ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Конспект лекций

Введение

Теоретическая механика является одной из важнейших фундаментальных общенаучных дисциплин. Она играет существенную роль в подготовке инженеров любых специальностей. На результатах теоретической механики базируются общеинженерные дисциплины: сопротивление материалов, детали машин, теория механизмов и машин и другие.

Основной задачей теоретической механики является изучение движения материальных тел под действием сил. Важной частной задачей представляется изучение равновесия тел под действием сил.

Литература, рекомендуемая для изучения курса

1. Добронравов В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. М., Высшая школа, 1983.

2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики, ч.1 и 2. М., Высшая школа, 1971.

3. Петкевич В.В. Теоретическая механика. М., Наука, 1981.

4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Под ред. А.А.Яблонского. М., Высшая школа, 1985.

Лекция 1. Структура теоретической механики. Основы статики.

В теоретической механике изучается движение тел относительно других тел, представляющие собой физические системы отсчёта.

Механика позволяет не только описывать, но и предсказывать движение тел, устанавливая причинные связи в определённом, весьма широком, круге явлений.

Основные абстрактные модели реальных тел:

1. ***материальная точка*** – имеет массу, но не имеет размеров;

2. ***абсолютно твёрдое тело*** – объём конечных размеров, сплошь заполненный веществом, причём расстояния между любыми двумя точками среды, заполняющей объём, не изменяются во время движения;

3. ***сплошная деформируемая среда*** – заполняет конечный объём или неограниченное пространство; расстояния между точками такой среды могут меняться.

Из них – системы:
- система свободных материальных точек;
- системы со связями;
- абсолютно твёрдое тело с полостью, заполненной жидкостью, и т.п.

«Вырожденные» модели:
- бесконечно тонкие стержни;
- бесконечно тонкие пластины;
- невесомые стержни и нити, связывающие между собой материальные точки, и т.д.

Из опыта: механические явления протекают неодинаково в разных местах физической системы отсчёта. Это свойство – неоднородность пространства, определяемого физической системой отсчёта. Под неоднородностью здесь понимается зависимость характера протекания явления от места, в котором мы наблюдаем это явление.

Ещё свойство – анизотропность (неизотропность) движение тела относительно физической системы отсчёта может быть различным в зависимости от направления. Примеры: течение реки по меридиану (с севера на юг - Волга); полёт снаряда, маятник Фуко.

Свойства системы отсчёта (неоднородность и анизотропность) затрудняют наблюдение за движением тела.

Практически свободна от этого – геоцентрическая система: центр системы в центре Земли и системы не вращается относительно «неподвижных» звёзд). Геоцентрическая система удобна для расчётов движений на Земле.

Для *небесной механики* (для тел солнечной системы): гелиоцентрическая система отсчёта, которая движется с центром масс Солнечной системы и не вращается относительно «неподвижных» звёзд. Для этой системы *пока не обнаружены* неоднородность и анизотропность

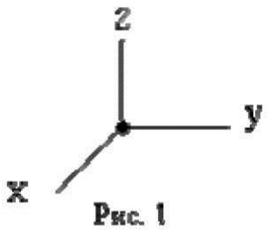


Рис. 1

пространства

по отношению к явлениям механики.

Итак, вводится абстрактная *инерциальная* система отсчёта, для которой пространство однородно и изотропно *по отношению к явлениям механики.*

Инерциальная система отсчёта – такая, собственное движение которой не может быть обнаружено никаким механическим опытом. Мысленный эксперимент: «точка, одинокая во всём мире» (изолированная) либо покоится, либо движется прямолинейно и равномерно.

Все системы отсчёта движущиеся относительно исходной прямолинейно, равномерно будут инерциальными. Это позволяет ввести единую декартовую систему координат. Такое пространство называется *евклидовым.*

Условное соглашение – берут правую систему координат (рис. 1).

Время – в классической (нерелятивистской) механике *абсолютно*, единое для всех систем отсчёта то есть начальный момент – произволен. В отличие релятивистской механики, где применяется принцип относительности.

Состояние движения системы в момент времени t определяется координатами и скоростями точек в этот момент.

Реальные тела взаимодействуют при этом возникают силы, которые меняют состояние движения системы. Это и есть суть теоретической механики.

Как изучается теоретическая механика?

1. Учение о равновесии совокупности тел некоторой системы отсчёта – раздел **статика.**

2. Раздел **кинематика**: часть механики, в которой изучаются зависимости между величинами, характеризующими состояние движения систем, но не рассматриваются причины, вызывающие изменение состояния движения.

После этого рассмотрим влияние сил [ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ].

3. Раздел **динамика**: часть механики, в которой рассматривается влияние сил на состояние движения систем материальных объектов.

Принципы построения основного курса – динамики:

1) в основе – система аксиом (на основе опыта, наблюдений);

2) далее – законы внутренней логики (относительная независимость теории).

Постоянно – безжалостный контроль практики. ***Признак точной науки*** – наличие внутренней логики (без неё - *набор не связанных рецептов)*!

Статикой называется та часть механики, где изучаются условия, которым должны удовлетворять силы, действующие на систему материальных точек, для того чтобы система находилась в равновесии, и условия эквивалентности систем сил.

Будут рассмотрены задачи о равновесии в элементарной статике с применением исключительно геометрических методов, основанных на свойствах векторов. Такой подход применяется в *геометрической статике* (в отличие от аналитической статики, которая здесь не рассматривается).

Положения различных материальных тел будем относить к системе координат, которую примем за неподвижную.

Идеальные модели материальных тел:

1) материальная точка – геометрическая точка с массой.

2) абсолютно твёрдое тело – совокупность материальных точек, расстояния между которыми не могут быть изменены никакими действиями.

Силами будем называть объективные причины, являющиеся результатом взаимодействия материальных объектов, способные вызвать движение тел из состояния покоя или изменить существующее движение последних.

Так как сила определяется вызываемым ею движением, то она также имеет относительный характер, зависящий от выбора системы отсчёта.

Вопрос о природе сил рассматривается *в физике*.

Система материальных точек находится в равновесии, если, будучи в покое, она не получает никакого движения от сил, на неё действующих.

Из повседневного опыта: силы имеют векторный характер, то есть величину, направление, линию действия, точку приложения. Условие равновесия сил, действующих на твёрдое тело, сводится к свойствам систем векторов.

Обобщая опыт изучения физических законов природы, Галилей и Ньютон сформулировали основные законы механики, которые могут рассматриваться как аксиомы механики, так как имеют *в своей основе экспериментальные факты.*

Аксиома 1. Действие на точку твёрдого тела нескольких сил равносильно действию одной *равнодействующей силы,* строящейся по правилу сложения векторов (рис.2).

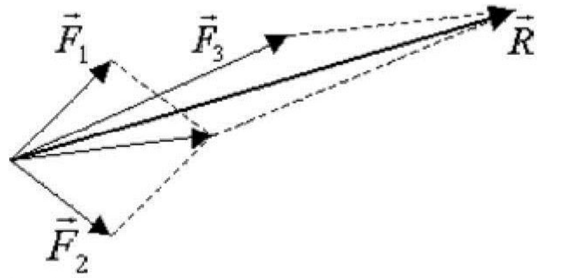


Рис.2.

Следствие. Силы, приложенные к точке твёрдого тела, складываются по правилу параллелограмма.

Аксиома 2. Две силы, приложенные к твёрдому телу, *взаимно уравновешиваются* тогда и только тогда, когда они равны по величине, направлены в противоположные стороны и лежат на одной прямой.

Аксиома 3. Действие на твёрдое тело системы сил не изменится, если *добавить к этой системе или отбросить от неё* две силы, равные по величине, направленные в противоположные стороны и лежащие на одной прямой.

Следствие. Силу, действующую на точку твёрдого тела, можно переносить вдоль линии действия силы без изменения равновесия (то есть, сила является скользящим вектором, рис.3)

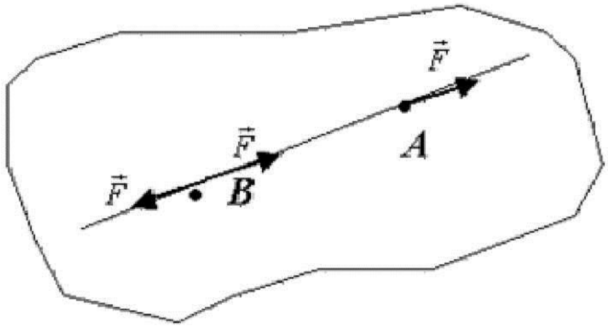


Рис.3.

Две категории сил.

1) Активные – создают или способны создать движение твёрдого тела. Например, сила веса.

2) Пассивные – не создающие движения, но ограничивающие перемещения твёрдого тела, препятствующие перемещениям. Например, сила натяжения нерастяжимой нити (рис.4).

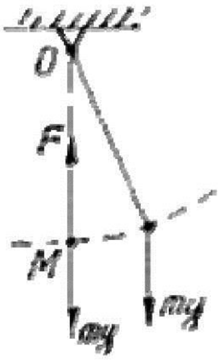


Рис.4.

Аксиома 4. Действие одного тела на второе равно и противоположно действию этого второго тела на первое (*действие равно противодействию*).

Геометрические условия, ограничивающие перемещение точек, будем называть *связями.*

Условия связи: например,

$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ - стержень непрямой длины l.

$x^2 + y^2 + z^2 \leq l^2$ - гибкая нерастяжимая нить длиной l.

Силы, обусловленные связями и препятствующие перемещениям, называются *силами реакций.*

Аксиома 5. Связи, наложенные на систему материальных точек, можно заменить силами реакций, действие которых эквивалентно действию связей.

Когда пассивные силы не могут уравновесить действие активных сил, начинается движение.

Две частные задачи статики

1. Система сходящихся сил, действующих на твёрдое тело

Системой сходящихся сил называется такая система сил, линии действия которой пересекаются в одной точке, которую всегда можно принять за начало координат (рис.5).

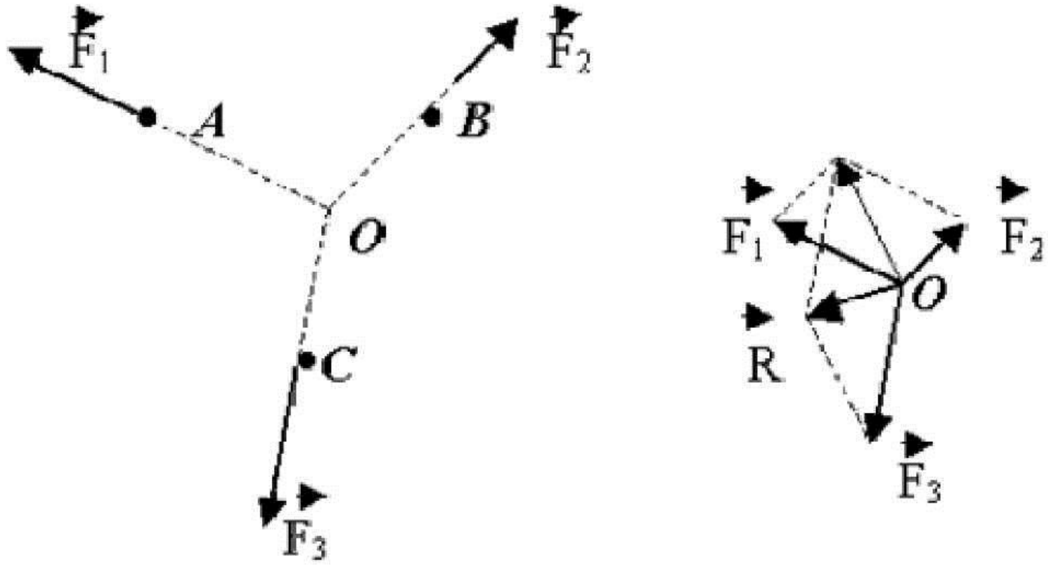


Рис.5.

Проекции равнодействующей:

$$R_x = \sum_{\nu} X_{\nu};$$

$$R_y = \sum_{\nu} Y_{\nu};$$

$$R_z = \sum_{\nu} Z_{\nu}.$$

Если $\vec{R} \neq 0$, то сила вызывает движение твёрдого тела.
Условие равновесия для сходящейся системы сил:

$$\vec{R} = 0 \qquad \text{или} \qquad \sum_{\nu} X_{\nu} = 0$$

$$\sum_{\nu} Y_{\nu} = 0$$

$$\sum_{\nu} X_{\nu} = 0$$

2. Равновесие трёх сил

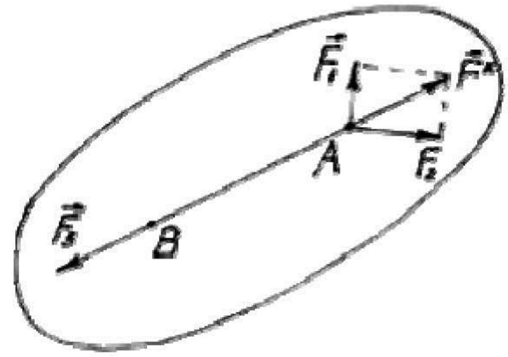


Рис.6.

Если на твёрдое тело действуют три силы, и линии действия двух сил пересекаются в некоторой точке А, равновесие возможно тогда и только тогда, когда линия действия третьей силы тоже проходит через точку А, а сама сила $\vec F_3$ равна по величине и противоположно направлена сумме $\vec F^* = \vec F_1 + \vec F_2$ (рис.6).

Примеры:

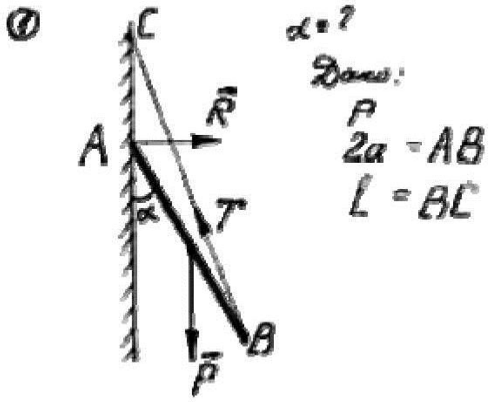


Рис.7.

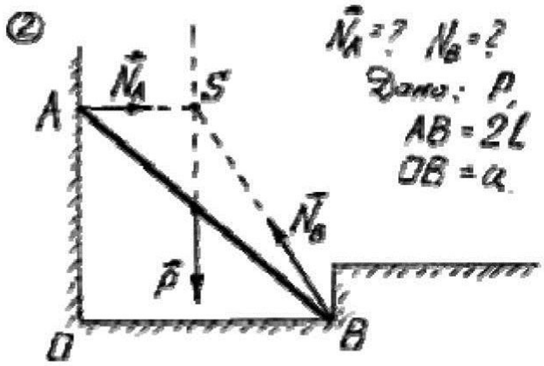
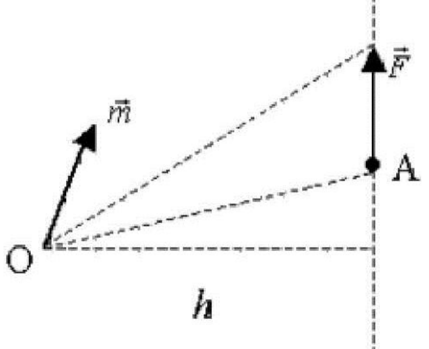


Рис.8.



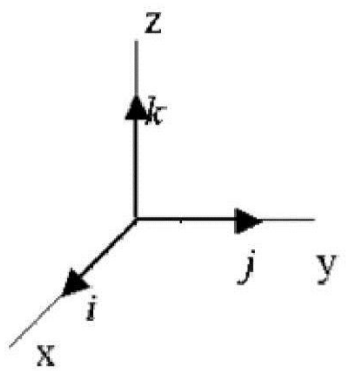


Рис.9.

Момент силы $\vec{F}$ *относительно точки О* определим как вектор $\vec{m}$, *по величине* равный удвоенной площади треугольника, основанием которого является вектор силы $\vec{F}$ с вершиной в заданной точке О; *направление* – ортогонально плоскости рассмотренного треугольника в ту сторону, откуда вращение, производимое силой $\vec{F}$ вокруг точки О, видно *против хода часовой стрелки.* $\vec{m}$ является моментом скользящего вектора и является *свободным вектором* (рис.9).

Итак: $\vec{m} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}$ или

$$m_x = (y - y_0)\cdot Z - (z - z_0)\cdot Y$$

$$m_y = (z - z_0)\cdot X - (x - x_0)\cdot Z$$

$$m_z = (x - x_0)\cdot Z - (z - z_0)\cdot X$$

$$\vec{m} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ X & Y & Z \end{vmatrix},$$

где $\vec{F}(X, Y, Z)$; $A(x, y, z)$; $O(x_0, y_0, z_0)$.

$S = F \cdot h$, где F – модуль силы, h – плечо (расстояние от точки до направления силы).

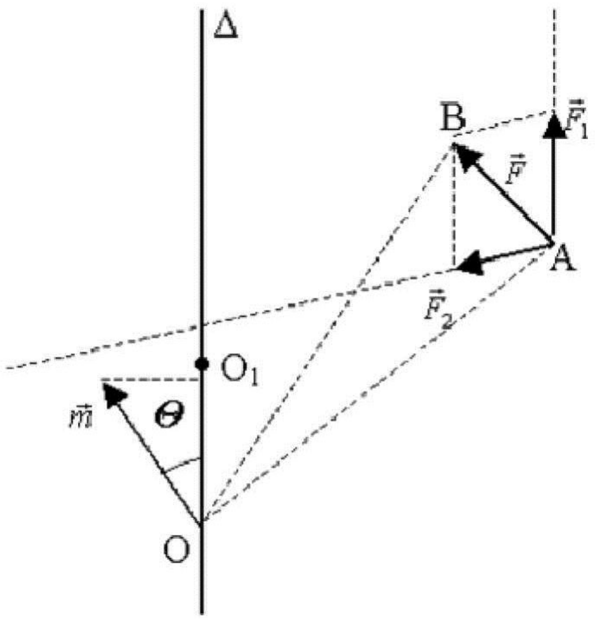


Рис.10.

Моментом силы $\vec{F}$ *относительно оси* Δ называется алгебраическое значение проекции на эту ось вектора момента силы $\vec{F}$ относительно произвольной точки О, взятой на оси Δ (рис.10).

Это скаляр, не зависящий от выбора точки. Действительно, разложим $\vec{F}$: $\vec{F}_1 \parallel \Delta$ и $\vec{F}_2$ в плоскости $\perp\Delta$.

О моментах: пусть O_1 – точка пересечения Δ с плоскостью $\perp\Delta$. Тогда:

а) от $\vec{F}_1$ - момент $\perp\Delta$=> проекция = 0.

б) от $\vec{F}_2$ - момент вдоль Δ=> является проекцией.

Итак, момент относительно оси – это момент составляющей силы в перпендикулярной плоскости к оси относительно точки пересечения плоскости и оси.

Теорема Вариньона для системы сходящихся сил:

Момент равнодействующей силы *для системы сходящихся сил* относительно произвольной точки А равен сумме моментов всех составляющих сил относительно той же точки А (рис.11).

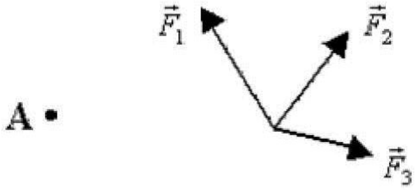


Рис.11.

Доказательство в теории сходящихся векторов.

Пояснение: сложение сил по правилу параллелограмма => результирующая сила даёт суммарный момент.

Контрольные вопросы:

1. Назовите основные модели реальных тел в теоретической механике.
2. Сформулируйте аксиомы статики.
3. Что называется моментом силы относительно точки?

Лекция 2. Условия равновесия произвольной системы сил.

Из основных аксиом статики следуют элементарные операции над силами:

1) силу можно переносить вдоль линии действия;

2) силы, линии действия которых пересекаются, можно складывать по правилу параллелограмма (по правилу сложения векторов);

3) к системе сил, действующих на твёрдое тело, можно всегда добавить две силы, равные по величине, лежащие на одной прямой и направленные в противоположные стороны.

Элементарные операции не изменяют механического состояния системы.

Назовём две системы сил *эквивалентными,* если одна из другой может быть получена с помощью элементарных операций (как в теории скользящих векторов).

Система двух параллельных сил, равных по величине и направленных в противоположные стороны, называется *парой сил* (рис.12).

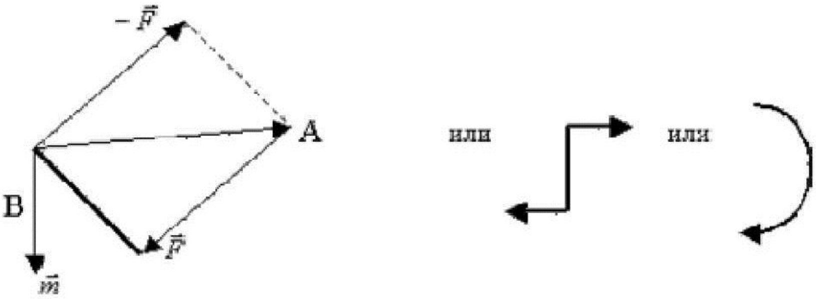


Рис. 12.

Момент пары сил $\vec{m}$ - вектор, по величине равный площади параллелограмма, построенного на векторах пары, и направленный ортогонально к плоскости пары в ту сторону, откуда вращение, сообщаемое векторами пары, видно происходящим против хода часовой стрелки.

$\vec{m} = \overrightarrow{BA} \times \vec{F}$, то есть момент силы $\vec{F}$ относительно точки В.

Пара сил полностью характеризуется своим моментом.

Пару сил можно переносить элементарными операциями в любую плоскость, параллельную плоскости пары; изменять величины сил пары обратно пропорционально плечам пары.

Пары сил можно складывать, при этом моменты пар сил складываются по правилу сложения (свободных) векторов.

Приведение системы сил, действующих на твёрдое тело, к произвольной точке (центру приведения) - означает замену действующей системы более простой: системой трёх сил, одна из которых проходит через наперёд заданную точку, а две другие представляют пару.

Доказывается с помощью элементарных операций (рис.13).

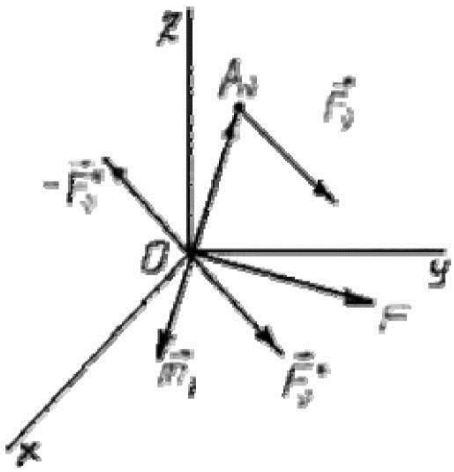


Рис.13.

$$\left.\begin{array}{l} A_\nu(x_\nu, y_\nu, z_\nu) \\ \vec{F}_\nu(X_\nu, Y_\nu, Z_\nu) \\ \vec{F}_\nu^*, -\vec{F}_\nu^* \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Система сходящихся сил $\vec{F}_\nu^*$ и система пар сил $\vec{m}_\nu$.

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$ - результирующая сила $\vec{F}$.

$\vec{m}_0 = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \ldots + \vec{m}_n$ - результирующая пара $\vec{m}_0$.

Что и требовалось показать.

Две системы сил будут *эквивалентны* тогда и только тогда, когда обе системы приводятся к одной результирующей силе и одной результирующей паре, то есть при выполнении условий:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_k \\ \vec{F}_1^{`}, \vec{F}_2^{`}, \ldots, \vec{F}_r^{`} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \vec{F} = \vec{F}^{`} \\ \vec{m}_0 = \vec{m}_0^{`} \end{array},$$

Общий случай равновесия системы сил, действующих на твёрдое тело

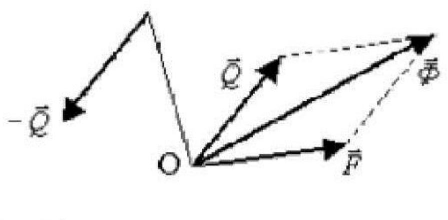


Рис.14.

Приведём систему сил к (рис.14):

$\vec{F}$ - результирующая сила через начало координат;

$\{\vec{Q},-\vec{Q}\}$ - результирующая пара, причём, $\vec{Q}$ через точку О.

$\vec{\Phi}=\vec{F}+\vec{Q}$

То есть привели к $\vec{\Phi}$ и $\vec{Q}$ - две силы, одна из которых $(\vec{\Phi})$ проходит через заданную точку О.

Равновесие, если $\vec{\Phi}$ и $-\vec{Q}$ на одной прямой, равны, направлены противоположно (аксиома 2).

Тогда $-\vec{Q}$ проходит через точку О, то есть $\vec{m}_0=0$.

Далее: $\vec{F}=0$, так как остаётся только эта сила.

Итак, общие условия равновесия твёрдого тела:

$\vec{F}=0$, $\vec{m}=0$.

Эти условия справедливы для произвольной точки пространства.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите элементарные операции над силами.
2. Какие системы сил называются эквивалентными?
3. Напишите общие условия равновесия твёрдого тела.

Лекция 3. Уравнения равновесия твёрдого тела.

Пусть O – начало координат; $\vec{R}$ – результирующая сила; $\vec{m}$ – момент результирующей пары. Пусть точка O1 – новый центр приведения (рис.15).

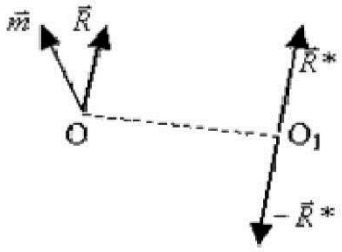


Рис.15.

$\vec{R}^*$ и $-\vec{R}^*$; $\vec{m}^* = \left[\overrightarrow{O_1O}, \vec{R}\right] = -\left[\overrightarrow{OO_1}, \vec{R}\right]$.

Новая система сил:

$$\begin{cases} \vec{R}^* \\ \vec{m}_1 = \vec{m} + \vec{m}^* \end{cases}$$

Заметим:

$\vec{m}^* \perp \vec{R}^*$.

$$\vec{m}: \begin{cases} \vec{m}` - по\ \vec{R}; \\ \vec{m}`` - \perp\ \vec{R}. \end{cases}$$

При изменении точки приведения => меняется только $\vec{m}``$ (в одну сторону с одним знаком, в другую – с другим). То есть $\exists$ точка: $\vec{m}^* + \vec{m}`` = 0 \Rightarrow$ совпадают линии $\vec{R}^*$ и $\vec{m}_1$

Аналитически: $\dfrac{m_{1x}}{R_x^*} = \dfrac{m_{1y}}{R_y^*} = \dfrac{m_{1z}}{R_z^*}$ (колинеарность векторов)

Или: $\vec{m}_1 = \vec{m} + \vec{m}^* = \vec{m} - \left[\overrightarrow{OO_1}, \vec{R}\right]$

$$\vec{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix};\quad \left[\overrightarrow{OO_1}, \vec{R}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} \rightarrow$$ координаты точки O1.

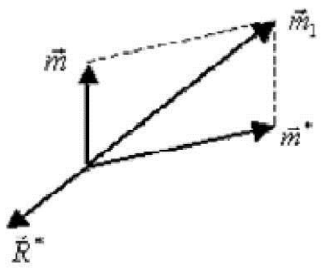


Рис.16.

$$\frac{m_x-(y\cdot R_z-z\cdot R_y)}{R_x}=\frac{m_y-(z\cdot R_x-x\cdot R_z)}{R_y}=\frac{m_z-(x\cdot R_y-y\cdot R_x)}{R_z}$$

Это уравнение прямой линии, для всех точек которой направление результирующего вектора совпадает с направлением момента результирующей пары – прямая называется *динамой.*

Если на оси динамы => $\vec{m}=0$, то система эквивалентна одной результирующей силе, которую называют *равнодействующей силой системы.* При этом всегда $\vec{m}^{*}=0\Rightarrow\vec{m}=\vec{m}^{**}\perp\vec{R}$, то есть $m_x\cdot R_x+m_y\cdot R_y+m_z\cdot R_z=0$.

Четыре случая приведения сил:

1.) $|\vec{R}|\neq 0$; $(\vec{R},\vec{m})\neq 0$ - динама.

2.) $|\vec{R}|\neq 0$; $(\vec{R},\vec{m})=0$ - равнодействующая.

3.) $|\vec{R}|=0$; $\vec{m}\neq 0$ - пара.

4.) $|\vec{R}|=0$; $|\vec{m}|=0$ - равновесие.

Два векторных уравнения равновесия: главный вектор и главный момент равны нулю $\vec{R}=0$, $\vec{m}=0$.

Или шесть скалярных уравнений в проекциях на декартовые оси координат:

$$\begin{cases}R_x=\sum X_v=0\\ R_y=\sum Y_v=0\\ R_z=\sum Z_v=0\\ m_x=\sum(y_v\cdot Z_v-z_v\cdot Y_v)=0\\ m_y=\sum(z_v\cdot X_v-x_v\cdot Z_v)=0\\ m_z=\sum(x_v\cdot Y_v-y_v\cdot X_v)=0\end{cases}$$

Здесь: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{z} \\ x_\nu & y_\nu & z_\nu \\ X_\nu & Y_\nu & Z_\nu \end{vmatrix} = \vec{m}_\nu = \left[\vec{Z}_\nu, \vec{K}_\nu\right]$

Сложность вида уравнений зависит от выбора точки приведения => искусство расчётчика.

Нахождение условий равновесия системы твёрдых тел, находящихся во взаимодействии <=> задача о равновесии каждого тела в отдельности, причём на тело действуют внешние силы и силы внутренние (взаимодействие тел в точках соприкосновения с равными и противоположно направленными силами – аксиома IV, рис.17).

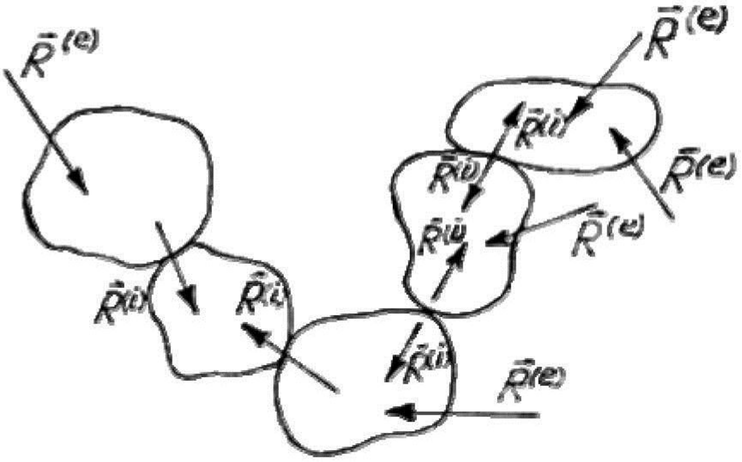


Рис.17.

Выберем для всех тел системы *один центр приведения.* Тогда для каждого тела с номером ν условия равновесия:

$\vec{R}_\nu^{(e)} + \vec{R}_\nu^{(i)} = 0$, $\vec{m}_\nu^{(e)} + \vec{m}_\nu^{(i)} = 0$, (ν= 1, 2, …, k)

где $\vec{R}_\nu^{(e)}$, $\vec{m}_\nu^{(e)}$ - результирующая сила и момент результирующей пары всех сил, кроме внутренних реакций.

$\vec{R}_\nu^{(i)}$, $\vec{m}_\nu^{(i)}$ - результирующая сила и момент результирующей пары сил внутренних реакций.

Формально суммируя по ν и учитывая по IV аксиоме

$$\sum \vec{R}_\nu^{(i)} = 0$$
$$\sum \vec{m}_\nu^{(i)} = 0$$

получаем *необходимые условия равновесия твёрдого тела:*

$\sum \vec{R}_\nu^{(e)} = 0$, $\sum \vec{m}_\nu^{(e)} = 0$

Пример.
Равновесие: φ = ?

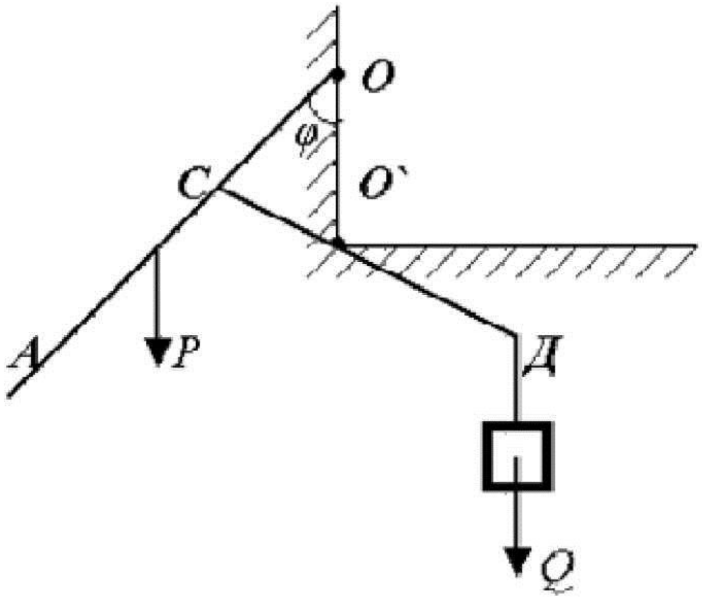


Рис.18.

Контрольные вопросы:

1. Назовите все случаи приведения системы сил к одной точке.
2. Что такое динама?
3. Сформулируйте необходимые условия равновесия системы твёрдых тел.

Лекция 4. Плоская система сил.

Частный случай общей поставки задачи.

Пусть все действующие силы лежат в одной плоскости – например, листа. Выберем за центр приведения точку О – в этой же плоскости. Получим результирующую силу $\vec{R}$ и результирующую пару $\vec{m}$ в этой же плоскости, то есть $(\vec{R}, \vec{m}) = 0$ (рис.19)

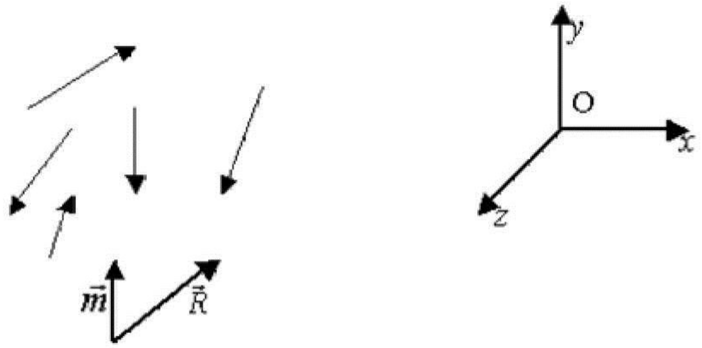


Рис.19.

Замечание.

Систему можно привести к одной результирующей силе.

Условия равновесия:

$\vec{R} = 0$, $\vec{m} = 0$

или скалярные:

$$\begin{cases} \sum X_\nu = 0 \\ \sum Y_\nu = 0 \\ \sum mom_z F_\nu = 0 \end{cases}$$

Очень часто встречаются в приложениях, например, в сопротивлении материалов.

Пример.

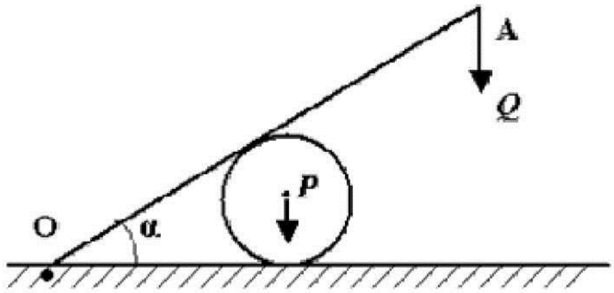


Рис.20.

С трением шара о доску и о плоскость. Условие равновесия: α= ?

Задача о равновесии несвободного твёрдого тела.

Несвободным называется такое твёрдое тело, перемещение которого стеснено связями. Например, другими телами, шарнирными закреплениями.

При определении условий равновесия: несвободное тело можно рассматривать как свободное, заменяя связи неизвестными силами реакции.

Пример.

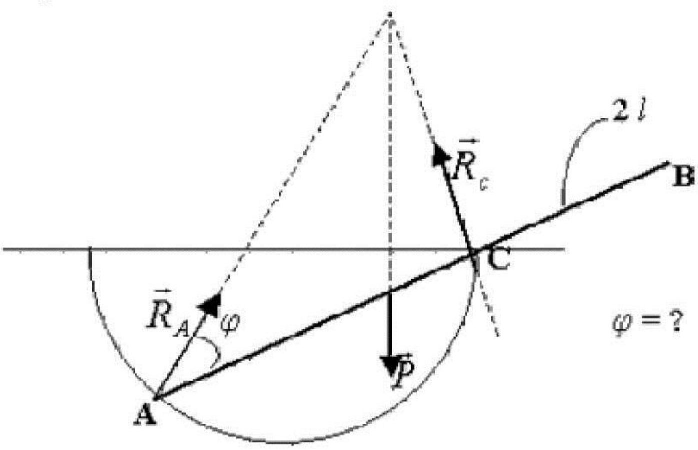


Рис.21.

Контрольные вопросы:

1. Что называется плоской системой сил?
2. Напишите условия равновесия плоской системы сил.
3. Какое твёрдое тело называется несвободным?

Лекция 5. Частные случаи равновесия твёрдого тела.

Теорема. Три силы уравновешивают твёрдое тело только в том случае, когда все они лежат в одной плоскости.

Доказательство.

Выберем за точку приведения точку на линии действия третьей силы. Тогда $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0 \Rightarrow \vec{M}_1 = -\vec{M}_2$ (рис.22)

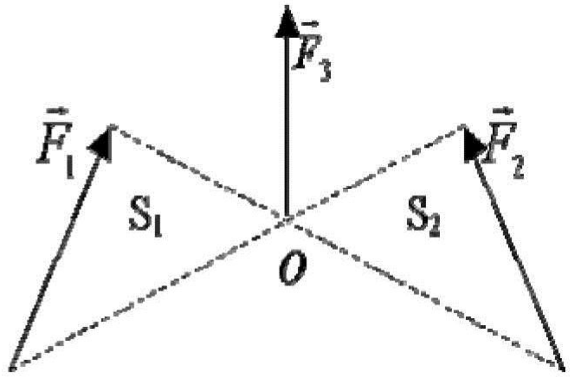


Рис.22.

То есть плоскости ΔS1 и ΔS2 совпадают, причём для любой точки на оси силы $\vec{F}_3$, ч.т.д.

(Проще: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \Rightarrow$ в плоскости $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \Rightarrow \vec{F}_3$ только там же для уравновешивания).

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0 \Rightarrow \vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

Условия равновесия твёрдого тела с одной неподвижной точкой.

Центр приведения – закреплённая точка (рис.23):

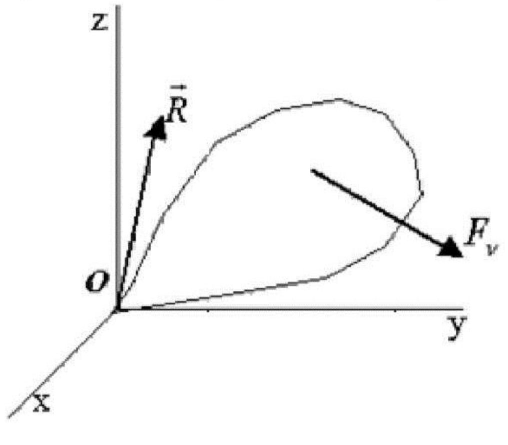


Рис.23.

Моменты (условия равновесия):

$$\left.\begin{aligned} m_x &= \sum (y_v \cdot Z_v - z_v \cdot Y_v) = 0 \\ m_y &= \sum (z_v \cdot X_v - x_v \cdot Z_v) = 0 \\ m_z &= \sum (x_v \cdot Y_v - y_v \cdot X_v) = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\vec{m}_v = [\vec{r}_v; \vec{F}_v] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_v & y_v & z_v \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix}$$

Для определения реакций => результирующая:

$\sum X_v + R_x = 0$; $\sum Y_v + R_y = 0$; $\sum Z_v + R_z = 0$.

Условия равновесия твёрдого тела, способного вращаться вокруг неподвижной оси.

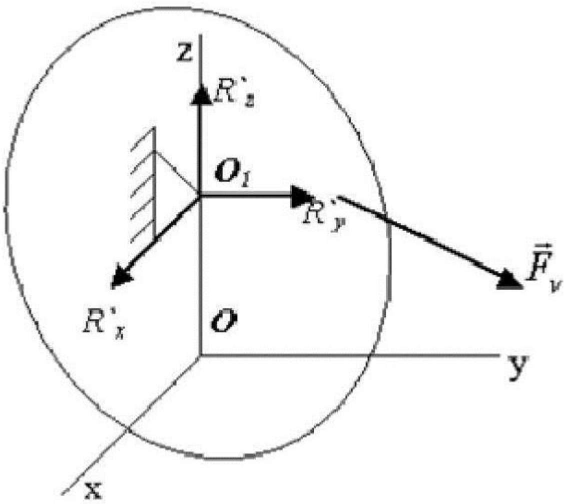


Рис.24.

Закреплены две точки O и O1. Центр приведения: точка O (рис.24).

$\vec{F}_v(X_v, Y_v, Z_v)$; Rx, Ry, Rz в точке O; R`x, R`y, R`z в точке O1; OO1 = h.

Уравнения равновесия:

$$\sum X_v + R_x + R'_x = 0$$
$$\sum Y_v + R_y + R'_y = 0$$
$$\sum Z_v + R_z + R'_z = 0$$
$$\sum (y_v \cdot Z_v - z_v \cdot Y_v) - h \cdot R'_y = 0$$
$$\sum (z_v \cdot X_v - x_v \cdot Z_v) + h \cdot R'_x = 0$$

$$\sum (x_\nu \cdot Y_\nu - y_\nu \cdot X_\nu) = 0$$

Положение тела в пространстве определяется одним параметром, например, углом поворота Θ, который определяется из последнего уравнения: $\sum (x_\nu \cdot Y_\nu - y_\nu \cdot X_\nu) = 0$. Остальные 5-ть уравнений => нахождение 6-ти проекций реакций связи => задача статически неопределимая. Требуются дополнительные условия деформирования (в сопротивлении материалов).

Условия равновесия твёрдого тела, способного перемещаться параллельно неподвижной плоскости (рис.25).

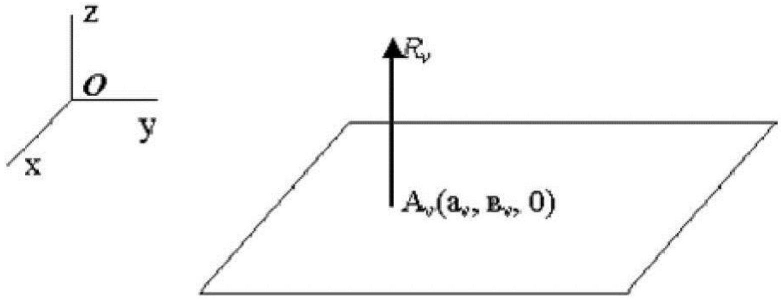


Рис.25.

Уравнения равновесия:

$$\sum X_\nu = 0$$

$$\sum Y_\nu = 0$$

$$\sum Z_\nu + \sum R_\nu = 0$$

$$\sum (y_\nu \cdot Z_\nu - z_\nu \cdot Y_\nu) + \sum в_\nu R_\nu = 0$$

$$\sum (z_\nu \cdot X_\nu - x_\nu \cdot Z_\nu) - \sum a_\nu R_\nu = 0$$

$$\sum (x_\nu \cdot Y_\nu - y_\nu \cdot X_\nu) = 0$$

где X_ν, Y_ν, Z_ν– проекции активных сил, приложенных в точках (x_ν, y_ν, z_ν).

Два первых и последнее уравнения – необходимые условия равновесия. Три остальных => реакции, то есть только для закрепления в трёх точках. Иначе => статически неопределимая задача.

Случай опоры на три точки.

Для определения реакций имеем:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 + R_3 = -\sum Z_\nu \\ a_1 R_1 + a_2 R_2 + a_3 R_3 = M_y \\ в_1 R_1 + в_2 R_2 + в_3 R_3 = -M_x \end{cases},$$

где $M_y = \sum (z_\nu X_\nu - x_\nu Z_\nu)$,

$M_x = \sum (y_\nu Z_\nu - z_\nu Y_\nu)$.

Решение имеется только при условии:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ в_1 & в_2 & в_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то есть три точки опоры не лежат на одной прямой. Иначе, статическая неопределимость.

Пример.

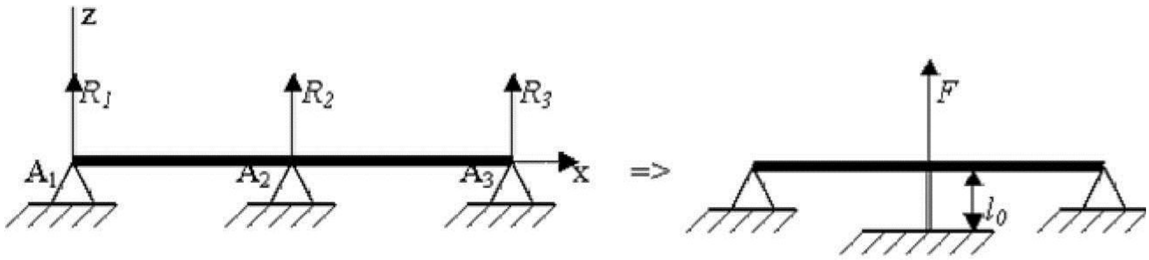


Рис.26.

Если дано, что опора упругая => $F = k(l_0 - l)$.

Тогда для реакции: $\begin{cases} R_1 + k \cdot (l_0 - l) + R_3 = -\sum Z_\nu \\ a_2 k \cdot (l_0 - l) + a_3 R_3 = M_y \end{cases}$

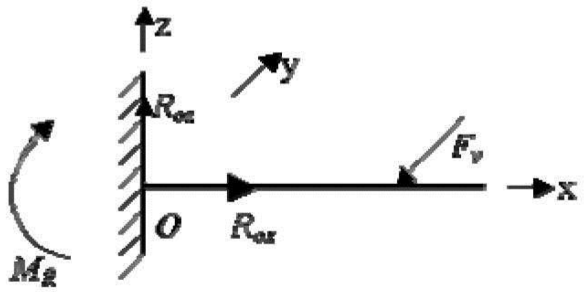
(удобно взять начало координат в одной из опор).

Контрольные вопросы:

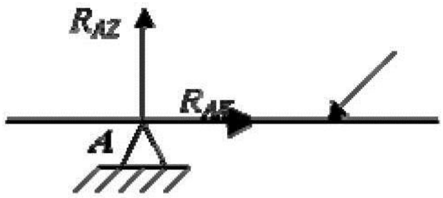
1. В каком случае три силы уравновешивают твёрдое тело?
2. Как выглядят условия равновесия тела с одной неподвижной точкой?
3. Напишите уравнения равновесия тела, способного вращаться вокруг неподвижной оси.

Лекция 6. Задача о Равновесии бруса.

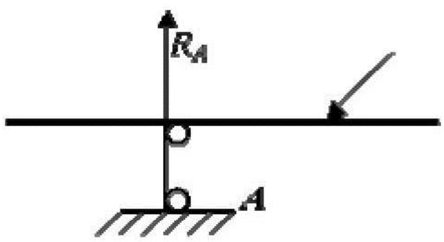
Виды опор:



- жесткая заделка



- шарнирно неподвижная



- шарнирно подвижная.

Рис.27.

Уравнения равновесия:

$$\sum X = 0$$

$$\sum Z = 0$$

$$\sum mom = 0$$

Виды нагрузок:

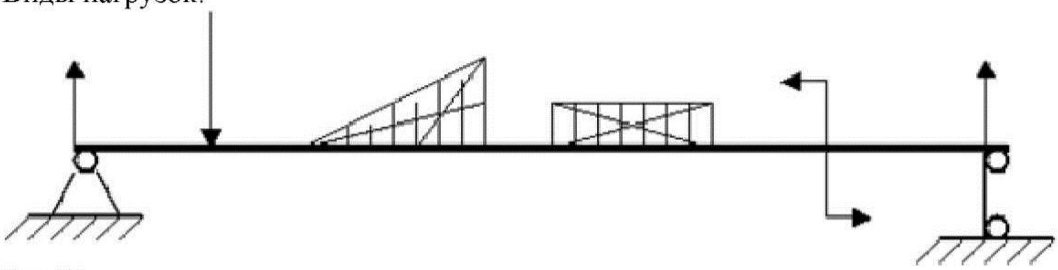


Рис.28.

Найти: R_A, R_B.

$mom A = 0 \longrightarrow R_B$

$mom B = 0 \longrightarrow R_A$

Проверка:

$$\sum Z \stackrel{?}{=} 0$$

Контрольные вопросы:

1. Назовите виды опор в ???????? схемах.
2. Чем отличаются шарнирно подвижная и шарнирно неподвижная опоры?
3. Какие уравнения являются наиболее удобными для нахождения реакций в брусе?

Лекция 7. Определение внутренних усилий в стержневых конструкциях.

Внутренние усилия определяются методом сечений (РОЗУ), состоящим из четырёх этапов:

Р – рассекаем, то есть проводим сечение в том месте, где определяются внутренние усилия;

О – отбрасываем одну из частей и рассматриваем оставшуюся часть;

З – заменяем действие отброшенной части на рассматриваемую внутренними усилиями, которые приводим к центру тяжести сечения. Проецируя приведённые усилия на оси, получаем следующие неизвестные:

N – продольная сила;

Qy, Qz – поперечные силы;

Мкр – крутящий момент;

My, Mz – изгибающие моменты.

Эти усилия направляются в соответствии с правилами статики для выбранной системы координат:

1.) левая рассматриваемая часть 2.) правая рассматриваемая часть

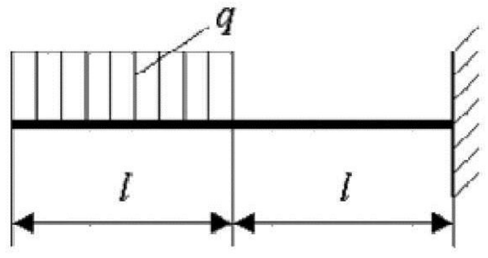
Рис.29.

У – уравновешиваем, то есть составляем шесть уравнений равновесия, из которых и определяются внутренние усилия.

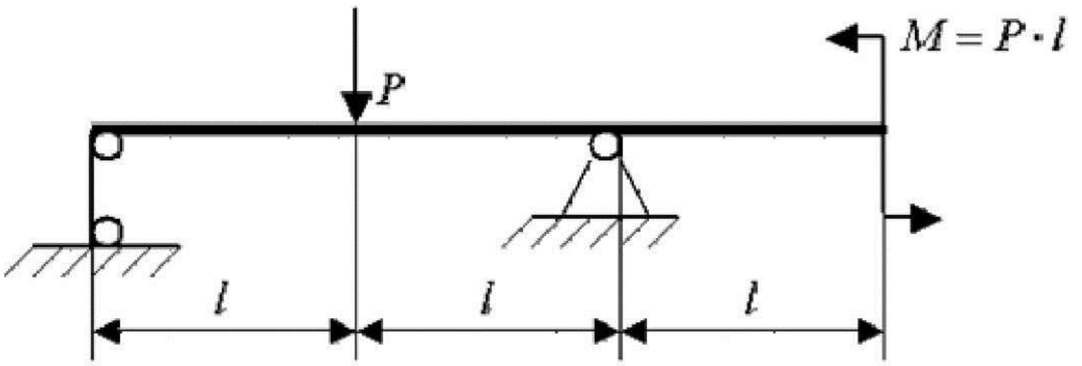
Затем строятся графики внутренних усилий вдоль оси бруса, которые называются эпюрами внутренних усилий.

Частные случаи.

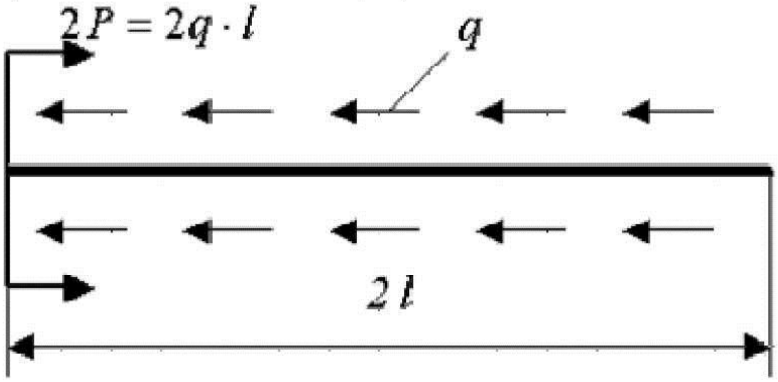
1) *Изгиб (Qz, My).*



2) *Изгиб (Qz, My).*



3)*Растяжение, сжатие* (*N*).



4) *Кручение* (*Мкр*).

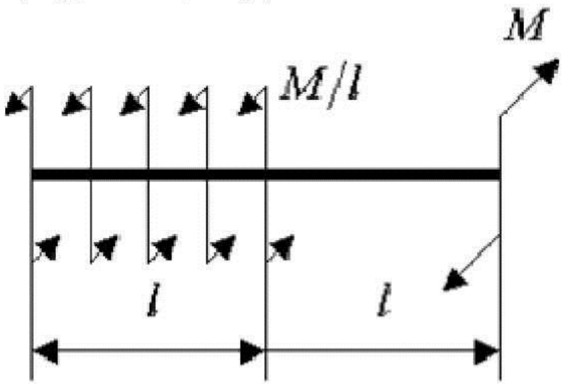


Рис.30.

Контрольные вопросы:

1. Из каких этапов состоит метод сечений?
2. Что называется эпюрой внутреннего усилия?
3. Перечислите основные частные случаи нагружения бруса.

Лекция 8. Основы кинематики точки.

Кинематикой называется та часть механики, в которой изучаются зависимости между величинами, характеризующими состояние систем, но не рассматриваются причины вызывающие изменение состояние движения.

Кинематика точки. Декартовы координаты.

С неподвижной системой отсчёта связываем декартовую ортогональную систему координат (правую, рис. 31).

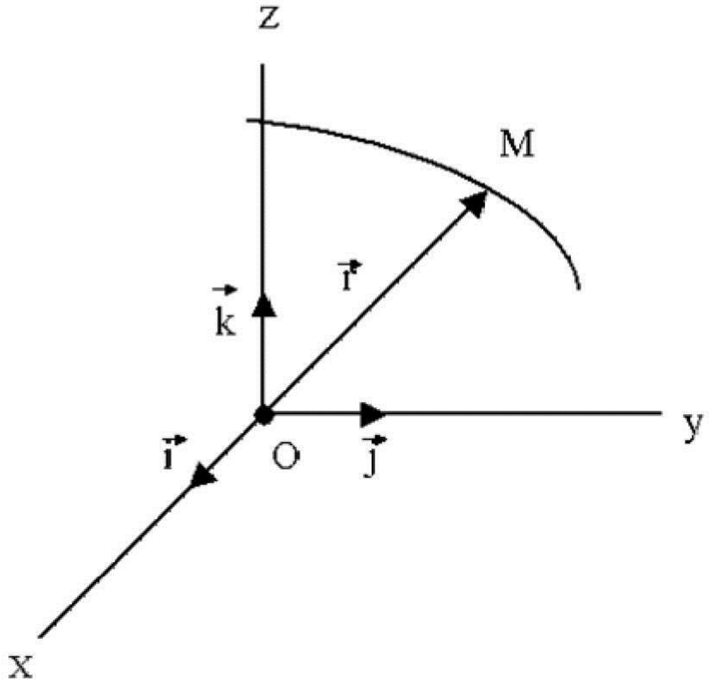


Рис.31.

Точка $M(x,y,z)$, где

$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$

$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z,$ – параметрические уравнения траектории.

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - *единичные векторы (орты),*

$f_i(t)$ - непрерывны и 2 раза дифференцируемы; 2-е производные – непрерывны.

Непрерывная последовательность точек среды (пространства), занимаемая точкой М, называется ***траекторией точки М.***

Исключая время:

$$y = F_1(x); z = F_2(x)$$

или:

$$\Phi_1(x,y,z) = 0; \Phi_2(x,y,z) = 0$$

Введём понятия скорости и ускорения:

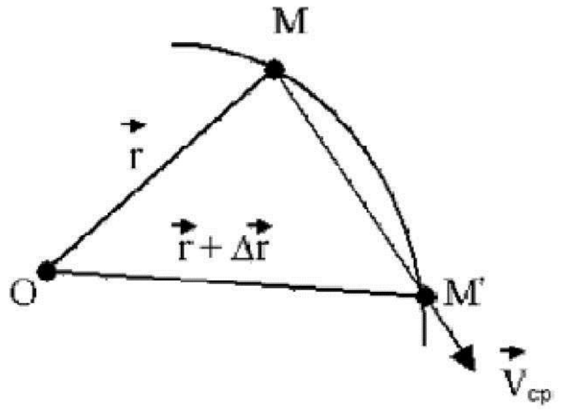


Рис.32.

т. M $\longrightarrow$ t
т. M' $\longrightarrow$ t + Δt
(Δt - конечное).
Радиусы – векторы: t $\longrightarrow \vec{r}$
t + Δt $\longrightarrow \vec{r} + \Delta\vec{r}$
$\Delta\vec{r} = \overline{MM'}$
За время Δt (рис. 32):

$$\vec{V}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$ (Направление по секущей MM').

Скорость точки в момент времени t получается при Δt $\longrightarrow$0, то есть

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$ (Направление по касательной и траектории точки)

Очевидно:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} = \vec{i}\frac{dx}{dt} + \vec{j}\frac{dy}{dt} + \vec{k}\frac{dz}{dt}$$

Проекции $\vec{V}$:

$$\vec{V}_x = \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}; \vec{V}_y = \frac{dy}{dt} \equiv \dot{y}; \vec{V}_z = \frac{dz}{dt} \equiv \dot{z}$$

Модуль (длина):

$$|\vec{V}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Скорость точки M в момент времени t равна производной по времени от радиуса – вектора точки и направлена по касательной к траектории.

Аналогично найдём ускорение (рис. 33).

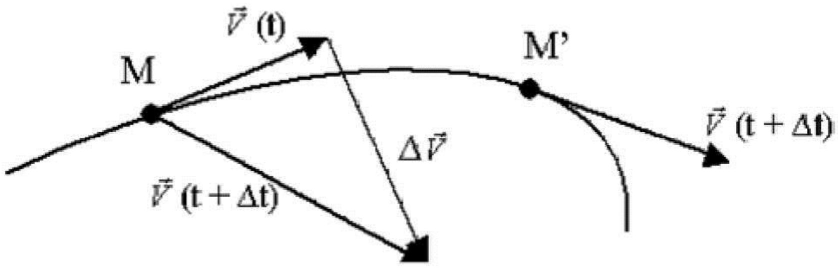


Рис.33.

Совмещая начало векторов $\vec{V}$ (t) и $\vec{V}$ (t + Δt) в точке M => $\Delta\vec{V}$ за Δt.
Среднее ускорение:

$$\vec{a}_{ср} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$ (направление в сторону вогнутости траектории)

Ускорение точки в момент времени t получается при Δt ⟶0, то есть

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Очевидно:

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \vec{i}\ddot{x} + \vec{j}\ddot{y} + \vec{k}\ddot{z}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 + (\ddot{z})^2}$$

Ускорение точки в некоторый момент времени равно производной по времени от вектора скорости, или второй производной по времени от радиуса – вектора точки в этот момент времени.

В некоторых задачах – используется производная более высоких порядков, но здесь они пока не нужны.

В механике применяются не только декартовы координаты – часто применяют обобщённые (криволинейные) координаты.

Они бывают удобней, позволяют определить конфигурацию рассматриваемой системы. Часто их называют позиционными. Криволинейными они называются потому, что линии вдоль которых меняется только одна координата, обычно бывают кривыми.

Рассмотрим частный случай криволинейных координат – **полярные координаты** точки на плоскости: применим далее к задаче движение точек в центральном силовом поле (рис. 34).

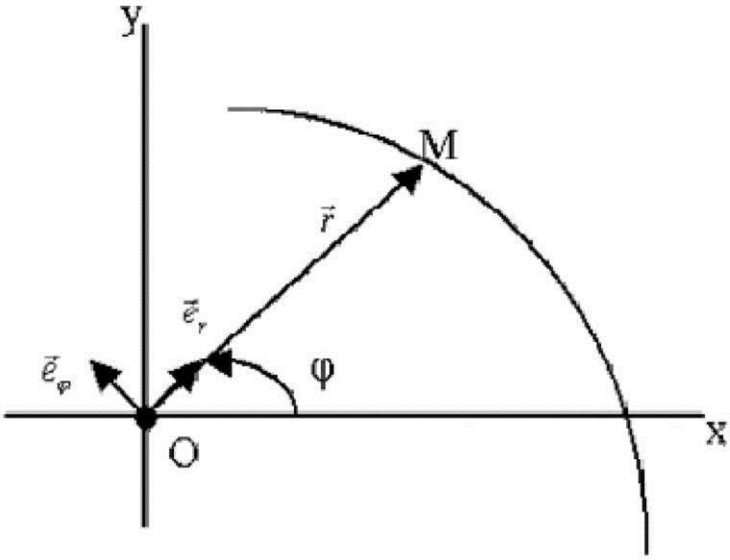


Рис.34.

(x, y) – декартовы координаты.
(r, φ) – полярные координаты.
Угол φ=> от Ох против часовой стрелки – положительное направление

Формулы преобразования:
$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, где $r \geq 0$; $0 \leq \varphi < 2\pi$
(можно рассматривать и $\varphi \longrightarrow \infty$).
Если r = const – концентрические окружности с центром в точке О.
Если φ= const – прямолинейные лучи из точки О.

Введём два орта:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{e}_r \text{ - радиального направления} \\ \vec{e}_\varphi \text{ - трансверсального направления}\end{array}\right\} \vec{e}_r \perp \vec{e}_\varphi .$$

<u>Найдём производные $\vec{e}_r$ по углу φ(рис. 35):</u>

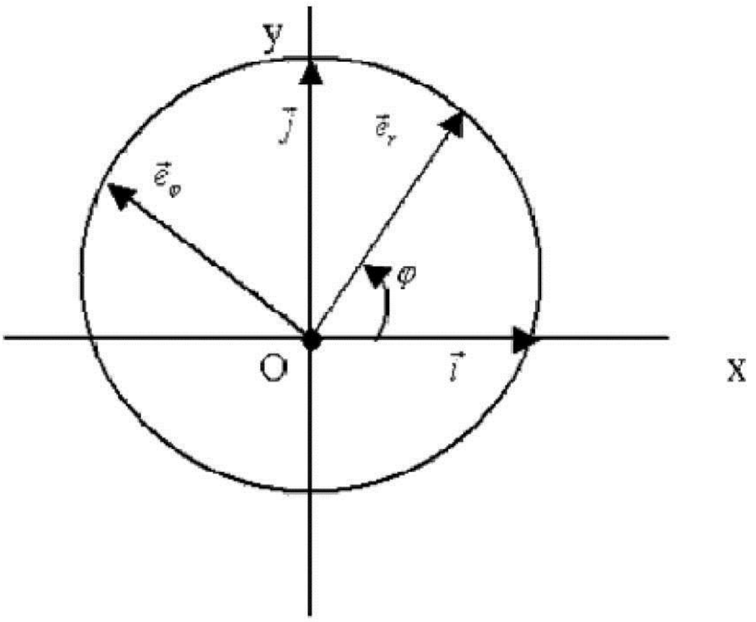


Рис.35.

$\vec{e}_r = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi$ (так как r = 1)

$\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi = \vec{e}_r$ при $\varphi + \frac{\pi}{2}$,

т. е. $\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} = \vec{e}_\varphi$.

Далее:

$\frac{d^2\vec{e}_r}{d\varphi^2} = \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = -\vec{i}\cos\varphi - \vec{j}\sin\varphi = \vec{e}_r$ при $\varphi + \frac{\pi}{2}$,

т. е. $\frac{d^2\vec{e}_r}{d\varphi^2} = -\vec{e}_r$.

При каждом дифференцировании по φ т. е. происходит поворот на угол $\frac{\pi}{2}$.

Выведем формулы проекции скорости и ускорения точки М на направления касательных к координатным линиям в полярных координатах.

Так как $\vec{r} = \vec{e}_r r$, то

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{e}_r\frac{dr}{dt} + \frac{d\vec{e}_r}{dt}r.$$

Но: $$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \vec{e}_\varphi \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \vec{V} = \vec{e}_r \frac{dr}{dt} + \vec{e}_\varphi r \frac{d\varphi}{dt}$$

Очевидно:

$$\begin{cases} V_r = \dfrac{dr}{dt} - \text{проекция на радиальное направление;} \\ V_\varphi = r\dfrac{d\varphi}{dt} - \text{проекция на трансверсальное направление.} \end{cases}$$

Для ускорения:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{e}_r \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{d\vec{e}_r}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} + \vec{e}_\varphi \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \vec{e}_\varphi r \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} r \frac{d\varphi}{dt}.$$

Но: $$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -\vec{e}_r \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \vec{e}_r(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + \vec{e}_\varphi(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}).$$

Очевидно:

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - \text{проекция на радиальное направление} \\ a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} - \text{проекция на трансверсальное направление} \end{cases}$$

Контрольные вопросы:

1. Что изучает кинематика?
2. Дайте определение скорости точки.
3. Напишите формулы проекций ускорения на оси полярной системы координат.

Лекция 9. Естественные координаты.

Рассмотрим систему координатных осей, определяемую траекторией точки (рис.36).

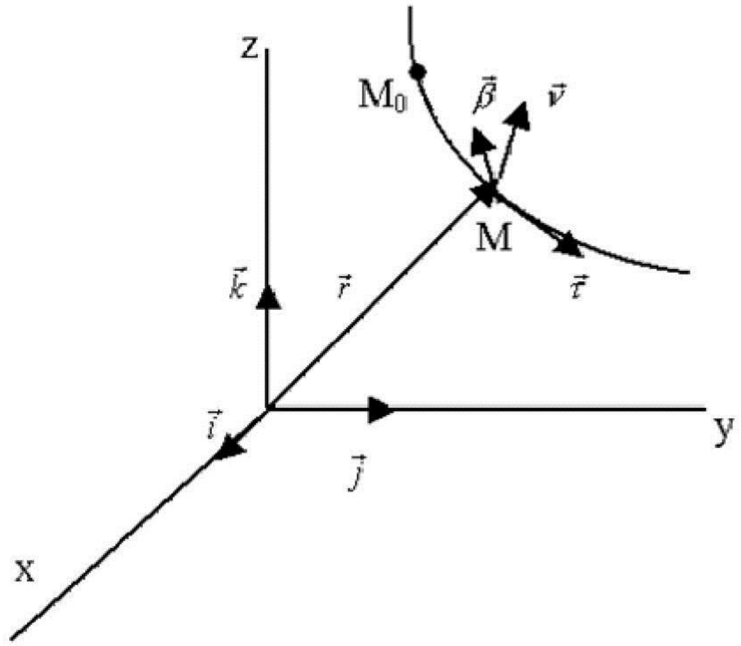


Рис.36.

$\overline{OM} = \vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z; \vec{r} = \vec{r}(t)$.

Единичный вектор касательной к траектории (S – длина дуги M_0M):

$\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{r}}{ds} = \vec{i}\dfrac{dx}{ds} + \vec{j}\dfrac{dy}{ds} + \vec{k}\dfrac{dz}{ds}$, где $\left(\dfrac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{ds}\right)^2 = 1$.

Дифференцируя $\vec{\tau}$ по S: $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}$,

где $\vec{\nu}$ - единичный вектор главной нормали; $\vec{\nu} \perp \vec{\tau}$ и направлен в сторону вогнутости;

$\dfrac{1}{\rho} = k \geq 0 -$ кривизна. (k = 0 - прямая); ρ - радиус кривизны.

Единичный вектор бинормали $\vec{\beta}$ ***:***

$\vec{\beta} = \vec{\tau} \times \vec{\nu}$.

$\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta} -$ образуют правую тройку ортогональных единичных векторов. Они определяют направление *естественных (натуральных)* осей в том месте траектории, где находится движущаяся точка.

Плоскости:

соприкасающаяся $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$,

нормальная $(\vec{\nu}, \vec{\beta})$, $\quad$ образуют ***трёхгранник Френе.***

спрямляющая $(\vec{\beta}, \vec{\tau})$

Найдём проекции скорости и ускорения точки на естественные оси. соприкасающаяся $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$,

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{\tau} V$$

Очевидно, проекция на ось $\vec{\tau}$: $V = \dfrac{ds}{dt}$ (может иметь разные знаки – зависит от направления S).

Для ускорения:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\tau} \cdot V) = \vec{\tau}\frac{dV}{dt} + \frac{d\vec{\tau}}{dt}V;$$

Но: $\dfrac{d\vec{\tau}}{dt} = \dfrac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \dfrac{ds}{dt} = k\vec{\nu}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{\vec{\nu}}{\rho}V \Rightarrow \vec{a} = \vec{\tau}\dfrac{dV}{dt} + \vec{\nu}\dfrac{V^2}{\rho} + \vec{\beta} \cdot 0$;

Очевидно, проекции ускорения на естественные оси:

на касательную: $a_\tau = \dfrac{dV}{dt}$;

на главную нормаль: $a_\nu = \dfrac{V^2}{\rho}$;

на бинормаль: 0

Таким образом, ускорение лежит в соприкасающейся плоскости (рис. 37).

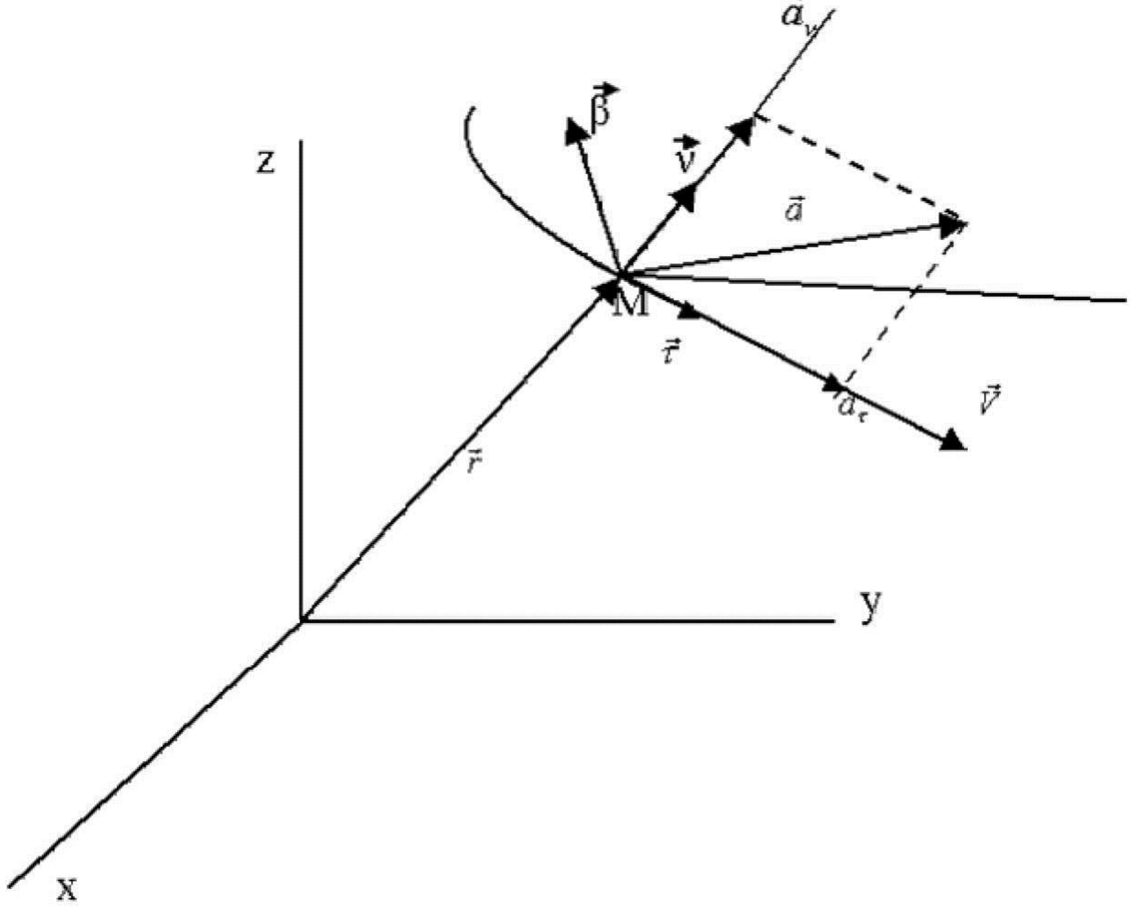


Рис.37.

<u>Задача.</u>

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\} \quad \text{Найти: } \rho.$$

$$\rho = \frac{V^2}{a_\nu} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\sqrt{a^2 - a_\tau^2}}; a^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2; a_\tau = \frac{dV}{dt}$$

Контрольные вопросы:

1. Какие основные отличия естественной системы координат от декартовой?
2. Назовите проекции скорости точки в естественных координатах.
3. Какова последовательность определения радиуса кривизны траектории точки?

Лекция 10. Формула Эйлера.

Найдём число координат, определяющих положение абсолютно твёрдого тела.

Определить положение тела => определить координаты $\forall$ точки относительно некоторой системы отсчёта в $\forall$ момент времени.

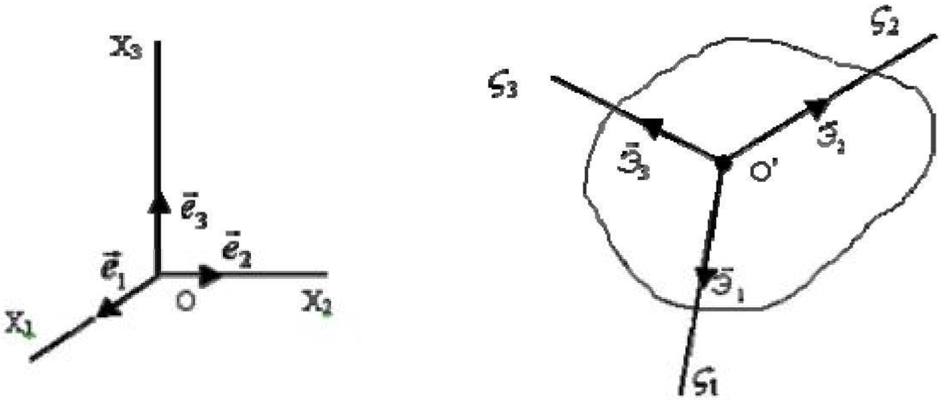


Рис.38.

Пусть X_1, X_2, X_3 – неподвижные оси (рис. 38); орты: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ [декартова система].

ς_1, ς_2, ς_3 - оси, жёстко связанные с телом; орты: $\vec{э}_1$, $\vec{э}_2$, $\vec{э}_3$ - [декартова система].

Так как координаты точек относительно собственных осей ς_1, ς_2, ς_3 не зависят от времени, то задача сводится к определению положения координатных осей, жёстко связанных с телом (подвижных), относительно неподвижных осей X_1, X_2, X_3.

Составим таблицу косинусов углов между осями X и ς_j :

$$\alpha_{ij} = \cos(Ox_i,\hat{\ } O'\varsigma_j) = \cos(\vec{e}_i,\hat{\ } \vec{э}_j) = (\vec{e}_i \vec{э}_j)$$

$\vec{e}_i \vec{э}_j$ - скалярное произведение.

	ς_1	ς_2	ς_3
X_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}
X_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}
X_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}

Так как системы координат ортогональны, то

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix}$$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}$$

скалярное произведение: $\vec{Э}_j \cdot \vec{Э}_k = \delta_{jk}$, где

Символ Кронекера.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{Э}_j \perp \vec{Э}_k, \text{ если } j \neq k \\ \vec{Э}_j = \vec{Э}_k, \text{ если } j = k \end{array} \right\}$$

С другой стороны $\Rightarrow$ $\begin{cases} \vec{Э}_j = \vec{\ell}_1 \alpha_{1j} + \vec{\ell}_2 \alpha_{2j} + \vec{\ell}_3 \alpha_{3j}, \ j = 1,2,3. \\ \vec{Э}_k = \vec{\ell}_1 \alpha_{1k} + \vec{\ell}_2 \alpha_{2k} + \vec{\ell}_3 \alpha_{3k}. \end{cases}$

$$\vec{Э}_j \cdot \vec{Э}_k = \alpha_{1j} \cdot \alpha_{1k} + \alpha_{2j} \cdot \alpha_{2k} + \alpha_{3j} \cdot \alpha_{3k} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ij} \cdot \alpha_{ik} = \delta_{jk}$$

Итак: $\sum_{i=1}^{3} \alpha_{ij} \cdot \alpha_{ik} = \delta_{jk}$

Число таких соотношений = 6 (Из 9 – ти в силу симметрии по jи k).

Имеем 6 соотношений для 9 косинусов =>

3 косинуса α_{ij}, не расположенные в одном столбце, или в одной строке, могут быть приняты за независимые, а остальные можем определить из составленных6 – ти соотношений.

Кроме того => три координаты определяют положение точки O' – начало системы ς_1, ς_2, ς_3.

Но 9 координат и 3 соотношение длин:

$$\sum_{j=1}^{3}(x_{j2} - x_{j1})^2 = \rho_{12}^2; \sum_{j=1}^{3}(x_{j3} - x_{j2})^2 = \rho_{23}^2; \sum_{j=1}^{3}(x_{j1} - x_{j3})^2 = \rho_{31}^2$$

Это условия постоянства расстояний между точками в абсолютно твёрдом теле.

Выведем формулу Эйлера для распределения скоростей точек абсолютно твёрдого тела (рис. 39).

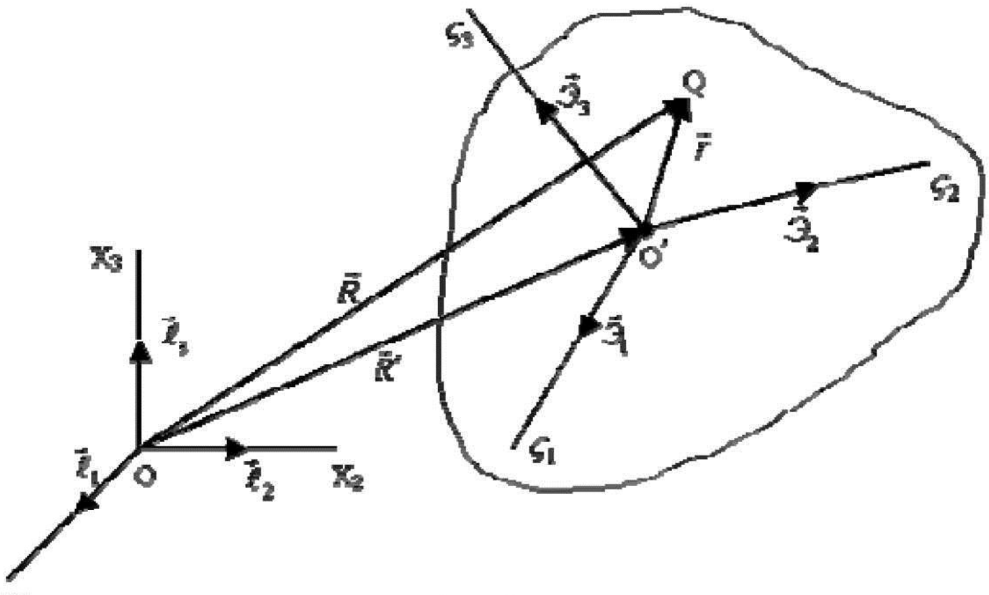


Рис. 39.

$\vec{R} = \vec{R}' + \vec{r}$,

1) $\vec{V}_Q \equiv \vec{V} = \dfrac{d\vec{R}}{dt} = \dfrac{d\vec{R}'}{dt} + \dfrac{d\vec{r}}{dt}$,

$\dfrac{d\vec{R}'}{dt} = \vec{V}'$ - скорость точки O',

$\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{W}$ - скорость точки Q во вращательном движении тела (так как длина $\vec{r}$ постоянна).

Так как координаты ς_i точки Q постоянны, то

$$\vec{r} = \sum_{j=1}^{3} \vec{Э}_j \varsigma_j$$

Тогда:

2) $\vec{W} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \sum_{j=1}^{3} \varsigma_j \dfrac{d\vec{Э}_j}{dt}$,

где $\dfrac{d\varsigma_j}{dt} = 0, \dfrac{d\vec{Э}_j}{dt} \perp \vec{Э}_j \left(\left|\vec{Э}_j\right| = 1\right)$.

Скорость точки Q: $\vec{V} = \vec{V}' + \vec{W}$.

3) Выразим $\vec{Э}_j$ и производные через направляющие косинусы α_{ij} :

$$\vec{Э}_j = \sum_{i=1}^{3} \vec{l}_i \alpha_{ij}; \frac{d\vec{Э}_j}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \vec{l}_i \frac{d\alpha_{ij}}{dt}$$

Тогда: $\vec{W} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \vec{l}_i \cdot \varsigma_j \frac{d\alpha_{ij}}{dt}$ (в неподвижной системе).

4) Проекция $\vec{W}$ на ось ς_k (k= 1,2,3):

$$\vec{W}_k = \left(\vec{W}\vec{Э}_k\right) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(\vec{l}_i \vec{Э}_k\right) \varsigma_j \frac{d\alpha_{ij}}{dt} = \sum_{j=1}^{3} \varsigma_j \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ik} \dot{\alpha}_{ij}$$

Скорости точек во вращательном движении – линейные функции координат точек.

5) ***Получим более простую и наглядную форму*** закона распределения скоростей, используя свойства функции $\alpha_{ij}(t)$.

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_{ij} \cdot \alpha_{ik} = \delta_{jk},$$

Дифференцируем по t:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ij} \cdot \alpha_{ik} = 0.$$

По свойству производной от произведения:

при j= k => $\sum_{i=1}^{3} \alpha_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{ij} = 0$,

при j≠ k=> $\sum_{i=1}^{3} \alpha_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{ik} = -\sum_{i=1}^{3} \alpha_{ik} \cdot \dot{\alpha}_{ij}$.

Свойства:

а) симметрия по kи j;

б) при j= k=>равенство «0»;

в) размерность t^{-1}, т. е. угловая скорость (угол в радианах), так как $\vec{W}$ - скорость.

г) различных только три =>

k	j
1	3
2	1
3	2

Покажем, что

6) $\begin{cases} W_1 = \omega_2\varsigma_3 - \omega_3\varsigma_2 \\ W_2 = \omega_3\varsigma_1 - \omega_1\varsigma_3 \\ W_3 = \omega_1\varsigma_2 - \omega_2\varsigma_1 \end{cases}$, где

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i3} \cdot \dot{\alpha}_{i2} \Rightarrow \begin{pmatrix} k=3 \\ j=2 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i1} \cdot \dot{\alpha}_{i3} \Rightarrow \begin{pmatrix} k=1 \\ j=3 \end{pmatrix}$$

$$\omega_3 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i2} \cdot \dot{\alpha}_{i1} \Rightarrow \begin{pmatrix} k=2 \\ j=1 \end{pmatrix}$$

Действительно:

$$W_1 = \sum_{j=1}^{3} \varsigma_j \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i1} \cdot \dot{\alpha}_{ij} = \varsigma_3 \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i1} \cdot \dot{\alpha}_{i3} + \varsigma_2 \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i1} \cdot \dot{\alpha}_{i2} =$$

$$= \varsigma_3 \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i1} \cdot \dot{\alpha}_{i3} - \varsigma_2 \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i2} \cdot \dot{\alpha}_{i1}$$

$$W_2 = \sum_{j=1}^{3} \varsigma_j \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i2} \cdot \dot{\alpha}_{ij} = \varsigma_1 \omega_3 - \varsigma_3 \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i3} \cdot \dot{\alpha}_{i2}$$

$$W_3 = \sum_{j=1}^{3} \varsigma_j \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i3} \cdot \dot{\alpha}_{ij} = \varsigma_2 \omega_1 - \varsigma_1 \omega_2$$

- по аналогии.

Итак:

$$\begin{cases} W_1 = \omega_2\varsigma_3 - \omega_3\varsigma_2 \\ W_2 = \omega_3\varsigma_1 - \omega_1\varsigma_3 \\ W_3 = \omega_1\varsigma_2 - \omega_2\varsigma_1 \end{cases}$$

или:

7) $\vec{W} = \begin{vmatrix} \vec{Э}_1 & \vec{Э}_2 & \vec{Э}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \varsigma_1 & \varsigma_2 & \varsigma_3 \end{vmatrix}$, где $\vec{Э}_i$ - единичные вектора, жёстко связанные с телом.

Положим $\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \vec{Э}_i$ - вектор, где $\omega_1 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i3} \cdot \dot{\alpha}_{i2}$

$$\vec{r} = \sum_{j=1}^{3} \varsigma_j \vec{Э}_j \quad \omega_2 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i1} \cdot \dot{\alpha}_{i3}$$

$$\omega_3 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i2} \cdot \dot{\alpha}_{i1}$$

8) Тогда:

$$\vec{W} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$ -Описывает распределение скоростей.

Назовём $\vec{\omega}$ ***вектором мгновенной угловой скорости***, а прямая на которой он располагается, в рассматриваемый момент времени, проходящую через точку O' – ***осью мгновенного вращения***, или ***мгновенной осью***.

Таким образом, закон распределения скоростей точек абсолютно твёрдого тела в любом движении:

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Это формула Эйлера в векторной записи.

Контрольные вопросы:

1. Сколько координат определяют положение твёрдого тела в пространстве?
2. Что называется вектором мгновенной угловой скорости?
3. Напишите формулу Эйлера.

Лекция 11. Распределение ускорений точек абсолютно твёрдого тела.

Найдём закон распределения.
Дифференцируем по времени формулу Эйлера:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}\times\vec{r}}{dt} + \frac{\vec{\omega}\times d\vec{r}}{dt},$$

Так как $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}\cdot\vec{r}$, то

$$\left[\frac{\vec{\omega}\times d\vec{r}}{dt}\right] = [\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}]] = \omega^2[\vec{\ell}_\omega\times[\vec{\ell}_\omega\times\vec{r}]] \Rightarrow$$

$$[\vec{\ell}_\omega[\vec{\ell}_\omega\times\vec{r}]] = \vec{\ell}_\omega(\vec{\ell}_\omega\cdot\vec{r}) - \vec{r} = \vec{\ell}$$

двойное векторное произведение $[\vec{a}[\vec{b}\cdot\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$\vec{a} = \vec{a}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \omega^2\vec{\ell}$ - формула Ривальса для распределения ускорений точек абсолютно твёрдого тела (рис. 40).

1) $\frac{d\vec{V}'}{dt} = \vec{a}'$ - ускорение начала подвижной системы.

Так как $\vec{\ell}\perp\vec{\omega} : \vec{\ell} + \vec{r} = \vec{\ell}_\omega(\vec{\ell}_\omega\cdot\vec{r}) \Rightarrow по\ \vec{\omega}$

2) $\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} = \vec{a}_{вр.}$ - вращательное ускорение.

3) $\omega^2\vec{\ell} = \vec{a}_{ос.}$ - осестремительное ускорение.

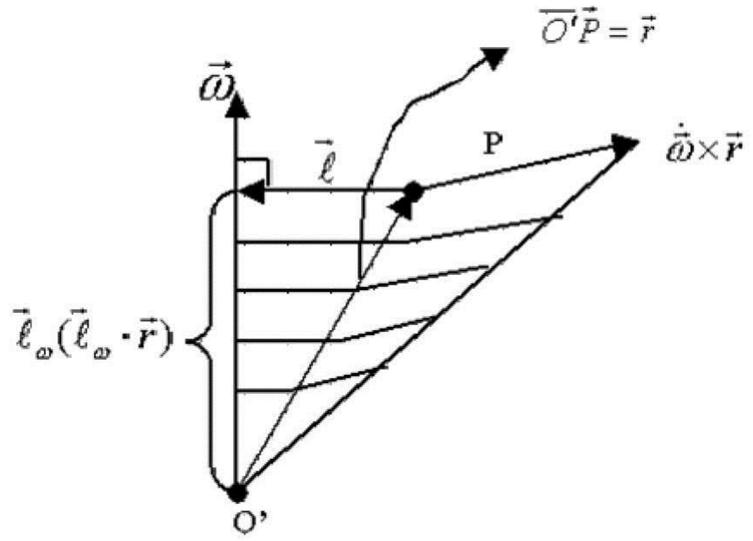


Рис.40.

Контрольные вопросы:

1. Какая формула является исходной при расчёте распределения ускорений точек твёрдого тела?
2. Как перейти от двойного векторного произведения к скалярным произведениям?
3. Напишите формулу Ривалью.

Лекция 12. Поступательное и вращательное движения.

Частными видами движения абсолютно твёрдого тела являются поступательное, вращательное и плоскопараллельное.

Поступательным движением абсолютно твёрдого тела будем называть такое движение, при котором отрезок прямой, соединяющей две любые точки тела, остаётся параллельным неподвижной прямой.

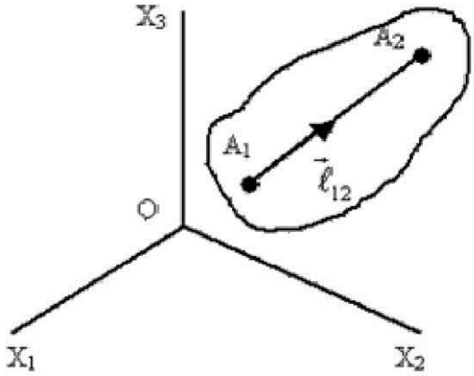


Рис.41.

В поступательном движении все точки тела в каждый момент времени имеет одну и ту же скорость и одно и то же ускорение.

Пусть:

$\overrightarrow{OA_1} = \vec{R}_1$

$\overrightarrow{OA_2} = \vec{R}_2$

Тогда:

$\vec{R}_1 + \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{R}_2$

Положим:

$\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{\ell}_{12}\rho_{12}$.

Так как $\overrightarrow{A_1A_2}$ перемещается параллельно первоначальному направлению, то:

$\frac{d\vec{\ell}_{12}}{dt} = 0$

Тогда:

$\frac{d\vec{R}_1}{dt} + \rho_{12}\frac{d\ell_{12}}{dt} = \frac{d\vec{R}_2}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{R}_1}{dt} = \frac{d\vec{R}_2}{dt} \Rightarrow \vec{V}_1 = \vec{V}_2$

(Аналогично из формулы Эйлера при $\vec{\omega} = 0$: $\vec{V} = \vec{V}' + [\vec{\omega} \times \vec{r}]$)

Очевидно и наоборот, если скорости всех точек равны между собой в каждый момент времени, то тело движется поступательно.

Пусть:

$\frac{d\vec{R}_1}{dt} = \frac{d\vec{R}_2}{dt} \Rightarrow \vec{R}_1 = \vec{R}_2 + \vec{C}_1$,где $\vec{C}_1$- вектор постоянной длины и неизвестного направления относительно неподвижной системы.

К тому же $\vec{C}_1$тело движется поступательно.

Рассмотрим вращение тела вокруг неподвижной оси.

Пусть две точки А1 и А2 неподвижны. Очевидно, что все точки прямой А1А2 неподвижны. Введём неподвижную систему X1, X2, X3: X3 по А1А2. Положение тела определяется точками А1, А2, Р, а из трех координат точки Р только одна независимая, так как имеются два уравнения связи. Можно взять угол θ(рис.42).

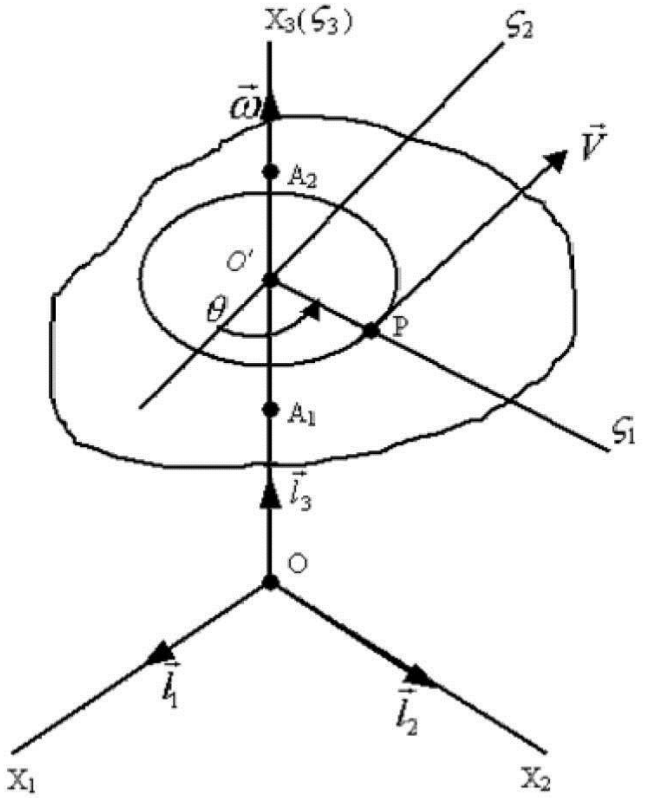


Рис.42.

Поясним: введём подвижную систему $O'\varsigma_3$ по Ox_3

$(Ox_1,\hat{}\, O\varsigma_1) = \theta$.

Тогда таблица косинусов:

	ς_1	ς_2	ς_3
x_1	$\cos\theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$	0
x_2	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$	$\cos\theta$	0
x_3	0	0	1

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i3} \cdot \dot{\alpha}_{i2} = 0$$

$$\omega_2 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i1} \cdot \dot{\alpha}_{i3} = 0$$

$$\omega_3 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i2} \cdot \dot{\alpha}_{i1} = (-\sin\theta)(-\sin\theta) \cdot \dot{\theta} + \cos\theta\cos\theta \cdot \dot{\theta} + 0 = \dot{\theta}$$

<u>Распределение скоростей:</u>

$$\vec{\omega} = \vec{\ell}_3 \frac{d\theta}{dt}; \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\ell}_3 \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\omega = \dot{\theta}$$

$$\vec{V} = [\vec{\omega} \times \vec{r}] \Rightarrow V = \omega \cdot r \Rightarrow$$ Так как движется в плоскости.

<u>Распределение ускорений:</u>

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \omega^2 \vec{l}$$

$$\vec{l} = -\vec{r}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{вр.} &= \dot{\omega} r \\ a_{ц.} &= \omega^2 r \end{aligned}\right\} \quad a = \sqrt{a^2{}_{вр.} + a^2{}_{ц}}$$

Контрольные вопросы:

1. Какое движение твёрдого тела называется поступательным?
2. Сколькими параметрами определяется положение тела при вращении вокруг неподвижной оси?
3. Напишите формулы компонент ускорения во вращательном движении тела.

Лекция 13. Плоскопараллельное движение.

Плоскопараллельным называется такое движение абсолютно твёрдого тела, при котором скорости всех его точек параллельны некоторой неподвижной плоскости π.

π - плоскость (x1,x2)||(y1,y2).

По формуле Эйлера:

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Так как $(\vec{V}\vec{\ell}_3) = 0, (\vec{V}'\vec{\ell}_3) = 0$, то

$$(\vec{V}\vec{\ell}_3) = (\vec{V}'\vec{\ell}_3) + ([\vec{\omega} \times \vec{r}]\vec{\ell}_3) \Rightarrow ([\vec{\omega} \times \vec{r}]\vec{\ell}_3) = 0$$

(круговая перестановка - $(\vec{\omega}[\vec{r} \times \vec{\ell}_3]) = ([\vec{\omega} \times \vec{r}]\vec{\ell}_3)$)

или $\left(\vec{\omega}\begin{vmatrix} \vec{\ell}_1 & \vec{\ell}_2 & \vec{\ell}_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = 0$.

Т. е. скалярное произведение векторов $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)и(y_2, -y_1, 0)$:

$$\omega_1 y_2 - \omega_2 y_1 + \omega_3 0 = 0$$.

В силу произвольности координат y1, y2 точки P =>

$$\omega_1 = \omega_2 = 0$$.

Итак: вектор мгновенной угловой скорости расположен на оси $O'y_3$.

Обычно рассматривают плоское сечение тела || π - фигуру S.

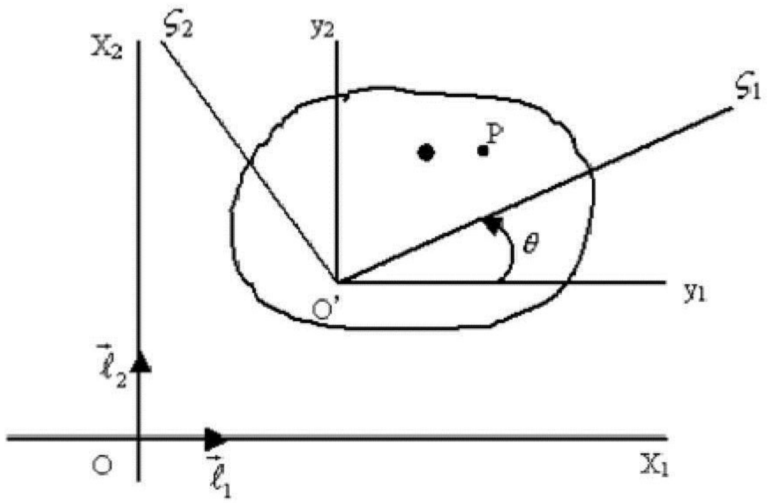


Рис.43.

Положение S определяется тремя параметрами:

1) 2 – е координаты точки O',

2) θ - угол поворота жёстко связанных осей (рис. 43).

Для точки P в плоскости (ς_1, ς_2):

$\vec{V} = \vec{V}' + [\vec{\omega} \times \vec{r}]$, где $\vec{r} = \overline{O'P}$.

Или (совместив O'с O):

$$\vec{V} = \vec{V}' + \begin{vmatrix} \vec{\ell}_1 & \vec{\ell}_2 & \vec{\ell}_3 \\ 0 & 0 & \omega \\ x_1 & x_2 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = V_1' - \omega \cdot x_2 \\ V_2 = V_2' - \omega \cdot x_1 \end{cases} \quad \text{(A).}$$

Так как $\vec{\omega} \perp \vec{V}' \Rightarrow \exists$ точка в каждый момент времени, в которой скорость в этот момент равна нулю.

Пусть это O*(x1*, x2*).

$$\text{Тогда: (B)} \begin{cases} O = V_1' - \omega \cdot x_2^* \\ O = V_2' + \omega \cdot x_1^* \end{cases} \Rightarrow O^*\left(x_1^* = -\frac{V_2'}{\omega}, x_2^* = \frac{V_1'}{\omega}\right)$$

То есть если $\omega \neq 0$, то $\exists$ единственная точка, скорость которой равна нулю. Вычитая (B) из (A) получим:

$$\begin{cases} V_1 = \omega(x_2^* - x_2) = -\omega(x_2 - x_2^*) \\ V_2 = \omega(x_1 - x_1^*) \end{cases}$$

Если поместить начало координат в точку O*, то *в этот момент времени* распределение скоростей точек будет таким же, как во вращательном движении вокруг неподвижной оси. Точка O* называется центром мгновенного вращения, или мгновенным центром скоростей.

Пример: нахождение центра мгновенного вращения, если известно направление скоростей двух точек тела (рис. 44).

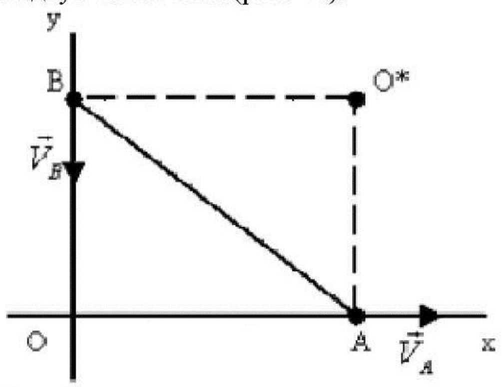


Рис.44.

Обратное рассуждение:

Если центр найден, то все скорости направлены $\perp$ радиусу - вектору. Поэтому (обратно) для нахождения центра надо проводить $\perp$ к скоростям до пересечения.

Пример: палочка AB = *l* скользит по прямым Ox и Oy.

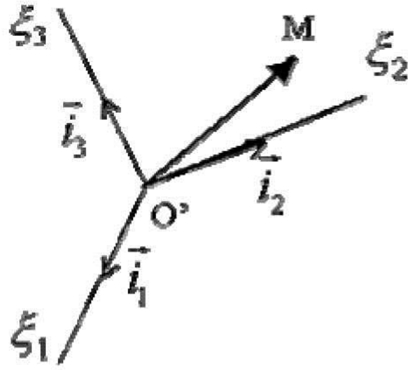
По формуле Ривальса можно найти распределение ускорений, мгновенный центр ускорений, а так же вычислить ускорение центра мгновенного вращения (и скорость мгновенного центра ускорений).

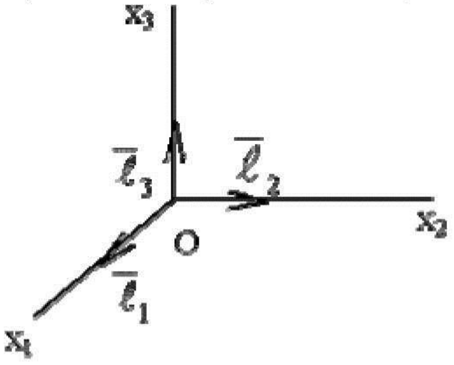
Контрольные вопросы:

1. Какое движение твёрдого тела называется плоскопараллельным?
2. Что такое мгновенный центр скоростей?
3. Как найти мгновенный центр скоростей, если известны скорости двух точек твёрдого тела?

Лекция 14. Сложное движение точки.

Для описания движения введём неподвижную и подвижную системы координат.





Рассмотрим движение точки М в подвижной системе отсчета ξ_1, ξ_2, ξ_3 (рис. 45). Для этого задают:

1) $\bar{r} = \sum_{s=1}^{3} \vec{i}_s \xi_s$, где $\vec{i}_s$ - орты подвижной системы.

2) Движение системы ξ_s относительно неподвижных осей.

Пусть $\overrightarrow{OM} = \vec{R}, \overrightarrow{OO'} = \vec{R}' \Rightarrow \vec{R} = \vec{R}' + \bar{r}$

Найдем скорость точки М в неподвижной системе (дифференцированием):

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \frac{d\bar{R}'}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Очевидно:

$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}$ - искомая скорость;

$\frac{d\vec{R}'}{dt} = \vec{V}'$ - скорость начала подвижной системы.

$$\bar{i}_s = \bar{i}_s(t)$$

Найдём $\frac{d\bar{r}}{dt}$ с учётом $\bar{i}_s = \bar{i}_s(t)$, $\xi_s = \xi_s(t)$ $\xi_s = \xi_s(t)$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \sum_{s=1}^{3} \xi_s \frac{d\bar{i}_s}{dt} + \sum_{s=1}^{3} \bar{i}_s \frac{d\xi_s}{dt}$$

1) $\sum_{s=1}^{3}\xi_s\frac{d\bar{i}_s}{dt}=\sum_{s=1}^{3}\xi_s\left[\bar{\omega}\times\bar{i}_s\right]=\left[\bar{\omega}\times\bar{r}\right]$

$\left\{\frac{d\bar{i}_s}{dt}=\left[\bar{\omega}\times\bar{i}_s\right]\right.$, где $\bar{\omega}$ - мгновенная угловая скорость вращения подвижной системы отсчета по формуле Эйлера

2) $\sum_{s=1}^{3}\bar{i}_s\frac{d\xi_s}{dt}=\frac{\widetilde{d\bar{r}}}{dt}$ - назовем **<u>относительной производной</u>**

Итак:

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=\left[\bar{\omega}\times\bar{r}\right]+\frac{\widetilde{d\bar{r}}}{dt}\Rightarrow\vec{V}=\vec{V}'+\left[\bar{\omega}\times\bar{r}\right]+\frac{\widetilde{d\bar{r}}}{dt}$$

Если $\xi_s=const$, тт $\frac{\widetilde{d\bar{r}}}{dt}=0$ (т. е. нет относительного движения):

Поэтому:

$\vec{V}_{отн.}=\sum_{s=1}^{3}\bar{i}_s\xi_s$ - **<u>относительная скорость.</u>**

<u>Переносная скорость</u> (навязывается движением системы):

$\vec{V}_{пер}=\vec{V}'+\left[\bar{\omega}\times\bar{r}\right]$.

Это скорость того места, где в данный момент времени находится точка М.

Окончательно :

$\vec{V}=\vec{V}_{пер}+\vec{V}_{отн}$

Найдем ускорение точки относительно неподвижной системы отсчета, если заданы относительные координаты $\xi_s(t)$ и движение подвижной системы.

Дифференцируем:

$\vec{V}=\vec{V}_{пер}+\vec{V}_{отн}$:

$$\bar{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d\vec{V}_{пер}}{dt}+\frac{d\vec{V}_{отн}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{V}_{пер}}{dt}=\{\vec{V}_{пер.}=\vec{V}'+\bar{\omega}\times\bar{r}\}=\frac{d\vec{V}'}{dt}+\left[\frac{d\bar{\omega}}{dt}\times\bar{r}\right]+\left[\bar{\omega}\times\frac{d\bar{r}}{dt}\right]$$

где $\frac{d\vec{V}'}{dt}=\bar{a}'$ - ускорение точки O’

$$\left[\bar\omega\times\frac{d\bar r}{dt}\right]=\left\{\frac{d\bar r}{dt}=\left[\bar\omega\times\bar r\right]+\frac{\tilde d\bar r}{dt}\right\}=\left[\bar\omega\times\left[\bar\omega\times\bar r\right]\right]+\left[\bar\omega\times\frac{\tilde d\bar r}{dt}\right]=$$
$$=\omega^2\bar l+\left[\bar\omega\times\vec V_{отн}\right]$$

здесь $\bar l$ - вектор от точки М к мгновенной оси под прямым углом (см. формулу Ривальса)

$$\frac{d\vec V_{отн}}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{3}\bar i_s\dot\xi_s=\sum_{s=1}^{3}\frac{d\bar i_s}{dt}\dot\xi_s+\sum_{s=1}^{3}\bar i_s\ddot\xi_s$$

$$\sum_{s=1}^{3}\frac{d\vec i_s}{dt}\dot\xi_s=\left\{\frac{d\vec i_s}{dt}=\left[\vec\omega\times i_s\right]\right\}=\left[\vec\omega\times\vec V_{отн}\right]$$

$$\vec a_{отн}=\frac{\tilde d\vec V_{отн}}{dt}=\sum_{s=1}^{3}\bar i_s\ddot\xi_s$$

- <u>относительное ускорение (равно 0, если точка М движется в подвижной системе отсчета прямолинейно и равномерно).</u>

$$\vec a=\frac{dV}{dt}=\vec a'+\left[\frac{d\vec\omega}{dt}\times\vec r\right]+\omega^2\bar l+2\left[\vec\omega\times\vec V_{отн}\right]+\vec a_{отн}$$

<u>**Переносное ускорение**</u> – определяется как ускорение того места в подвижной системе отсчета, в которой точка М находится в рассматриваемый момент времени; вычисляется по формуле Ривальса:

$$\vec a_{пер}=\vec a'+\left[\frac{d\vec\omega}{dt}\times\vec r\right]+\omega^2\bar l$$

Ускорение Кориолиса: $\vec a_{кор}=2\left[\vec\omega\times\vec V_{отн}\right]$

Половина ускорения Кориолиса получена при дифференцировании по времени переносной скорости, а вторая половина – при дифференцировании относительной скорости.

$\vec a=\vec a_{пер}+\vec a_{кор}+\vec a_{отн}$ - <u>формула Кориолиса.</u>

где $\vec a_{пер}=\vec a'+\left[\frac{d\vec\omega}{dt}\times\vec r\right]+\omega^2\bar l$;

$\vec a_{кор}=2\left[\vec\omega\times\vec V_{отн}\right]$;

$$\vec a_{отн}=\frac{\tilde d\vec V_{отн}}{dt}=\sum_{s=1}^{3}\vec i_s\ddot\xi_s$$

Формула Кориолиса позволяет вычислить <u>**абсолютное ускорение точки,**</u> если ее положение определяется координатами относительно подвижной системы отсчета.

Контрольные вопросы:

1. Что называется переносным и относительным движениями?

2. Напишите формулу скорости в сложном движении точки.
3. Из каких частей складывается ускорение Кориолиса?

Лекция 15. Основы динамики точки.

Динамикой называется та часть, в которой рассматриваются влияние сил на состояние движения материальных объектов.

В этом разделе в качестве моделей реальных тел принимается материальная точка

Законы Ньютона. Правило сложения сил.

Рассмотрим движение материальной точки (рис. 46) в инерциальной системе отсчёта под действием сил, обусловленных взаимодействием точек с другими точками и телами (т. е. возникающих в результате взаимодействия материальных объектов).

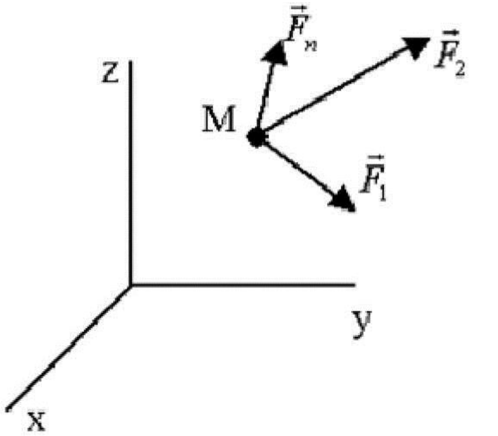


Рис.46.

Заметим, что при движении в неинерциальной системе отсчёта относительные движения частично определяются движением самой системы отсчёта.

Уравнения движения составляются на основе законов Ньютона.

Трактат «Математические начала натуральной философии»:

1687 г. – год возникновения *теоретической механики.*

Законы Ньютона – идеализированные законы природы, но для практики это допустимо в очень широких пределах.

Введём *меры движения.*

Количество движения – равно произведению массы m на вектор скорости точки:

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{V},$$

где m = const > 0 – мера инертности материи.

Момент количества движения, относительно начала координат (рис. 47):

$$\vec{G} = [\vec{r} \times m\vec{V}].$$

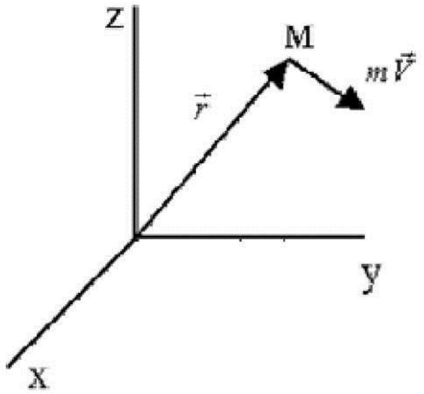


Рис.47.

Кинетическая энергия материальной точки:

$$T = \frac{mV^2}{2}$$ (скаляр)

В дальнейшем покажем, что в ряде случаев движение точки наглядней описывается через $\vec{G}$ или T.

При формулировании законов Ньютона обозначаем:

$\vec{f}_{\alpha\beta}$ - сила взаимодействия между точками M_α и M_β;

$\vec{F}$ - суммарная сила, приложенная к точке М , взаимодействующей со многими точками.

Первый закон Ньютона: материальная точка пребывает в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения относительно инерциальной системы отсчёта до тех пор, пока действующие на неё силы не изменят это состояние.

То есть изолированная точка либо покоится, либо движется прямолинейно и равномерно. Причина изменения движения – вне самой точки.

Второй закон Ньютона: производная по времени от количества движения материальной точки геометрически равна силе, приложенной к точке. Или, при постоянной массе, произведение массы точки на её абсолютное ускорение геометрически равно приложенной к материальной точке силе, т. е.

$$\frac{d}{dt}(m\vec{V}) = \vec{F}$$ или $$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}$$, если m = const.

Связь кинематической величины – ускорения с динамической величиной – силой через коэффициент пропорциональности – массу.

Третий закон Ньютона: две любые материальные точки взаимодействуют друг с другом с силами, направленными по прямой, соединяющей эти точки, равными по величине и противоположно направленными (рис. 48).

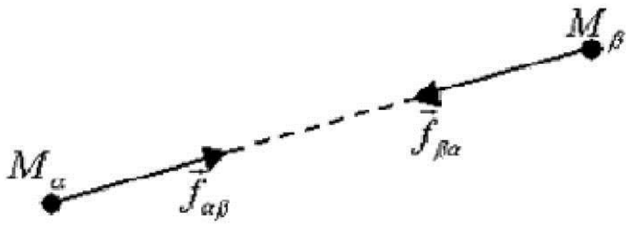


Рис.48.

Рассмотрим воздействие точки М1 с остальными точками (рис. 49).

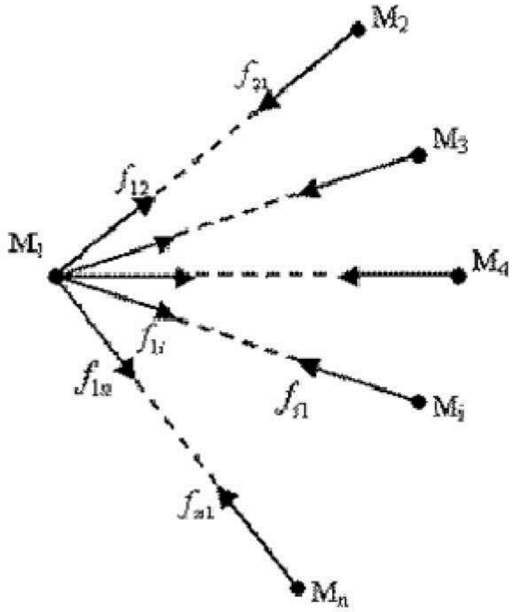


Рис. 49.

Для $\vec{a}_{1i}$ имеем ускорение:

$$m_1\vec{a}_{12} = \vec{f}_{12}$$

$$m_1\vec{a}_{13} = \vec{f}_{13}$$

....

$$m_1\vec{a}_{1n} = \vec{f}_{1n}$$

Принцип независимости действия сил: ускорение $\vec{a}_{1i}$, вызываемое силой f_{1i}, определяется только этой силой и не зависит от других сил.

Следствие:

$$\sum_{i=2}^{n}\vec{a}_{1i} = \vec{a}_1;$$

$$m_1\sum_{i=2}^{n}\vec{a}_{1i} = \sum_{i=2}^{n}\vec{f}_{1i}$$; обозначая $$\sum_{i=2}^{n}\vec{f}_{1i} = \vec{F}_1;$$

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1$$

Геометрическая сумма ускорений $\vec{a}_{1r}$, вызываемых силами взаимодействия точки М1 с остальными точками, пропорциональна геометрической сумме сил взаимодействия – **правило параллелограмма для сложения сил.**

<u>От чего зависит сила $\vec{F}$?</u>

1) от координат точки в данный момент времени;
2) от предистории движения (старение);
3) от окружающей среды (температура);
4) сопротивление воздуха.

и т. д.

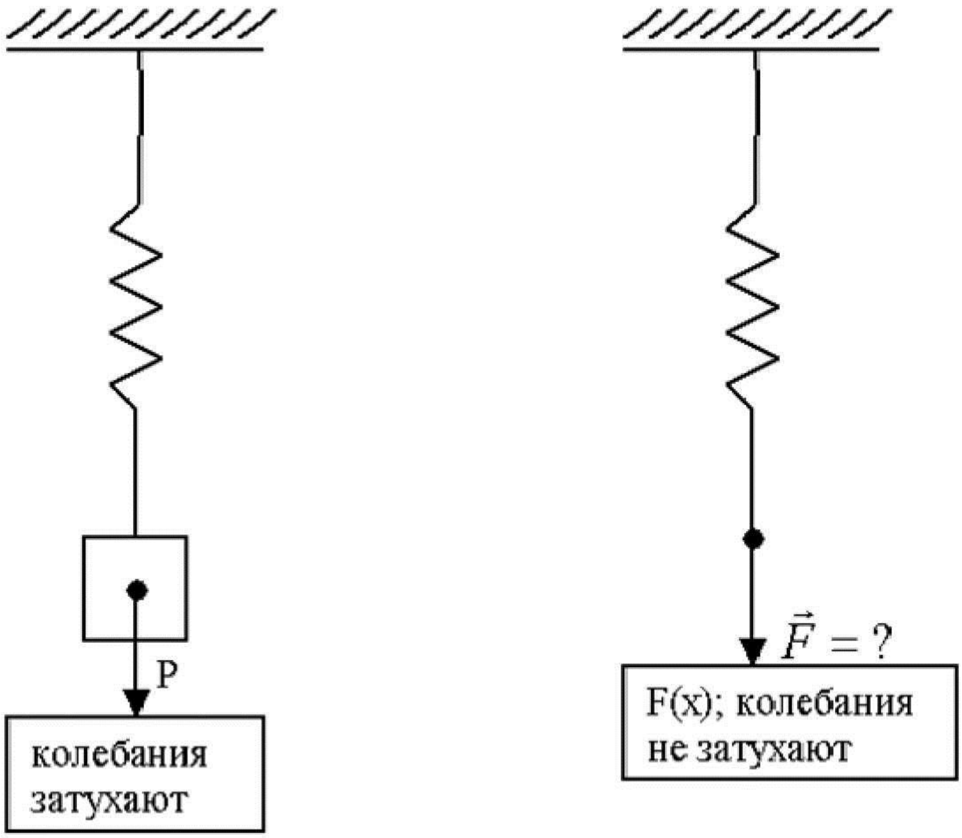


Рис.50.

Идеализация: силы зависят только от координат точки, от первых производных и явно от времени: $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$

На практике – допустимо.

Развитие физики привело к изменению некоторых устаревших представлений и к выяснению границ области, в пределах которой справедлива механика Ньютона: его понятие об абсолютном пространстве заменено теперь понятием инерциальной системы отсчёта; установлено, что механика Ньютона – классическая механика – неприменима, если относительные скорости точек сравнимы со скоростью света [это область релятивистской или эйнштейновской механики]; неприменима механика классическая и к изучению явлений микромира [это область квантовой механики]. Но они основаны на классической механики. В остальных областях => классическая механика даёт достаточно точные результаты.

Контрольные вопросы:

1. Что называют динамикой?
2. Перечислите меры движения материальной точки
3. Сформулируйте законы Ньютона.
4. Каковы границы области применения классической механики Ньютона?

Лекция 16. Дифференциальные уравнения движения точки.

Рассмотрим движение свободной материальной точки в инерциальной системе отсчёта в декартовых координатах. Из 2-го закона Ньютона:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=F_z$$

причём, Fx, Fy, Fz – могут зависеть от координат, первых производных, времени: $\vec{F}\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right)$.

Если известен закон движения (например из кинематики):

$$x=f_1(t),\quad y=f_2(t),\quad z=f_3(t),$$

то => Fx(t), Fy(t), Fz(t). Это *первая (прямая) задача динамики точки.*

Если известна сила, то для исследования движения необходимо интегрировать дифференциальные уравнения – это *вторая (обратная) задача динамики точки.*

Формы дифференциальных уравнений движения

1) 2-ой закон Ньютона – для количества движения.

2) Умножим на $\vec{r}$ (векторно):

$$m\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}\Rightarrow\left[\vec{r}\times m\frac{d\vec{V}}{dt}\right]=\left[\vec{r}\times\vec{F}\right]$$

или $\frac{d}{dt}\left[\vec{r}\times m\cdot\vec{V}\right]=\left[\vec{r}\times\vec{F}\right]$ - *уравнение момента количества движения.*

[Почему? – самостоятельно. Учесть $\left[\vec{V}\times\vec{V}\right]=0$].

Производная по времени от момента количества движения геометрически равна моменту силы.

Подробная запись (координатная):

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

3) Умножим скалярно на элементарные перемещения $d\vec{r}=\vec{V}\cdot dt$:

$$\left(m\frac{d\vec{V}}{dt}\vec{V}\cdot dt\right)=\left(\vec{F}\cdot d\vec{r}\right).$$

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right)=\left(\vec{F}\cdot d\vec{r}\right)$$

- *уравнение кинетической энергии.*

Дифференциал кинетической энергии точки равен элементарной работе суммы сил, приложенных к точке, на действительном перемещении.

О первых интегралах (законы сохранения).

Из дифференциальных уравнений: функция координат, их производных по времени, являющаяся постоянной в силу уравнений (то есть её производная по времени равна нулю) => называется первым интегралом.

Получим такие условия.

Если $f_j(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$ - первый интеграл, то $f_j = C_j$ и $\dfrac{df_j}{dt} = 0$

1) Если Fx = 0, то $m \cdot \dfrac{d^2 x}{dt^2} = 0 \Rightarrow m \cdot \dot{x} = const$, $Q_x = const$ - интеграл количества движения (*закон сохранения количества движения*).

2) Если $x \cdot F_y - y \cdot F_x = 0$ (то есть проекция момента силы на ось z),

то из

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \Rightarrow m \cdot (x\dot{y} - y\dot{x}) = const$$,

$G_z = const$ - интеграл момента количества движения (*закон сохранения момента количества движения*).

3) Получим интеграл энергии.

$$d\left(\frac{m \cdot \upsilon^2}{2}\right) = (\vec{F} \cdot d\vec{r})$$.

Пусть правая часть есть полный дифференциал некоторой скалярной функции – *потенциала силового поля* $\Pi(x, y, z, t)$.

Тогда:

$$F_x = \frac{\partial \Pi}{\partial x},\quad F_y = \frac{\partial \Pi}{\partial y},\quad F_z = \frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}dz + \frac{\partial \Pi}{\partial t}dt$$

Работа:

$$(\vec{F} \cdot d\vec{r}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial \Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}dz = d\Pi - \frac{\partial \Pi}{\partial t}dt.$$

Чтобы $(\vec{F} d\vec{r})$ было полным дифференциалом:

1) $\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0$ - то есть поле *стационарно* (не зависит от t).

2) $\exists \Pi$, $\Pi(x, y, z)$ с условиями из высшей математики:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z \partial y};\quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z};\quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial x}$$

или

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z};\quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x};\quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

или

$$rot\vec{F} \equiv \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0$$

Иначе: если $rot\vec{F} = 0$ и $\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = 0$, то $(\vec{F}d\vec{r}) = d\Pi$ и уравнение кинетической энергии будет в полных дифференциалах:

$$d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = d\Pi.$$

Интегрируя:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \Pi(x, y, z) + const.$$

Введём потенциальную энергию:

$$\Upsilon(x, y, z) = -\Pi(x, y, z).$$

Тогда: $\frac{m\upsilon^2}{2} + \Upsilon(x, y, z) = const \equiv E_0$ - интеграл энергии (*закон сохранения механической энергии*).

Если силовое поле потенциально и стационарно, то сумма кинетической и потенциальной энергий свободной материальной точки равна постоянной.

E0 – механическая энергия; находится из начальных условий.

Энергия сохраняется, то есть консервируется => поле называется *консервативным.*

Покажем, что работа сил консервативного поля не зависит от вида траектории, а равна разности значений функции П в конце и начале перемещения (рис.51).

Рис.51.

Работа:

$$\int\limits_{\cup P_1P_2}\left(\vec{F}d\vec{r}\right)=\int\limits_{P_1}^{P_2}d\Pi=\Pi\Big|_{P_2}-\Pi\Big|_{P_1},$$

что и требовалось доказать.

$$\int\limits_{\cup P_2P_1}\left(\vec{F}d\vec{r}\right)=\int\limits_{P_2}^{P_1}d\Pi=\Pi\Big|_{P_1}-\Pi\Big|_{P_2}.$$

Работа сил консервативного поля на замкнутом перемещении равна нулю (рис.52).

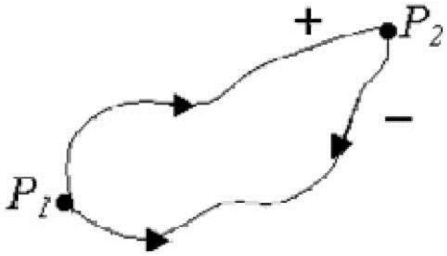


Рис.52.

Контрольные вопросы:
1. Сформулируйте прямую и обратную задачи динамики.
2. Напишите уравнение момента количества движения точки.
3. Что называется перовым интегралом дифференциального уравнения?
4. Какое силовое поле называется консервативным?

Лекция 17. Частные виды силовых полей.

1) Сила зависит только *от времени* – поле однородно, но не стационарно.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x(t).$$

Тогда:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{m}\int_t F_x(\xi)\cdot d\xi + C_1;$$

$$x=\frac{1}{m}\int_t d\eta\int_\eta F_x(\xi)\cdot d\xi + C_1\cdot t + C_2.$$

Аналогично, для y и z.

2) *Проекции силы зависят только от соответствующих координат.*

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x(x).$$

Умножая на dx и интегрируя:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} F_x(\xi)\cdot d\xi + C_1.$$

Дифференцируем снова для проверки:

$$2\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{2}{m}F_x(x);\quad \frac{dx}{dt}\leftrightarrow\frac{dt}{dx}.$$

Положим:

$$\frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} F_x(\xi)\cdot d\xi + C_1 = \Phi(x).$$

Тогда:

$$\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\Phi(x)}$$

(знак берётся из начальных условий).
Разделяя переменные:

$$t=t_0\pm\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}}\rightarrow x(t).$$

3) Проекция силы зависит лишь *от проекции скорости* на эту же ось.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x\left(\frac{dx}{dt}\right).$$

Обозначая:

$$\frac{dx}{dt} = U \Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{1}{m}F_x(U).$$

Разделяя переменные:

$$t = t_0 + m\int_{U_0}^{U}\frac{dU}{F(U)} \Rightarrow \begin{matrix} U = \varphi(t) \\ \dfrac{dx}{dt} = \varphi(t) \end{matrix} \Rightarrow x = \int_{t} \varphi(\xi)\cdot d\xi + C_1.$$

Таким образом, в каждом из трёх частных случаев силовых полей по заданным силе, массе и начальным условиям определены выражения для скорости и ускорения точки.

Контрольные вопросы:

1. В чём суть метода разделения переменных при решении дифференциальных уравнений?
2. В чём особенность интегрирования уравнения движения точки, если сила зависит только от координаты?
3. В каких реальных задачах сила зависит от скорости движения точки?

Лекция 17. Частные виды силовых полей.

1) Сила зависит только *от времени* – поле однородно, но не стационарно.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x(t)$$

Тогда:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{m}\int\limits_t F_x(\xi)\cdot d\xi+C_1$$

;

$$x=\frac{1}{m}\int\limits_t d\eta\int\limits_\eta F_x(\xi)\cdot d\xi+C_1\cdot t+C_2$$

Аналогично, для y и z.

2) *Проекции силы зависят только от соответствующих координат.*

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x(x)$$

Умножая на dx и интегрируя:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{2}{m}\int\limits_{x_0}^{x}F_x(\xi)\cdot d\xi+C_1$$

Дифференцируем снова для проверки:

$$2\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{2}{m}F_x(x);\quad \frac{dx}{dt}\leftrightarrow\frac{dt}{dx}.$$

Положим:

$$\frac{2}{m}\int\limits_{x_0}^{x}F_x(\xi)\cdot d\xi+C_1=\Phi(x)$$

Тогда:

$$\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\Phi(x)}$$

(знак берётся из начальных условий).
Разделяя переменные:

$$t=t_0\pm\int\limits_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}}\to x(t)$$

3) Проекция силы зависит лишь *от проекции скорости* на эту же ось.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

Обозначая:

$$\frac{dx}{dt}=U\Rightarrow\frac{dU}{dt}=\frac{1}{m}F_x(U)$$

Разделяя переменные:

$$U=\varphi(t)$$

$$t=t_0+m\int_{U_0}^{U}\frac{dU}{F(U)}\Rightarrow\ \frac{dx}{dt}=\varphi(t)\ \Rightarrow x=\int_{t}\varphi(\xi)\cdot d\xi+C_1$$

Таким образом, в каждом из трёх частных случаев силовых полей по заданным силе, массе и начальным условиям определены выражения для скорости и ускорения точки.

Контрольные вопросы:

1. В чём суть метода разделения переменных при решении дифференциальных уравнений?
2. В чём особенность интегрирования уравнения движения точки, если сила зависит только от координаты?
3. В каких реальных задачах сила зависит от скорости движения точки?

Лекция 18. Основы динамики системы точек.

Рассмотрим движение n свободных материальных точек относительно инерциальной системы отсчёта (рис. 53).

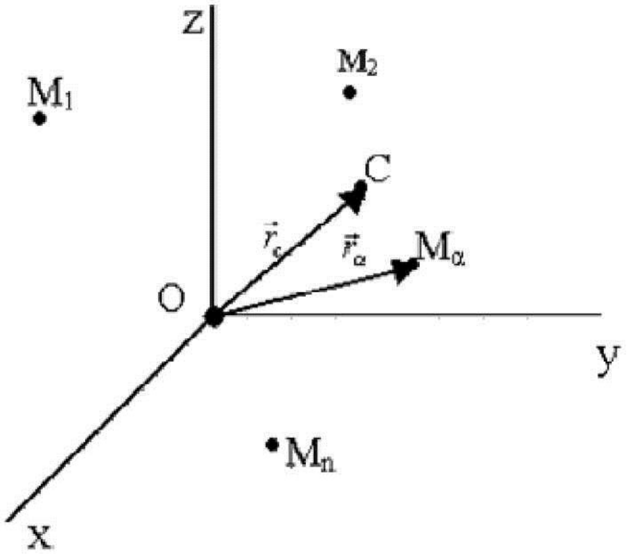


Рис.53.

$M_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$

m_α - масса точки M_α.

Масса всей системы:

$$M = \sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha$$.

Центром масс системы назовём точку C, радиус – вектор которой равен

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \vec{r}_\alpha}{M},$$

где $\vec{r}_\alpha = \overline{OM}_\alpha$.

Основные меры движения системы материальных точек:

1. Суммарное количество движения системы (геометрическая сумма количества движения материальных точек).

$\vec{Q} = \sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \vec{V}_\alpha$, где $\vec{V}_\alpha$ - скорость точки M_α.

Рассмотрим систему точек с постоянными массами => дифференцируя $\vec{r}_c$:

$$\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt}}{M} \quad или \quad M\vec{V}_c = \sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \vec{V}_\alpha$$:

где $\vec{V}_c$ - скорость центра масс.

Итак,

$$\vec{Q} = M\vec{V}_c$$

Количество движения системы материальных точек равно количеству движения массы всей системы, сосредоточенной в центре масс.

2. Сумма моментов количества движения или кинетический момент системы:

$$\vec{G} = \sum_{\alpha=1}^{n} [\vec{r}_\alpha \times m_\alpha \vec{V}_\alpha]$$

$\vec{G}$ представляется в виде одночлена только в случае одинаковых скоростей всех точек системы.

3. Кинетическая энергия системы:

$$T = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{m_\alpha V_\alpha^2}{2}$$

Тоже не всегда представлена в одночленной форме.

Силы разделим на внешние и внутренние.

Внешние силы действуют со стороны масс, не входящих в систему.

Внутренние силы – силы взаимодействия между точками системы.

Обозначим:

$\vec{F}_\alpha^{(e)}$ - суммарная внешняя сила к точке M_α

$\vec{F}_\alpha^{(i)}$ - суммарная сила взаимодействия точки M_α с остальными точками системы.

Деление на внутренние и внешние силы условно.

Получим некоторые свойства внутренних сил.

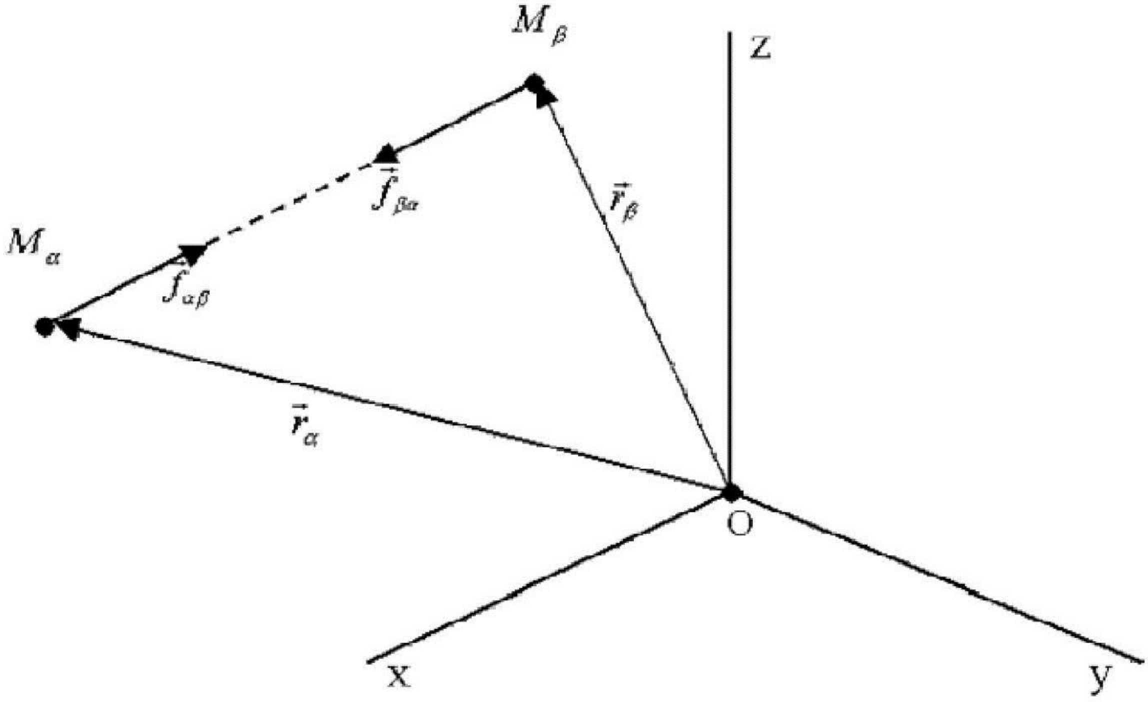


Рис.54.

Рассмотрим точки M_α и M_β (рис. 54).
Из 3 – го закона Ньютона:

$$\vec{f}_{\alpha\beta} = -\vec{f}_{\beta\alpha}.$$

Внутренняя сила на точку M_α:

$$\vec{F}_\alpha^{(i)} = \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{f}_{\alpha\beta}.$$

Очевидно:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \vec{F}_\alpha^{(i)} = 0, \sum_{\alpha=1}^{n} [\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{(i)}] = 0.$$

Итак, сумма внутренних сил и сумма моментов внутренних сил равны нулю относительно любой точки и любой оси.

Рассмотрим сумму *элементарных работ* внутренних сил.

Пусть $\overline{M_\alpha M_\beta} = \vec{\ell}_{\alpha\beta}\rho_{\alpha\beta}$, где $|\vec{\ell}_{\alpha\beta}| = 1$,

$\rho_{\alpha\beta}$ - расстояние между точками M_α, M_β.

Работа на элементарных действительных перемещениях сил взаимодействия двух точек M_α, M_β:

$$(\vec{f}_{\alpha\beta} d\vec{r}_\alpha) + (\vec{f}_{\beta\alpha} d\vec{r}_\beta) = (\vec{f}_{\beta\alpha} d(\vec{r}_\beta - \vec{r}_\alpha)) = (\vec{f}_{\beta\alpha} d(\vec{\ell}_{\alpha\beta}\rho_{\alpha\beta})) = f_{\beta\alpha} d\rho_{\alpha\beta} = -f_{\alpha\beta} d\rho_{\alpha\beta}.$$

[$f_{\beta\alpha}$ - проекция на $\vec{\ell}_{\alpha\beta}$, включающая в себя знак].

Обозначим сумму элементарных работ внутренних сил $A_d^{(i)}$:
(d – означает «на элементарных перемещениях»)

$$A_d^{(i)} = \sum_{\beta=1}^{n-1} \sum_{\substack{\alpha > \beta \\ \alpha=2}}^{n} f_{\beta\alpha} d\rho_{\alpha\beta}$$

Контрольные вопросы:

1. Что называется центром масс системы материальных точек?
2. Назовите основные меры движения системы материальных точек.
3. Перечислите свойства внутренних сил системы точек?

Лекция 19. Общие теоремы динамики системы точек.

Основные (общие) теоремы динамики систем свободных материальных точек являются уравнениями движения систем свободных материальных точек, т. е. математически дифференциальными уравнениями изменений основных мер движения.

1. Для точки M_α уравнение движения относительно инерциальной системы отсчёта:

$$m_\alpha \frac{d\vec{V}_\alpha}{dt} = \vec{F}_\alpha^{(e)} + \vec{F}_\alpha^{(i)}$$

Перенесём все векторы, не изменяя их направления, в центр масс и сложим геометрически:

$$\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \vec{V}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{F}_\alpha^{(e)}$$

Производная по времени от количества движения системы свободных материальных точек равна геометрической сумме внешних сил. Это теорема об изменении количества движения системы.

Так как $\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \vec{V}_\alpha = M\vec{V}_c$ то

$$M\frac{d\vec{V}_c}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{F}_\alpha^{(e)}$$

Это уравнение движения центра масс системы материальных точек с массой, равной массе всей системы, к которой приложена сумма всех внешних сил (главный вектор внешних сил) или теорема о движении центра масс.

2. Умножим уравнение движения точки M_α слева векторно на $\vec{r}_\alpha$ и геометрически сложим, перенося векторы в центр масс:

$$\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{n}[\vec{r}_\alpha \times m_\alpha \vec{V}_\alpha] = \sum_{\alpha}[\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{(e)}]$$

Теорема об изменении кинетического момента системы:

Производная по времени от кинетического момента системы свободных материальных точек равна сумме моментов всех внешних сил (главному моменту всех внешних сил).

Существенно: моменты количества движения и моменты сил вычисляются относительно общего неподвижного начала.

3. Умножая скалярно уравнение движения точки M_α на $d\vec{r}_\alpha = \vec{V}_\alpha dt$ и суммируя:

$$d\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{m_\alpha V_\alpha^2}{2} = \sum_{\alpha=1}^{n}(\vec{F}_\alpha^{(e)} d\vec{r}_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^{n}(\vec{F}_\alpha^{(i)} d\vec{r}_\alpha)$$

или

$$d\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{m_\alpha V_\alpha^2}{2} = \sum_{\alpha=1}^{n}(\vec{F}_\alpha^{(e)} d\vec{r}_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{n-1}\sum_{\substack{\alpha>\beta \\ \alpha=2}}^{n} f_{\beta\alpha} d\rho_{\alpha\beta}$$

Теорема об изменении кинетической энергии системы:

Дифференциал кинетической энергии системы свободных материальных точек равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил.

Интегралы уравнений движения системы:

1) Если равен нулю главный вектор внешних сил, то $\vec{V}_c$ = const, то есть центр масс системы свободных материальных точек движется равномерно и прямолинейно.

2) Если главный момент внешних сил равен нулю, то сохраняется кинетический момент системы свободных материальных точек:

$$\vec{G} \equiv \sum_{\alpha=1}^{n}[\vec{r}_\alpha \times m_\alpha \vec{V}_\alpha] = const$$

3) Если внешние и внутренние силы консервативны, то

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{m_\alpha V_\alpha^2}{2} = \Pi^{(e)} + \Pi^{(i)} + const$$

или

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{m_\alpha V_\alpha^2}{2} + U^{(e)} + U^{(i)} = E_0$$

Здесь:

$\Pi^{(e)}$ - потенциал внешнего силового поля;

$\Pi^{(i)}$ - потенциал взаимодействия точек;

$U^{(e)} = -\Pi^{(e)}$ - потенциальная энергия системы точек во внешнем поле;

$U^{(i)} = -\Pi^{(i)}$ - потенциальная энергия взаимодействующих точек.

Контрольные вопросы:

1. Чем математически являются общие теоремы динамики системы материальных точек?
2. Сформулируйте теорему об изменении кинетического момента системы.
3. Напишите интеграл энергии для системы материальных точек.

Лекция 20. Динамика вращательного движения тела.

Пусть твёрдое тело вращается относительно неподвижной оси. Тогда уравнения движения значительно упрощаются.

Действительно:

1) $\vec{G} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \vec{V}_{\alpha}$ - кинетический момент.

Во вращательном движении $\vec{r} \perp \vec{V}$, поэтому $G = \sum_{\alpha} r_{\alpha} m_{\alpha} V_{\alpha}$.

Но из $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow V = \omega \cdot r$.

Итак:

$$G = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \vec{V}_{\alpha} = \omega \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha}^2 = \omega J_z,$$

где $J_z = \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha}^2$ - момент инерции относительно оси вращения Z.

Уравнение движения:

$$\frac{d}{dt}(J_z \omega) = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \ddot{\varphi} \Rightarrow$$ окончательно, $$J_z \ddot{\varphi} = \sum_k mom_z F_k.$$

2) Кинетическая энергия:

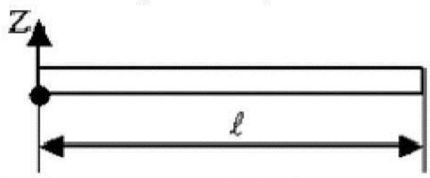
$$T = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha} V_{\alpha}^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha}^2 = \frac{\omega^2}{2} J_z.$$

Итак,

$$T = \frac{J_z \omega^2}{2}.$$

Моменты инерции некоторых тел (рис. 55):

1 Тонкий прямой стержень



$$J_z = \frac{M\ell^2}{3}$$

2. Тонкое кольцо (обод)

$$J_z = Mr^2$$

3. Сплошной диск

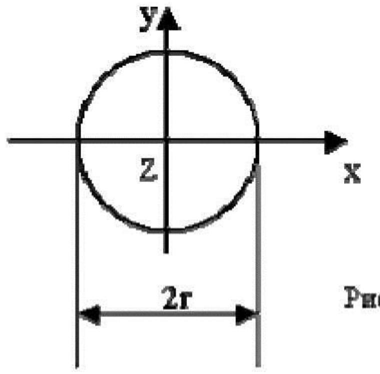
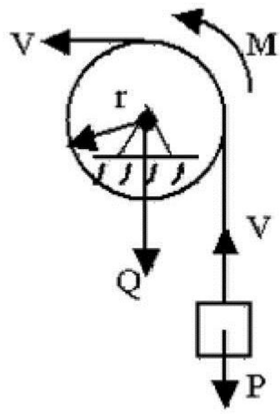


Рис. 55.

$$J_z = \frac{Mr^2}{2}$$

$$J_x = J_y = \frac{Mr^2}{4}$$

Пример:



Q – вес обода.
P – вес груза.
Найти a – ускорения груза P.

Рис.56.

По теореме об изменении кинетического момента системы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{g}Vr + \sum mVr\right) = M - Pr$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{g}Vr + Vr\frac{Q}{g}\right) = M - Pr$$

$$\frac{r(P+Q)}{g}\cdot\frac{d}{dt}V = M - Pr \Rightarrow a = \frac{(M - Pr)g}{r(P+Q)}$$

Таким образом, при вращательном движении твёрдого тела удобно пользоваться соотношениями теоремы об изменении кинетического момента системы.

Контрольные вопросы:

1. Каковы особенности расчётных формул для вращательного движения тела?
2. Напишите формулу кинетической энергии для вращающегося тела.
3. Как найти момент инерции при вращении тонкого кольца?

Лекция 17. Частные виды силовых полей.