.2) соединён с колёсами рессорами, имеющими жёсткость c_1 и c_2. Расстояния от центра масс корпуса С до подвесок равны ℓ_1 и ℓ_2. Считая, что момент инерции массы корпуса относительно центральной поперечной оси равен J, и пренебрегая упругостью шин, составить дифференциальные уравнения малых свободных колебаний корпуса автомобиля в продольной плоскости.



а)



б)

Рис. 1.2

<u>Решение.</u> Так как колебания автомобиля происходят в его средней вертикальной плоскости, то система имеет две степени свободы. В качестве обобщённых координат выбираем вертикальное смещение центра масс корпуса y и угол поворота φ (рис. 1.2,б).

Кинетическая энергия на основании теоремы Кенига равна [1]

$$T=\frac{1}{2}m\dot{y}^2+\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2.$$

Потенциальная энергия П системы складывается из потенциальной энергии силы тяжести $П_1$ и потенциальной энергии рессор $П_2$

$$П=П_1+П_2.$$

Потенциальная энергия силы тяжести:

$$\Pi_1 = -mgy.$$

Потенциальная энергия рессор:

$$\Pi_2 = \Pi_{C_1} + \Pi_{C_2};$$

$$\Pi_{C_1} = \frac{1}{2}c_1(f_1 + y + \ell_1\varphi)^2 - \frac{1}{2}f_1^2 c_1;$$

$$\Pi_{C_2} = \frac{1}{2}c_2(f_2 + y - \ell_2\varphi)^2 - \frac{1}{2}f_2^2 c_2,$$

где f_1 и f_2 – статическая деформация передней и задней рессор соответственно.

Потенциальная энергия всей системы равна

$$\begin{gathered}\Pi = -mgy + \frac{1}{2}c_1(y + \ell_1\varphi)^2 + c_1 f_1(y + \ell_1\varphi) + \\ + \frac{1}{2}c_2(y - \ell_2\varphi)^2 + c_2 f_2(y - \ell_2\varphi).\end{gathered} \tag{1}$$

В положении равновесия при $y = 0$ и $\varphi = 0$ должны выполняться равенства [1]

$$\left.\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right|_{\substack{y=0\\ \varphi=0}} = 0; \qquad \left.\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}\right|_{\substack{y=0\\ \varphi=0}} = 0. \tag{2}$$

В нашем примере имеем:

$$\left.\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right|_{\substack{y=0\\ \varphi=0}} = \left[-mg + c_1\left(y + \ell_1\varphi\right) + c_1 f_1 + c_2\left(y - \ell_2\varphi\right) + c_2 f_2\right]_{y=0,\ \varphi=0} =$$

$$= -mg + c_1 f_1 + c_2 f_2,$$

$$\left.\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}\right|_{\substack{y=0\\ \varphi=0}} = \left[c_1\ell_1\left(y + \ell_1\varphi\right) + c_1 f_1\ell_1 - c_2\ell_2\left(y - \ell_2\varphi\right) - c_2 f_2\ell_2\right]_{y=0,\ \varphi=0} =$$

$$= c_1 f_1\ell_1 - c_2 f_2\ell_2.$$

Следовательно, параметры системы удовлетворяют условиям (2)

$$\left.\begin{aligned}-mg + c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0,\\ c_1 f_1\ell_1 - c_2 f_2\ell_2 = 0.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Принимая во внимание равенства (3), выражение потенциальной энергии (1) перепишем в виде

$$П=\frac{1}{2}(c_1+c_2)y^2+(c_1\ell_1-c_2\ell_2)y\varphi+\frac{1}{2}(c_1\ell_1^2+c_2\ell_2^2)\varphi^2.$$

Подставляем выражения кинетической и потенциальной энергии в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial T}{\partial y}=-\frac{\partial П}{\partial y},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=-\frac{\partial П}{\partial \varphi}.$$

Выполняя операции дифференцирования, находим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}=m\dot{y},\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)=m\ddot{y},\qquad \frac{\partial T}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial П}{\partial y}=(c_1+c_2)y+(c_1\ell_1-c_2\ell_2)\varphi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=I\dot{\varphi},\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)=I\ddot{\varphi},\qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi}=0,$$

$$\frac{\partial П}{\partial \varphi}=(c_1\ell_1-c_2\ell_2)y+(c_1\ell_1^2+c_2\ell_2^2)\varphi.$$

Окончательно имеем

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{y}+(c_1+c_2)y+(c_1\ell_1-c_2\ell_2)\varphi=0,\\ I\ddot{\varphi}+(c_1\ell_1-c_2\ell_2)y+(c_1\ell_1^2+c_2\ell_2^2)\varphi=0.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Уравнения (4) выражают дифференциальные уравнения свободных колебаний корпуса автомобиля.

Пример 3. Система, совершающая крутильные колебания, состоит из трёх маховиков (рис. 1.3), моменты инерции которых соответственно равны J_1, J_2, J_3. Составить дифференциальные уравнения малых свободных колебаний системы, считая, что маховики соединены валами, имеющими крутильную жёсткость, равную c каждый.

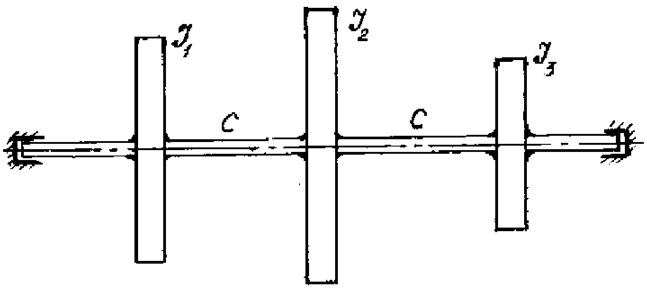


Рис. 1.3

Решение. Система имеет три степени свободы. В качестве обобщённых координат выбираем углы поворота маховиков φ_1, φ_2 и φ_3. Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}_3^2 .$$

Потенциальная энергия системы равна

$$П = \frac{1}{2} c(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} c(\varphi_3 - \varphi_2)^2 .$$

Уравнения Лагранжа для данной системы запишем в виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = -\frac{\partial П}{\partial \varphi_1}, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = -\frac{\partial П}{\partial \varphi_2}, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} = -\frac{\partial П}{\partial \varphi_3}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Выполняя операции дифференцирования, находим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = J_1 \dot{\varphi}_1; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = J_1 \ddot{\varphi}_1; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0; \quad \frac{\partial П}{\partial \varphi_1} = c(\varphi_1 - \varphi_2);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = J_2 \dot{\varphi}_2; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) = J_2 \ddot{\varphi}_2; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = 0;$$

$$\frac{\partial П}{\partial \varphi_2} = -c(\varphi_1 - \varphi_2) - c(\varphi_3 - \varphi_2);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} = J_3 \dot{\varphi}_3; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3}\right) = J_3 \ddot{\varphi}_3; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_3} = c(\varphi_3 - \varphi_2).$$

Подставляя найденные значения в уравнения Лагранжа (1), получаем искомую систему дифференциальных уравнений движения системы:

$$\left.\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + c\varphi_1 - c\varphi_2 = 0,\\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - c\varphi_1 + 2c\varphi_2 - c\varphi_3 = 0,\\ J_3 \ddot{\varphi}_3 - c\varphi_2 + c\varphi_3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

<u>Пример 4</u>. Диск массы М может катиться без скольжения по прямолинейному рельсу. К центру диска шарнирно прикреплён невесомый стержень длиною ℓ, на конце которого находится точечный груз массы m. Кроме того, к центру диска прикреплены пружина жёсткостью с и демпфер с линейной характеристикой трения $R = \mu v$, где μ – коэффициент пропорциональности. Составить дифференциальные уравнения движения системы (рис. 1.4).

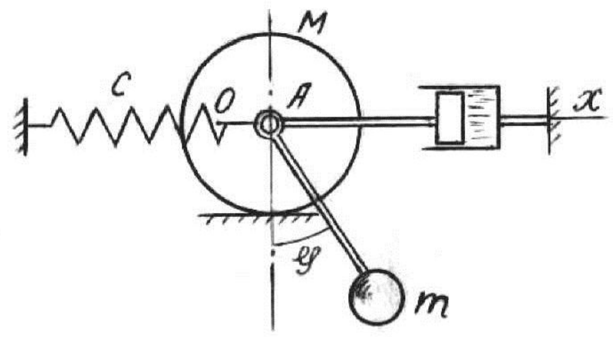


Рис. 1.4

<u>Решение.</u> Система имеет две степени свободы. В качестве обобщённых координат примем горизонтальное перемещение центра диска и угол поворота стержня, т.е. $q_1 = x_A$, $q_2 = \varphi$.

Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{4}(3M + 2m)\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}m\ell^2 \dot{\varphi}^2 + m\ell \dot{x}_A \dot{\varphi}\cos\varphi. \qquad (1)$$

Потенциальная энергия системы равна

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2,$$

где Π_1 – потенциальная энергия силы тяжести груза, Π_2 – потенциальная энергия пружины. Потенциальная энергия силы тяжести диска равна нулю, так как центр тяжести диска перемещается по горизонтали.

Имея в виду, что

$$\Pi_1 = mg\ell\left(\ell - \cos\varphi\right);\ \ \Pi_2 = \frac{1}{2}cx_A^2,$$

потенциальная энергия всей системы будет равна

$$\Pi = mg\ell\left(\ell - \cos\varphi\right) + \frac{1}{2}cx_A^2. \tag{2}$$

Диссипативная функция системы в соответствии с формулой (1.20) будет равна

$$\Phi = \frac{1}{2}\mu \dot{x}_A^2. \tag{3}$$

Уравнения Лагранжа для данной системы запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_A}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_A} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_A} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_A},\\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Выполняя операции дифференцирования, находим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_A} = \frac{1}{2}(3M + 2m)\dot{x}_A + m\ell\dot{\varphi}\cos\varphi;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_A}\right) = \frac{1}{2}(3M + 2m)\ddot{x}_A + m\ell\ddot{\varphi}\cos\varphi - m\ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi;$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_A} = 0;\qquad \frac{\partial \Pi}{\partial x_A} = cx_A;\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_A} = \mu\dot{x}_A;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m\ell^2\dot{\varphi} + m\ell\dot{x}_A\cos\varphi;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m\ell^2\ddot{\varphi} + m\ell\ddot{x}_A\cos\varphi - m\ell\dot{x}_A\dot{\varphi}\sin\varphi;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m\ell \dot{x}_A \dot{\varphi} \sin\varphi; \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mg\ell \sin\varphi; \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}} = 0.$$

Подставляя найденные значения в уравнения Лагранжа (4), получаем искомую систему дифференциальных уравнений движения системы

$$\left.\begin{aligned} (1.5M+m)\dot{x}_A + m\ell\ddot{\varphi}\cos\varphi - m\ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi + \mu\dot{x}_A + cx_A = 0, \\ m\ell^2\ddot{\varphi} + m\ell\, x\,\ddot{x}_A\cos\varphi - m\ell\dot{x}_A\dot{\varphi}\sin\varphi - m\ell\dot{x}_A\dot{\varphi}\sin\varphi + mg\ell\sin\varphi = 0. \end{aligned}\right\}$$

Глава II. УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ И РАВНОВЕСИЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

2.1. Введение

В настоящей главе даются основы теории устойчивости движения и равновесия механических систем. Движения различных механических систем можно описать обыкновенными дифференциальными уравнениями или системой уравнений. Система дифференциальных уравнений имеет бесконечное множество решений, и для задания одного определённого решения нужно указать его начальные условия. Между тем многие устройства, которые применяются в инженерной практике, обычно работают на вполне определённом режиме, и в их работе трудно обнаружить наличия бесконечного множества режимов работы, соответствующих различным решениям системы дифференциальных уравнений. Это можно объяснить тем, что начальные значения решения при запуске устройства выбирают каким-либо определённым образом либо тем, что начальные значения при продолжительной работе прибора утрачивают своё влияние, и устройство само стабилизирует своё движение на стационарном режиме. Так, например, маятниковые часы идут с совершенно определённым размахом маятника, хотя при запуске их маятника можно отклонить от вертикального положения более или менее сильно. Если при запуске часов маятник отклонить не достаточно сильно, то после небольшого числа колебаний он остановится. Если же отклонение достаточно велико, то через некоторое время амплитуда колебаний стабилизируется, и часы будут идти с этой амплитудой колебаний практически бесконечно долго. Таким образом, у системы уравнений, описывающей работу часов, имеются два стационарных решения: положение равновесия, соответствующее отсутствию хода, и решение, соответствующее нормальному ходу часов. Всякое другое решение очень быстро приближается к одному из этих двух стационарных и по истечении некоторого времени становится практически не отличимым от него. Каждое из отмеченных двух стационарных решений является устойчивым.

Проблемы устойчивости возникли впервые в механике при изучении равновесных положений системы. Однако с середины XIX столетия бурное развитие техники потребовало исследования устойчивости не только равновесия, но и движения. Сейчас невозможно представить развитие авиационной, морской, космической техники, турбиностроения и так далее без решения вопросов устойчивости движения.

2.2. Функции Ляпунова. Критерий Сильвестра

Одним из наиболее эффективных методов исследования устойчивости движения является прямой метод Ляпунова.

Рассмотрим некоторую вещественную функцию $W = W\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, определённую в области [3]

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \mu, \tag{2.1}$$

где μ – постоянное положительное число.

Предполагается, что в области (2.1) эта функция однозначна, непрерывна и обращается в нуль, когда все $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равны нулю, то есть

$$W(0) = 0. \tag{2.2}$$

Функцию называют знакопостоянной, если в окрестности начала координат функция W кроме нуля может принимать значения только одного знака. Если же знакопостоянная функция обращается в нуль только в том случае, когда все $x_1, \ldots, x_n$ равны нулю, то функция W называется знакоопределённой (соответственно определённо-положительной или определённо-отрицательной). Такая функция *W*, используемая для исследования устойчивости движения, называется функцией Ляпунова.

Знакоопределённая функция имеет при $x_1 = 0 \;\; (i = 1, 2, \ldots, n)$ экстремум (минимум для определённо-положительной функции и максимум для определённо-отрицательной функции).

Рассмотрим знакопеременную функцию *W(x)*, непрерывную вместе с производными первого порядка. Тогда при $x_1 = 0 \;\; (i = 1, 2, \ldots, n)$ она будет иметь изолированный экстремум, и, следовательно, все частные производные первого порядка, вычисленные в этой точке, будут равны нулю

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)_0 = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.3}$$

Разложим функцию W в ряд Маклорена по степеням $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$W = W(0) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)_0 x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_k}\right)_0 x_i x_k + \ldots,$$

где точками обозначены члены выше второго порядка.

Учитывая соотношения (2.2) и (2.3), получим

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_k}\right)_0 x_i x_k + \ldots = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_i x_k + \ldots, \tag{2.4}$$

где

$$c_{ik} = c_{ki} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_k}\right)_0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.5}$$

Если квадратичная форма

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_i x_k \tag{2.6}$$

принимает положительные значения и в нуль обращается только при $x_1 = \ldots = x_n = 0$, то вне зависимости от членов высшего порядка при достаточно малых по модулю x_i функция W будет принимать тоже положительные значения и в нуль она будет обращаться только при $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Следовательно, если квадратичная форма (2.6) определённо-положительна, то и функция W будет также определённо-положительной.

Для определения условий, при которых квадратичная форма является определённо-положительной воспользуемся критерием Сильвестра: для того чтобы квадратичная форма была определённо-положительной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры её дискриминанта были положительны, то есть выполнялись следующие условия:

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ldots,\ \Delta_n > 0. \tag{2.7}$$

Составим матрицу коэффициентов квадратичной формы (2.6)

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{2.8}$$

Согласно условиям (2.7), имеем:

$$\Delta_1 = c_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > \mathbf{0}, \ldots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}. \tag{2.9}$$

Если функция W определённо-отрицательна, то функция $-W$ будет определённо-положительной. Поэтому условием определённой отрицательности функции W будет критерий Сильвестра для матрицы $-C$.

Этот критерий имеет вид:

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta < 0, \dots , \tag{2.10}$$

то есть определители должны последовательно чередовать знак, причём знак $\Delta_1 = c_{11}$ должен быть отрицательным.

2.3. Уравнения возмущенного движения

Невозмущённым движением называется некоторое вполне определённое движение системы, подлежащее исследованию на устойчивость[3].

Предположим, что движение системы описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{y}_j = Y_i(y_1, y_2, ..., y_n, t) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \tag{2.11}$$

Здесь Y_i – известные функции переменных $y_1, \dots, y_n$ и времени t.
И пусть невозмущённому движению системы отвечает частное решение

$$y_1 = f_1(t), \dots, y_n = f_n(t) \tag{2.12}$$

дифференциальных уравнений (2.11), удовлетворяющее начальным условиям

при $\quad t = t_0 \quad y_i = f_i(t_0) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$. (2.13)

Изменим условия (2.13), дав начальным значениям переменных y_i небольшие по модулю приращения ε_i, то есть при $t = 0$:

$$y_i = f_i(t_0) + \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{2.14}$$

Движение системы, отвечающее изменённым начальным условиям (2.14), называется возмущённым движением, а величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ – возмущениями.

Обозначим значение переменных y_i в возмущённом движении через $y_i(t)$, а в невозмущённом движении через $f_i(t)$ и составим разности между ними

$$x_i = y_i(t) - f_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{2.15}$$

Переменные x_i называются вариациями величин y_i. Если все отклонения равны нулю, т.е.

$$x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.16}$$

то возмущённое движение $y_i(t)$ будет совпадать с невозмущённым движением $f_i(t)$.

Совокупность отклонений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определяет точку М, которую называют изображающей точкой. В возмущённом движении изображающая точка М описывает некоторую траекторию. Невозмущённому движению $x_i = 0$ отвечает неподвижная точка – начало координат. Отклонение возмущённого движения от невозмущённого определяется величинами x_i. Если все x_i малы по модулю, то будет мала и сумма их квадратов

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \tag{2.17}$$

если же отклонение хотя бы одной координаты будет велико, то сумма (2.17) будет велика. Поэтому в качестве меры отклонения возмущённого движения от невозмущённого можно выбрать величину (2.17).

Согласно определению возмущённого движения и равенствам (2.14) и (2.15), будем иметь при $t = t_0$

$$x_i = x_{i0} = \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.18}$$

то есть начальные значения отклонений x_{i0} представляют возмущения системы.

Для вывода дифференциальных уравнений возмущённого движения найдём из равенства (2.15) переменные $y_i(t)$

$$y_i(t) = f_i(t) + x_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Подставим значения $y_i(t)$ в дифференциальные уравнения (2.11)

$$\frac{df_i}{dt} + \frac{dx_i}{dt} = Y_i(f_1 + x_1, \ldots, f_n + x_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.19}$$

Разложим правые части уравнений (2.19) в ряд Маклорена по степеням x_i

$$\frac{df_i}{dt} + \frac{dx_i}{dt} = Y_i(f_1, f_2, \ldots, f_n, t) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_k} \right)_0 x_k + X_i^*, \tag{2.20}$$

где X_i^* – совокупность членов, зависящих от отклонений x_i в степени выше первой.

В невозмущённом движении функции $f_i(t)$ должны удовлетворять уравнениям (2.11), то есть

$$\frac{df_i}{dt} = Y_i(f_1, f_2, ..., f_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.21}$$

Тогда с учётом (2.21) уравнения (2.20) перепишем в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha_{i1}x_1 + \ldots + \alpha_{in}x_n + X_i^* \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.22}$$

$$\alpha_{ik} = \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_k}\right)_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.23}$$

Уравнения (2.22) называются дифференциальными уравнениями возмущённого движения. Если в этих уравнениях отбросить члены выше первого порядка, то есть X^*_i, то полученные при этом уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha_{i1}x_1 + \ldots \alpha_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.24}$$

называются уравнениями первого приближения.

Следует отметить, что не всегда уравнения первого приближения дают верный ответ на вопрос об устойчивости движения.

Уравнения возмущённого движения называются автономными, если они не зависят явно от времени, а в противном случае – неавтономными.

Если обозначить все члены, стоящие в правых частях уравнений (2.22) и (2.24) символами X_i, то получим:

для автономной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, ...x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.25}$$

для неавтономной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_i, ..., x_{n,} t). \tag{2.26}$$

Формы дифференциальных уравнений возмущённого движения (2.25) или (2.26) называются нормальными.

Для сокращения записи совокупность отклонений $x_1, \ldots, x_n$ в дальнейшем будем обозначать одной буквой x. Тогда для автономной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.27}$$

а для неавтономной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x,t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.28}$$

Нормальная форма дифференциальных уравнений возмущённого движения допускает простую геометрическую интерпретацию. В возмущённом движении изображающая точка М описывает в пространстве $x_1, \ldots, x_n$ некоторую траекторию. Скорость изображающей точки М направлена по касательной к траектории, а её проекции определяются равенствами

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.29}$$

Тогда уравнения (2.27) можно переписать в виде

$$v_i = X_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.30}$$

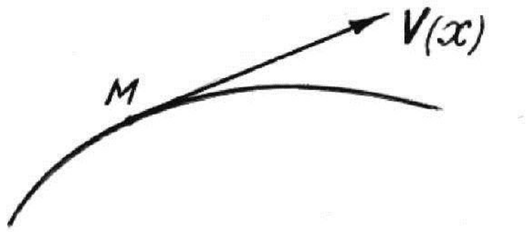


Рис. 2.1

Таким образом, правые части нормальных уравнений возмущённого движения (2.27) или (2.28) равны проекциям скорости $\bar{v}$ изображающей точки М (рис. 2.1).

Из вывода уравнений возмущённого движения следует, что при $x = 0$, все функции X_i обращаются в нуль, то есть

$$X_i\left(0, t\right) = 0. \tag{2.31}$$

2.4. Теорема Ляпунова об устойчивости движения

Прежде чем перейти к самой теореме, примем следующее определение Ляпунова[3].

Если по любому положительному числу ε, как бы оно мало ни было, можно найти такое положительное число δ, что при всяких возмущениях x_{i0}, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^{n} {x_{i0}}^2 \le \delta, \tag{2.32}$$

и при любом $t \ge t_0$ будет выполняться неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le \varepsilon, \tag{2.33}$$

то невозмущённое движение устойчиво, а в противном случае – неустойчиво. Геометрическая интерпретация этого определения следующая. Рассмотрим сферу $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \varepsilon$, радиус которой $r_1 = \sqrt{\varepsilon}$ выберем произвольно малым. Если движение устойчиво, то для этой сферы должна найтись другая сфера $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \delta$ радиуса $r_2 = \sqrt{\delta}$, обладающая следующим свойством. Изображающая точка М, начав своё движение из любой точки M_0, лежащей внутри или на поверхности сферы δ, при дальнейшем движении остаётся всегда внутри сферы ε, никогда не достигая её поверхности (рис. 2.2). Если же невозмущённое движение неустойчиво, то хотя бы одна траектория изображающей точки М с течением времени пересечёт сферу ε изнутри наружу при сколь угодно близком положении точки M_0 к началу координат.

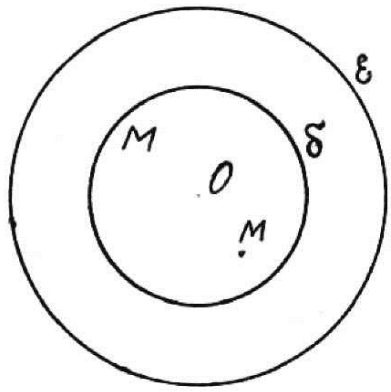


Рис. 2.2

<u>**Теорема**</u>**. Если для дифференциальных уравнений возмущённого движения можно найти знакоопределённую функцию *W*, производная которой в силу этих уравнений была бы знакопостоянной функцией противоположного знака с *W* или тождественно равна нулю, то невозмущённое движение устойчиво[3].**

<u>Доказательство</u>. Выберем произвольное, достаточное малое положительное число $\varepsilon > 0$ и построим сферу $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \varepsilon$. Построим поверхность $W = C$, лежащую внутри сферы ε (рис. 2.3) (это всегда возможно, т.к. функция непрерывна и равна нулю в начале координат). Выберем число δ настолько малым, чтобы сфера $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \delta$ целиком лежала внутри поверхности $W = C$, не имея с ней общих точек. Покажем, что изображающая точка М, начав движение из сферы δ, никогда не дойдёт до сферы ε, что и будет служить доказательством устойчивости движения.

Если функция W определённо-положительная, то по условию теоремы её производная, вычисленная в силу уравнений возмущённого движения, будет отрицательной функцией или тождественно равна нулю, т.е.

$$\dot{W} \leq 0. \tag{2.34}$$

Тогда из этого условия находим

$$W - W_0 \leq 0$$

или

$$W \leq W_0. \tag{2.35}$$

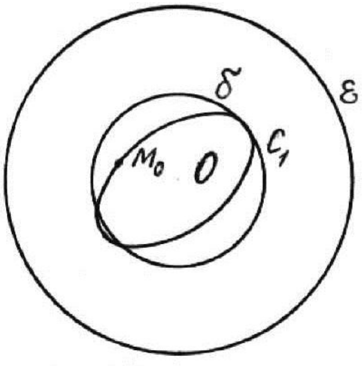


Рис. 2.3

Из неравенства (2.35) следует, что при $t \geq t_0$ изображающая точка М либо находится на поверхности $W = W_0 = C_1$ (при $\dot{W} = 0$), либо находится внутри этой поверхности (рис. 2.3). Таким образом, изображающая точка М, начав своё движение из положения M_0, находящегося внутри или на поверхности сферы δ, никогда не выйдет за пределы поверхности $W = C_1$ и тем более не сможет достигнуть поверхности сферы ε.

<u>Пример</u>. Пусть уравнения возмущённого движения имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2 + 3x_1^2 x_2^2 - 4x_1^5,$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3 + x_1^3 x_2.$$

Возьмём определённо-положительную функцию $W = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ и вычислим её производную по времени

$$\dot{W} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2.$$

Подставляя вместо x_1 и x_2 их значения из уравнений возмущённого движения, получим

$$\dot{W} = x_1\left(x_2 + 3x_1^2 x_2^2 - 4x_1^5\right) + x_2\left(-x_1 - x_2^3 + x_1^3 x_2\right) = -\left(2x_1^3 - x_2^2\right)^2.$$

Так как функция W определённо-положительная, а её производная $\dot{W}$ отрицательная функция, то выполнены условия теоремы Ляпунова об устойчивости движения. Следовательно, невозмущённое движение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ устойчиво.

2.5. Теорема Лагранжа об устойчивости равновесия консервативной системы

Рассмотрим консервативную систему с s степенями свободы, положение которой определяется s обобщёнными координатами $q_1, \ldots, q_s$. В положении равновесия все обобщённые силы Q_j системы равны нулю [1]

$$Q_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, s). \tag{2.36}$$

Для консервативных сил

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, s), \tag{2.37}$$

условия равновесия консервативной системы сил имеют вид

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}\right)_0 = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, s). \tag{2.38}$$

Из этих уравнений следует, что положениями равновесия консервативной системы являются те положения, при которых потенциальная энергия системы принимает экстремальные значения. Однако уравнения равновесия (2.38) не устанавливают, являются ли рассматриваемые равновесные положения системы устойчивыми или неустойчивыми.

Условия устойчивости равновесия консервативной системы устанавливаются теоремой Лагранжа: **Если в положении изолированного равновесия консервативной системы с голономными и стационарными связями потенциальная энергия имеет минимум, то в этом положении равновесие устойчиво.**

Доказательство. Потенциальная энергия системы в положении равновесия всегда может быть принята равной нулю, так как её значение определяется с точностью до произвольной постоянной. Следовательно,

$$\Pi(0) = 0. \tag{2.39}$$

Если потенциальная энергия в положении равновесия равна нулю и достигает минимума, то функция

$$\Pi(q_1, q_2, ..., q_s) > 0. \tag{2.40}$$

Это означает, что потенциальная энергия Π представляет определённо-положительную функцию переменных q_j. Тогда полная энергия системы

$$W = T + \Pi \tag{2.41}$$

представляет определённо-положительную функцию обобщённых координат $q_1, \ldots, q_s$ и обобщённых скоростей $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{s-1}, \dot{q}_s$, так как кинетическая энергия T механической системы является определённо-положительной функцией обобщённых скоростей.

В консервативной системе действует закон сохранения энергии, то есть

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0 = h, \tag{2.42}$$

где T_0 и Π_0 – кинетическая и потенциальная энергии системы в начальный момент времени.

Полная производная функции W по времени на основании равенства (2.42) равна нулю. Следовательно, эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об устойчивости, что и доказывает теорему Лагранжа.

2.6. Устойчивость равновесия консервативной системы с одной степенью свободы

Согласно теореме Лагранжа, равновесное состояние консервативной системы устойчиво, если в этом положении её потенциальная энергия имеет минимум.

Для системы с одной степенью свободы условие минимума будет выполнено, если

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0 > 0, \tag{2.43}$$

если же $\left(\dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right) = 0$, то вторая производная не может служить критерием минимума потенциальной энергии. В этом случае необходимо вычислить последовательные производные

$$\left(\frac{\partial^k \Pi}{\partial q^k}\right)_0.$$

Если первая последующая производная, не равная нулю, имеет чётный порядок и при этом положительна, то при $q = 0$ потенциальная энергия имеет минимум, а следовательно, это положение равновесия системы устойчиво.

Если первая последующая производная, не равная нулю, имеет нечётный порядок, то при $q = 0$ нет ни максимума, ни минимума.

На рис. 2.4 изображены равновесные положения физического маятника и шарика, при которых их потенциальная энергия имеет минимум, а следовательно равновесие является устойчивым.

На рис. 2.5 изображены равновесные положения этих же тел, при которых их потенциальная энергия имеет максимум, и равновесие является неустойчивым.

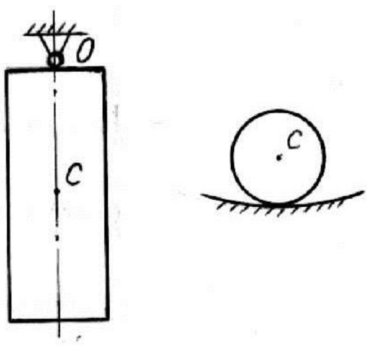


Рис. 2.4

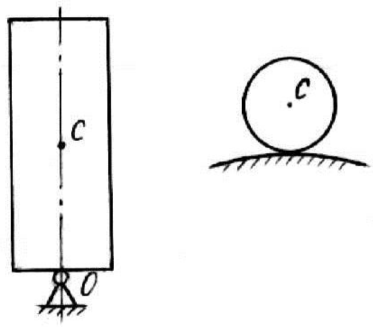


Рис. 2.5

На рис. 2.6 изображены случаи, когда физический маятник и шарик находятся в состоянии безразличного равновесия.

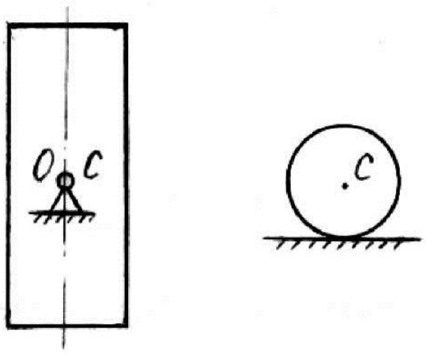


Рис. 2.6

2.7. Примеры на устойчивость равновесия консервативной системы

Пример 1. Положение равновесия физического маятника, в котором его центр масс находится над опорой, неустойчиво. Для стабилизации этого положения между телом и опорой помещена спиральная пружина, создающая восстанавливающий момент, пропорциональный углу α наклона маятника (рис. 2.7). Каким следует выбрать коэффициент пропорциональности, чтобы желаемая стабилизация была достигнута?

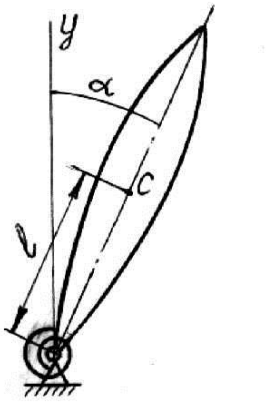


Рис. 2.7

Решение. Потенциальная энергия системы имеет вид

$\Pi = mg\ell\cos\alpha + \frac{1}{2}c\alpha^2$, где m – масса тела, ℓ – расстояние между осью качения и центром тяжести маятника, c – искомая жёсткость пружины.

В положении равновесия

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha}\right)_0 = -mg\ell\sin\alpha + c\alpha = 0.$$

При любых значениях параметров уравнение равновесия имеет решение при $\alpha = 0$. Отвечающее этому решению положение равновесия устойчиво, если

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \alpha^2}\right)_0 > 0,$$

то есть $$-mg\ell + c > 0.$$

Отсюда $$c > mg\ell.$$

Пример 2. Однородный стержень OA весом G и длиной ℓ удерживается в равновесии противовесом P. Верёвка CBE длиной ℓ_1, на конце которой имеется противовес, укреплена в центре тяжести стержня. Блок B находится на высоте $BO = \ell/2$ (рис. 2.8). Найти положения равновесия и исследовать их устойчивость.

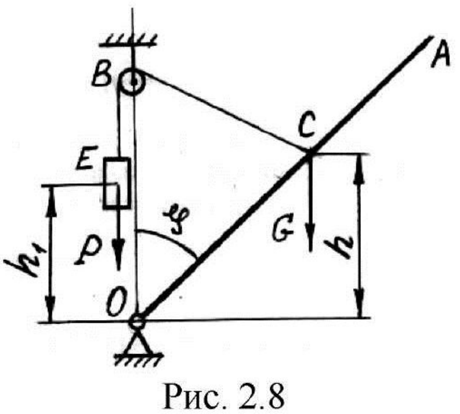


Рис. 2.8

Решение. Примем за обобщённую координату системы угол φ, образованный осью стержня и вертикалью. Вычислим потенциальную энергию системы, приняв за нулевой уровень горизонтальную прямую, проходящую через точку 0.

$$\Pi = Gh + Ph_1,$$

где $h = \frac{\ell}{2}\cos\varphi;$

$$h_1 = OB - BE = OB - (\ell_1 - BC) = \frac{1}{2} - \left(\ell_1 - \ell\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Следовательно,

$$\Pi = \frac{G\ell}{2}\cos\varphi + P\left(\frac{\ell}{2} - \ell_1 + \ell\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Найдём первую и вторую производные от потенциальной энергии по обобщённой координате

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -\frac{G\ell}{2}\sin\varphi + \frac{P}{2}\ell\cos\frac{\varphi}{2},$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -\frac{G\ell}{2}\cos\varphi - \frac{P\ell}{4}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

При равновесии системы

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0, \qquad -\frac{G\ell}{2}\sin\varphi + \frac{P\ell}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = 0.$$

Отсюда

$$\left(P - 2G\sin\frac{\varphi}{2}\right)\cos\frac{\varphi}{2} = 0.$$

Это равенство определяет два возможных условия равновесия системы.

Случай 1.

$$\cos\frac{\varphi_1}{2} = 0, \qquad \frac{\varphi_1}{2} = 90^\circ, \qquad \varphi_1 = 180^\circ.$$

Случай 2.

$$P - 2G\sin\frac{\varphi_2}{2} = 0, \qquad \sin\frac{\varphi_2}{2} = \frac{P}{2G}.$$

Определим соотношения между P и G, при которых в каждом из этих случаев система находится в состоянии устойчивого равновесия.

По условию (2.43) при $\varphi_1 = 180^\circ$ устойчивое равновесие системы наблюдается, когда

$$\frac{1}{2}G\ell - \frac{1}{4}P\ell > 0,$$

т.е.

$$G > \frac{1}{2}P.$$

При $\sin\frac{\varphi_2}{2} = \frac{P}{2G}$

$$\cos\varphi_2 = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi_2}{2} = 1 - 2\frac{P^2}{4G^2} = \frac{2G^2 - P^2}{2G^2},$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi=\varphi_2} = \frac{P^2 - 4G^2}{8G}\ell .$$

Устойчивое равновесие системы в этом случае было бы при:

$$\frac{P^2 - 4G^2}{8G}\ell > 0, \text{ т.е. при } P > 2G .$$

Но для такого соотношения между P и G получим $\sin\frac{\varphi_2}{2} > 1$, а это невозможно.

Пример 3. Консервативная система состоит из двух тел 1 и 2 массами m_1 и m_2, двух невесомых стержней 3 и 4, длины которых равны ℓ и 2ℓ соответственно, и пружины с коэффициентом жёсткости c. Определить положения равновесия и провести исследование на устойчивость найденных положений равновесия при следующих соотношениях между параметрами системы

$$G_1 = 2G_2 = c\ell, \quad b = 2\ell + \ell_0,$$

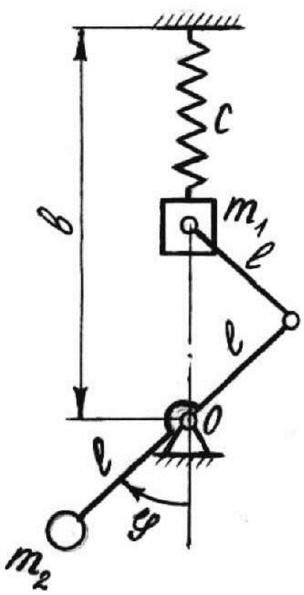


Рис. 2.9

где ℓ_0 – длина недеформированной пружины, b – конструктивный параметр

Решение. Примем за обобщённую координату угол поворота φ (рис. 2.9). Потенциальная энергия системы складывается из потенциальной энергии сил тяжести Π_1 и потенциальной энергии силы упругости пружины

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 . \qquad (1)$$

В качестве нулевого уровня потенциальной энергии Π_1 выберем горизонтальную прямую, проходящую через точку 0.

Тогда

$$\Pi_1 = 2G_1\ell\cos\varphi - G_2\ell\cos\varphi = \ell(2G_1 - G_2)\cos\varphi .$$

Потенциальная энергия силы упругости пружины определяется равенством

$$\Pi_2 = \frac{c}{2}\lambda^2,$$

где λ – деформация пружины, равная

$$\lambda = b - \ell_0 - 2\ell\cos\varphi ,$$

$$\Pi_2 = \frac{c}{2}(b - \ell_0 - 2\ell\cos\varphi)^2 .$$

На основании (1) потенциальная энергия всей системы будет равна

$$\Pi = \ell\left(2G_1 - G_2\right)\cos\varphi + \frac{c}{2}(b - \ell_0 - 2\ell\cos\varphi)^2 . \qquad (2)$$

Имея в виду, что

$$G_1 = 2G_2 = 2c\ell , \quad b = 2\ell + \ell_0 .$$

Выражение (2), после несложных преобразований, перепишем в форме

$$\Pi = c\ell^2(2\cos^2\varphi - \cos\varphi + 2).$$

Функция Π зависит от $\cos^2\varphi$ и $\cos\varphi$, поэтому является чётной, т.е. $\Pi\left(\varphi\right) = \Pi\left(-\varphi\right)$. Следовательно, график функции $\Pi\left(\varphi\right)$ будет симметричен относительно оси ординат. Это позволяет провести анализ функции $\Pi\left(\varphi\right)$ только на участке $0 \le \varphi \le \pi\, 0$ и, пользуясь соображениями симметрии, распространить результаты на любой другой интервал изменения φ.

Найдём первую и вторую производные от потенциальной энергии по обобщённой координате

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = c\ell^2(1 - 4\cos\varphi)\cdot\sin\varphi ,$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = c\ell^2(\cos\varphi - 4\cos 2\varphi).$$

При равновесии системы

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0, \qquad \sin\varphi(\ell - 4\cos\varphi) = 0.$$

Это равенство определяет три возможных условия равновесия системы:

$$\sin\varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi .$$

$$1 - 4\cos\varphi = 0, \ \varphi_3 = \arccos\frac{1}{4}, \ \varphi_3 = 75°31'.$$

По условию (2.43) равновесное положение устойчиво, если

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} > 0 .$$

При $\qquad \varphi_1 = 0°, \quad \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -3 < 0 .$

При $\qquad \varphi_2 = 180°, \quad \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -5 < 0 .$

При $\qquad \varphi_3 = 75°31', \quad \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = 3,75 > 0 .$

Таким образом, система имеет устойчивое равновесие на исследуемом участке при $\varphi_3 = 75°31'$.

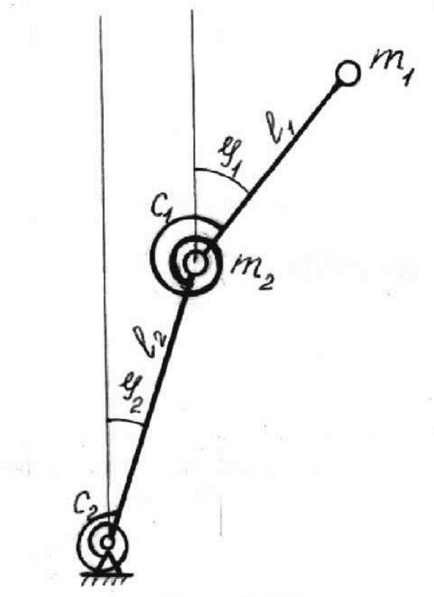


Рис. 2.10

Пример 4. Система представляет двойной математический маятник (рис. 2.10) с массами m_1 и m_2. Спиральные пружины с жёсткостями c_1 и c_2 при верхнем вертикальном положении маятников находятся в недеформированном состоянии. Установить условие устойчивости равновесия вертикальных положений маятников.

Решение. Примем за обобщённые координаты углы отклонения стержней от вертикали φ_1 и φ_2. Вычислим потенциальную энергию системы как сумму потенциальных энергий системы сил тяжести Π_1 и потенциальной энергии деформированных пружин Π_2, приняв за нулевой уровень верхнее положение груза m_1, когда $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 .$$

Имеем

$$\Pi_1 = -m_1 g\left[\ell_1\left(1-\cos\varphi_1\right)+\ell_2\left(1-\cos\varphi_2\right)\right]-m_2 g\ell_2\left(1-\cos\varphi_2\right),$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}c_2\varphi_2^2+\frac{1}{2}c_1\left(\varphi_1-\varphi_2\right)^2.$$

Следовательно,

$$\Pi = \frac{1}{2}c_1\left(\varphi_1-\varphi_2\right)^2+\frac{1}{2}c_2\varphi_2^2-m_1 g\ell_1\left(1-\cos\varphi_1\right)-$$
$$-\left(m_1+m_2\right)g\ell_2\left(1-\cos\varphi_2\right).$$

Пользуясь разложением косинуса в ряд Маклорена

$$\cos\varphi = 1-\frac{\varphi^2}{2!}+\ldots,$$

получим после группировки

$$\Pi = \frac{1}{2}\left\{\left(c_1-m_1 g\ell_1\right)\varphi_1^2-2c_1\varphi_1\varphi_2+\left[c_1+c_2-\left(m_1+m_2\right)g\ell_2\right]\varphi_2^2\right\}+\ldots,$$

где точками обозначены члены, содержащие φ_1 и φ_2 в степени выше второй.

Введём обозначения

$$c_{11}=c_1-m_1 g\ell_1,\quad c_{12}=c_{21}=-c_1,\quad c_{22}=c_1+c_2-\left(m_1+m_2\right)g\ell_2.$$

С учётом введённых обозначений и пренебрегая членами порядка выше второго, получаем

$$\Pi = \frac{1}{2}\left(c_{11}\varphi_1^2+2c_{12}\varphi_1\varphi_2+c_{22}\varphi_2^2\right).$$

Применяя критерий Сильвестра, находим следующие условия устойчивости равновесия системы:

1. $\Delta_1 = c_{11} > 0$ или $c_1 - m_1 g\ell_1 > 0$. (1)

2. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0$ или $\begin{vmatrix} c_1-m_1 g\ell_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1+c_2-\left(m_1+m_2\right)g\ell_2 \end{vmatrix} > 0,$

откуда

$$\left(c_1-m_1 g\ell_1\right)\left[c_1+c_2-\left(m_1+m_2\right)g\ell_2\right]-c_1^2>0. \quad (2)$$

Решая неравенства (1) и (2) относительно c_1 и c_2, находим

$$c_1 > m_1 g \ell_1,$$

$$c_2 > \frac{c_1^2}{c_1 - m_1 g \ell_1} + (m_1 + m_2) g \ell_2. \tag{3}$$

Введя обозначения

$$m_1 g \ell_1 = A; \quad \left(m_1 + m_2\right) g \ell_2 = B,$$

неравенства (3) перепишем в виде

$$c_1 > A, \quad c_2 > \frac{c_1^2 A}{c_1 - A} + B. \tag{4}$$

На рис. 2.11 показана область устойчивого равновесия

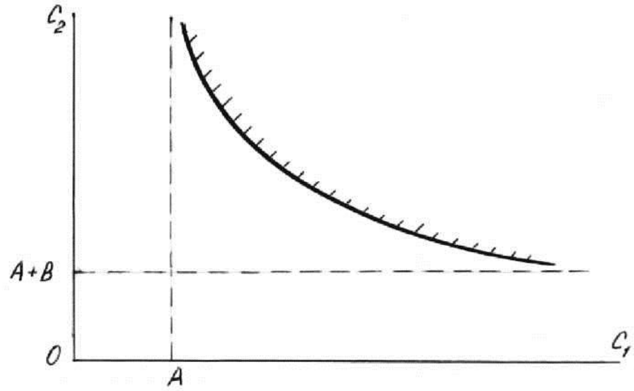


Рис. 2.11

Глава III. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

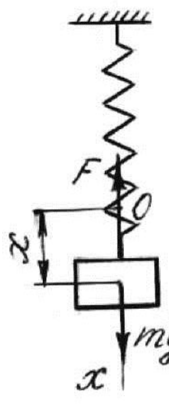
3.1. Свободные колебания консервативной системы с одной степенью свободы

Изучение свободных колебаний представляет определенный интерес в связи с практическими задачами о движении механической системы после какого-либо возмущения. Характеристики свободных колебаний (собственные частоты и формы колебаний) полностью определяют индивидуальные динамические свойства механической системы и имеют фундаментальное значение при анализе любых колебаний.

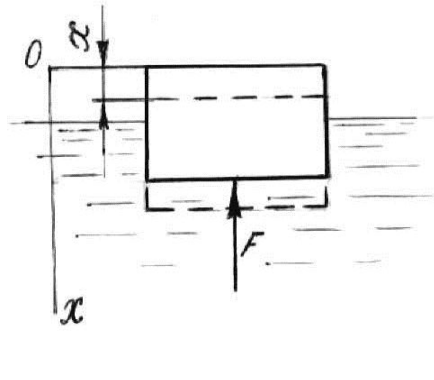
Колебательные движения механической системы происходят под действием восстанавливающих сил, приложенных к точкам системы. Восстанавливающие силы – это силы, стремящиеся вернуть систему в положение равновесия. Природа этих сил весьма разнообразна. Примером восстанавливающей силы является сила упругости пружины, возникающая вследствие деформации пружины (рис. 3.1, а) или архимедова сила, возникающая при вертикальных отклонениях плавающего тела от положения равновесия (рис. 3.1, б). Восстанавливающие силы относятся к классу консервативных сил.

Рассмотрим в общем виде консервативную механическую систему с одной степенью свободы, для которой уравнение Лагранжа имеет форму

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{q}}. \tag{3.1}$$



а)



б)

Рис. 3.1

Кинетическая и потенциальная энергии системы с одной степенью свободы определяются следующими выражениями

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2; \quad П = \frac{1}{2} c q^2. \tag{3.2}$$

Подставляя значения T и $П$ в уравнения Лагранжа и учитывая, что

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\dot{q}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = a\ddot{q}, \qquad \frac{\partial T}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial П}{\partial q} = cq,$$

получаем

$$a\ddot{q} + cq = 0.$$

Введя обозначение

$$\frac{c}{a} = k^2,$$

где k^2 – вещественное положительное число, имеем

$$\ddot{q} + k^2 q = 0. \tag{3.3}$$

Выражение (3.3) является дифференциальным уравнением свободных колебаний системы с одной степенью свободы.

Характеристическое уравнение (3.3) имеет вид $\lambda^2 + k^2 = 0$, и его корни равны $\lambda_1 = ik$, $\lambda_2 = -ik$.

Так как корни характеристического уравнения чисто мнимые числа, то общее решение дифференциального уравнения (3.3) имеет вид

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \tag{3.4}$$

откуда

$$\dot{q} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \tag{3.5}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определим из начальных условий при $t = 0$:

$$q = q_0, \qquad \dot{q} = \dot{q}_0. \tag{3.6}$$

Подставив начальные условия (3.6) в уравнения (3.4) и (3.5), находим

$$c_1 = q_0, \qquad c_2 = \frac{\dot{q}_0}{k}.$$

Следовательно,

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt . \tag{3.7}$$

Для большего удобства анализа этого решения введем новые постоянные интегрирования A и α, положив

$$C_1 = A \sin\alpha , \quad C_2 = A \cos\alpha ,$$

тогда

$$q = A \sin\alpha \cos kt + A \cos\alpha \sin kt$$

или

$$q = A \sin(kt + \alpha) . \tag{3.8}$$

Тогда

$$\dot{q} = Ak \cos(kt + \alpha) . \tag{3.9}$$

Подставляя начальные условия (3.6) в уравнения (3.8) и (3.9), имеем

$$q_0 = A \sin\alpha , \qquad \dot{q}_0 = kA \cos\alpha ,$$

откуда

$$A = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{k} \right)^2} , \tag{3.10}$$

$$tg\alpha = \frac{kq_0}{\dot{q}_0} . \tag{3.11}$$

Величина A, равная наибольшему отклонению системы от положения равновесия, называется амплитудой колебаний.

Аргумент $(kt + \alpha)$ называют фазой колебания, а величина α – начальной фазой.

Циклическую частоту и период колебаний определяем по формулам

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}} , \tag{3.12}$$

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}} . \tag{3.13}$$

Из равенств (3.12) и (3.13) следует, что частота и период свободных колебаний не зависят от начальных условий, а зависят лишь от параметров самой системы.

Свободные колебания представляют собой гармонические колебания. График свободных колебаний представлен на рис. 3.2.

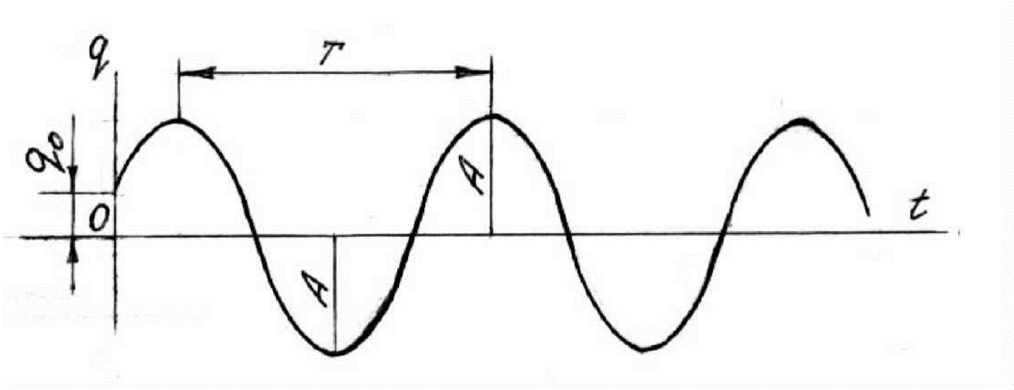


Рис. 3.2

3.2. Свободные колебания системы с одной степенью свободы при наличии сил сопротивления, пропорциональных скорости

Рассмотрим случай, когда на точки механической системы, кроме восстанавливающих сил, действуют силы сопротивления, пропорциональные скорости

$$\overline{R}_k = -\mu_k \overline{v}_k .$$

Тогда в соответствии с 1.3 обобщенную силу сопротивления определим по формуле (1.21)

$$Q_R = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}},$$

где Φ – диссипативная функция Релея.

Для вывода дифференциального уравнения движения системы воспользуемся уравнением Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}.$$

Для системы с одной степенью свободы

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \qquad П = \frac{1}{2} c q^2, \qquad Ф = \frac{1}{2} b \dot{q}^2 .$$

Подставляя эти значения в уравнения Лагранжа, получаем

$$a\ddot{q} = -cq - b\dot{q}. \tag{3.14}$$

Введем обозначения

$$\frac{c}{a} = k^2, \qquad \frac{b}{a} = 2n.$$

Тогда уравнение (3.14) можно представить в виде

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0. \tag{3.15}$$

Выражение (3.15) является дифференциальным уравнением движения системы и представляет собой линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Для его решения составим характеристическое уравнение и найдем его корни

$$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Здесь возможны три случая: $n < k$; $n > k$; $n = k$.

Рассмотрим более подробно случай, когда $n < k$. В этом случае корни характеристического уравнения комплексные числа, т.е.

$$\lambda_{1,2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2}$$

и общее решение уравнения (3.15) имеет вид

$$q = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t), \tag{3.16}$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ – циклическая частота затухающих колебаний .

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяем по начальным условиям.

Для большего удобства анализа этого решения введем новые постоянные интегрирования А и α, положив

$$C_1 = A \sin\alpha, \; C_2 = A\cos\alpha .$$

Тогда

$$q = Ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha). \tag{3.17}$$

Здесь A и α определяем по начальным условиям: при $t=0$, $q=q_0$, $\dot{q}=\dot{q}_0$.

$$A=\sqrt{q_0^2+\frac{(\dot{q}_0+nq_0)^2}{k^2-n^2}}, \tag{3.18}$$

$$tg\alpha=\frac{q_0\sqrt{k^2-n^2}}{\dot{q}_0+nq_0}. \tag{3.19}$$

График этих колебаний представлен на рис. 3.3.

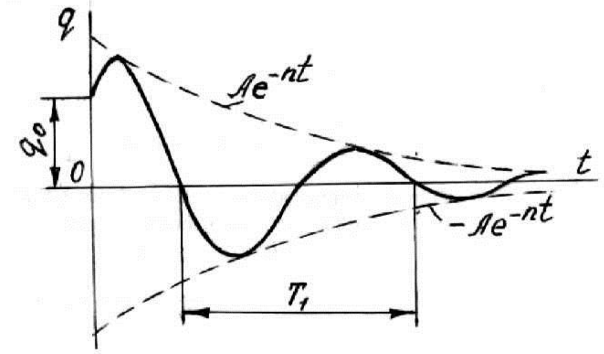


Рис. 3.3

Период затухающих колебаний

$$T_1=\frac{2\pi}{k_1}=\frac{2\pi}{k\sqrt{1-\left(\frac{n}{k}\right)^2}}=\frac{T}{\sqrt{1-\left(\frac{n}{k}\right)^2}}, \tag{3.20}$$

где $T=\dfrac{2\pi}{k}$ – период затухающих колебаний системы при отсутствии сопротивления.

Из выражения (3.20) видно, что $T_1>T$, то есть при наличии сопротивления период колебаний несколько увеличивается.

Однако, когда сопротивление мало, $n<<k$, величиной n/k по сравнению с единицей можно пренебречь и считать $T_1\approx T$. Следовательно, малое сопротивление на период колебаний практически не влияет.

Найдем отношение двух последовательных амплитуд колебаний

$$\eta = \frac{A_{i+1}}{A_i} = \frac{Ae^{-n(t_i + \frac{T_1}{2})}}{Ae^{-nt_i}} = e^{-n\frac{T_1}{2}}. \qquad (3.21)$$

Абсолютную величину η называют декрементом колебаний. Как следует из (3.21), декремент η остается величиной постоянной и меньшей единицы.

Величину натурального логарифма этого отношения называют логарифмическим декрементом колебаний

$$\ln \eta = n\frac{T_1}{2}. \qquad (3.22)$$

<u>Апериодическое движение</u>. При $n > k$ корни характеристического уравнения вещественны, отрицательны и различны

$$\lambda_1 = -n + \sqrt{n^2 - k^2}, \quad \lambda_1 = -n - \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Следовательно, общее уравнение (3.15) имеет вид

$$q = e^{-nt}(C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2}t}) \qquad (3.23)$$

или

$$q = Ae^{-nt} sh(\sqrt{n^2 - k^2}t + \beta). \qquad (3.24)$$

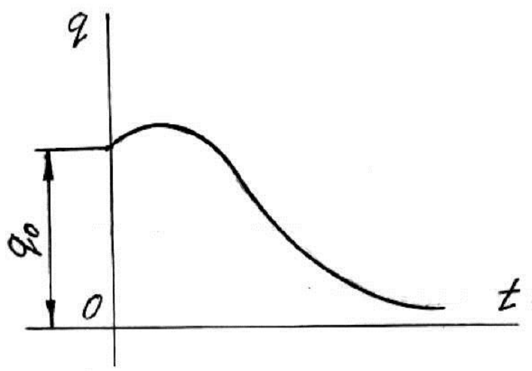


Рис. 3.4

График этого апериодического движения представлен на рис. 3.4.

Предельное апериодическое движение.

При $n = k$ корни характеристического уравнения вещественны, равны и отрицательны:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -n.$$

Общее решение уравнения (3.15) в этом случае имеет вид

$$q = e^{-nt}(C_1 t + C_2). \qquad (3.25)$$

Как и прежде, постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяем по начальным условиям.

3.3. Примеры на свободные колебания системы с одной степенью свободы

Пример I. Груз массой m закреплен на абсолютно жестком невесомом стержне длиной 3ℓ, подкрепленном двумя одинаковыми пружинами жесткостью c каждая (рис. 3.5).

Определить собственную частоту малых колебаний маятника и уравнение движения при начальных условиях: при $t=0$, $\varphi=0$, $\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_0$.

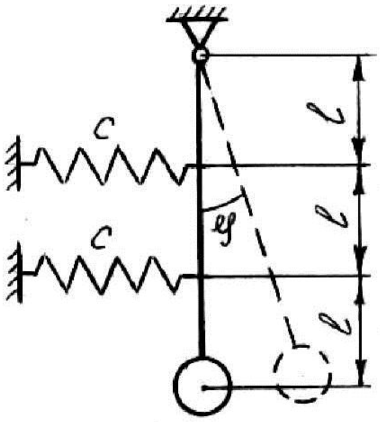


Рис. 3.5

Решение. Воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода. За обобщенную координату системы примем φ – угол отклонения маятника от вертикали. Кинетическая энергия системы определится выражением

$$T=\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2.$$

Так как,

$$J=m(3\ell)^2=9m\ell^2,$$

получаем

$$T=\frac{9}{2}ml^2\dot{\varphi}^2.$$

Потенциальную энергию системы определим как сумму потенциальной энергии силы тяжести Π_1 и потенциальной энергии деформированных пружин Π_2.

$$\Pi_1=mg3\ell(1-\cos\varphi).$$

Пользуясь разложением косинуса в ряд Маклорена и пренебрегая всеми членами выше второго порядка, получим

$$\cos\varphi=1-\frac{\varphi^2}{2!}+\ldots,$$

$$\Pi_1=mg3\ell(1-1+\frac{\varphi^2}{2})=\frac{3}{2}mg\ell\varphi^2,$$

$$\Pi_2=\frac{1}{2}c\ell^2\varphi^2+\frac{4}{2}c\ell^2\varphi^2=\frac{5}{2}c\ell^2\varphi^2.$$

Следовательно,

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \frac{\varphi^2}{2}(3mg\ell + 5c\ell^2).$$

Подставим значения кинетической и потенциальной энергии в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}.$$

Выполняя операции дифференцирования, находим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 9m\ell^2 \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = 9m\ell^2 \ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = (3mg\ell + 5c\ell^2)\varphi.$$

В результате имеем

$$9m\ell^2 \ddot{\varphi} + (3mg\ell + 5c\ell^2)\varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{3mg\ell + 5c\ell^2}{9m\ell^2}\varphi = 0. \tag{1}$$

Введем обозначение

$$\frac{3mg\ell + 5c\ell^2}{9m\ell^2} = k^2. \tag{2}$$

Тогда выражение (1) перепишем в виде

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0. \tag{3}$$

Выражение (3) является дифференциальным уравнением свободных колебаний маятника.

Характеристическое уравнение для (3) имеет вид $\lambda^2 + k^2 = 0$, и его корни равны соответственно:

$$\lambda_1 = ik, \quad \lambda_2 = -ik.$$

Так как корни характеристического уравнения мнимые числа, то общее решение уравнения (3) имеет вид

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \tag{4}$$

откуда

$$\dot{\varphi} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (5)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяем по начальным условиям: при $t = 0$, $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$.

Подставляя начальные условия в уравнения (4) и (5), находим

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{\dot{\varphi}_0}{k}.$$

Следовательно,

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin kt. \quad (6)$$

Циклическая частота колебаний равна

$$k = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{g}{\ell} + \frac{5}{9}\frac{c}{m}}. \quad (7)$$

<u>Пример 2</u>. Найти частоту и период малых крутильных колебаний диска, прикрепленного к нижнему концу невесомого упругого стержня, верхний конец которого жестко закреплен (рис. 3.6). Масса диска M, радиус инерции относительно оси стержня ρ; жесткость стержня на кручение равна

$$c = \frac{GJ_p}{\ell},$$

где G – модуль сдвига (в Па), J_p – момент инерции поперечного сечения стержня (в м^4).

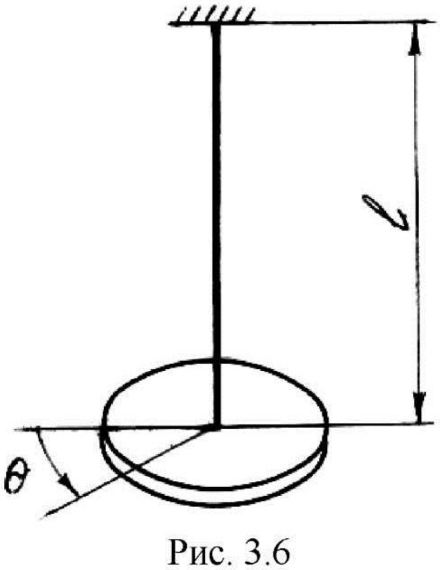


Рис. 3.6

<u>Решение.</u> Для вывода дифференциального уравнения движения системы воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода. За обобщенную координату возьмем θ – угол отклонения диска от положения равновесия. Кинетическая энергия диска равна

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2,$$

где $J = M\rho^2$ – момент инерции диска.

Потенциальная энергия для малых отклонений, в пределах действия закона Гука, выражается в виде

$$П = \frac{1}{2}c\theta^2.$$

Подставляя значения T и $П$ в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{\partial П}{\partial \theta},$$

находим

$$J\ddot{\theta} + c\theta = 0,$$

или

$$\ddot{\theta} + k^2\theta = 0,$$

где $k = \sqrt{\frac{c}{J}} = \sqrt{\frac{GJ_p}{lJ}}$ – частота крутильных колебаний диска. Тогда период крутильных колебаний будет равен

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{M\rho^2}{c}}.$$

Пример 3. Определить момент инерции корпуса автомобиля (рис. 3.7) относительно поперечной оси, проходящей через ось заднего колеса, если собственная частота малых колебаний равна $k = 16c^{-1}$, расстояние между осями заднего и переднего колес $\ell_1 = 1\,м$, $\ell_2 = 1{,}5\,м$, $c = 2\cdot 10^5\ Н/м$.

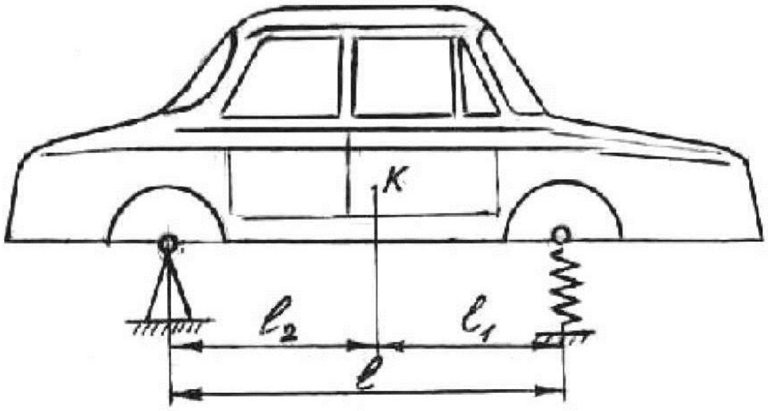


Рис. 3.7

Для составления дифференциального уравнения движения системы воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода.

За обобщенную координату системы примем угол поворота корпуса автомобиля относительно оси заднего колеса.

Кинетическая энергия системы будет равна

$$T = \frac{1}{2} J_z \dot{\varphi}^2 . \tag{1}$$

Потенциальную энергию системы определим как сумму потенциальной энергии силы тяжести Π_1 и потенциальной энергии деформированной пружины Π_2

$$\Pi_1 = -mg\ell_2\varphi, \quad \Pi_2 = \frac{c}{2}[(f+\ell\varphi)^2 - f^2] = \frac{c}{2}(2f\ell\varphi + \ell^2\varphi^2).$$

Следовательно,

$$\Pi = -mg\ell_2\varphi + cf\ell\varphi + \frac{c}{2}\ell^2\varphi^2 .$$

В положении равновесия при $\varphi = 0$ должно выполняться равенство

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}\right)_0 = 0,$$

то есть

$$-mg\ell_2 + cf\ell = 0 .$$

Тогда

$$\Pi = \frac{1}{2} c\ell^2\varphi^2 .$$

Подставляя значения кинетической и потенциальной энергии в уравнение Лагранжа и учитывая, что

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J\dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = J\ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = c\ell^2\varphi,$$

получаем

$$J\ddot{\varphi} + c\ell^2\varphi = 0 . \tag{1}$$

Введем обозначение

$$\frac{c\ell^2}{J} = k^2. \qquad (2)$$

Тогда выражение (1) перепишем в виде

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0. \qquad (3)$$

Имея в виду, что частота свободных колебаний нам задана, из выражения (2) находим искомый параметр

$$J = \frac{c\ell^2}{k^2} = \frac{2\cdot 10^5 \cdot 6,25}{256} = 4883\ кгм^2.$$

Пример 4. Гидравлический демпфер (рис. 3.8) представляет собой поршень массой m, движущийся в жидкости. Исследовать движение поршня, считая, что в начальный момент времени ($t = 0$) поршень находится в положении равновесия и ему сообщена скорость $v_0 = 1\,м/с$. Определить уравнение движения и логарифмический декремент колебаний поршня, если коэффициент жесткости пружины $c = 3\cdot 10^3\ Н/м$, диаметр цилиндра $D = 0,1\,м$, число отверстий $z = 25$, масса поршня $m = 2,77\,кг$, высота поршня $H = 0,05\,м$, динамический коэффициент вязкости жидкости $\mu = 6\cdot 10^{-2}\ Н\cdot с/м$.

Решение. При движении поршня в жидкости на него кроме силы тяжести G и силы упругости пружины F действует сила сопротивления, развиваемая демпфером. Эта сила пропорциональна скорости протекания жидкости через отверстия в поршне и, следовательно, скорости движения поршня

$$R = \mu v.$$

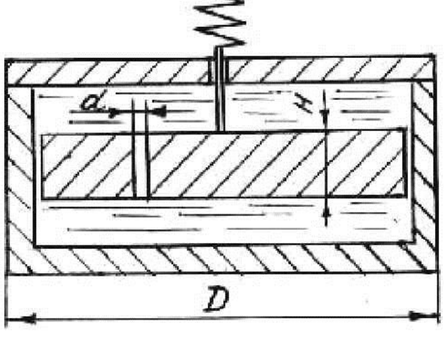


Рис. 3.8

Для составления дифференциального уравнения движения системы воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода. Заданная система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату системы примем перемещение поршня y. Кинетическая энергия системы будет равна

$$T = \frac{m\dot{y}^2}{2}.$$

Потенциальную энергию системы определим как сумму потенциальной энергии силы тяжести Π_1 и потенциальной энергии деформированной пружины Π_2

$$\Pi_1 = -mgy, \qquad \Pi_2 = \frac{c}{2}[(f+y)^2 - f^2] = cfy + \frac{1}{2}cy^2.$$

Следовательно,

$$\Pi = -mgy + cfy + \frac{1}{2}cy^2.$$

В положении равновесия при $y = 0$ должно выполняться условие

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)_0 = 0,$$

то есть

$$-mg + cf = 0.$$

Следовательно,

$$\Pi = \frac{1}{2}cy^2.$$

Обобщенная сила сопротивления демпфера

$$Q_R = -\mu v = -\mu \dot{y}.$$

Подставляя значения кинетической и потенциальной энергии, а также обобщенной силы сопротивления в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} + Q_R$$

получаем

$$m\ddot{y} + \mu\dot{y} + cy = 0,$$

или

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2 y = 0, \qquad (1)$$

где

$$\frac{\mu}{m} = 2n, \quad \frac{c}{m} = k^2.$$

Корни характеристического уравнения (1)

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Так как в нашем случае

$$k > n,$$

то

$$\lambda_{1,2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2}.$$

Следовательно, общее решение дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$y = e^{-nt}(C_1 \cos\sqrt{k^2 - n^2}t + C_2 \sin\sqrt{k^2 - n^2}t), \tag{2}$$

откуда

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -ne^{-nt}(C_1 \cos\sqrt{k^2 - n^2}t + C_2 \sin\sqrt{k^2 - n^2}t) + \\ &+ e^{-nt}(-C_1\sqrt{k^2 - n^2} \sin\sqrt{k^2 - n^2}t + C_2\sqrt{k^2 - n^2} \cos\sqrt{k^2 - n^2}t). \end{aligned} \tag{3}$$

Подставляя начальные условия ($t = 0,\ y = 0,\ \dot{y} = \dot{y}_0$) в уравнение (2) и (3), определяем C_1 и C_2

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{\dot{y}_0}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Тогда

$$y = \frac{\dot{y}_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} e^{-nt} \sin\sqrt{k^2 - n^2}t. \tag{4}$$

Коэффициенты n и k^2 вычислим по формулам

$$n = \frac{4\pi g\mu H}{Gz}\left(\frac{D}{d}\right)^4 \approx 5{,}42\, c^{-2},$$

$$k^2 = \frac{c}{m} = 1080\, c^{-1}.$$

Подставляя полученные соотношения в выражение (4), имеем

$$y = 0{,}03e^{-5{,}42t}\sin 32{,}4t\,.$$

Логарифмический декремент колебаний равен

$$\ln\eta = n\frac{T_1}{2} = n\frac{\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = 0{,}52\,.$$

Пример 5. Груз массой m укреплен на абсолютно жестком безинерционном стержне длиной ℓ (рис. 3.9), который удерживается в равновесии пружиной и демпфером. Последний имеет линейную характеристику трения

$$R = \mu v\,,$$

где v – линейная скорость поршня.

Определить собственную частоту колебаний системы, если $m = 10\,кг$; $\ell = 0{,}5\,м$; $a = 0{,}2\,м$; диаметр пружины $D = 5\cdot 10^{-2}\,м$; диаметр проволоки пружины $d = 5\cdot 10^{-3}\,м$; число витков $i = 5$; модуль упругости $E = 8\cdot 10^{10}\,Н/м^2$; коэффициент сопротивления движению демпфера $\mu = 100\,кг/с$.

Решение. Воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода. Механическая система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем φ – угол отклонения маятника от вертикали. Кинетическая энергия системы будет равна

$$T = \frac{1}{2}J_z\dot{\varphi}^2\,.$$

Так как $J_z = m\ell^2$, то $T = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2$.

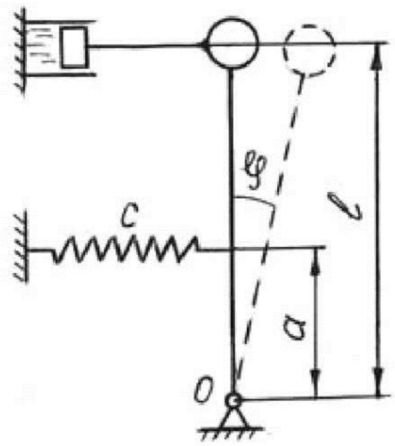


Рис. 3.9

Потенциальную энергию системы определим как сумму потенциальной энергии силы тяжести $П_1$ и потенциальной энергии деформированной пружины $П_2$

$$П_1 = -mg\ell(1-\cos\varphi)\,.$$

Разлагая косинус в ряд Маклорена и пренебрегая в нем всеми членами выше второго порядка, получим

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \ldots,$$

$$\Pi_1 = -mg\ell\frac{\varphi^2}{2},$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}ca^2\varphi^2.$$

Следовательно,

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \frac{c}{2}a^2\varphi^2 - \frac{mg\ell}{2}\varphi^2 = \frac{\varphi^2}{2}(ca^2 - mg\ell).$$

Обобщенная сила сопротивления демпфера

$$Q_R = -\mu l^2\dot{\varphi}.$$

Подставляя значения кинетической и потенциальной энергии, а также обобщенной силы сопротивления в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + Q_R,$$

получим

$$m\ell^2\ddot{\varphi} + (ca^2 - mg\ell)\varphi + \mu\ell^2\dot{\varphi} = 0. \qquad (1)$$

Введем обозначения

$$\frac{\mu}{m} = 2n, \qquad \frac{ca^2 - mg\ell}{m\ell^2} = k^2.$$

Тогда выражение (1) перепишем в виде

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0. \qquad (2)$$

Вычислим коэффициент жесткости пружины [4]

$$c = \frac{E\cdot d^4}{8i\cdot d^3} = \frac{8\cdot 10^{10}\cdot(5\cdot 10^{-3})^4}{8\cdot 5\cdot(0{,}05)^3} = 10^4\ H/м.$$

При $n = 0$ собственная частота колебаний

$$k^2 = 140{,}38 \text{ и } k = 11{,}85\,c^{-1}.$$

Приведенный коэффициент сопротивления

$$n = \frac{\mu}{2m} = \frac{100}{2\cdot 10} = 5\ c^{-1}.$$

Собственная частота затухающих колебаний

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{140,38 - 25} = 10,74\ c^{-1}.$$

Период затухающих колебаний

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{6,28}{10,74} = 0,585\ c.$$

Логарифмический декремент затухания

$$\eta = n\frac{T_1}{2} = 5\frac{0,585}{2} = 1,46.$$

Пример 6. Полое кольцо радиуса r и массы m удерживается в устойчивом равновесии пружиной и демпфером (рис. 3.10). Сила сопротивления демпфера пропорциональна скорости, то есть $R = \mu v$, где μ – коэффициент сопротивления движению. Определить собственную частоту и период колебаний системы, а также уравнение движения кольца, если $m = 2\,кг$, $c = 4 \cdot 10^3\ Н/м$, $\mu = 40\ кг/с$, $r = 0,3\ м$. В начальный момент времени центру масс кольца была сообщена скорость $v = 2\ м/с$.

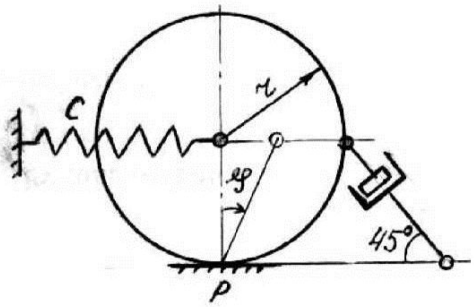


Рис. 3.10

Решение. Для вывода дифференциального уравнения движения системы воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода. Система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем φ – угол поворота кольца. Тогда уравнение Лагранжа для рассматриваемой системы имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + Q_R. \qquad (1)$$

Кинетическая энергия системы будет равна

$$T = \frac{1}{2} J_p \dot{\varphi}^2,$$

где J_p – момент инерции кольца относительно оси, проходящей через мгновенный центр скоростей. На основании теоремы Гюйгенса-Штейнера о моментах инерции тела относительно параллельных осей имеем

$$J_p = J_c + mr^2 = 2mr^2,$$

так $J_c = mr^2$ – момент инерции кольца относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости кольца.

Следовательно,

$$T = mr^2 \dot{\varphi}^2 . \quad (2)$$

Потенциальная энергия системы равна

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 ,$$

где Π_1 – потенциальная энергия кольца, Π_2 – потенциальная энергии пружины.

В нашем случае:

$$\Pi_1 = \pm\, mgh_c = 0, \quad \Pi_2 = \frac{cr^2\varphi^2}{2}, \quad (3)$$

где h_c – вертикальное перемещение центра тяжести кольца.

Обобщенная сила сопротивления демпфера равна

$$Q_R = -\mu v r\sqrt{2} = -2\mu r^2 \dot{\varphi} . \quad (4)$$

Подставляя значения T, Π и Q_R в уравнение Лагранжа (1), имеем

$$2mr^2 \ddot{\varphi} + 2\mu r^2 \dot{\varphi} + cr^2\varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0, \quad (5)$$

где $n = \dfrac{\mu}{m} = 10$, $k^2 = \dfrac{cr^2}{2mr^2} = \dfrac{c}{2m} = 1000$, $k = 31{,}62$.

Для общего интеграла дифференциального уравнения (5) составим его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0 .$$

Корни этого уравнения

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -10 \pm 30i .$$

Так как корни характеристического уравнения – комплексные числа, то общий интеграл дифференциального уравнения (5) будет иметь вид

$$\varphi = e^{-10t}(C_1 \cos 30t + C_2 \sin 30t) . \quad (6)$$

Продифференцируем уравнение (6) по времени

$$\dot{\varphi} = -10e^{-10t}(C_1\cos 30t + C_2\sin 30t) + e^{-10t}(-30C_1\sin 30t + 30C_2\cos 30t). \quad (7)$$

Подставляя начальные условия ($t = 0,\ \varphi_0 = 0,\ \dot{\varphi}_0 = \frac{v_0}{r}$) в уравнение (2) и (3), определяем C_1 и C_2

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0,22.$$

Таким образом, уравнение движения кольца запишется в виде

$$\varphi = 0,22e^{-10t}\sin 30t,$$

а частота и период собственных колебаний будут равны соответственно

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = 30\,c^{-1},\ T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = 0,21\,c.$$

Глава IV. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

4.1. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы в случае периодической возмущающей силы

Рассмотрим случай движения системы с одной степенью свободы около положения устойчивого равновесия, когда на точки системы действуют восстанавливающие (консервативные) силы $\overline{P}_k$, силы сопротивления $\overline{R}_k$, пропорциональные скорости v_k, и возмущающие силы $\overline{F}_k$, изменяющиеся по периодическому закону.

Кинетическая энергия T, потенциальная энергия $П$ и диссипативная функция $Ф$ рассматриваемой системы определяются из выражений

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad П = \frac{1}{2} c q^2, \quad Ф = \frac{1}{2} в \dot{q}^2 .$$

Обобщенные силы Q_p и Q_R, соответствующие восстанавливающим силам и силам сопротивления, найдем по следующим формулам

$$Q_p = -\frac{\partial П}{\partial q} = -cq, \quad Q_R = -\frac{\partial Ф}{\partial \dot{q}} = -в \dot{q} .$$

Обобщенная сила Q_F, соответствующая возмущающим силам, определяется формулой

$$Q_F = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \cdot \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q} .$$

Очевидно, что $Q_F = Q_F(t)$.

Разложим функцию Q_F, период которой равен $T_в$, в ряд Фурье

$$Q_F = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos ipt + b_i \sin ipt),$$

где $p = \dfrac{2\pi}{T}$ – основная частота возмущающей силы.

Постоянные интегрирования a_0, a_i, b_i определяем по известным из гармонического анализа формулам:

$$a_0 = \frac{1}{T_в}\int\limits_0^{T_в} Q_{l'}(t)dt,\quad a_i = \frac{2}{T_в}\int\limits_0^{T_в} Q_{l'}(t)\cos iptdt,\quad b_i = \frac{2}{T_в}\int\limits_0^{T_в} Q_{l'}(t)\sin iptdt.$$

Уравнение Лагранжа для рассматриваемой системы имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} + Q_{l'}(t).$$

Подставив в это уравнение значения всех указанных величин, получим

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = \frac{a_0}{a} + \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{\infty}(a_i \cos ipt + в_i \sin ipt). \qquad (4.1)$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (4.1) определяем как сумму двух решений

$$q = q^* + q^{**}, \qquad (4.2)$$

где q^* – общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0;$$

q^{**} – какое-либо частное решение (4.1).

Если $n < k$ (случай малого сопротивления), то

$$q^* = e^{-nt}(c_1 \cos k_1 t + c_2 \sin k_1 t),$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ – частота затухающих колебаний.

Частное решение q^{**} будем искать в виде

$$q^{**} = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty}(A_i \cos ipt + B_i \sin ipt),$$

где A_0, A_i и B_i – постоянные коэффициенты, которые следует определить.

Для их определения подставим значения q^{**} и ее производных в уравнение (4.1). В результате имеем

$$A_0 k^2 + \sum_{i=1}^{\infty}[(k^2 - i^2 p^2)A_i + 2nipB_i]\cos ipt +$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}[(k^2 - i^2 p^2)B_i - 2nipA_i]\sin ipt = \frac{a_0}{a} + \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{\infty}(a_i \cos ipt + b_i \sin ipt).$$

Это равенство справедливо, если

$$A_0k^2 = \frac{a_0}{a}, \quad (k^2 - i^2p^2A_i + 2nipB_i = \frac{a_i}{a}, \quad (k^2 - i^2p^2)B_i - 2nipA_i = \frac{в_i}{a},$$

откуда находим

$$A_0 = \frac{a_0}{ak^2} = \frac{a_0}{c}, \quad A_i = \frac{(k^2 - i^2p^2)a_i - 2nipв_i}{a[(k^2 - i^2p^2)^2 + 4n^2i^2p^2},$$

$$B_i = \frac{(k^2 - i^2p^2)в_i + 2nipa_i}{a[(k^2 - i^2p^2)^2 + 4n^2i^2p^2}.$$

На основании (4.2) общее решение дифференциального уравнения (4.1) будет равно

$$q = A_0 + e^{-nt}(C_1\cos k_1t + C_2\sin k_1t) + \sum_{i=1}^{\infty}(A_i\cos ipt + B_i\sin ipt). \quad (4.3)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяем из начальных условий: при $t = 0$, $q = q_0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$.

Дифференциальное уравнение (4.1) можно также представить в виде

$$\ddot{q} + 2nq + k^2q = h_0 + \sum_{i=1}^{\infty}h_i\sin(ipt + \delta_i), \quad (4.4)$$

где

$$h_0 = \frac{a_0}{a}, \quad h_i = \frac{1}{a}\sqrt{a_i^2 + в_i^2}, \quad tg\delta_i = \frac{a_i}{в_i}.$$

Общее решение (4.4) определяем как сумму двух решений

$$q = q^* + q^{**}.$$

Если $n < k$, то q^* можно представить в виде:

$$q^* = Ae^{-nt}\sin(k_1t + \alpha).$$

Частное решение будем искать в виде :

$$q^{**} = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty}A_{iв}\sin(ipt + \delta_i - \varepsilon_i). \quad (4.5)$$

Постоянные A_0, A_{ib}, ε_i определяем путем подстановки функции q^{**} и ее производных в уравнение (4.4)

$$k^2A_0+\sum_{i=1}^{\infty}(k^2-i^2p^2)A_{i\text{в}}\sin(ipt+\delta_i-\varepsilon_i)+\sum_{i=1}^{\infty}2nipA_{i\text{в}}\cos(ipt+\delta_i-\varepsilon_i)=$$

$$=h_0+\sum_{i=1}^{\infty}h_i\sin(ipt+\delta_i).$$

Преобразуем правую часть равенства

$$h_0+\sum_{i=1}^{\infty}h_i\sin(ipt+\delta_i)=h_0+\sum_{i=1}^{\infty}h_i\sin(ipt+\delta_i-\varepsilon_i+\varepsilon_i)=$$

$$=h_0+\sum_{i=1}^{\infty}h_i\cos\varepsilon_i\sin(ipt+\delta_i-\varepsilon_i)+\sum_{i=1}^{\infty}h_i\sin\varepsilon_i\cos(ipt+\delta_i-\varepsilon_i).$$

Тогда

$$k^2A_0+\sum_{i=1}^{\infty}(k^2-i^2p^2)A_{ib}\sin(ipt+\delta_i-\varepsilon_i)+\sum_{i=1}^{\infty}2nipA_{ib}\cos(ipt+\delta_i-\varepsilon_i)=$$

$$=h_0+\sum_{i=1}^{\infty}h_i\cos\varepsilon_i\sin(ipt+\delta_i-\varepsilon_i)+\sum_{i=1}^{\infty}h_i\sin\varepsilon_i\cos(ipt+\delta_i-\varepsilon_i).$$

Это равенство обращается в тождество, если

$$k^2A_0=h_0,\quad (k^2-i^2p^2)A_{ib}=h_i\cos\varepsilon_i,\quad 2nipA_{ib}=h_i\sin\varepsilon_i.$$

Из этих соотношений находим

$$A_0=\frac{h_0}{k^2},\quad A_{ib}=\frac{h_i}{\sqrt{(k^2-i^2p^2)^2+4n^2i^2p^2}},\quad tg\varepsilon_i=\frac{2nip}{k^2-i^2p^2}.$$

Общее решение дифференциального уравнения (4.4) имеет вид

$$q=A_0+Ae^{-nt}\sin(k_1t+\alpha)+\sum_{i=1}^{\infty}A_{ib}\sin(ipt+\delta_i-\varepsilon_i).\tag{4.6}$$

В уравнении (4.6) первый член представляет собой постоянное отклонение системы от ее равновесного положения, вызываемое средним значением возмущающей силы a_0, второй член – ее затухающие колебания, третий член – вынужденные колебания системы под действием периодической возмущающей силы, разложенной на отдельные гармоники.

При установившемся движении практическое значение имеют лишь незатухающие вынужденные колебания, определяемые уравнением

$$q=\sum_{i=1}^{\infty}A_{i\text{в}}\sin(ipt+\delta_i-\varepsilon_i).\tag{4.7}$$

Здесь $A_{iв}$ и $(ipt+\delta_i-\varepsilon_i)$ – амплитуда и фаза вынужденных колебаний, соответствующие частоте этих колебаний $p_i = ip \quad (i=1,2,...,\infty)$.

В случае, когда $n=0$, то есть при отсутствии сопротивления, дифференциальное уравнение (4.4) и его решение (4.6) будет иметь вид

$$\ddot{q}+k^2q=h_0+\sum h_i\sin(ipt+\delta_i), \tag{4.8}$$

$$q=A_0+A\sin(kt+\alpha)+\sum A_{iв}\sin(ipt+\delta_i). \tag{4.9}$$

Амплитуда колебаний

$$A_{iв}=\frac{h_i}{k^2-i^2p_2}. \tag{4.10}$$

4.2. Явление резонанса

Если одна из частот возмущающей силы равна частоте свободных колебаний системы, то есть

$$p_i=ip=k \quad (i=1,2,...,\infty),$$

то наступает резонанс i-го порядка.

Амплитуда и начальная фаза в этом случае будут соответственно равны

$$A_{iв}=\frac{h_i}{2nk}, \tag{4.11}$$

$$tg\varepsilon_i=\infty,\ \text{то}\ \varepsilon_i=\frac{\pi}{2}.$$

В случае, когда $n<<k$, амплитуда $A_{iв}$ может быть очень большой по сравнению с амплитудами всех остальных гармоник ряда (4.7), особенно, если имеет место резонанс первого порядка.

Уравнение (4.7), когда имеет место резонанс первого порядка, принимает вид

$$q=\frac{h_1}{2nk}\sin(kt+\delta_1-\frac{\pi}{2}). \tag{4.12}$$

Вследствие сдвига фаз ε_i, амплитуда вынужденных колебаний имеет максимум не при $p_i=k$, а при другом значении частоты p_i.

Максимуму

$$A_{i\text{в}} = \frac{h_i}{\sqrt{(k^2 - p_i^2)^2 + 4n^2 p_i^2}} \qquad (4.13)$$

соответствует минимум знаменателя (4.13).

Для определения минимума функции $f = (k^2 - p_i^2)^2 + 4n^2 p_i^2$ возьмем производную от нее по p_i и приравняем ее нулю

$$-4p_i(k^2 - p_i^2) + 8n^2 p_i = 0,$$

откуда $p_i^2 = k^2 - 2n^2$.

Это равенство возможно, если $k^2 - 2n^2 > 0$, то есть если

$$n < \frac{\sqrt{2}}{2}k. \qquad (4.14)$$

При $n > \frac{\sqrt{2}}{2}k$ максимума $A_{i\text{в}}$ не существует и резонанса в этом случае нет.

Подставляя в (4.13) значение $p_i^2 = k^2 - 2n^2$, имеем

$$A_{i\text{в}}^{\max} = \frac{h_i}{2n\sqrt{k^2 - n^2}}. \qquad (4.15)$$

При малом значении коэффициента затухания

$$A_{i\text{в}}^{\max} = \frac{h_i}{2nk}. \qquad (4.16)$$

Сравнивая (4.16) и (4.11), приходим к выводу, что максимальное значение амплитуды $A_{i\text{в}}$ и ее значение при резонансе практически одинаковы.

При установившемся режиме движения в случае отсутствия сопротивления уравнение вынужденных колебаний системы можно определить выражением

$$q = \sum \frac{h_i}{k^2 - i^2 p^2} \sin(ipt + \delta_i). \qquad (4.17)$$

Если $n = 0$ и возникает резонанс $(ip = k)$, то

$$A_{i\text{в}} = \frac{h_i}{k^2 - i^2 p^2} \to \infty,$$

следовательно, уравнение (4.17) не определяет вынужденные колебания системы.

Чтобы исследовать этот случай, рассмотрим вынужденные колебания системы, вызываемые какой-либо одной гармоникой возмущающей силы, например первой.

Дифференциальное уравнение движения системы при этом будет иметь вид

$$\ddot{q} + k^2 q = h\sin(pt + \delta). \tag{4.18}$$

Уравнение (4.18) имеет общее решение

$$q = q^* + q^{**}.$$

Общее решение однородного уравнения $\ddot{q} + k^2 q = 0$, как известно, имеет вид

$$q^* = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

При $p = k$, частное решение q^{**} уравнения (4.18) должно быть линейно-независимым от q^*. Поэтому частное решение q^{**} будем искать в виде

$$q^{**} = Bt\cos(kt + \delta). \tag{4.19}$$

Для нахождения неизвестной постоянной B подставим значения q^{**} и ее второй производной в уравнение (4.18)

$$-2Bk\sin(kt + \delta) - Bk^2 t\cos(kt + \delta) + Bk^2 t\cos(kt + \delta) = h\sin(kt + \delta),$$

откуда

$$B = -\frac{h}{2k}.$$

Общее решение уравнения (4.18)

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt - \frac{h}{2k} t\cos(kt + \delta)$$

или

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{2k} t\sin(kt + \delta - \frac{\pi}{2}). \tag{4.20}$$

Вынужденные колебания при резонансе

$$q^{**} = \frac{h}{2k} t \sin(kt + \delta - \frac{\pi}{2}). \qquad (4.21)$$

Частота вынужденных колебаний при резонансе равна частоте k свободных колебаний. Фаза вынужденных колебаний отстает от фазы возмущающей силы на величину $\frac{\pi}{2}$. Как следует из выражения (4.21), амплитуда вынужденных колебаний при резонансе возрастает пропорционально времени.

График вынужденных колебаний системы при резонансе показан на рис. 4.1.

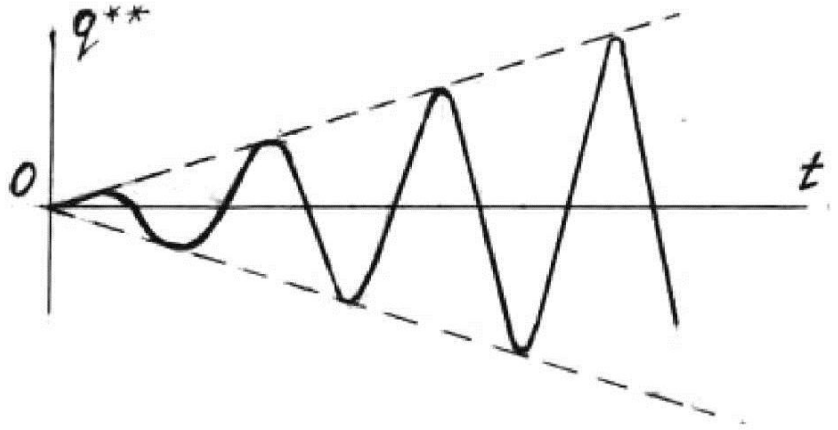


Рис. 4.1

4.3. Явление биений

Биения возникают при условии, когда одна из частот вынужденных колебаний p_i весьма мало отличается от частоты свободных колебаний k, то есть $p_i \approx k$, и колебания происходят с частотой, весьма близкой к резонансной.

Рассмотрим вынужденные колебания системы, вызываемые какой-либо одной гармоникой возмущающей силы, например первой.

При $n = 0$, дифференциальное уравнение системы и его общее решение можно представить в виде

$$\ddot{q} + k^2 q = h \sin(pt + \delta), \qquad (4.22)$$

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta), \qquad (4.23)$$

тогда

$$\dot{q} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos(pt + \delta). \tag{4.24}$$

Подставляя в (4.23) и (4.24) начальные условия: при $t = 0$, $q = q_0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$, получим

$$C_1 = q_0 - \frac{h}{k^2 - p^2} \sin \delta ,$$

$$C_2 = \frac{\dot{q}_0}{k} - \frac{hp}{k(k^2 - p^2)} \cos \delta .$$

Тогда выражение (4.23) перепишем в виде

$$\begin{aligned} q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt - \frac{h}{k^2 - p^2} (\sin \delta \cos kt + \\ + \frac{p}{k} \cos \delta \sin kt) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Из выражения (4.25) видно, что даже при нулевых начальных условиях ($q_0 = 0,\ \dot{q}_0 = 0$) система будет совершать колебания, происходящие с частотой свободных колебаний, они определяются членом

$$\frac{h}{k^2 - p^2} (\sin \delta \cos kt + \frac{p}{k} \cos \delta \sin kt).$$

При $p \approx k$, благодаря наложению колебаний, наступает своеобразное явление, называемое биением.

Пусть $\frac{p}{k} \approx 1$, тогда выражение (4.25) при $q_0 = 0$, $\dot{q}_0 = 0$ примет вид

$$q \approx \frac{h}{k^2 - p^2} [\sin(pt + \delta) - \sin(kt + \delta)].$$

Используя формулу

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

и имея в виду, что $\frac{p + k}{2} \approx p$, получаем

$$q \approx 2\frac{h}{k^2 - p^2}\sin\frac{p-k}{2}t\cos(pt+\delta). \qquad (4.26)$$

График этого движения представлен на рис. 4.2.

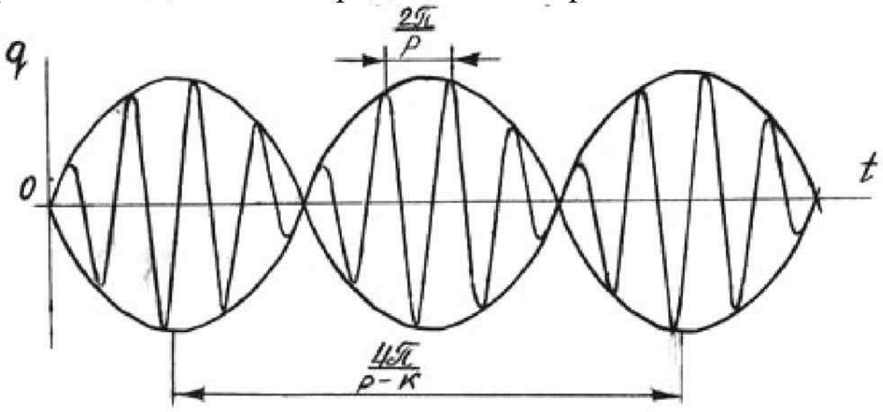


Рис. 4.2

Биения представляют собой колебания, происходящие с частотой возмущающей силы, причем амплитуда этих колебаний медленно меняется, следуя периодическому закону.

Период изменения амплитуды

$$T_A = \frac{2\pi}{\frac{p-k}{2}} = \frac{4\pi}{p-k}.$$

4.4. Коэффициент динамичности

Формулу для определения амплитуд вынужденных колебаний, вызываемых периодической возмущаемой силой, перепишем в виде

$$A_{i\text{в}} = \frac{h_i}{\sqrt{\left(k^2 - i^2p^2\right)^2 + 4n^2i^2p^2}} = \frac{A_{i0}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p_i^2}{k^2}\right)^2 + 4\frac{n^2}{\kappa^2}\frac{p_i^2}{\kappa^2}}},$$

где $ip = p_i$.

Колебания (4.7) вызваны возмущаемой силой

$$Q_F(t) = a\sum_{i=1}^{\infty} h_i\sin\left(ipt + \delta_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} H_i\sin\left(ipt + \delta_i\right). \qquad (4.27)$$

При статическом действии силы $H_i = ah_i$, т.е. если $p_i = 0$, отклонение системы от ее равновесного положения равно

$$A_{io}=\frac{h_i}{k^2}=\frac{H_i}{k^2a}=\frac{H_i}{c},\qquad \text{так как } k^2=\frac{c}{a}.$$

Отношение амплитуды вынужденных колебаний $A_{iв}$ к величине A_{i0} называется коэффициентом динамичности

$$\lambda_i=\frac{A_{iв}}{A_{io}}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\chi_i^2\right)^2+4\eta^2\chi_i^2}},\qquad (4.28)$$

где $\chi_i=\frac{p_i}{k}$, $\eta=\frac{n}{k}$.

Если $n=0$, то

$$\lambda_i=\frac{1}{1-\chi_i^2}.\qquad (4.29)$$

На рис. 4.3 показан график функций $\lambda_i=f_i\left(\chi_i\right)$ для различных значений η.

При $n\neq 0$ коэффициент динамичности достигает максимума вблизи резонанса при значении χ_i несколько меньшем единицы, что объясняется сдвигом фаз возмущающей силы и вынужденных колебаний.

Сдвиг фаз θ_i определяется по формуле

$$tg\theta_i=\frac{2np_i}{k^2-p_i^2}=2\frac{n}{k}\frac{p_i}{k}\frac{1}{1-\left(\frac{p_i}{k}\right)^2}=2\eta\chi_i\frac{1}{1-\chi_i^2}.\qquad (4.28)$$

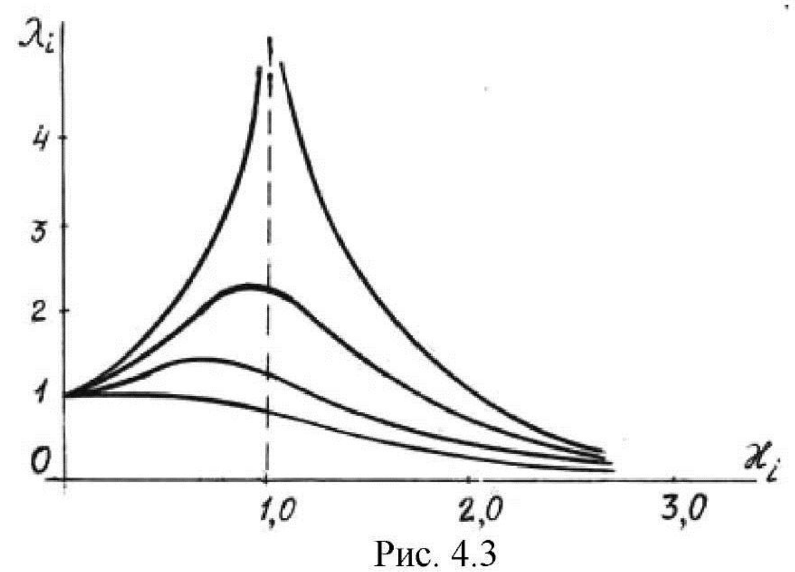


Рис. 4.3

На рис. 4.4 показан график функции $\theta_i = \theta_i(\chi_i)$ для некоторых значений η. При изменении χ_i от 0 до ∞ величина θ_i изменяется от 0 до π. При резонансе $p_i = k$ величина $\theta_i = \dfrac{\pi}{2}$.

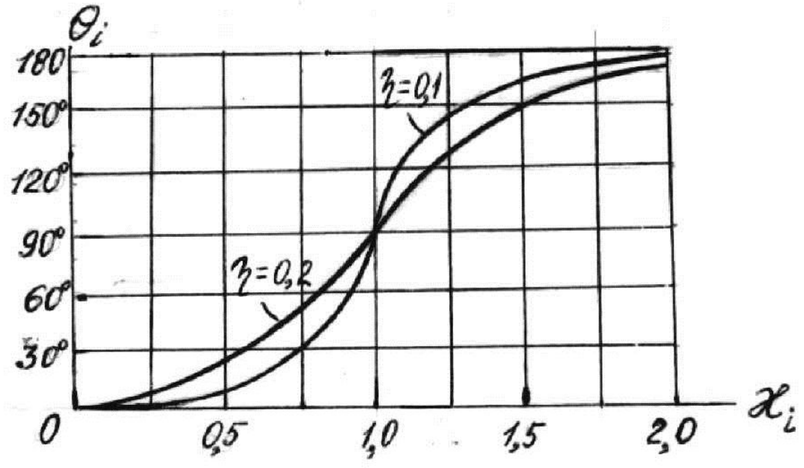


Рис. 4.4

4.5. Примеры на вынужденные колебания системы с одной степенью свободы

<u>Пример 1</u>. Для уменьшения воздействия сил инерции, развиваемых в машине неуравновешенными частями на основание, применяется виброизоляция двигателя – подвеска (или его установка) на податливых упругих основаниях.

Для схемы, изображенной на рис. 4.5, определить динамический коэффициент передачи силы на основание в месте прикрепления упругой опоры жесткостью с. Балку, на которую установлен двигатель, считать абсолютно жесткой, невесомой. Масса двигателя m.

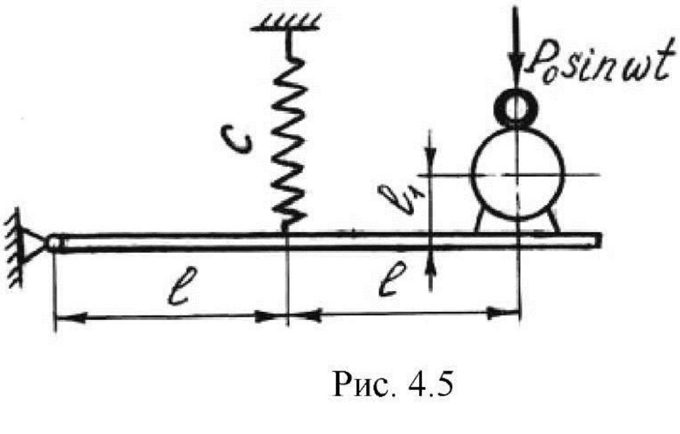


Рис. 4.5

Решение. Для составления дифференциального уравнения движения системы воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода. Приняв за обобщенную координату угол поворота φ балки – основания, запишем выражения кинетической и потенциальной энергий:

$$T=\frac{1}{2}J_0\omega^2=\frac{1}{2}m4\ell^2\dot{\varphi}^2=2m\ell^2\dot{\varphi}^2, \qquad \varPi=\frac{1}{2}c\ell^2\varphi^2.$$

Подставляя найденные значения T и $\varPi$ в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=-\frac{\partial\varPi}{\partial\varphi}+Q_{\text{в}},$$

а также имея ввиду, что обобщенная возмущающая сила равна

$$Q_{\text{в}}=\frac{\delta A_\varphi}{\delta\varphi}=\frac{P_0\sin\omega t\cdot 2\ell\delta\varphi}{\delta\varphi}=2p_0\ell\sin\omega t,$$

имеем

$$4m\ell^2\ddot{\varphi}+c\ell^2\varphi=2P_0\ell\sin\omega t$$

или

$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi=h\sin\omega t,$$

где $k^2=\dfrac{c}{4m}$, $h=\dfrac{P_0}{2m\ell}$.

В соответствии с (4.29) коэффициент динамичности при $n=0$ будет равен $\lambda_i=\dfrac{1}{1-\chi^2}$.

Имея ввиду, что $\chi^2=\dfrac{\omega^2}{k^2}$, а $k^2=\dfrac{c}{4m}$ – коэффициент динамичности будет равен

$$\lambda=\frac{1}{1-\dfrac{4m\omega^2}{c}}=\frac{c}{c-4m\omega^2}.$$

Пример 2. Вдоль синусоидального профиля

$$\eta=\eta_0\sin\frac{\pi x}{\ell} \tag{1}$$

с постоянной горизонтальной скоростью движется колесо, на котором упруго подвешен груз массы m (рис. 4.6). Определить наибольшее допустимое значение коэффициента жесткости подвески c, если требуется, чтобы амплитуда абсолютных колебаний груза не превосходила $0,05\eta_0$.

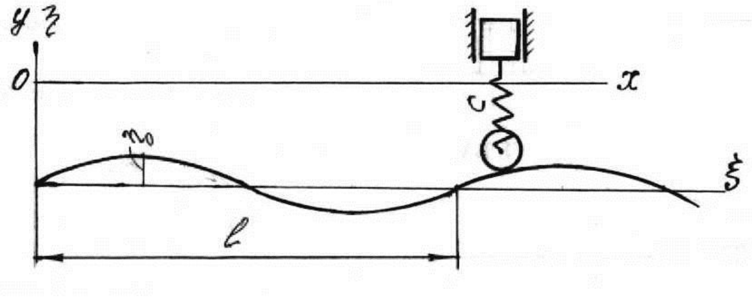


Рис. 4.6

Решение. Обозначив через у абсолютное вертикальное перемещение груза, отсчитываемое от положения равновесия, составим дифференциальное уравнение движения груза

$$m\ddot{y} = -c(y-\eta). \tag{2}$$

Имея в виду, что $x = vt$, ординату профиля дороги η представим в функции времени

$$\eta = \eta_0 \sin\frac{\pi v}{\ell}t. \tag{3}$$

С учетом выражения (3) уравнение (2) перепишем в виде

$$m\ddot{y} + cy = c\eta_0 \sin\frac{\pi v}{\ell}t. \tag{4}$$

Отсюда видно, что эквивалентная возмущающая сила составляет $Q = c\eta_0 \sin\frac{\pi v}{\ell}t$, т.е. амплитуда равна $Q_0 = c\eta_0$.

Разделив амплитуду эквивалентной возмущающей силы на коэффициент жесткости подвески, найдем, что наибольшее отклонение груза от первоначального уровня при статическом приложении возмущающей силы (т.е. при бесконечно медленном движении колеса вдоль профиля) равно η_0.

При конечном значении скорости v амплитуда колебаний A найдется путем умножения η_0 на коэффициент динамичности λ (4.29)

$$\lambda = \frac{1}{1-\chi^2},$$

где $\chi = \dfrac{p}{k}$, $\quad k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$, $\quad p = \dfrac{\pi v}{\ell}$.

Тогда

$$\lambda = \frac{1}{\left|1 - \dfrac{\pi^2 v^2 m}{c\ell^2}\right|}.$$

По условию задачи $A \le 0,05\eta_0$, следовательно,

$$\frac{1}{\dfrac{\pi^2 v^2 m}{c\ell^2} - 1} \le 0,05,$$

отсюда находим $c \le \dfrac{0,47 m v^2}{\ell^2}$.

Рис. 4.7

Пример 3. Масса m подвешена на пружине жесткостью $c = 7200\ H/\text{м}$ (рис. 4.7). Верхний конец пружины связан с кривошипно-шатунным механизмом и может совершать возвратно-поступательное движение, описываемое уравнением $x = x_0 \sin \omega t$, где амплитуда $x_0 = 1,55 \cdot 10^{-2} м$, а угловая скорость кривошипа ω равна собственной частоте свободных незатухающих колебаний массы m. Считая, что коэффициент вязкого сопротивления демпфера $\mu = 270\ Hc/м$, а вес груза 90Н, определить максимальную силу, растягивающую пружину.

Решение. Обозначим смещение верхнего конца пружины x, а смещение массы y. Тогда сила, действующая на груз при движении верхнего конца пружины

$$F = c(y - x).$$

Дифференциальное уравнение движения груза при этом будет иметь вид

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2 y = h \sin \omega t,$$

где

$$2n = \frac{\mu}{m}, \quad k^2 = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{c x_0}{m}.$$

При $\omega = k$, согласно (4.11), амплитуда вынужденных колебаний будет равна

$$A = \frac{h}{2nk} = \frac{x_0}{\mu}\sqrt{cm} = 0,0148.$$

Сдвиг фаз в резонансном режиме (4.11) равен $\dfrac{\pi}{2}$, поэтому полное удлинение пружины

$$y_{\max} = A + y_{ст},$$

где $y_{ст}$ – статическое удлинение пружины при статическом действии силы тяжести груза;

$$y_{\max} = A + \frac{G}{c} = 0,048 + 0,0125 = 0,0273\,м.$$

Максимальная сила, растягивающая пружину

$$P_{\max} = c\,y_{\max} = 7200 \cdot 0,0273 = 197\ H.$$

Пример 4. Для уплотнения бетона, уложенного в основания фундаментов сооружений, применяются специальные приспособления – вибраторы. Вибратор (рис. 4.8.) состоит из тяжелой рамы массой m_1, на которой смонтированы два диска массами m_2 каждый. Диски вращаются в вертикальной плоскости в противоположных направлениях с угловой скоростью ω. На дисках закреплены грузы массой m_3 с эксцентриситетом e относительно оси вращения.
В конце процесса уплотнения свойства бетонного основания можно приближенно описать реологической моделью, представленной на рис. 4.8,б.

Считая, что в процессе работы корпус вибратора не отрывается от уплотняемой массы, исследовать колебания системы.

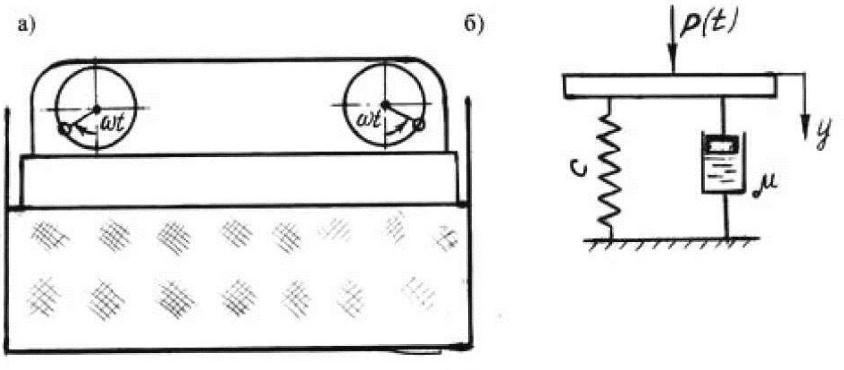


Рис. 4.8

Решение. Положение корпуса вибратора определяем обобщенной координатой $q = y$, отсчитываемой от состояния устойчивого равновесия. Для получения дифференциального уравнения движения корпуса вибратора воспользуемся уравнением Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}} + Q_Y^{\text{в}}. \qquad (1)$$

Кинетическая энергия системы равна

$$T = T_1 + 2T_2 + 2T_3.$$

Здесь

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2; \quad T_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 + \frac{1}{4} m_2 r^2 \omega_2^2;$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2 = \frac{1}{2} m_3 (\dot{y}^2 + e^2 \omega^2 - 2 \dot{y} \omega \, e \sin \omega t);$$

$$\omega_2 = \omega_3 = \omega = \dot{\varphi} = const.$$

Следовательно,

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + 2m_2 + 2m_3)\dot{y}^2 + (J_2 + J_3)\dot{\varphi}^2 - 2m_3 e \dot{y} \dot{\varphi} \sin \omega t.$$

Потенциальная энергия системы равна

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_{пр}.$$

Здесь

$$\Pi_1 = -m_1 g y; \quad \Pi_2 = -2m_2 g y; \quad \Pi_3 = -2m_3 g[\text{y-}e(1 - \cos\varphi)];$$

$$\Pi_{пр} = \frac{c}{2}[(f + y)^2 - f^2] = \frac{c}{2}(y^2 + 2fy).$$

Следовательно,

$$\Pi = -(m_1 + 2m_2 + 2m_3) g y + 2mge(1 - \cos\varphi) + \frac{c}{2}(y^2 + 2fy).$$

Имея в виду, что в положении равновесия

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \quad -(m_1 + 2m_2 + 2m_3)g + cf = 0,$$

окончательно находим

$$\Pi = \frac{1}{2}cy^2 + 2m_3 ge(1 - \cos\varphi).$$

Предполагая, что силы сопротивления пропорциональны скорости, диссипативная функция Релея имеет вид

$$\Phi = \frac{1}{2}\mu \dot{y}^2.$$

Обобщенная возмущающая сила, соответствующая обобщенной координате y равна нулю

$$Q_y^{\text{в}} = 0.$$

Подставляя найденные значения T, Π, Φ и $Q_y^{\text{в}}$ в уравнение Лагранжа (1), находим

$$(m_1 + 2m_2 + 2m_3)\ddot{y} + \mu\dot{y} + cy = 2m_3 e\omega^2 \cos\omega\, t = 2m_3 e\omega^2 \sin(\omega\, t + \frac{\pi}{2}),$$

или

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2 y = h\sin\left(\omega\, t + \frac{\pi}{2}\right), \tag{2}$$

где $\qquad \dfrac{c}{M} = k^2, \quad \dfrac{\mu}{M} = 2n, \quad \dfrac{2m_3 e\omega^2}{M} = h, \quad m_1 + 2m_2 + 2m_3 = M.$

Общий интеграл дифференциального уравнения (2) имеет вид (см. 4.6.)

$$y = Ae^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha) + A_{\text{в}}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right), \tag{3}$$

где A – наибольшее значение амплитуд затухающих колебаний,

$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ – частота затухающих колебаний,

α – начальная фаза свободных колебаний,

ε – начальная фаза вынужденных колебаний.

При установившемся движении практическое значение имеют лишь незатухающие вынужденные колебания, определяемые уравнением

$$y = A_{\text{в}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \theta\right). \qquad (4)$$

Амплитуду вынужденных колебаний $A_{\text{в}}$ определяем по формуле

$$A_{\text{в}} = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} = \frac{2m_3 e\omega^2}{M\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}.$$

В случае резонанса $(\omega = k)$

$$A_{\text{в}} = \frac{2m_3 e\omega^2}{2Mn\omega} = \frac{m_3 e\omega}{Mn}.$$

Сдвиг фаз определяем по формуле

$$tg\theta = \frac{2n\omega}{k^2 - p^2}.$$

В случае резонанса $(\omega = k)$

$$tg\theta = \infty, \text{ и } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Глава V. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

5.1. Дифференциальные уравнения свободных колебаний системы с двумя степенями свободы и их общее решение

Рассмотрим движение системы с двумя степенями свободы около положения устойчивого равновесия под действием лишь восстанавливающих (консервативных) сил.

Полагая все связи системы стационарными, голономными и идеальными, составим дифференциальные уравнения свободных колебаний.

Уравнения Лагранжа для рассматриваемой системы имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}. \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

Кинетическая и потенциальная энергии системы, согласно (1.16) и (1.9), равны:

$$\left.\begin{aligned} T = \frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2\right), \\ \Pi = \frac{1}{2}\left(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1 q_2 + c_{22}q_2^2\right). \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

Подставляя значения T и Π в уравнения Лагранжа (5.1), получаем:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

где $a_{21} = a_{12}$, $c_{12} = c_{21}$.

Так как потенциальная энергия системы является определенно-положительной функцией, то, согласно критерию Сильвестра, должны выполняться следующие условия:

$$c_{11} > 0, \; c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0. \tag{5.4}$$

Если условия (5.4) устойчивости состояния равновесия выполнены, то частное решение системы дифференциальных уравнений (5.3) можно искать в виде:

$$q_1 = A_1 \sin(kt+\alpha), \quad q_2 = A_2 \sin(kt+\alpha). \tag{5.5}$$

Подставив (5.5) в уравнения (5.3), получим систему алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned}\left(c_{11} - a_{11}k^2\right)A_1 + \left(c_{12} - a_{12}k^2\right)A_2 = 0,\\ \left(c_{12} - a_{12}k^2\right)A_1 + \left(c_{22} - a_{22}k^2\right)A_2 = 0,\end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

которая однородна относительно неизвестных амплитуд A_1 и A_2. При колебаниях они не могут равняться нулю, поэтому, согласно общему свойству однородных систем, должен равняться нулю определитель, составленный из коэффициентов этой системы:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}k^2 & c_{12} - a_{12}k^2 \\ c_{12} - a_{12}k^2 & c_{22} - a_{22}k^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{5.7}$$

Развертывая этот определитель, получим

$$\left(c_{11} - a_{11}k^2\right)\left(c_{22} - a_{22}k^2\right) - \left(c_{12} - a_{12}k^2\right)^2 = 0. \tag{5.8}$$

Уравнение (5.8) называют уравнением частот. Корни этого уравнения k_1^2 и k_2^2 определяют частоты свободных колебаний k_1 и k_2. При малых колебаниях системы около положения устойчивого равновесия корни уравнения (5.8) должны быть вещественными и положительными. В противном случае происходит нарушение условий (5.4), то есть наблюдается неустойчивость состояния равновесия.

Величины k_1 и k_2 являются частотами свободных колебаний системы (причем $k_1 < k_2$).

Соответствующие этим частотам колебания называются главными колебаниями системы. Меньшую из частот k_1 называют основной частотой, а первое главное колебание, соответствующее этой частоте, – основным колебанием. Колебание с меньшей частотой является основным в результирующем движении системы.

Каждому корню k_i соответствует частное решение типа (5.5), следовательно, общее решение дифференциальных уравнений (5.3) получается путем суммирования таких решений

$$
\left.\begin{aligned}
q_1 &= A_{11}\sin\left(k_1 t+\alpha_1\right)+A_{12}\sin\left(k_2 t+\alpha_2\right);\\
q_2 &= A_{21}\sin\left(k_1 t+\alpha_1\right)+A_{22}\sin\left(k_2 t+\alpha_2\right),
\end{aligned}\right\} \tag{5.9}
$$

где букве A приписаны два индекса: первый по – прежнему обозначает номер обобщенной координаты, а второй – номер собственной частоты.

Из (5.9) следует, что каждое из колебаний в отдельности является простым гармоническим колебанием, а результирующее движение представляет собой сложное движение, которое является результатом наложения друг на друга колебаний различных частот k_1 и k_2. Поэтому результирующее движение не является простым гармоническим колебанием.

5.2. Собственные формы

Обозначим отношение обобщенных координат, равное отношению амплитуд колебаний частных решений (5.5) дифференциальных уравнений (5.3) через η:

$$
\frac{q_2}{q_1}=\frac{A_2}{A_1}=\eta, \tag{5.10}
$$

откуда

$$
q_1=A_1\sin(kt+\alpha),\ \ q_2=A_2\sin(kt+\alpha),
$$

$$
A_2=\eta A_1. \tag{5.11}
$$

С учетом (5.11) уравнения (5.6) после деления их на A_1 получаем

$$
\left.\begin{aligned}
\left(c_{11}-a_{11}k^2\right)+\eta\left(c_{12}-a_{12}k^2\right)=0;\\
\left(c_{12}-a_{12}k^2\right)+\eta\left(c_{22}-a_{22}k^2\right)=0.
\end{aligned}\right\}
$$

Определив значения k_1 и k_2 из уравнения (5.8), находим два значения η, соответствующие каждому из главных колебаний:

$$
\left.\begin{aligned}
\eta_1 &= -\frac{c_{11}-a_{11}k_1^{\,2}}{c_{12}-a_{12}k_1^{\,2}}=-\frac{c_{12}-a_{12}k_1^{\,2}}{c_{22}-a_{22}k_1^{\,2}};\\
\eta_2 &= -\frac{c_{11}-a_{11}k_2^{\,2}}{c_{12}-a_{12}k_2^{\,2}}=-\frac{c_{12}-a_{12}k_2^{\,2}}{c_{22}-a_{22}k_2^{\,2}}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.13}
$$

Величины η_1 и η_2, представлявшие собой отношение обобщенных координат или амплитуд колебаний в каждом из главных колебаний, характеризуют собственные формы колебаний, и их называют коэффициентами формы. Из выражений (5.13) следует, что формы колебаний системы не зависят от начальных условий, а зависят лишь от параметров самой системы.

Общее решение (5.9) с помощью коэффициентов формы можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= A_{11}\sin\left(k_1 t+\alpha_1\right)+A_{12}\sin\left(k_2 t+\alpha_2\right); \\ q_2 &= \eta_1 A_{11}\sin\left(k_1 t+\alpha_1\right)+\eta_2 A_{12}\sin\left(k_2 t+\alpha_2\right). \end{aligned}\right\} \tag{5.14}$$

Произвольные постоянные A_{11}, A_{12}, α_1 и α_2 определяются по начальным условиям: при $t=0$, $q_1=q$, $q_2=q_{20}$, $\dot{q}_1=\dot{q}_{10}$, $\dot{q}_2=\dot{q}_{20}$.

5.3. Примеры на свободное колебание системы с двумя степенями свободы

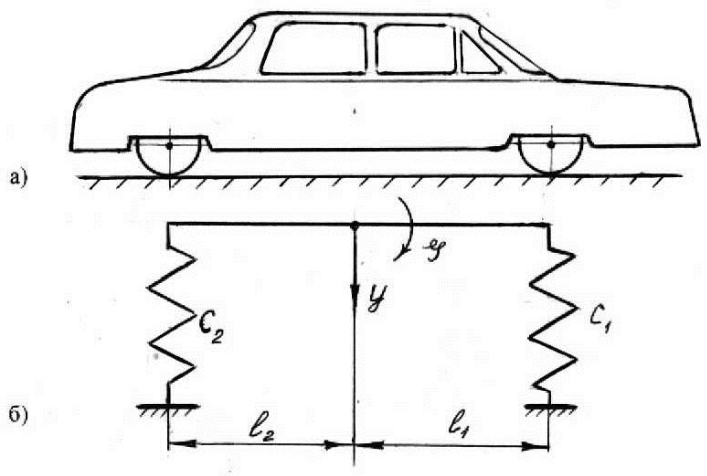


Рис. 5.1

Пример 1. Корпус автомобиля массой m (рис. 5.1) соединен с колесами рессорами, имеющими жесткость c_1 и c_2. Расстояния от центра масс корпуса до подвесок равны ℓ_1 и ℓ_2. Считая, что момент инерции массы корпуса относительно центральной поперечной оси равен J , исследовать свободные вертикальные колебания корпуса автомобиля в продольной плоскости, проходящей через центр масс при следующих параметрах системы:

$c_1 = 2\cdot 10^5\,\dfrac{H}{м}$, $\quad c_2 = 2{,}5\cdot 10^5\,\dfrac{H}{м}$, $\quad \ell_1 = 1\ м$, $\quad \ell_2 = 1{,}5\ м$, $\quad m = 1500\ кг$,

$J = 300\ кг\ м^2$. Упругостью шин пренебречь.

Решение. Предположим, что деформации самого кузова пренебрежительно малы по сравнению с осадками опор. Поэтому в динамической схеме (рис. 5.1.б) горизонтальный стержень будем считать совершенно жестким.

Такая система обладает двумя степенями свободы и за обобщенные координаты примем вертикальное перемещение центра тяжести – y и угол поворота стержня вокруг центра тяжести – φ, т.е. $q_1 = y$, $q_2 = \varphi$.

По аналогии с примером 2 главы 1 кинетическая и потенциальная энергии системы соответственно равны:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2;$$

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_1 + c_2) y^2 + (c_1 \ell_1 - c_2 \ell_2) y\varphi + (c_1 \ell^2{}_1 - c_2 \ell^2{}_2) \varphi^2.$$

Подставляя значения T и Π в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi},$$

получим дифференциальные уравнения движения системы:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{y} + (c_1 + c_2) y + (c_1 \ell_1 - c_2 \ell_2)\varphi = 0; \\ J\ddot{\varphi} + (c_1 \ell_1 - c_2 \ell_2) y + (c_1 \ell_1{}^2 + c_2 \ell_2{}^2)\varphi = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Частные решения этих уравнений будем искать в виде

$$y = A\sin(kt + \alpha); \quad \varphi = B\sin(kt + \alpha). \tag{2}$$

Обозначим отношение обобщенных координат, равное отношению амплитуд колебаний частных решений (2) через

$$\frac{y}{\varphi} = \frac{A}{B} = \eta, \tag{3}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} y = \eta B \sin(kt + \alpha); \\ \varphi = B\sin(kt + \alpha); A = \eta B. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Подставив значения y и φ и их вторых производных в дифференциальные уравнения (1), после деления их на $\sin(kt+\alpha)$, получаем

$$\left.\begin{aligned}\left(c_{11}-a_{11}k^2\right)\eta+\left(c_{12}-a_{12}k^2\right)=0,\\ \left(c_{12}-a_{12}k^2\right)\eta+\left(c_{22}-a_{22}k^2\right)=0,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где

$$c_{11}=c_1+c_2;\;\; c_{12}=c_1\ell_1+c_2\ell_2;\;\; c_{22}=c_1\ell_1{}^2+c_2\ell_2{}^2;$$

(6)

$$a_{11}=m;\;\; a_{12}=0;\;\; a_{22}=J.$$

Исключая η из уравнений (5), имеем

$$\left(c_{11}-a_{11}k^2\right)\left(c_{22}-a_{22}k^2\right)-\left(c_{12}-a_{12}k^2\right)^2=0,$$

откуда

$$k^4-\frac{c_{11}a_{22}+c_{22}a_{11}}{c_{11}a_{22}}k^2+\frac{c_{11}c_{22}+c_{12}{}^2}{c_{11}a_{22}}=0. \tag{7}$$

Подставляя значения коэффициентов (6) в уравнение частот (7), получаем

$$k_1^2=270,\qquad k_2^2=2572$$

или

$$k_1=16,43c^{-1},\qquad k_2=50,71c^{-1}.$$

Вычисляем коэффициенты распределения

$$\eta_1=-\frac{c_{12}-a_{12}k_1^2}{c_{11}-a_{11}k_2^2}=-3,9\frac{м}{рад}=-6,8\frac{см}{град};$$

$$\eta_2=-\frac{c_{12}-a_{12}k_2^2}{c_{11}-a_{11}k_2^2}=-0,05\frac{м}{рад}=-0,09\frac{см}{град}.$$

Таким образом, если в первом главном колебании центр тяжести опустится на 6, 8 см, то автомобиль повернется одновременно против хода часовой стрелки на один градус. Во втором главном колебании при опускании центра тяжести на 0,09 см автомобиль повернется по ходу часовой стрелки на один градус. Формы главных колебаний показаны на рис. 5.2.

Первое главное колебание Второе главное колебание

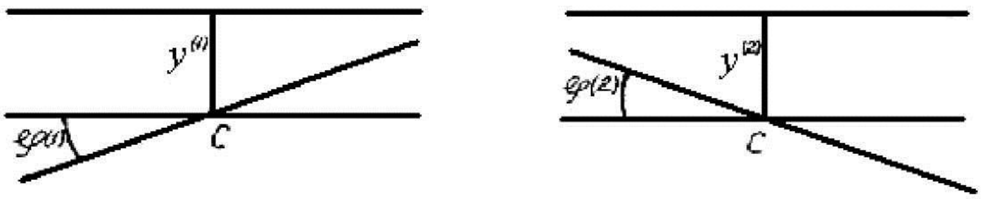


Рис 5.2

Общее решение дифференциальных уравнений (1) в соответствии с формулами (5.14) будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= B_1 \sin\left(k_1 t + \alpha_1\right) + B_2 \sin\left(k_2 t + \alpha_2\right); \\ y &= \eta_1 B_1 \sin\left(k_2 t + \alpha_1\right) + \eta_2 B_2 \sin\left(k_2 t + \alpha_2\right). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Неизвестные постоянные B_1, B_2, α_1 и α_2 определяем по начальным условиям.

Пусть при $t = 0$; $\varphi = y = 0$; $\dot{\varphi} = 0$, $\dot{y} = v_0 = 2\dfrac{м}{с}$.

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} 0 &= B_1 \sin\alpha_1 + B_2 \sin\alpha_2; \\ 0 &= \eta_1 B_1 \sin\alpha_1 + \eta_2 B_2 \sin\alpha_2; \\ 0 &= B_1 k_1 \cos\alpha_1 + B_2 k_2 \cos\alpha_2; \\ v_0 &= \eta_1 B_1 k_1 \cos\alpha_1 + \eta_2 B_2 k_2 \cos\alpha_2. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Решая систему уравнений (9), находим

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0;$$

$$B_1 = \frac{v_0}{k_1\left(\eta_1 - \eta_2\right)} = -0,253;$$

$$B_2 = -\frac{v_0}{k_2\left(\eta_1 - \eta_2\right)} = 0,08.$$

Таким образом, уравнения свободных колебаний автомобиля примут вид

$$y = 0,25\sin 16,43t - 0,007\sin 50,71t;$$

$$\varphi = -0,253\sin 16,43t + 0,08\sin 50,71t.$$

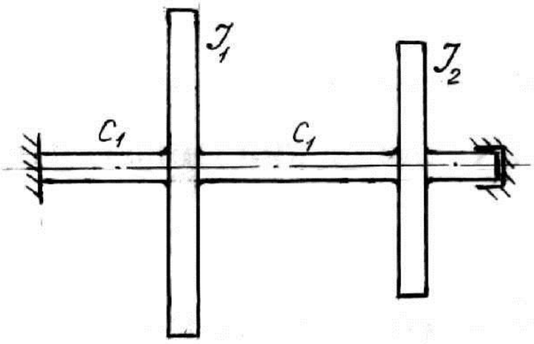


Рис. 5.3

Пример 2. Система, совершающая крутильные колебания, состоит из двух дисков (рис. 5.3), моменты инерции которых соответственно равны J_1 и J_2 . Определить собственные частоты и формы главных колебаний системы, считая, что диски насажены на вал, один конец которого жестко закреплен, а крутильные жесткости участков вала одинаковы, т.е. $c_1 = c_2 = c$. Массой вала, вследствие ее малости по сравнению с массами дисков, пренебречь.

Пусть $J_1 = 2J_2$, $J_2 = 30\,кг\,м^2$, $c = 2,0 \cdot 10^5\,Н\,м$.

Решение. Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат принимаем углы поворотов дисков φ_1 и φ_2. Уравнения Лагранжа для данный системы запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = -\frac{\partial П}{\partial \varphi_1}; \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = -\frac{\partial П}{\partial \varphi_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Кинетическая и потенциальная энергии системы соответственно равны:

$$\left.\begin{aligned} T = \frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2; \\ П = \frac{1}{2}\left[c_1\varphi_1^2 + c_2\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)^2\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Подставляя значения T и $П$ в уравнения Лагранжа (1), имеем

$$\left.\begin{aligned} J_1\ddot{\varphi}_1+(c_1+c_2)\varphi_1-c_2\varphi_2=0;\\ J_2\ddot{\varphi}_2+c_2\varphi_2-c_2\varphi_1=0.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Частные решения дифференциальных уравнений (3) будем искать в виде

$$\varphi_1=A\sin(kt+\alpha);\quad \varphi_2=B\sin(kt+\alpha).$$

Обозначим отношение обобщенных координат, равное отношению амплитуд колебаний

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1}=\frac{B}{A}=\eta,$$

откуда

$$\varphi_1=A\sin(kt+\alpha);\quad \varphi_2=\eta A\sin(kt+\alpha).$$

Подставляя значения φ_1 и φ_2 в уравнения (3), после несложных преобразований получаем

$$\left.\begin{aligned} 2c-J_1k^2-\eta c=0;\\ -c+\left(c-J_2k^2\right)\eta=0.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Исключая η из этих уравнений, имеем

$$2J_2^2k^4-4J_2ck^2+c^2=0. \tag{5}$$

Из уравнений частот (5), находим частоты главных колебаний

$$k_1=44c^{-1},\ \ k_2=107c^{-1}.$$

Вычисляем коэффициенты распределения:

$$\eta_1=\frac{2c-J_1k_1^2}{c}=\frac{4\cdot10^5-60\cdot1936}{2\cdot10^5}=1{,}42,$$

$$\eta_2=\frac{2c-J_1k_2^2}{c}=\frac{4\cdot10^5-60\cdot11449}{2\cdot10^5}=-1{,}43.$$

На рис. 5.4 изображены формы главных колебаний.

Ординаты точек этих графиков изображают в условном масштабе амплитуды крутильных колебаний соответствующих сечений вала. Во втором главном колебании график пересекает ось вала. Точка пересечения соответствует узловому сечению вала, которое в этом колебании все время остается неподвижным.

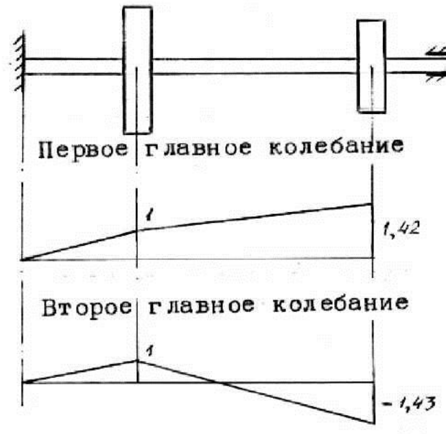


Рис. 5.4

Абсолютные значения амплитуд определяются из начальных условий задачи.

Пример 3. Две тележки массами m_1 и m_2 скреплены между собой и вертикальной стеной пружинами, коэффициенты жесткости которых c_1 и c_2 (рис. 5.5). Определить собственную частоту малых колебаний системы, если

$$m_1 = 20кг,\ m_2 = 5кг,\ c_1 = 40 \cdot 10^3 \frac{H}{м},\ c_2 = 20 \cdot 10^3 \frac{H}{м}.$$

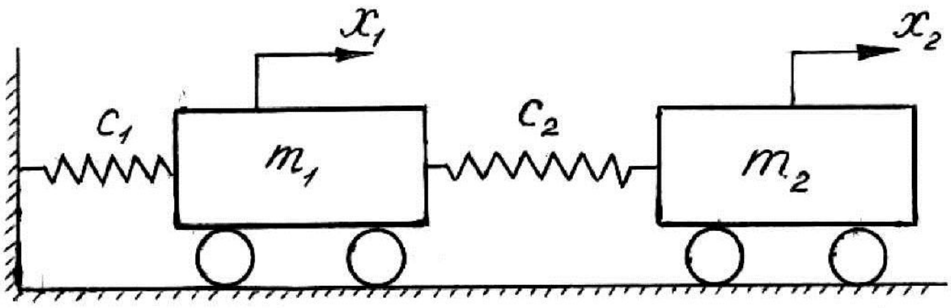


Рис 5.5

Решение. Примем за обобщенные координаты системы горизонтальные смещения x_1 и x_2 тележек из положения равновесия.

Кинетическую энергию системы определим по формуле

$$T = \frac{1}{2}\left(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 \right).$$

Имея в виду, что тележки перемещаются по горизонтали, потенциальную энергию системы определим как сумму потенциальных энергий деформированных пружин

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \frac{1}{2} c_2 \left(x_2 - x_1 \right)^2.$$

Подставляя значения T и Π в уравнения Лагранжа второго рода

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_1}=-\frac{\partial \Pi}{\partial x_1};\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_2}=-\frac{\partial \Pi}{\partial x_2},
\end{aligned}\right\}$$

находим

$$\begin{aligned}
&m_1\ddot{x}_1+\left(c_1+c_2\right)x_1-c_2x_2=0;\\
&m_2\ddot{x}_2+c_2x_2-c_2x_1=0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Решение системы ищем в виде

$$x_1=A\sin kt,\ x_2=B\sin kt. \tag{2}$$

Для определения неизвестных постоянных A и B подставляем значения x_1 и x_2 и их вторых производных в уравнения (1). После несложных преобразований будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
[(c_1+c_2)-m_1k^2]A-c_2B&=0;\\
-c_2A+\left(c_2-m_2k^2\right)B&=0.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Так как A и B не равны нулю, то определитель должен быть равен нулю

$$\begin{vmatrix} c_1+c_2-m_1k^2 & -c_2\\ -c_2 & c_2-m_2k^2\end{vmatrix}=0,$$

или

$$\left(c_1+c_2-m_1k^2\right)\left(c_2-m_2k^2\right)-c_2^2=0.$$

Отсюда

$$k^4-\frac{\left(c_1+c_2\right)m_1+c_2m_1}{m_1m_2}k^2+\frac{c_1c_2}{m_1m_2}=0.$$

Формула для вычисления частот главных колебаний системы имеет следующий вид

$$k_{1,2}=\sqrt{\frac{(c_1+c_2)m_2+c_2m_1}{2m_1m_2}\pm\sqrt{\left(\frac{(c_1+c_2)m_2+c_2m_1}{2m_1m_2}\right)^2-\frac{c_1c_2}{m_1m_2}}}.$$

Подставляя сюда заданные числовые значения всех величин, получаем

$$k_1=\sqrt{\frac{(c_1+c_2)m_2+c_2m_1}{2m_1m_2}-\sqrt{\left(\frac{(c_1+c_2)m_2+c_2m_1}{2m_1m_2}\right)^2-\frac{c_1c_2}{m_1m_2}}}=37{,}9c^{-1},$$

откуда

$$k_2=\sqrt{\frac{(c_1+c_2)m_2+c_2m_1}{2m_1m_2}+\sqrt{\left(\frac{(c_1+c_2)m_2+c_2m_1}{2m_1m_2}\right)^2-\frac{c_1c_2}{m_1m_2}}}=74{,}5c^{-1}.$$

<u>Пример 4</u>. Два груза M_1 и M_2 с массами m_1 и m_2 образуют систему, показанную на рис. 5.6. Определить частоты вертикальных колебаний системы и уравнения движения грузов, если из положения равновесия грузу M_2 была сообщена начальная скорость v_0, направленная вниз.

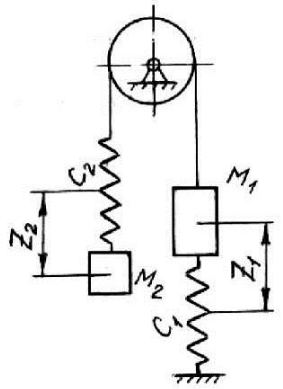


Рис. 5.6

Дано: m_1 = 200*кг*, m_2 =10*кг*, $c_1=8\cdot10^4$ Н/м, $c_2=4\cdot10^4$ Н/м, $v_0=1\,м/с$.

<u>Решение.</u> Система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты примем абсолютные вертикальные перемещения z_1 и z_2 грузов из положения равновесия. Для вывода дифференциальных уравнений движения системы воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot z_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial z_1}=-\frac{\partial\Pi}{\partial z_1};\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot z_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial z_2}=-\frac{\partial\Pi}{\partial z_2}.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Кинетическая энергия системы равна:

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{z}_2^2. \qquad (2)$$

Потенциальная энергия системы равна:

$$\begin{aligned}\varPi &= m_1 g z_1 - m_2 g z_2 + \frac{1}{2}c_1\left(z_1+f_1\right)^2-\frac{1}{2}c_1 f_1^2+\\ &+\frac{1}{2}c_2\left(z_2-z_1+f_2\right)^2-\frac{1}{2}c_2 f_2^2 = m_1 g z_1 - m_2 g z_2 + \\ &+c_1 f_1 z_1+\frac{1}{2}c_1 z_1^2+\frac{1}{2}c_2\left(z_2-z_1\right)^2+c_2\left(z_2-z_1\right)f_2,\end{aligned} \qquad (3)$$

где f_1, f_2 – статические удлинения пружин.

В положении равновесия $\left(z_1=z_2=0\right)$ обобщенные силы равны нулю. Для консервативных сил условия равновесия имеют вид:

$$\left(\frac{\partial \varPi}{\partial z_1}\right)_0=0;\left(\frac{\partial \varPi}{\partial z_2}\right)_0=0. \qquad (4)$$

Согласно (4) будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial \varPi}{\partial z_1}\right)_0 &= m_1 g + c_1 f_1 - c_2 f_2 = 0;\\ \left(\frac{\partial \varPi}{\partial z_2}\right)_0 &= -m_2 g + c_2 f_2 = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

С учетом равенств (5) выражение потенциальной энергии (3) примет вид

$$\varPi=\frac{1}{2}c_1 z_1^2+\frac{1}{2}c_2\left(z_2-z_1\right)^2.$$

Подставляя значения T и $\varPi$ в уравнения Лагранжа (1), будем иметь

$$\left.\begin{aligned}m_1\ddot{z}_1+\left(c_1+c_2\right)z_1-c_2 z_2=0;\\ m_2\ddot{z}_2+c_2 z_2-c_2 z_1=0.\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Частные решения диффереинциальных уравнений (7) будем искать в виде

$$z_1=A\sin\left(kt+\alpha\right),\; z_2=B\sin\left(kt+\alpha\right). \qquad (8)$$

Обозначим отношение обобщенных координат, равное отношению амплитуд колебаний

$$\mu = \frac{z_2}{z_1} = \frac{B}{A} \tag{9}$$

откуда

$$z_1 = A\sin(kt+\alpha),\ z_2 = \mu A\sin(kt+\alpha).$$

Подставляя значения z_1 и z_2 в уравнения (7), после некоторых простых преобразований, получаем

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 - m_1k^2 - \mu c_2 = 0; \\ -c_2 + \mu\left(c_2 - m_2k^2\right) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Исключая μ из уравнений (10), имеем

$$\left(c_1 + c_2 - m_1k^2\right)\left(c_2 - m_2k^2\right) - c_2^2 = 0. \tag{11}$$

Отсюда найдем частоты главных колебаний

$$k_1 = \sqrt{\frac{\left(c_2m_1 + c_1m_2 + c_2m_2\right) - \sqrt{\left(c_2m_1 + c_1m_2 + c_2m_2\right)^2 - 4c_1c_2m_1m_2}}{2m_1m_2}};$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{\left(c_2m_1 + c_1m_2 + c_2m_2\right) + \sqrt{\left(c_2m_1 + c_1m_2 + c_2m_2\right)^2 - 4c_1c_2m_1m_2}}{2m_1m_2}}.$$

Подставляя сюда заданные числовые значения всех величин, получаем

$$k_1 = 44{,}72c^{-1};\quad k_2 = 89{,}44c^{-1}.$$

Определив частоты главных колебаний системы, вычислим коэффициенты распределения

$$\mu_1 = \frac{c_2}{c_2 - m_2k_1^2} = 2,$$

$$\mu_2 = \frac{c_2}{c_2 - m_2k_2^2} = -1.$$

Тогда из условия (9) находим

$$\mu_1 = \frac{B_1}{A_1}, \qquad \mu_2 = \frac{B_2}{A_2}.$$

или

$$B_1 = \mu_1 A_1, \qquad B_2 = \mu_2 A_2.$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений (3) получаем путем суммирования частных решений (8)

$$z_1 = z_1^{(1)} + z_1^{(2)} = A_1 \sin\left(k_1 t + \alpha_1\right) + A_2 \sin\left(k_2 t + \alpha_2\right);$$

$$z_2 = z_2^{(1)} + z_2^{(2)} = \mu_1 A_1 \sin\left(k_1 t + \alpha_1\right) + \mu_2 A_2 \sin\left(k_2 t + \alpha_2\right).$$

При $t = 0$, $z_1 = z_2 = 0$, $\dot{z}_1 = 0$, $\dot{z}_2 = v_0 = 1$.

Следовательно,

$$0 = A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2;$$

$$0 = \mu_1 A_1 \sin\alpha_1 + \mu_2 A_2 \sin\alpha_2;$$

$$0 = A_1 k_1 \cos\alpha_1 + A_2 k_2 \cos\alpha_2;$$

$$v_0 = \mu_1 A_1 k_1 \cos\alpha_1 + \mu_2 A_2 k_2 \cos\alpha_2.$$

Отсюда

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,$$

$$A_1 = \frac{v_0}{k_1\left(\mu_1 - \mu_2\right)} = 0,0075 м,$$

$$A_2 = -\frac{v_0}{k_2\left(\mu_1 - \mu_2\right)} = -0,0037 м.$$

Таким образом, уравнения движения грузов примут вид

$$z_1 = 0,0075 \sin 44,72t - 0,0037 \sin 89,44t;$$

$$z_2 = 0,015 \sin 44,72t + 0,0037 \sin 89,44t.$$

Глава VI. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

6.1. Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний системы и их общее решение

Рассмотрим случай, когда на точки системы с двумя степенями свободы, кроме сил консервативных (восстанавливающих) сил $\overline{F}_k$, действуют возмущающие силы $\overline{P}_K$, являющиеся заданными функциями времени t.

Для вывода дифференциальных уравнений движения системы воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода. Приняв за обобщенные координаты q_1 и q_2, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_1} = Q_{1F} + Q_{1p}, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_2} = Q_{2F} + Q_{2p}. \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

Будем полагать, что обобщенные возмущающие силы Q_{1P} и Q_{2P} являются простыми гармоническими функциями времени, то есть

$$Q_{1p} = H_1 \sin(pt + \delta), \quad Q_{2p} = H_2 \sin(pt + \delta). \tag{6.2}$$

Кинетическая и потенциальная энергии системы с двумя степенями свободы равны соответственно:

$$\left.\begin{aligned} T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2); \\ \Pi = \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2). \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

Обобщенные консервативные (восстанавливающие) силы Q_{1F} и Q_{2F} соответственно равны:

$$Q_{1F} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}; \quad Q_{2F} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}. \tag{6.4}$$

Подставляя все найденные величины в уравнения (6.1), получим дифференциальные уравнения движения системы

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = H_1\sin(pt+\delta),\\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = H_2\sin(pt+\delta). \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

Общее решение системы неоднородных дифференциальных уравнений (6.5), как известно, является суммой общего решения системы однородных уравнений (5.3) и частного решения данной системы уравнений, то есть

$$q_1 = q_1^* + q_1^{**},\ q_2 = q_2^* + q_2^{**}. \tag{6.6}$$

Общее решение системы однородных дифференциальных уравнений (5.3), как известно, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} q_1^* &= A_1^{(1)}\sin(k_1t+\alpha_1) + A_1^{(2)}\sin(k_2t+\alpha_2),\\ q_2^* &= \eta_1 A_1^{(1)}\sin(k_1t+\alpha_1) + \eta_2 A_1^{(2)}\sin(k_2t+\alpha_2). \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

Частное решение системы дифференциальных уравнений (6.5) будем искать в виде:

$$q_1^{**} = A_{1b}\sin(pt+\delta),\quad q_2^{**} = A_{2b}\sin(pt+\delta). \tag{6.8}$$

Для определения неизвестных постоянных A_{1b} и A_{2b} подставим q_1^{**} и q_2^{**} и их вторых производных в уравнения (6.5). В результате после несложных преобразований будем иметь

$$\left.\begin{aligned} (c_{11}-a_{11}p^2)A_{1b} + (c_{12}-a_{12}p^2)A_{2b} = H_1,\\ (c_{12}-a_{12}p^2)A_{1b} + (c_{22}-a_{22}p^2)A_{2b} = H_2. \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

Решая эту систему, находим

$$\left.\begin{aligned} A_{1b} &= \frac{H_1(c_{22}-a_{22}p^2) - H_2(c_{12}-a_{12}p^2)}{(c_{11}-a_{11}p^2)(c_{22}-a_{22}p^2) - (c_{12}-a_{12}p^2)^2},\\ A_{2b} &= \frac{H_2(c_{11}-a_{11}p^2) - H_1(c_{12}-a_{12}p^2)}{(c_{11}-a_{11}p^2)(c_{22}-a_{22}p^2) - (c_{12}-a_{12}p^2)^2}, \end{aligned}\right\} \tag{6.10}$$

где A_{1b} и A_{2b} – амплитуды вынужденных колебаний системы.

Уравнения (6.8) определяют вынужденные колебания системы. Из этих уравнений следует:

1. Частота и фаза вынужденных колебаний совпадают с частотой и фазой возмущающих сил.

2. Амплитуды вынужденных колебаний системы не зависят от начальных условий, зависят лишь от параметров самой системы и действующих на неё сил.

Общий интеграл системы неоднородных уравнений (6.5), согласно (6.6), будет равен

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1^{(1)}\sin(k_1 t+\alpha_1)+A_1^{(2)}\sin(k_2 t+\alpha_2)+A_{ib}\sin(pt+\delta),\\ q_2 &= \eta_1 A_1^{(1)}\sin(k_1 t+\alpha_1)+\eta_2 A_1^{(2)}\sin(k_2 t+\alpha_2)+A_{2b}\sin(pt+\delta). \end{aligned} \qquad (6.11)$$

Частоты главных колебаний k_1 и k_2 определяем из уравнений (5.8), а коэффициенты η_1 и η_2 – из формул (5.13).

6.2. Динамический гаситель колебаний

Рассмотрим случай, когда одна из обобщенных сил равна нулю, например Q_{2p}.

Будем полагать, что

$$Q_{1p} = H_1\sin(pt+\delta),\ Q_{2p} = 0,$$

следовательно $H_2 = 0$.

Тогда амплитуды вынужденных колебаний системы (6.10) будут равны

$$\left.\begin{aligned} A_{1b} &= \frac{H_1(c_{22}-a_{22}p^2)}{(c_{11}-a_{11}p^2)(c_{22}-a_{22}p^2)-(c_{12}-a_{12}p^2)^2},\\ A_{2b} &= \frac{-H_1(c_{12}-a_{12}p^2)}{(c_{11}-a_{11}p^2)(c_{22}-a_{22}p^2)-(c_{12}-a_{12}p^2)^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.12)$$

Условие

$$(c_{11}-a_{11}p^2)(c_{22}-a_{22}p^2)-(c_{12}-a_{12}p)^2 = 0 \qquad (6.13)$$

определяет два резонансных значения частоты возмущающей силы. Они равны собственным частотам k_1 и k_2 рассматриваемой системы.

Условие

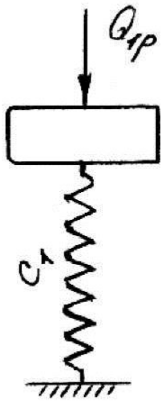
$$c_{22}-a_{22}p^2 = 0 \qquad (6.14)$$

определяет частоту антирезонанса. При этой частоте колебания, соответствующей первой координате, полностью отсутствуют, а наибольшее значение второй координаты согласно (6.12) равно

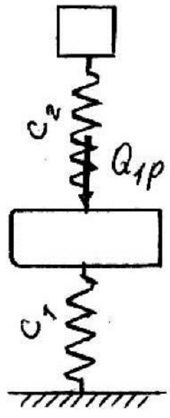
$$A_{1\text{в}} = 0, \quad A_{2\text{в}} = \frac{H_1}{c_{12} - a_{12} p^2}. \tag{6.15}$$

На этом принципе основана теория динамических гасителей колебаний. Ею пользуются в некоторых областях техники. Рассмотрим следующий пример. Допустим, груз массой m_1, опирающийся на пружину жесткости c_1, находится под действием возмущающей силы (рис 6.1), изменяющейся по закону

$$Q_{1p} = H_1 \sin(pt + \delta).$$



а)



б)

Рис. 6.1

Для этой системы (рис. 6.1, а) с одной степенью свободы имеем

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2; \quad \Pi = \frac{1}{2} c_1 z_1^2.$$

После подстановки значений T, Π и Q_{1p} в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial z_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_1} + Q_{1p}$$

получим дифференциальное уравнение движения системы

$$m_1 \ddot{z}_1 + c_1 z_1 = H_1 \sin(pt + \delta). \tag{6.16}$$

Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы, согласно (4.7), определяются уравнением

$$z_1 = \frac{h_1}{(k^2 - p^2)} \sin(pt + \delta). \tag{6.17}$$

Усложним систему путем добавления дополнительной массы на упругой связи, превратив ее в систему (рис. 6.1,б) с двумя степенями свободы. В этой системе первой обобщенной координатой является прежняя координата z_1.

Для новой системы с двумя степенями свободы (рис. 6.1,б) кинетическая и потенциальная энергии будут равны:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 \dot{z}_1^2 + m_2 \dot{z}_2^2),$$

$$\Pi = \frac{1}{2}[(c_1 + c_2) z_1^2 - 2c_2 z_1 z_2 + c_2 z_2^2].$$

Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний в этом случае имеют вид

$$\left.\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + (c_1 + c_2) z_1 - c_2 z_2 &= H_1 \sin(pt + \delta), \\ m_2 \ddot{z}_2 + c_2 z_2 - c_2 z_1 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.18}$$

Здесь

$$\begin{gathered} a_{11} = m_1, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = m_2, \\ c_{11} = c_1 + c_2, \quad c_{12} = -c_2, \quad c_{22} = c_2. \end{gathered} \tag{6.19}$$

При

$$\begin{gathered} p^2 = \frac{c_{22}}{a_{22}} = \frac{c_2}{m_2}, \\ z_1 = 0, \quad z_2 = -\frac{H_1}{c_2} \sin(pt + \delta). \end{gathered} \tag{6.20}$$

Как следует из (6.20), вынужденные колебания первого груза полностью погашаются.

Таким образом, путем введения в систему дополнительной массы на упругой связи и подчинения дополнительной части условию (6.14) можно добиться устранения колебаний основной части системы. В этом случае дополнительная часть системы называется динамическим гасителем колебаний. Однако следует иметь в виду, что динамический гаситель эффективен лишь при постоянстве частоты возмущающей силы. В противном случае он может быть даже вредным. Обычно для избежания этого недостатка в систему динамического гасителя включают амортизатор, который делает гаситель полезным в достаточно широком диапазоне частот возмущающей силы.

6.3. Примеры на вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы

Пример 1. Автомобиль движется по дороге, имеющей периодические неровности (рис. 6.2), со скоростью v. Учитывая, что профиль дороги описывается уравнением $h = h_0(1 - \cos\frac{2\pi x}{\ell_0})$, определить амплитуды вынужденных колебаний.

Расчет произвести при следующих параметрах системы: масса автомобиля $m = 1500\,кг$, центральный момент инерции относительно поперечной оси $J = 300\,кгм^2$, жесткость рессор: $c_1 = 1{,}5 \cdot 10^5\ Н/м$, $c_2 = 2 \cdot 10^5\ Н/м$, шаг неровностей профиля дороги $\ell_0 = 5\,м$, высота неровностей $h_0 = 0{,}1\,м$, скорость движения автомобиля $v = 50\,км/ч$.

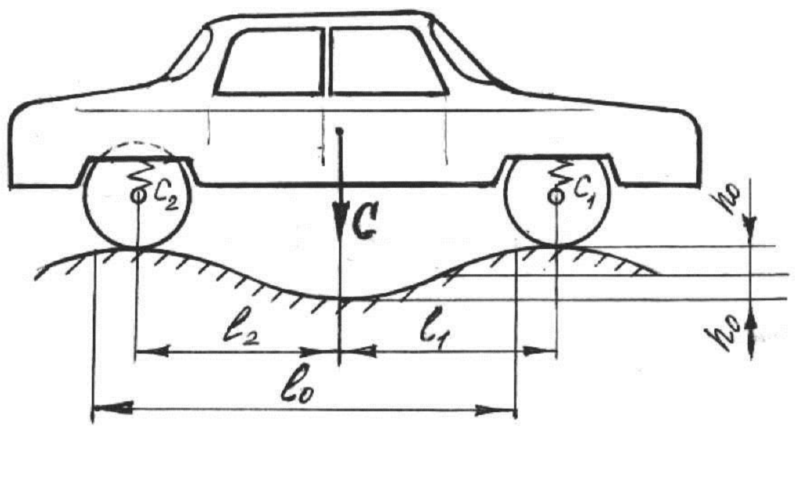


Рис. 6.2

Решение. За обобщенные координаты выбираем вертикальное перемещение центра тяжести автомобиля y и его угловое перемещение φ (см. пример 1 главы 5).

Кинетическая и потенциальная энергии системы соответственно равны:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v^2,$$

$$П = \frac{c_1}{2}(y + \varphi\ell_1 - h_1)^2 + \frac{c_2}{2}(y - \varphi\ell_2 - h_2)^2,$$

где h_1 и h_2 – подъем соответственно переднего и заднего колес при движении автомобиля.

Имея в виду, что положение автомобиля на дороге определяется координатой $x = v \cdot t$, а расстояние между осями автомобиля $L = \ell_1 + \ell_2$, получаем

$$h_1 = h_0(1 - \cos\frac{2\pi v t}{\ell_0}),$$

$$h_2 = h_0(1 - \cos\frac{2\pi(vt + L)}{\ell_0}).$$

Подставляя значения T и $П$ в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial П}{\partial y},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial П}{\partial \varphi},$$

получаем дифференциальные уравнения движения системы

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{y} + (c_1 + c_2)y + (c_1\ell_1 - c_2\ell_2)\varphi = c_1 h_1 + c_2 h_2, \\ J\ddot{\varphi} + (c_1\ell_1^2 + c_2\ell_2^2)\varphi + (c_1\ell_1 - c_2\ell_2)y = c_1\ell_1 h_1 - c_2\ell_2 h_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Подставляя значения h_1 и h_2 в уравнения (1), имеем

$$
\begin{aligned}
&\ddot{y}+a_1 y+a_2\varphi=b_1+b_2\cos\frac{2\pi vt}{\ell_0}+b_3\sin\frac{2\pi vt}{\ell_0},\\
&\ddot{\varphi}+\alpha_1\varphi+\alpha_2 y=\beta_1+\beta_2\cos\frac{2\pi vt}{\ell_0}+\beta_3\sin\frac{2\pi vt}{\ell_0},
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где

$$a_1=\frac{c_1+c_2}{m},\qquad a_2=\frac{c_1\ell-c_2\ell}{m},$$

$$\alpha_1=\frac{c_1\ell_1^2+c_2\ell_2^2}{J},\quad \alpha_2=\frac{c_1\ell_1-c_2\ell_2}{J},$$

$$b_1=\frac{(c_1+c_2)h_0}{m},\ \ b_2=-(c_1+c_2\cos\frac{2\pi L}{\ell_0})\frac{h_0}{m},$$

$$b_3=\frac{c_2h_0}{m}\sin\frac{2\pi L}{\ell_0},\ \ \beta_1=\frac{h_0}{J}(c_1\ell_1-c_2\ell_2),$$

$$\beta_2=-\frac{h_0}{J}(c_1\ell_1-c_2\ell_2\cos\frac{2\pi L}{\ell_0}),\ \ \beta_3=-\frac{h_0}{J}c_2\ell_2\sin\frac{2\pi L}{\ell_0}.$$

Общий интеграл системы неоднородных дифференциальных уравнений (2), как известно, является суммой общего интеграла соответствующий системы однородных уравнений (5.3) и частного интеграла данной системы уравнений.

Общее решение системы однородных дифференциальных уравнений, характеризуюшее свободные колебания системы, по аналогии с примером 1 главы 5 равно

$$
\begin{aligned}
&\varphi^*=B_1\sin(k_1t+\alpha_1)+B_2\sin(k_2t+\alpha_2),\\
&y^*=\eta_1B_1\sin(k_1t+\alpha_1)+\eta_2B_2\sin(k_2t+\alpha_2).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Частное решение системы уравнений (2), определяющее вынужденные колебания системы, ищем в виде

$$
\left.
\begin{aligned}
&\varphi^{**}=\varphi_0+A_1\cos\frac{2\pi vt}{\ell_0}+D_1\sin\frac{2\pi vt}{\ell_0},\\
&y^{**}=y_0+A\cos\frac{2\pi vt}{\ell_0}+D\sin\frac{2\pi vt}{\ell_0}.
\end{aligned}
\right\}
\tag{4}
$$

Подставляя значения y^{**} и φ^{**} в уравнения (2), находим неизвестные постоянные y_0, φ_0, A, A_1, D, D_1

$$\left.\begin{aligned} &y_0 = \frac{b_1\alpha_1 - a_2\beta_1}{a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2}, \quad \varphi_0 = \frac{a_1\beta_1 - b_1\alpha_2}{a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2}, \\ &A = \frac{b_2(\alpha_1 - \omega^2) - a_2\beta_2}{(a_1 - \omega^2)(\alpha_1 - \omega^2) - a_2\alpha_2}, \quad A_1 = \frac{(\alpha_1 - \omega^2)\beta_2 - b_2\alpha_2}{(a_1 - \omega^2)(\alpha_1 - \omega^2) - a_2\alpha_2}, \\ &D = \frac{b_3(\alpha_1 - \omega^2) - a_2\beta_3}{(a_1 - \omega^2)(\alpha_1 - \omega^2) - a_2\alpha_2}, \quad D_1 = \frac{(\alpha_1 - \omega^2)\beta_3 - b_3\alpha_2}{(a_1 - \omega^2)(\alpha_1 - \omega^2) - a_2\alpha_2}, \\ &\omega = \frac{2\pi v}{\ell_0}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Теперь выражения (4) перепишем в виде

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{**} &= \varphi_0 + H_1 \sin(\omega t + \gamma), \\ y^{**} &= y_0 + H \sin(\omega t + \gamma), \end{aligned}\right\} \quad 6)$$

где

$$H = \sqrt{A^2 + D^2}\,, \quad H_1 = \sqrt{A_1^2 + D_1^2}\,, \quad \gamma = arctg\frac{A}{D}.$$

При установившемся движении практическое значение имеют лишь вынужденные колебания, определяемые уравнениями

$$y = H\sin(\omega t + \gamma), \quad \varphi = H_1 \sin(\omega t + \gamma), \qquad 7)$$

где H и H_1 – амплитуды вынужденных колебаний системы.

При заданных значениях параметров автомобиля и дороги имеем

$$H = 0{,}06\,м, \quad \varphi = 0{,}07\,рад.$$

<u>Пример 2</u>. Механическая система (рис. 6.3) находится под действием горизонтальной возмущающей силы

$$p = p_0 \sin \omega t,$$

приложенной к центру тяжести колеса 1. Пренебрегая силами трения, исследовать вынужденные колебания системы при следующих параметрах системы: $m_1 = 6\,кг$, $m_2 = 2\,кг$, $R = 0{,}15\,м$; $c_1 = 4\cdot 10^3\ Н/м$, $c_2 = 1\cdot 10^3\ Н/м$, $P_0 = 10\,Н$.

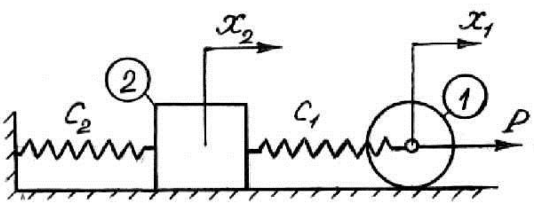


Рис. 6.3

Решение. Система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты примем горизонтальные отклонения x_1 и x_2 центров тяжести тел. Кинетическая и потенциальная энергии системы соответственно равны

$$T = \frac{3}{4} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 ,$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} c_2 x_2^2 .$$

Подставляя значения T и Π в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} - Q_{\text{в}1} ;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} - Q_{\text{в}2} ,$$

получаем дифференциальные уравнения движения системы

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \ddot{x}_1 + c_{11} x_1 + c_{12} x_2 = P_0 \sin \omega t ; \\ a_{22} \ddot{x}_2 + c_{21} x_1 + c_{22} x_2 = 0, \end{aligned} \right\} \qquad (1)$$

где

$$a_{11} = \frac{3}{2} m ,\ a_{22} = m_2 ,\ c_{11} = c_1 ,\ c_{12} = -c_1 ,\ c_{21} = -c_1 ,\ c_{22} = c_1 + c_2 .$$

Частное решение системы дифференциальных уравнений (1) ищем в виде

$$x_1 = A \sin pt , \quad x_2 = B \sin pt .$$

Подставляя эти выражения в дифференциальные уравнения (1), получаем

$$\left. \begin{aligned} (c_{11} - a_{11}\omega^2) A + c_{12} B = P_0 , \\ c_{21} A + (c_{22} - a_{22}\omega^2) B = 0. \end{aligned} \right\} \qquad (2)$$

Из этой системы алгебраических уравнений находим

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{P_0(c_{22}-a_{22}\omega^2)}{(c_{11}-a_{11}\omega^2)(c_{22}-a_{22}\omega^2)-c_{12}^2}; \\ B &= -\frac{P_0 c_{12}}{(c_{11}-a_{11}\omega^2)(c_{22}-a_{22}\omega^2)-c_{12}^2}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Так как знаменатель в формулах (3) является квадратным многочленом относительно ω^2, а корнями этого многочлена являются квадраты частот свободных колебаний системы k_1^2 и k_2^2, то выражения (3) можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{P_0(c_{22}-a_{22}\omega^2)}{a_{11}a_{22}(\omega^2-k_1^2)(\omega^2-k_2^2)}, \\ B &= -\frac{P_0 c_{12}}{a_{11}a_{22}(\omega^2-k_1^2)(\omega^2-k_2^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Подставляя заданные значения параметров в уравнения частот

$$(c_{11}-a_{11}k^2)(c_{22}-a_{22}k^2)-c_{12}^2=0,$$

определяем значения частот свободных колебаний системы

$$k_1 = 20,45\ c^{-1}, \quad k_2 = 50,26\ c^{-1}.$$

Формулы (4) позволяют проследить за зависимостью A и B от частоты ω и построить соответствующие графики (рис.6.4).

Рассмотрим поведение амплитуд A и B вынужденных колебаний для трех интервалов изменения частоты возмущающей силы:

$$0 \le \omega < k_1, \quad k_1 < \omega < k_2, \quad k_2 < \omega < \infty.$$

Как видно из рис. 6.4 в интервале $0 \le \omega < k_1$, амплитуды A и B положительны и с ростом величины ω возрастают, при этом колебания колеса и груза происходят в одной фазе с возмущающей силой.

При $\omega = k_1 = 20,45\,c^{-1}$ в системе наступает первый резонанс и функции A и B претерпевают бесконечный разрыв.

В интервале $k_1 < \omega < k_2$ величины A и B отрицательны, с ростом ω функция A убывает, а B убывает до значения $1,3\cdot 10^{-3}\ м$ при $\omega = 39c^{-1}$, затем – возрастают. Колебания системы на этом интервале происходят в противофазе с возмущающей силой.

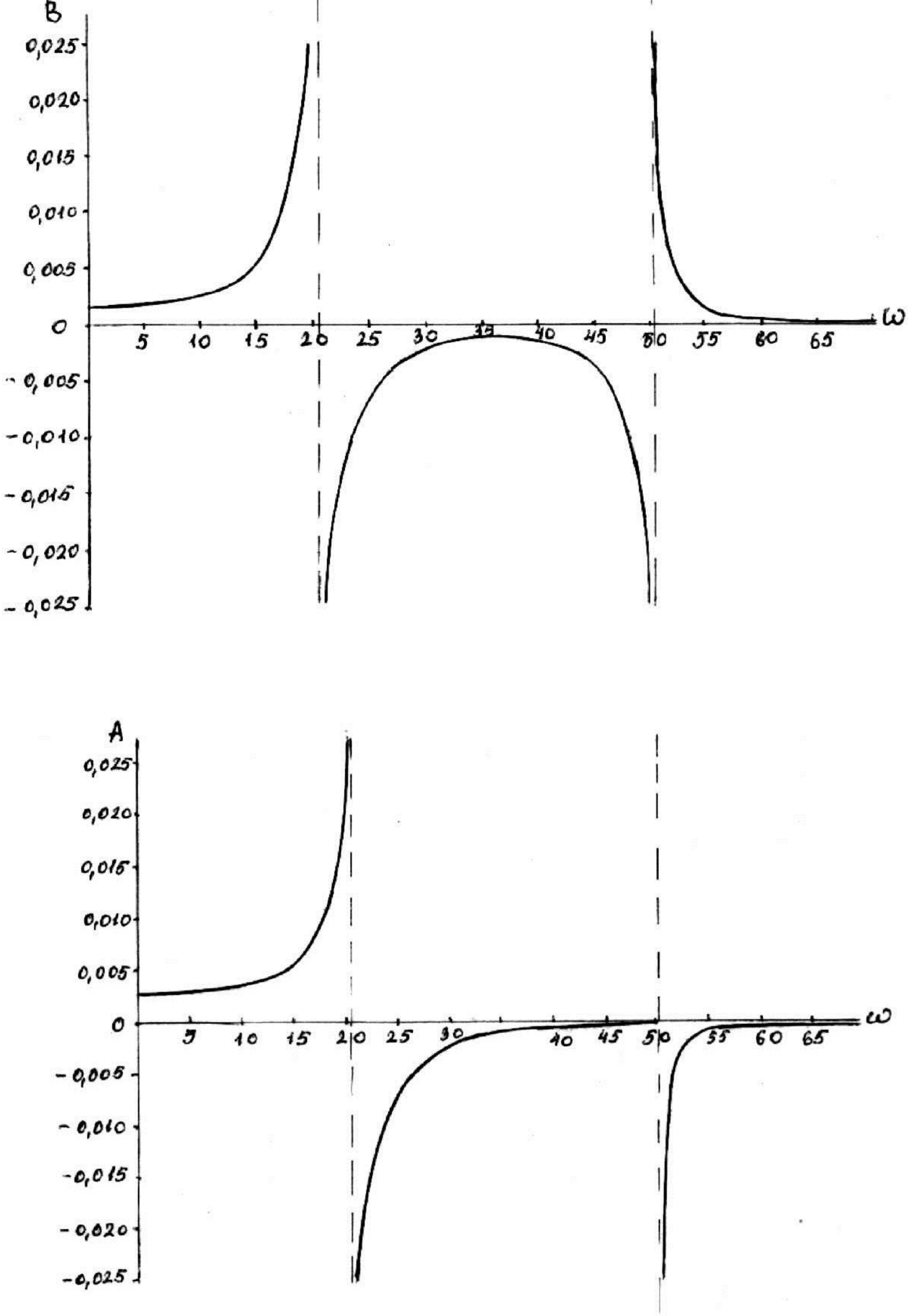

B
0,025
0,020
0,015
0,010
0,005
0
-0,005
-0,010
-0,015
-0,020
-0,025
5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65
ω
A
0,025
0,020
0,015
0,010
0,005
0
-0,005
-0,010
-0,015
-0,020
-0,025
5 10 15 20 25 30 40 45 50 55 60 65
ω

Рис. 6.4

При $\omega = \sqrt{\dfrac{c_{22}}{a_{22}}} = 50\, c^{-1}$ амплитуда вынужденных колебаний колеса равна нулю. В этом случае груз массой m_2 может рассматриваться как динамический гаситель колебаний.

При $\omega = k_2 = 50,26\, c^{-1}$ в системе наступает второй резонанс.

В интервале $k_2 < \omega < \infty$ амплитуды A и B незначительны и с возрастанием ω стремятся к нулю. Функция A в этом случае отрицательна, а B – положительна, следовательно, колебания колеса происходят в противофазе, а колебания груза – синхронно с возмущающей силой.

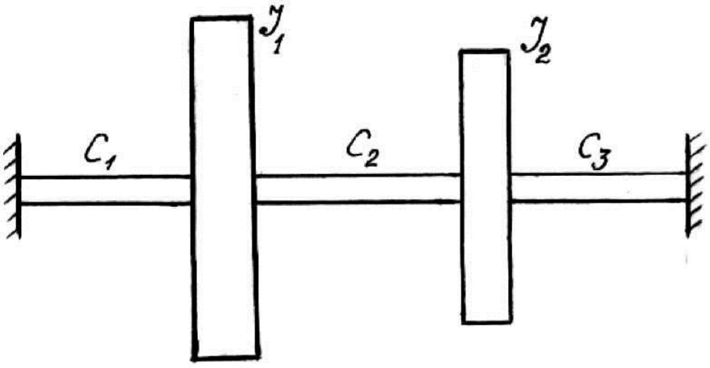


Рис. 6.5

Пример 3. На валу, жестко закрепленном на концах, насажены два диска (рис. 6.5). Первый диск имеет момент инерции относительно оси вала $J_1 = 60\, кгм^2$, и на него действует возмущающий момент $M = 200\, H \cdot м$. Определить момент инерции второго диска J_2, при котором он будет выступать гасителем вынужденных колебаний первого диска. Коэффициенты жесткости на кручение участков вала соответственно равны: $c_1 = 1,2 \cdot 10^6\, H \cdot м$, $c_2 = 7,0 \cdot 10^5\, H \cdot м$, $c_3 = 2,0 \cdot 10^5\, H \cdot м$. Массой вала можно пренебречь.

Система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты примем углы поворотов дисков φ_1 и φ_2.

Кинетическая и потенциальная энергии системы равны соответственно:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2; \\ \Pi &= \frac{1}{2} c_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} c_2 \left(\varphi_2 - \varphi_1\right)^2 + \frac{1}{2} c_3 \varphi_2^2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Подставляя значения T и Π в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} + Q_{1в};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi_2}=-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_{2\,2}}+Q_{2в},$$

получаем дифференциальные уравнения движения системы

$$\begin{aligned} &a_{11}\ddot{\varphi}_1+c_{11}\varphi_1+c_{12}\varphi_2=H\sin 160\,t;\\ &a_{21}\ddot{\varphi}_2+c_{21}\varphi_1+c_{22}\varphi_{22}=0, \end{aligned} \qquad (2)$$

где

$$a_{11}=J_1;\ c_{11}=c_1+c_2;\ c_{12}=-c_1;$$

$$a_{22}=J_2;\ c_{22}=c_2+c_3;\ c_{21}=-c_1;$$

$$Q_{1в}=H\sin 160t;\ Q_{2в}=0\ H=300.$$

Решение системы дифференциальных уравнений (2) ищем в виде

$$\varphi_1=A\sin\omega t;\ \ \varphi_2=B\sin\omega t, \qquad (3)$$

где

$$\omega=160c^{-1}.$$

Подставляя значения φ_1 и φ_2 в уравнения (2), получаем

$$\left(c_{11}-a_{11}\omega^2\right)A+c_{12}B=H;c_{21}A+\left(c_{22}-a_{22}\omega^2\right)B=0. \qquad (4)$$

Из этой системы алгебраических уравнений находим

$$A=\frac{H\left(c_{22}-a_{22}\omega^2\right)}{\left(c_{11}-a_{11}\omega^2\right)\left(c_{22}-a_{22}\omega^2\right)-c_{12}^2};$$

$$B=-\frac{Hc_{21}}{\left(c_{11}-a_{11}\omega^2\right)\left(c_{22}-a_{22}\omega^2\right)-c_{12}^2}.$$

Момент инерции второго диска, являющегося гасителем колебаний первого диска, определяется из условия

$$A=0\text{, т.е. } \frac{c_{22}}{a_{22}}=\frac{c_2+c_3}{J_2}=\omega^2.$$

Откуда

$$J_2 = \frac{c_2 + c_3}{\omega^2} = 22,5\,кгм^2.$$

Амплитуду вынужденных колебаний этого диска определяем из условия

$$B = -\frac{H \cdot c_{21}}{-c_{12}^2} = -\frac{H}{c_{12}} = -4,3 \cdot 10^{-4}\,рад.$$

Частоты главных колебаний системы определяем из уравнения частот

$$k^4 - \frac{c_{11}a_{22} + c_{22}a_{11}}{c_{11}a_{22}}k^2 + \frac{c_{11}c_{22} + c_{12}{}^2}{c_{11}a_{22}} = 0.$$

Подставляя в это уравнение числовые значения коэффициентов, находим

$$k_1 = 128c^{-1}\ ;\ k_2 = 235c^{-1}.$$

Библиографический список

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т.2. М.: Наука, 1979.
2. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. М.: Высшая школа, 1975.
3. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1986.
4. Светлицкий В.А., Стасенко И.В. Сборник задач по теории колебаний. М.: Высшая школа, 1973.
5. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1971.