ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Пособие написано на основе курса лекций по дисциплинам «Прикладная механика» и «Надежность, ремонт и монтаж металлургического оборудования».

Предназначено для студентов и аспирантов и может быть полезно инженерно-техническим работникам, занимающимся проектированием, изготовлением, эксплуатацией и исследованием металлургических машин.

Содержание

Лекции

Практические занятия

ПЗ 2: Кинематика

ПЗ 3: Динамика

Расчетно-графические работы

Статика

Кинематика

Динамика

Лекция:1,2. Введение. Элементы векторной алгебры.

Лекция:1,2.

Введение.

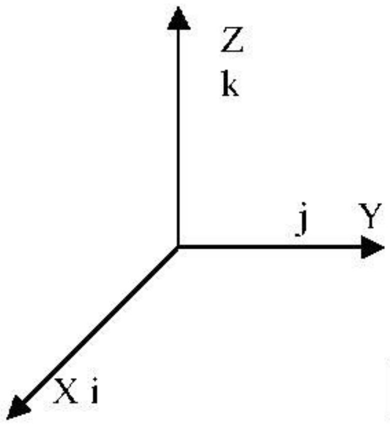
Предметом теоретической механики является простейшее движение тела, в том числе и состояние покоя (V=0)

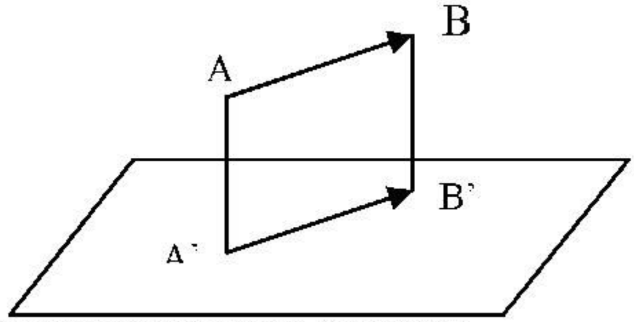
Теоретическая механика – основа для изучения целого ряда предметов.

Элементы векторной алгебры.

1. Основные определения
2. Алгебраические действия над векторами.

Единичный вектор – вектор, модуль которого равен 1.





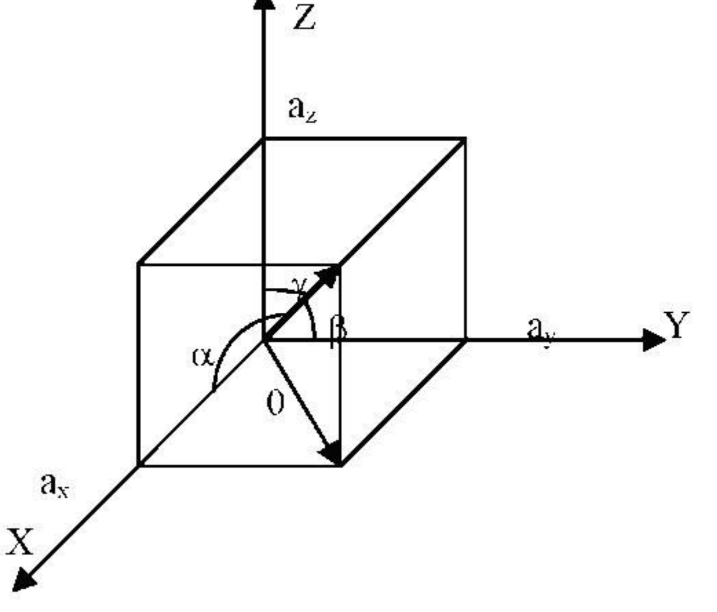
Проекция вектора на плоскость

$$|A'B'| = |AB| \operatorname{Cos}\alpha$$

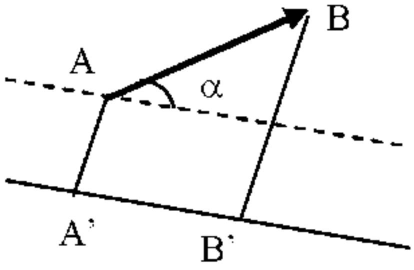
a_{xyz} – ортогональные составляющие

OA – диагональ параллелограмма

Проекция вектора на Декартовы координаты



Проекция вектора на прямую

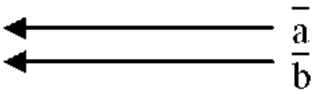


$$\left|A\right| = \sqrt{A_X^2 + A_Y^2 + A_Z^2}$$

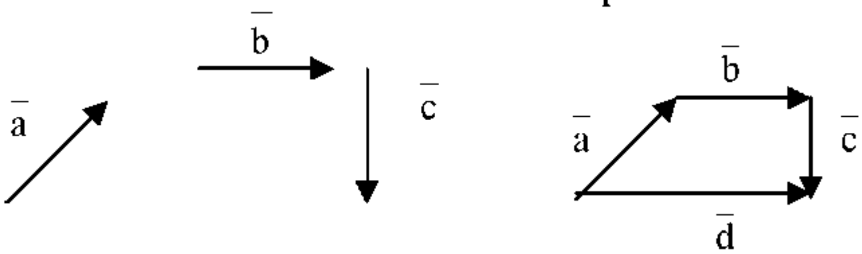
$$\mathrm{Cos}\,\alpha = \frac{A_X}{A} \quad \mathrm{Cos}\,\beta = \frac{A_Y}{A} \quad \mathrm{Cos}\,\gamma = \frac{A_Z}{A}$$

Алгебраические действия над векторами.

$$|\,\overline{a}\,| = |\,\overline{b}\,| \;\rightarrow\; \overline{a} = \overline{b}$$



Сложение векторов.

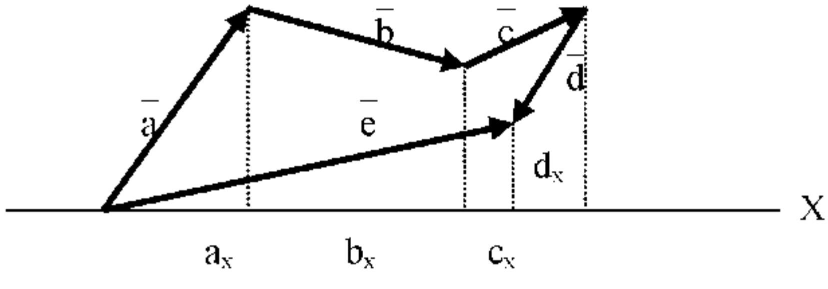


$$\overline{d} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$$

$$\overline{a} = a_X \overline{i} + a_y \overline{j} + a_Z \overline{k}$$

$$\overline{a}_X = a_X i \quad \overline{a}_y = a_y j \quad \overline{a}_Z = a_Z k$$

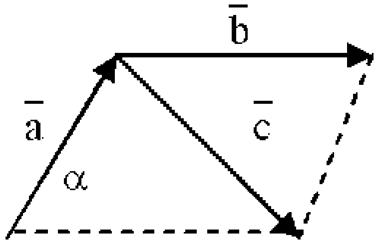
Проекция суммы векторов равна сумме проекций.



$$e_X = a_X + b_X + c_X - d_X$$

Перемножение векторов.

1. Скалярное



$$C = (\bar{a}, \bar{b})$$

Величина скаляра не имеет направления.

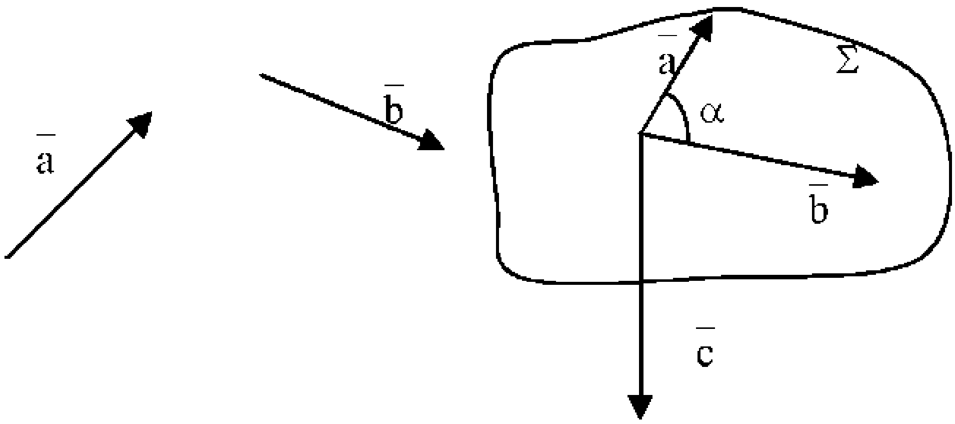
$$c = |a| \cdot |b| \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha$$

$$(i, i) = 1 \quad (i, j) = 0 = (j, k) = (k, j)$$

через проекции

$$c = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

2. Векторное произведение



$\bar{c} = [\ \bar{a}\ ,\ \ \bar{b}\ ]$

Вращение от первого вектора ко 2-му против часовой стрелки.

$$\bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\bar{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\bar{j} + (a_x b_x - a_y b_y)\bar{k}$$

$$[i, i] = 0$$

Статика.

Тема:1. Основные понятия и аксиомы статики.

Лекция:3. Лекция 3.

1. Эквивалентные системы
2. Аксиомы статики
3. Свободные и несвободные тела.

Материальная точка – абстрактное понятие, имеет конечную массу и бесконечно малый размер.

Абсолютно твердое тело – тело не деформируется

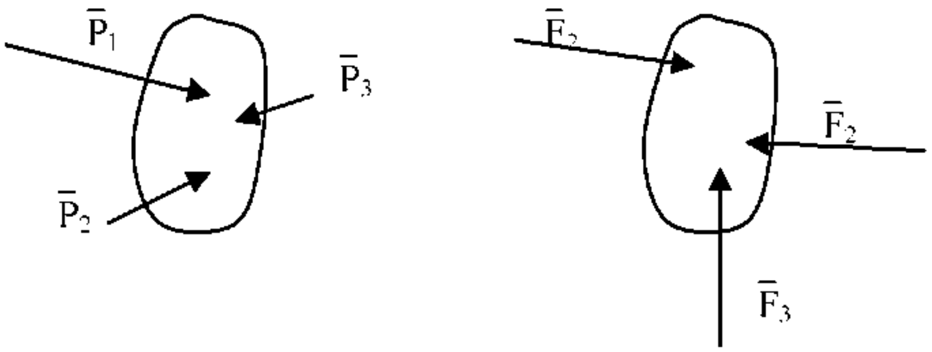
Сила – мера механического воздействия одного тела на другое.

В системе СИ: $1\ Н = 1 Кг \cdot 1 м/с^2$ $1 КгС = 10 Н$

Система сил – совокупность сил, действующих на одно тело.

Если под действием системы сил тело находится в покое или в равновесии – эта система называется уравновешенной системой сил.

Эквивалентные системы сил – такие системы сил, которые оказывают одинаковые воздействия.



$$\{\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3\} \propto \{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3\}$$

Если систему заменить одной силой, то эта сила называется **равнодействующей**.

Эквивалентные системы сил преобразуют тремя операциями:

1. Перенос силы вдоль линии её действия
2. Разложение сил по правилу параллелограмма
3. Прибавление (убавление) к данной системе равнодействующих сил.

Аксиомы статики.

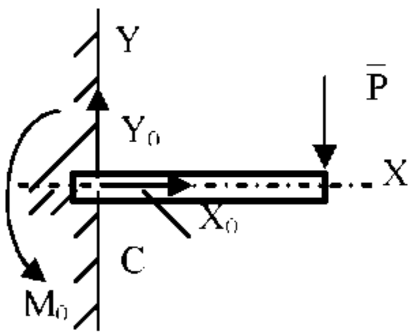
1. Для равновесия 2-х сил необходимо и достаточно, чтобы эти силы были равны по модулю, лежали на одной линии действия и были направлены в противоположные стороны.
2. К телу может быть приложена или отброшена любая уравновешенная система сил.
3. Любая сила (действие) одного тела на другое вызывает обратное (такое же) противодействие.
4. Если система сил уравновешена на каком-то теле, то она будет уравновешена и на любом другом теле.
5. Если система уравновешена на деформируемом теле, то она будет также уравновешена на этом теле, когда оно затвердеет.

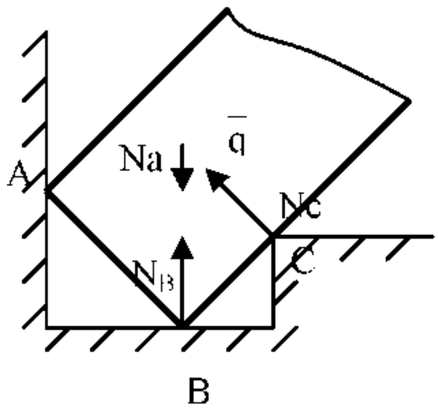
Свободные и несвободные тела.

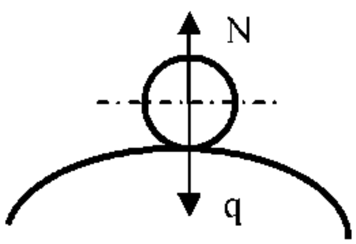
Если тело ограничено в своем движении каким-то препятствием, то это тело несвободно.

Если тело не имеет ограничений, то тело свободно. Ограничения называются опорами и связями.

Со стороны опор на тело действуют силы реакции, но действуют только в том случае, когда действуют активные силы.







Аксиомы связи.

Всякое несвободное тело может быть превращено в свободное тело, если связи заменить их реакциями.

Тема:2. Плоская система сил.

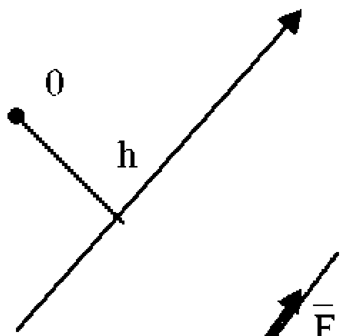
Лекция 4. Лекция 4.

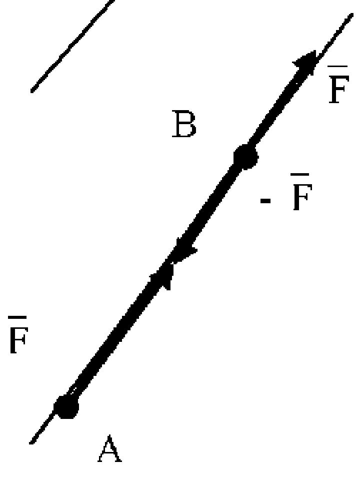
Плоская система сил. Теория параллелей на плоскости.

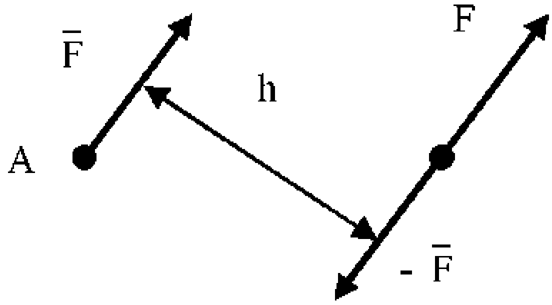
1. Момент силы
2. Перенос силы вдоль линии действия
3. Перенос силы параллельно самой себе
4. Сложение параллельных и антипараллельных сил
5. Пара сил. Момент пары сил
6. Теорема об эквивалентных парах.

Момент может быть положительным (против часовой стрелки) и отрицательным (по ходу часовой стрелки).

$$mom_0 \overline{F} = hF$$







$$m = h \cdot F$$

Сложение параллельных и антипараллельных сил.

$\{F_1, F_2\} \propto \{F_1, F_2, S, -S\} \propto \{R_1, R_2\}$

$R \quad F_1 + F_2$

$\bar{R}_2 \quad \bar{F}_2 + S$

$\frac{AC}{KL} = \frac{CO}{OL}$ $\quad \Delta AOL \sim \Delta KOL$

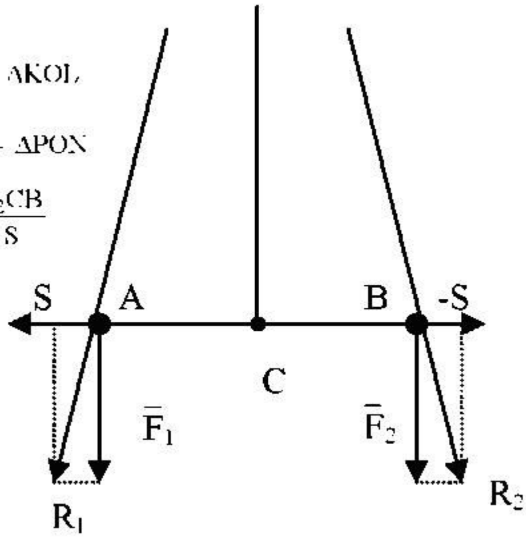
$\frac{AC}{S} \quad \frac{CO}{F} \to CO \quad \frac{F_1 \cdot AC}{S}$ $\quad \Delta BOC \sim \Delta PON$

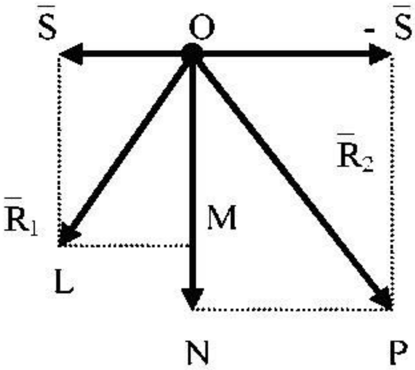
$\frac{F_1 AC}{S} \quad \frac{F_2 CB}{S}$

$\boxed{AC+CB=A}$

$\frac{CB}{NP} = \frac{OC}{ON}$

$\frac{CB}{S} \quad \frac{CO}{F_2} \to CO \quad \frac{F_2 \cdot CB}{S}$



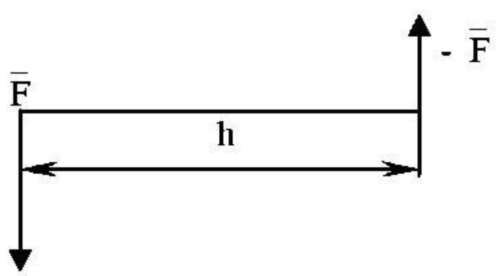


$$\boxed{\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}}$$

Равнодействующая 2-х параллельных сил равна их алгебраической сумме, а линия равнодействия делит расстояние между точками приложения сил обратно пропорционально этим силам.

Пара сил. Момент пары сил.

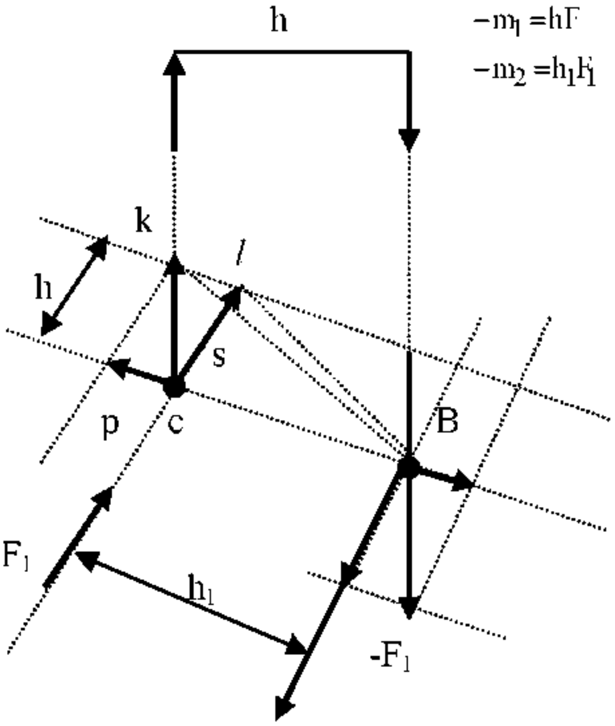
Парой сил называются две антипараллельные силы с равными модулями.



$m = h \cdot \bar{F}$

Теорема об эквивалентных парах.

Эквивалентные пары – пары, имеющие одинаковый момент и направление.



$-m_1 = hF \qquad m_1 = m_2$

$-m_2 = h_1F_1$

$$\left.\begin{matrix} hF = h_1F_1 \\ hF = h_1CL \end{matrix}\right\} \Rightarrow CL = F_1$$

$2A\ \Delta BCK = KCh$

$2A\ \Delta CLB = CLh_1$

$2A\ \Delta BKC = CBn$

$2A\ \Delta CLB = CBn$

$KCh = CLH_1$

Лекция:5 Лекция:5

Приведение плоской системы сил к данному центру.

- Приведение сил по методу Пуанссо
- Теорема Вариньона
- Условие равновесия плоской системы сил.

1) Приведение сил по методу Пуанссо

$* \; m_1 = h_1 \cdot \overline{F_1}$

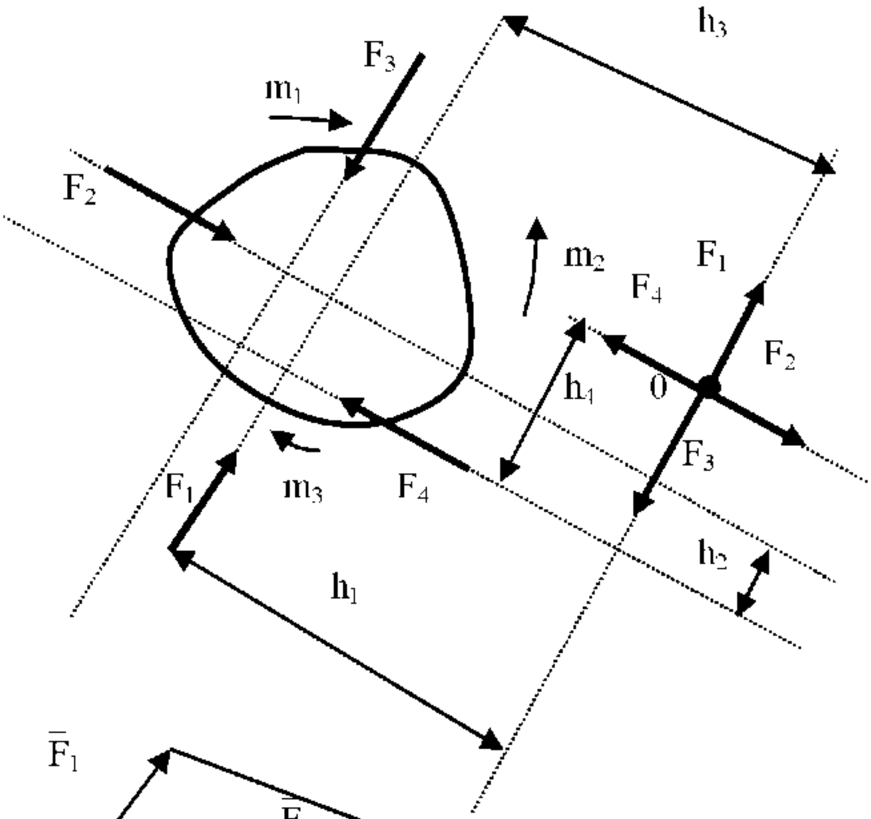
$* \; m_2 = h_2 \cdot \overline{F_2}$

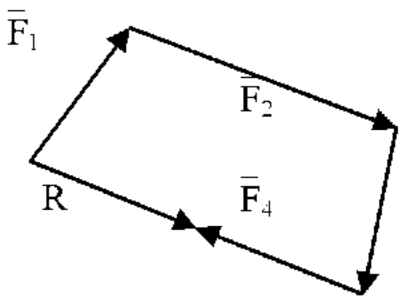
$* \; m_3 = h_3 \cdot \overline{F_3}$

$* \; m_4 = h_4 \cdot \overline{F_4}$

$\overline{R}_1 = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{F}_4$

$m_1 = -m_1 + m_2 - m_3 - m_1^* + m_2^* + m_3^* - m_4^*$





R` – результирующая сила
m` – результирующий момент

$$\overline{R}_1 = \sum_{V=1}^{n} \overline{F}_V$$

$$m' = \sum_{V=1}^{n} m_V$$

Результирующая сила называется главным вектором системы.
Результирующий момент – главным моментом системы.

Любая плоская система сил при приведении к любому центру может быть представлена в виде главного вектора и главного момента системы.

При этом главный вектор системы является геометрической суммой сил, приложенных к телу, а главный момент – алгебраическая сумма всех моментов, в том числе присоединенных пар.

2) Теорема Вариньона.

Если система сил приводится к равнодействующей, то момент равнодействующей относительно любой точки О равен сумме моментов относительно этой точки (центра) всех сил системы.

$$\text{mom}_0 \overline{R} = \sum_{V=1}^{n} \text{mom}_0 \overline{F}_V$$

3) Условие равновесия плоской системы сил.

$\overline{R}' = 0; \quad m' = 0$ в векторной форме

$$\left.\begin{array}{l} R'_X = \sum X_V = 0 \\ R'_Y = \sum Y_V = 0 \\ m' = \sum\limits_{V=1}^{n} m_0 \overline{F}_V = 0 \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} \sum X_V = 0 \\ \sum m_A F_V = 0 \\ \sum m_B F_V = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \sum m_A \overline{F}_V = 0 \\ \sum m_B \overline{F}_V = 0 \\ \sum m_C \overline{F}_V = 0 \end{array}\right\} \text{В аналитическом виде}$$

$AB \not\perp OX$ т.к А, В, С не лежат на одной прямой

Тема 3. Произвольная система сил.

Лекция 6. Приведение произвольной системы сил к единому центру и равновесие произвольной системы сил.

Лекция:6.

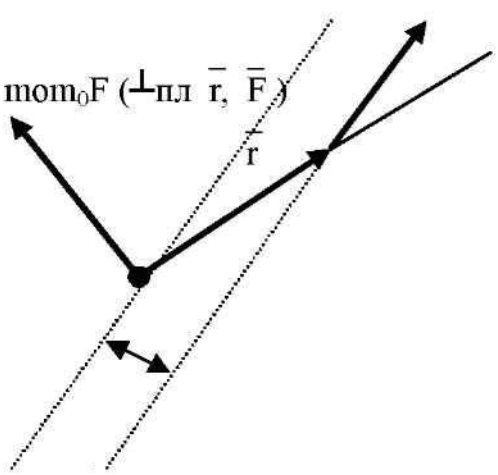
1. Преобразование пар в пространстве
2. Метод Пуанссо
3. Условия равновесия в векторной и аналитической формах
4. Равновесие твердого тела с одним или двумя закрепленными точками.

$\text{MOM}_0 \overline{F} = [\overline{r}, F]$

$|\overline{\text{Mom}}_0 \overline{F}| = |\overline{r}| \cdot |\overline{F}| \cdot \text{Sin}\,\alpha$

$h = r \cdot \text{Sin}\,\alpha$

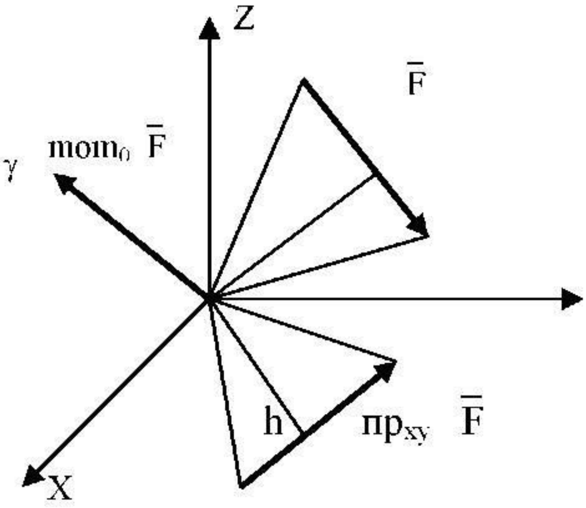
$|\overline{\text{Mom}}_0 \overline{F}| = Fh$



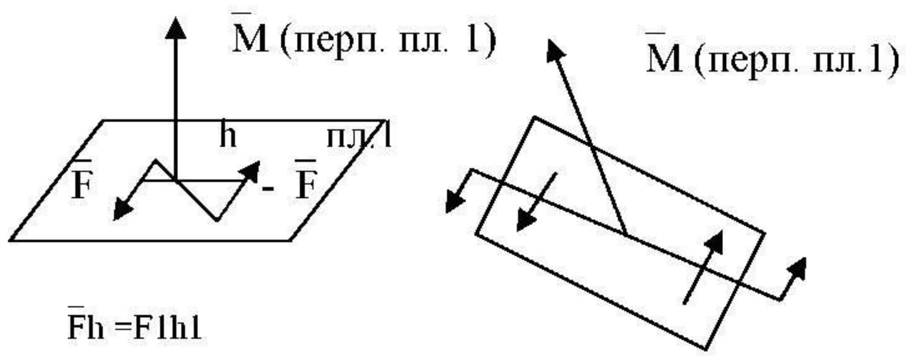
$mom_Z \bar{F}$

$S_{A'OB'} = S_{AOB} \cdot \sin\gamma$

$mom_Z F = \left| \overline{mom}_Z \bar{F} \right| \cdot \sin\gamma$



$\left| \bar{M} \right| = \left| \bar{F} \right| \cdot \left| \bar{h} \right|$



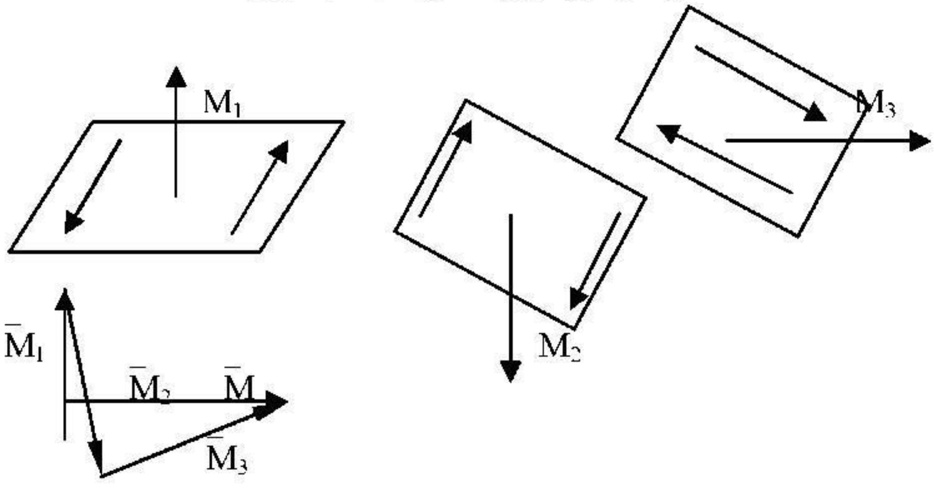
$\bar{F}h = F1h1$

Каждая пара может быть изображена одним вектором, а один вектор реализуется множеством пар.

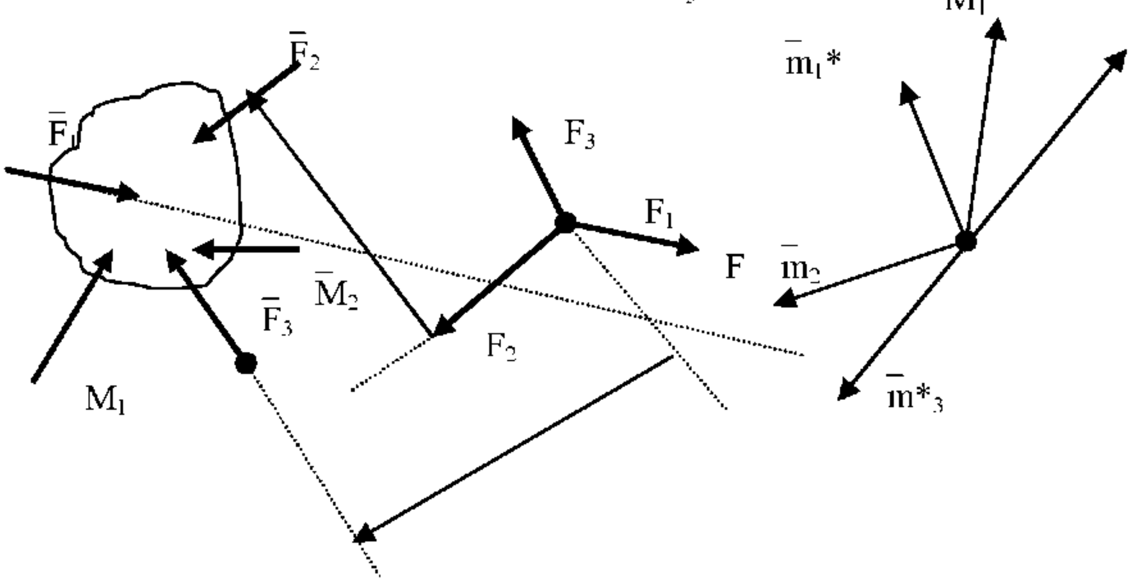
Теорема об эквивалентных парах.

Эквивалентные пары, лежащие в параллельных плоскостях, имеют один и тот же момент и по значению и по направлению.

Сложение пар в пространстве.



Метод Пуансо.



$$\overline{R}' = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$$

$$\overline{M}' = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \overline{M}_1^* + \overline{M}_2^* + \overline{M}_3^*$$

$$\left\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{M}_1, \overline{M}_2\right\} \infty \left\{\overline{R}', \overline{M}'\right\}$$

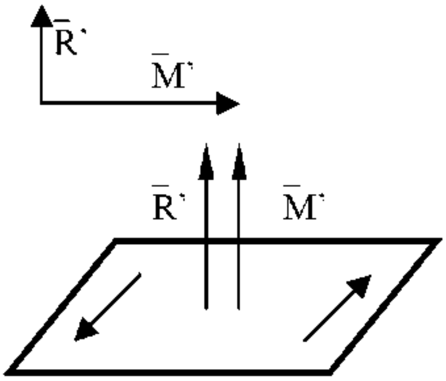
Результирующая сила – главный вектор системы.
Результирующий момент – главный вектор – момент.

Любая произвольная система сил приводится к главному вектору системы и главному вектору моменту системы.

Главный вектор – геометрическая сумма сил, действующих на систему.

Главный вектор момент – сумма моментов всех сил относительно центра произведения и моментов, параллельно действующих на систему.

$$\overline{R}' = \sum_{V=1}^{n} \overline{F}_V \qquad \overline{M}' = \sum_{V=1}^{n} \overline{M}_V$$



1) $\overline{R}' \neq 0 \quad \overline{M}' = 0 \quad \overline{R}' = \overline{R}$

2) $\overline{R}' = 0 \quad \overline{M}' \neq 0 \quad \overline{M}' = \overline{M}$

3) $\overline{R}' \neq 0 \quad \overline{M}' \neq 0 \quad \overline{M}' \perp \overline{R}'$

4) $\overline{R}' = 0 \quad \overline{M}' = 0 \quad \overline{M}' \parallel \overline{R}'$

5) $\overline{R}' \neq 0 \quad \overline{M}' \neq 0$

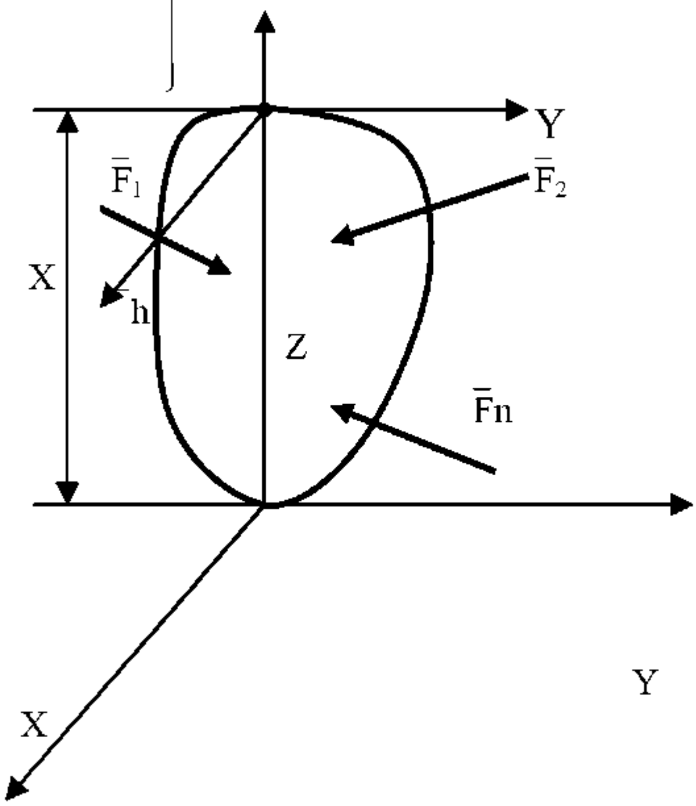
6) $\overline{R}' = 0 \quad \overline{M}' = 0$ система уравновешена

Теорема Вариньона:

Если система приводится к равнодействующей, то момент равнодействующий относительно любой точки равен сумме моментов всех сил относительно любой точки.

Условия равновесия.

$$\left.\begin{aligned}
&R' = 0; \quad m' = 0 \quad \sum_{V=1}^{n} \mathrm{mom}_Z F_V = 0\\
&R_X = \sum_{V=1}^{n} F_{XV} = 0; \quad \sum_{V=1}^{n} \mathrm{mom}_Y F_V = 0\\
&R_Y = \sum_{V=1}^{n} F_{YV} = 0; \quad \sum_{V=1}^{n} \mathrm{mom}_X F_V = 0\\
&R_Z = \sum_{V=1}^{n} F_{ZV} = 0
\end{aligned}\right\}$$



$$\left.\begin{array}{ll}\sum\limits_{V=0}^{n} F_{XV}+X_0=0 & \sum\limits_{V=1}^{n} mom_X F_V=0\\ \sum\limits_{V=0}^{n} F_{YV}+Y_0=0 & \sum\limits_{V=1}^{n} mom_Y F_V=0\\ \sum\limits_{V=0}^{n} F_{ZV}+Z_0=0 & \sum\limits_{V=1}^{n} mom_Z F_V=0\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\sum F_{XV}+X_{01}+X_2=0 & \sum mom_X F \;-Y_{oh}=0\\ \sum F_{YV}+Y_{01}+Y_{02}=0 & \sum mom_Y F \;+X_{oh}=0\\ \sum F_{ZV}+Z_{01} & \sum mom_Z F=0\end{array}\right\}$$

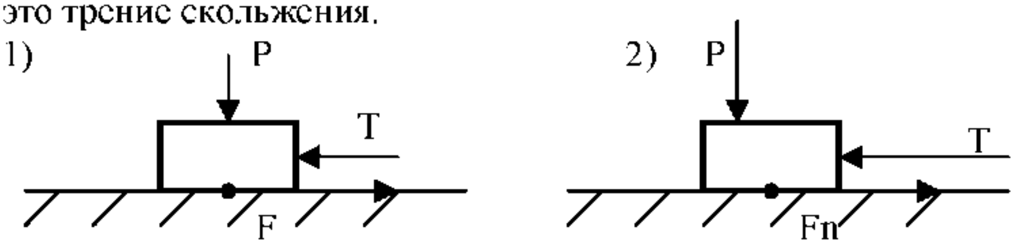
Тема 4. Трение и центр тяжести.

Лекция 7. Основные виды трения. Лекция:7

- Трение скольжения
- Равновесие при наличии трения
- Реакции связей с трением
- Трение качения.

Трение – сила, сопротивление которой возникает между 2 телами при стремлении 1 тела переместиться по поверхности 2-го.

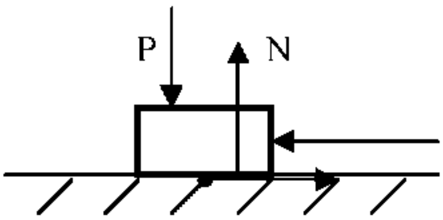
Если при движении 1-го тела относительно другого в контакте между телами остаются одни и те же точки, то это трение скольжения.

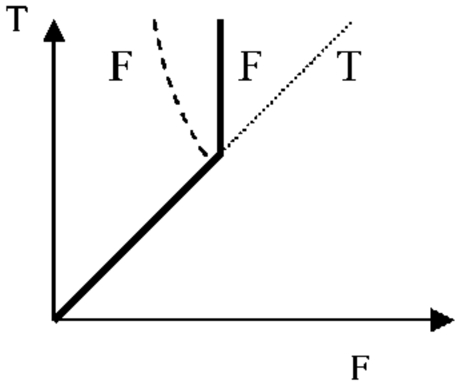


$V_1=0$ $V_1\geq 0$

Трение покоя T=Fn

3) Трение движения





$V_1 > 0$

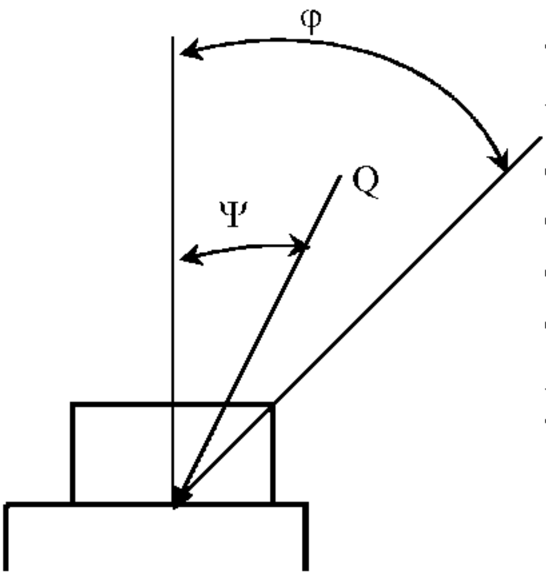
$F < 0$

Сталь по стали f=0,1…0,15

f – коэффициент

N – реакция

Fn = f·N



$\overline{R} = \overline{N} + \overline{F}$

$\dfrac{F}{N} = \mathrm{tg}\,\varphi$

$F = f \cdot N \Rightarrow f = \mathrm{tg}\,\varphi$

φ – угол трения

$Q \cdot \mathrm{Sin}\,\varphi > F$

$Q \cdot \mathrm{Sin}\,\Psi > \mathrm{tg}\,\varphi \cdot N$

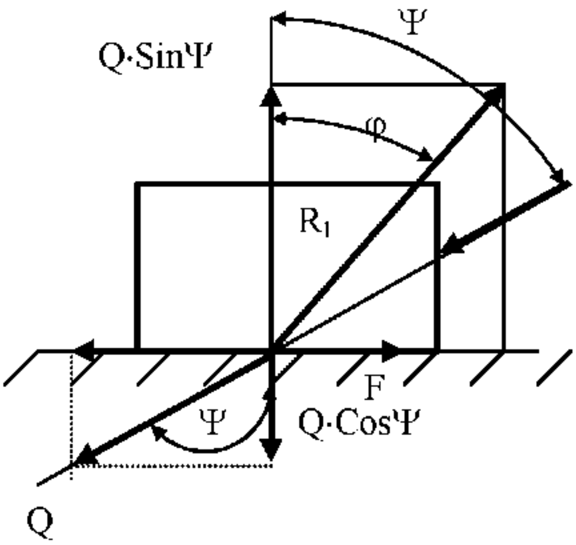
$Q \cdot \mathrm{Sin}\,\Psi > \mathrm{tg}\,\varphi Q \cdot \mathrm{Cos}\,\Psi$

при движении

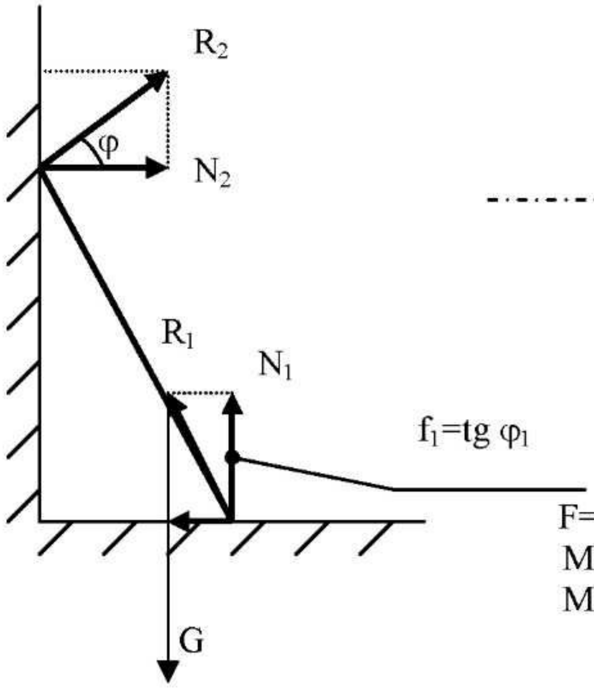
$\mathrm{Tg}\,\Psi > \mathrm{Tg}\,\varphi$

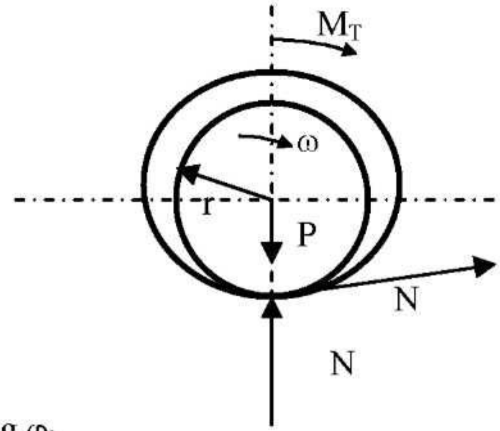
$\Psi > \varphi$

$\Psi > \varphi$ – самоторможение



Реакции связей при наличии трения.





F=fn
M_T = Fr
M_T = frP

$$A_k = 2\pi\rho d\rho$$

$$P = \frac{P}{\pi r^2}$$

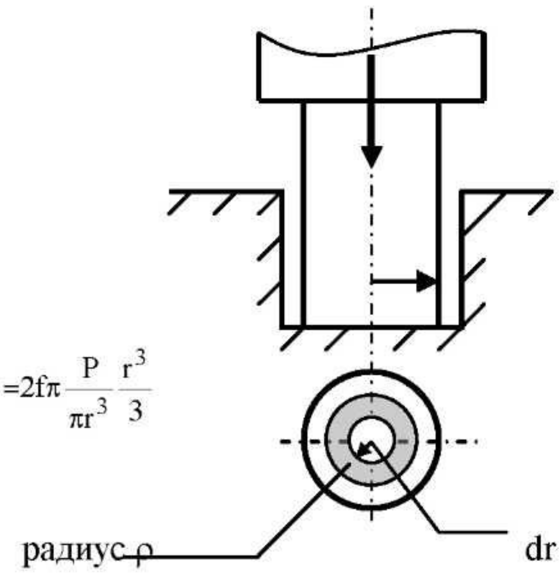
$$dP = 2\pi\rho d\rho \cdot p$$

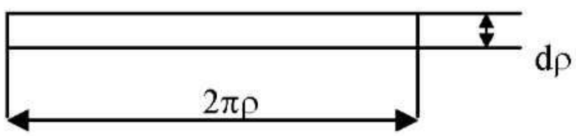
$$dF = fdP$$

$$dM = \rho FdP$$

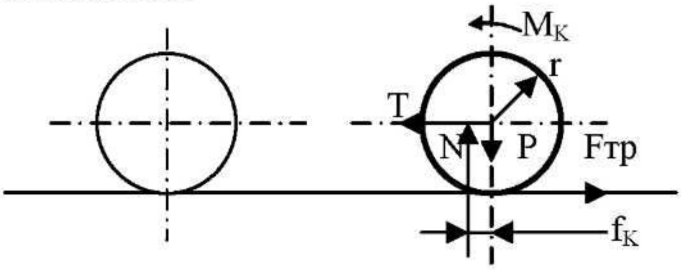
$$M = \int_0^r \rho f 2\pi\rho d\rho P = 2f\pi P\int_0^r \rho^2 d\rho = 2f\pi \frac{P}{\pi r^3}\frac{r^3}{3}$$

$$M_T = \frac{2}{3} f\, Pr$$





4. Трение качения



fk – коэффициент трения скольжения
Сталь по стали f=0.005см

$$M_K = f_k N \qquad T = \frac{M_K}{r}$$

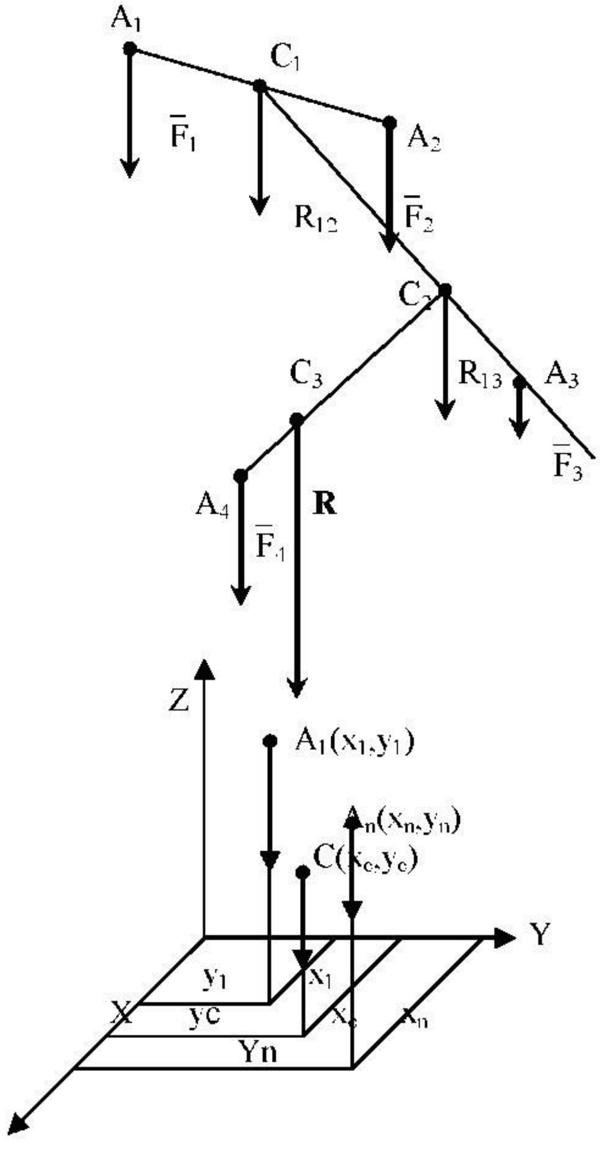
$$N = P$$

$$M_K = f_k P$$

Лекция 8. Лекция 8.

Центр параллельных сил и центр тяжести.

1. Приведение системы параллельных сил к равнодействующей
2. Определение координат центра параллельных сил
3. Центр тяжести.
4. Центр тяжести простейших фигур.



$$R_{1-2} = F_1 + F_2$$

$$A_1C_1 = A_1A_2 \frac{F_2}{R_{1-2}}$$

$$R_{1-3} = F_1 + F_2 + F_3$$

$$C_1C_2 = C_1A_3 \frac{F_3}{R_{1-3}}$$

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

$$C_2C_3 = C_2A_4 \frac{F_4}{R}$$

$$R = \sum_{V=1}^{n} F_V$$

$$mom_x R = \sum_{V=1}^{n} mom_x F_V$$

$$-RY_c = -\sum F_V Y_V$$

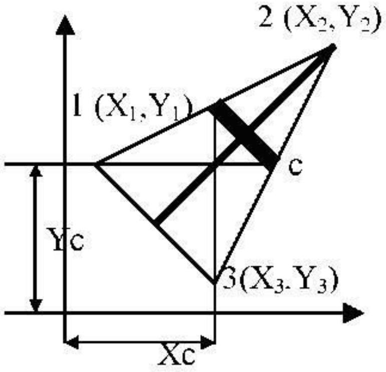
$$Y_c = \sum_{V=1}^{n} \frac{F_V Y_V}{\sum_{V=1}^{n} F_V}$$

$$X_c = \frac{\sum_{V=1}^{n} F_V X_V}{\sum_{V=1}^{n} F_V}$$

$$Z_c = \frac{\sum_{V=1}^{n} F_n X_n}{\sum_{V=1}^{n} F_V}$$

$$x_c = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$y_c = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$



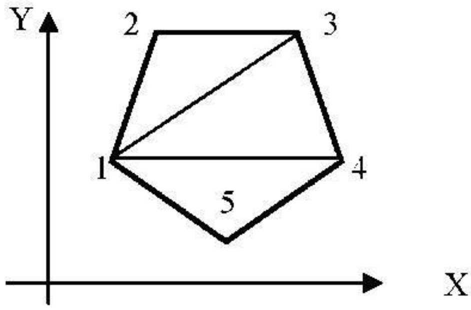
$$x_{c123} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3); \quad S_{123}$$

$$x_{c134} = \frac{1}{3}(x_1 + x_3 + x_4); \quad S_{134}$$

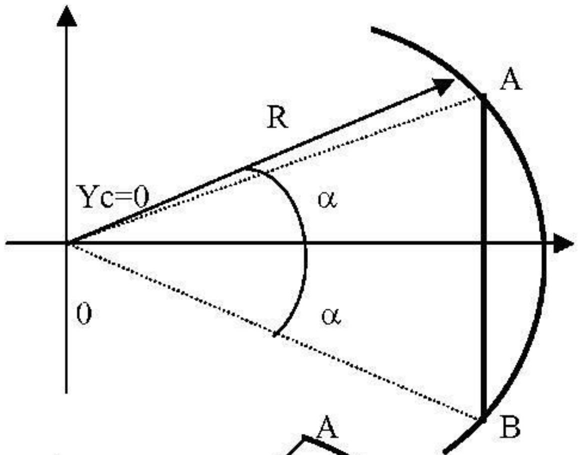
$$x_{c145} = \frac{1}{3}(x_1 + x_4 + x_5); \quad S_{145}$$

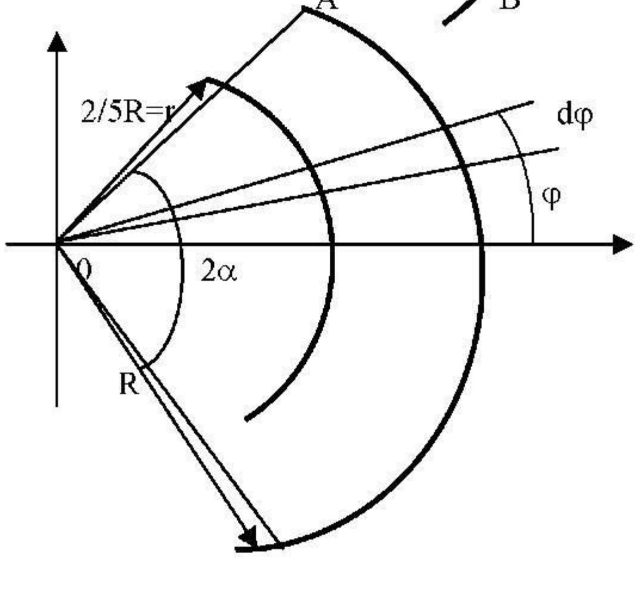
$$x_c = \frac{\sum x_v S_v}{\sum S_v}$$

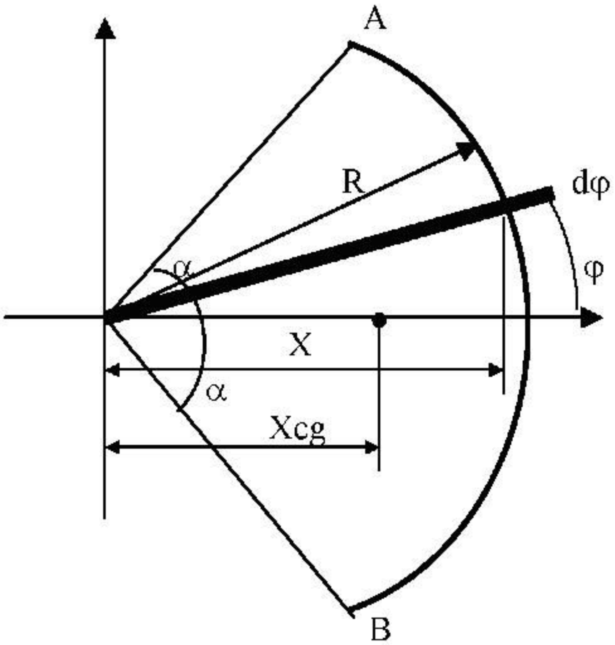
$$x_c = \frac{x_{c123} \cdot S_{123} + x_{c134} \cdot S_{134} + x_{c145} \cdot S_{145}}{S_{123} + S_{134} + S_{145}}$$



Определение координат ц. т. сегмента.







$$x_c = \frac{\sum \Delta L}{L}$$

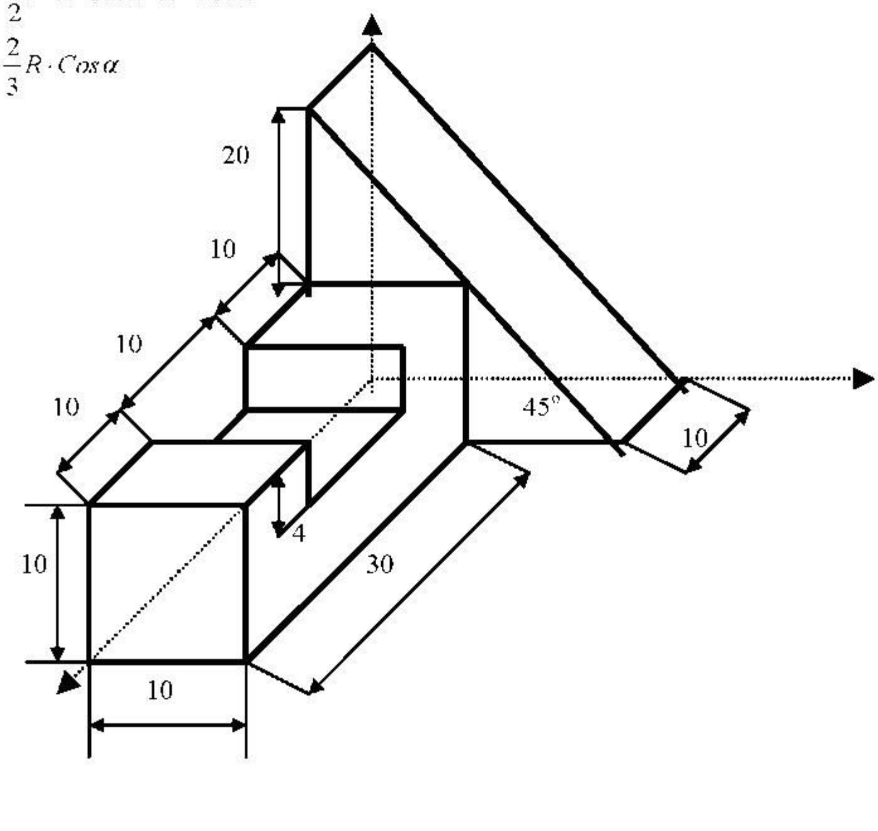
$$x_c = \frac{1}{L}\int_{-\alpha}^{\alpha} L \cdot Cos\,\varphi \cdot r\,d\varphi = \frac{1 r^2}{r 2\alpha} Sin\varphi \,\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{Sin\alpha \cdot r}{\alpha} = \frac{2}{3}\frac{Sin\alpha \cdot R}{\alpha}$$

$$L = \alpha \cdot R$$

$$x_c = \frac{S_{\text{сек}} \cdot x - S_{\Delta OAB} \cdot x_{\Delta}}{S_{\text{сек}} - S_{\Delta OAB}} = \frac{\alpha \cdot R^2 \frac{2}{3} Sin\alpha \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} r \cdot R \cdot Sin\alpha \cdot R \cdot Cos\alpha \frac{2}{3} R \cdot Cos\alpha}{\alpha \cdot R^2 - \frac{1}{2} r \cdot R \cdot Sin\alpha \cdot R \cdot Cos\alpha}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} r \cdot R \cdot Sin\alpha \cdot R \cdot Cos\alpha$$

$$x_{\Delta} = \frac{2}{3} R \cdot Cos\alpha$$



$$x_1 = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{30}{2} + 10 = 25$$

$$x_{31} = \frac{10}{2} + 10 + 10 = 25$$

$$---$$

$$y_1 = \frac{20}{2} = 10$$

$$y_2 = \frac{10}{2} = 5$$

$$y_3 = \frac{10}{2} = 5$$

$$---$$

$$z_1 = \frac{20}{3} = 7$$

$$z_2 = \frac{10}{2} = 5$$

$$z_3 = 6 + \frac{4}{2} = 8$$

$$V_1 = \frac{1}{2} 20 * 20 * 10 = 2000$$

$$V_1 = 10 * 10 * 30 = 3000$$

$$V_1 = -10 * 10 * 4 = -4000$$

N элем	Vv	Xv	Yv	Zv	VvXv	VvYv	VvZv
1	2000	5	7	7	10000	14000	14000
2	3000	25	5	5	75000	15000	15000
3	-4000	25	5	8	-10000	-2000	3200
∑	4600				75000	27000	25800

Xc=75000/4600=16.3
Yc=27000/4800=5.9
Zc=25800/4600=5.7

Кинематика.

Тема 5. «Кинематика точки»

Лекция 9. Кинематические характеристики движения точки.

Лекция.9

1. Основные понятия
2. Способы задания движения точки
3. Скорость точки, как вектор
4. Ускорение точки, как вектор
5. Проекция ускорения точки на естественные оси.

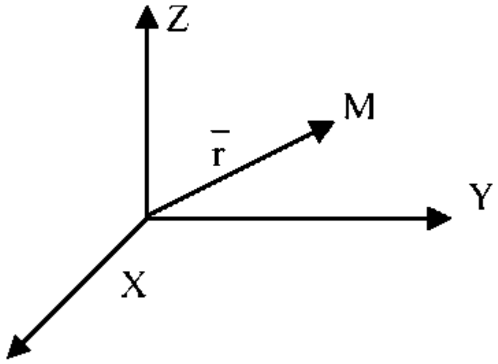
<u>Кинематика</u> изучает движение точки или твердого тела, только с геометрической точки зрения, отвлекаясь от факторов, которые это движение вызывают.

<u>Задать движение точки</u> – значит записать такое уравнение, которое позволяло бы узнавать местонахождение точки в любой момент времени.

Кинематические характеристики точки:

- Траектория движения;
- Скорость точки;
- Ускорение точки.

Задачи кинематики: Установить закономерность движения точки и определить кинематические характеристики.



1. $\bar{r} = r_x\bar{i} + r_y\bar{j} + r_z\bar{k}$

$\bar{r} = r_x(t)\bar{i} + r_y(t)\bar{j} + r_z(t)\bar{k}$

2.

x=x(t)

y=y(t)

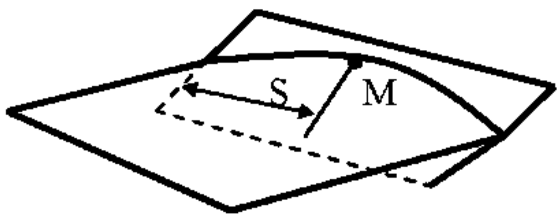
z=z(t) t=t(z)

$x=f_1(y, z)$ $y=f_2(x, z)$

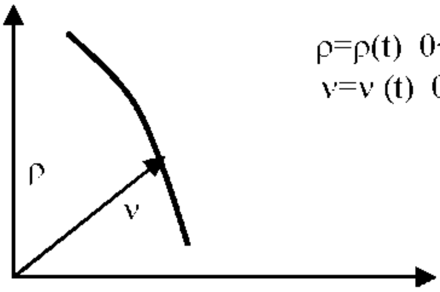
3.

$\Phi_1(x, y, z) = 0$

$\Phi_2(x, y, z) = 0$ S=S(t)



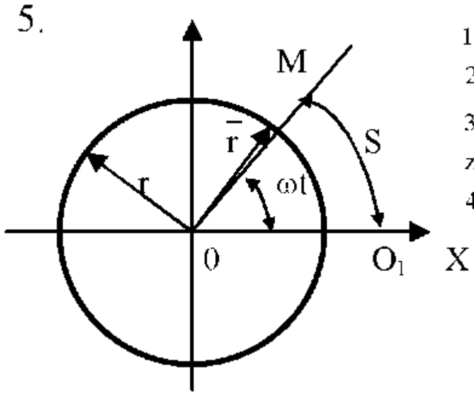
4.



$\rho=\rho(t)\ \ 0<\rho<\infty$

$\nu=\nu\ (t)\ \ 0<\nu<2\pi k$

5.



$1.r = RCos\ \omega t \cdot i + RSin\ \omega t \cdot j$

$2.x = RCos\ \omega t \quad y = RSin\ \omega t \quad z = 0$

$3.x^2 + y^2 + z^2 = 0$

$z = 0 \quad S = R\omega t$

$4.\rho = R; \quad \nu = \omega t$

Скорость точки как вектор.

При $t = t \quad - r = r_m$

При $t = t + \Delta t \quad \bar{r} = \bar{r}_m{}'$

$\Delta r = r_m{}' - r_m$

– – – – – – – – –

$$Vcp = \frac{\Delta r}{\Delta t};\ \bar{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{V}cp = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$

$$\bar{V} = \frac{dr}{dt}$$

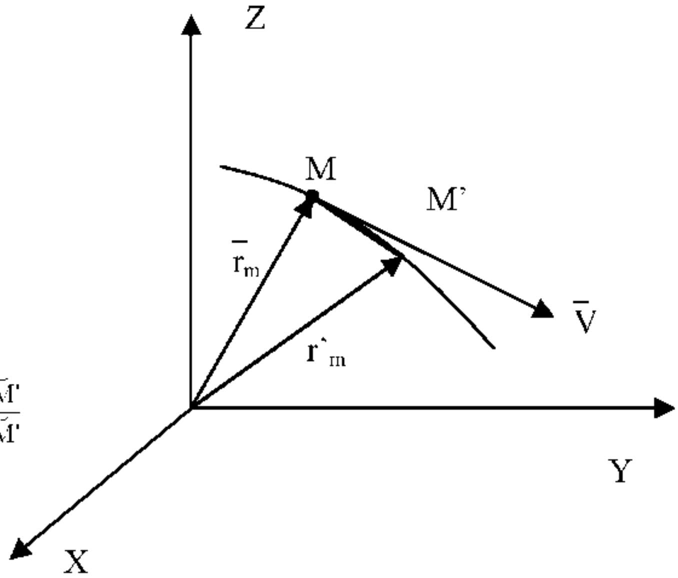
$$\Delta\bar{r} = \Delta x \cdot \bar{i} + \Delta y \cdot \bar{j} + \Delta z \cdot \bar{k}$$

$$Vcp = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \bar{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \bar{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \cdot \bar{k}$$

$$V = Vx \cdot \bar{i} + Vy \cdot \bar{j} + Vz \cdot \bar{k}; \quad Vcp = \frac{\overline{MM}}{\Delta t} \cdot \frac{\breve{M}\breve{M}'}{\breve{M}\breve{M}'}$$

$$Vcp = \frac{\breve{M}\breve{M}}{\Delta t}; \quad V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}; \quad V| = \frac{dS}{dt}$$

$$V = \frac{\overline{MM'}}{\breve{M}\breve{M}'}$$



При t t $\bar{r}$ $\bar{r}_m$ $\bar{V}$ $\bar{V}_m$

При $t = t + \Delta t$ $\bar{r} = \bar{r}_m'$ $V = V_m'$

$\Delta\bar{V}$ $\bar{V}_m'$ $\bar{V}_m$

– – – – – – – – –

$$Wcp = \frac{\Delta\bar{V}}{\Delta t};\ W = \lim_{\Delta t\to 0} Wcp = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{d\bar{V}}{dt}$$

$$\overline{W} = \frac{dV}{dt};\quad \overline{W} = \frac{d^2 r}{dt^2}$$

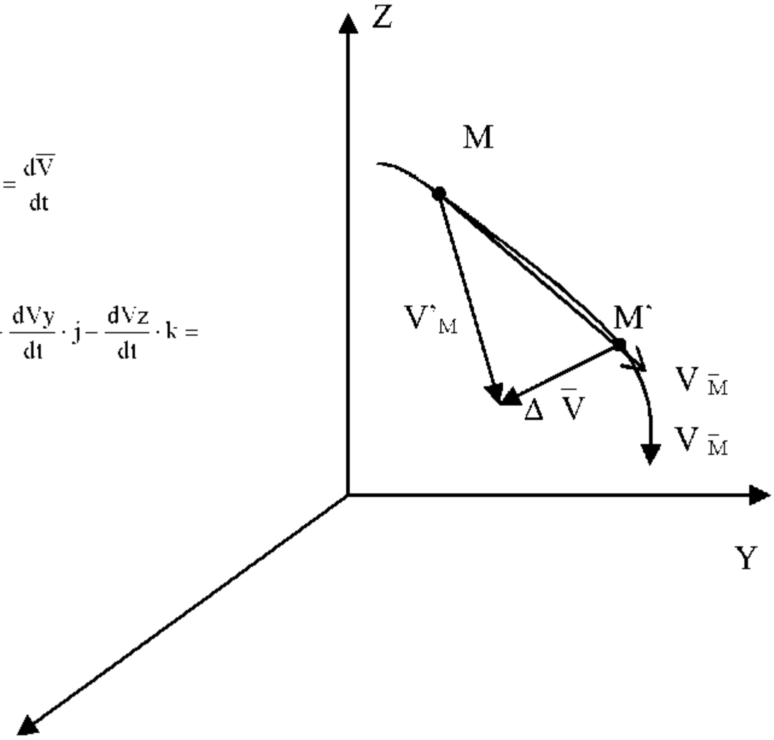
$$\overline{W} = Wx\cdot i + Wy\cdot j + Wz\cdot k = \frac{dVx}{dt}\cdot i + \frac{dVy}{dt}\cdot j - \frac{dVz}{dt}\cdot k =$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\bar{j} - \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\bar{k}$$

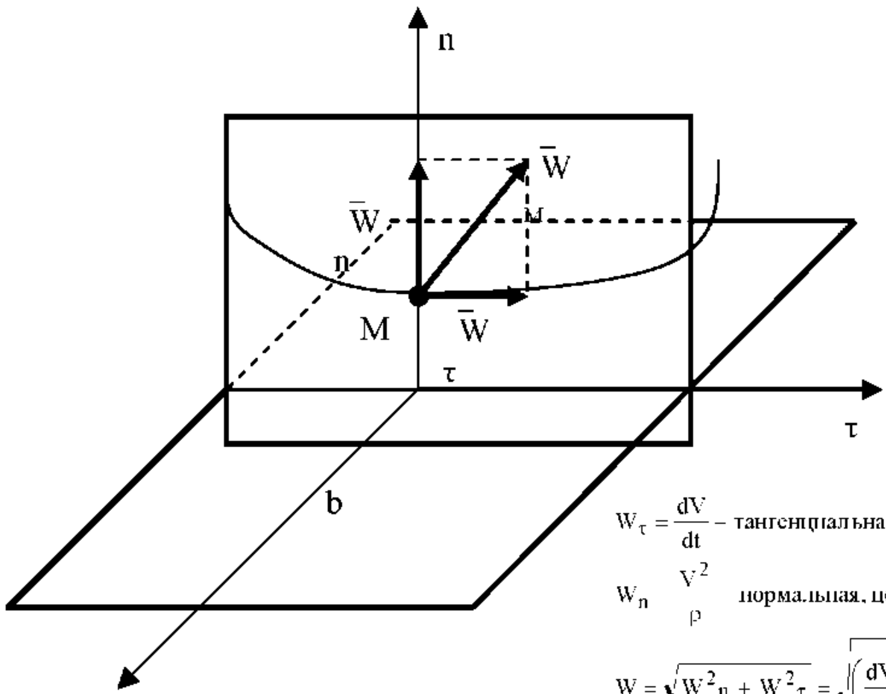
$$Vcp\quad \frac{\Delta r}{\Delta t}\quad \frac{\Delta x}{\Delta t}\cdot\bar{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\cdot\bar{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\cdot\bar{k}$$

$$|V = \sqrt{V^2x - V^2y + V^2z};$$

$$|W| = \sqrt{W^2x - W^2y + W^2z};$$



Проекция ускорения на естественные оси.



$W_\tau = \frac{dV}{dt}$ – тангенциальна, катат

$W_n\ \frac{V^2}{\rho}$ нормальная, центростремит.

$$W = \sqrt{W^2n + W^2\tau} = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{\rho}\right)^2}$$

Тема 6:

Простейшие движения твердого тела.

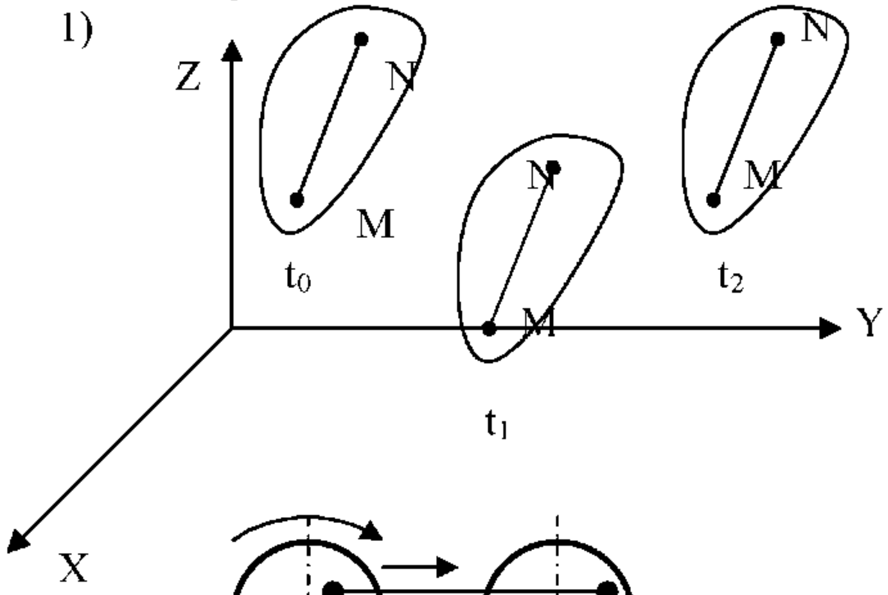
Лекция 10.

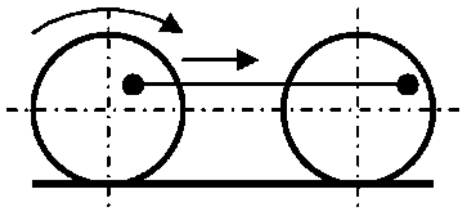
Лекция:10 Поступательное движение твердого тела.

1. Основные определения
2. Теорема о скоростях, ускорениях и траекториях точек тела при поступательном движении
3. Уравнение поступательного движения.

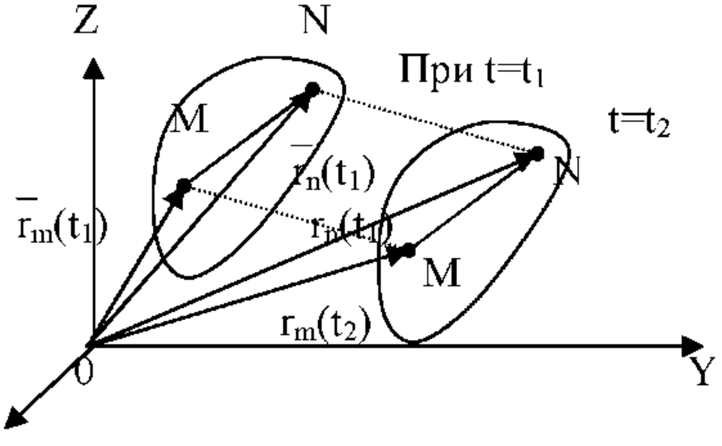
Поступательное движение твердого тела – такое движение, когда любая прямая, жестко связанная с телом остается параллельна самой себе.

1)





2) Теорема.



X

$$\overline{r}_n(t_1)-\overline{r}_m(t_1)=\overline{MN}$$

$$\overline{r}_n(t_2)-\overline{r}_m(t_2)=\overline{MN}$$

$$\overline{r}_n-\overline{r}_m=\overline{MN}$$

$$\frac{d\overline{r}_n}{dt}-\frac{d\overline{r}_m}{dt}=0$$

$\overline{V}_n$ *– скорость*

При поступательных движениях

скорости всех точек тела равны (векторно)

$$\overline{V}_n=\overline{V}_m$$

$$\frac{d\overline{V}_n}{dt}=\frac{d\overline{V}_m}{dt}$$

$\overline{W}_n=\overline{W}_m$ *ускорения всех точек тела векторно равны*

$$\frac{dS}{dt}=V \quad \left| \begin{array}{l} dS = Vdt \\ dSn = Vndt \rightarrow Sn=\int_0^t Vn\ dt \quad Sm=\int_0^t Vm\ dt \rightarrow Sm=Sn \\ dSm=Vmdt \end{array} \right.$$

при наложении траектории они совпадают – конгруэнтны!

Теорема: При поступательном движении тела скорости и ускорения всех точек тела векторно равны, а траектории конгруэнтны

3) $Xc = Xc\ (t)$ $Yc = Yc\ (t)$ $Zc = Zc\ (t)$ $\overline{r}_c = \overline{r}_c\ (t)$	Закон движения тела в координатной форме при его поступательном движении.

Лекция:11. Вращательное движение твердого тела.

Лекция 11.

1. Основные понятия
2. Уравнения вращательного движения
3. Угловая скорость и угловое ускорение
4. Равнопеременное движение

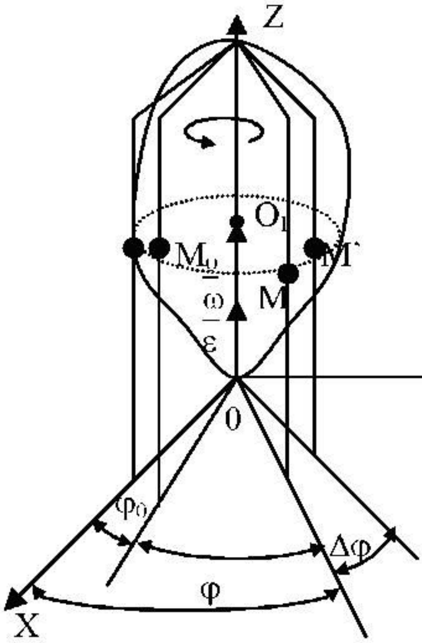
5. Скорости и ускорения точки тела при его вращательном движении.

1) **Вращательное движение** – движение тела с хотя бы двумя неподвижными точками.

Прямая, проходящая через эти неподвижные точки – **ось вращения**.

При вращательном движении траектории точек тела не лежат на оси, являющейся окружностью.

$\varphi = \varphi\ (t)$ – уравнение движения тела при его вращении.



Пример:

$$x = 10\mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi t}{5}\right) \quad \left(\frac{2\pi t}{5}\right) = \alpha$$

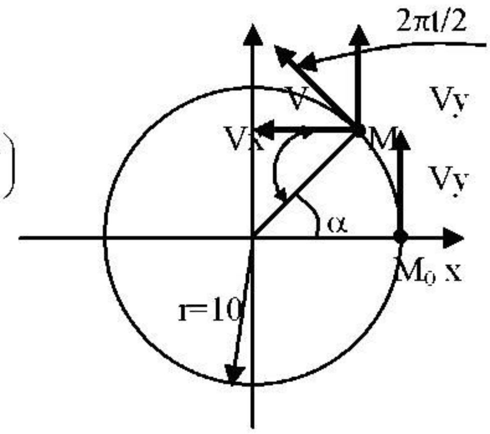
$$y = 10\mathrm{Sin}\left(\frac{2\pi t}{5}\right)$$

$$z = 0$$

$$x^2 + y^2 = 100\mathrm{Cos}^2\left(\frac{2\pi t}{5}\right) + 100\mathrm{Sin}^2\left(\frac{2\pi t}{5}\right)$$

$$x^2 + y^2 = 100$$

При $t = 0 \quad x = 10 \quad y = 0$



$$Vx \quad \frac{dx}{dt} \quad 10\frac{2\pi}{5}\mathrm{Sin}\left(\frac{2\pi t}{5}\right) \quad 4\pi\mathrm{Sin}\left(\frac{2\pi t}{5}\right)$$

$$Vy \quad \frac{dy}{dt} \quad 10\frac{2\pi}{5}\mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi t}{5}\right) \quad 4\pi\mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi t}{5}\right)$$

$$\mathrm{Cos}\ \alpha \quad \frac{x}{R} \quad \mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi t}{5}\right) \quad V \quad \sqrt{V^2x \quad V^2y} \quad 4\pi\ ^{cm}/_{c}$$

$$\mathrm{Cos}\ (V, y) \quad \frac{Vy}{V} \quad \frac{4\pi\mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi t}{5}\right)}{4\pi} \quad \mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi t}{5}\right)$$

$$(V, y) = \frac{2\pi t}{5}$$

$$Wx = \frac{dVx}{dt} = -4\pi\frac{2\pi}{5}\mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi t}{5}\right)$$

$$Wy = \frac{dVy}{dt} = -4\pi\frac{2\pi}{5}\mathrm{Sin}\left(\frac{2\pi t}{5}\right)$$

$$W = \sqrt{W^2x + W^2y} = \frac{8\pi^2}{5}$$

$$\mathrm{Cos}(W, x) = \frac{Wx}{W} = \mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi t}{5}\right)$$

$$W, x = \left(\frac{2\pi t}{5}\right)$$

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} = 0$$

$$W_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{16\pi^2}{10} = \frac{8\pi^2}{5}$$

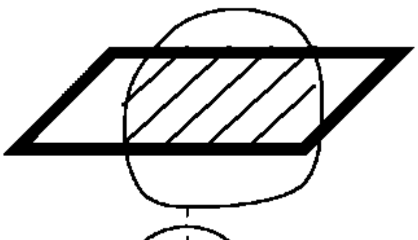
$$W = \frac{8\pi^2}{5}$$

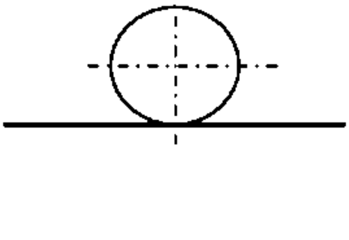
Тема 7. Плоскопараллельные и другие движения твердого тела.

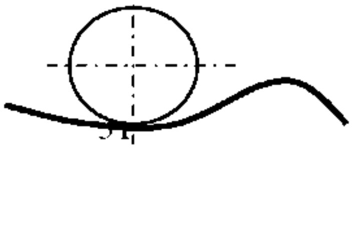
Лекция 12. Скорость и ускорение движения тела в плоской системе. Лекция:12

1. Основные определения
2. Теорема Эйлера и уравнение плоскостного движения фигуры
3. Теорема о проекциях скоростей 2-х точек тела
4. Мгновенный центр скоростей и план скоростей
5. Мгновенный центр ускорения и план ускорения

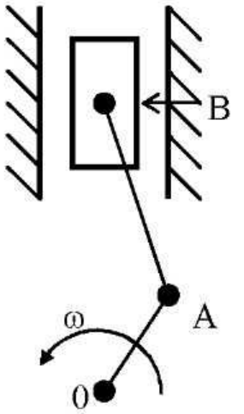
При плоском движении - точки тела всегда остаются в данной плоскости

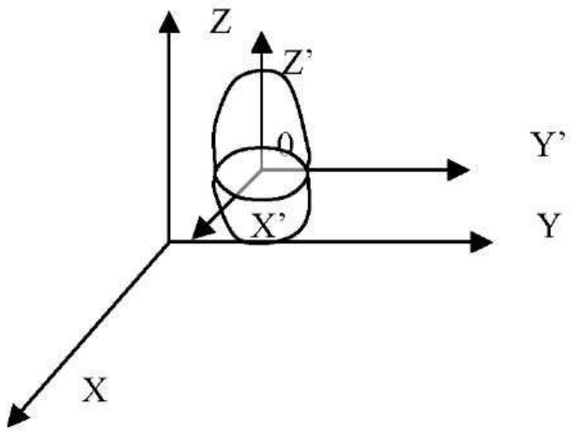


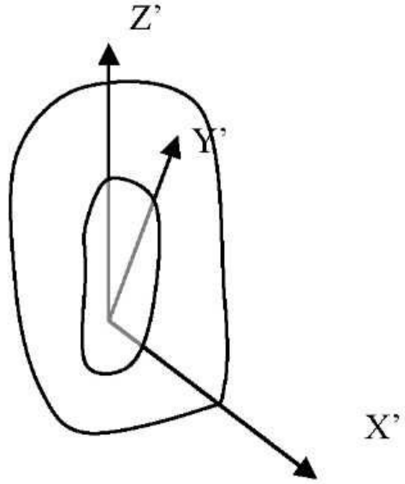




Кривошипно-шатунный механизм.
В – поршень
АВ – Шатуны
АО – кривошип.







Теорема Эйлера о плоскопараллельном движении.

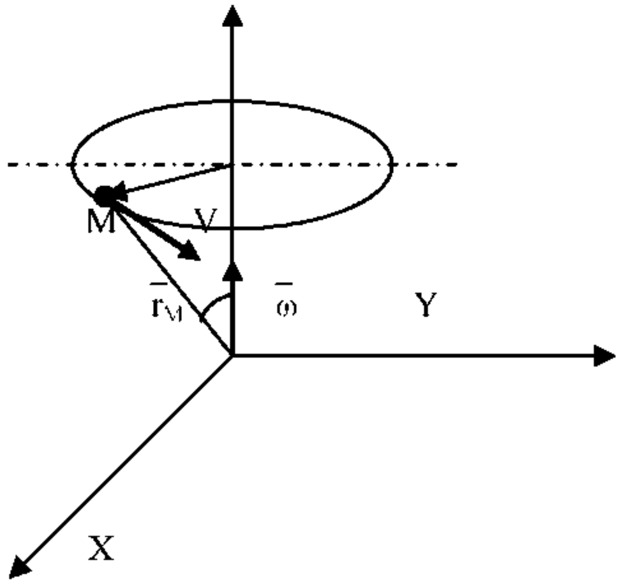
Всякое мгновенное плоскопараллельное движение приводится к мгновенному поступательному движению со скоростью какой-либо точки, принадлежащей телу и мгновенному вращательному движению вокруг оси, перпендикулярной сравнительной плоскости и проходящей через упомянутую точку.

Скорость и ускорение точки, которая принадлежит телу с вращательным движением.

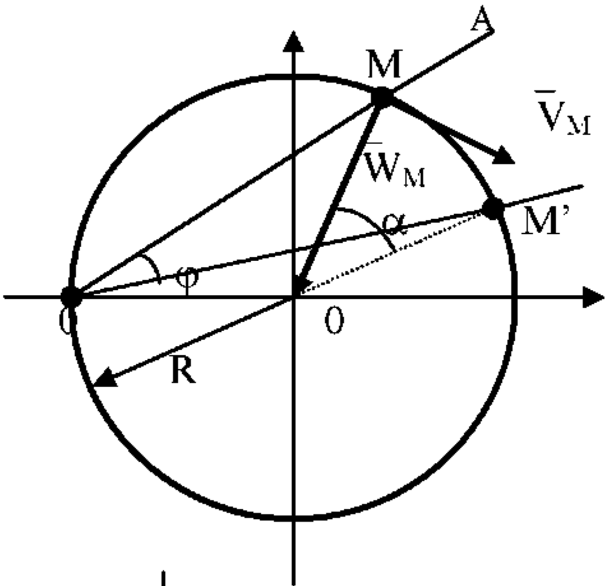
$\overline{V}_M = [\overline{\omega}, \overline{r}_M]$

$|\overline{V}_M| = |\overline{\omega}| \cdot |\overline{r}_M| \cdot \mathrm{Sin}\,\alpha$

$V_M = \omega r_M \,\mathrm{Sin}\,\alpha = \omega R$



Пример:



$\omega_{OA} = const = \omega$

? V_M, W_M

$\varphi = \omega t \qquad \alpha = 2\varphi$

$$V_m = \frac{dS}{dt} = \overset{\frown}{MM'} = R\alpha = R \cdot 2\varphi$$

$$V_M = \frac{d(2R\varphi)}{dt} = 2R\frac{d\varphi}{dt} = 2R\omega$$

$$W_M^\tau = \frac{dV_M}{dt} = 0$$

$$V_M^n = W = \frac{V^2}{R} = \frac{2R^2\omega^2}{R} = 4R\omega^2$$

3) Угловая скорость и угловое ускорение.

При t=t φ

При t=t+Δt φ + Δφ

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega_{cp}$$ – средняя угловая скорость

$$\lim_{\Delta t \to 0} \omega_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$ – истинная угловая скорость вращаемого теле в данный момент времени.

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$$ – истинное угловое ускорение.

4) Равномерное движение: $\omega = const$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega\, dt$$ - равномерное движение.

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t$$

$\omega \neq const$

$$\omega = \varepsilon t$$

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^T \varepsilon t\, dt$$ равномерно-переменное движение

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon \frac{t^2}{2}$$

Частные случаи:

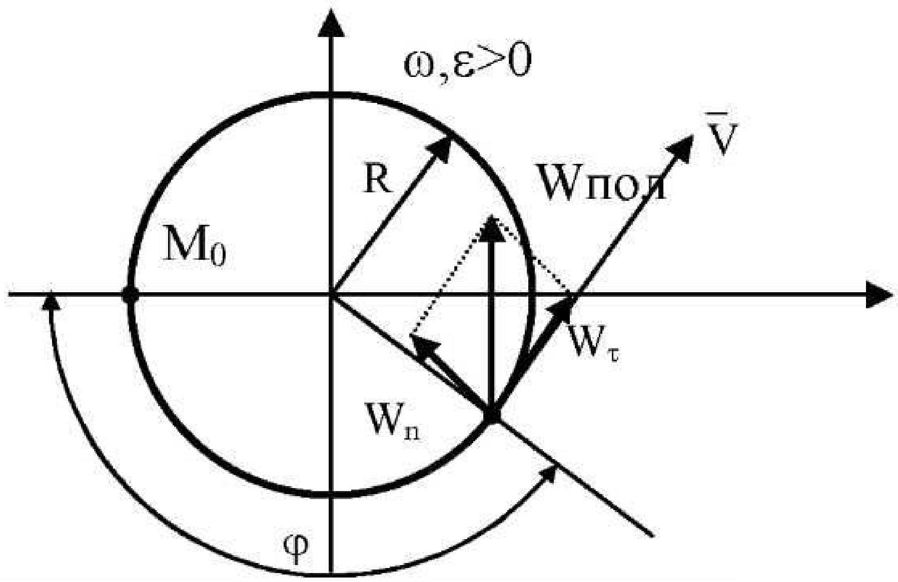
А) $\omega>0$ $\varepsilon>0$ - равномерно переменно-ускоренное движение

Б) $\omega>0$ $\varepsilon<0$ - равнозамедленное движение

В) $\omega<0$ $\varepsilon<0$ - по ходу часовой стрелки Р-У движение

Г) $\omega<0$ $\varepsilon>0$ - равнозамедленное движение.

5)



$$S_M = M_0\overset{\frown}{}M = \varphi R$$

$l = \alpha R$ – длина дуги

$2\pi R$ – длина окружности

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d(\varphi R)}{dt} = R\,\frac{d\varphi}{dt}$$

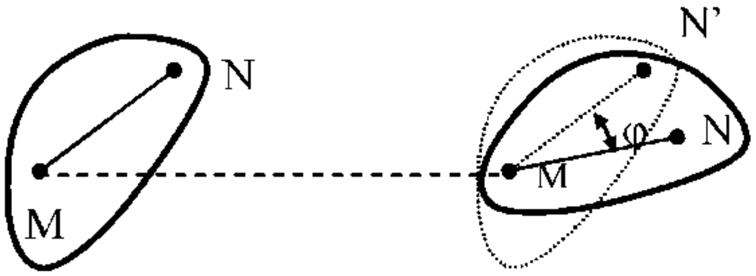
$$V = R\omega$$

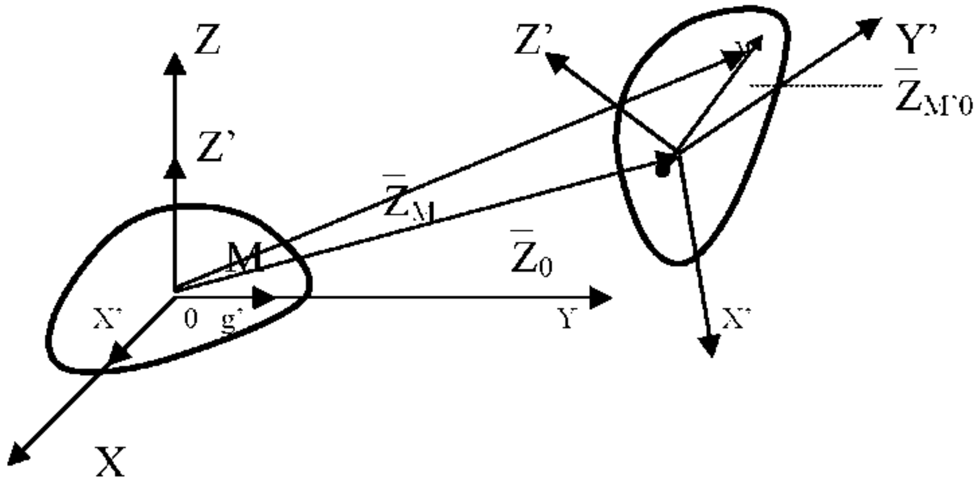
$$\underbrace{W_\tau = \frac{dV}{dt} = R\,\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon}_{\text{Касательное ускорение (тангенциальное)}}$$

$$W^N = \frac{V^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2$$

$$W_{пол} = \sqrt{W_\tau^2 + \left(W^N\right)^2} = \sqrt{R^2\varepsilon^2 + R^2\omega^4} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$\mathrm{Tg}\,\varphi = \frac{W_\tau}{W^N} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$





$$\bar{r}_m = \bar{r}_0 + r_{M_0'}$$

$$\frac{d\bar{r}_m}{dt} = \frac{d\bar{r}_0}{dt} + \frac{dr_{M_0'}}{dt}$$

$$\bar{V}m = \bar{V}_{0'} + \bar{V}_{M_0'}$$

$$\bar{r}_{M_0} = Z'\,\bar{i}' + Y'\,\bar{j}'$$

$$\frac{dr_{m_0'}}{dt} = Z'\frac{d\bar{k}'}{dt} + Y'\frac{d\bar{j}'}{dt} = Z'\left[\bar{\varpi}, \bar{k}\right] + Y'\left[\bar{\varpi}, \bar{j}'\right] = \left[\bar{\varpi}\,\overline{Zk}, \overline{Y'}\,\bar{j}\right] = \left[\bar{\varpi}\,\bar{Z}_{M_0}\right]$$

$$\bar{V}m = \bar{V}_0 + \left[\bar{\varpi} + \bar{Z}_{M_0'}\right] \qquad \frac{d\bar{k}}{dt} = \left[\bar{\varpi}, \bar{k}'\right]$$

Уравнение движения

Xc=Xc(t)

Yc=Yc(t)

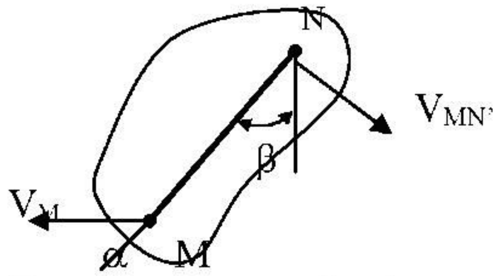
φ=φ(t)

Теорема о проекции скоростей 2-х точек фигуры.

$$\overline{V}_N = \overline{V}_M + \overline{V}_{NM}$$

$$V_N \cdot \cos\beta = V_M \cdot \cos\alpha + V_{NM} \cdot \cos 90°$$

$$V_N \cdot \cos\beta = V_M \cdot \cos\alpha$$

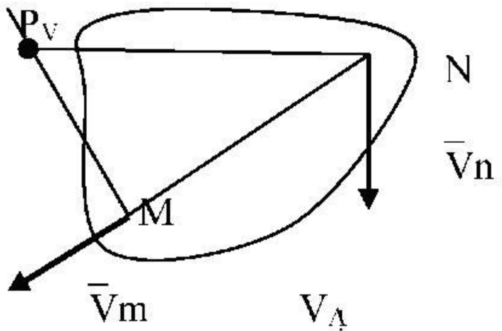


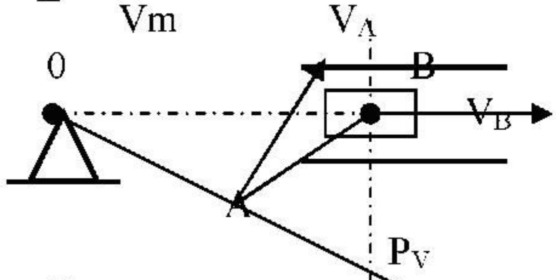
Проекции скоростей 2-х точек тела на прямую соединяющую все эти точки - должны быть равны.

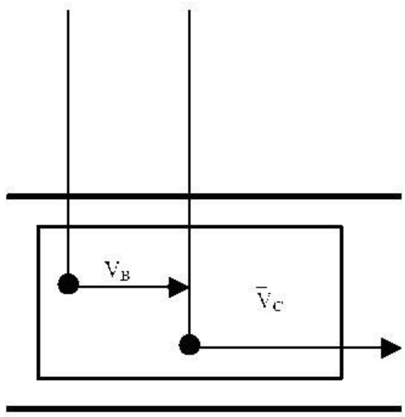
4. Мгновенный центр скоростей и план скоростей

Мгновенным центром скоростей называется точка. которая условно принадлежит телу и имеет V=0.

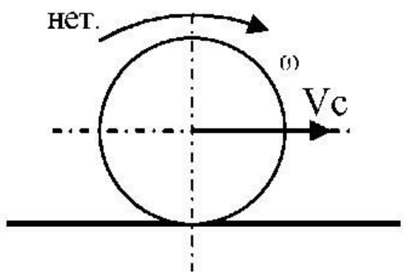
Мгновенный центр скоростей находится на пересечении перпендикуляров к скоростям.

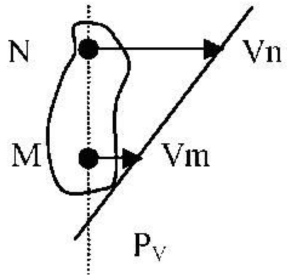




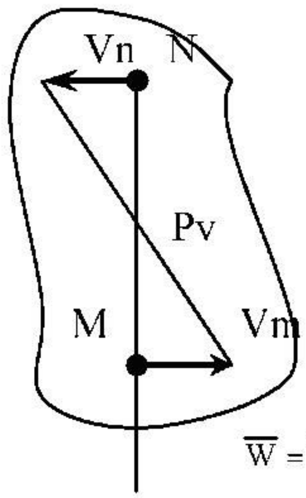


При постоянном движении мгновенного центра движения нет.





План скоростей – графическое изображение скоростей точек тела.



$$\overline{W} = \overline{W}^n + \overline{W}^\tau$$

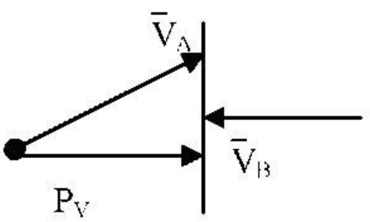
$$W^n = \frac{V^2}{R} = \frac{\omega^2 r^2}{R} = \omega^2 R$$

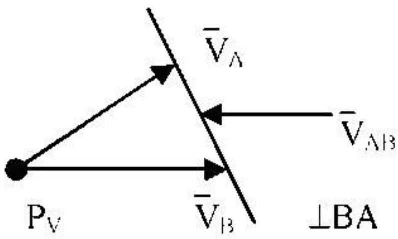
$$V_B = V_A + V_{BA}$$

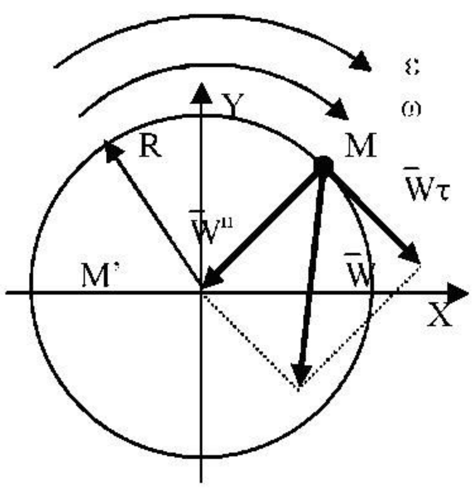
$$\mu_v = \frac{\text{Истинная величина}}{\text{Чертежный размер}} = \frac{10}{100} = 0{,}1\ \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$$

$$W^\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\,\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon$$

$$\mathrm{Tg}\ \alpha = \frac{W^n}{W^\tau} = \frac{R\varepsilon}{\omega^2 R} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \qquad \mathrm{Tg}\ \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$







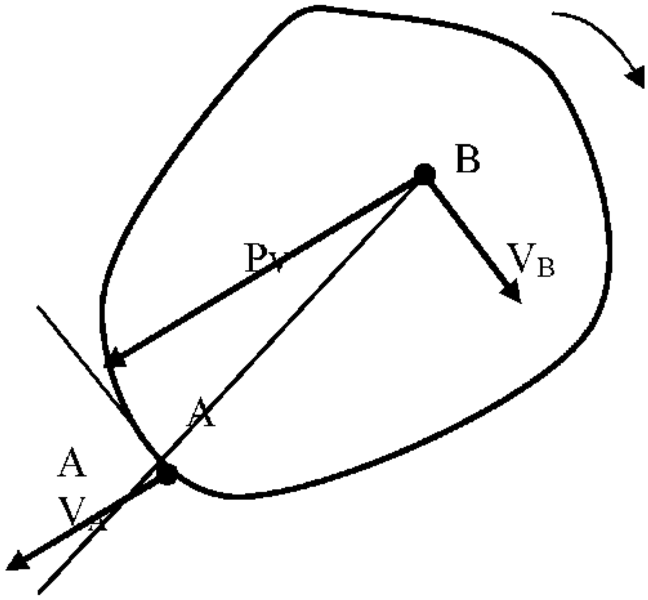
$$W = W^n + W^\tau$$

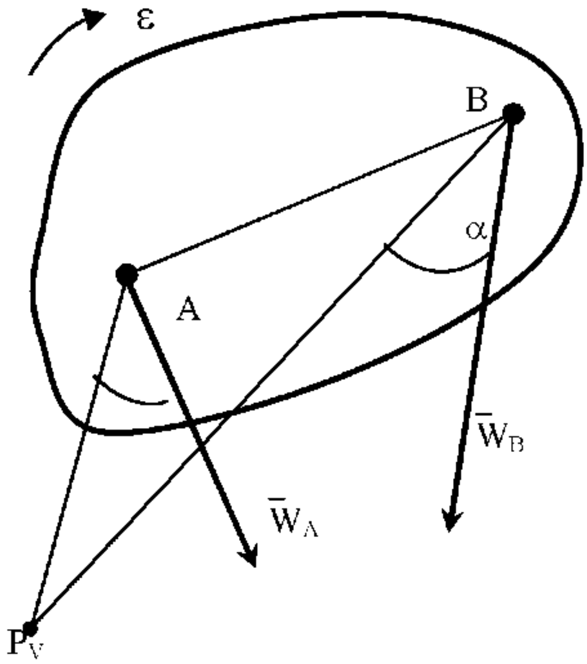
$$W^n = \frac{V^2}{R} = \frac{\omega^2 r^2}{R} = \omega^2 R$$

$$W^\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\,\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon$$

$$\mathrm{Tg}\ \alpha = \frac{W^n}{W^\tau} = \frac{R\varepsilon}{\omega^2 R} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \qquad \mathrm{Tg}\ \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

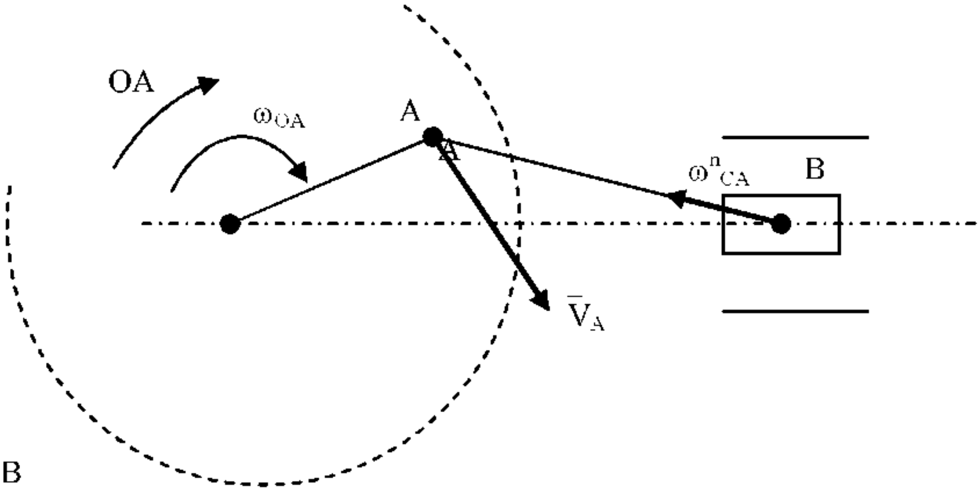
Мгновенный центр ускорений – это точка, которая целиком принадлежит телу и имеет ускорение равное 0.

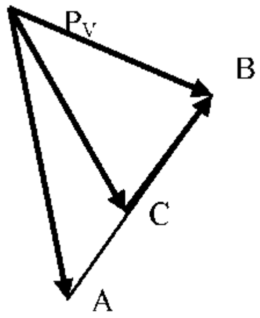


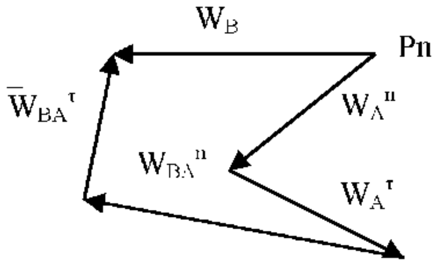


Теорема Эйлера, касающаяся ускорений;

Планом ускорений – называется графическое изображение.







$\overline{W}_B = \overline{W}_A + \overline{W}_{BA}$

$V_A = \omega_{OA} OA \;\Big|\; \overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}$

$\mu_V = \dfrac{\text{Истинная величина}}{\text{Чертежный размер}} \quad apv = \dfrac{V}{\mu_V}$

$V_B = bpv \cdot \mu_V$

$BV_{BA} = ab \cdot \mu_V$

$\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{ca}{cb}$

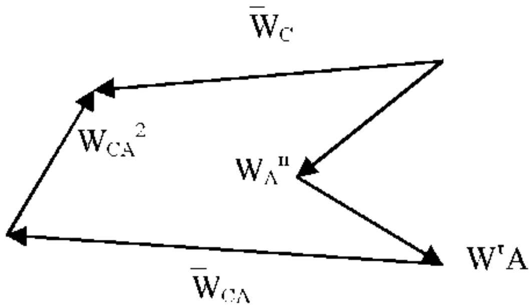
$\mu_W = \dfrac{\text{Истинная величина}}{\text{Чертежный размер}}\left[\dfrac{m/c^2}{mm}\right] \quad \overline{W}_B = \overline{W}_A + \overline{W}_{BA}$

$\overline{W}_B = \overline{W}^n{}_A + \overline{W}^\tau{}_A + \overline{W}^n{}_{BA} + \overline{W}^\tau{}_{BA}$

$W^n{}_A = \omega^2_{OA} OA;\ W^\tau{}_A = \varepsilon OA;\ W^n{}_{BA} = \dfrac{V^2_{BA}}{AB};\ W^\tau{}_{BA} = ?$

$\overline{W}_C = \overline{W}^n{}_A + \overline{W}^\tau{}_A + \overline{W}^n{}_{CA} + \overline{W}^\tau{}_{CA}$

$W^n{}_{CA} = \dfrac{V^2_{CA}}{AC};\ W^\tau{}_{CA} = \varepsilon_{AB} \cdot AC;\ \varepsilon_{AB} = \dfrac{W^2_{BA}}{AB}$

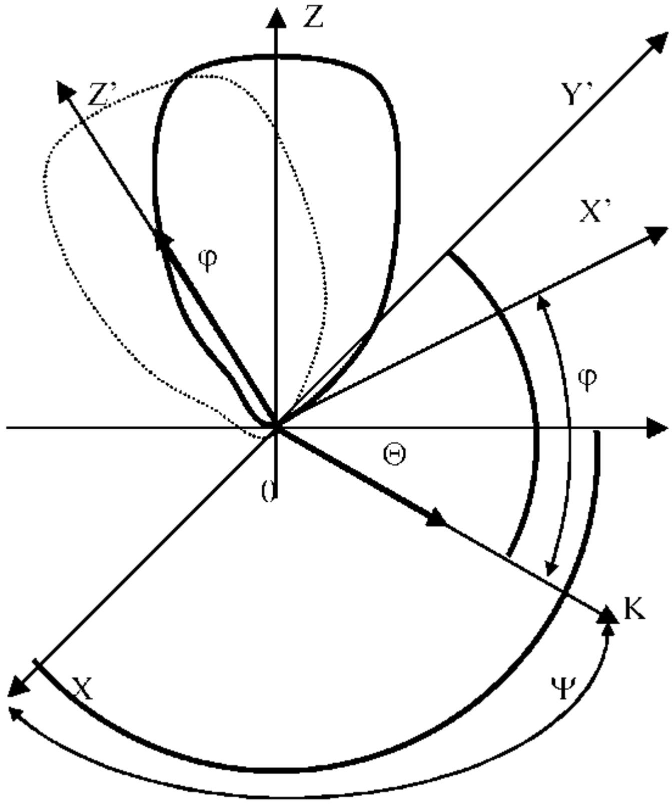


Лекция 13. Лекция 13.

Движение тела с одной неподвижной точкой и движение свободного тела.

1. Основные понятия
2. Уравнение движения тела с одной неподвижной точкой
3. Скорость и ускорение точки тела в сферическом движении
4. Движение свободного тела.

Движение тела с одной неподвижной точкой называется сферическим движением.



φ - собственное вращение $\angle X'OH$ – H (во вкруг оси OZ')

ψ - процессия $\angle XOH$ - ψ (вокруг оси OZ)

Θ - нутация $\angle ZOZ'$ - Θ (вокруг оси OH)

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

OP – мгновенная ось вращения

$$\overline{V}_M = [\overline{\omega}_0, \overline{r}_m']$$

2.

$$\left.\begin{array}{l}\varphi=\varphi(t)\\ \psi=\psi(t)\\ \Theta=\Theta(t)\end{array}\right\}\overline{V}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ X & Y & Z\end{vmatrix}=(\omega_y Z-\omega_y Y)\overline{i}+(\omega_z X-\omega_x Z)\overline{j}+(\omega_x Y-\omega_y X)\overline{k}$$

$$\overline{W}=\frac{d\overline{V}}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\overline{\omega},\overline{r}\right]=\left[\frac{dV}{dt},\overline{r}\right]+\left[\overline{\omega},\frac{d\overline{r}}{dt}\right]=\left[\overline{\varepsilon},\overline{r}\right]+\left[\overline{\omega},\overline{V}\right]$$

3.

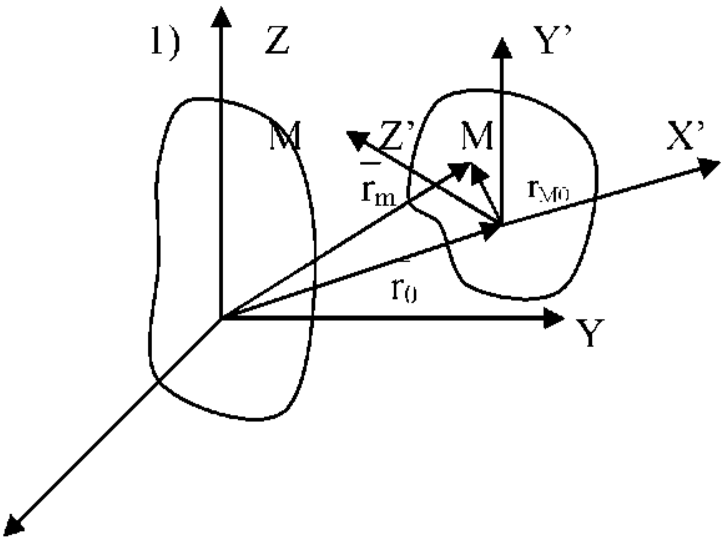
$$\begin{array}{lll} X_c=X_c(t) & \varphi=\varphi(t) & \overline{V}_B=\overline{V}_A+\overline{V}_{BA}\\ Y_c=Y_c(t) & \psi=\psi(t) & \overline{W}_B=\overline{W}_A+\overline{W}_{BA}\\ Z_c=Z_c(t) & \Theta=\Theta(t) & \end{array}$$

Тема 8: Сложное движение точки и твердого тела.

Лекция 14. Скорость и ускорение точки в сложном движении. Лекция 14.

1. Абсолютное, относительное и переносное движение
2. Теорема о сложении скоростей
3. Теорема Кориолиса.

rm - абсолютный радиус-вектор точки М
ro - переносный радиус-вектор
rMo – относительный радиус-вектор точки М



$$\overline{r}_m=\overline{r}_0+\overline{r}_{M_0}$$

2)

$$\frac{d\overline{r}_m}{dt}=\frac{d\overline{r}_0}{dt}+\frac{d\overline{r}_{M_0}}{dt}\Rightarrow\overline{V}^n{}_m=\overline{V}_0+\overline{V}_{0M}$$

$$d\overline{r}_{M_0}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k};\quad \frac{d\overline{r}_{M_0}}{dt}=\frac{dx}{dt}\overline{i}+x\frac{d\overline{i}}{dt}+\frac{dy}{dt}\overline{j}+y\frac{d\overline{j}}{dt}+\frac{dz}{dt}\overline{k}+z\frac{d\overline{k}}{dt}$$

$$\overline{V}_m=\overbrace{\frac{d\overline{r}_0}{dt}+x\frac{d\overline{i}}{dt}+y\frac{d\overline{j}}{dt}+z\frac{d\overline{k}}{dt}}^{\overline{V}^e(V^e)}+\overbrace{\frac{dx}{dt}\overline{i}+\frac{dy}{dt}\overline{j}+\frac{dz}{dt}\overline{k}}^{\overline{V}^2}$$

$\overline{V}^n{}_m=\overline{V}^e{}_m+\overline{V}^r$ - теорема о сложении скоростей в случае сложного движения.

Теорема. Скорость точки в сложном движении складывается из переносной скорости и скорости относительной.

3)

$$\overline{W}_n^a=\frac{d\overline{V}^a{}_m}{dt}=\frac{d^2\overline{r}_0}{dt^2}+\frac{dx}{dt}\frac{d\overline{i}}{dt}+x\frac{d^2\overline{i}}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d\overline{j}}{dt}+y\frac{d^2\overline{j}}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\frac{d\overline{k}}{dt}+z\frac{d^2\overline{k}}{dt^2}+$$

$$+\frac{d^2x}{dt^2}\overline{i}+\frac{dx}{dt}\frac{d\overline{i}}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\overline{j}+\frac{dy}{dt}\frac{d\overline{j}}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}\overline{k}+\frac{dz}{dt}\frac{d\overline{k}}{dt}$$

$$\overline{W}_n^a=\underbrace{\frac{d^2\overline{r}_0}{dt^2}+x\frac{d^2\overline{i}}{dt^2}+y\frac{d^2\overline{j}}{dt^2}+z\frac{d^2\overline{k}}{dt^2}}_{\overline{W}^e}+\underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}\overline{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\overline{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\overline{k}}_{\overline{W}^r}+\underbrace{2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\overline{i}}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{d\overline{j}}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{d\overline{k}}{dt}\right)}_{W^k}$$

$$\overline{W}_n^a=\overline{W}^e+\overline{W}^r+\overline{W}^k$$

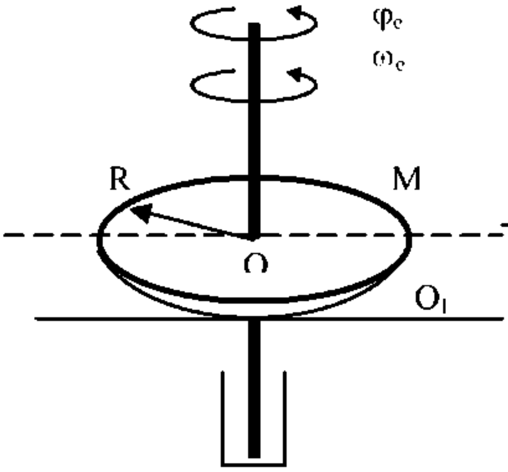
Теорема. Ускорение точки в сложном движении - есть геометрическая сумма трех ускорений: переносного, относительного и ускорения Кориолиса.

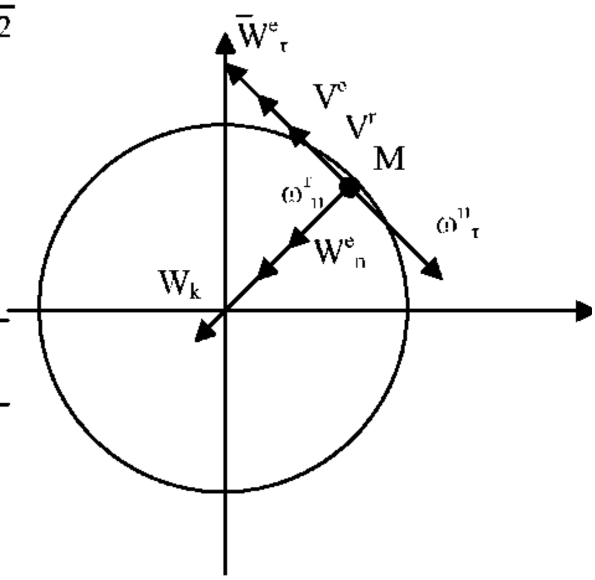
$$\overline{W}^k=2\left(Vx[\overline{\omega},\overline{i}]+Vy[\overline{\omega},\overline{j}]+Vz[\overline{\omega},\overline{k}]\right)=2[\omega,Vx\overline{i}+Vy\overline{j}+Vz\overline{k}]=2[\omega,\overline{k}]$$

$$\varphi = 4t^2$$
$$Sm = 0$$
$$M = 2\mathrm{Sin}\frac{\pi t}{4}$$
$$\overline{V}m = ?\ \overline{W}m = ?$$
$$\text{при } t = 1c$$

$$Sm = 2\mathrm{Sin}\frac{\pi \cdot 1}{4} = \sqrt{2}$$
$$l = R \cdot \varphi$$
$$\varphi = \frac{l}{k}$$
$$\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1\text{рад}$$
$$\overline{V}_m = \overline{V}^r + \overline{V}^n$$
$$\overline{V}^r = \omega k$$
$$\omega = \frac{dx}{dt} = 8t$$
$$\omega = 8\text{м}/c$$
$$V^2 = 8\sqrt{2}$$

$$V^r = \frac{ds}{dt} = \mathrm{Cos}\frac{\pi t}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\mathrm{Cos}\frac{\pi t}{4}$$
$$V^r = \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$
$$V| = (8\sqrt{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4})\text{м}/c$$





$$\overline{W}m = \overline{W}^e + \overline{W}^r + \overline{W}^k = \overline{W}^e_A + \overline{W}^e_\tau + \overline{W}^r_n + \overline{W}^r_\tau + \overline{W}_K$$

$$W^e_n = R\omega^r_e \quad W_e = \sqrt{2} * 8 = 8\sqrt{2}\ м/с^2$$

$$W^e_\tau = R\varepsilon \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 8$$

$$W^r_\tau = 8\ м/с^2$$

$$W^r_n = \frac{(V^r)^2}{R} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{4}\cos^2\frac{\pi t}{4} \quad при\ t = 1 \quad V^2_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{3.14^2}{4}\frac{2}{4}$$

$$W^\tau_\tau = \frac{-\pi^2}{8}\operatorname{Sin}\frac{\pi t}{4}$$

$$\overline{W}^K = 2[\omega, Vr]$$

$$W_K = 2\omega Vr \operatorname{Sin}(\omega, Vr) = 2 * 8\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

$$W^\tau = W^e_\tau - W^r_\tau \qquad W = \sqrt{W^2_n + W^2_r}$$

$$W^n = V^n_e + W^n_\tau + W_k$$

Лекция 15 Лекция 15

Сложение вращений тела вокруг параллельных осей.

1. Параллельное
2. Антипараллельное вращение
3. Кинематический расчет цилиндрических зубчатых передач.

$$\Omega = ?$$

$$\overline{V}_p = \overline{V}^e_p + \overline{V}^z_p$$

$$\overline{V}^r_p = -\overline{V}^e_p \to \overline{V}_p = 0 \Rightarrow p - МУС\ (2\ тела)$$

$$\overline{V}^e_p = \omega_1 \cdot OP$$

$$\overline{V}^r_p = \omega_2 = O_1P$$

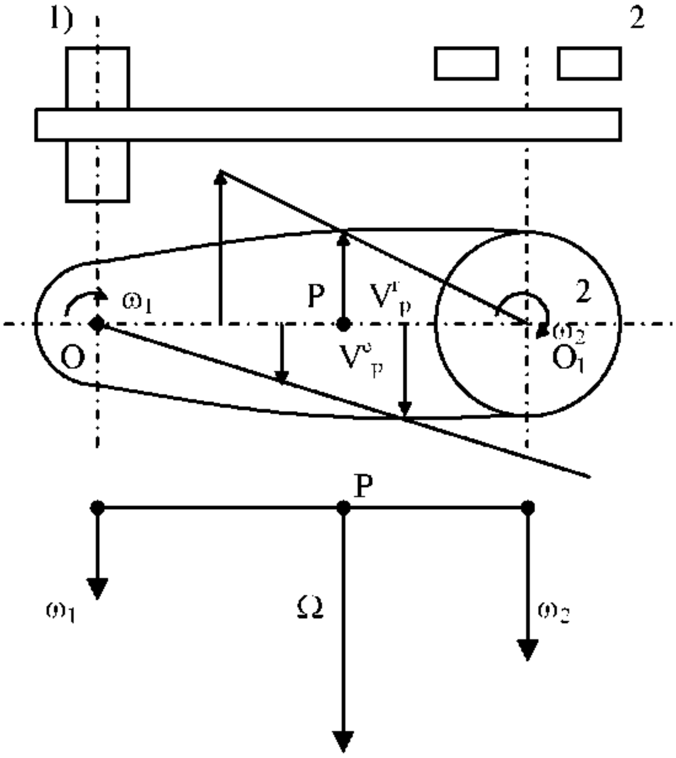
$$\omega_1 OP = \omega_2 O_1 P \qquad \left.\begin{aligned}\overline{V}_{O_1} &= \omega_1 OO_1\\ \overline{V}_{O_1} &= \Omega O_1 P\end{aligned}\right\}\Omega O_1 P = \omega_1(OP + O_1P)$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_1P}{OP}$$

$$\Omega O_1 P = \omega_1 OO_1$$

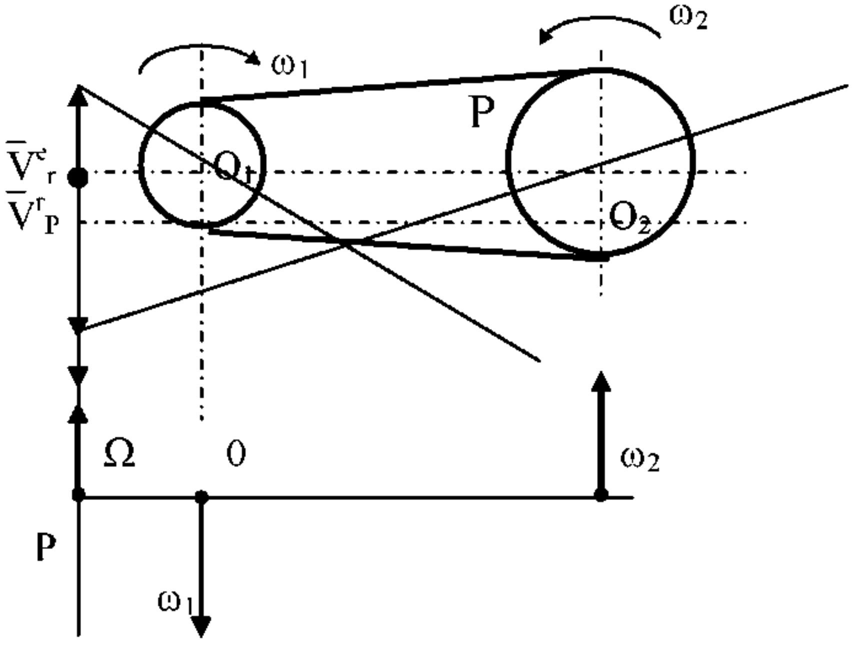
$$OP = \frac{\omega_2}{\omega_1}O_1P \qquad \Omega O_1 P = \omega_1\frac{\omega_2}{\omega_1}O_1P + \omega_1 O_1 P \qquad \Omega = \omega_1 + \omega_2$$

1)

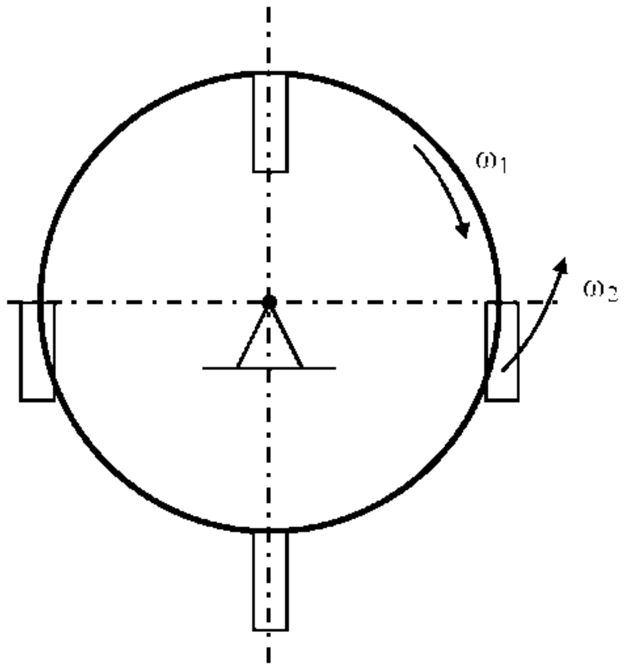


2)

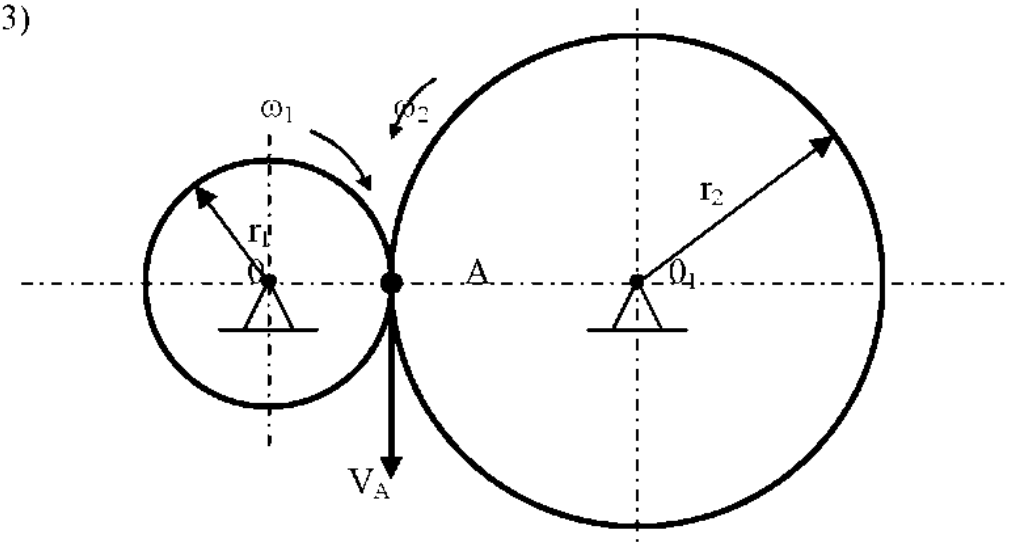
$\Omega=\omega_1-\omega_2$



$\omega 1 = \omega 2 \quad \Omega=0$



3)



$2r_1 = mz_1$

$2r_2 = mz_2$

z – количество зубьев

m – модуль зубчатой передачи

$$i = \frac{\text{Угловая скорость ведущего колеса}}{\text{Угловая скорость ведомого колеса}}$$

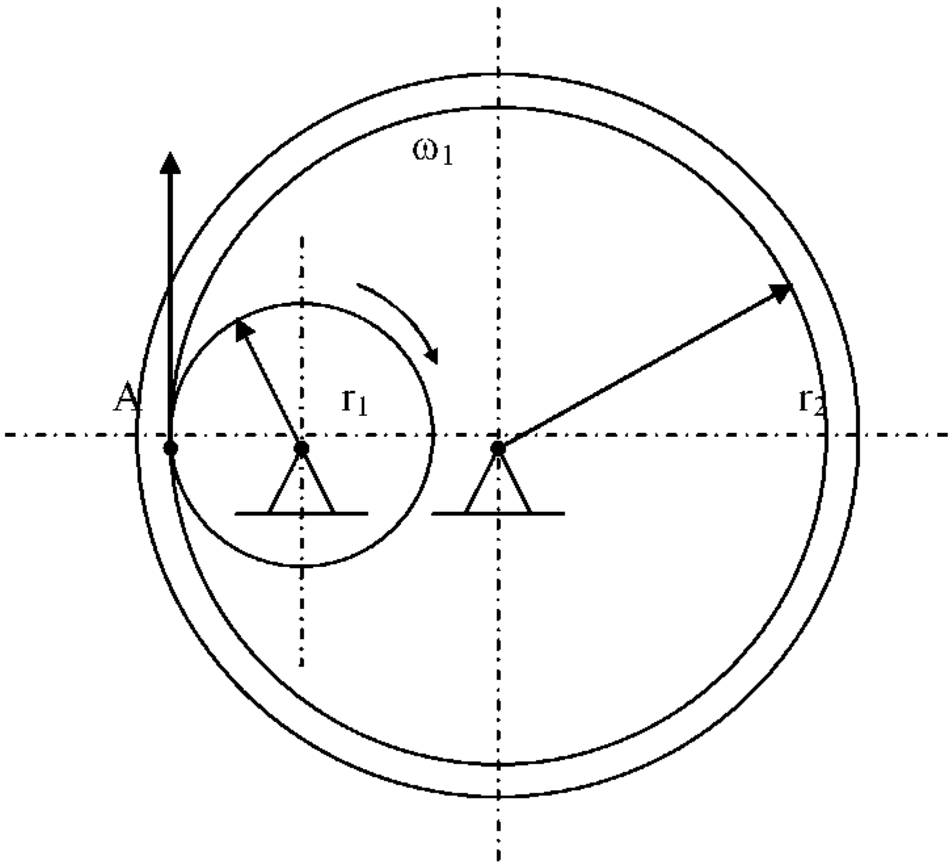
$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} \qquad \left.\begin{aligned} V_A &= \omega_1 r_1 \\ V_A &= \omega_2 r_2 \end{aligned}\right\} \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

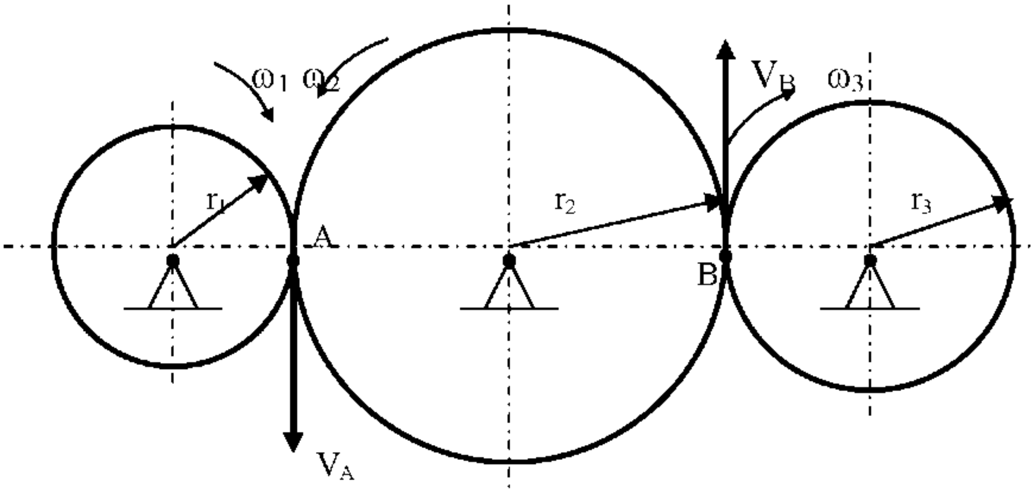
$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

$V_A = \omega_1 r_1$

$V_A = \omega_2 r_2$

$$i = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}$$





$$i=\frac{\omega_1}{\omega_2}\quad V_A=\omega_1 r_1\qquad V_B=\omega_2 r_2$$

$$V_2=\omega_2 r_2\qquad V_B=\omega_2 r_3$$

$$\omega_1 r_1=\omega_2 r_2\quad \omega_3 r_3=\omega_2=r_2$$

$$\omega_2=\frac{\omega_1 r_1}{r_2}\quad \omega_3=\frac{r_2\omega_2}{r_3}$$

$$\omega_3=\frac{r_2\,\frac{\omega_1 r_1}{r_2}}{r_3}=\frac{\omega_1 r_1}{r_3}\qquad i=\frac{\omega_1}{\omega_3}=\frac{r_3}{r_1}=\frac{z_3}{z_1}$$

$$V_A=\omega_1 r_1$$

$$V_A\quad \omega_2 r_2$$

$$\omega_2=\frac{\omega_1 r_1}{r_2}$$

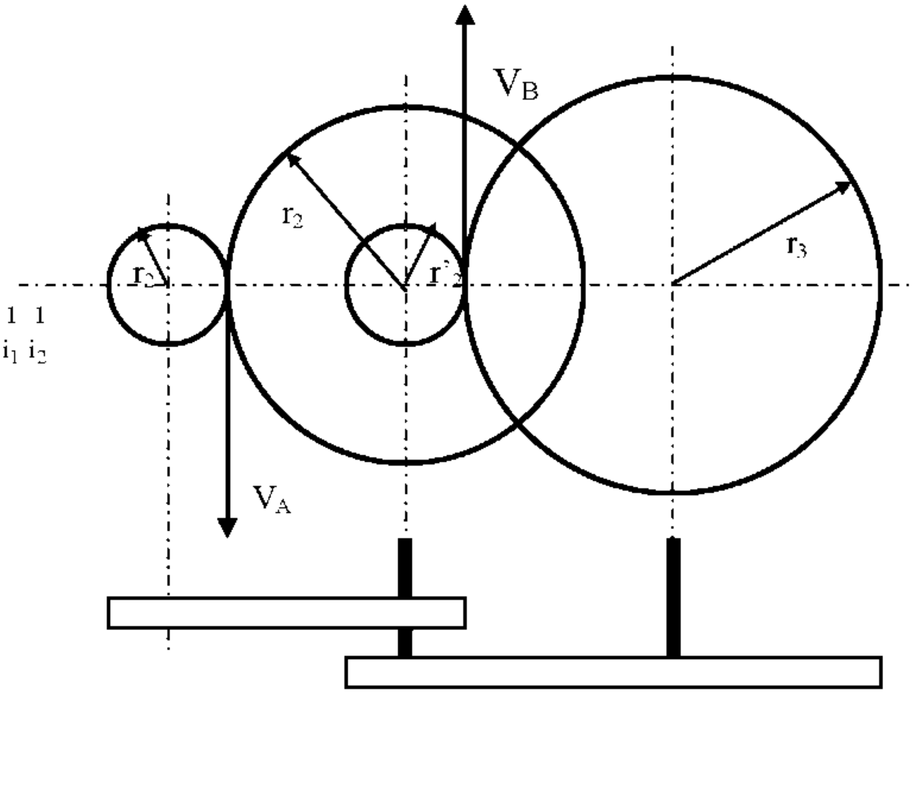
$$V_B\quad \omega_2 r_2$$

$$V_2=\omega_3 r_3$$

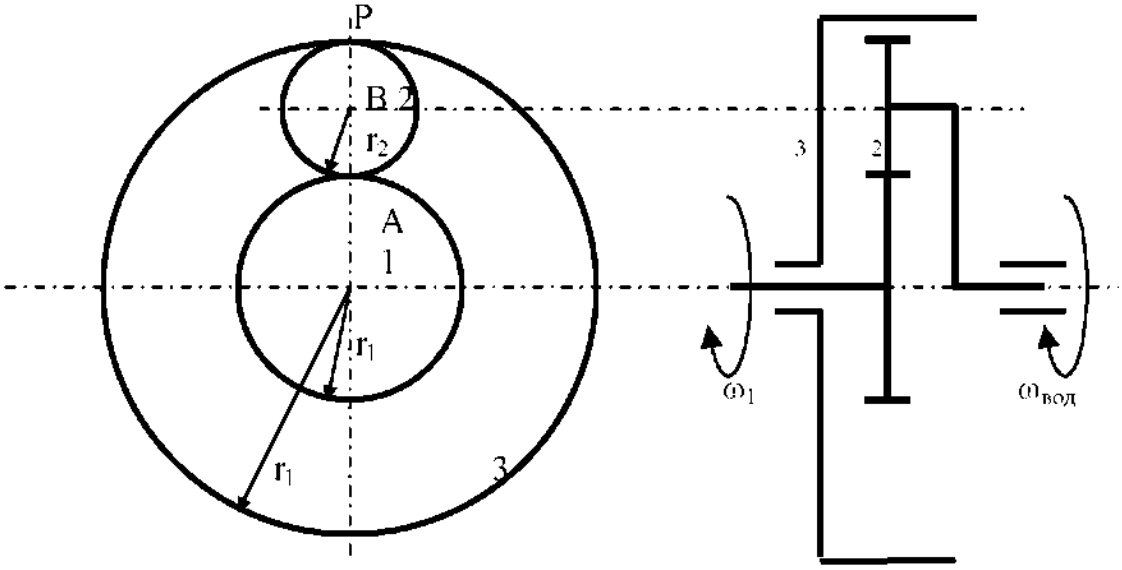
$$\omega_3\quad \frac{r_2\omega_2}{r_3}$$

$$\omega_3=\omega_1\,\frac{r_1}{r_2}\,\frac{r_2}{r_3}=\omega_1\,\frac{1}{i_1}\,\frac{1}{i_2}$$

$$i\quad \frac{\omega_1}{\omega_3}\quad i_1\cdot i_2$$



Зубчатые передачи с подвижными осями.



$r_3 = r_1 + 2r_2$

$r_{ведом} = r_1 + r_2$

$i = \dfrac{\omega_1}{\omega_{вод}}$

$V_A = \omega_1 r_1$

$V_A = \omega_2 2r_2$

$\omega_1 r_1 = \omega_2 2r_2$

$\omega_2 = \dfrac{\omega_1 r_1}{2r_2} \qquad V_{01} = \omega_2 r_2 = \dfrac{\omega_1 r_1 r_2}{2r_2} = \dfrac{\omega_1 r_1}{2}$

$\omega_{вод} = \dfrac{V_{01}}{r_1 + r_2} = \dfrac{\omega_1 r_1}{2r_1 + r_2}$

$V_A = \omega_1 r_1$

$v_B = \omega_2 r = \dfrac{\omega_1 r_1 r_2}{2r_2} = \dfrac{\omega_1 r_1}{r_2}$

$r_2 = \dfrac{r_3 - r_1}{2}$

$i = \dfrac{\omega_1}{\omega_{вод}} = \dfrac{2(r_1 + r_2)}{r_1} = \dfrac{r_1 + r_3}{r_1} = 1 + \dfrac{r_3}{r_1}$

Сложение вращений тела вокруг пересекающихся осей.

1. Сложение угловых скоростей
2. Кинематический расчет зубчатых конических передач
3. Винтовое движение тела.

$$\dot{V}_{01} = \dot{V}_{01}^{e} + \dot{V}_{01}^{r}$$

$$\vec{V}_{01}^{e} = -[\omega_2, OO_1]$$

$$\vec{V}_{01}^{r} = [\overline{\omega}_1, OO_1]$$

$$\overline{V}_{01}^{e} = -\omega_2 OO_1 \,\mathrm{Sin}\,\varphi_2$$

$$\overline{V}_{01}^{r} = \omega_1 OO_1 \,\mathrm{Sin}\,\varphi_1$$

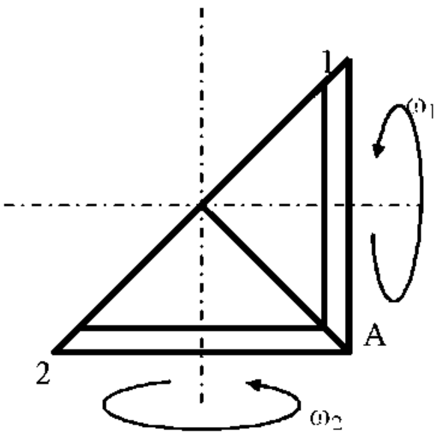
$$\frac{\omega_2}{\mathrm{Sin}\,\varphi_1} = \frac{\omega_1}{\mathrm{Sin}\,\varphi_2} \Rightarrow \omega_2 \mathrm{Sin}\,\varphi_2 = \omega_1 \mathrm{Sin}\,\varphi_1$$

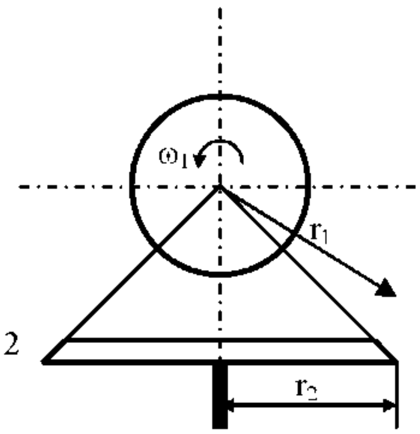
$$V_{01}^{e} = -V_{01}^{r} \quad \overline{V}_{01} = 0$$

$$\overline{O_1}\,\overline{O} = \overline{\Omega} \quad \overline{\Omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$$

$$\overline{V}_m = [\overline{\Omega}, \overline{r}_m] = \begin{bmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ x & y & z \end{bmatrix}$$

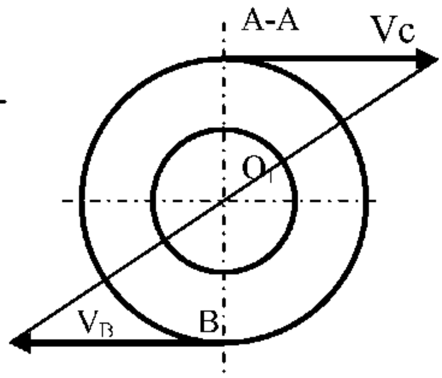
2)





$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad V_A = \omega_1 r_1 \quad \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

$$V_A = \omega_2 r_2 \qquad i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad i = \frac{z_2}{z_1}$$



$$V_B = \omega_1 r$$

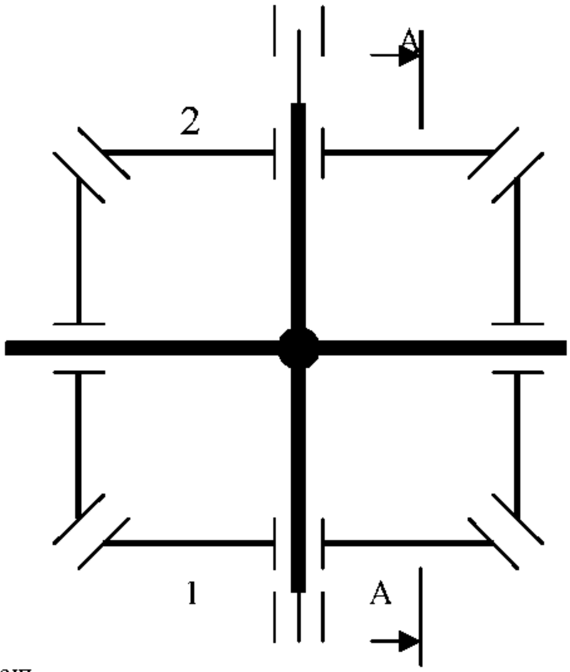
$$V_B = \omega_2 r$$

$$V_{01} = \frac{V_C - V_B}{2}$$

$$\omega_5 = \frac{V_{01}}{r}$$

$$\omega_5 = \frac{\omega_2 r - \omega_1 r}{2r}$$

$$\omega_5 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$$



3)

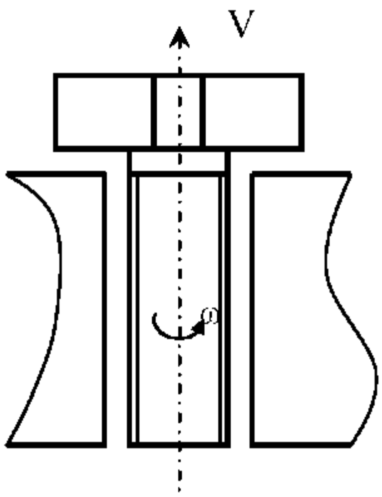
$$\overline{V}_M = \overline{V}_M^{\text{пост}} + \overline{V}_M^{\text{вращ}}$$

$$\overline{V}_M^{\text{пост}} = V$$

За 1 оборот – 1 шаг.

$$\overline{V}_M^{\text{вращ}} = \omega r$$

$$V_m = \sqrt{V^2 + \omega^2 r^2}$$



Динамика

Тема:9. Движение свободной материальной точки.

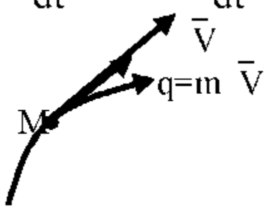
Лекция 16. Основные законы классической механики. Дифференциальное уравнение движения свободной материальной точки. Лекция 16.

1. Законы Ньютона
2. Уравнение движения в декартовых координатах
3. Естественные уравнения движения
4. Первая (прямая) и вторая (обратная) задачи динамики материальной точки.

Закон инерции: Всякая материальная точка продолжает удерживаться в состоянии покоя или прямолинейно равномерно двигаться пока и поскольку она не побуждается приложенными силами изменить это состояние.

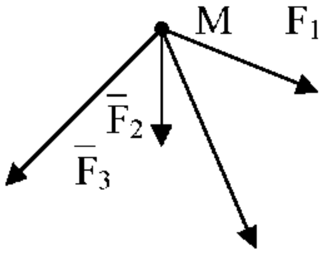
Зависимость между силой и количеством движения точки:
Изменение количества движения пропорционально приложенной действующей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.

$$\frac{d\bar{g}}{dt} = F \qquad \frac{d\left(m\bar{V}\right)}{dt} = \bar{F} \qquad m\frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F} \qquad m \cdot \bar{W} = \bar{F}$$



Закон действия и противодействия: действию всегда есть равное и противоположное противодействие.

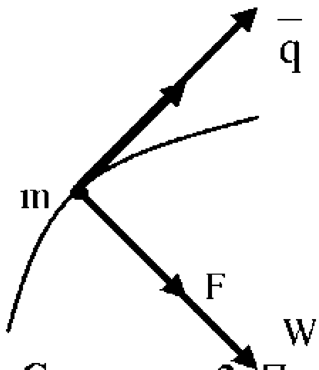
Следствие 1: Принцип независимости действия сил:



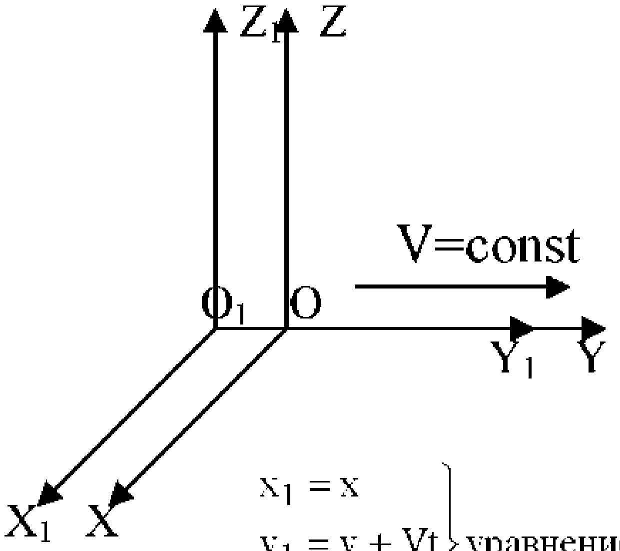
$$n\bar{W}_1 = \bar{F}_1 \qquad m\left(\bar{W}_1 + \bar{W}_2 + \bar{W}_3\right) = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3$$

$$n\bar{W}_2 = \bar{F}_2$$

$$n\bar{W}_3 = \bar{F}_3 \qquad m\bar{W} = \bar{R}$$



Следствие 2: Принцип относительности классической механики



$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x \\ y_1 &= y + Vt \\ z_1 &= z \end{aligned}\right\} \text{уравнение Галеллея – Ньютона}$$

$$\left.\begin{aligned} V_{x_1} &= V_x = 0 \\ V_{y_1} &= V\text{цет} \\ z_1 &= V_z = 0 \end{aligned}\right| \begin{aligned} W_{x_1} &= 0 \\ W_{y_1} &= 0 \\ W_{z_1} &= 0 \end{aligned}$$

$$\overline{F} = \overline{F}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} \qquad \overline{V} = \frac{d\overline{z}}{dt} \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

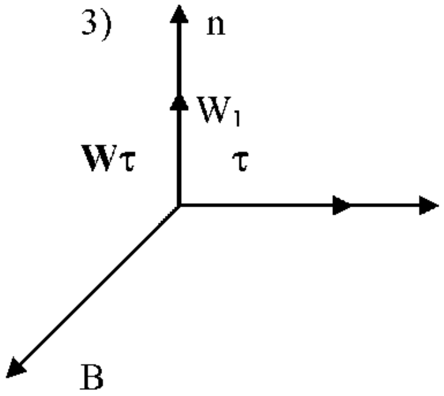
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{m} y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$$\ddot{z} = \frac{1}{m} z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

3)



$$W^n = \frac{V^z}{\rho} = F_n ; \; W^\tau = \frac{dV}{dt}$$

$$m \frac{V^z}{\rho} = F_n$$

$$m \frac{dV}{dt} = F_\tau$$

$$0 = F_1$$

4)

1. m, x(t), y(t), z(t) 2. m, F x(t), y(t), z(t)=?

F = ?

$$x = V_0 t \cdot \operatorname{Sin} \alpha$$

$$y = \frac{-g}{2} t^2 + V_0 t \cdot \operatorname{Sin} \alpha$$

F = ?

$$t = \frac{x}{V_0 \operatorname{Cos} \alpha}$$

$$y = -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{V_0 \cdot \operatorname{Cos} \alpha}\right)^2 + V_0 \frac{x \cdot \operatorname{Sin} \alpha}{V_0 \cdot \operatorname{Cos} \alpha}$$

$$y = -\frac{g x^2}{2 V_0^2 \cdot \operatorname{Cos}^2 \alpha} + x \operatorname{Tg} \alpha$$

$$V_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = V_0 \operatorname{Cos} \alpha$$

$$V_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = -gt + V_0 \operatorname{Sin} \alpha$$

$$W_x = \frac{dV_0}{dt} = 0$$

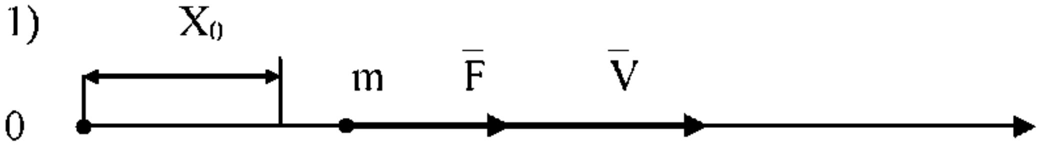
$$W_y = -g$$

$$W = g \quad \overline{F} = mg$$

Простейшие случаи прямолинейного движения

1. Прямолинейное движение
2. Пример, когда сила зависит от времени
3. Пример, когда сила зависит от скорости
4. Пример, когда сила зависит от координат.

1)



$$m = \frac{d\overline{V}}{dt} = \overline{F}\big((t, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), x, y, z\big)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}; \quad \ddot{x} = \frac{1}{m}X\big(t, \dot{x}, x\big)$$

2)

$$X(t) \qquad \int_{V_0}^{V} dV = \int_0^t \frac{X}{m}dt \Rightarrow V - V_0 = \frac{X}{m}t \Rightarrow V = V_0 + \frac{X}{m}t$$

$$X = \mathrm{const}$$

$$m\frac{dV}{dt} = X \qquad V = \frac{dx}{dt} = V_0 + \frac{X}{m}t \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t \frac{V_0}{dt} + \int_0^t \frac{X}{m}tdt$$

$$x = x_0 + V_0 t + \frac{X}{m}\frac{t^2}{2}; \qquad \frac{\dot{X}}{m} = \ddot{x} = \mathrm{const}$$

$S = KV = KV_m$ при $t = 0$ $x = 0$ $V = 0$

$F_{тр} = fN$

$\Sigma Y = 0:\ N - mg\,Cos\,\alpha = 0$

$N = mg\,Cos\,\alpha$

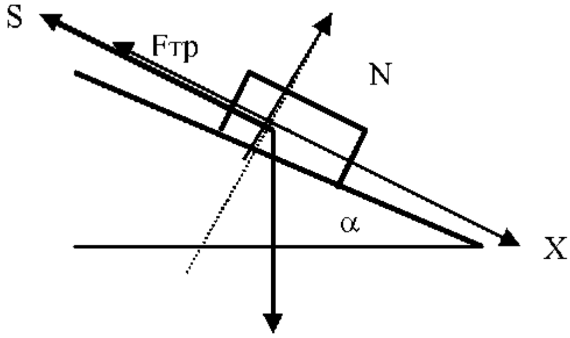
$$m\frac{dV}{dt} = \overbrace{mg\,Sin\,\alpha - f\,mg\,Cos\,\alpha}^{=0} - KV_m$$

$$\frac{dV}{dt} = a - KV;\ \int_0^V \frac{dV}{a - KV} = \int_0^t dt \Rightarrow Ln(a - KV)\left(-\frac{1}{K}\right) = t \Rightarrow Ln(a - KV) - Ln\,a = -Kt$$

$$Ln\left|\frac{a - KV}{a}\right| = -Kt;\ \frac{a - KV}{a} = e^{\ Kt}$$

$$-\frac{K}{a}V = e^{\ Kt};\ V = \frac{a}{K}\left(1 - e^{\ Kt}\right)$$

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{a}{K}\left(1 - e^{\ Kt}\right),\ \int_0^x dx = \int_0^t \frac{a}{K}\left(1 - e^{\ Kt}\right)dt;\ x = \frac{a}{K}t - \left(-\frac{a}{K^2}\right)e^{\ Kt} = \frac{a}{K}t + \frac{a}{K^2}e^{\ Kt} - \frac{a}{K^2} = x$$



4)

$$\frac{P(x)}{P(R)} = \frac{R^2}{X^2}\quad P(R) = mg\quad P(x) = mg\frac{R^2}{X^2}$$

$$\frac{dV}{dt} = -P(x);\quad m\frac{dV}{dt} = -mg\frac{R^2}{X^2}$$

$$\frac{dV}{dt}\frac{dx}{dx} = -g\frac{R^2}{X^2};\ VdV = -gx^{-2}R^2dx$$

$$\int_{V_0}^V VdV = \int_R^x -gx^{-2}R^2dx$$

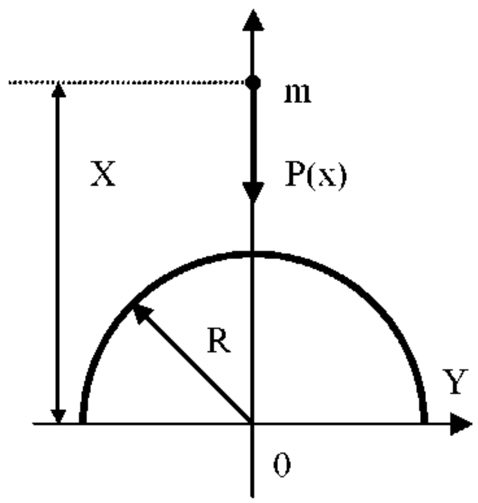
$$\frac{V^2}{2} - \frac{V_0^2}{2} = -gR^2\left|\frac{x^{-1}}{-1}\right|_R^x = gR^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R}\right)$$

$$V = \sqrt{V_0^2 + 2gR^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R}\right)}$$

Для нахождения максимального объема примем V=0

$$0 = V_0^2 + 2gR^2\left(\frac{1}{X_{max}} - \frac{1}{R}\right)$$

$$X_{max} = \frac{2gR^2}{2gR - V_0^2}$$



Тема 10. Прямолинейные колебания.

Лекция 19.Свободные и вынужденные колебания точки.

Лекция 19.

1. Основные понятия
2. Свободные колебания
3. Вынужденные колебания
4. Резонанс.

Колебания – это многократно повторяющееся движение через определенный момент времени.

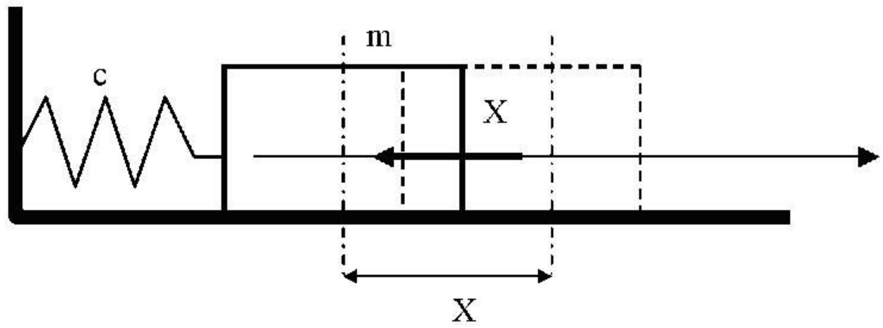
X = X (t)

A – амплитуда

T – период

2)

Свободные колебания – это колебания, происходящие под действием восстанавливающей силы (пружины).



При t=0 если $x_0=x$; V=0

$$x = x_0 \cos\omega t$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

где ω - круговая частота колебаний

ν=1/T – число колебаний в секунду

$$X = cx$$

$$m\ddot{x} = -X$$

$$m\ddot{x} + cx = 0$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \frac{c}{m} = \omega^2$$

$$\ddot{x} = r^2 e^{rt}$$

$$\dot{x} = re^{rt}$$

$$x = e^{rt}$$

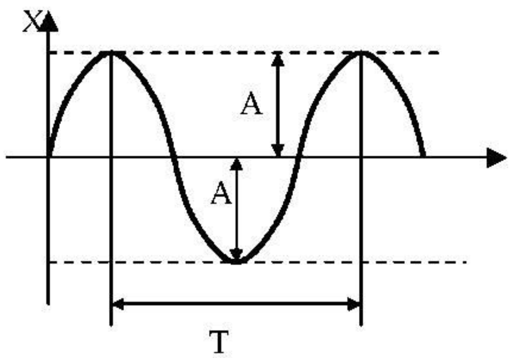
3)

$$r^2 e^{rt} + \omega^2 e^{rt} = 0$$

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

$$r_{1,2} = \pm\omega_i$$

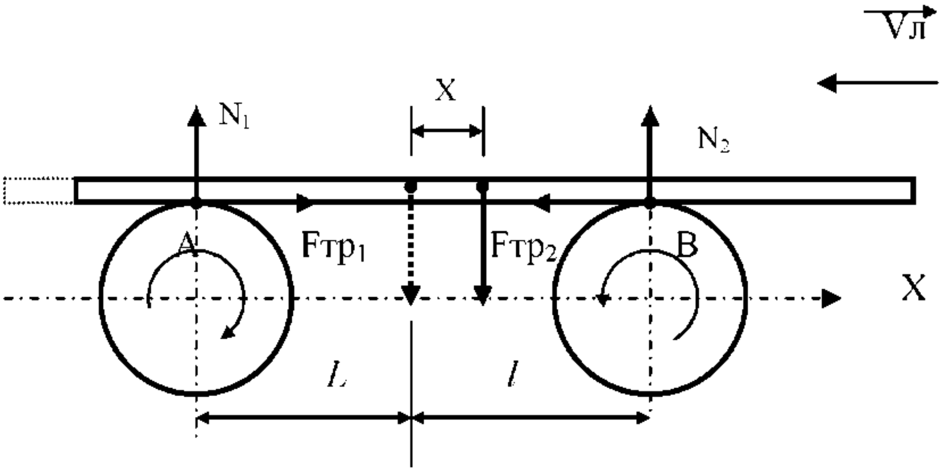
$$x = A\cos(\omega t - \varphi_0)$$



$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \qquad \nu = \frac{1}{T} -$$

При $t \neq 0$

$$X = A \cdot Cos(\omega t - \varphi_0)$$



1) Fтр2 > Fтр1
   N2 > N1
2) N2 = N1
   $\bar{V}л \neq 0$

X=X(t) - ?
T = ?
A = ?

$$\Sigma Y = 0 \quad N_1 - P + N_2 = 0 \qquad N_2 = P\frac{\ell + x}{2\ell}$$

$$N_2 \cdot \ell \cdot 2 - P(\ell + X) = 0$$

$$-N_1 \cdot \ell \cdot 2 + P(\ell + X) = 0 \qquad N_1 = P\frac{\ell + x}{2\ell}$$

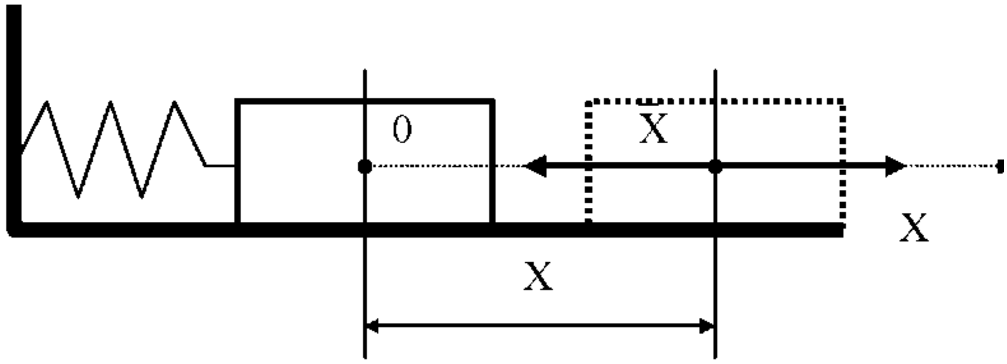
$$P\frac{\ell - X}{2\ell} - P + P\frac{\ell + X}{2\ell} = 0$$

$$m\ddot{x} = -\left(F_{тр_2} - F_{тр_1}\right) = -f\,P\left(\frac{\ell + x}{2\ell} - \frac{\ell - x}{2\ell}\right) = -\frac{f\,P}{2\ell}(\ell + x - \ell + x) = \frac{fPx}{\ell}$$

$$\cancel{m}\ddot{x} + \frac{\cancel{m}\,g\,f\,x}{\ell} = 0 \qquad \left(\omega^2 = \frac{gf}{\ell}\right)$$

$$x = x_0 Cos\,\omega t, \quad x = x_0 Cos\sqrt{\frac{gt}{\ell}}t$$

3) Вынужденные колебания – колебания, происходящие под действием возмущающей и вспомогательной силы.



$$F = H\ \mathrm{Cos}\ (pt - \psi_0)$$

$$X = cx$$

$$m\ddot{x} = -X + F$$

$$m\ddot{x} + cx = H\,\mathrm{Cos}(pt - \psi_0)$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = h \cdot \mathrm{Cos}(pt - \psi_0)$$

- дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянным коэффициентом линейное и неоднородное.

$$x = x_{об} + x_{ч.}$$

$$x_{об} = A \cdot \mathrm{Cos}(\omega t - \varphi_0)$$

$$x_{ч.} = B \cdot \mathrm{Cos}(pt - \varphi_0)$$

$$\dot{x} = -B \cdot p \cdot \mathrm{Sin}(pt - \varphi_0)$$

$$\ddot{x} = -B \cdot p \cdot \mathrm{Cos}(pt - \varphi_0)$$

$$-B \cdot p^2 \cdot \mathrm{Cos}(pt - \varphi_0) + B\omega^2 \mathrm{Cos}(pt - \varphi_0) = h\mathrm{Cos}(pt - \varphi_0)$$

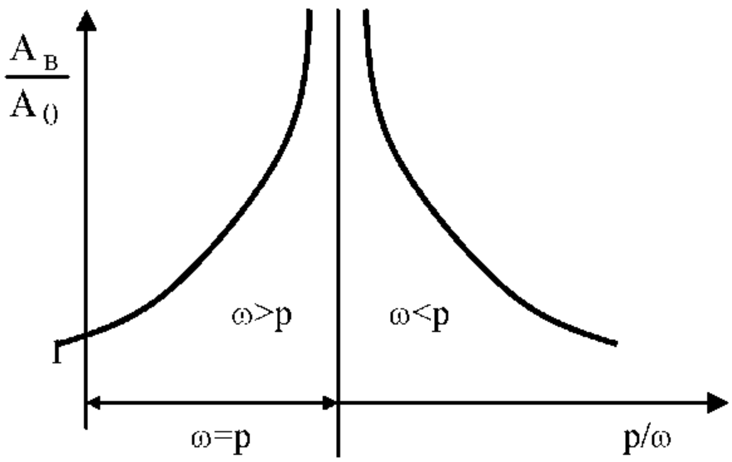
$$B = \frac{h}{\omega^2 - p^2}$$

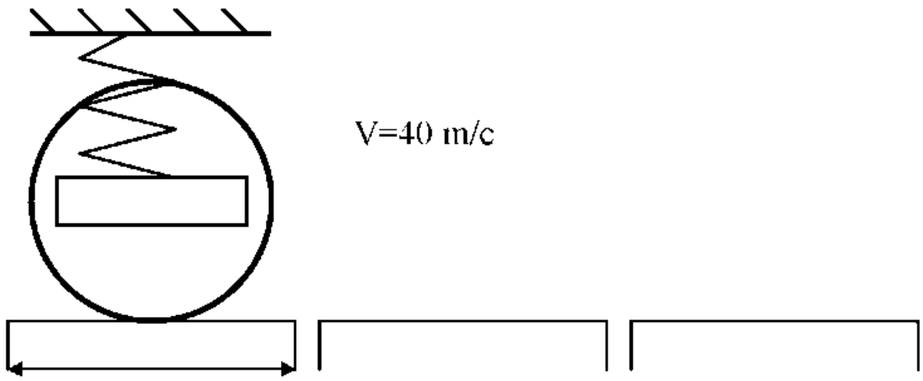
$$X = A \cdot \mathrm{Cos}(\omega t - \varphi_0) + \frac{h}{\omega^2 - p^2}\mathrm{Cos}(pt - \psi_0)$$

$$A_в = \frac{h}{\omega^2 - p^2}$$

$$A_0 = \frac{h}{\omega^2}$$

Резонанс при ω=P



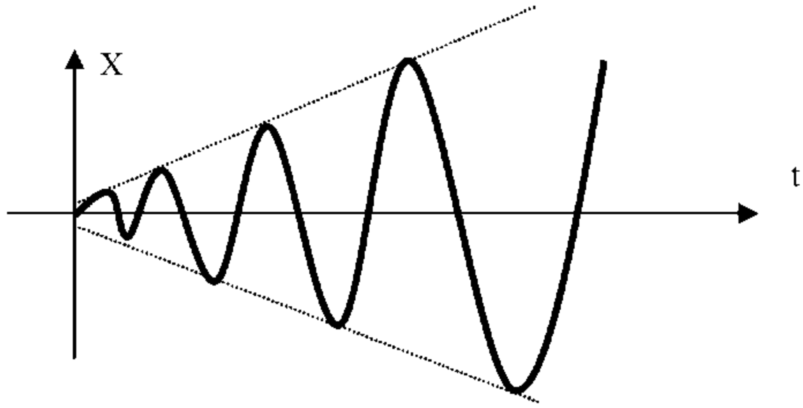


$$\lambda_{ст} = \frac{mg}{c};\quad \frac{\lambda_{ст}}{g} = \frac{m}{c} = \frac{1}{\omega^2};\quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{ст}}} - \text{вагон}$$

$$T_{воз} = \frac{\ell}{V};\quad p = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi V}{\ell};\quad \omega = p$$

$$\sqrt{\frac{g}{\lambda_{ст}}} = \frac{2\pi V}{\ell};\quad \frac{g}{\lambda_{ст}} = \frac{2\pi^2 V^2}{\ell^2} \Rightarrow \lambda_{ст} = \frac{g\ell^2}{4\pi^2 V^2} = 2.2\,\text{см}$$

$$x_{част} = Д \cdot t \cdot Sin(\omega t - \psi_0)$$
$$\dot{x} = Д \cdot Sin(\omega t - \psi_0) + Д \cdot t \cdot \omega \cdot Cos(\omega t - \psi_0)$$
$$\ddot{x} = Д \cdot \omega \cdot Cos(\omega t - \psi_0) + Д \cdot \omega \cdot Cos(\omega t - \psi_0) - Д \cdot t \cdot \omega^2 \cdot Sin(\omega t - \psi_0)$$
$$\ddot{x} + \omega^2 x = h \cdot Cos(pt - \psi_0)$$
$$2Д \cdot \omega \cdot Cos(\omega t - \psi_0) - Д \cdot t^2 \cdot \omega^2 \cdot Sin(\omega t - \psi_0) + \omega^2 \cdot Д \cdot t \cdot Sin(\omega t - \psi_0) = h \cdot Cos(\omega t - \psi_0)$$
$$Д = \frac{h}{2\omega}; \quad x = \frac{h}{2\omega} t \cdot Sin(\omega t - \psi_0)$$

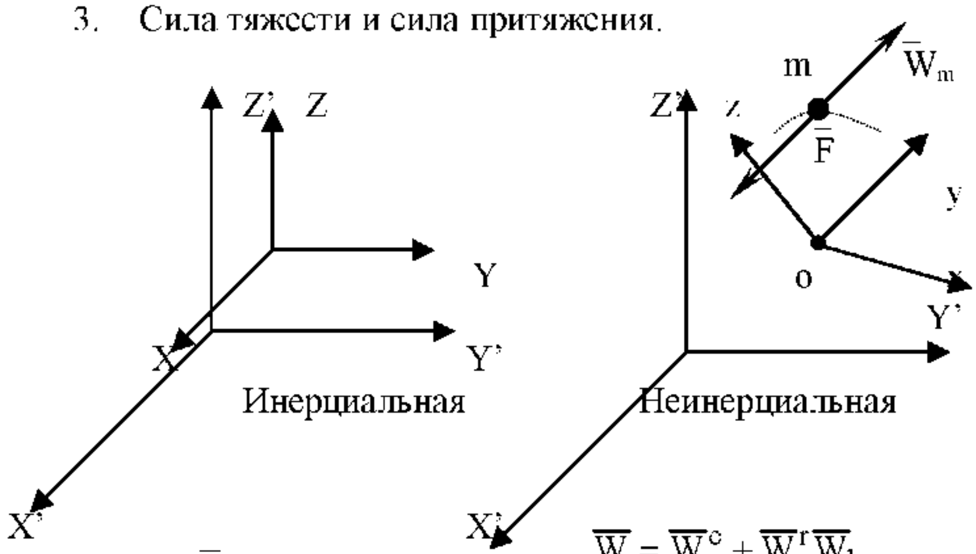


Тема 11. Относительное движение

Лекция 19. Уравнения динамики для неинерциальной системы координат.

Лекция 19.

1. Общий случай относительного движения
2. Частные случаи
3. Сила тяжести и сила притяжения.



$F_{тр} = -m \cdot \overline{W}^e$

$F_{пор} = -m \cdot \overline{W}_k$

$$\overline{W} = \overline{W}^e + \overline{W}^r \overline{W}_k$$

$$m\overline{W} = \overline{F}$$

$$\overline{F} = m\left(\overline{W}^e + \overline{W}^r + \overline{W}_k\right)$$

$$\boxed{m\overline{W}^r = \overline{F} + \overline{F}_{пер} + \overline{F}_{тр}}$$

Относительное ускорение

Произведение массы на относительное ускорение равно геометрической сумме силы, плюс переносное кориолисово ускорение. плюс поворотное триолисово ускорение.

2)

1.

$\omega^e = 0,$

$\overline{W}_k = 2\omega^e V^2 \mathrm{Sin}\left(\omega^e \wedge V_r\right) \Rightarrow W_k = 0$ (переносное движение,

$m\overline{W}^r = \overline{F} + \overline{F}_{пер}$

поступательное)

2.

$\omega^e = 0$

$V^r = const$

$W^r = \frac{dV^r}{dt}$

$F = mW$ (инерциальная система координат)

3.

$\overline{V}^r = 0$

$\overline{W}^r = 0$ (относительный покой)

$\overline{F} + \overline{F}_{пер} = 0$

3)

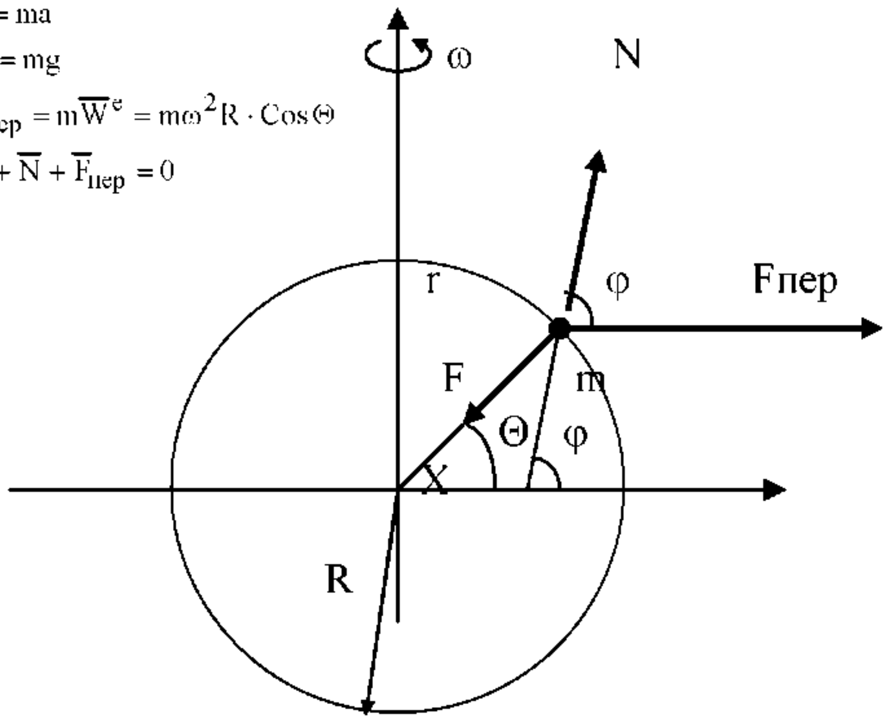
$F = ma$

$N = mg$

$F_{пер} = m\overline{W}^e = m\omega^2 R \cdot Cos\Theta$

$\overline{F} + \overline{N} + \overline{F}_{пер} = 0$

3)



Θ - геоцентрическая ширина

φ - астрономическая широта

$$\sum Y = 0: \quad N \cdot \mathrm{Sin}\,\varphi - F \cdot \mathrm{Sin}\,\Theta = 0$$

$$\sum X = 0; \quad F_{пер} + N \cdot \mathrm{Cos}\,\varphi - F \cdot \mathrm{Cos}\,\Theta = 0$$

$$N \cdot \mathrm{Sin}\,\varphi = F \cdot \mathrm{Sin}\,\Theta$$

$$N \cdot \mathrm{Cos}\,\varphi = F \cdot \mathrm{Cos}\,\Theta - F_{пер}$$

$$\mathrm{Tg}\,\varphi = \frac{\mathrm{Tg}\,\Theta}{1 - \dfrac{m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \mathrm{Cos}\,\Theta}{F \cdot \mathrm{Cos}\,\Theta}} = \frac{R\omega^2}{a} = \mu = \frac{1}{289}$$

$$\mathrm{Tg}\,\varphi = \frac{\mathrm{Tg}\,\Theta}{1 - \mu}$$

$$mg \cdot \mathrm{Sin}\,\varphi = ma \cdot \mathrm{Sin}\,\Theta$$

$$mg \cdot \mathrm{Cos}\,\varphi = ma \cdot \mathrm{Cos}\,\Theta - m\omega^2 R \cdot \mathrm{Cos}\,\Theta$$

$$g^2\left(\mathrm{Sin}^2\varphi + \mathrm{Cos}^2\varphi\right) = a^2\mathrm{Sin}^2\,\Theta + a^2\mathrm{Cos}^2\Theta - 2a \cdot \mathrm{Cos}^2\Theta\omega^2 R + \omega^4 R^2 \mathrm{Cos}^2\Theta$$

$$g^2 = a^2\left(1 - 2\frac{\omega^2 R}{a}\mathrm{Cos}^2\Theta + \frac{\omega^4 R^2}{a^2}\mathrm{Cos}^2\Theta\right) = a^2\left(1 - 2\mu\mathrm{Cos}^2\Theta + \mu^2\mathrm{Cos}^2\Theta\right)$$

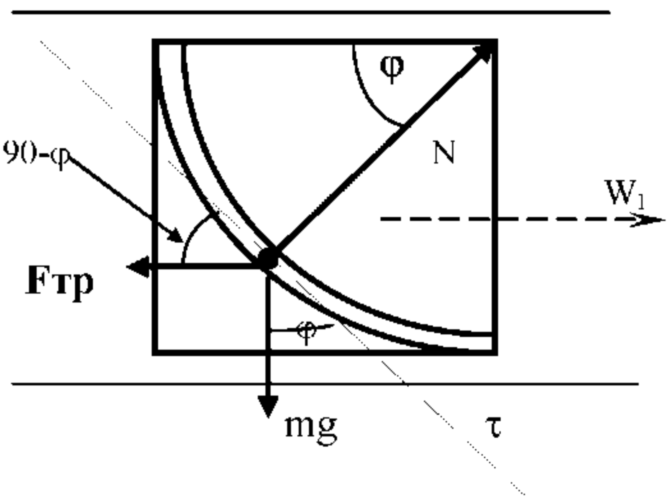
$$g^2 \approx a^2\left(1 - \mu\mathrm{Cos}^2\Theta\right)^2 \qquad g \approx a\left(1 - \mu\mathrm{Cos}^2\Theta\right)$$

Примеры задач.

Дано:

$\varphi = 60°$

$W1 = ?$



$$\overline{F} + \overline{F}_{пер} = 0$$

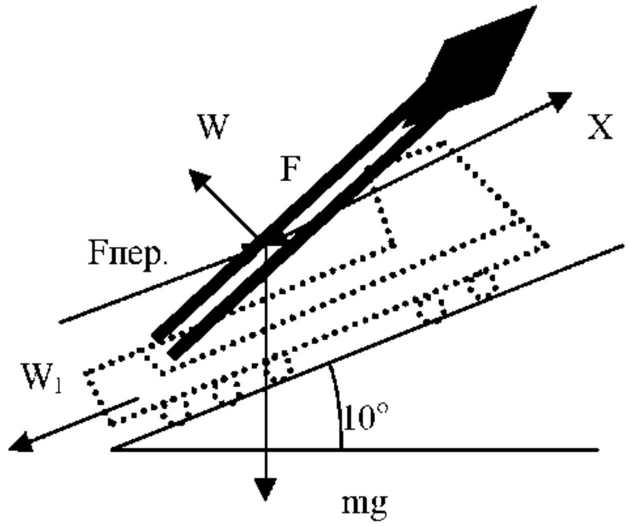
$$mg\mathrm{Cos}\,\varphi - mW_1\mathrm{Sin}\,\varphi = 0$$

$$W_1 = \frac{g}{\mathrm{Tg}\,\varphi} = \frac{10}{\mathrm{Tg}\,60^o} = \frac{10}{1.732} = 5.66 \text{ м/с}^2$$

2.
Дано:

W1 = 2 м/с2
m2 = 5 т (±200 кг)

F = ? (давление ракеты на стенку кабины)



$$\overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{F}}\text{пер} = 0$$

$$F\text{пер} - \mathbf{F} - mg\mathrm{Sin}\ \alpha = 0$$

$$mW_1 - mg\mathrm{Sin}\ \alpha = F$$

$$200 \cdot 2 - 200 \cdot 10 \cdot 0.1 = 59.3\,\text{Н}$$

Практические занятия.

ПЗ.1. Статика

Задача :1. Определение реакций опор плоской конструкции.

Дано: G = 10 кН; P = 10 кН; M = 8 кН·м; g = 0.5 кН/м; α = 30°, размеры – 8 м.
Определить: YA, XA, SCD

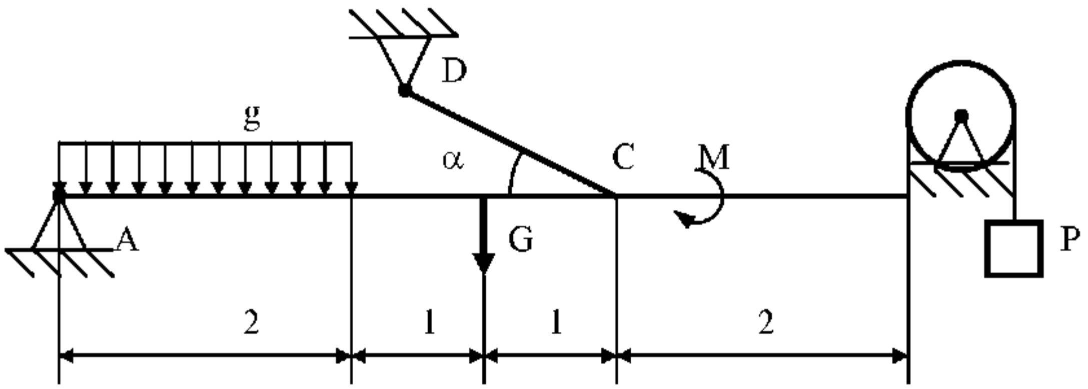
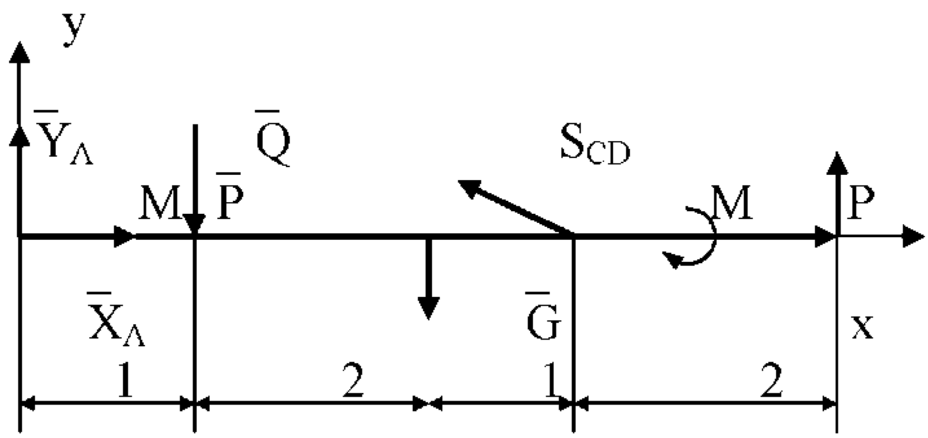


Схема конструкции

Представим конструкция как свободное твердое тело, находящееся под действием активных сил и реакций связей



$$Q = 2 \cdot g = 2 \cdot 0.5 = 1 \text{ кН}$$

Составим уравнения равновесия:

$\Sigma F_{KX} = X_A - S_{CD} \cdot \text{Cos } 30° = 0$

$\Sigma F_{KY} = Y_A - Q - G + S_{CD} \cdot \text{Sin } 30° + P = 0$

$\Sigma F\ M_A = -Q \cdot 1 - G \cdot 3 + S_{CD} \cdot \text{Sin } 30° \cdot 4 + P \cdot 6 - M = 0$

Решаем эту систему:

$S_{CD} = (Q \cdot 1 + G \cdot 3 + M - P \cdot 6) : (4 \cdot \text{Sin } 30°) = 4.5$ кН

$X_A = S_{CD} \cdot \text{Cos } 30° = 4.5 \cdot 0.866 = 3.9$ кН

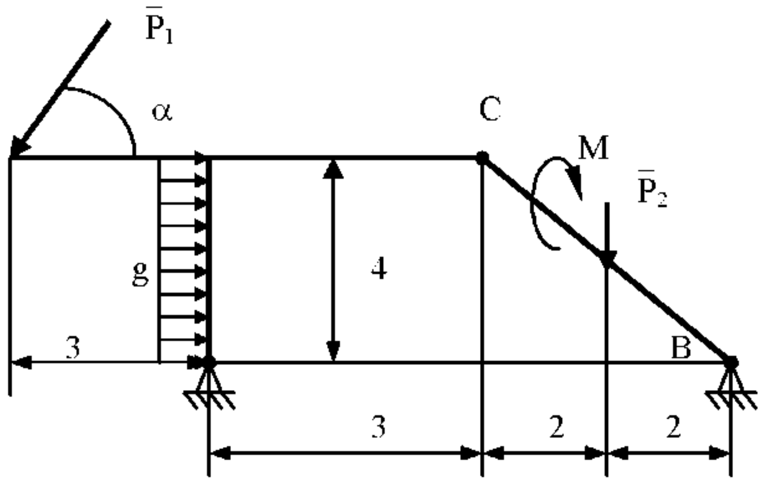
$Y_A = Q + G - S_{CD} \cdot \sin 30° - P = 3.75$ кН

Положительные значения X_A, Y_A, S_{CD} указывают на то, что принятые направления этих сил совпадают с их действительными направлениями.

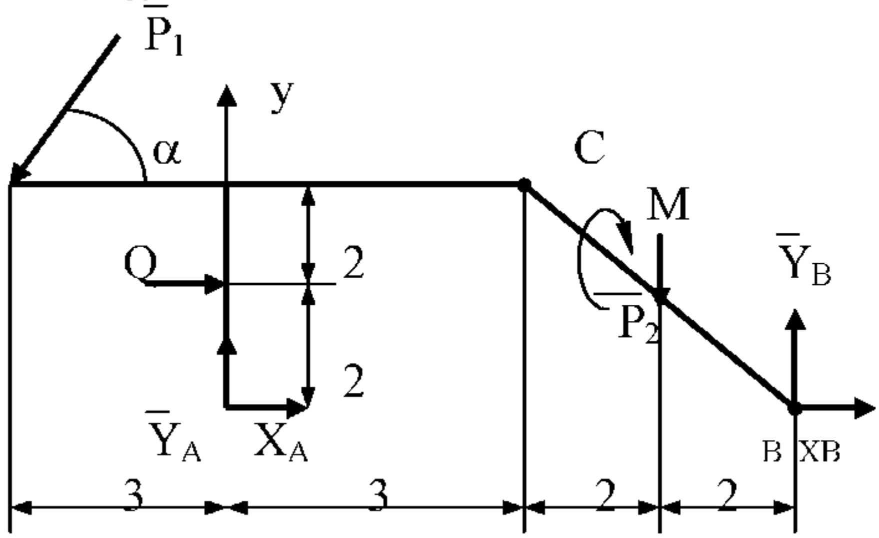
Решение закончено.

Задача:2. Определение реакций опор и давления в шарнире составной конструкции.

Дано: $P_1 = 10$ кН; $P_2 = 12$ кН; $M = 25$ кН·м; $g = 2$ кН/м;
$\alpha = 60°$, размеры в метрах.
Определить: реакции опор и давление в промежуточном шарнире.



1 Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных ко всей конструкции.



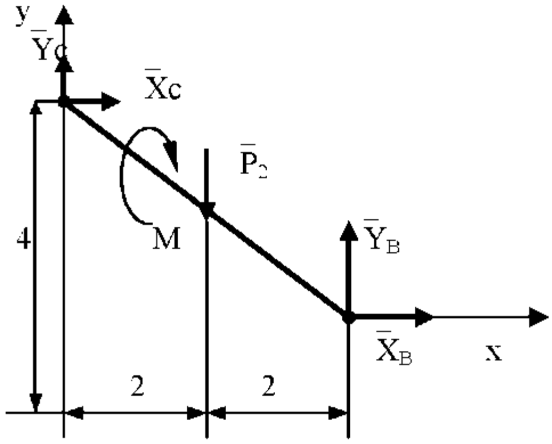
Уравнения равновесия имеют вид:

(1) Σ FKX = XA + XB – P1·Cos 60°+Q = 0

(2) Σ FKY = YA + YB – P1·Sin 60°-P2 = 0

(3) MA = P1·Cos 60°+ P1·Sin 60°·3-P2·5+YB·7-M-Q·2 = 0

II Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к правой части конструкции



Правая часть конструкции.

(4) Σ FKX = $\bar{X}$C + $\bar{X}$B = 0

(5) Σ FKY = YC + YB -P2 = 0

(6) MC = -P2·2+ YB·4 +XB·4 = 0

Решаем систему шести уравнений

из(3) $Y_B = \frac{\left(-P_1 \cdot Cos60° \cdot 4 - P_1 \cdot Sin60° \cdot 3 + Q \cdot 2 + M + P_2 \cdot 5\right)}{7} = \frac{\left(-5 \cdot 4 - 8.66 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 25 + 12 \cdot 5\right)}{7} = 7.86$кН

из(2) $Y_A = P_1 \cdot Sin60° + P_2 - Y_B = 8.66 + 12 - 7.86 = 12.8$кН

из(6) $X_B = \left(P_1 \cdot 2 + M - Y_B \cdot 4\right) : 4 = \left(25 + 12 \cdot 2 - 7.86 \cdot 4\right) : 4 = 4.39$кН

из(4) $X_C = -X_B = -4.39$кН

из(1) $X_A = -X_B + P_1 \cdot Cos60° - Q = -7.39$кН

из(5) $Y_C = P_2 - Y_B = 12 - 7.86 = 4.14$кН

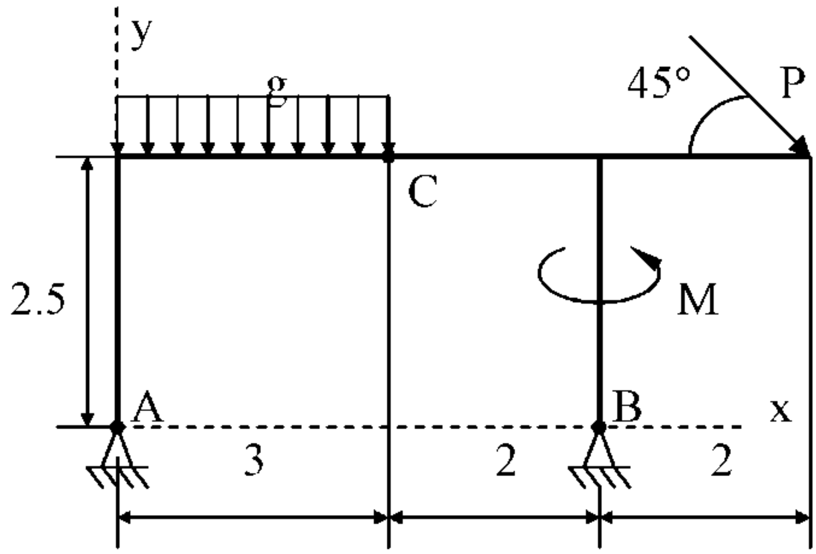
Для проверки правильности решения задачи убедимся в том, что соблюдается уравнение равновесия для сил, приложенных ко всей конструкции

$$\sum M_B = P_1 \cdot Sin\alpha \cdot 10 + P_1 \cdot Cos\alpha \cdot 4 - Q \cdot 2 - Y_A \cdot 7 - M + P_2 \cdot 2 = 5 \cdot 4 + 8.66 \cdot 10 - 8 \cdot 2 - 12.8 \cdot 7 - 25 + 12 \cdot 2 = 0$$

Решение закончено.

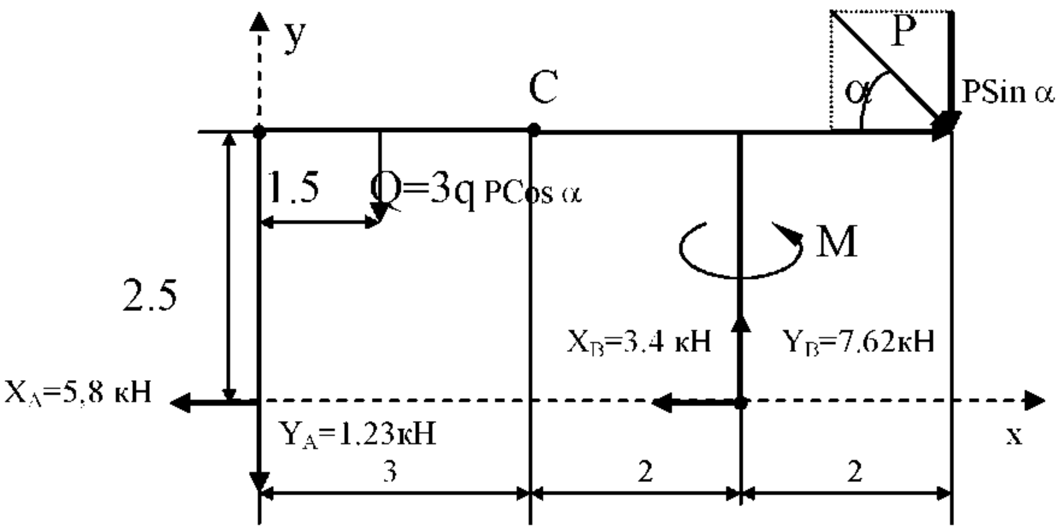
Задача:3. Определение реакций опор составной конструкции (система двух тел)

Дано: P = 13 кН; M = 10 кН·м; g = 2.4 кН/м, размеры в метрах.
Определить: X_A, Y_A, X_B, Y_B, Y_C, Y_C.



Решение:

Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных ко всей конструкции:



$$Q = 3q = 3 \cdot 2.4 \text{ кН/м} = 7.2 \text{ кН}$$

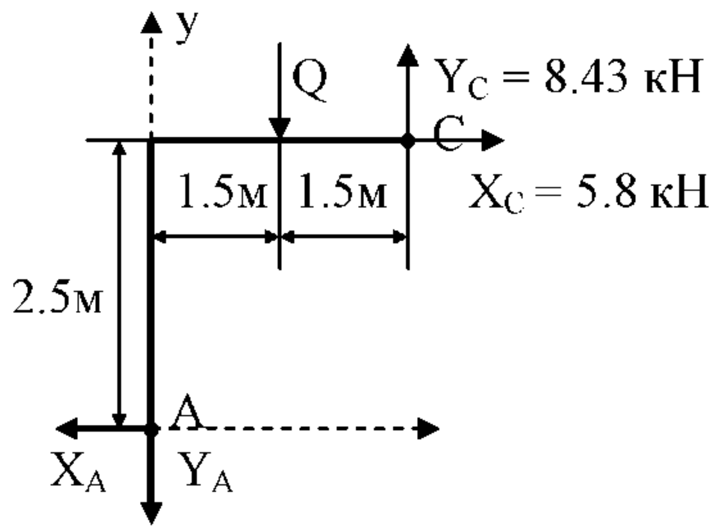
Составим уравнения равновесия:

(1) Σ FKX = -XA – XB +P·Cos α = 0

(2) Σ FKY = YA + YB –Q- P·Sin α = 0

(3) Σ MA = -Q·1.5 –YB·5 - P·Cos α· 2.5-P·Sin α·7+M = 0

Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к левой части конструкции:



Левая часть конструкции.

Решаем систему шести уравнений:

из (3): $-5 \cdot Y_B = -Q \cdot 1.5 - P \cdot \mathrm{Cos}\ 45° \cdot 2.5 - P \cdot \mathrm{Sin}\ 45° \cdot 7 + M \Rightarrow$

$$Y_B = \left(7.2\ \text{кН} + 13\ \text{кН}\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2.5\ \text{м} + 13\ \text{кН}\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 7\ \text{м} + 10\ \text{кН} \cdot \text{м}\right) : 5 = 17{,}62\ \text{кН}$$

$Y_B = 17.62$ кН $\qquad P \cdot \mathrm{Sin}\ \alpha = P \cdot \mathrm{Cos}\ \alpha = 13\ \text{кН}\ \frac{\sqrt{2}}{2} = 9{,}19$ кН

из (2): $Y_A = Q + P \cdot \mathrm{Sin}\ 45° - Y_B \Rightarrow$

$$Y_A = 7.2\ \text{кН} + 13\ \text{кН}\ \frac{\sqrt{2}}{2} - 17{,}62\ \text{кН} = -1{,}23\ \text{кН}$$

из (6): $-X_A \cdot 2.5 + Q \cdot 1.5 = Y_A \cdot 3$

$-X_A \cdot 2.5 = Y_A \cdot 3 - Q \cdot 1.5$

$-X_A \cdot 2.5 = -1.23\ \text{кН} \cdot 3 - 7{,}2\ \text{кН} \cdot 1{,}5$

$X_A = 5.2$ кН

из (4): $X_A = X_C = 5.8$ кН

из (5): $Y_C = Q - Y_A = 7.2\ \text{кН} + 1.23\ \text{кН} = 8.43$ кН

из (1): $X_B = P \cdot \mathrm{Cos}\ 45° - X_A = 13\ \text{кН}\ \frac{\sqrt{2}}{2} - 5.8\ \text{кН} = 3{,}4$ кН

Для проверки правильности решения задачи убедимся в том, что соблюдается уравнение равновесия для сил, приложенных ко всей конструкции:

$\Sigma M_B = -P \cdot Cos\ \alpha \cdot 2.5 - P \cdot Sin\ \alpha \cdot 2 + Q \cdot 3.5 - Y_A \cdot 5 + M = 0$

-9,19 кН · 2,5 м-9,19 кН · 2 м+7,2 кН · 3,5 м+1,23 · 5 м+ +10 кН·м=0

-22,97 кН·м – 18,38 кН·м + 25,2 кН·м +6,15 + 10 кН·м =0

-41,35 кН·м + 41,35 кН·м = 0

0 = 0

Решение закончено.

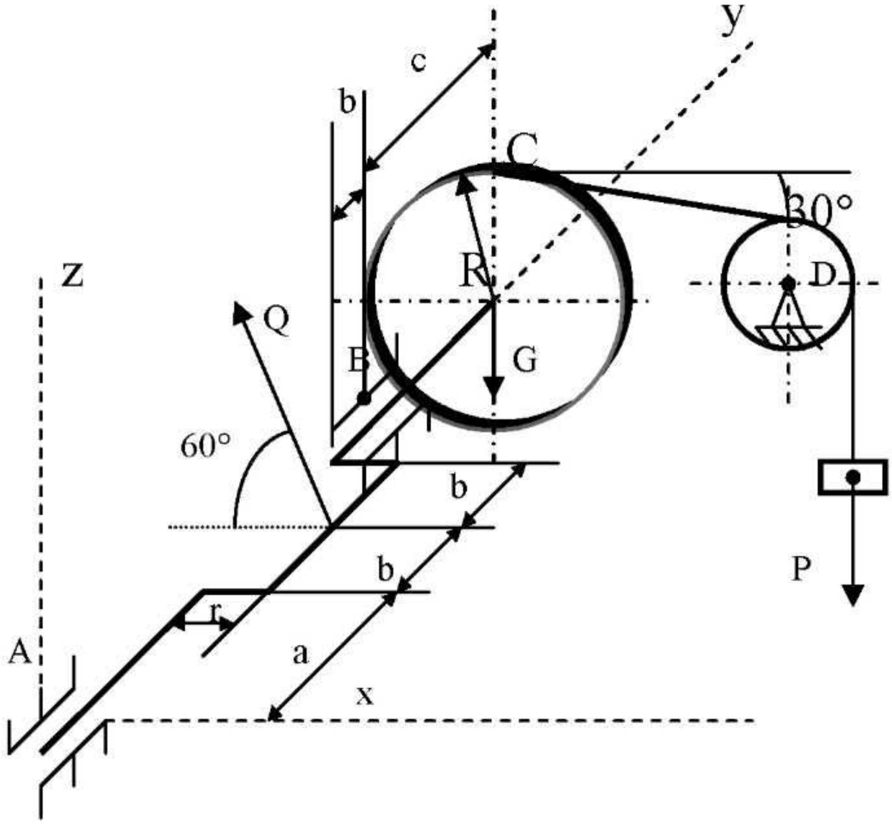
Ответ:

X_A = 5.8 кН	Y_A = -1.23 кН
X_B = 3.4 кН	Y_B = 17.62 кН
X_C = 5.8 кН	Y_C = 8.43 кН

Задача:4. Определение реакций опор твердого тела.

Дано: Q = 3 кН; G = 2 кН; a = 60 см; b = 20 см; c = 40 см; R = 20 см; r= 5 см

Найти: реакции опор конструкции.



Решение:

К конструкции приложены силы, и она опирается на подшипники качения. Воспользуемся методом освобождения от связей и заменим опоры реакциями, рис.2.

Так, как конструкция с приложенной системой сил и реакциями опор находится в равновесии, то

Σ Xi = 0 Σ Yi = 0 Σ Zi = 0 (1)

Σ Mix = 0 Σ Miy = 0 Σ Miz = 0 (2)

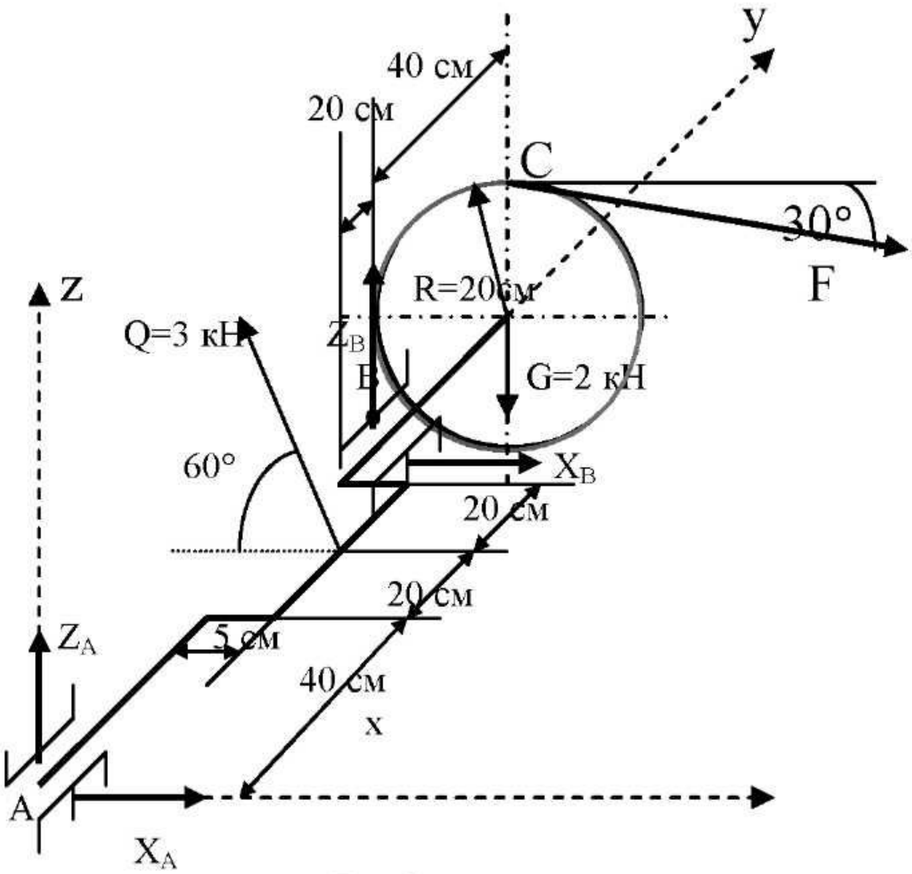


Рис.2

Σ Xi = 0 $\Rightarrow$ XA – Q Cos 60° + F Cos 60° + XB = 0 $\Rightarrow$ XA + XB + F Cos 60°=1.5 (3)

Σ Yi = 0 $\Rightarrow$ 0 (4)

Σ Zi = 0 $\Rightarrow$ ZA + Q Sin 60° + ZB -F Cos 60° = 0 $\Rightarrow$ ZA + ZB - F Cos 60°=-2.5 (5)

Σ Mix = 0 $\Rightarrow$ ZA·0 + Q Sin 60°·60 +ZB·100- F Cos 60°·140 - G·140 = 0 $\Rightarrow$

ZB·100- F Cos 60°·140 =6·140-Q Sin 60°·60=130 (6)

Σ Miy = 0 $\Rightarrow$ - Q Cos 60° ·5 +F·20 = 0 $\Rightarrow$ 20·F=

$=Q \, Cos \, 60° \cdot 5 = 7.5$ (7)

$\Sigma \, Miz = 0 \Rightarrow \quad Q \, Sin \, 60° \cdot 60 - XB \cdot 80 = 0 \Rightarrow$

$XB \cdot 80 = - \, Q \, Sin \, 60° \cdot 60 = -155.88$ (8)

Ответ: XB = -1.9485 кН; XA = 2,886 кН; ZB = 0.156 кН;
F = 0.375 кН; ZA = 2.332 кН

ПЗ.2. Кинематика.

Задача:1. Найти уравнение траектории, скорость, ускорение и радиус кривизны траектории движущейся точки.

Исходные данные в СИ.

Уравнение движения точки $\begin{cases} x = 12t \\ y = 22t^2 - 1 \end{cases} \quad (1)$

Найти уравнение траектории, а так же скорость, ускорение и радиус кривизны в момент времени t = 2с.

Решение:

Чтобы получить уравнение траектории в координатной форме, исключим время из уравнения движения

Тогда $y = x^2 \dfrac{11}{72} - 1 \quad (2)$

Это выражение есть уравнение параболы.

Для определения скорости точки находим проекции скорости на оси координат

$$V_x = \dot{x} = 12(\text{см}/\text{сек})$$

$$V_y = \dot{y} = 44t(\text{см}/\text{сек})$$

$$\left(\text{при } t = 2 \Rightarrow \dot{y} = 88(\text{см}/\text{сек})\right)$$

модуль скорости точки

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}\,(\text{см}/\text{сек}) \quad V = 88.8 \text{ см}/\text{сек}$$

аналогично проекции ускорения точки

$$\varpi_x = \ddot{x} = 0$$

$$\varpi_y = \ddot{y} = 44\left(см/сек^2\right)$$

модуль ускорения точки

$$\varpi = \sqrt{\varpi_x^2 + \varpi_y^2}\left(см/сек^2\right) \quad \varpi = 44\left(см/сек^2\right)$$

Координаты точки, а также её скорость, ускорение и их проекции на координатные оси для данного момента времени t = 2 (сек) приведены в таблице

Координаты		Скорость см/се			Ускорение, см/сек^2					Радиус кривизны см
x	y	Vx	Vy	V	ϖ_x	ϖ_y	ϖ_τ	ϖ_n	ϖ	ρ
24	87	12	88	88.8	0	44	43.6	5.9	44	

Касательное ускорение находим путем дифференцирования скорости

$$\varpi_\tau = \frac{dV}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2 \cdot V_x \cdot \varpi_x + 2 \cdot V_y \cdot \varpi_y}{2 \cdot \sqrt{V_x^2 + V_y^2}} = \frac{V_x \cdot \varpi_x + V_y \cdot \varpi_y}{V}$$

$$\text{При } t = 2 \text{ сек} \quad \frac{dV}{dt} = \frac{12 \cdot 0 + 88 \cdot 44}{88.8} = 43.6 \text{ см/сек}^2$$

Следовательно модуль касательного ускорения $\varpi_\tau = 43{,}6$ см/сек^2

Знак «+» при $\frac{dV}{dt}$ показывает, что движение точки ускоренно и, следовательно, направления $\bar{\varpi}_\tau$ и $\bar{V}$ совпадают.

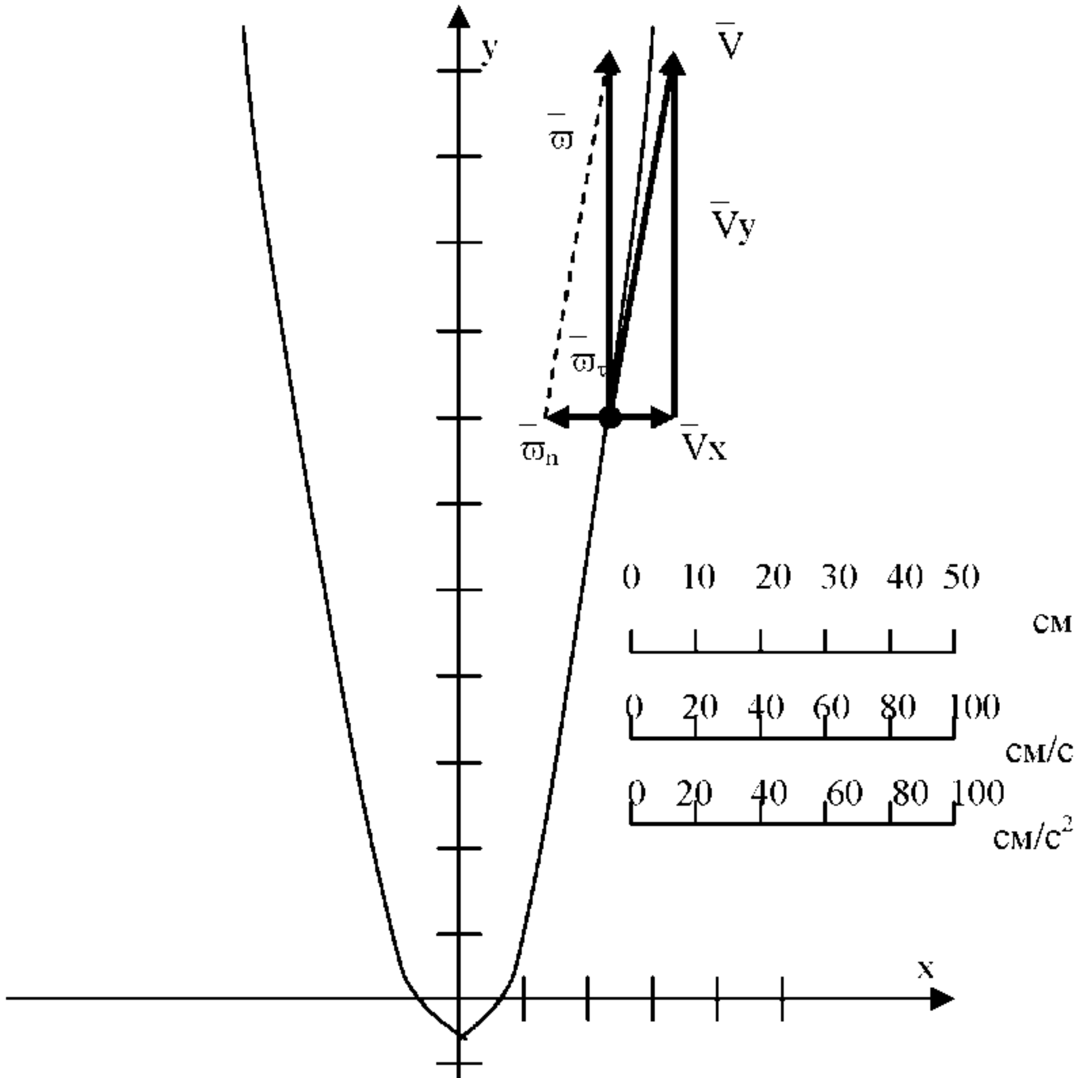
Нормальное ускорение точки в данный момент времени

$$\varpi_n = \sqrt{\varpi^2 - \varpi_\tau^2} = \sqrt{44^2 - 43.6^2} = 5.9 \text{ см/сек}^2$$

Радиус кривизны траектории в той точке, где при t=2 сек находится точка М:

$\varpi_n = V^2/\rho \Rightarrow \rho = V^2/\varpi_n = 88^2/5.9 = 1337$ см

Графическое изображение кинематики движения материальной точки:

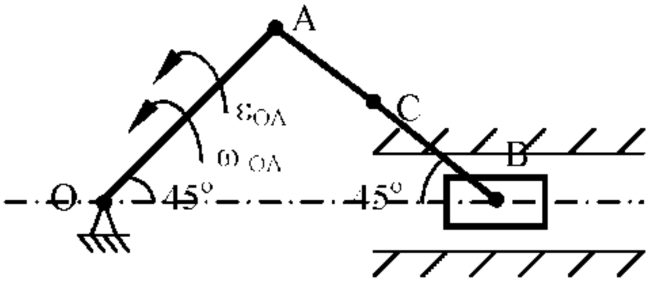


Задача:2. Найти скорости и ускорения точек движущегося механизма.

Дано: OA = 10 см; AB = 10 см; AC = 5 см; ωOA = 2 1/с2; εOA = 6 1/с2

Найти: VB. VC, ϖAB, VA - ?

ϖB. ϖB. εAB, ϖA -?



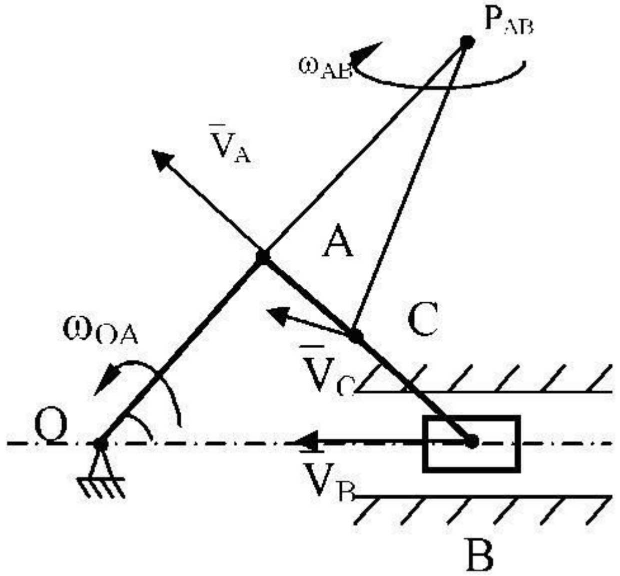


Рис.2.

Решение:

Вычисляем модуль скорости пальца «А» кривошипа «ОА» при заданном положении механизма

VA = ωOA·OA=2·10=20 см/с (1)

Скорость точки «А» перпендикулярна кривошипу ОА. Скорость ползуна направлена по горизонтали.

Мгновенный центр скоростей (МЦС).

PAB участка AB находится на пересечении перпендикуляров, проведенных из точек А и В к их скорости

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{A \cdot P_{AB}} = \frac{20}{10} = 2.0\ \frac{1}{c}$$

модули скоростей точек В и С

VB = ωAB·BPAB=2·10√2 = 28 см/с

VC = ωAB·CPAB=2·11 = 22 см/с

Таким образом,

VB = 28 см/с, VC = 22 см/с. ωAB = 2 1/с.

VA = 20 см/с

Ускорение точек «А» складывается из вращательного и центростремительного ускорений:

$$\overline{\varpi}_A = \overline{\varpi}_A^{в} + \overline{\varpi}_A^{ц} \qquad (2)$$

где $\varpi_A^{в} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 6 \cdot 10 = 60\,см/c^2$

$\varpi_A^{ц} = \varepsilon^2_{OA} \cdot OA = 2^2 \cdot 10 = 40\,см/c^2$

$\varpi_A = \sqrt{60^2 + 40^2} = 70\ см/c^2$

Согласно теореме об ускорениях точек плоской фигуры

$$\overline{\varpi}_B = \overline{\varpi}_A + \overline{\varpi}^{в}_{AB} + \varpi^{ц}_{AB} = \overline{\varpi}^{в}_{A} + \varpi^{ц}_{A} + \overline{\varpi}^{в}_{AB} + \varpi^{ц}_{AB} \qquad (3)$$

где :

$\varpi^{в}_{A} = 60\ см/с^2$

$\varpi^{ц}_{A} = 40\ см/с^2$

$\overline{\varpi}^{ц}_{AB} = \omega^2_{AB} \cdot AB = 2^2 \cdot 10 = 40\ см/с^2$

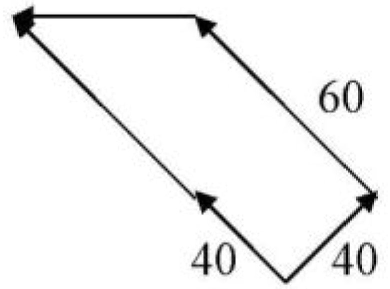
$$\varepsilon_{AB} = \frac{\omega^{в}_{AB}}{AB} = \frac{30}{10} = 3\ {}^{1}\!/\!_{с^2}$$

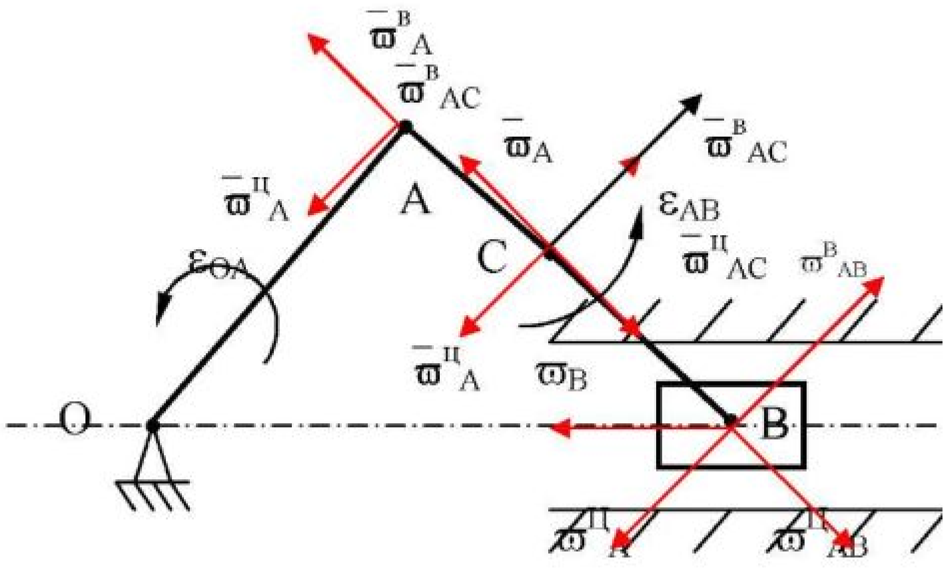
Из треугольника ускорений

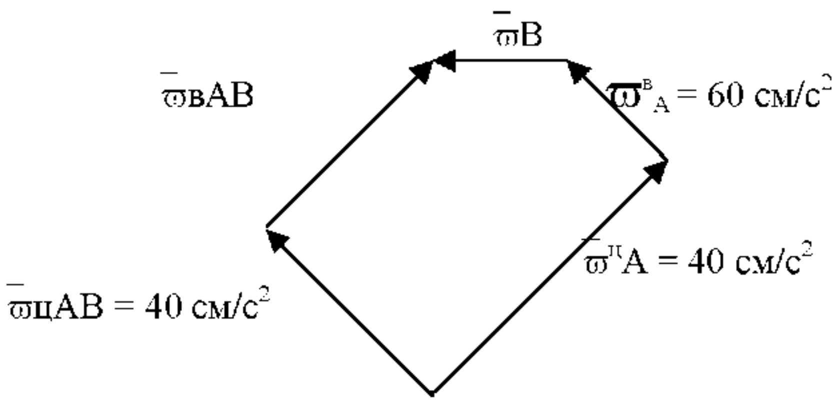
ϖвAB = 30 см/с

ϖB = 60 см/с^2

εAB = 30 1/с^2







Аналогично определяем ускорение точки С.

Ответ: VA=20 см/с, VB=28 см/с, VC=22 см/с, ωАВ = 2 1/с^2

ϖА=70 см/с^2, ϖВ=60 см/с^2, ϖС=40 см/с^2, εАВ = 3 1/с^2

ПЗ.3. Динамика.

Задача:1. Определение уравнения движения точки.

Дано:

m=1 кг

$\bar{P} = -4r(\bar{i}\cos\varphi + \bar{k}\sin\varphi)$ Н

$x_0 = 10$ м, $y_0 = 0$

Найти уравнения движения точки.

Решение:

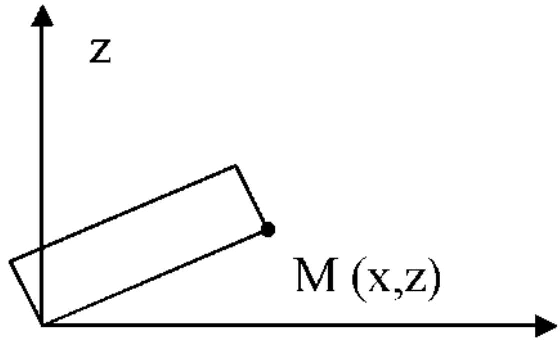


Рис.1.

На точку действует сила $\bar{P}$, направленная к неподвижному центру O, собственный вес $\bar{G}$.

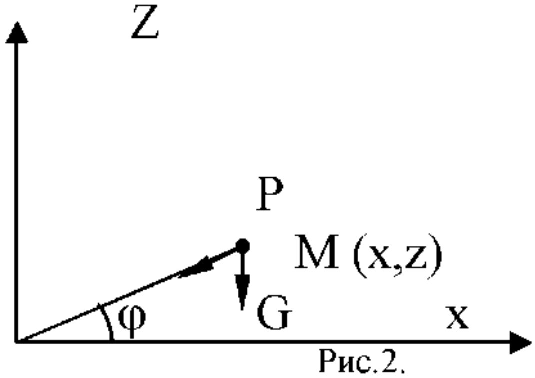


Рис.2.

Заданные силы $\bar{P}$, $\bar{G}$ и вектор начальной скорости z расположены в плоскости xoz, значит движение точки будет происходить в этой плоскости.

Запишем дифференциальные уравнения движения:

$$m\ddot{x} = \sum x_i, m\ddot{z} = \sum z_i$$

$$\sum x_i = P_X = -4r\operatorname{Cos}\varphi = -4r\frac{x}{r} = -4x$$

$$\sum z_i = P_Z - G = -4\operatorname{Sin}\varphi - G = -4z - G$$

$$\ddot{x} = -4x,\ \ddot{z} = -4z - g$$

$$\ddot{x} + 4x = 0 \qquad (1)$$

$$\ddot{z} + 4z = -g \qquad (2)$$

Это линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

(1) - однородное уравнение

(2) - неоднородное уравнение

Характеристические уравнения для (1)

$u^2+u=0$

Корни этого уравнения:

$u_{1,2}= \pm 2i$

$x = C_1 Cos\ 2t + C_2 Sin\ 2t$

Найдем C_1 и C_2

$x_0=10=C_1$

$C_1=10$

$\dot{x}=-2\ C_1 Sin\ 2t + 2\ C_2 Cos\ 2t$

$\dot{x}_0 = 0\ =2\ C_2$

$C_2 = 0$

$x= 10\ Cos\ 2t$

Общее решение уравнения (2):

$z = z_1+ z_2$, где z_1 – общее решение соответствующего однородного уравнения.

$\dot{z}_1+4z_1=0$

Аналогично (1):

$z_1 = C_3 Cos\ 2t + 2\ C_4 Sin\ 2t$

z_2 – частное решение уравнения (2).

Положим z_2=A=const (5)

Подставим (5) в (2):

$0 + 4\ A = -g$

$A = -g/4 = - 2.45$

Таким образом: $z = C_3 Cos\ 2t + C_4 Sin\ 2t – 2.45$ (6)

Найдем C_3 и C_4:

$z_0 = 0 =C_3 – 2.45$

$C_3 = 2.45$

$\dot{z} = -2\ C_3 Sin\ 2t + 2\ C_4 Cos\ 2t$

$\dot{z}_0 = 40 = 4C_4 = 20$

$z = 2.45\ Cos\ 2t +20\ Sin\ 2t - 2.45$ (7)

Решения уравнения:

$x = 10\ Cos\ 2t$

$z = 2.45\ Cos\ 2t + 20\ Sin\ 2t - 2.45$

Задача:2. Определение скорости движения шарнира и давления в точках канала.

Дано:

m= 0,5

V_A = 0,8 м/с

τ = 0,1 С (время движения на участке BD),

R = 0,2 м

f=0,1

α =60 °

β =30 °

h_o=0

c=10Н/ом=1000 Н/м.

Определить V_B, V_C, N_C, V_D, h.

Решение.

Для определения V_B и V_C применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки. Движение шарика на участках AC и AB траектории происходит под действием силы тяжести G (силы трения на криволинейных участках не учитываем):

$$\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = \sum A_i = GH_1 = mg\,AB\,Sin\,\alpha = mg\,6R\,Sin\,\alpha;$$

$$V_B^2 - V_A^2 = 2g\,6R\,Sin\,\alpha;$$

$$V_B = 4.59\,м/с$$

$$\frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = \sum A_i = GH_2 = mg(4R\,Sin\,\alpha + 2R\,Cos\,\alpha);$$

$$V_C^2 - V_A^2 = 4g(2\,Sin\,\alpha + Cos\,\alpha);$$

$$V_C = \sqrt{V_A^2 + 4gR(2\,Sin\,\alpha + Cos\,\alpha)},$$

или

$$V_C = 4{,}26\ м/с.$$

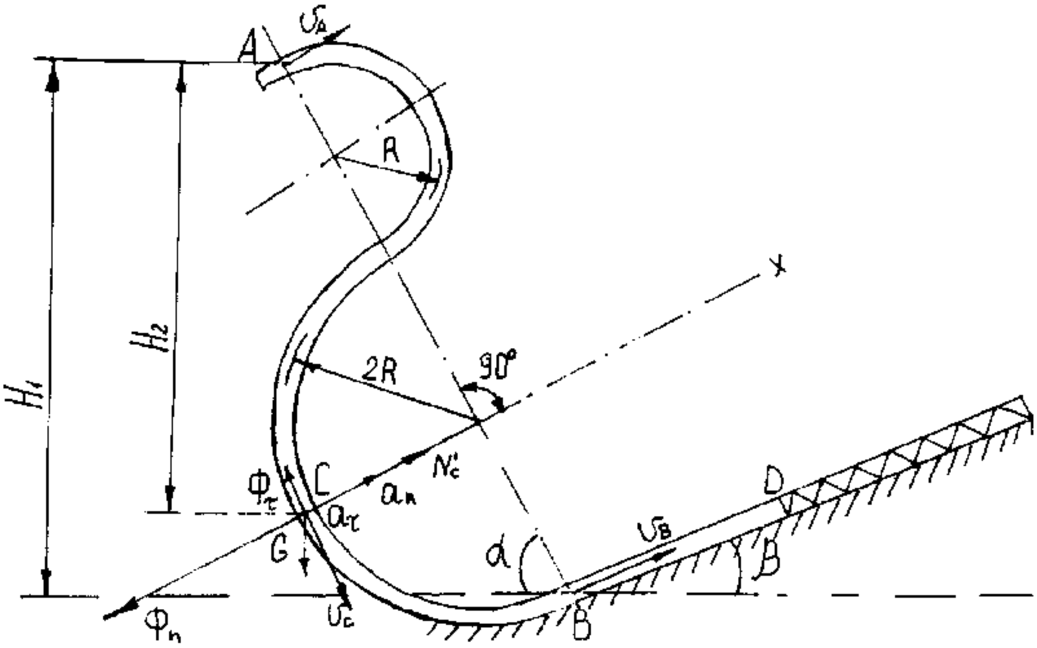
Определяем давление шарика на стенку канала в положении С. В соответствии с принципом Даламбера для материальной точки геометрическая сумма сил.

приложенных к точке, и силы инерции этой точки равна нулю:

$$\bar{G} + \bar{N}_C + \bar{Ф} = 0$$

Силу инерции материальной точки модно разложить на нормальную и касательную составляющие:

Рисунок к задаче Д-6



$$\bar{Ф} = \bar{Ф}n + \bar{Ф}τ$$

Сумма проекций сил G, N_C и Ф на ось x должна быть равна нулю:

$$N'_C - G\ Cos\ 60° - Фn = 0.$$

Отсюда

$$N'c = G\ Cos\ 60° + Фn = mg\ Cos\ 60° + mV^2_C / 2R$$

или

$$N'c = 25{,}2\ Н.$$

Искомое давление Nc шарика на стенку трубки по числовому значению равно найденной реакции N'c и направлено в противоположную сторону.

Скорость шарика в положении D найдем, применив на участке DB теорему об изменении количества движения материальной точки.

$$mV_{Dx} - mV_{Bx} = \Sigma S_{ix}$$

К точке приложены сила тяжести G, реакция стенки трубки N` и сила трения F:

$$F=f\,N` = f\,G\,Cos\,\beta$$

Так как

$V_{Dx} = V_D$, $V_{Bx} = V_B$, ΣS_{ix} = -G Sin β t – F_L = -mg Sin β t – f mg Cos β t,

то

$$mV_D - V_B = -\,mg\,Sin\,\beta\,t - f\,mg\,Cos\,\beta\,t,$$

откуда

$$V_D = 4{,}01 \text{ м/с}.$$

Для определения максимального сжатия h пружины воспользуемся на участке DE теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки:

$$\frac{mV_E^2}{2} - \frac{mV_D^2}{2} = \sum A_i = -\frac{ch^2}{2} - GH_3 - Fh$$

Учитывая, что $V_E = 0$ и H_3=h Sin β, получаем

$$\frac{ch^2}{2} + G(Sin\,\beta + f\,Cos\,\beta)h - \frac{mV_D^2}{2} = 0$$

или

$$h^2 + \frac{2Gh(Sin\,\beta + f\,Cos\,\beta)}{c} - \frac{mV_D^2}{2} = 0$$

Решая полученное квадратное уравнение относительной, получим

$$h = (-0{,}003+0{,}090) \text{ м}.$$

Принимаем в качестве искомой величины полоз корень квадратного уравнения:

$$h = -0{,}003-0{,}090 = 0{,}087 \text{ м}.$$

О т в е т: V_B = 4,59 м/с; V_C 4,26 м/с; $N`_C$ = 25,2 Н; h= 0,087м.

Задача:3. Применение теоремы об изменении кинематического момента к определению угловой скорости твердого тела.

Тело Н массой m_1 вращается вокруг вертикальной оси Z с постоянной угловой скоростью ω_0; при этом в точке

О желоба AB тела H на расстоянии AO от точки A, отчитываем вдоль желоба, закреплена материальная точка K массой m_2. в некоторый момент времени (t=0) на систему начинает воздействовать пара сил с моментом $M_Z = M_Z(t)$.

При $t=\tau$ воздействие пары сил прекращается.

Определить угловую скорость ω_τ тела H в момент $t=\tau$.

Тело H вращается по инерции с угловой скоростью ω_τ. В некоторый момент времени $t_1=0$ (t_1 – новое начало отсчета времени) точка K (самоходный механизм) начинает относительное движение из точки O вдоль желоба AB (в направлении к B по закону $OK=S=S(t_1)$).

Определить угловую скорость ω_T тела H при $t_1=T$.

Тело H рассматривать как однородную пластину, имеющую форму, показанную на рисунке 1. необходимые для решения данные приведены в таблице.

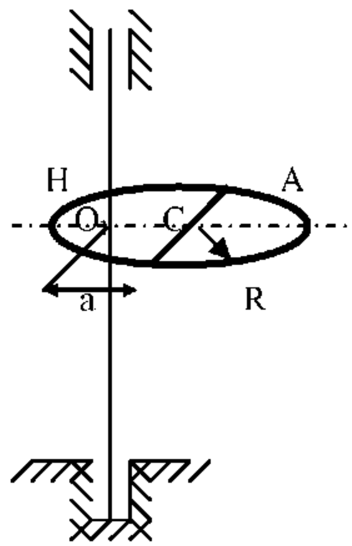


Рис.1.

№ Варианта	m_1	m_2	ω_0	a	R	OA	$M_Z= M_Z{*}(t)$	τ	$OK=S=S(t_1)$	T
	Кг		Рад/с	м			Н·м	с	м	С
0	200	80	-2	2,1	2,4	0,8	592t	4	$0.5(t-\tau)^2$	6

Решение:

1. Вычислим ω_τ:

Применим теорему об изменении кинетического момента механической системы:

$$\frac{dL_Z}{dt} = \sum M_{i_Z}^E \text{ , где}$$

$\sum M_{i_Z}^E = M_Z^E$ - главный момент внешних сил, приложенных к системе, относительно оси Z.

L_Z – кинетический момент системы, состоящий из тела Н и точки К, относительно Z.

На систему за время от t=0 до t=T действуют силы: вес G_1 тела Н, вес G_2, точки К, пара сил с моментом M_Z и реакции подпятника и подшипника, рис.1.

Найдем текущие значения кинетического момента, который складывается из кинетического момента тела и момента количества движения точки, находящейся в точке О тела Н и имеющий скорость $V=\omega\cdot OO_1$ или $m_2 \cdot V\cdot OO_1=m_2\cdot\omega\cdot OO_1^2$.

Итак,

$$L_Z = J_Z \cdot \omega + m_2 \cdot \omega \cdot OO_1^2 = \left(J_Z + m_2 \cdot OO_1^2\right)\cdot \omega$$

Главный момент внешних сил равен вращательному моменту M_Z, так как другие силы момента относительно оси Z не создают.

$$\frac{\left[\left(J_Z + m_2 \cdot OO_1^2\right)\cdot \omega\right]}{dt} = M_Z \qquad (1)$$

Имеем где

$$M_Z = c \cdot f \qquad c = 592 \ ^{н\cdot м}/с$$

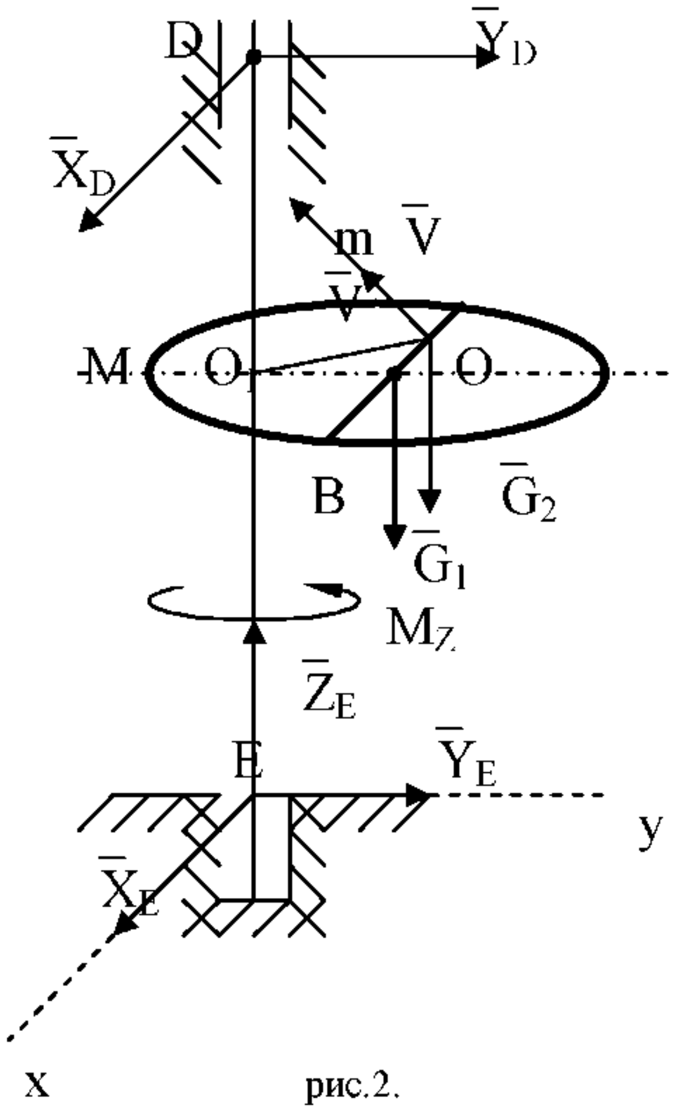


рис.2.

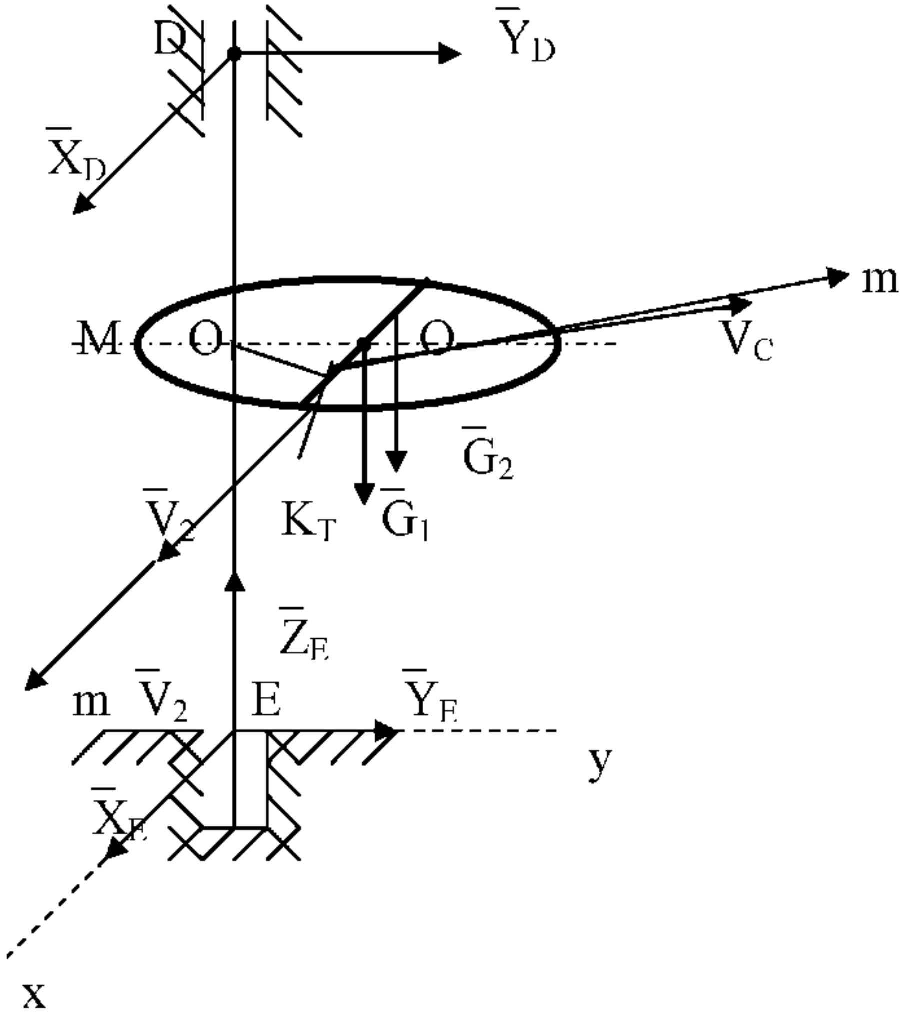


Рис.3.

Разделим в уравнении (1) переменные:

$$\left(J_Z + m_2 \cdot O_1O^2\right)\int_{\omega_0}^{\omega_\tau} d\omega = \int_0^\tau ct\,dt$$

$$\left(J_Z + m_2 \cdot O_1O^2\right)(\omega_\tau - \omega_0) = \frac{C\tau^2}{2} \qquad (2)$$

Тогда :

$$J_Z = \frac{m_1R^2}{2} + m_1a^2 = \frac{200 \cdot 2 \cdot 4^2}{2} + 200 \cdot 1.2^2 = 864\left(кг \cdot м^2\right)$$

$$\left(J_Z = J_{ZC} + m_1a^2, \omega_c \;\; J_{ZC} = \frac{m_1R^2}{2}\right)$$

Из рис.2 следует :

$$O_1O^2 = OC^2 + O_1C^2 = 1.6^2 + 1.2^2 = 4\left(м^2\right)$$

Поэтому :

$$J_Z + m_2O_1O^2 = 864 + 80 \cdot 4 = 1184\left(кг \cdot м^2\right)$$

Из уравнения (2):

$$1184\left[\omega_\tau - (-2)\right] = \frac{592 \cdot 4^2}{2}$$

$$\omega_\tau = 2 \text{ рад/с}$$

2. Вычислим ω_T

В течение промежутка времени от t=τ до t=T $\Sigma M^E_{iz} = 0 \Rightarrow Lz = const \Rightarrow$

Вычислим Lzτ и Lz_T и приравняем их.

Для t=τ:

$Lz\tau = (Jz + m_2O_1O^2)\omega_\tau = 1184 \cdot 2 = 2368$ (кг·м²/с)

При t>τ точка К совершает соосное движение:

$$m_2\dot{V} = m_2\dot{V}_2 + m_2\dot{V}_e$$

Для $t = T$:

$$L_{ZT} = J_e\omega_\tau + m_2\omega_T \cdot O_1K_T^2 - m_2V_2 \cdot O_1C$$

$$O_1K_T^2 = O_1C^2 + CK_T^2, \text{ где:}$$

$$CK_T = OK_T - OC,\ OK_T = S_{t=T} = 0.5(T - \tau_1)^2 = 2(м) \Rightarrow$$

$$OK_T = 2 - 1.6 = 0.4м;\ O_1K_T^2 = 1.2^2 + 0.4^2 = 1.6\left(м^2\right)$$

Относительная скорость:

$$V_2 = \frac{dS}{dt} = 2 \cdot 0.5(t - T)$$

$$(t = T)\ \ V_2 = 2 \cdot 0.5(6 - 4) = 2(м/с) \Rightarrow$$

$$L_{ZT} = 864\,\omega_T + 80\,\omega_T \cdot 1.6 - 80 \cdot 2 \cdot 1.2 = 992\omega_T - 192$$

Приравниваем L_{ZT} и $L_{Z\tau}$:

$2368=992\omega_T-192 \Rightarrow \omega_T = 2{,}59\ ^1/с$

Ответ: $\omega_\tau = 2\ ^1/с$; $\omega_T = 2{,}59\ ^1/с$

Задача:4. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы.

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя; начальное положение системы показано на рисунке 1. Не учитывая силами сопротивления и массами нитей, предполагаемых нерастяженными, определить скорость тела 1, в тот момент, когда пройденный им путь станет равным S.

В задании приняты следующие обозначения m_A, m_B, m_C, m_D – массы тел A,B,C,D; R_A, R_B, r_A, r_B – радиусы больших и малых окружностей;

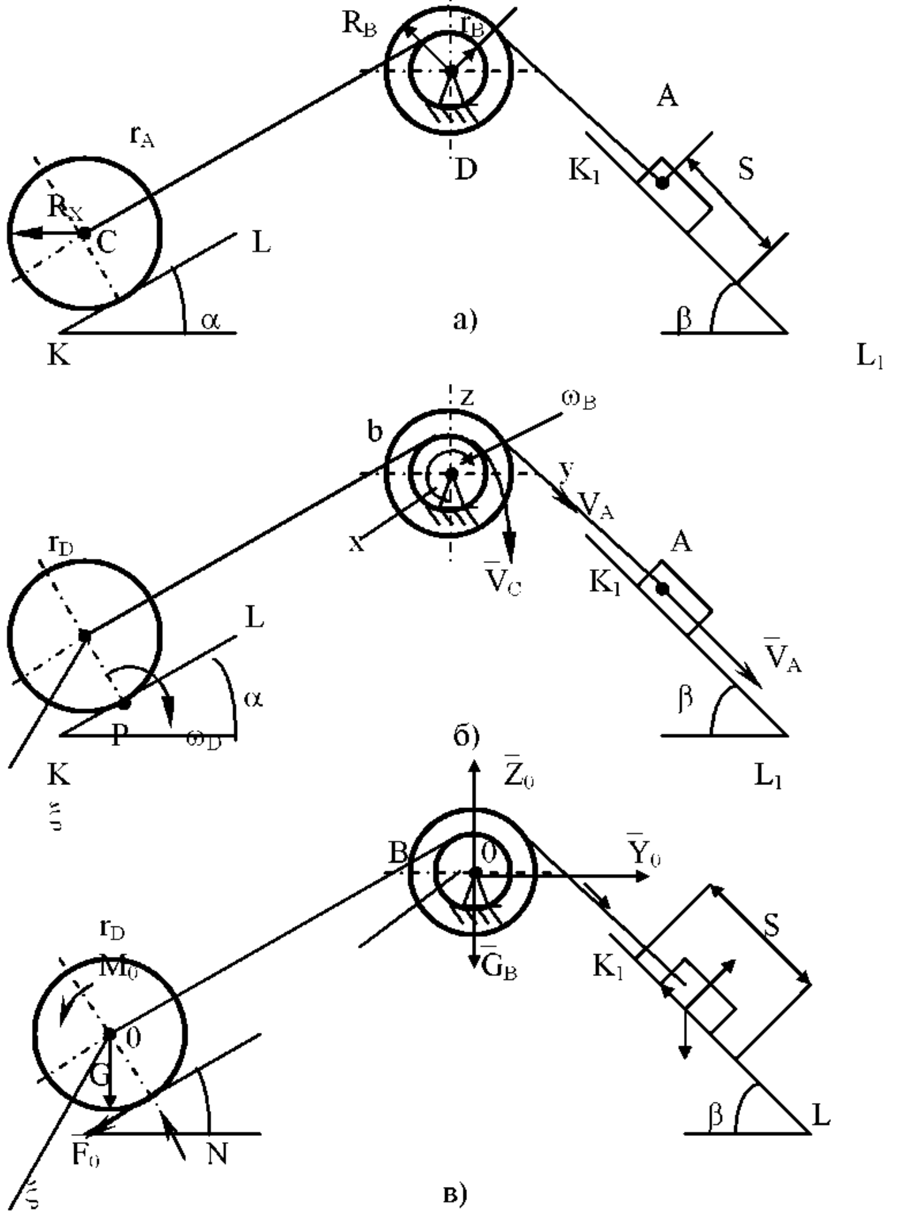
i_{BX}, $i_{i\xi}$ - радиусы инерции тел B и C относительно горизонтальных осей, проходящих через их центры тяжести; α и β - углы наклона плоскостей к горизонту; f – коэффициент трения скольжения; δ - коэффициент трения качения

Необходимые данные приведены в таблице №1

Таблица №1.

m_A	m_B	M_C	m_D	R_A	R_B	r_A	r_B	i_{BX}	i_ξ	α	β	f	δ	S
Кг				см	см	см		см		Град			см	м
m	m/3	-	2m	30	20	-	15	17		30	60	0.2	0.25	6

Рис.1.



Расчетно-графические работы.

Статика

С1. Вариант 18.

Дано:

P = 16 кН

M = 4 кНм

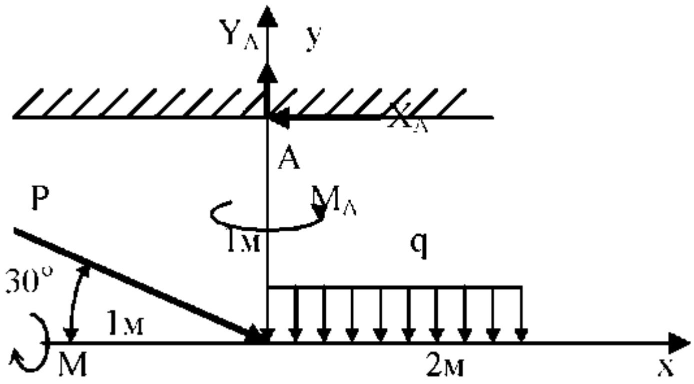
q = 2 кН/м

Найти:

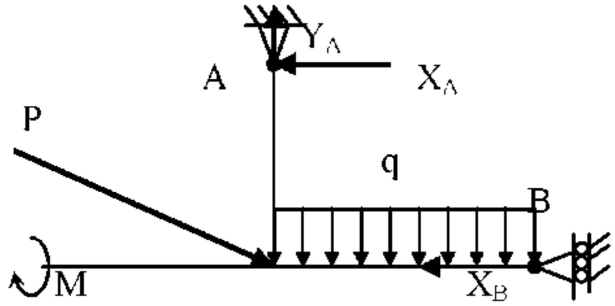
Опорные реакции при XA→ min

Рис.1.

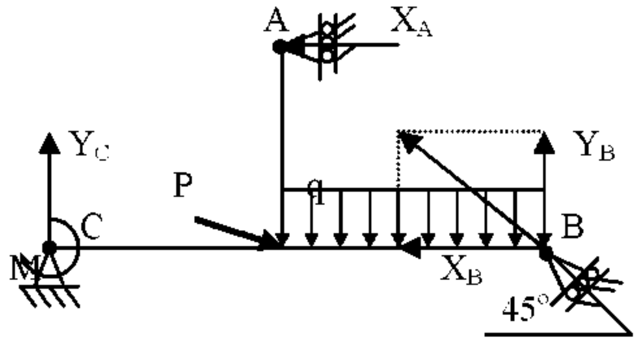
А)



Б)



В)



Решение:

Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к конструкции. Действие связей на конструкцию заменяем их реакциями (см. рис.1)

Для схемы а)

$\Sigma X_A = P \cos 30° - X_A = 0 \Rightarrow X_A = 14 \cdot 0.87 = 12$ кН

Для схемы б)

$\Sigma X_A = -X_B - X_A + P \cos 30° = 0 \Rightarrow X_A = 12$ кН$-X_B$

Для схемы в)

$\Sigma X_A = -X_B - X_A + P \cos 30° = 0 \Rightarrow X_A = 12$ кН$-X_B$

но т.к. в случае схемы в) X_B меньше чем в случае схемы б), то минимальное значение X_A будет в случае схемы б)

Рассмотрим схему б) рис.2.

$$\sum X = 0 \Rightarrow -X_B - X_A + P \cos 30° = 0 \Rightarrow X_B + X_A = 12(\text{кН})$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_A - q \cdot 2 - P \sin 30° = 0 \Rightarrow Y_A = 4 + 7 = 11(\text{кН})$$

$$\sum MOm_K(F_i) = 0 \Rightarrow 1 \cdot X_A - q \cdot 2 \cdot 1 - M = 0 \Rightarrow X_A = \frac{2 \cdot 2 + 4}{1} = 8(\text{Кн})$$

Ответ: X_A=8 кН; X_B=4 кН; Y_A=11 кН;

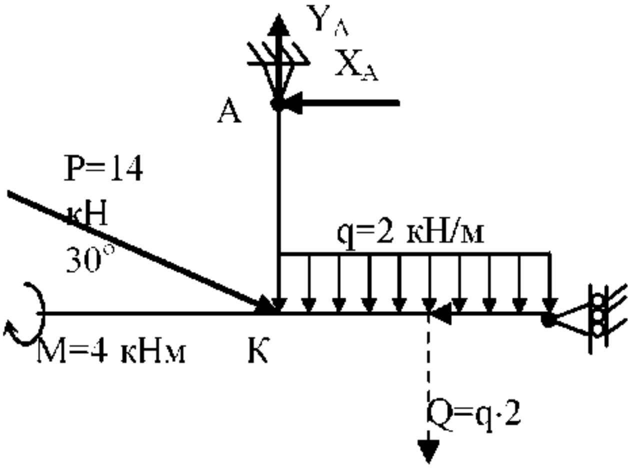


Рис.2.

С3.

Вариант 18.

Дано:

$P_1 = 11$ кН

$P_2 = 10$ кН

$M = 11$ кНм

$q = 3.5$ кН/м

Опорные реакции, реакции в шарнире С.

При исследуемой реакции МВ → min

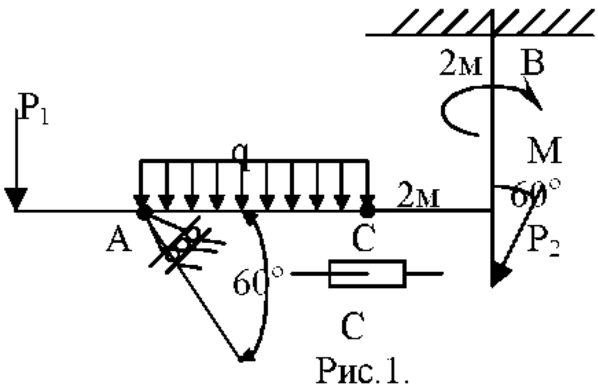


Рис.1.

Решение:

При шарнирном соединении в точке С.

Рассматриваем расчетную схему, рис.2.

$$\sum \mathrm{Mom}_B\left(\overline{F}_i\right) = 0 \Rightarrow P_1 \cdot 6 - Y_A \cdot 4 - X_A \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 3 + P_{2X} \cdot 4 - M_B - M = 0 \Rightarrow$$

$$66 - 4Y_A - 2X_A + 21 + 36 - M_B - 18 = 0 \Rightarrow$$

$$2X_A + 4Y_A + M_B = 105, \text{ т.к. } X_A = R_A \cdot \cos 60° = 0.5R_A$$

$$Y_A = R_A \cos 30° = 0.87R_A$$

$$2 \cdot 0.5R_A + 4 \cdot 0.87R_A + M_B = 105 \Rightarrow 5R_A + M_B = 105$$

Рассмотрим левую от шарнира С часть конструкции:

$$\sum \mathrm{Mom}_C\left(\overline{F}_i\right) = 0 \Rightarrow P_1 \cdot 4 - Y_A \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 3 = 0 \Rightarrow$$

$$Y_A = \frac{44 + 7}{2} = 25(\text{кН})$$

$$R_A = 30(\text{кН})$$

тогда $M_B = -150 + 105 = -45(\text{кН})$

При заделке в точке С:

Рассматривая расчетную схему, рис.2, имеем:

$5R_A + M_B = 105$

Рассматриваем левую от шарнира С часть конструкции:

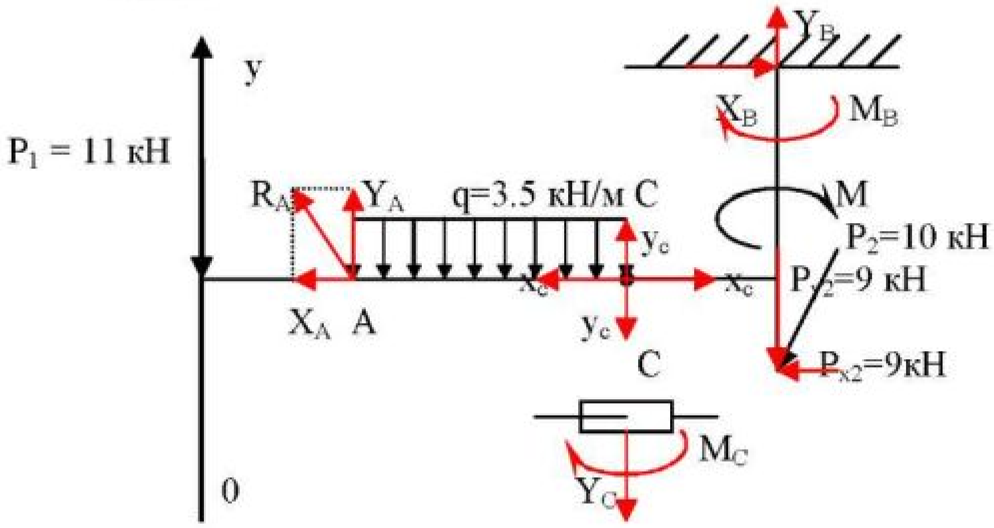
$$\sum \mathrm{Mom}_C\left(\overline{F}_i\right) = 0 \Rightarrow P_1 \cdot 4 - Y_A \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 3 - M_C = 0 \Rightarrow$$

$$Y_A \cdot 2 + M_C = 44 + 7 \Rightarrow 2Y_A = 51 - M_C \Rightarrow$$

$$Y_A = \frac{51 - M_C}{2},$$

что меньше, чем в первом случае, следовательно, минимально M_B будет во втором случае.

Рис.2.



Рассмотрим случай, когда шарнир C представляет собой скользящую заделку

$$\sum X = 0 \Rightarrow X_B - P_{2X} - X_A = 0 \Rightarrow X_B - X_A = 9$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Y_A - P_1 - q \cdot 2 + Y_B + P_{2B} = 0 \Rightarrow Y_A + Y_B = 13$$

$$\sum Mom_B\left(\overline{F}_i\right) = 0 \Rightarrow 2X_A + 4Y_A + M_B = 105$$

Рассматривая левую от шарнира C часть конструкции:

$$\sum X = 0 \Rightarrow X_A = 0$$
$$\sum Y = 0 \Rightarrow -P_1 - q \cdot 2 + Y_A + Y_C = 0 \Rightarrow Y_A + Y_C = 18$$
$$\sum Mom_C(\overline{F_i}) = 0 \Rightarrow 4P_1 + 2Y_A + q \cdot 2 \cdot 1 - M_C \Rightarrow 2Y_A + M_C = 51$$

Окончательно:

$$\begin{cases} 2Y_A + M_C = 51 \\ Y_A + Y_C = 18 \\ X_A = 0 \\ 2X_A + 4Y_A + M_B = 105 \\ Y_A + Y_B = 13 \\ X_B - X_A = 9 \end{cases}$$

$X_A = 0;\ X_B = 9(кН);\ 4Y_A + M_B = 105$ т.к. $Y_A = 25(кН)$

$M_B = 105 - 100 = 5(кНм);\ \ Y_B = 13 - 25 = 12(кН)\ \ Y_C = 18 - 25 = -7(кН)$

$M_C = 51 - 50 = 1(кНм)$

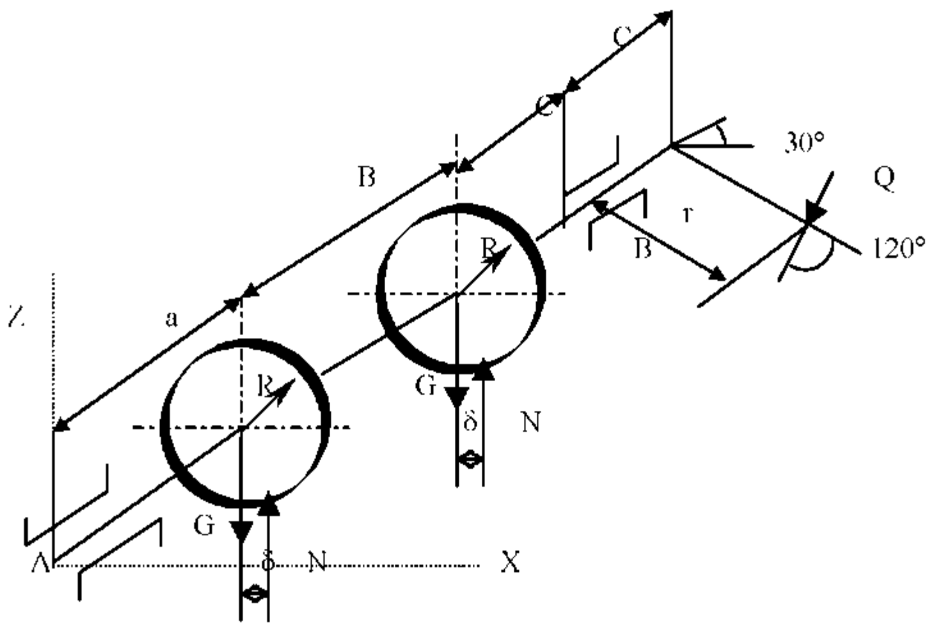
Ответ: $X_A = 0; Y_A = 25(кН); X_B = 9(кН); Y_B = 12(кН); X_C = 0;\ Y_C = 7(кНм)$

$M_B = 5(кНм); M_C = 1(кНм)$

С7

Вариант:5.

Найти реакции опор. Схема конструкции показана на рисунке.



$\delta = 5 \cdot 10^{-3}$ N=G $N \parallel A_Z$ $P \parallel A_X$ $Q \perp A_Y$

Необходимые для расчета данные:

Силы, кН		Размеры, см.				
Q	G	a	b	c	R	r
5	3	30	40	20	20	15

Изобразим ворот со всеми действующими силами в трех проекциях, при помощи их составим уравнения равновесия. рис.2,3.

$$\sum X_i = 0 \quad X_A - P + X_B - Q \cdot \mathrm{Cos}\,60^\circ = 0 \ (1)$$

$$\sum Z_i = 0 \quad Z_A + Z_B - Q \cdot \mathrm{Sin}\,60^\circ + N - G + N - G = 0 \ (2)$$

$$\sum M_{iA_x} = 0 \quad Z_B(a+b+c) - Q \cdot \mathrm{Sin}\,60^\circ(a+b+2c) - G \cdot a + N \cdot a - G(a+b) + N(a+b) = 0 \ (3)$$

$$\sum M_{iA_Z} = 0 \quad P(a+b) - X_B(a+b+c) + Q \cdot \mathrm{Cos}\,60^\circ(a+b+2c) = 0 \ (4)$$

$$\sum M_{iY} = 0 \quad N \cdot \delta + N \cdot \delta + P \cdot R - Q \cdot r = 0 \ (5)$$

Из уравнения (5) находим P:

$$P = \frac{Q \cdot r - N \cdot \delta - N \cdot \delta}{r} = \frac{5 \cdot 15 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 20}{15} = 4.96(\text{кН})$$

Из уравнения (4) находим X_B:

$$X_B = \frac{P(a+b) + Q \cdot \mathrm{Cos}\,60^\circ(a+b++2c)}{(a+b+c)} = \frac{4.96(30+40) + 5\frac{1}{2}(30+40+2 \cdot 20)}{(30+40+20)} = 6.9(\text{кН})$$

Из уравнения (3) находим Z_B:

$$Z_B = \frac{P(a+b) + Q \cdot \mathrm{Sin}\,60^\circ(a+b+2c) - G \cdot a + N \cdot a - G(a+b) + N(a+b)}{(a+b+c)} =$$

$$= \frac{5\frac{\sqrt{3}}{2}(30+40+2 \cdot 20) + 3 \cdot 30 - 3 \cdot 30 + 3(30+40) - 3(30+40)}{(30+40+20)} = 5.3(\text{кН})$$

Из уравнения (2) находим Z_A:

$$Z_A = Q \cdot \mathrm{Sin}\,60^\circ - Z_B - N + G - N + G = 5\frac{\sqrt{3}}{2} - 5.3 - 3 + 3 - 3 + 3 = -0.96(\text{кН})$$

т.к. ZA = -0.96 кН, следовательно, нужно поменять направление.

Из уравнения 1 находим ZA:

ZA = P-XB+Q· Cos 60^0=4.96-6.9+5·1/2=0.56 кН

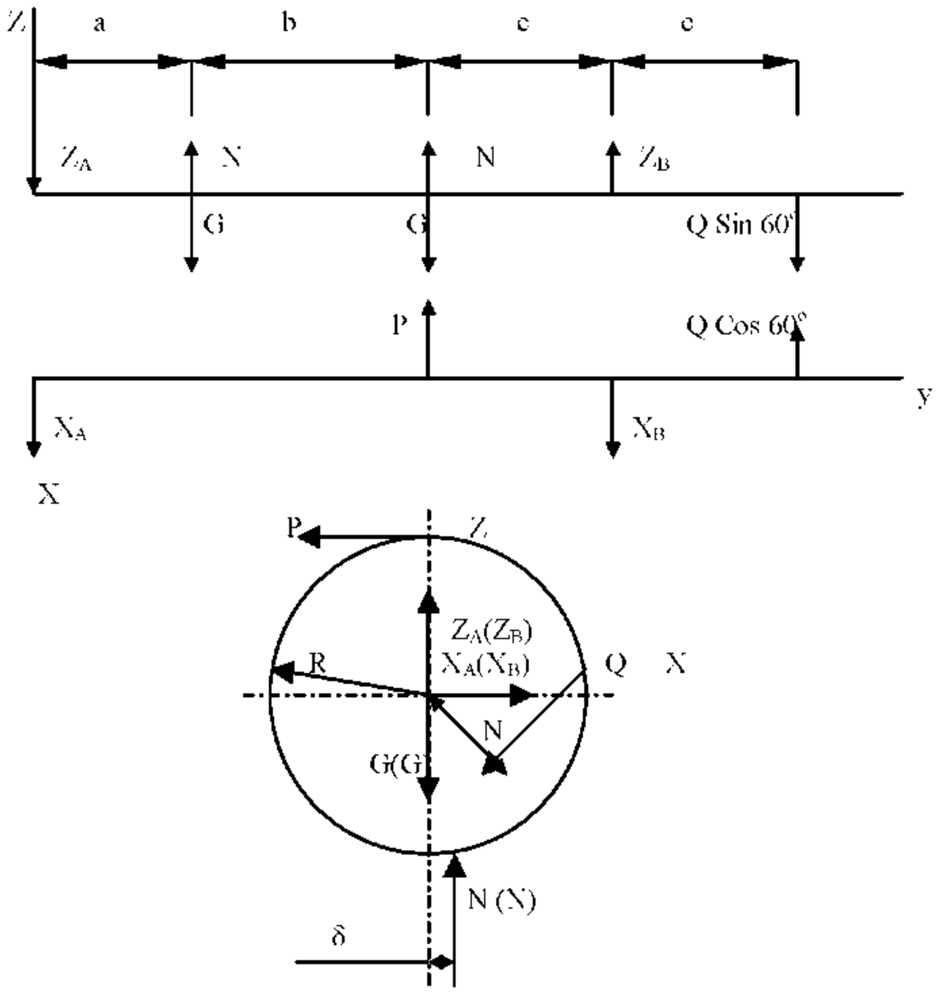


Рис.2.

Результаты вычислений приведены в таблице:

Силы, кН				
P	X_A	X_B	Z_A	Z_B
4.96	0.56	6.9	-0.96	5.3

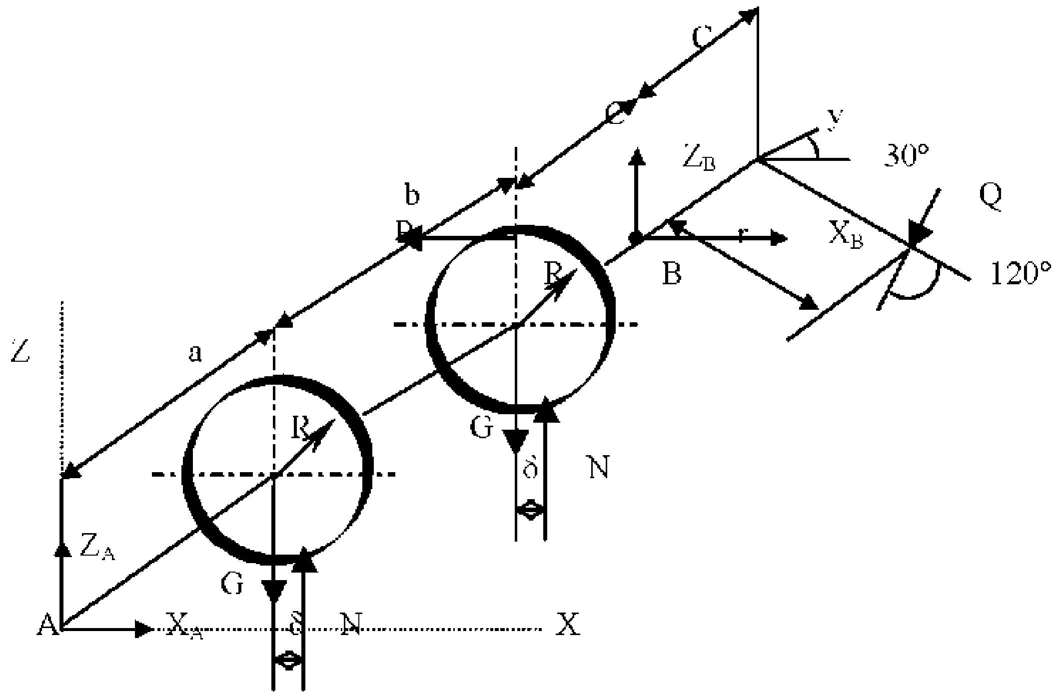


рис.3.

Кинематика

К3.

Вариант:10. Кинематический анализ плоского механизма.

Определение скоростей и ускорений точек В и С твердого тела при плоском движении, а также угловой скорости и углового ускорения звена АВ, которому эти точки принадлежат, рис.1.

Размеры, см			ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
ОА	АВ	АС		
25	80	20	1,0	2,0

Схема механизма в заданном положении:

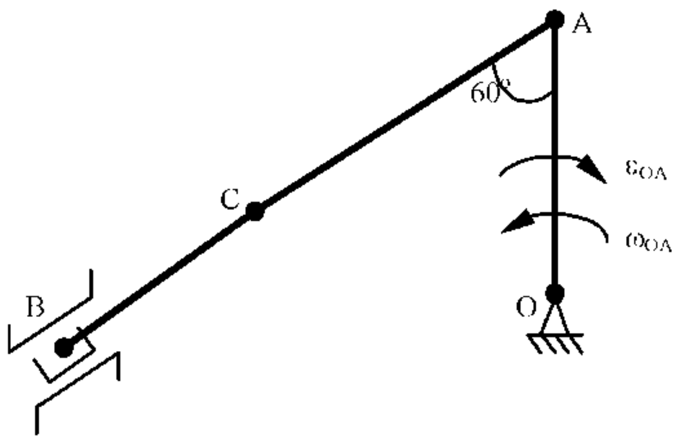


Рис.1.

Решение:

1. Определение скоростей точек и угловой скорости звена.

Скорость пальца А кривошипа ОА при заданном положении механизма:

$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 1,0 \cdot 25 = 25$ см/с (1)

Скорость точки А перпендикулярна кривошипу ОА, рис.2, скорость ползуна В направлена по линии АВ. Мгновенный центр скоростей P_{AB} шатуна АВ находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных из точек А и В к их скоростям.

Угловая скорость звена АВ:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{A \cdot P_{AB}} = \frac{25}{AB/\text{Sin}\,30^o} = \frac{25}{80 \cdot 2} = 0.2\ \frac{1}{c}\ (2)$$

Модули скоростей V_B и V_C равны:

$V_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB} = 0.2 \cdot 138 = 21.6$ см/с (3)

$V_C = \omega_{AB} \cdot CP_{AB} = 0.2 \cdot 150 = 30$ см/с (4)

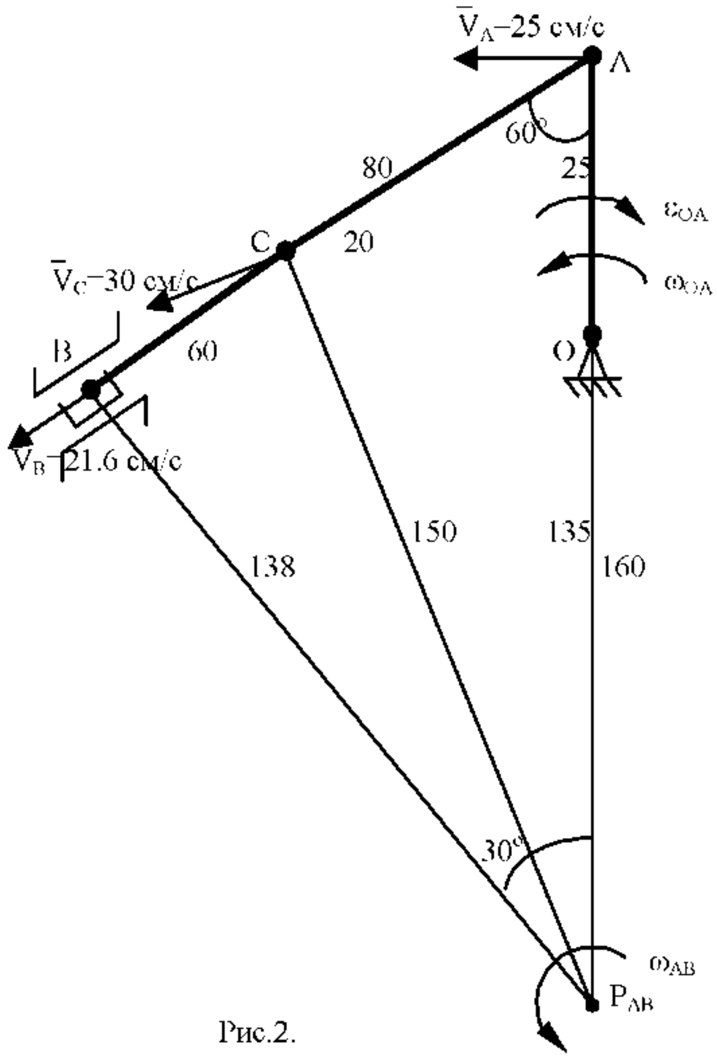


Рис.2.

2. Определение ускорений точек и углового ускорения звена

Ускорение точки А складывается из вращательного и центростремительного ускорений:

$$\varpi_A = \overline{\varpi}_A^{BP} + \overline{\varpi}_A^{Ц} \qquad (5)$$

где $\varpi_A^{BP} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 2.0 \cdot 25 = 50 см/с^2$

$$\varpi_A^{Ц} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 1.0^2 \cdot 25 = 25 см/с^2$$

$$\varpi_A = \sqrt{50^2 + 25^2} = 56 см/с^2$$

согласно теореме об ускорениях точек плоской фигуры:

$$\overline{\varpi}_B = \overline{\varpi}_A + \overline{\varpi}_{AB}^{BP} + \overline{\varpi}_{AB}^{Ц} \qquad (7)$$

центростремительное ускорение точки В во вращательном движении шарнира АВ вокруг полюса А:

$$\varpi_{AB}^{Ц} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0.2^2 \cdot 80 = 3.2 см/с^2$$

Вектор $\overline{\omega}^{Ц}_{AB}$ направлен от В к А.

Что касается ускорения $\overline{\varpi}_B$ точки В, и вращательного ускорения $\overline{\varpi}^{BP}_{AB}$, то известны только лишь действия этих векторов; $\overline{\varpi}_B$ – по направлению ВА,

$\overline{\varpi}^{BP}_{AB}$ – перпендикулярно АВ.

Эти ускорения определяют графическим путем, сложив в выбранном масштабе вектора $\overline{\varpi}^{BP}_A$ $\overline{\varpi}^{Ц}_A$ $\overline{\varpi}^{Ц}_{AB}$. Замыкаем многоугольник скоростей

$\varpi_B = 40$ см/с^2 , $\varpi^{BP}_{AB} = 50$ см/с^2, $\varepsilon_{AB} = 50/90 = 0{,}6$ $^1/с^2$.

Определяем ускорение точки С:

$$\overline{\varpi}_C = \overline{\varpi}_A^{BP} + \overline{\varpi}_A^{Ц} + \overline{\varpi}_{AC}^{BP} + \overline{\varpi}_{AC}^{Ц} \qquad (9)$$

Вращательное и центростремительное ускорение точки С во вращательном движении АВ вокруг полюса А:

$$\overline{\varpi}_{AC}^{B} = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 0.6 \cdot 20 = 12 см/с^2 \qquad (10)$$

$$\overline{\varpi}_{AC}^{Ц} = \omega_{AB}^2 \cdot AC = 0.2^2 \cdot 20 = 0.8 см/с^2$$

Вектор ускорения точки С находим способом проекций:

$$\varpi_{CX} = \varpi^{Ц}_{AC} + \varpi^{ВР}_{A}\mathrm{Cos}\,60^{o} - \varpi^{Ц}_{A}\mathrm{Cos}\,30^{o} = 0.8 + 50\cdot 0.5 - 25\cdot 0.86 = 4.3 см/с^{2}$$

$$\varpi_{CY} = \varpi^{В}_{AC} + \varpi^{ВР}_{A}\mathrm{Cos}\,30^{o} - \varpi^{Ц}_{A}\mathrm{Cos}\,60^{o} = 12 - 50\cdot 0.86 - 25\cdot 0.5 = 18.5 см/с^{2}$$

$$\varpi_{C} = \sqrt{4.3^{2} + 18.5^{2}} = 19\ см/с^{2}$$

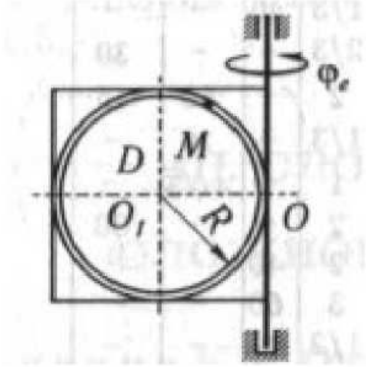
Ответ: V_B = 21.6 см/с, V_C = 30 см/с, ω_{AB} = 0,2 ^{1}/с,
ϖ_B = 40 ^{см}/с^2, ϖ_C = 19 ^{см}/с^2, ε_{AB} = 0,6 ^{1}/с^2

К7

Вариант 5. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки.

Точка М движется относительно тела Д. По заданным уравнениям относительного движения точки М и движения тела Д определить для момента времени t=t_1 абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки М, рис.1.

Дано:
OM = Sr = Sr(t)=40π Cos (πt/6), см
φe = φe(t) =3t-0.5t^2, рад
t_1=2c
R=30 см



Решение:
Положение точки М на теле Д определяется расстоянием Sr=OM. При t=2 с Sr = 40π Cos (2π/6)= 40π Cos 60°=40π 0.5 = 63 см,
Абсолютную скорость точки М найдем как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей:

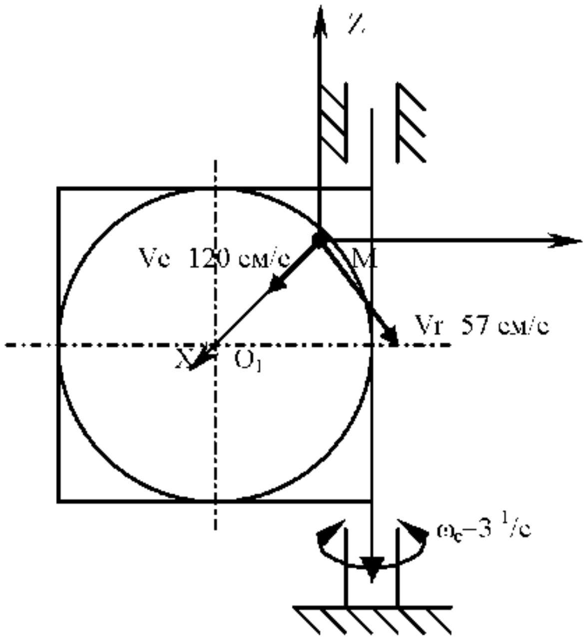
$$\overline{V} = \overline{V}r + \overline{V}e \quad (1)$$

Модуль относительной скорости

$$Vr = \frac{dSt}{dt} = -40\pi\frac{\pi}{6}\mathrm{Sin}\frac{\pi t}{6} = -\frac{40\cdot 10}{6}0.86 = -57\ см/с,$$

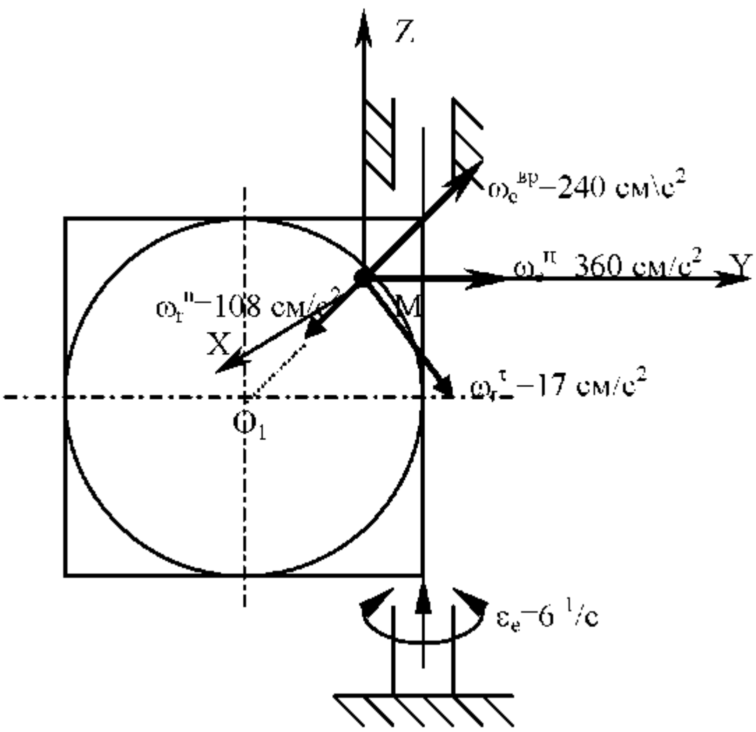
отрицательный знак показывает, что вектор $\overline{V}r$ направлен против возрастания Sr.

Рис.2.



Z
Y
Ve 120 см/с
M
Vr 57 см/с
X
O1
ωe=3 1/с

рис.3.



Z
ωe^вр=240 см/с²
ωe^n 360 см/с²
Y
ωr^n=108 см/с²
M
X
ωr^τ=17 см/с²
O1
εe=6 1/с

Модуль переносной скорости Ve=R·ω_e (2)
Где R – радиус окружности описанной точкой М, R=40 см,
ω_e- модуль угловой скорости тела,

$$\omega_e = \frac{d\varphi e}{dt} = \frac{d\left(3t - 0.5t^2\right)}{dt} = 3 - 1.5t^2, \text{при } t = 2c, \omega_e = 3 - 1.5 * 4 = -3\ {}^1/c \quad (3)$$

отрицательный знак у величины $\bar{\omega}_e$ показывает, что вращение происходит в одну сторону, обратную направлению отсчета угла φ.

Ve=40·3 1/с=120 1/с (4)

Так как $\bar{V}e$ и $\bar{V}r$ взаимно перпендикулярны, модуль абсолютной скорости точки М:

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{120^2 + 57^2} = 133\,см/с \quad (5)$$

Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переменного и кориолисова ускорений:, рис.3.

$\overline{\varpi} = \overline{\varpi}_r + \overline{\varpi}_e + \overline{\varpi}_c$ (6)

или

$\overline{\varpi} = \overline{\varpi}_r^{\tau} + \overline{\varpi}_r^{n} + \overline{\varpi}_e^{BP} + \overline{\varpi}_e^{Ц} + \overline{\varpi}_c$ (7)

Модуль относительного касательного ускорения

$$\varpi_r^{\tau} = \frac{d^2Sr}{dt^2} = -40\pi\frac{\pi}{6}\frac{\pi}{6}Cos\frac{\pi t}{6} = -34Cos60^o = -17\,см/c^2 \quad (8)$$

Относительное нормальное ускорение :

$$\varpi_r^{n} = \frac{V_r^2}{\rho} = \frac{57^2}{30} = 108\,см/c^2 \quad (9)$$

Модуль переменного вращательного ускорения :

$\varpi_e^{BP} = R\varepsilon_e,$ (10)

$$где\ \varepsilon_e = \frac{d^2\varphi_e}{dt^2} = -3t, при\ t = 2c\ \varepsilon_e = -6\ ^1/c \quad (11)$$

$\varpi_e^{BP} = 40 \cdot 6 = 240\ см/с$ (12)

Модуль переменного центростремительного ускорения

$\overline{\varpi}_e^{ц} = R \cdot \omega_e^2 = 40 \cdot 9 = 360\ см/c^2$ (13)

Кориолисово ускорение $\overline{\varpi}_c = 2 \cdot \overline{\varpi}_e \times \overline{V}_r = 2\omega_e V_r Sin\left(\overline{\varpi}_e, \overline{V}_r\right)$ (14)

где $Sin\left(\overline{\varpi}_c, \overline{V}_r\right) = Sin150^o = 0.5$

$\varpi_c = 2 \cdot 3 \cdot 57 \cdot 0.5 = 171\ см/c^2$

Вектор и модуль абсолютного ускорения точки М находим способом проекций :

$\varpi_x = -\varpi_e^{BP} = -240\ см/c^2$ (16)

$\varpi_y = \varpi_e^{Ц} = 360\ см/c^2$ (17)

$\varpi_z = \overline{\varpi}_r^{\tau} = 10\ см/c^2$ (18)

$\varpi = \sqrt{240^2 + 360^2 + 10^2} = 432\ см/c^2$

Ответ:

ω_e 1/c	Скорость, см/с			ε_e 1/c²	Ускорение, см/с²							
	Ve	Vr	V		$\omega^ц_e$	$\omega^в_e$	ω^n_r	ω^τ_r	ω_c	ω_x	ω_y	ω
-3	120	-57	133	-6	360	-240	108	-17	171	-240	260	432

Динамика

Д.2 Вариант:7

Дано:

$m = 1$ кг

$\vec{P} = 4r\left(\vec{i}\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \vec{k}\,\mathrm{Sin}\,\varphi\right)$Н

$X_0 = 10$ см

$\dot{X}_0 = 0$

$Z_0 = 0$

$\dot{Z} = 40$ м/с

Найти уравнения движения точки:

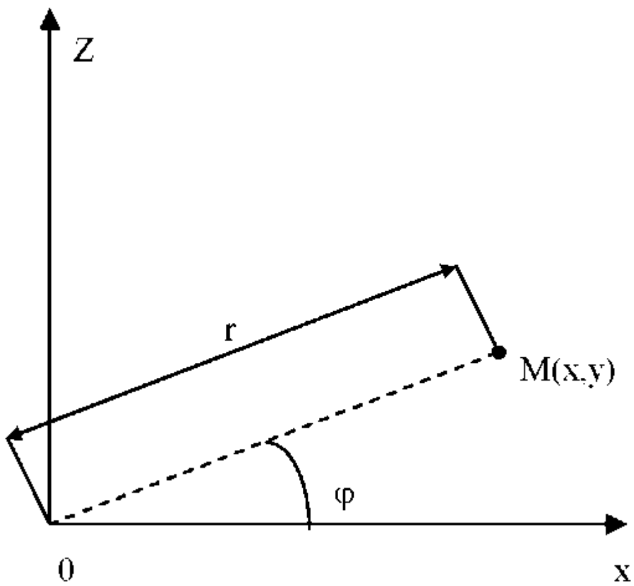


рис.1.

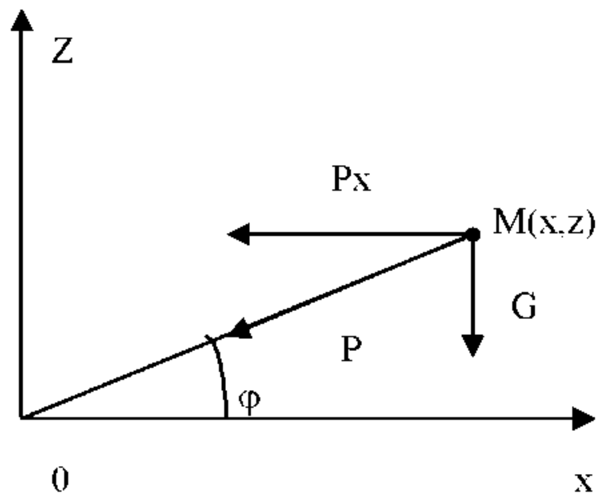


Рис.2.

На точку действует сила P, направленная к неподвижному центру O, собственный вес G (рис.2.)

Заданные силы P, G и вектор начальной скорости $\dot{z}_0$ расположены в плоскости XOZ $\Rightarrow$ движение будет происходить в этой плоскости.

Запишем дифференциальные уравнения движения:

$$m\ddot{x} = \sum x_i$$

$$m\ddot{z} = \sum z_i$$

$$\sum x_i = Px = -4r\,\mathrm{Cos}\,\varphi = -4r\frac{x}{r} = -4r$$

$$\sum z_i = Pz - G = -4r\,\mathrm{Sin}\,\varphi - G = -4r\,G$$

$$\ddot{x} = -4x$$

$$\ddot{z} = -4x - g$$

$$\ddot{x} + 4x = 0 \;(1)$$

$$\ddot{z} + 4z = -g \;(2)$$

Это линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

(1) – однородное уравнение

(2) – неоднородное уравнение

Характеристические уравнения для (1):

$u^2+4=0$

Корни уравнения:

$u_{1,2}=\pm 2i \Rightarrow$ найдем C_1 и C_2

$\dot{x}_0 = -2C_1 \operatorname{Sin} 2t + 2C_2 \operatorname{Cos} 2t$

$\dot{x}_0 = 0 = 2C_2 \Rightarrow C_2 = 0$

$x = 10 \operatorname{Cos} 2t$ (4)

$x_0 = 10 = C_1 \Rightarrow C_1 = 10$

Общее решение уравнения (2):

Z=Z_1+Z_2, где Z_1 – общее решение соответствующего однородного уравнения

$\ddot{z}_1 + 4z_1 = 0$ Аналогично (1)

$z_1 = C_3 \operatorname{Cos} 2t + C_4 \operatorname{Sin} 2t$

z_2 – частное решение уравнения (2)

Положим, z_2=A=const (5)

Подставим (5) в (2): 0+4a=-g ⇒ A=-q/4 = -2.45

Таким образом:

$z = C_3 \operatorname{Cos} 2t + C_4 \operatorname{Sin} 2t - 2.45$ (6)

Найдем C_3 и C_4 :

$z_0 = 0 = C_3 - 2.45 \Rightarrow C_3 = 2.45$

$\dot{z} = -2C_3 \operatorname{Sin} 2t + 2C_4 \operatorname{Cos} 2t$

$\dot{z}_0 = 40 = 2C_4 \Rightarrow C_4 = 20 \Rightarrow z = 2.45 \operatorname{Cos} 2t + 20 \operatorname{Sin} 2t - 2.45$

$z = 2.45 \cdot \operatorname{Cos} 2t + 20 \operatorname{Sin} 2t - 2.45$ (7)

Уравнения (4) и (7) – решение задачи.

Задание Д-6
Вариант: 16.

Применение основных теорем динамики к исследованию движения материальной точки.

Шарик, принимаемый за материальную точку, движется из положения А внутри трубки, ось которой расположена в вертикальной плоскости (рис.3.)

Найти скорость шарика в положениях В и С и давление шарика на стенку трубки в положении С. трением на криволинейных участках пренебречь.

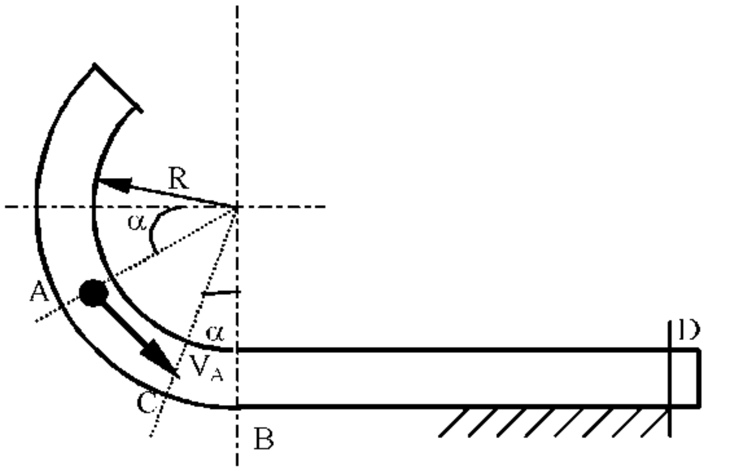
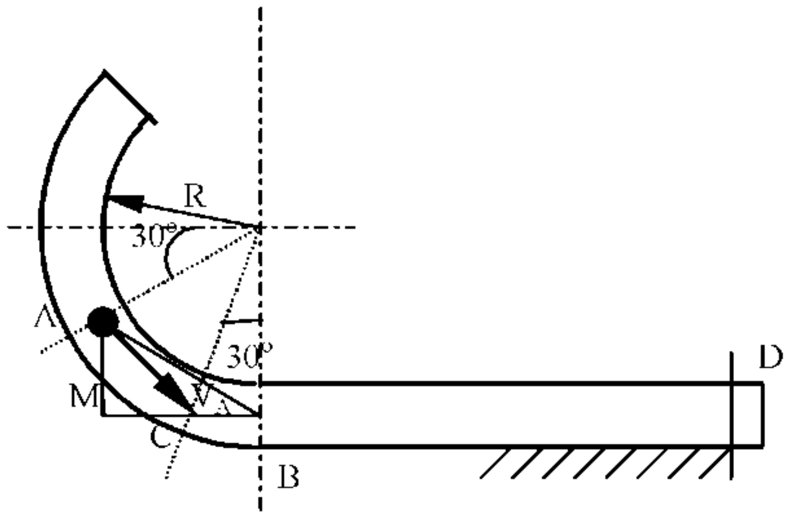


рис.1.

№ варианта	m	V_A	$\tau_{(BD)}$	R	f	α	Требуется определить дополнительно
	кг	М/с	с	м		Град	
16	0,4	2	0,2	2.0	0,40	30	V_D



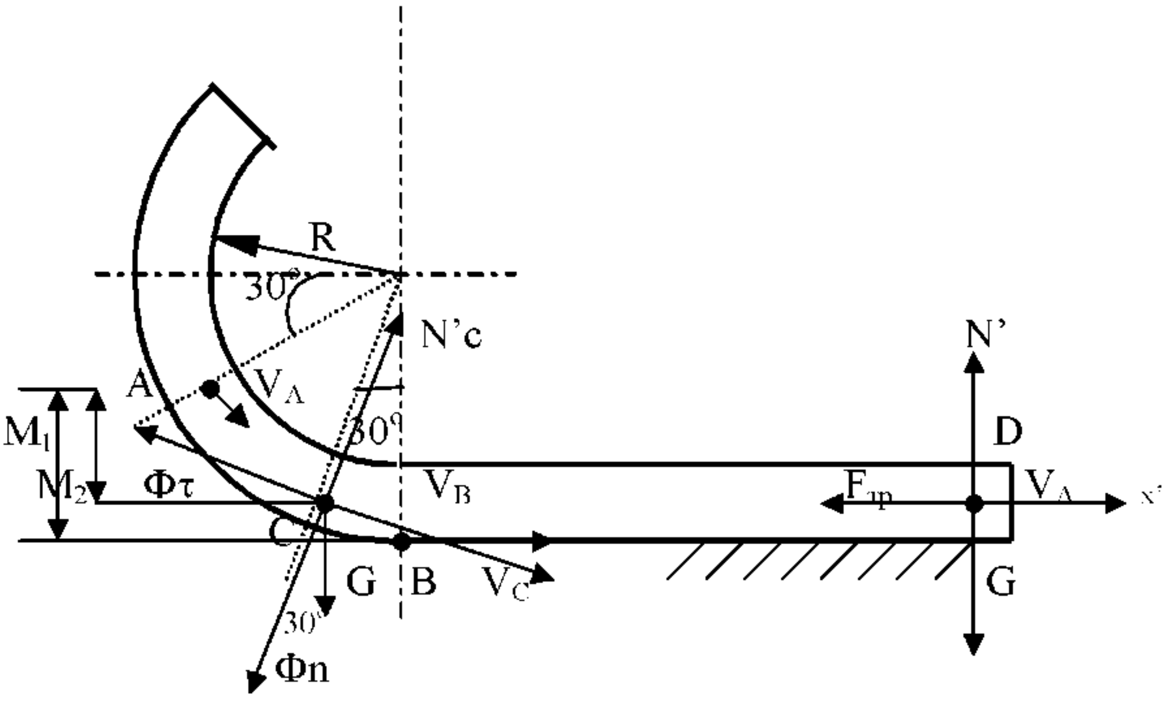


рис.2.

Решение:

Для определения VB и VC применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки. Движение шарика на участке AC и AB происходит под действием силы тяжести G:

$$\frac{mV_B^2}{2}-\frac{mV_A^2}{2}=\sum A_i=G\cdot H_1=mg\cdot AB\cdot \mathrm{Sin}\,\alpha=mg\cdot R\cdot \mathrm{Sin}\,\alpha$$

$$V_B^2-V_A^2=2gR\cdot \mathrm{Sin}\,\alpha$$

$$V_B=\sqrt{V_A^2+2gR\cdot \mathrm{Sin}\,\alpha}$$

$$V_B=4.61\ м/с$$

$$\frac{mV_C^2}{2}-\frac{mV_A^2}{2}=\sum A_i=G\cdot H_1=mg\cdot AC\cdot \mathrm{Sin}\,45^o=mg\cdot 0.52R\cdot \mathrm{Sin}\,45^o$$

$(AC=0{,}52R$ – через теорему синусов$)$

$$V_C^2-V_A^2=1{,}04gR\cdot \mathrm{Sin}\,45^o$$

$$V_C=\sqrt{V_A^2+1{,}04gR\cdot \mathrm{Sin}\,45^o}$$

$$V_C=4{,}29\ м/с$$

Определим давление шарика на стенку канала в положении С.

В соответствии с принципом Даламбера:

$$\vec{G} + \vec{N}'c + \vec{\Phi} = 0$$

где $\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_n + \vec{\Phi}_\tau$

Сумма проекций сил на ось тоже равна 0:

$$N'c - GCos\,30^o - \Phi_n = 0$$

$$N'c = GCos\,30^o + \Phi_n = 0$$

$$N'c = mg\,Cos\,30^o + \frac{mV_C^2}{R}$$

$$N'c = 7.08\,H$$

Искомое давление Nc с шарика на стенку трубки численно равно N`c и противоположено по направлению.

Скорость V_D найдем, используя теорему об изменении количества движения материальной точки.

$$mV_{D_x'} - mV_{B_x'} = \sum S_{i_x}$$

К точке приложены сила тяжести G, реакция стенки трубки N и сила трения Fтр

$$Fтр = f\,N' = f\,G$$

Т.к. $V_{D_x} = V_D$ и $V_{B_x} = V_B$ и

$$\sum S_{i_x} = -F \cdot \tau, \text{то}$$

$$mV_D - mV_B = -mg \cdot f \cdot \tau$$

$$V_D = -g \cdot f \cdot \tau + V_B$$

$$V_D = 3.83\ м/с$$

Таблица найденных значений:

Nc	V_B	V_c	V_d
H	M/c		
7.08	4,61	4,29	3,83

Вариант:4

Задание Д9. Применение теоремы об изменении кинетического момента к определению угловой скорости твердого тела.

Тело *H* массой m_1 вращается вокруг вертикальной оси Z с постоянной угловой скоростью ω_0; при этом в точке O желоба AB тела H на расстоянии AO от точки A, отсчитываемом вдоль желоба, закреплена материальная точка K массой m_2. В некоторый момент времени (t = 0) на систему начинает действовать пара сил с моментом Mz = Mz(t). При $t = \tau$ действие пары сил прекращается.

Определить угловую скорость ω_τ тела H в момент $t = \tau$.

Тело H вращается по инерции с угловой скоростью ϖ_τ. В некоторый момент времени $t_1 = 0$ (t_1 — новое начало отсчета времени) точка K (самоходный механизм) начинает относительное движение из точки O вдоль желоба AB (в направлении к B) по закону OK = S = S(t).

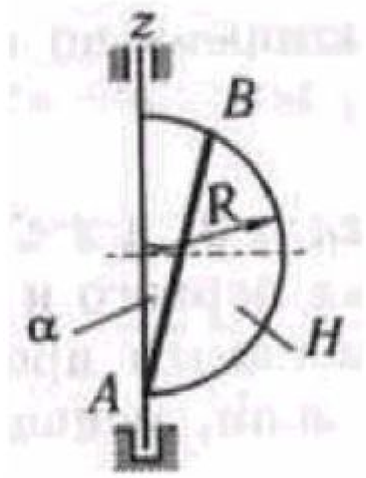
Определить угловую скорость ω_T тела H при $t_1 = T$.

Тело H рассматривать как однородную пластинку, имеющую форму, показанную на рис. 1. Необходимые для решения данные приведены в табл. 1.

Таблица.1.

№ варианта	m_1	m_2	ω_0	R	α	AO	Mz=Mz(t)	τ	OK=S=S(t)	T
	кг	кг	Рад/с	м	град	м	Н м	с		с
4	16	5	-3	1	30	0,4	21t	2	$0.6t_1$	2

Рис.1.



Решение.

К решению задачи применим теорему об изменении кинетического момента механической системы, выраженную уравнением

$$\frac{dLz}{dt} = \sum M^E_{i_z} \quad (1)$$

где Lz — кинетический момент системы, состоящей в данном случае из тела Н и точки К, относительно оси Z;

$\Sigma\ M^E i_z = M^E z$ — главный момент внешних сил, приложенных к системе, относительно оси z.

1. Определим угловую скорость тела Н при t=τ.

Положение конечной массы m_2 при t≤τ показано на рис.2.

$$OO_1 = AO \cdot \text{Sin}\,\alpha, \quad OO_1 = 0.4 \cdot \text{Sin}\,30^\circ = 0.4 \cdot 0.5 = 0.2\text{м}$$

При t≤τ главный момент внешних сил:

$$\sum M^E_{i_z} = M_Z = 21t \text{ нМ } (2)$$

Остальные силы $\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{R}_E$ и $\vec{R}_D$ не дают момента относительно оси Z.

Кинетический момент системы:

$$Lz = L_{1z} + L_{2z}\ (3), \text{где}$$

$$L_{1z} = J_{1z} \cdot \omega_z = \frac{m_1 \cdot R^2}{2} \cdot \omega_z (4)$$ – кинетический момент тела Н относительно оси Z

$$J_{1z} = \frac{m_1 \cdot R^2}{4}$$ – момент инерции тела Н

$$L_{2z} = m_2 V \cdot O_1O = m_2 (O_1O)^2 \cdot \omega_z \ (5)$$ – кинетический момент точки массой m_2

$$V = O_1O \cdot \omega_z$$

С учетом формул (4) и (5) формула (3) имеет вид:

$$L_z = \frac{m_1 \cdot R^2}{4} \cdot \omega_z + m_2 (O_1O)^2 \cdot \omega_z = \omega_z \cdot \left[\frac{m_1 R^2}{4} + m_2 (O_1O)^2\right] (6)$$

С учетом численных значений выражение (6) принимает вид:

$$L_z = \omega_z \cdot \left[\frac{16 \cdot 1^2}{4} + 5(0.2)^2\right] = 4.2\omega_z \ (7)$$

Подставим выражения (2) и (7) в формулу (1) получим:

$$\frac{d}{dt}\left(4.2\omega_z\right) = 21t \text{ или } \frac{d\omega_z}{dt} = 5t$$

Отсюда $\omega_z = \int\limits_0^t 5t\,dt + \omega_0 = 2.5t^2 + \omega_0$

Для $T = \tau$ получим :

$$\omega_z(\tau) = 2.5\tau^2 + \omega_0 = 2.5(2)^2 - 3 = 10 - 3 = 7\ \frac{1}{c}$$

$\omega_\tau = 7\ {}^1/c$

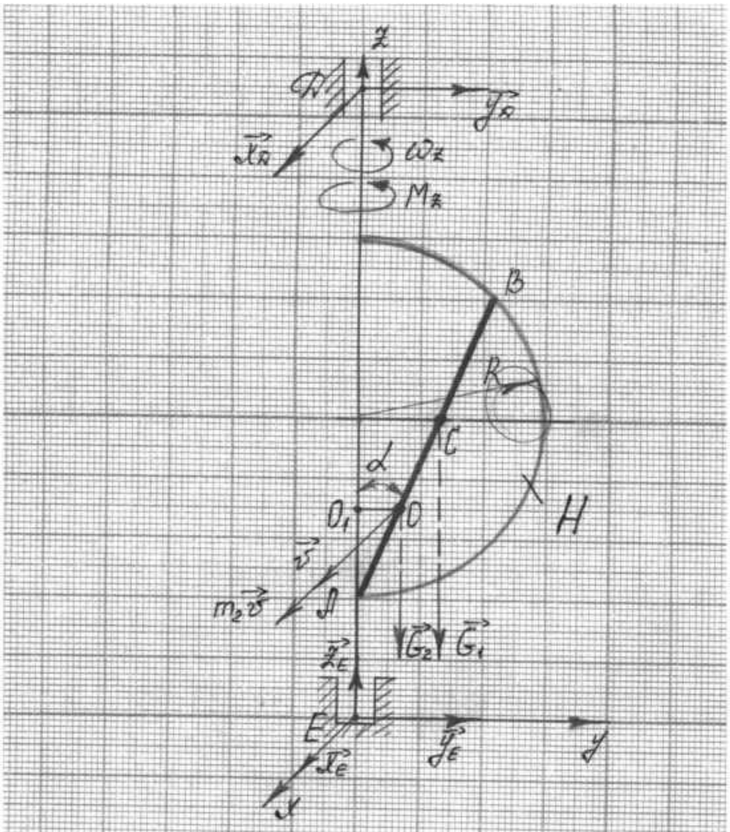
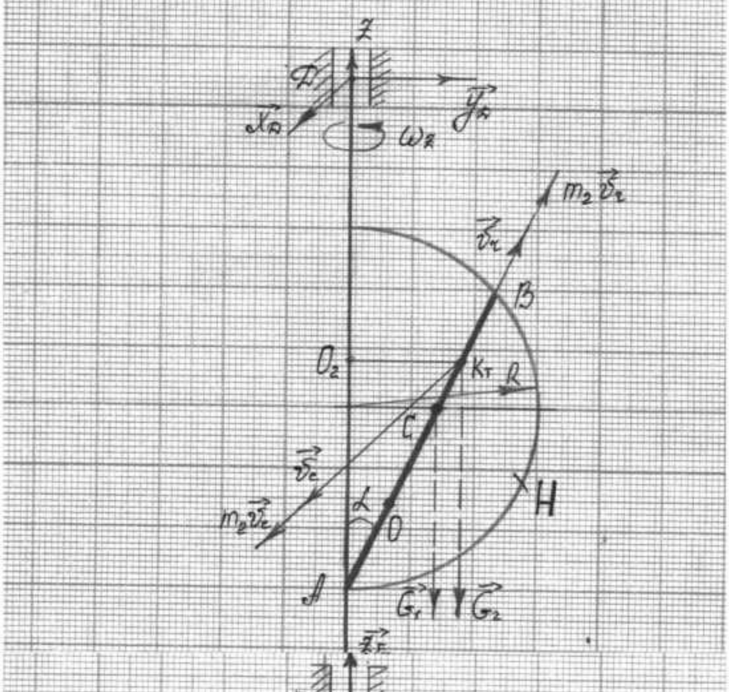


Рисунок 3.



-4-

2. Определим угловую скорость тела Н при t=T

Положение точечной массы m_2 при t=T показано на рисунке 3.

$$\text{При } t_1 = T \ \ OK = 0.6t_1 = 0.6T = 0.6 \cdot 2 = 1.2\,m$$

$$AK = AO + OK = 0.4 + 1.2 = 1.6\,m$$

$$KO_2 = AK \cdot \sin\alpha = 1.6 \cdot 0.5 = 0.8\,m$$

$$\text{Из } (1) \Rightarrow L_Z = const \text{ или } L_Z(\tau) = L_Z(t) \ (9)$$

Из формул (7) и (8) получим:

$$L_Z(\tau) = 4.2 \cdot \omega_Z(\tau) = 4.2 \cdot 7 = 29.4 \ \frac{кг \cdot м}{с} \ (10)$$

Т.к. вектор скорости пересекает ось вращения, то относительное движение не даст вклад в L_{2z}(T).

$$L_Z(T) = \frac{m_1 \cdot R^2}{4} \cdot \omega_Z(T) + m_2 \cdot Vc \cdot KO_2 \, (11)$$

$$Vc = KO_2 \cdot \omega_Z \Rightarrow L_Z(T) = \omega_Z\left[\frac{m_1 \cdot R^2}{4} + m_2(KO_2)^2\right]$$

С учетом численных значений:

$$L_Z(T) = \omega_Z(T)\left[\frac{16 \cdot 1^2}{4} + 5(0.8)^2\right] = 7.2 \cdot \omega_Z(T) \ (12)$$

Подставив (10) и (12) в уравнение (9) получим:

$$29.4 = 7.2 \cdot \omega_Z(T)$$

$$\omega_Z(T) = 4.1 \ ^1/c$$

$$\omega_T = 4.1 \ ^1/c$$

Ответ: $\omega_T = 4.1 \ ^1/c$

Варнант:4

Заданис Д10. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы.

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движснис из состояния покоя; начальнос положение системы показано на рис. 1. Учитывая трение скольжения тела 1 (варианты 1—3, 5, 6, 8—12, 17—23, 28—30) и сопротивлснис качению тсла 3, катящсгося бсз скольжения (варианты 2, 4, 6—9, 11, 13—15, 20, 21, 24, 27, 29), пренебрегая другими силами сопротивления и массами нитсй, предполагасмых нсрастяжимыми, опрсделить скорость тела 1 в тот момент, когда пройденный им путь станст равным S.

m_1, m_2, m_3, m_4, — массы тел 1, 2, 3,.4;

R_2, r_2, R_3, r_3 — радиусы больших и малых окружностей;

i_{x2}, $i_{3\xi}$ — радиусы инерции тсл 2 и 3 относитсльно горизонтальных осей, проходящих через их центры тяжести;

α, β— углы наклона плоскостей к горизонту;

f — коэффициснт трсния скольжсния;

δ — коэффициент трения качения.

Нсобходимыс для рсшсния данныс привсдсны в табл. 1. Блоки в катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами.

Наклонныс участки нитсй параллсльны соотвстствующим наклонным плоскостям.

Примечание: массами звеньев AB, BC и ползуна B прснсбрсчь.

Таблица №1

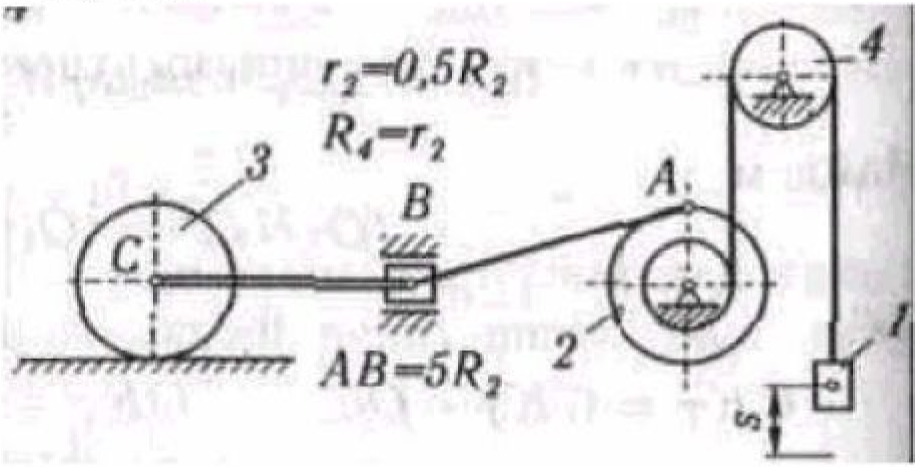
№ варианта	m_1	m_2	m_3	m_4	R_2	R_3	i_{2x}	δ	S
	Кг				см		см		см
4	m	2m	40m	m	20	40	18	0.30	0.1π

$J_2 = 0.5\ R_2 = 0.5\ 20 = 10$ см

$AB = 5\ R_2 = \ \ 5\ 20 = 100$ см

$R_4 = r_2 = 10$ см

Рисунок.1.



Решение:

1 – груз

2- блок

3 – каток

4- блок

5 – шатун

В – ползун

Применим теорему об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \sum A_i^E + \sum A_i^J \quad (1),$$

где T_0 и T — кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях;

$\sum A_i^E$ — сумма работ внешних сил, приложенных к системе, на перемещении системы из начального положения в конечное;

$\sum A_i^J$ — сумма работ внутренних сил системы на том же перемещении.

Для рассматриваемых систем, состоящих из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями и стержнями, $\sum A_i^J = 0$

Так как в начальном положении система находится в покое, то To=0.

Следовательно, уравнение (1) принимает вид

$$T = \sum A_i^E \quad (2)$$

Для определения кинетической энергии T и суммы работ внешних сил надо изобразить систему в конечном положении (рис. 2, б, в).

Рис.2. а) Механическая система в начальном положении

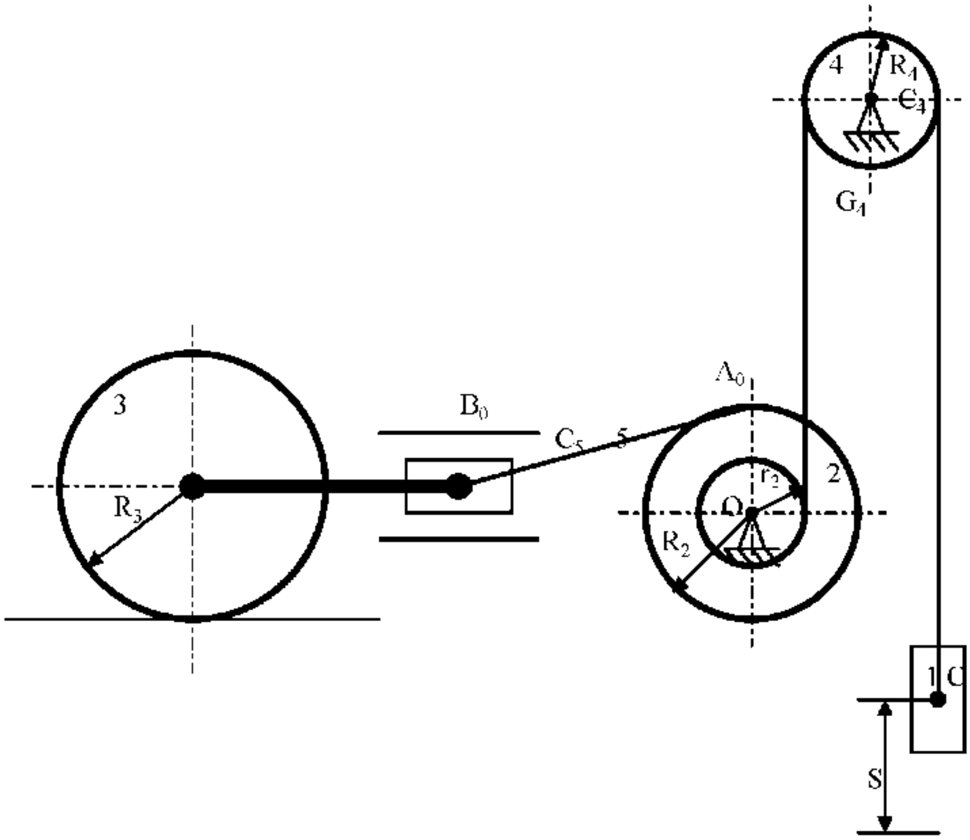
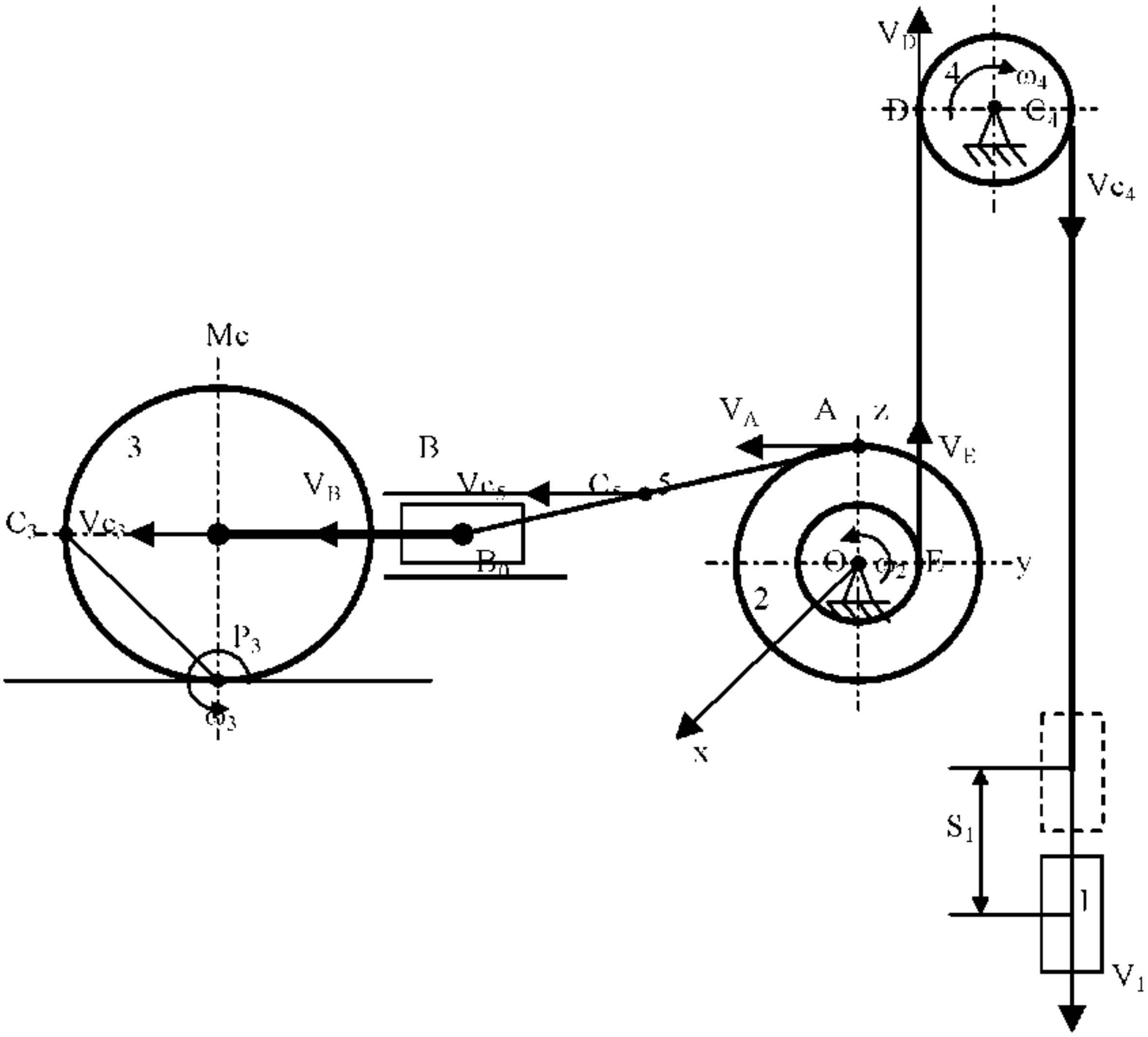


Рис.2. б) Конечное положение всей системы



Вычислим кинетическую энергию системы в конечном положении как сумму кинетических энергий тел 1,2,3,4:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \; (3)$$

Кинетическая энергия груза 1 движущегося поступательно.

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} \; (4)$$

Кинетическая энергия блока 2, совершающего вращательное движение

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{2x} \cdot \omega_2^2$$

$$J_{2x} = m_2 \cdot i_{2x}^2, \quad \omega_2 = \frac{V_1}{r_2} = \frac{2V_1}{R_2}$$

Следовательно : $T_2 = \frac{1}{2} m_2 \cdot i_{2x}^2 \cdot \frac{4V_1^2}{R_2^2} = \frac{2m_2 \cdot i_{2x}^2}{R_2^2}$ (5)

Кинетическая энергия катка 3, совершающего плоское движение:

$$T_3 = \frac{m_3 V_{C_3}^2}{2} + \frac{J_{C_3} \omega_3^2}{2}, \text{ где}$$

V_{C_3} - скорость центра масс C_3 катка 3

J_{C_3} - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс

$$J_{C_3} = \frac{1}{2} m_3 R_3^2$$

ω_3 – угловая скорость катка 3.

Т.к. каток катится без скольжения, то мгновенный центр скоростей находится в точке P_3. Поэтому

$$\omega_3 = \frac{V_{C_3}}{R_3}$$

Следовательно : $T_3 = \frac{m_3 \cdot V_{C_3}^2}{2} + \frac{m_3 \cdot R_3^2 \cdot V_{C_3}^2}{2 \cdot 2 \cdot R_3^2} = \frac{3}{4} m_3 \cdot V_{C_3}^2$

Т.к. звено BC_3 совершает поступательное движение, то $V_{C_3} = V_B$, но $V_B = V_{C_5} = 2V_1$. Значит $V_{C_5} = 2V_1$, поэтому выражение кинетической энергии катка 3 принимает вид: $T_3 = \frac{3}{4} m_3 (2V_1)^2 = 3m_3 V_1^2$ (6)

Кинетическая энергия всей механической системы определяется по формуле (3) с учетом (4), (5), (6):

$$T=\frac{1}{2}m_1V_1^2+\frac{2m_2i_{2x}^2}{R_2^2}V_1^2+3m_3V_1^2.\textit{Подставим сюда данные значения}:$$

$$T=\frac{1}{2}m\cdot V_1^2+\frac{2\cdot 2\cdot(18)^2}{20^2}V_1^2+3\cdot 40\cdot m\cdot V_1^2=mV_1(0.5+3.24+120)=123.74\cdot mV_1^2\quad(7)$$

2. Найдем сумму работ всех внешних сил, приложенных к системе, на заданном её перемещении. Покажем внешние силы, приложенные к системе (рис.2.в).

Работа силы тяжести G_1:

$$A_{G_1}=G_1h_1=m_1gS\qquad(8)$$

Работа пары сил сопротивления качению катка 3:

$A_{Mc}=-Mc\cdot\varphi_3$ (9), где

$Mc=\delta\cdot N_3=\delta\cdot G_3$ - момент пары сил сопротивления качению катка 3;

φ_3 – угол поворота катка 3.

Т.к. каток 3 катится без скольжения, то угол его поворота $\varphi_3=\dfrac{S_{C_3}}{R_3}$ (10), где

S_{C3} – перемещение центра тяжести C_3 катка 3.

В данном случае работу пары сил сопротивления вычислим как сумму работ этой пары при качении катка 3 влево при повороте тела 2 на угол $\pi/2$ и качении вправо, когда тело 2 повернется еще на угол $\pi/2$.

Перемещение центра тяжести C_3 катка 3 равно перемещению ползуна В влево и вправо:

$$Sc_3 = 2\ (B_0B') \quad (11)$$

Определим перемещение B_0B`при повороте тела 2 на угол $\pi/2$. За начало отсчета координаты точки В выберем неподвижную точку К плоскости (рис.2.г). При этом повороте тела 2 шатун из положения A_0B_0 перейдет в положение КВ'. Тогда:

$B_0B' = KB_0 - KB'$, где

$KB_0 = KO + OB_0 = R_2 + \sqrt{(A_0B_0)^2 - (A_0O)^2} = R_2 + \sqrt{\ell^2 - R_2^2}$,

$KB' = \ell = 2R_2$

Следовательно: $B_0B' = R_2 + \sqrt{(5R_2)^2 - (R_2)^2} - 5R_2 = 0.9R_2$ (12)

Подставляя (12) в (11), а затем в (10), находим полный угол поворота катка 3:

$$\varphi_3 = \frac{2 \cdot 0.9 \cdot R_2}{R_3} \quad (13)$$

Работа пары сил сопротивления качению по (9):

$$A_{Mc} = -\delta \cdot m_3 \cdot g \frac{2 \cdot 0.9R_2}{R_3} \quad (14)$$

$$A_{Mc} = -0.3 \cdot 40 \cdot m \cdot g \frac{2 \cdot 0.9 \cdot 20}{40} = 10.8 \cdot mg \quad (14)$$

Работа силы сцепления Fсц катка 3 равна 0, т.к. эта сила приложена в МЦС скорости этого катка.

Рис.2. в) Внешние силы, приложенные к системе.

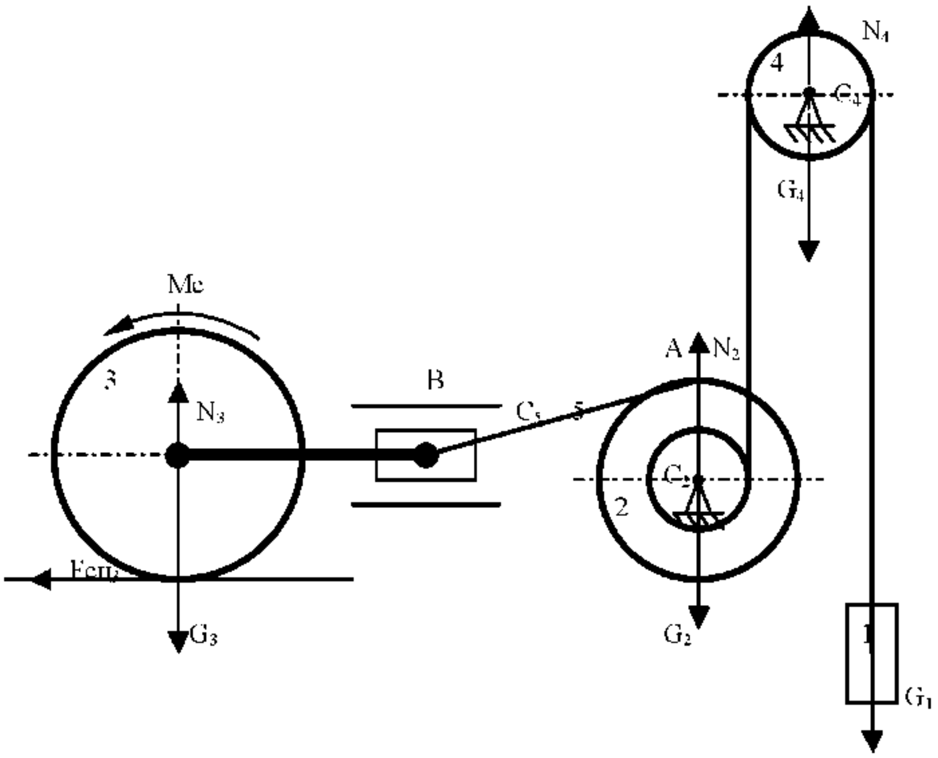
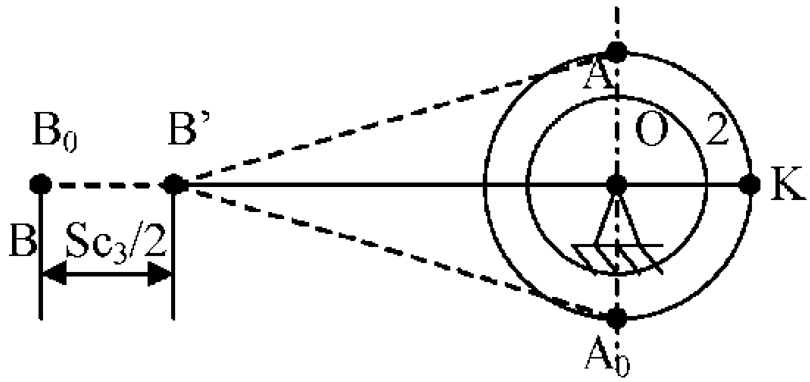


Рис.2. г)



Сумма работ внешних сил определяется соотношением:

$\sum A_i^E = mgS + 10.8mg = 11.1mg$ (15) 2

3. Согласно теореме (2), приравниваем значения T и $\sum A_i^E$, определяемые по формулам (7) и (15):

   $123.74\ mV^2_1 = 11.1\ mg$.

откуда $V_1 = 0.94$ м/с.

Список литературы.

1. А.А. Яблонский. В.М. Никифорова. Курс теоретической механики. ч.1. Статика. Кинематика. Учебник, изд 5-е, испр., М.: Высшая школа, 1977,-368с, илл.
2. А.А. Яблонский. Курс теоретической механики. ч.2. Динамика, изд 5-е, испр., М.: Высшая школа, 1977,-430с, илл.
3. Голубева О.В. Теоретическая механика. М.: Высшая школа, 1968,-487с, илл.
4. М.С. Мовнин, А.Б. Израелит. Теоретическая механика. ч.1. Теоретическая механика. учебник. 5-е изд. Л.: Судостроение, 1972,-344с.
5. Сборник задач по теоретической механике. Мещерский И.В., изд. 34, М.: Наука. 1975.-448с. илл.
6. Тарг С.М.. Курс теоретической механики. М.: 1963 и последующие издания.
7. Бать М.И. и др. Теоретическая механика в примерах и задачах. ч.1 и ч.2. М.: 1961 и последующие издания.
8. А.А. Яблонский и др. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебн. пособие. – 5-е изд.. исправл.. - М.: Интеграл-Пресс. 2000-384с.