ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ПРИМЕРЫ ПРАКТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Методическое пособие

Содержание

Введение

Дисциплина «Теоретическая механика» входит в государственный стандарт подготовки специалистов с высшим образованием. Программа курса разбита на 2 семестра по 4 модуля в каждом (всего 8 модулей).

Вид учебной работы	1 семестр	2 семестр
Общая трудоемкость	105 часов	105 часов
Аудиторные занятия	31 час	32 часа
Лекции	15 часов	16 часов
Практические занятия	16 часов	16 часов
Самостоятельная работа	74 часа	73 часа
Промежуточный контроль (4 теста)	2 часа	2 часа
Вид итогового контроля (тест)	зачет	Экзамен

Объем одного модуля – 30 часов (это один месяц). В каждом модуле по 2 лекции, по 2 практических занятия, то есть аудиторные занятия проходят один раз в неделю. В конце каждого модуля студент проходит промежуточный контроль по тестам и сдает тьютору на проверку одну РГР (расчетно-графическую работу), которую в дальнейшем (в дополнительно назначенное время вне аудиторных занятий) необходимо защитить (ответить на вопросы работы или решить похожую задачу перед тьютором). Всего в каждом семестре будет 4 РГР. В каждом модуле студент самостоятельно изучает 2 темы (это входит в самостоятельную работу студента), по которым он отчитывается в конце модуля по тестам (тесты приведены в конце пособия).

Модуль	Количество
Лекции	2
Практические занятия	2
Расчетно-графическая работа	1
Тесты	1

После прохождения каждого семестра курса студентам выставляется итоговая оценка. Оценка складывается из количества баллов, выставленных за выполнение 4 РГР (за каждую РГР – от 0 до 20 баллов), и баллов, полученных при выполнении 4 тестов (за каждый тест – от 0 до 5 баллов).

Итоговая оценка	Количество баллов	Количество процентов
Отлично	85-100	85-100
Хорошо	70-84	70-84
Удовлетворительно	55-69	55-69
Неудовлетворительно	0-54	0-54

Модуль 1

В настоящем модуле рассматриваются системы сходящихся и параллельных сил. Приводятся основные понятия и определения, а также графические и аналитические способы определения равнодействующей. Выводятся графические и аналитические условия равновесия для случаев плоской и пространственной систем сил. Рассмотрены примеры решения задач.

1.1. Система сходящихся сил

Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется системой сходящихся сил.

Согласно аксиоме статики, равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (рис.1).

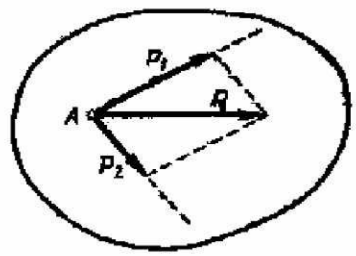


Рис.1

Из треугольника ADC находим модуль равнодействующей по формуле

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos\alpha},$$

где α -угол между векторами $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$.

Применяя последовательно правило параллелограмма, можно найти равнодействующую скольких угодно сходящихся сил. Найдем сначала равнодействующую трех сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ и $\overline{F}_3$, приложенных в одной точке и не лежащих в одной плоскости (рис.2).

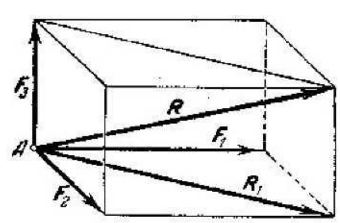


Рис.2

Сложив по правилу параллелограмма силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, получим их равнодействующую $\overline{R}_1$, а сложив затем $\overline{R}_1$ и $\overline{F}_3$, найдем равнодействующую $\overline{R}$ трех данных сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ и $\overline{F}_3$. Таким образом, равнодействующая трех сил, приложенных в одной точке и не лежащих в одной плоскости, равна по модулю и направлению диагонали параллелепипеда, построенного на этих трех силах (правило параллелепипеда). Заметим, что при нахождении равнодействующей двух сил нет надобности строить весь параллелограмм. Для этого из конца вектора первой силы $\overline{F_1}$ (рис.3) проводим вектор второй силы $\overline{F_2}$. Вектор, соединяющий начальную и конечную точки полученной ломаной линии будет представлять собой по модулю и направлению равнодействующую $\overline{R}$ двух данных сил $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ (правило треугольника).

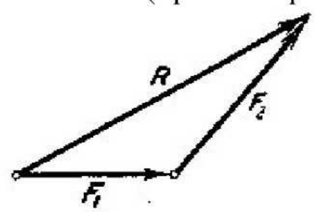


Рис.3

Как известно, в статике сила является скользящим вектором. Поэтому, точки приложения сходящихся сил можно перенести по линиям их действия в точку пересечения этих линий, а следовательно, систему сходящихся сил всегда можно заменить системой сил, приложенных в одной точке.

Пусть теперь нужно сложить несколько сил, например, четыре силы $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$ и $\overline{F_4}$, приложенных в точке A (рис.4). Применяя последовательно правило треугольника, получим ломаную линию $ABCDE$. Вектор $\overline{AE}$, соединяющий начальную и конечную точки ломаной линии, изображает искомую равнодействующую $\overline{R}$ четырех сил $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$ и $\overline{F_4}$.

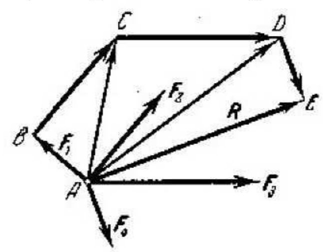


Рис.4

Таким образом, равнодействующая сходящихся сил изображается замыкающей стороной многоугольника сил, приложена в точке пересечения линий действия сил и равна их геометрической сумме

$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \ldots + \overline{F_n} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i} \qquad (1)$$

Спроектировав равенство (1) на координатные оси, и учитывая, что проекция суммы векторов на какую-нибудь ось равна алгебраической сумме проекций векторов на ту же ось, получим

$$R_x = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$R_y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \qquad (2)$$

$$R_Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i,$$

где R_x, R_y, R_z и X_i, Y_i, Z_i - проекции соответственно равнодействующей и сил системы на координатные оси.

Модуль равнодействующей определяется по формуле

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \qquad (3)$$

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этих сил равнялась нулю.

Так как равнодействующая $\overline{R}$ изображается вектором, замыкающим силовой многоугольник, то для того чтобы равнодействующая равнялась нулю, силовой многоугольник должен быть замкнутым, то есть конец вектора, изображающего последнюю силу, должен совпадать с началом вектора, изображающего первую силу.

Таково условие равновесия системы сходящихся сил в геометрической форме. Выразим теперь то же условие аналитически.

Из (3) следует, что при равновесии должно иметь место равенство

$$R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 = 0.$$

Так как все слагаемые в левой части не могут быть отрицательными, то это равенство справедливо только в случае, если $R_x = R_y = R_z = 0$. С учетом (2), окончательно получим

$$\sum X_i = 0, \ \sum Y_i = 0, \ \sum Z_i = 0 \qquad (4)$$

Следовательно, для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех этих сил на каждую из трех координатных осей равнялась нулю.

Понятно, что в случае плоской системы сходящихся сил для равновесия должны быть выполнены только первые два из условий (4).

При решении задач статики иногда удобно пользоваться теоремой о трех силах: если твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

В большинстве случаев в задачах статики по заданным (известным) силам, приложенным к данному несвободному твердому телу, требуется определить неизвестные реакции связей, предполагая, что тело находится в покое и все приложенные к нему силы уравновешиваются. При аналитическом решении задачи эти силы находятся из уравнений (4), в левые части которых войдут, кроме заданных известных сил, и неизвестные реакции связей.

Рассмотрим пример.

Пример 1. Шар веса P опирается в точке A на наклонную плоскость, образующую с вертикалью угол α, и привязан к стене веревкой, которая образует с вертикалью угол β (рис.5а). Определить реакцию плоскости в точке A и натяжение веревки.

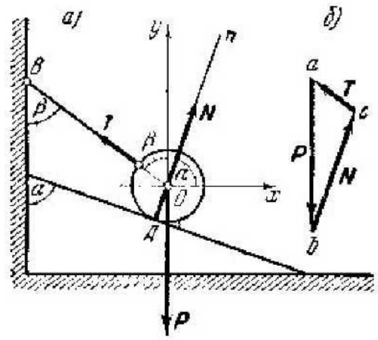


Рис.5

Решение: Обозначим искомую реакцию плоскости, направленную по нормали An к этой плоскости, через $\overline{N}$, а натяжение веревки – через $\overline{T}$. Линия действия всех трех сил $\overline{N}, \overline{T}$ и $\overline{P}$ пересекаются в центре шара O. Примем вертикаль и горизонталь в точке O за координатные оси и найдем проекции сил

$\overline{N}, \overline{T}$ и $\overline{P}$ на эти оси:

$$N_x = N\cos\alpha,\ T_x = -T\sin\beta,\ P_x = 0,$$

$$N_y = N\sin\alpha,\ T_y = T\cos\beta,\ P_y = -P.$$

Так как данная система сходящихся сил является плоской, то условия равновесия (4) имеют вид

1) $N\cos\alpha - T\sin\beta = 0,$

2) $N\sin\alpha + T\cos\beta - P = 0.$

Умножив первое уравнение на $\cos\beta$, а второе на $\sin\beta$ и сложив их, получим

$$N = \frac{P\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}.$$

Затем из первого уравнения находим

$$T = \frac{P\cos\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}.$$

В случае, когда веревка, удерживающая шар, параллельна наклонной плоскости $(\beta = \alpha)$, получим

$$N = P\sin\alpha,\ T = P\cos\alpha.$$

Для решения этой же задачи графическим способом, необходимо построить замкнутый силовой многоугольник. Построение силового многоугольника всегда нужно начинать с известных, заданных сил. Из произвольной точки a (рис.5б) проведем вектор $\overline{ab}$, параллельный данной силе $\overline{P}$, длина которого в выбранном масштабе изображает модуль этой силы. Затем через точки a и b проводим прямые, параллельные линиям действия искомых сил $\overline{T}$ и $\overline{N}$, которые пересекутся в точке c. Векторы $\overline{bc}$ и $\overline{ca}$ определяют искомые силы $\overline{N}$ и $\overline{T}$.Чтобы найти направление искомых сил на силовом треугольнике , нужно обойти этот треугольник по его периметру, причем направление этого обхода определяется направлением данной силы $\overline{P}$. Измерив длину сторон $\overline{ac}$ и $\overline{bc}$ и зная масштаб, в котором построена сила $\overline{P}$, найдем численные значения сил $\overline{T}$ и $\overline{N}$.

1.2. Система параллельных сил

Пусть на твердое тело действуют две параллельные силы $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$, направленные в одну сторону (рис.6).

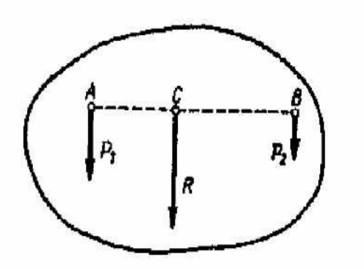


Рис.6

Равнодействующая $\overline{R}$ двух параллельных сил, направленных в одну сторону, параллельна этим силам и направлена в ту же сторону; модуль равно-действующей равен сумме модулей данных сил, а линия действия равнодействующей делит расстояние между точками приложения данных сил внутренним образом на части, обратно пропорциональные модулям этих сил, т.е.

$$R = P_1 + P_2;\ AC / BC = P_2 / P_1.$$

Используя известное свойство пропорции, можно получить

$$AC / P_2 = BC / P_1 = AB / R.$$

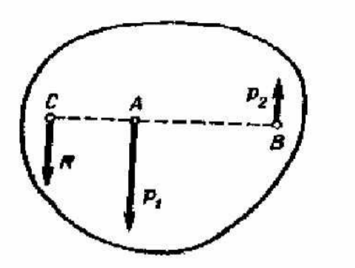


Рис.7

Пусть теперь имеем две параллельные силы $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$, приложенные в точках A и B и направленные в противоположные стороны; такие силы называются антипараллельными (рис.7). Предположим, что $\overline{P}_1 > \overline{P}_2$.

Равнодействующая $\overline{R}$ двух антипараллельных сил параллельна этим силам и направлена в сторону большей силы; модуль равнодействующей равен разности модулей данных сил, а линия ее действия делит расстояние между точками приложения данных сил внешним образом на части, обратно пропорциональные модулям этих сил, т.е.

$$R = P_1 - P_2;\ AC / BC = P_2 / P_1 \text{ и } AC / P_2 = BC / P_1 = AB / R.$$

Как видно, в этом случае линия действия равнодействующей $\overline{R}$ проходит через точку, лежащую вне отрезка AB, и притом ближе к большей силе.

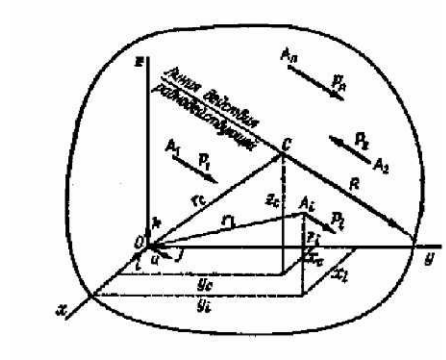


Рис.8

Рассмотрим систему параллельных сил $\overline{P}_1, \overline{P}_2, ...\overline{P}_n$, приложенных в точках $A_1, A_2, ...A_n$, приводящуюся к равнодействующей $\overline{R}$, приложенной в точке C (рис.8).

Положение центра параллельных сил C определится его радиусом-вектором $\overline{r}_c$ относительно начала координат O или тремя координатами x_c, y_c, z_c. Положение точки приложения каждой силы $\overline{P}_i$ определяется радиусом-вектором $\overline{r}_i$ или координатами $x_i, y_i, z_i (i = 1,2,...n)$.

Опуская выкладки, приведем формулу, определяющую радиус-вектор центра параллельных сил

$$\overline{r}_c = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i P_i / \sum P_i \tag{5}$$

Спроектировав равенство (5) на оси координат, получим формулы для определения координат центра параллельных сил

$$x_c = \sum x_i P_i / \sum P_i;\quad y_c = \sum y_i P_i / \sum P_i;\quad z_c = \sum z_i P_i / \sum P_i \tag{6}$$

В формулах (6) координаты x_i, y_i, z_i и значения сил P_i являются алгебраическими величинами. Заметим, что выбор направления, вдоль которого параллельные силы считаются положительными, произволен и на результатах вычисления координат по формулам (6) не отражается.

Пусть даны параллельные силы $\overline{P}_1, \overline{P}_2, ...\overline{P}_n$, расположенные на плоскости xy, и приложенные в точках $A_1, A_2, ...A_n$. Приведем силы к произвольному центру O (рис.9). Получим в этом центре силу $\overline{R}^*$, равную главному вектору, и пару сил с моментом M, равным главному моменту параллельных сил относительно центра приведения

$$\overline{R}^* = \sum \overline{P}_i;\quad M = \sum M_{io} \tag{7}$$

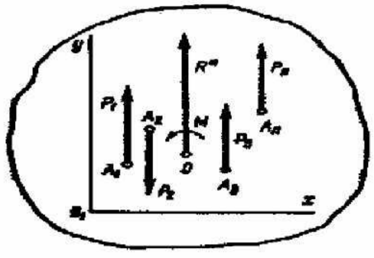


Рис.9

Для системы параллельных сил на плоскости имеем два условия равновесия

$$M = 0 \text{ и } \overline{R}^* = 0 \tag{8}$$

Так как ось Y направлена параллельно силам, то из (7) и (8) уравнения равновесия для данной системы сил можно выразить в виде двух уравнений

$$\sum M_{io} = 0; \quad \sum P_{iy} = 0 \tag{9}$$

Уравнения (9) называются основными уравнениями равновесия параллельных сил на плоскости. Центр моментов для этой системы уравнений можно выбирать произвольно.

Для пространственной системы сил, параллельных, например, оси Z, имеем три уравнения равновесия

$$\sum M_{ix} = 0; \quad \sum M_{iy} = 0; \ \sum P_{iz} = 0.$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2. На тело действуют пять параллельных сил, имеющих модули $10H$, $15H$, $30H$, $15H$ и $10H$, приложенных соответственно в точках $A_1(1,2,3)$, $A_2(2,3,1)$, $A_3(3,1,2)$, $A_4(0,1,1)$ и $A_5(1,-1,0)$, причем первые четыре силы направлены в одну и ту же сторону, а последняя - в противоположную сторону. Найти координаты центра этой системы сил.

Решение. Полагая в формулах (6) для координат центра параллельных сил $P_1 = 10H$, $P_2 = 15H$, $P_3 = 30H$, $P_4 = 15H$, $P_5 = -10$ и $x_1 = 1, x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 0, x_5 = 1$, получим

$$X_C = \frac{10\cdot 1 + 15\cdot 2 + 30\cdot 3 + 15\cdot 0 - 10\cdot 1}{10 + 15 + 30 + 15 - 10} = 2.$$

Аналогично, найдем две другие координаты точки C

$$Y_C = 2; \quad Z_C = 2.$$

Пример 3. К горизонтальной балке, лежащей на двух опорах, приложены вертикальные силы $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ и $\overline{F}_3$. Расстояния точек приложения этих сил от опор и расстояние между опорами указаны на рис.10. Определить реакции опор.

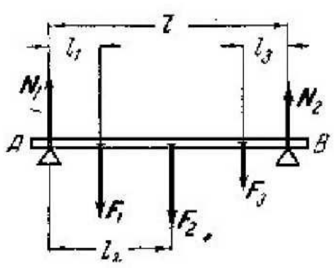


Рис.10

Решение. Обозначим реакции опор через $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$. Поскольку балка находится в равновесии, направив ось Ay вертикально вверх, составим уравнения равновесия (9) для данной задачи

1) $\sum M_{iA} = 0 \quad \ell N_2 - \ell_1 F_1 - \ell_2 F_2 - (\ell - \ell_3) F_3 = 0$

2) $\sum F_{iy} = 0 \quad N_1 - F_1 - F_2 - F_3 + N_2 = 0$

Из первого уравнения получим

$$N_2 = \frac{\ell_1}{\ell} F_1 + \frac{\ell_2}{\ell} F_2 + (1 - \frac{\ell_3}{\ell}) F_3.$$

Подставив значение N_2 во второе уравнение, найдем N_1

$$N_1 = (1 - \frac{\ell_1}{\ell}) F_1 + (1 - \frac{\ell_2}{\ell}) F_2 + \frac{\ell_3}{\ell} F_3.$$

Список рекомендуемой литературы

1. Воронков И.М. Курс теоретической механики.-М., 1964. Главы 2, 3.

2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики.-М., 1986. Главы 2, 8.

3. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. –М., 2004. Ч.1. Главы 2, 3.

4. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике.-М., 1986 и последующие издания.

5. Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике.-М., 1985 и последующие издания.

6. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. – М., 1975. Ч.1. Глава 1, § 1,2.

Требования к студентам

Задачи, рекомендуемые для практических занятий [4]: №№ 2.6, 2.10, 2.15, 2.20, 2.29, 3.2, 3.4, 3.8, 3.12, 3.15, 6.3, 6.6, 6.8, 6.10.

Задания для самостоятельной работы в форме расчетно-графических работ: Задание С-3 из [5] или аналогичное задание из методических разработок кафедры.

Студент должен знать:

Что такое сходящаяся система сил?.

Чему равна равнодействующая двух пересекающихся сил?

Чему равна равнодействующая трех пересекающихся сил, не лежащих в одной плоскости?

Как определяется равнодействующая сходящейся системы сил графи-ческим способом?

Каково условие равновесие сходящейся системы сил в геометрической форме?

Каковы условия равновесия сходящейся системы сил в аналитической форме?

О чем гласит теорема о трех силах?

Чему равна равнодействующая двух сонаправленных параллельных сил?

Что называется антипараллельными силами и чему равна их равнодействующая?

Что такое центр параллельных сил и как определяются его координаты?

Каковы условия равновесия плоской системы параллельных сил?

Каковы условия равновесия пространственной системы параллельных сил?

Студент должен уметь:

1. Находить равнодействующую плоской сходящейся системы сил построением силового многоугольника.

2. Составлять и решать уравнения равновесия сходящейся системы сил в задачах статики.

Определять модуль и точку приложения равнодействующей двух сонаправленных и антипараллельных сил.

Определять координаты центра системы параллельных сил.

Составлять и решать уравнения равновесия системы параллельных сил в задачах статики.

Тесты 1 модуля

Модуль равнодействующей двух равных по модулю (5 Н) сходящихся сил, образующих между собой угол 45°, равен…

9,24 5,73 4,87 8,21 6,38

Для плоской системы сходящихся сил: $\vec{F}1 = 3\vec{i} + 4\vec{j}$; $\vec{F}2 = 5\vec{j}$ и

$\vec{F}3 = 2\vec{i}$, модуль равнодействующей силы равен…

5,89 9,31 7,35 10,3 8,57

Равнодействующая сходящихся сил F1 и F2 равна по модулю 8 Н и образует с горизонтальной осью Ox угол 30°. Вектор силы $\vec{F}1$ направлен по оси Ox, а вектор $\vec{F}2$ образует с этой осью угол 60°, тогда модуль силы $\vec{F}1$ равен…

5,97 4,62 7,39 3,85 6,71

На закрепленную балку действует плоская система параллельных сил. Тогда количество независимых уравнений равновесия балки будет равно…

1 2 3 4 5

К телу приложены четыре силы, параллельные оси Ox:

$\vec{F}1 = \vec{F}2 = -5\vec{i}$ и $\vec{F}3 = \vec{i}$, тогда при равновесии значение силы $\vec{F}4$ равно…

7 9 6 8 5

Плоская система трех сил находится в равновесии. Заданы модули сил F1 = 3 Н и F2 = 2 Н, а также углы, образованные векторами сил $\vec{F}1$ и $\vec{F}2$ с положительным направлением горизонтальной оси Ox, соответственно равные 15° и 45°. Тогда модуль силы $\vec{F}3$ равен…

2,54 3,96 5,12 6,38 4,84

Даны проекции силы на оси координат: Fx =20 Н, Fy =25 Н,

Fz =30 Н. Тогда модуль этой силы равен…

43,9 32,8 51,6 29,8 39,6

Две силы $\vec{F}1 = 5\vec{i} + 7\vec{j} + 9\vec{k}$ и $\vec{F}2 = 4\vec{i} + 9\vec{j} + 11\vec{k}$ приложены в центре О системы прямоугольных координат Oxyz. Тогда модуль равнодействующей силы равен…

31,2 27,1 19,5 22,7 33,8

14

Три вертикальных троса удерживают конструкцию весом 6 кН. Если натяжения двух тросов равны 1,75 кН, то натяжение третьего троса в кН равно…

2,5 3,2 1,9 2,9 3,1

Четыре вертикальных троса удерживают конструкцию весом

1 кН. Если натяжения трех тросов равны 0,25 кН, то натяжение четвертого троса в кН равно…

0,35 0,15 0,25 0,5 0,75

Задана проекция Rx = 5 Н равнодействующей двух сходящихся сил $\vec{F}1$ и $\vec{F}2$ на горизонтальную ось Ox. Проекция силы $\vec{F}1$ на эту же ось равна 7 Н. Тогда алгебраическое значение проекции на ось Ox силы $\vec{F}2$ равно…

- 1 2 1 -2 3

Силы F1 = F2 = 10 Н и $\vec{F}3$ находятся в равновесии. Линии действия сил между собой образуют углы по 120°. Тогда модуль силы $\vec{F}3$ равен…

9 8 7 11 10

Даны три сходящиеся силы. Заданы их проекции на оси кордит: F1x = 7 Н; F1y = 10 Н; F1z = 0 Н; F2x = - 5 Н; F2y = 15 Н; F2z = 12 Н;

F3x = 6 Н; F3y = 0 Н; F3z = - 6 Н. Тогда модуль равнодействующей этих сил равен…

26,9 21,8 32,6 19,7 31,1

Дана сила $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$. Тогда косинус угла между вектором этой силы и осью координат Oz равен…

0,498 0,856 0,707 0,652 0,593

Дана сила $\vec{F} = 3\vec{i} + 2{,}45\vec{j} + 7\vec{k}$. Тогда косинус угла между вектором этой силы и осью координат Ox равен…

0,798 0,156 0,707 0,375 0,693

Модуль 2

В этом модуле рассматриваются явление трения скольжения и способы определения центра тяжести твердых тел. Приводятся основные понятия и соотношения, которые с достаточной для практики точностью отражают основные особенности явления трения. Выводятся также формулы для определения координат центра тяжести тел и фигур различной формы. Приведены примеры решения задач.

2.1. Равновесие тел с учетом трения

Сопротивление, возникающее при скольжении одного тела по поверх-ности другого, называется трением скольжения.

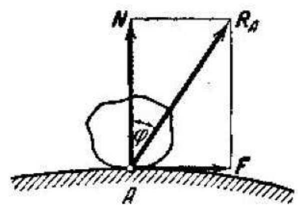


Рис. 1

Опыты показывают, что реакция $\overline{R}_A$ неподвижной поверхности образует с нормалью к этой поверхности некоторый угол φ (рис.1), так что эту силу можно разложить на две составляющие: 1) силу $\overline{N}$, направленную по нормали к опорной поверхности и называемую нормальной реакцией, и 2) силу $\overline{F}$, лежащую в плоскости, касательной опорной поверхности, и противодействую-щую скольжению тела по этой поверхности. Эта сила $\overline{F}$ называется силой трения скольжения.

Модуль силы трения в покое может иметь любое значение, заключающееся между нулем и некоторым максимальным значением F_{max}, зависящим от условий опыта. Сила трения, проявляющаяся при покое тела, называется силой трения в покое или силой статического трения.

На основании многочисленных опытов установлено, что максимальная величина силы трения в покое прямо пропорциональна нормальной реакции. Если перейти к равенству, получим

$$F_{max} = fN \text{ , (1)}$$

где f - коэффициент пропорциональности, называемый статическим коэф-фициентом трения скольжения. Величина этого коэффициента зависит от материала трущихся тел, а также от состояния их поверхностей (степени шероховатости, влажности, температуры). Из (1) следует, что коэффициент трения скольжения есть число отвлеченное, т.е. не имеет размерности.

При изучении трения твердых тел, кроме коэффициента трения, важную роль играет также угол трения. Пусть твердое тело покоится на неподвижной поверхности и $\overline{R}_A$ есть равнодействующая сил $\overline{N}$ и F_{max}, т.е. полная реакция

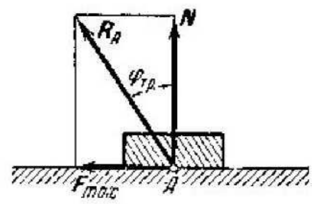


Рис.2

опорной поверхности в точке A (рис.2). Угол φ_{mp} между силой $\overline{R}_A$ и нормалью к опорной поверхности называется углом трения.

Из прямоугольного треугольника имеем

$$tg\varphi_{mp} = \frac{F_{max}}{N} = f,$$

т.е. тангенс угла трения равен коэффициенту трения.

Геометрическое место прямых линий, проведенных из точки A под углом φ_{mp} к нормали n опорной поверхности в точке A, образует коническую поверхность, которая называется конусом трения (рис.3).

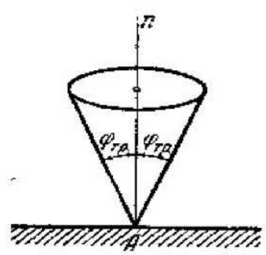


Рис.3

Заметим, что полная реакция опорной поверхности не может быть направлена по прямой, лежащей вне конуса трения.

Аналитический метод решения задач о равновесии твердого тела при наличии трения остается таким же, как и в тех случаях, когда трением пренебрегаем. Различие состоит лишь в том, что в уравнениях равновесия появляются, кроме нормальных реакций, силы трения.

Рассмотрим примеры решения задач.

Пример 1. Плоскость OA может вращаться на шарнире O, так что ее можно установить под любым углом α к горизонту. На эту плоскость положено тело весом P (рис.4). При каком угле α тело будет оставаться в равновесии?

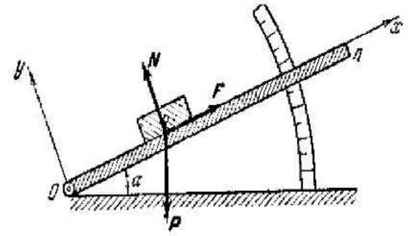


Рис. 4

Решение. Обозначим через $\overline{N}$ нормальную реакцию плоскости и через $\overline{F}$ силу трения. Составим два уравнения равновесия для сходящейся системы сил $(\overline{N}, \overline{F}, \overline{P})$, спроектировав их на оси Ox и Oy

$$F - P\sin\alpha = 0,\ N - P\cos\alpha = 0.$$

Из этих уравнений получим

$$tg\alpha = \frac{F}{N}.$$

Наибольшее значение, которого может достигнуть сила трения в покое, равно

$$F_{max} = fN.$$

Поэтому $F \le fN$, а следовательно

$$tg\alpha \le \frac{fN}{N},\ \text{или}\ tg\alpha \le f.$$

Так как $f = tg\varphi_{тр}$, то $tg\alpha \le tg\varphi_{тр}$ или $\alpha \le \varphi_{тр}$.

Отсюда заключаем, что тело будет оставаться в равновесии до тех пор, пока угол наклона плоскости не превышает угла трения.

Заметим, что при помощи прибора, изображенного на рис.4, можно определить коэффициент трения.

Пример 2. На рис. 5 показана схема колодочного тормоза. Найти наименьшее значение силы $\overline{P}$, необходимое для того, чтобы затормозить шкив O_1. Коэффициент трения между тормозной колодкой и поверхностью шкива равен f. Нужные размеры указаны на чертеже.

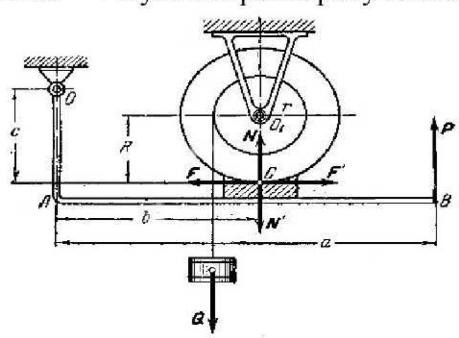


Рис.5

Решение. Приложенные к шкиву в точке C нормальное давление и силу трения обозначим через $\overline{N}$ и $\overline{F}$. В той же точке C к тормозной колодке приложены нормальная реакция $\overline{N}'$ и сила трения $\overline{F}'$, равные по модулю и противоположные по направлению силам $\overline{N}$ и $\overline{F}$. Напишем условия равновесия для шкива и для рычага OAB в отдельности, приравняв нулю сумму моментов всех сил, приложенных к шкиву, относительно точки O_1 и сумму моментов сил, приложенных к рычагу, относительно точки O. Получим два уравнения

$$rQ - RF = 0, \quad cF' + aP - bN' = 0.$$

Положим $F = kN$, где $k \le f$. Подставив это значение F в эти уравнения и заменив N' и F' через N и F, получим

$$kRN = rQ, \quad aP = bN - ckN = (b - ck)N.$$

Определив величину N из первого уравнения и подставив ее значение во второе уравнение, найдем

$$P = \frac{Qr}{aR}\left(\frac{b}{k} - c\right).$$

Как видно из формулы, с увеличением коэффициента k величина P уменьшается и когда k достигает наибольшего значения f, сила P будет иметь наименьшее значение. Следовательно, окончательно получим

$$P_{min} = \frac{Qr}{aR}\left(\frac{b}{f} - c\right).$$

2.2. Центр тяжести

Представим себе какое-нибудь твердое тело, находящееся близ поверхности Земли (рис.6).

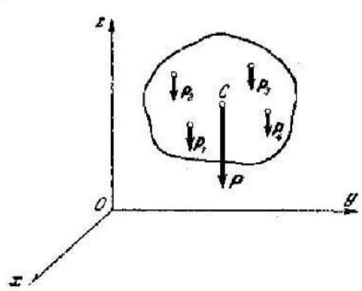


Рис.6

Силы притяжения $\overline{P}_i$ отдельных частиц тела к Земле направлены приблизительно к центру Земли. Так как размеры рассматриваемых тел малы по сравнению с радиусом Земли, то эти силы можно считать параллельными. Центр C этой системы параллельных сил называется центром тяжести данного тела, а равнодействующая этих сил $\overline{P} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i$, проходящая через точку C, представляет собой вес этого тела.

Так как центр тяжести тела есть центр параллельных сил, то для вычисления координат центра тяжести тела можно воспользоваться формулами, приведенными в предыдущем модуле

$$x_C = \sum P_i x_i / P, \quad y_C = \sum P_i y_i / P, \quad z_C = \sum P_i z_i / P \qquad (2)$$

где x_i, y_i, z_i - координаты любой частицы твердого тела.

Заметим, что в (2) алгебраическими величинами являются только координаты точек, а значения P_i всегда положительны, так как все силы направлены в одну сторону.

Обозначим объемы элементарных частиц через $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots$, а вес единицы объема тела через γ. Если тело однородно, то получим

$$P_1 = \gamma \Delta V_1, \quad P_2 = \gamma \Delta V_2, \ldots\ldots$$

Подставив эти значения сил P_i в формулы (2), будем иметь

$$x_C = \sum x_i \Delta V_i / V, \quad y_C = \sum y_i \Delta V_i / V, \quad z_C = \sum z_i \Delta V_i / V, \qquad (3)$$

где $V = \sum \Delta V_i$ - объем всего тела.

Для получения точных формул координат центра тяжести однородного тела, нужно в формулах (3) перейти к пределу, полагая, что число элементарных частиц неограниченно возрастает, а объем ΔV_i каждой частицы стремится к нулю

$$x_C = \lim \sum x_i \Delta V_i / V, \quad y_C = \lim \sum y_i \Delta V_i / V, \quad z_C = \lim \sum z_i \Delta V_i / V. \qquad (4)$$

Если имеем однородное тело, имеющее форму тонкой пластинки, то его можно рассматривать как материальную плоскую фигуру, положение центра тяжести которой определяется двумя координатами x_C и y_C (рис.7).

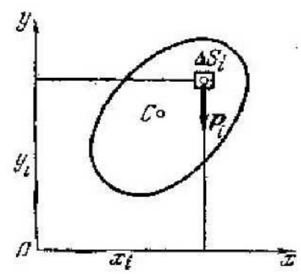


Рис.7

В этом случае вместо элементов объема ΔV_i нужно брать элементы площади ΔS_i, а в знаменателе вместо V - площадь S данной фигуры. Следовательно, для координат центра тяжести плоской фигуры будем иметь

$$x_C = \lim \sum x_i \Delta S_i / S, \quad y_C = \lim \sum y_i \Delta S_i / S. \qquad (5)$$

Аналогично, для координат центра тяжести однородной плоской материальной линии AB (например, тонкой проволоки, согнутой в виде плоской кривой), получим

$$x_C = \lim \sum x_i \Delta \ell_i / \ell, \quad y_C = \lim \sum y_i \Delta \ell_i / \ell, \qquad (6)$$

где $\Delta \ell_i$ - длина элементарной дуги данной линии, а ℓ - вся длина этой линии (рис.8).

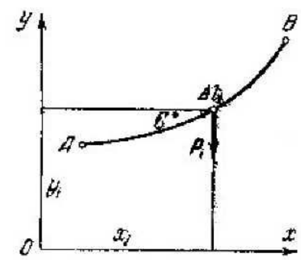


Рис.8

Следует отметить, что центр тяжести C кривой линии вообще не лежит на этой линии. Вычисление пределов сумм, входящих в полученные формулы (4), (5) и (6), производится в общем случае методами интегрального исчисления; эти пределы выражаются определенными интегралами, распространенными соответственно на весь объем тела или на всю площадь фигуры или же взятыми вдоль данной линии. Однако, как увидим ниже, если тело имеет простую геометрическую форму, то положение его центра тяжести можно определить элементарным путем.

Приведем вспомогательную теорему для определения положения центра тяжести: если однородное тело имеет плоскость, или ось, или центр симметрии, то центр тяжести такого тела лежит соответственно в этой плоскости, на этой оси или в этом центре симметрии.

Теперь перейдем к определению положения центра тяжести плоской фигуры сложной формы. Пусть требуется определить положение центра тяжести плоской фигуры, состоящей из трех частей, положение центров тяжести которых известно (рис.9).

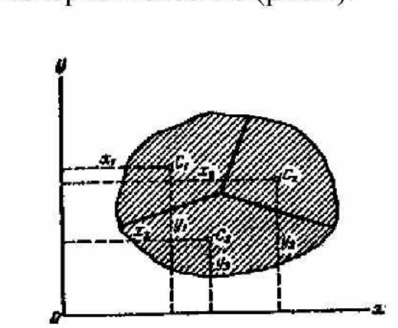


Рис.9

Положим, что площади частей фигуры соответственно равны S_1, S_2, S_3, а координаты их центров тяжести C_1, C_2 и C_3 будут x_1, y_1, x_2, y_2 и x_3, y_3. Тогда координаты ее центра тяжести C определятся формулами

$$x_C = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S}; \quad y_C = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3}{S}. \quad (7)$$

Этими формулами удобно пользоваться и при определении положения центра тяжести плоской фигуры, из которой вырезана некоторая часть (рис.10).

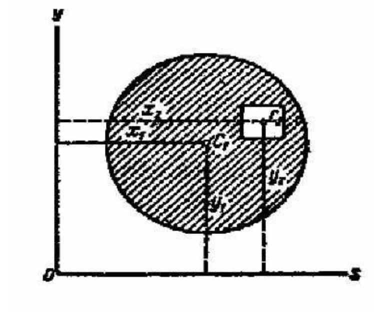


Рис.10

В этом случае координаты центра тяжести выражаются формулами

$$x_C = \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2}{S_1 - S_2}, \quad y_C = \frac{S_1 y_1 - S_2 y_2}{S_1 - S_2}, \quad (8)$$

где S_1 и S_2 - площади соответственно всей фигуры и вырезанной из нее части, а x_1, y_1 и x_2, y_2 - координаты их центров тяжести.

Этот способ определения центра тяжести плоской фигуры называется способом отрицательных площадей.

В заключении приведем формулы для определения положения центров тяжести некоторых фигур.

а) Центр тяжести площади треугольника

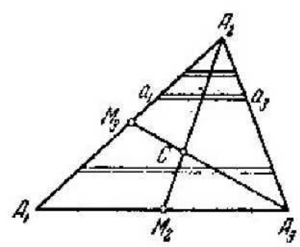


Рис.11

Центр тяжести C площади треугольника совпадает с точкой пересечения его медиан $\left(CM_2 = \frac{A_2 M_2}{3} \right)$.

Если обозначить координаты вершин данного треугольника через (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), то для координат x_C и y_C его центра тяжести получим

$$x_C = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_C = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}. \quad (9)$$

б) Центр тяжести дуги окружности (дуга AB)

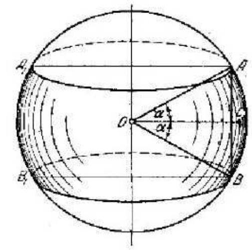


Рис.12

$$OC = R\frac{\sin\alpha}{\alpha} \tag{10}$$

где α - половина центрального угла дуги AB, измеряемого в радианах.

в) Центр тяжести площади кругового сектора (AOB)

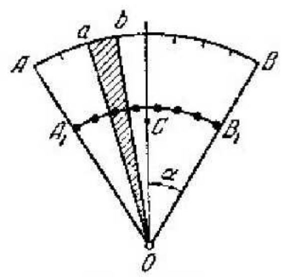


Рис.13

$$OC = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha} \tag{11}$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 3. Найти центр тяжести фигуры, состоящей из полукруга радиуса R и прямоугольника со сторонами $2R$ и h (рис. 14)

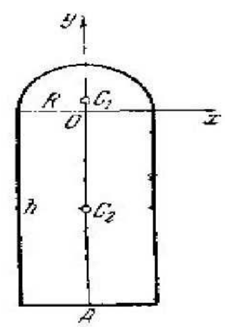


Рис.14

Решение. Возьмем начало координат в геометрическом центре O полу-круга и направим координатные оси, как указано на чертеже. Так как ось y является для данной фигуры осью симметрии то, согласно вышеприведенной теореме, искомый центр тяжести лежит на этой оси и, следовательно, $x_C = 0$. Остается найти y_C. Разобъем фигуру на две части: полукруг и прямоугольник. Центры тяжести этих частей обозначим через C_1 и C_2. Точка C_2 лежит в середине отрезка OA. Точка C_1 находится от точки O на расстоянии OC_1, равном, согласно формуле (11), $4R/3\pi$. Тогда, согласно формулам (7), имеем

$$y_C = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2}{S_1 + S_2}$$

Здесь S_1 и S_2 - площади полукруга и прямоугольника, а y_1 и y_2 - ординаты точек C_1 и C_2. Следовательно,

$$S_1 = \frac{\pi R^2}{2};\ y_1 = \frac{4R}{3\pi};\ S_2 = 2Rh;\ y_2 = -\frac{h}{2}.$$

Тогда, окончательно получим

$$y_C = \frac{2(2R^2 - 3h^2)}{3(\pi R + 4h)}.$$

Пример 4. Определить положение центра тяжести фигуры, представ-ляющей собой круг радиуса R, из которого вырезан круг меньшего радиуса r, причем расстояние между центрами кругов $OO_1 = a$ (рис.15).

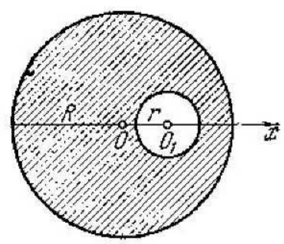


Рис.15

Решение. Искомый центр тяжести лежит на оси симметрии Ox, проходящей через центры кругов O и O_1; начало координат возьмем в центре большого круга. Площадь первого круга $S_1 = \pi R^2$, центр тяжести которого совпадает с началом координат O, т.е. $x_1 = O$. Центр тяжести второго круга совпадает с точкой O_1, абсцисса которой $x_2 = a$. Так как площадь S_2 маленького круга будет отниматься, то ее нужно брать со знаком минус, т.е. $S_2 = -\pi r^2$.

Абсцисса x_2 искомого центра тяжести определяется по формуле (7)

$$x_C = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2}.$$

Окончательно получим

$$x_C = -\frac{ar^2}{R^2 - r^2}.$$

Список рекомендуемой литературы

1. Воронков И.М. Курс теоретической механики.- М., 1964. Главы 6, 10.

2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М., 1986. Главы 6, 8.

3. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. – М., 2004. Ч.1. Главы 5А,6.

4. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М., 1986 и последующие издания.

5. Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. – М., 1978 и последующие издания.

6. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах.- М., 1975. Ч.1. Глава 1, § 4; Глава 2, § 3.

Требования к студентам

Задачи, рекомендуемые для практических занятий [4]: №№ 5.4, 5.7, 5.25, 5.26, 5.28, 5.31, 9.1, 9.3, 9.6, 9.10, 9.12, 9.14.

Задания для самостоятельной работы в форме расчетно-графических работ: Задание С-7 из [5] или аналогичное задание из методических разработок кафедры.

Студент должен знать

Что называется трением скольжения?

Какова зависимость между силой трения и нормальной реакцией?

От чего зависит значение коэффициента трения скольжения?

Что такое угол трения?

Что такое конус трения?

Что такое центр тяжести?

Вспомогательную теорему для определения положения центра тяжести.

Формулы для определения положения центра тяжести плоской фигуры сложной формы.

Студент должен уметь

Определять правильное направление силы трения скольжения.

Составлять уравнения равновесия в задачах о равновесии твердого тела с учетом сил трения.

Определять координаты центров тяжести линий, плоских фигур и тел, пользуясь соответствующими формулами.

Определять положение центра тяжести плоских фигур сложной формы, разбиением их на более простые фигуры.

Тесты 2 модуля

На наклонной плоскости лежит груз. Коэффициент трения скольжения равен 0,6. Если груз находится в покое, то максимальный угол наклона плоскости к горизонту в градусах равен…

39 37 25 31 44

Цилиндр весом 520 Н лежит на горизонтальной плоскости. Коэффициент трения качения равен 0,007 м. Для того, чтобы цилиндр катился, необходим наименьший модуль момента пары сил, равный…

3,64 2,75 4,82 5,02 1,63

Координаты точек А и В прямолинейного стержня АВ:

xA = 10 см, xB = 40 см. Тогда координата xC центра тяжести стержня АВ в см равна…

31 20 25 17 35

Однородная пластина имеет вид прямоугольного треугольника АВД. Известны координаты вершин xA = xB = 3 см, xД = 9 см. Тогда координата центра тяжести xC пластины в см равна…

4 5 6 7 8

Высота однородной пирамиды 0,8 м. Тогда расстояние от центра тяжести пирамиды до ее основания равно…

0,4 0,5 0,6 0,3 0,2

Коэффициент трения скольжения равен 0,3. Тогда тело начнет скользить вверх по наклонной плоскости (угол наклона к горизонту равен 30°) под действием силы равной 90 Н, если его вес будет равен…

118 97 105 128 130

Полый треугольник АВД с углом при вершине Д равным 30° имеет координаты вершин: xA = 0; yA = 0; xB = 2 м; yB = 0; xД = 0. Тогда координата xC центра тяжести треугольника равна…

0,542 0,412 0,873 0,634 0,729

Высота однородной пирамиды 1,2 м. Тогда расстояние от центра тяжести пирамиды до ее основания равно…

0,4 0,5 0,6 0,3 0,2

Однородный брус АВ опирается в точке А на гладкую стену, а в точке В под 450 на негладкий пол. Тогда наименьший коэффициент трения скольжения между брусом и полом, при котором брус останется в указанном положении в покое, равен…

0,4 0,5 0,6 0,3 0,2

26

К телу весом 200 Н, который лежит на горизонтальной поверхности, привязана горизонтальная веревка. Коэффициент трения скольжения равен 0,2. Для того, чтобы тело начало скользить по поверхности, необходимо натяжение веревки, равное…

40 53 32 49 37

К однородному катку на горизонтальной поверхности весом 4 кН приложена пара сил с моментом 20 Н• м. Тогда наименьший коэффициент трения качения, при котором каток находится в покое, равен…

0,004 0,005 0,003 0,006 0,002

Четверть дуги окружности АВ радиуса 20 см располагается в первой четверти декартовой системы координат Оxy. Координаты точек: xA = 20; yA = 0; xB = 0; yB = 20. Тогда координата yC в см центра тяжести этой дуги равна…

6,82 12,74 9,54 7,78 8,91

Контур половины диска ОА радиуса 1,03 м располагается в первой четверти декартовой системы координат Оху так, что основание этого контура ОА лежит на оси Ох. Координаты точек: xA = 2,06;

yA = 0; xO = 0 ; yO = 0. Тогда координата yC в м центра тяжести этого контура равна…

1,23 1,01 0,4 0,7 0,9

Расстояние от основания круглого однородного конуса (радиус основания равен 0,4 м, а угол при вершине конуса равен 90°) до его центра тяжести равно…

0,2 0,3 0,4 0,5 0,1

Наименьшее расстояние от дуги кругового сектора (получен делением диска радиуса 0,6 м на 6 равных секторов) до центра его тяжести равно…

0,218 0,314 0,193 0,295 0,164

Модуль 3

В настоящем модуле изучается движение точки, заданное в полярных координатах. Выводятся формулы для определения скорости и ускорения точки. В модуле рассмотрен также случай движения твердого тела, имеющего одну неподвижную точку (сферическое движение). Приводятся вспомогательная теорема и формулы для определения угловой скорости, а также линейных скоростей точек твердого тела. Рассмотрены примеры решения задач.

3.1. Задание движения точки в полярных координатах

Механическим движением называется перемещение тела по отношению к другому телу, происходящее в пространстве и во времени.

Изучение движения точки заключается в определении основных характеристик этого движения: положения точки в выбранной системе отсчета, ее скорости и ускорения в любой момент времени. Движение точки совершается в пространстве с течением времени. Пространство в механике рассматривается как трехмерное евклидово пространство. Время является скалярной, непрерывно изменяющееся величиной. В задачах кинематики время t принимают за независимое переменное (аргумент). Все другие переменные величины (расстояние, скорость и т.д.) рассматриваются как функции от времени.

Кинематически задать движение или закон движения точки – значит задать положение этой точки относительно данной системы отсчета в любой момент времени. Установление математических способов задания движения точек является одной из важных задач кинематики. Поэтому изучение движения любого объекта надо начинать с установления способов задания этого движения.

Существуют различные способы задания движения точки: естественный, векторный, координатный.

Рассмотрим случай, когда движение точки задается в полярных координатах. Пусть точка M движется все время в одной и той же плоскости. Тогда ее положение можно определить полярными координатами r и φ (рис.1)

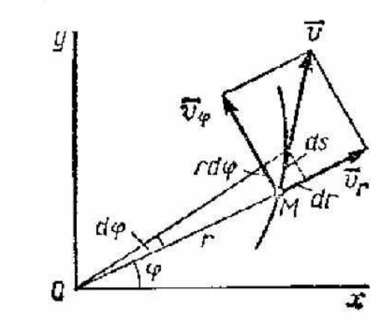


Рис.1

При движении точки M эти координаты с течением времени изменяются. Следовательно, закон движения точки в полярных координатах будет задаваться уравнениями

$$r = f_1(t),\quad \varphi = f_2(t).$$

Скорость точки M численно равна отношению элементарного перемеще-ния dS к промежутку времени dt, то есть dS/dt. В данном случае перемещение dS геометрически слагается из радиального перемещения, численно равного dr, и поперечного перемещения, перпендикулярного радиусу OM и численно равного $r \cdot d\varphi$. Следовательно, сама скорость $\overline{V}$ будет геометрически склады-ваться из радиальной скорости $\overline{V}_r$ и поперечной (трансверсальной) скорости $\overline{V}_\varphi$, численно равных

$$V_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}, \quad V_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi} \qquad (1)$$

Так как $\overline{V}_r$ и $\overline{V}_\varphi$ взаимно перпендикулярны, то модуль скорости точки $\overline{V}$ определится по формуле

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\varphi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) определяют скорость точки в полярных координатах при плоском движении.

Ниже приводятся (без вывода) формулы для определения проекций ускорения $\overline{a}$ на радиальное и трансверсальное направления, а также для определения его модуля

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}, \qquad (3)$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2} = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2}.$$

Рассмотрим пример решения задачи.

Пример 1. Точка M движется по эллипсу так, что угловая скорость радиуса-вектора ρ, соединяющего точку M с центром эллипса, постоянна и равна ω. Определить скорость этой точки.

Решение. Выразим декартовы координаты точки M через полярные координаты ρ и φ (рис.2).

$$x = \rho\cos\omega t, \quad y = \rho\sin\omega t, \text{ где } \omega t = \varphi.$$

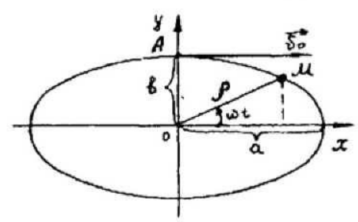


Рис. 2

Подставив эти значения в уравнение эллипса, получим

$$\frac{\rho^2\cos^2\omega t}{a^2} + \frac{\rho^2\sin^2\omega t}{b^2} = 1.$$

Из последнего равенства для радиуса-вектора имеем

$$\rho = \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\omega t + a^2\sin^2\omega t}}.$$

Воспользовавшись формулами (1) и (2), найдем радиальную и трансверсальную составляющие скорости

$$V_r = \frac{d\rho}{dt} = \frac{ab\omega(b^2 - a^2)\sin 2\omega t}{2(a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t)^{1,5}},$$

$$V_\varphi = \rho\dot{\varphi} = \rho\omega = \frac{\omega \cdot a \cdot b}{(a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{0,5}},$$

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\varphi^2}.$$

3.2. Сферическое движение твердого тела

Рассмотрим движение твердого тела, одна из точек которого во все время движения остается неподвижной. При таком движении все остальные точки тела движется по сферическим поверхностям, центры которых совпадают с неподвижной точкой. По этой причине рассматриваемое движение тела называется сферическим движением.

Для определения положения тела в каждый момент времени воспользуемся двумя системами осей координат: неподвижной системой $Oxyz$ с началом в неподвижной точке O и подвижной системой $Ox_1y_1z_1$, неизменно связанной с твердым телом, с началом в той же точке O (рис.3).

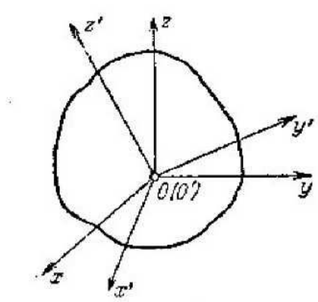


Рис.3

Положение данного тела в пространстве будет вполне определено, если будет известно положение подвижной системы осей $Ox_1y_1z_1$. Обозначим линию пересечения неподвижной плоскости Oxy и подвижной плоскости Ox_1y_1 через ON и установим на ней положительное направление (от O к N); эта прямая ON называется линией узлов (рис.4). Угол между осью Ox и линией узлов ON обозначим через ψ. Этот угол лежит, очевидно, в плоскости Oxy и отсчитывается от оси Ox в положительном направлении, т.е. против движения часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси z. Угол между осями z и z_1 обозначим через θ. Этот угол отсчитывается от оси z в направлении, обратном движению часовой стрелки, если смотреть с положительного конца линии узлов ON ($ON \perp$ пл. Ozz_1). Угол между ON и осью Ox_1 обозначим через φ. Этот угол лежит в плоскости Ox_1y_1 и отсчитывается от линии узлов против движения часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси z_1.

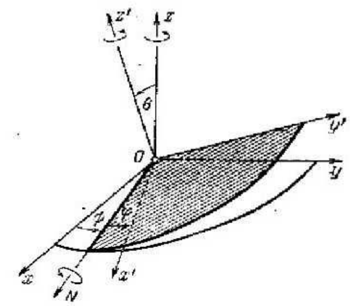


Рис.4

Заданием углов ψ, θ, φ однозначно определяется положение подвижной системы осей, связанной с твердым телом, а следовательно, и положение самого тела. Углы ψ, θ, φ называются эйлеровыми углами: ψ - угол прецессии, θ - угол нутации, φ - угол собственного вращения.

При движении твердого тела, одна из точек которого остается неподвижной, эти углы непрерывно изменяются во времени, т.е.

$$\psi = f_1(t),\ \theta = f_2(t),\ \varphi = f_3(t) \quad (4)$$

Уравнения (4), однозначно определяющие сферическое движение тела, называются уравнениями сферического движения твердого тела.

Для определения кинематических характеристик сферического движения тела (угловой скорости, скоростей его точек и т.д.) приведем теорему Эйлера-Даламбера (без доказательства): твердое тело, имеющее одну неподвижную точку, можно переместить из одного положения в любое другое поворотом вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку.

Рассмотрим малый промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$, за которое какая-нибудь точка твердого тела перемещается из положения M в положение M'. При этом тело повернулось на угол $\Delta\varphi$ вокруг некоторой оси OP^* (рис.5).

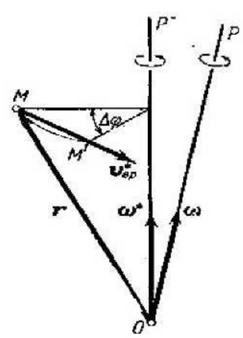


Рис.5

Уменьшая величину промежутка времени Δt, получаем ряд положений оси OP^*. Предельное положение этой оси OP при $\Delta t \to O$ называется мгновенной осью вращения тела для данного момента времени.

Предел, к которому стремится отношение $\Delta\varphi/\Delta t$, когда Δt стремится к нулю, называется угловой скоростью твердого тела в момент t

$$\omega = \lim \Delta\varphi/\Delta t \quad (5)$$

Вектор мгновенной угловой скорости $\overline{\omega}$ в данный момент откладывается по мгновенной оси OP от неподвижной точки O в такую сторону, чтобы, смотря этому вектору навстречу, видеть вращение тела происходящим против движения часовой стрелки. Мгновенная ось вращения представляет собой геометрическое место точек тела, скорости которых в данный момент равны нулю.

Линейная скорость точки M тела в момент времени t определяется по формуле $\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{r}$, (6)

где - $\overline{r}$ - радиус-вектор точки M, проведенный из неподвижной точки O.

Из (6) следует, что модуль скорости точки M тела равен $V = \omega r \sin\gamma$, где γ - угол между радиусом-вектором $\overline{r}$ и мгновенной осью вращения OP. Но $r\sin\gamma = h$, где h - расстояние от точки M до оси OP, т.е. мгновенный радиус вращения точки M. Тогда, окончательно имеем

$$V = \omega h. \quad (7)$$

Вектор скорости точки M перпендикулярен к плоскости, проходящей через эту точку и мгновенную ось вращения тела.

Проекции скорости точки на неподвижные оси координат определяются по формулам Эйлера

$$V_x = \omega_y z - \omega_z y,$$

$$V_y = \omega_z x - \omega_x z, \quad (8)$$

$$V_z = \omega_x y - \omega_y x.$$

Здесь: x, y и z - координаты точки M; ω_x, ω_y и ω_z - проекции вектора угловой скорости $\overline{\omega}$ на неподвижные оси координат.

В заключении приводим уравнения мгновенной оси вращения в неподвижной системе осей

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}. \quad (9)$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2. Твердое тело движется вокруг неподвижной точки O, принятой за начало координат, причем проекции вектора угловой скорости тела на неподвижные координатные оси заданы в виде:

$$\omega_x = 5\sin(\pi t/2), \quad \omega_y = 5\cos(\pi t/2), \quad \omega_z = 5\sqrt{3}.$$

Найти в момент $t = 1c$ скорость точки M тела, а также расстояние от нее до мгновенной оси. Координаты точки M в этот момент равны $x = 0,\ y = 0{,}2м$ и $z = 0{,}3м$.

Решение. Найдем значения проекций угловой скорости при $t = 1c$.

$$\omega_x = 5\sin\pi/2 = 5, \quad \omega_y = 5\cos\pi/2 = 0, \quad \omega_z = 5\sqrt{3}.$$

Проекции скорости точки M находим по формулам (8)

$$V_x = \omega_y z - \omega_z y = -\sqrt{3}\ м/с,$$

$$V_y = \omega_z x - \omega_x z = -1{,}5\ м/с,$$

$$V_z = \omega_x y - \omega_y x = 1\ м/с.$$

Модуль скорости точки M будет равен

$$V=\sqrt{V_x^2+V_y^2+V_z^2}=\sqrt{6{,}25}=2{,}5\ м/с$$

По заданным проекциям угловой скорости найдем ее модуль

$$\omega=\sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2}=10c^{-1}$$

Из формулы (7) для расстояния от точки M до мгновенной оси вращения получим $h=V/\omega=0{,}25м$

Пример 3. Конус с углом при вершине 60^0 и радиусом основания $r=20см$ катится по неподвижной горизонтальной плоскости без скольжения. Скорость центра основания постоянна и равна $V_C=60см/с$. Определить угловую скорость конуса ω, а также скорости наинизшей и наивысшей точек основания V_A и V_B (рис.6).

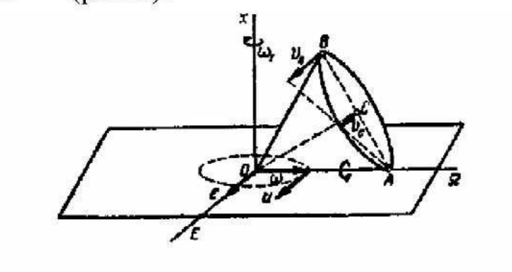


Рис.6

Решение. Движение катящегося конуса является сферическим, так как его вершина O остается неподвижной. Это движение в каждый момент времени представляет собой вращение вокруг мгновенной оси. Мгновенная ось вращения конуса Ω совпадает с образующей OA, по которой конус соприкасается с неподвижной плоскостью, так как скорости точек этой образующей равны нулю.

Найдем расстояние h_C от точки C до мгновенной оси (AB)

$$h_C=CA\cdot\sin 60=r\sin 60=10\sqrt{3}\ см$$

Модуль угловой скорости конуса определим по формуле (7)

$$\omega=\frac{V_C}{h_C}=\frac{60}{10\sqrt{3}}\approx 3{,}46\ рад/с$$

Зная направление скорости $\overline{V}_C$, откладываем от точки O по мгновенной оси Ω вектор угловой скорости $\overline{\omega}$ так, чтобы, смотря ему навстречу, видеть вращение конуса вокруг этой оси в сторону, обратную вращению часовой стрелки.

Перейдем к определению скоростей точек A и B. Скорость точки A, лежащей на мгновенной оси вращения, равна нулю, т.е. $V_A=0$.

Найдем расстояние h_B от точки B до мгновенной оси вращения

$$h_B=2h_C=20\sqrt{3\ см}$$

Воспользовавшись формулой (7), определяем скорость точки B.

$$V_B=\omega_B\cdot h_B=120\ см/с$$

Вектор скорости $\overline{V}_B$, так же как и $\overline{V}_C$, направлен перпендикулярно плоскости ΩOz.

Список рекомендуемой литературы

1. Воронков И.М. Курс теоретической механики.- М., 1964.(Глава 16).

2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М., 1986. (Главы 9, 12).

3. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. – М., 2004. Ч.1. (Глава 12).

4. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М., 1986 и последующие издания.

5. Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. – М., 1978 и последующие издания.

6. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах.- М., 1975. Ч.1. (Глава 7, § 1).

Требования к студентам

Задачи, рекомендуемые для практических занятий [4] : №№ 10.19, 11.15, 12.26, 19.1, 19.2, 19.3, 19.4.

Задания для самостоятельной работы в форме расчетно-графических работ: Задание К-3 [5] или аналогичное задание из методических разработок кафедры.

Студент должен знать

Каковы основные характеристики движущейся точки?

Что означает закон движения точки?

Каковы законы движения точки в полярных координатах?

Как определяются проекции скорости точки на радиальное и трансверсальное направления?

Как определяется модуль скорости и ускорения точки?

Какими параметрами определяется положение твердого тела, одна из точек которого неподвижна?

Как формулируется теорема Эйлера-Даламбера?

Что называют мгновенной осью вращения и каковы ее уравнения в неподвижной системе координат?

Как определяются скорости точек тела при сферическом движении?

Студент должен уметь

Составлять уравнения движения точки в полярных координатах.

Находить проекции скорости точки на радиальное и трансверсальное направления.

Находить скорость и ускорение точки по их составляющим при задании ее движения в полярных координатах.

Находить положение мгновенной оси вращения при сферическом движении твердого тела.

Находить скорости точек тела, совершающего сферическое движение.

34

Находить проекции скорости точки по известным проекциям мгновенной угловой скорость.

Тесты 3 модуля

Радиальная скорость точки равна 2 м/с. Если вектор полной скорости точки образует угол 45° с полярным радиусом, то в этот момент времени модуль полной скорости точки равен…

1,97 2,83 3,21 2,69 3,17

Трансверсальная скорость точки равна 3 м/с. Если вектор полной скорости образует угол 30° с полярным радиусом, то радиальная скорость точки равна…

5,2 4,71 3,84 4,9 3,9

Радиальная скорость точки равна 10 м/с. Если полная скорость точки равна 20 м/с, то трансверсальная скорость точки равна…

16,4 18,5 17,3 19,1 15,9

Даны уравнения движения точки в полярных координатах $\varphi = t$;

$r = t2$. Если $\varphi = 180°$, то полярный радиус точки в этот момент времени равен…

8,77 10,03 7,64 9,87 6,52

Твердое тело движется вокруг неподвижной точки О согласно уравнениям: $\psi = 0,5\pi$; $\theta = \pi t$; $\varphi = \pi t$. Тогда в момент времени 0,25 с проекция мгновенной угловой скорости на неподвижную ось Ox равна…

1,98 3,43 1,29 3,01 2,22

Твердое тело движется вокруг неподвижной точки О согласно уравнениям: $\psi = \pi \sin t$; $\theta = \pi \cos t$; $\varphi = \pi$. Тогда модуль мгновенной угловой скорости равен…

3,14 2,71 1,94 2,28 2,59

Твердое тело движется вокруг неподвижной точки О согласно уравнениям: $\psi = \pi t$; $\theta = \pi/3$; $\varphi = \pi t$. Тогда модуль мгновенной угловой скорости равен…

4,87 5,44 3,86 5,69 4,62

Радиальная скорость точки равна 15 м/с. Если полная скорость точки равна 24,3 м/с, то трансверсальная скорость точки равна…

16,4 18,5 17,3 19,1 15,9

36

Даны уравнения движения точки в полярных координатах

$\varphi = 2\sin t$; $r = t2$. Если полярный радиус точки равен 4 м, то в этот момент времени полярный угол равен…

1,74 1,42 1,82 2,14 2,08

Даны уравнения движения точки в полярных координатах

$\varphi = 0{,}5t2$; $r = 0{,}5t$. Если полярный радиус точки равен 2 м, то трансверсальная скорость точки равна…

7 8 6 5 2

Даны уравнения движения точки в полярных координатах

$\varphi = t2$; $r = 0{,}5t.2$. Если полярный угол равен 2,25 рад, то радиальная скорость точки равна…

1,5 1,1 1,9 2,1 0,9

Тело совершает сферическое движение. Мгновенная угловая скорость тела равна $\vec{\omega} = \pi\cos\pi t2\,\dot{i} + \pi\sin\pi t2\,\dot{j} + 1{,}12\pi t\,\vec{k}$. Тогда косинус угла, который образует мгновенная ось вращения тела с осью Ox, в момент времени 2 с равен…

0,521 0,219 0,376 0,408 0,602

Тело совершает сферическое движение. Мгновенная угловая скорость тела равна $\dot{\omega} = \pi\sin\pi t\,\vec{i} + \pi\cos\pi t\,\dot{j} + \pi\,\dot{k}$. Тогда в момент времени 1 с проекция мгновенного углового ускорения на ось Ox равна…

- 9,87 - 8,43 7,82 10,05 3,14

Даны уравнения движения точки в полярных координатах

$\varphi = 2t$; $r = t2$. Тогда в момент времени 2 с модуль скорости точки равен…

7,52 4,29 9,38 6,33 8,94

Тело совершает сферическое движение. Мгновенная угловая скорость тела равна $\dot{\omega} = 2\sin 2t\,\dot{i} + \sin 2t\,\dot{j} + 5\,\vec{k}$. Тогда в момент времени 2 с мгновенное угловое ускорение тела равно…

1 2 3 4 5

Модуль 4

В этом модуле рассматриваются два случая сложного движения твердого тела. Первый соответствует случаю, когда относительное движение тела и переносное движение (движение подвижной системы отсчета) являются поступательными. Получена формула абсолютной скорости. Второй соответствует случаю, когда относительное движение тела и переносное движение представляют собой вращения вокруг параллельных осей. Выводятся формулы для определения модуля мгновенной абсолютной угловой скорости тела и положения мгновенной оси вращения в случаях, когда оба вращения совершаются как в одном, так и в разных направлениях. Приводятся примеры решения задач.

4.1. Сложение поступательных движений

Пусть твердое тело движется определенным образом относительно системы осей $O_1x_1y_1z_1$, которая в свою очередь совершает одновременно переносное движение по отношению к неподвижным осям $Oxyz$. Требуется найти результи-рующее (абсолютное) движение тела, т.е. его движение по отношению к неподвижным осям $Oxyz$, которое называется сложным движением твердого тела.

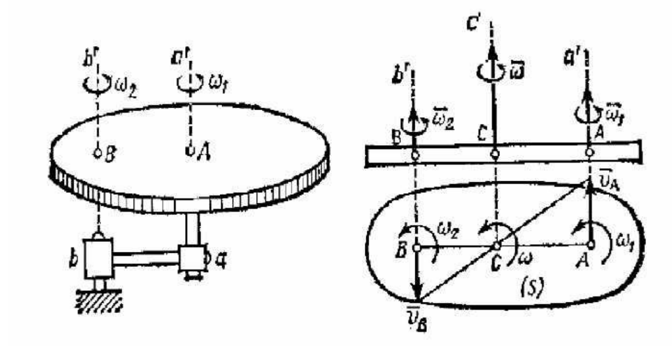
Задачей кинематики в этом случае является нахождение зависимостей между характеристиками относительного, переносного и абсолютного движений. Основными кинематическими характеристиками движения тела являются его поступательные и угловые скорости и ускорения. В зависимости от того, какими являются относительное движение тела и движение подвижной системы осей, мы будем иметь задачи о сложении различных движений.

Рассмотрим случай, когда относительное движение тела (движение относительно подвижной системы отсчета) и переносное движение (движение этой подвижной системы отсчета) являются поступательными.

Пусть твердое тело движется поступательно со скоростью $\overline{V}_1$ относительно некоторой системы отсчета, которая в свою очередь движется поступательно со скоростью $\overline{V}_2$ относительно другой системы отсчета, принимаемой за неподвижную. Абсолютная скорость $\overline{V}$ какой-нибудь точки тела по теореме сложения скоростей равна геометрической сумме скоростей относительной и переносной , то есть $\overline{V} = \overline{V}_r + \overline{V}_e$. Но для всех точек тела имеем $\overline{V}_r = \overline{V}_1$ и $\overline{V}_e = \overline{V}_2$, так как относительное и переносное движения являются поступательными. Следовательно $\overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2$. Из последнего равенства видно, что абсолютные скорости всех точек тела в каждый момент одинаковы. Таким образом приходим к заключению: в том случае, когда относительное и переносное движения являются поступательными, абсолютное движение тела есть также поступательное, причем скорость этого поступательного движения равна геометрической сумме скоростей относительного и переносного движений.

4.2. Сложение вращений вокруг двух параллельных осей

Рассмотрим случай, когда относительное движение тела является вращением с угловой скоростью $\overline{\omega}_1$ вокруг оси aa', закрепленной на кривошипе ba (рис.1а), а переносное – вращением кривошипа ba вокруг оси bb', параллельной aa', с угловой скоростью $\overline{\omega}_2$. Тогда движение тела будет плоскопараллельным по отношению к плоскости, перпендикулярной к осям.



а) Рис. 1 б)

Примем, что вращения направлены в одну сторону. Изобразим сечение S тела плоскостью, перпендикулярной осям (рис. 1 б). Следы осей в сечении S обозначим буквами A и B. Тогда $V_A = \omega_2 \cdot AB$ и $V_B = \omega_1 \cdot AB$. При этом векторы $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$ параллельны друг другу, перпендикулярны AB и направлены в разные стороны. Тогда точка C является мгновенным центром скоростей $(V_C = 0)$, а следовательно, ось Cc', параллельная осям Aa' и Bb', является мгновенной осью вращения. Для определения угловой скорости ω абсолютного вращения тела вокруг оси Cc' и положения самой оси, т.е. точки C, воспользуемся свойством мгновенного центра скоростей

$$\omega = V_B / BC = V_A / AC,$$

откуда

$$\omega = (V_A + V_B) / AB.$$

Подставив в эти равенства значения V_A и V_B, окончательно получим

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \quad (1)$$

$$\omega_1 / BC = \omega_2 / AC = \omega / AB. \quad (2)$$

Итак, при сложении двух направленных в одну сторону вращений вокруг параллельных осей результирующее движение тела будет мгновенным вращением с абсолютной скоростью $\omega = \omega_1 + \omega_2$ вокруг мгновенной оси, параллельной данным, положение которой определяется пропорциями (2).

С течением времени мгновенная ось вращения Cc' меняет свое положение, описывая цилиндрическую поверхность.

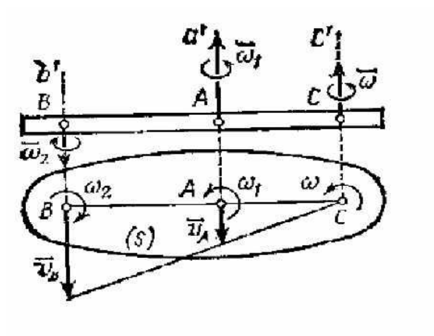


Рис. 2

Рассмотрим теперь случай, когда вращения направлены в разные стороны (рис.2).

Допустим, что $\omega_1 > \omega_2$. Тогда, рассуждая, как в предыдущем случае, для угловой скорости ω абсолютного движения тела вокруг оси Cc' и положения самой оси, получим

$$\omega = \omega_1 - \omega_2, \quad (3)$$

$$\omega_1 / BC = \omega_2 / AC = \omega / AB . \quad (4)$$

Таким образом, при сложении двух направленных в разные стороны вращений вокруг параллельных осей, результирующее движение тела будет мгновенным вращением с абсолютной угловой скоростью $\omega = \omega_1 - \omega_2$ вокруг мгновенной оси, положение которой определяется пропорциями (4).

Заметим, что в этом случае точка C делит расстояние между параллельными осями внешним образом.

Рассмотрим частный случай, когда вращения вокруг параллельных осей направлены в разные стороны, но по модулю $\omega_1 = \omega_2$ (рис.3).

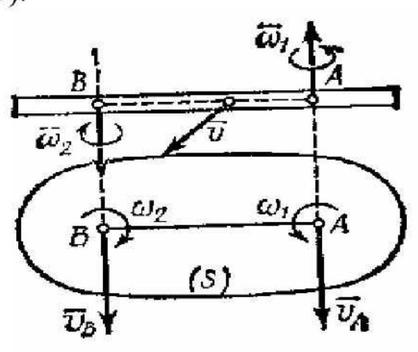


Рис.3

Такая совокупность вращений называется парой вращений, а векторы $\overline{\omega_1}$ и $\overline{\omega_2}$ образуют пару угловых скоростей. В этом случае получим $V_A = \omega_2 \cdot AB$ и $V_B = \omega_1 \cdot AB$, то есть $V_A = V_B$. Тогда мгновенный центр скоростей находится в бесконечности и все точки тела в данный момент времени имеют одинаковые скорости $V = \omega_1 \cdot AB$.

Следовательно, результирующее движение тела будет поступательным (или мгновенно поступательным) движением со скоростью, численно равной $\omega_1 \cdot AB$ и направленной перпендикулярно плоскости , проходящей через векторы $\overline{\omega_1}$ и $\overline{\omega_2}$. Таким образом, пара вращений эквивалентна мгновенно поступательному движению со скоростью $\overline{V}$, равной моменту пары угловых скоростей этих вращений.

Примером пары угловых скоростей является движение велосипедной педали AB относительно рамы велосипеда (рис.4).

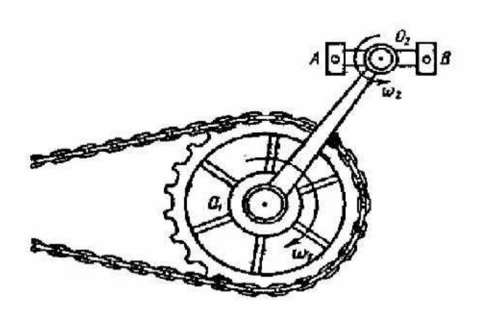


Рис.4

Это движение представляет собой совокупность переносного вращения вместе с кривошипом O_1O_2 вокруг оси O_1 и относительного вращения педали по отношению к кривошипу вокруг оси O_2. Педаль AB за все время движения остается параллельной своему первоначальному положению, т.е. совершает поступательное движение.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Кривошип $O_1O_2 = \ell$ вращается вокруг оси O_1 по часовой стрелке с угловой скоростью ω, а диск радиуса r вращается вокруг оси O_2 по часовой стрелке с той же угловой скоростью ω относительно кривошипа. Найти величину и направление абсолютных скоростей точек A и B (рис.5).

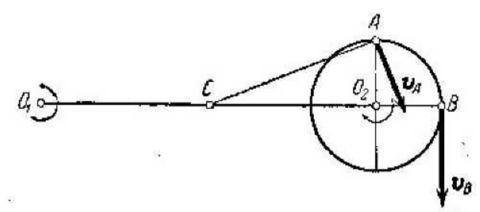


Рис.5

Решение. Так как угловые скорости переносного и относительного вращений равны по модулю и направлены в одну сторону, то мгновенный центр вращений C диска лежит посредине между O_1 и O_2, т.е. $O_1C = CO_2 = \ell/2$. Модуль абсолютной угловой скорости Ω вращения диска вокруг точки C равен $\Omega = 2\omega$. Отсюда находим:

$$V_A = \Omega \cdot CA = 2\omega\sqrt{\frac{\ell^2}{4} + r^2} = \omega\sqrt{\ell^2 + 4r^2}, \quad \overline{V}_A \perp CA,$$

$$V_B = \Omega \cdot CB = 2\omega\left(\frac{\ell}{2} + r\right) = \omega(\ell + 2r), \quad \overline{V}_B \perp CB.$$

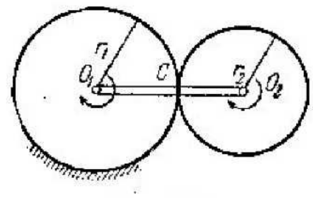


Рис.6

Пример 2. Кривошип O_1O_2 вращается вокруг оси O_1 с угловой скоростью ω_1. На палец O_2 кривошипа свободно насажена шестерня радиуса r_2, сцепленная с неподвижным зубчатым колесом радиуса r_1. Найти абсолютную угловую скорость Ω шестерни и ее угловую скорость ω_2 относительно кривошипа (рис.6).

Решение. Так как шестерня сцеплена с неподвижным колесом, то абсолютная скорость точки C зацепления шестерни с этим колесом равна нулю, т.е. точка C является для шестерни мгновенным центром вращения. Отсюда $O_1C/CO_2 = \omega_2/\omega_1$ или $r_1/r_2 = \omega_2/\omega_1$,
откуда

$$\omega_2 = r_1\omega_1/r_2.$$

Заметим, что направление вращения шестерни совпадает с направлением вращения кривошипа.

Тогда абсолютную угловую скорость шестерни находим из равенства

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2$$

или

$$\Omega = \omega_1 + r_1\omega_1/r_2 = (r_1 + r_2)\omega_1/r_2.$$

Список рекомендуемой литературы

Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М., 1964. (Глава 18).

Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М., 1986. (Глава 14).

Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. – М., 2004. Ч.1. (Глава 15).

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М., 1986 и последующие издания.

Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых по теоретической механике. – М., 1978 и последующие издания.

Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. – М., 1975. Ч.1. (Глава 6, § 6).

Требования к студентам

Задачи, рекомендуемые для практических занятий [4]: №№ 24.1, 24.2, 24.3, 24.5, 24.6.

Задания для самостоятельной работы в форме расчетно-графических работ: Задание К-7 [5] или аналогичное задание из методических разработок кафедры.

Студент должен знать

Что называется поступательным движением твердого тела?

Что такое относительное и переносное движения твердого тела?

Что такое абсолютное движение твердого тела и чему равна абсолютная скорость?

Что такое вращение твердого тела вокруг двух параллельных осей?

Что такое мгновенная ось вращения?

Чему равна абсолютная угловая скорость и как определяется положение мгновенной оси вращения в случае, когда оба вращения направлены в одну сторону?

Чему равна абсолютная угловая скорость и как определяется положение мгновенной оси вращения в случае, когда вращения направлены в разные стороны?

Что такое пара вращений и какое движение совершает твердое тело в этом случае?

Студент должен уметь

Определять относительное, абсолютное и переносное движения при сложном движении твердого тела.

Определять положение мгновенной оси и величину абсолютной угловой скорости тела, участвующего во вращениях вокруг двух параллельных осей.

Определять величину скорости тела в случае, когда вращения вокруг параллельных осей направлены в разные стороны, но угловые скорости по модулю равны.

Определять скорости точек тела, участвующего во вращениях вокруг параллельных осей.

Тесты 4 модуля

Тело одновременно участвует в двух поступательных движениях со скоростями $\vec{v}1 = 5\vec{i} + 2\vec{j}$ и $\vec{v}2 = -2\vec{i} + 3\vec{j}$. Тогда модуль абсолютной скорости тела равен…

4,61 6,31 5,83 4,98 5,22

Тело одновременно находится в двух вращательных движениях вокруг параллельных осей с угловыми скоростями ω1 = 2 рад/с и

ω2 = 3 рад/с, векторы которых направлены в одну сторону. Тогда модуль абсолютной угловой скорости движения тела равен…

5 4 2,5 1 2,3

Тело одновременно участвует в трех поступательных движениях со скоростями $\vec{v}1 = 4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{v}2 = -6\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$; $\vec{v}3 = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. Тогда модуль абсолютной скорости тела равен…

6 7 4 5 3

Пятипалубный пароход плывет со скоростью 3,6 км/ч, а лифт внутри парохода поднимается со скоростью 0,5 м/с. Тогда абсолютная скорость неподвижного человека внутри лифта равна…

0,87 1,12 2,69 2,19 0,91

Сферическая оболочка радиуса 0,5 м с центром в точке О декартовой системы координат участвует одновременно в двух вращательных движениях вокруг параллельных осей: оси Oz с угловой скоростью равной 3 рад/с и вокруг оси Az (которая касается оболочки) с угловой скоростью равной 4 рад/с. Тогда модуль скорости точки А оболочки лежащей на оси Az равен…

1,7	3,8	3,1	2,9	1,5

Диск радиуса 0,5 м с центром в точке О располагается в плоскости xOy и участвует одновременно в двух вращательных движениях вокруг параллельных осей: оси Ox с угловой скоростью равной 2 рад/с и вокруг оси Ax (которая касается диска) с угловой скоростью равной 2 рад/с. Тогда у диска найдется точка с максимальным значением модуля скорости равным…

3	2	0,5	1,5	2,5

Пятипалубный пароход плывет со скоростью 0,4 м/с, а лифт внутри парохода поднимается со скоростью 0,3 м/с. Тогда абсолютная скорость человека, который двигается внутри лифта со скоростью 0,2 м/с, равна…

0,621	0,219	0,539	0,318	0,452

Баржа плывет со скоростью 3 м/с. По палубе баржи едет грузовик из носовой части баржи в кормовую по закону 3t2. По кузову грузовика бежит человек в противоположную сторону кабины грузовика по закону 2t2. Тогда абсолютная скорость человека в момент времени 1 с равна…

1	2	3	4	5

Кузов вагона совершает одновременно два поступательных движения: в продольном направлении движется с постоянным ускорением 1 м/с2, а в вертикальном – колеблется согласно закону

y = 1 + 0,02sin2πt. Тогда модуль максимального абсолютного ускорения вагона равен…

1,82	1,27	3,14	2,03	0,93

Тело одновременно находится в трех вращательных движениях вокруг параллельных осей с угловыми скоростями ω1 = 5 рад/с,

ω2 = 4 рад/с, ω3 = 3 рад/с. Тогда модуль абсолютной угловой скорости тела равен…

11	10	6	12	2

Тело одновременно находится в двух вращательных движениях вокруг параллельных осей с угловыми скоростями ω1 = 4 рад/с,

ω2 = - 3 рад/с. Тогда модуль абсолютной угловой скорости тела равен…

7	1	- 1	- 7	12

Тело одновременно находится в двух вращательных движениях вокруг параллельных осей 1 и 2 с угловыми скоростями ω1 = 4 рад/с,

ω2 = - 2 рад/с. Расстояние между осями равно 50 см. Тогда расстояние в см от мгновенной оси вращения до оси 1 равно…

100	25	75	300	50

Модуль 5

В настоящем модуле рассматриваются задача динамики относительного движения материальной точки и работа силы и мощность. Введением понятий переносной и кориолисовой сил инерции выводятся дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки. Рассматриваются различные случаи переносного движения (движения подвижной системы отсчета). Приводятся основные понятия и определения работы силы и мощности, формулы для вычисления работы переменной и постоянной сил на конечном криволинейном и прямолинейном перемещениях. Рассматриваются примеры решения задач.

5.1. Динамика относительного движения материальной точки

Второй закон динамики и полученные на его основе уравнения и теоремы верны только для так называемого абсолютного движения точки, то есть движения по отношению к инерциальной (неподвижной) системе отсчета.

Изучим движение материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета, то есть подвижной системы отсчета. Рассмотрим материальную точку M, движущуюся под действием приложенных к ней сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots \overline{F}_n$, являющихся результатом взаимодействия точки с другими телами. Будем изучать движение этой точки по отношению к осям $Oxyz$, которые в свою очередь каким-то известным нам образом движутся относительно инерциальной системы отсчета (неподвижных осей) $O_1x_1y_1z_1$ (рис.1).

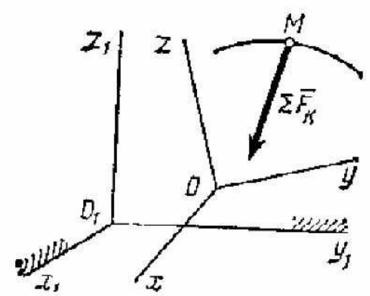


Рис.1

Движение точки M относительно системы $O_1x_1y_1z_1$ называется абсолютным, а движение этой точки относительно системы $Oxyz$ - относительным. Движение подвижной системы $Oxyz$ относительно неподвижной системы $O_1x_1y_1z_1$ называется переносным движением.

Считая, что переносное движение системы $Oxyz$ и система сил $\overline{F}_k$ известны, основное уравнение динамики для абсолютного движения точки M запишется в виде

$$m\overline{a} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \quad , (1)$$

где a - абсолютное ускорение точки M, а $\sum \overline{F}_k$ - геометрическая сумма приложенных к точке сил.

Из кинематики известно, что

$$\overline{a} = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_k$$

где $\overline{a}_r, \overline{a}_e, \overline{a}_k$ - соответственно относительное, переносное и кориолисово ускорения точки M.

Подставляя это значение $\overline{a}$ в равенство (1) получим

$$m\overline{a}_r = \sum \overline{F}_k - m\overline{a}_e - \overline{a}_k . \quad (2)$$

Введем два вектора $\overline{\Phi}_e = -m\overline{a}_e, \quad \Phi_k = -m\overline{a}_k$, численно равные ma_e и ma_k и направленные противоположно ускорениям $\overline{a}_e$ и $\overline{a}_k$. Эти векторы назовем переносной и кориолисовой силами инерции.

Подставим эти векторы в уравнение (2)

$$m\overline{a}_r = \sum \overline{F}_k + \overline{\Phi}_e + \overline{\Phi}_k . \quad (3)$$

Уравнение (3) представляет собой основное уравнение динамики относительного движения материальной точки. Сопоставив (1) и (3) заключаем: в случае непоступательного переносного движения относительное движение материальной точки можно рассматривать как абсолютное, если к действующим на точку силам присоединить переносную и кориолисову силы инерции.

Это сопоставление показывает также, что в инерциальной системе отсчета ускорение точки является лишь результатом действия на нее сил, в то время как в неинерциальной системе ускорение является как результатом действия на нее сил, так и результатом движения самой системы отсчета.

Спроектировав (3) на оси подвижной системы отсчета $Oxyz$, получим дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки

$$m\ddot{x} = \sum X_k + \Phi_{ex} + \Phi_{kx},$$

$$m\ddot{y} = \sum Y_k + \Phi_{ey} + \Phi_{ky}, \quad (4)$$

$$m\ddot{z} = \sum X_k + \Phi_{ez} + \Phi_{kz} .$$

Рассмотрим частные случаи относительного движения материальной точки, соответствующее различным видам переносного движения.

1. Переносное движение – неравномерное вращение тела вокруг неподвижной оси. В этом случае переносное ускорение $\overline{a}_e$ равно геометрической сумме вращательного и центростремительного ускорений

$$\overline{a}_e = \overline{a}_e^{вр} + \overline{a}_e^{ц} .$$

Тогда уравнение (3) принимает вид

$$m\overline{a}_r = \sum \overline{F}_k + \overline{\Phi}_e^{вр} + \overline{\Phi}_e^{ц} + \overline{\Phi}_k , \quad (5)$$

где

$$\overline{\Phi}_e^{вр} = -m\overline{a}_e^{вр}, \quad \overline{\Phi}_e^{ц} = -m\overline{a}_e^{ц} .$$

2. Переносное движение – равномерное вращение тела вокруг неподвиж-ной оси. В этом случае $\overline{a}_e^{вр} = 0$, а следовательно, $\overline{\Phi}_e^{вр} = 0$. Тогда уравнение (3) запишется в виде

$$m\overline{a}_r = \sum \overline{F}_k + \overline{\Phi}_e^{ц} + \overline{\Phi}_k . \quad (6)$$

3. Переносное движение – поступательное неравномерное криволинейное движение. В этом случае $\omega_e = 0$ и $\Phi_k = 0$, а потому

$$m\overline{a}_r = \sum \overline{F}_k + \overline{\Phi}_e . \quad (7)$$

4. Переносное движение – поступательное прямолинейное и равномерное движение. В этом случае $a_e = 0$ и $\Phi_e = 0$, а потому

$$m\overline{a}_r = \sum \overline{F}_k \quad (8)$$

Сопоставив (8) и (1) замечаем, что их правые части совпадают. Это говорит о том, что подвижная система отсчета $Oxyz$ является в этом случае тоже инерциальной системой.

Рассмотрим пример решения задачи.

Пример 1. Шарик массы m, прикрепленный к концу горизонтальной пружины, коэффициент жесткости которой C, находится в положении равновесия в трубке на расстоянии x_o от вертикальной оси OO_1. Определить закон относительного движения шарика, если трубка начинает вращаться вокруг вертикальной оси OO_1 с постоянной угловой скоростью ω. Точка O на оси вращения соответствует положению ненагруженной пружины (рис.2).

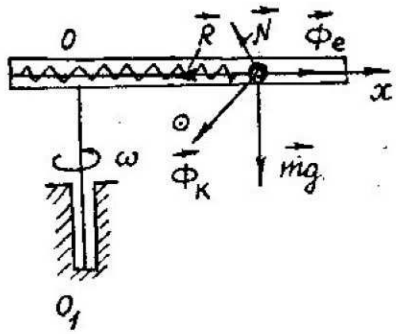


Рис. 2

Решение. Поместим начало координат оси x в точке O. Изобразим шарик в текущий момент времени в положении, отстоящем от начала координат на расстоянии x. Чтобы найти относительное движение шарика, приложим к нему силу упругости пружины $\overline{R}$, силу тяжести $\overline{P}$, переносную силу инерции $\overline{\Phi}_e$, а также кориолисову силу инерции $\overline{\Phi}_k$ и реакцию стенки $\overline{N}$, расположенные в плоскости, перпендикулярной к оси трубки.

Дифференциальное уравнение относительного движения (4) для рассматриваемой задачи имеет вид

$$m\ddot{x} = -R + \Phi_e.$$

Учитывая, что $R = cx, P = mg, \Phi_e = ma_e = m\omega^2 x$, получим

$$m\ddot{x} = -cx + m\omega^2 x,$$

или

$$\ddot{x} + (\omega_o^2 - \omega^2)x = 0, \quad (9)$$

где

Рассмотрим случай, когда $\omega_o > \omega$. Тогда решение дифференциального уравнения (9) имеет вид

$$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt, \quad (10)$$

где $k = \sqrt{\omega_o^2 - \omega^2}$.

Для определения c_1 и c_2, найдем относительную скорость шарика

$$V_r = \dot{x} = -c_1 k \sin kt + c_2 k \cos kt. \quad (11)$$

Подставляя в (10) и (11) начальные условия $t = 0 \quad x = x_o, \quad \dot{x} = 0$, получим

$$c_1 = x_o, \quad c_2 = 0.$$

Окончательно, закон относительного движения шарика представится в виде

$$x = x_o \cos kt.$$

5.2. Работа силы. Мощность

Для характеристики действия силы на тело при некотором его перемещении, вводится мера этого действия, называемая работой силы. Сначала введем понятие об элементарной работе.

Элементарной работой силы $\overline{F}$, приложенной в точке M (рис.3), называется скалярная величина

$$dA = F_\tau dS, \quad (12)$$

где F_τ - проекция силы $\overline{F}$ на направление скорости $\overline{V}$ точки M; dS -модуль элементарного перемещения точки M.

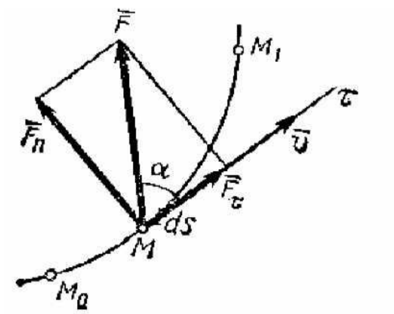


Рис. 3

Так как $F_\tau = F \cos\alpha$, то из (12) получим

$$dA = FdS\cos\alpha, \quad (13)$$

где α - угол между $\overline{F}$ и $M\tau$.

Если угол α острый, то работа положительна, а если угол α тупой – отрицательна.

При $\alpha = 90^o$, то есть если сила направлена перпендикулярно переме-щению, то элементарная работа силы равна нулю.

Если учесть, что $dS = |d\overline{r}|$, где $d\overline{r}$ - вектор элементарного перемещения точки, то равенство (13) можно представить в виде

$$dA = \overline{F} \cdot d\overline{r}. \quad (14)$$

Следовательно, элементарная работа силы равна скалярному произведению силы на вектор элементарного перемещения точки ее приложения.

Если в (14) выразить скалярное произведение через проекции векторов $\overline{F}$ и $\overline{r}$ на координатные оси, то получим аналитическое выражение элементарной работы

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz \text{, (15)}$$

где x, y, z - координаты точки приложения силы $\overline{F}$.

Работа силы на любом конечном перемещении $M_o M_1$ (рис.3) вычисляется как предел интегральной суммы соответствующих элементарных работ

$$A_{M_o M_1} = \int_{M_o}^{M_1} F_\tau dS \text{, (16)}$$

или

$$A_{M_o M_1} = \int_{M_o}^{M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \text{. (17)}$$

Следовательно, работа силы на любом конечном перемещении $M_o M_1$ равна взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы.

Если величина F_τ постоянна, то из (16), обозначив перемещение $M_o M_1$ через S_1, получим

$$A_{M_1 M_2} = F_\tau \cdot S_1 \text{. (18)}$$

Если сила постоянна по модулю и направлению ($\overline{F}$=const), а точка приложения силы движется прямолинейно (рис.4), то получим

$$A_{M_1 M_2} = F S_1 \cos\alpha \text{. (19)}$$

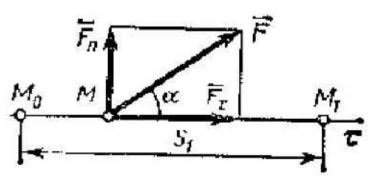


Рис. 4

Единицей измерения работы является в СИ – 1 джоуль (1Дж=1 $H \cdot м$).

Мощностью называется величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени. Если работа совершается равномерно, то мощность $N = A / t_1$, где t_1 - время, в течение которого произведена работа. В общем случае

$$N = dA / dt = F_\tau dS / dt = F_\tau \cdot V \quad (20)$$

Мощность равна произведению касательной составляющей силы на скорость.

Единицей измерения мощности в СИ является ватт (1Вт=1Дж/с).

В заключении приводим некоторые примеры вычисления работы.

5.2.1. Работа силы тяжести

Пусть точка M, на которую действует сила тяжести $\overline{P}$, перемещается из положения $M_o(x_o, y_o, z_o)$ в положение $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (рис.5).

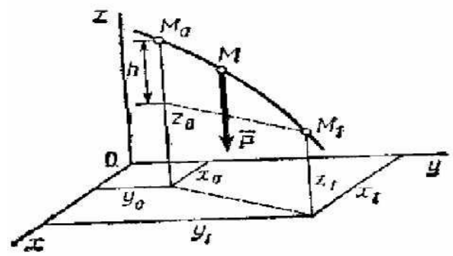


Рис. 5

Работа силы тяжести равна взятому со знаком плюс или минус произведению модуля силы тяжести на вертикальное перемещение точки ее приложения

$$A_{M_oM_1} = P(z_o - z_1) = \pm Ph \quad (21)$$

5.2.2. Работа силы упругости

Рассмотрим груз M, прикрепленный к свободному концу пружины (рис.6). Примем за начало координат точку O, в которой пружина не напряжена, т.е. AO - длина ненапряженной пружины. Найдем работу, совершаемую силой упругости при перемещении из положения $M_o(x_o)$ в положение $M_1(x_1)$.

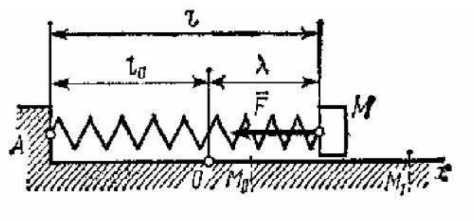


Рис.6

Воспользовавшись формулой (17), получим

$$A_{M_oM_1} = \frac{c}{2}(\lambda_o^2 - \lambda_1^2), \quad (22)$$

где c - коэффициент жесткости пружины;

λ_o и λ_1 - деформация пружины соответственно в положении M_o и M_1.

Рассмотрим пример.

Пример 2. Груз веса $\overline{P}$ подвешен на нити длины ℓ. Нить вместе с грузом отклоняют от вертикали на угол φ_o и отпускают без начальной скорости (рис.7). При движении на груз действует сила сопротивления $\overline{R}$, которую приближенно заменяем ее средним значением $\overline{R}^*(R^* = const)$. Вычислить сумму работ сил при перемещении груза из положения M_o в положение M, когда нить образует с вертикалью угол α.

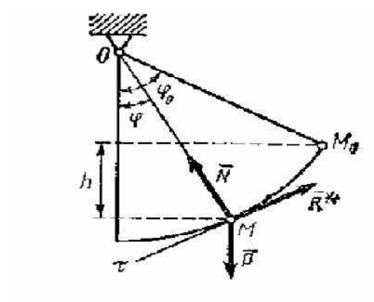


Рис. 7

Решение. На груз действуют сила тяжести $\overline{P}$, реакция нити $\overline{N}$ и сила сопротивления, представленная ее средним значением $\overline{R}^*$. Работу силы $\overline{P}$ определим по формуле (21)

$$A(\overline{P}) = Ph = P\ell(\cos\varphi - \cos\varphi_o).$$

Так как проекция силы $\overline{N}$ на касательную ось $M\tau$ равна нулю, то есть $N_\tau = 0$, то $A(\overline{N}) = 0$. Работу силы $\overline{R}^*$ вычислим по формуле (18)

$$A(\overline{R}^*) = -R^* S_1,$$

где S_1 - длина дуги $M_o M_1$.

Так как $S_1 = \ell(\varphi_o - \varphi)$, то $A(\overline{R}^*) = -R^*\ell(\varphi_o - \varphi)$. Окончательно, получим

$$A = A(\overline{P}) + A(\overline{N}) + A(\overline{R}^*) = P\ell(\cos\varphi - \cos\varphi_o) + R^*\ell(\varphi - \varphi_0).$$

Список рекомендуемой литературы

Воронков И.М. Курс теоретической механики. - М., 1964. Главы 21, 24.

Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. -М., 1986. Главы 17, 18.

Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. -М., 2004. Ч.2, главы 5,10.

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. -М., 1986 и последующие издания.

Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. – М., 1978 и последующие издания.

Бать М., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. -М., 1968. Ч.2. Глава 8, § 5; глава 9, § 7.

Требования к студентам

Задачи, рекомендуемые для практических занятий [4]: №№ 29.2, 29.4, 29.7,33.6, 33.9, 33.10, 33.14.

Задания для самостоятельной работы в форме расчетно-графических работ: Задание Д-4 из [5] или аналогичное задание из методических разработок кафедры.

Студент должен знать

Какие системы отсчета называются инерциальными?

Какой модуль и какое направление имеют переносная и кориолисова силы инерции?

В чем заключается различие между дифференциальными уравнениями относительного и абсолютного движений точки?

Как определяются переносная и кориолисова силы инерции в различных случаях переносного движения?

Что такое работа силы и мощность?

Как определяется работа постоянной по модулю и направлению силы на прямолинейном и криволинейном перемещениях?

Каково векторное выражение элементарной работы?

Как вычисляется работа силы тяжести и силы упругости?

На каких перемещениях работа силы тяжести: а) положительна, б) отрицательна, в) равна нулю?

Студент должен уметь

Определять модуль и направление переносной и кориолисовой сил инерции.

В зависимости от вида переносного движения находить составляющие переносной и кориолисовой сил инерции.

Составлять дифференциальное уравнение относительного движения материальной точки.

Вычислять работу постоянной и переменной сил на конечном перемещении.

Вычислять работу силы тяжести и силы упругости.

Тесты 5 модуля

Локомотив (считать материальной точкой) массой 80 000 кг движется по рельсам, проложенным по экватору с востока на запад, со скоростью 20 м/с. Если угловая скорость земли равна 0,0 000 729 рад/с, то модуль кориолисовой силы инерции локомотива равен…

197 321 233 345 295

Ненагруженную пружину с коэффициентом жесткости равным 100 Н/м растянули на 0,02 м. Тогда работа силы упругости пружины равна…

- 0,02 0,03 - 0,01 0,04 0,05

Моторная лодка движется по реке со скоростью 8 м/с. Сила тяги двигателя равна 3 500 Н. Тогда мощность силы тяги двигателя в кВт равна…

23 34 19 28 32

На вал двигателя действует крутящий момент

$M = 80(1 - 0{,}0\,025\omega)$. В момент времени, когда вал двигателя имеет угловую скорость 200 рад/с, мощность двигателя в кВт равна…

7 8 9 6 5

Однородный цилиндр массой 40 кг катится прямолинейно без скольжения по горизонтальной плоскости с угловой скоростью 4 рад/с. Коэффициент трения качения равен 0,01 м. Тогда мощность сил сопротивления качению равна…

- 11,7 19,3 18,3 13,5 -15,7

Грузовой автомобиль движется по дороге на подъем (угол подъема дороги равен 10°) с постоянным замедлением равным 2 м/с2. Если масса груза в кузове автомобиля равна 200 кг, то его давление на переднюю стенку кузова равно…

59,3 43,9 63,7 51,6 66,4

По наклонной плоскости (угол наклона равен 20°) двигается стакан с водой так, что свободная поверхность воды параллельна наклонной плоскости движения. Тогда ускорение стакана равно…

2,88 3,99 3,36 4,82 2,56

Шарик массой 0,2 кг движется со скоростью 19,62 м/с в вертикальной трубке, которая вращается вокруг вертикальной оси со скоростью 5 рад/с. Расстояние от трубки до оси вращения равно 0,5 м. Тогда переносная сила инерции шарика равна…

2 1 2,5 3 4

Груз 1 массой 1 кг спускается вниз по наклонной плоскости тела 2. Тело 2 движется в вертикальных направляющих вниз с ускорением

2 м/с2.. Тогда сила давления груза 1 на тело 2 равна…

5,82 6,76 4,89 7,11 7,42

Груз движется из состояния покоя в наклоненном кузове грузовика (угол наклона кузова равен 20°). Грузовик двигается задним ходом по горизонтальной плоскости с постоянным ускорением 3,5 м/с2. Тогда скорость относительного движения груза в момент времени 5 с равна…

0,331 0,243 0,482 0,397 0,285

Сила натяжения веревки санок равна 4х3. Санки двигаются по горизонтальной оси Ох. Угол наклона веревки к оси Ох равен 30°. Если санки перемещаются из отметки с координатой хО = 0 в отметку с координатой х1 = 1 м, то работа этой силы равна…

0,602 0,532 0,731 0,866 0,974

Материальная точка движется прямолинейно по горизонтальной плоскости по закону х = t4 под действием силы F = 12t4. Если точка перемещается из отметки с координатой хО = 0 в отметку с координатой х1 = 4 м, то работа этой силы равна…

60 55 45 76 64

Тело под действием постоянной горизонтальной силы F = 1 Н поднимается по наклонной поверхности (угол наклона поверхности равен 30°). Если тело пройдет путь 1 м по наклонной поверхности, то сила совершит работу равную…

0,654 0,866 0,388 0,932 0,761

Кабина лифта двигается вверх с ускорением 4,9 м/с2. К потолку лифта прикреплена вертикальная пружина, а к пружине с другой стороны прикреплен груз весом 100 Н, тогда усилие в пружине равно…

100 200 150 300 50

Модуль 6

В этом модуле рассматривается задача динамики плоскопараллельного (плоского) движения твердого тела и принцип Даламбера для материальной точки и механической системы. С использованием теоремы о движении центра масс и уравнения вращательного движения твердого тела получены дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела. В модуле введением понятия силы инерции материальной точки выводится принцип Даламбера для материальной точки и для механической системы. Рассматривается несколько частных случаев приведения сил инерции твердого тела при различных видах его движения. Приводятся примеры решения задач.

6.1. Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела

Плоским или плоскопараллельным движением твердого тела называется такое движение, при котором каждая точка тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости.

Положение тела, совершающего плоскопараллельное движение, определяется в любой момент времени положением полюса и углом поворота вокруг полюса. Задачи динамики решаются проще, если за полюс принять центр масс C тела и определять положение тела координатами x_c и y_c и углом φ. На рис.1 изображено сечение тела плоскостью, параллельной плоскости движения и проходящей через центр масс C.

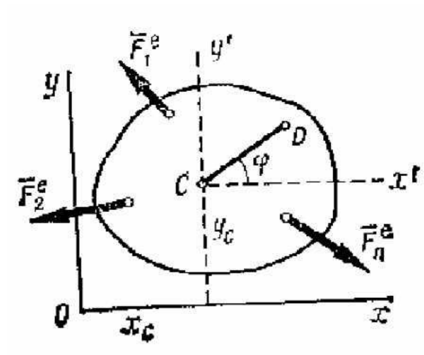


Рис. 1

Пусть на тело действуют внешние силы $\overline{F}_1^{(\ell)}, \overline{F}_2^{(\ell)}, ... \overline{F}_n^{(\ell)}$, лежащие в плоскости этого сечения. Тогда уравнения движения точки C находим по теореме о движении центра масс

$$M\overline{a}_c = \sum \overline{F}_k^{\ell}, \quad (1)$$

где $\overline{a}_c$ - ускорение центра масс, а вращательное движение вокруг центра C будет определяться уравнением

$$I_c \varepsilon = M_c^{\ell}, \quad (2)$$

где I_c и M_c^{ℓ} - соответственно момент инерции тела и главный момент внешних сил относительно оси, проходящей через центр масс C перпендикулярно плоскости Oxy.

Спроектировав обе части равенства (1) на координатные оси, окончательно получим

$$M\ddot{x}_c = \sum F^{\ell}_{kx},\quad M\ddot{y}_c = \sum F^{\ell}_{ky},\quad I_c\ddot{\varphi} = \sum m_c(\overline{F}^{\ell}_k), \quad (3)$$

где M - масса тела; $\ddot{x}_c$ и $\ddot{y}_c$-проекции ускорения центра масс на координатные оси.

Уравнения (3) представляют собой дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела. Интегрируя эти дифференциальные уравнения второго порядка, найдем x_c, y_c и φ в функциях от времени t и, следовательно, найдем движение тела.

Заметим, что с помощью уравнений (3) в случае, когда известен закон движения, можно найти главный вектор и главный момент внешних сил.

При несвободном движении, когда траектория центра масс известна, уравнения движения точки C удобнее составлять в проекциях на касательную τ и главную нормаль n к этой траектории. Тогда вместо (3) получим

$$M\frac{dV_c}{dt} = \sum F^{\ell}_{k\tau},\quad M\frac{V_c^2}{\rho_c} = \sum F^{\ell}_{kn},\quad I_c\ddot{\varphi} = \sum m_c(\overline{F}^{\ell}_k).$$

Рассмотрим пример.

Пример 1. Однородный круглый цилиндр радиуса r и массы M скатыва-ется без скольжения под действием силы тяжести по негладкой плоскости, наклоненной к горизонту под углом α (рис.2). Найти ускорение центра масс цилиндра.

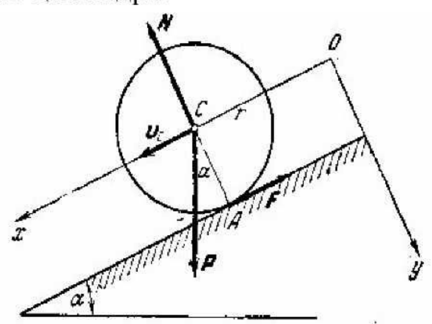


Рис.2

Решение. На цилиндр действуют следующие силы: вес $\overline{P}$, нормальная реакция плоскости $\overline{N}$, линия действия которой проходит через центр тяжести цилиндра C, и сила трения $\overline{F}$, направленная вверх по наклонной плоскости. Взяв координатные оси, как указано на рис.2, составим дифференциальные уравнения плоского движения цилиндра

а) $M\dfrac{d^2x_c}{dt^2} = Mg\sin\alpha - F$,

б) $M\dfrac{d^2y_c}{dt^2} = Mg\cos\alpha - N$,

в) $I_c\dfrac{d\omega}{dt} = Fr$,

где I_c - момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей через его центр тяжести C перпендикулярно плоскости Oxy.

Так как во все время движения $y_c = 0$, то

$$\frac{d^2 y_c}{dt^2} = 0$$

Тогда из уравнения (б) получим

$$N = Mg\cos\alpha = P\cos\alpha$$

Так как цилиндр катится без скольжения, то точка A будет являться его мгновенным центром скоростей, а следовательно, $V_c = r\omega$. Тогда

$$\frac{d^2 x_c}{dt^2} = \frac{dV_c}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$$

Поэтому, уравнение (а) примет вид

$$Mr\frac{d\omega}{dt} = Mg\sin\alpha - F$$

Исключив F из этого уравнения и уравнения (в), получим

$$(Mr^2 + I_c)\frac{d\omega}{dt} = Mgr\sin\alpha$$

Учитывая, для однородного цилиндра $I_c = Mr^2/2$, последнее уравнение примет вид

$$r\frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{3}g\sin\alpha$$

Следовательно, искомое ускорение центра масс цилиндра будет равно

$$a_c = \frac{dV_c}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{3}g\sin\alpha$$

6.2. Принцип Даламбера для материальной точки и для механической системы

Предположим, что материальная точка M под действием системы сил $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots \overline{P}_n$ движется с ускорением $\overline{a}$ (рис.3)

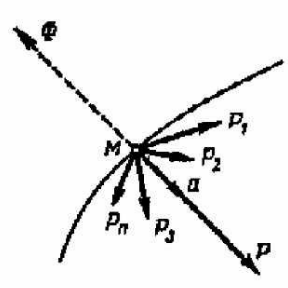


Рис.3

Основное уравнение динамики имеет вид

$$m\overline{a} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \dots + \overline{P}_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i$$

Перенесем член $m\overline{a}$ из левой части уравнения в правую

$$\sum \overline{P}_i - m\overline{a} = 0.$$

Введем обозначение $\overline{\Phi} = -m\overline{a}$. Сила $\overline{\Phi}$ называется силой инерции материальной точки и направлена противоположно ускорению точки.

Тогда последнее уравнение примет вид

$$\sum \overline{P}_i + \overline{\Phi} = 0. \quad (4)$$

Последнее соотношение формулируется так: геометрическая сумма всех приложенных к точке сил и силы инерции этой точки равна нулю.

Как известно, в действительности, сила инерции материальной точки приложена не к ней, а к телу, сообщающему точке ускорение. Приложение силы инерции к точке является лишь условным приемом, сводящим задачу динамики по форме решения к задаче статики.

При изучении движения несвободной механической системы, так же как и при изучении движения одной несвободной точки, применяется принцип освобождаемости от связей. По этому принципу имеющиеся связи отбрасывают, заменяя их действие соответствующими реакциями.

Рассмотрим несвободную механическую систему, состоящую из n материальных точек. Применив к каждой точке M_i этой системы принцип Даламбера, получим

$$\overline{P}_i + \overline{R}_i + \overline{\Phi}_i = 0 \quad (i = 1,2,....n), \quad (5)$$

где $\overline{P}_i$ - равнодействующая задаваемых сил, приложенных к точке M_i; $\overline{R}_i$ - равнодействующая реакций связей, приложенных к этой точке; $\overline{\Phi}_i = -m_i\overline{a}_i$ - сила инерции материальной точки M_i.

Сложим все n уравнений (5)

$$\sum \overline{P}_i + \sum \overline{R}_i + \sum \overline{\Phi}_i = 0. \quad (6)$$

Здесь $\sum \overline{P}_i = \overline{P}^*$ - главный вектор задаваемых сил; $\sum \overline{R}_i = \overline{R}^*$ - главный вектор реакций связей; $\sum \overline{\Phi}_i = \overline{\Phi}^*$ - главный вектор сил инерции точек системы.

Подставляя эти значения в уравнение (6), будем иметь

$$\overline{P}^* + \overline{R}^* + \overline{\Phi}^* = 0. \quad (7)$$

Из уравнения (7) следует, что в любой момент времени для всякой несвободной механической системы геометрическая сумма главных векторов задаваемых сил, реакций связей и сил инерции материальных точек системы равна нулю.

Применение уравнения (7), вытекающее из принципа Даламбера, упрощает процесс решения задач, так как эти уравнения не содержат внутренних сил.

В проекциях на координатные оси равенство (7) дает уравнения, аналогичные уравнениям статики.

В заключение следует подчеркнуть, что при изучении движения по отношению к инерциальной системе отсчета, силы инерции вводятся только тогда, когда для решения задач применяется принцип Даламбера.

Ниже приводятся формулы для приведения сил инерции твердого тела при различных случаях его движения.

1. Поступательное движение. В этом случае ускорения всех точек тела одинаковы и равны ускорению $\overline{a}_c$ центра масс C тела. Поэтому, силы инерции твердого тела приводятся к равнодействующей, равной $\overline{\Phi} = -m\overline{a}_c$ и проходящей через центр масс тела.

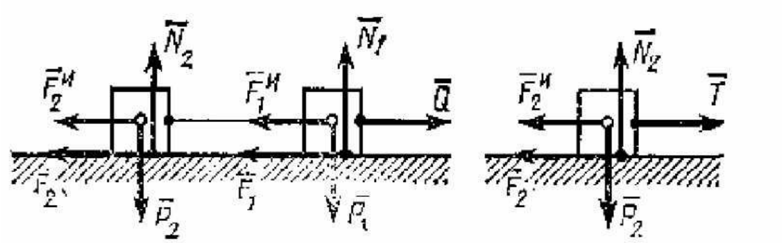
2. Вращение вокруг оси, проходящей через центр масс тела. В этом случае $\overline{\Phi} = 0$, так как $\overline{a}_c = 0$. Следовательно, система сил инерции тела приводится к одной паре сил с моментом $M_c^и = -I_c \cdot \varepsilon$, где I_c - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости симметрии тела; ε - угловое ускорение тела.

3. Плоскопараллельное движение. В этом случае система сил инерции тела приводится к лежащим в плоскости симметрии силе, равной $\overline{\Phi} = -m\overline{a}_c$ и приложенной в центре масс C тела, и паре с моментом $M_c^и = -I_c \cdot \varepsilon$.

В приведенных выше формулах для $\overline{\Phi}$ (или $M_c^и$) знак минус указывает на то, что вектор $\overline{\Phi}$ (или $M_c^и$) направлен противоположно ускорению центра масс тела (или угловому ускорению тела).

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2. Два груза веса $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ каждый, связанные нитью, движутся по горизонтальной плоскости под действием силы $\overline{Q}$, приложенной к первому грузу (рис.4а). Коэффициент трения грузов о плоскость равен f. Определить скорение грузов и напряжение нити.



а) Рис.4 б)

Решение. Изобразим все действующие на систему внешние силы ($\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{N}_1, \overline{N}_2, \overline{F}_1, \overline{F}_2$). Прибавим к этим силам силы инерции грузов. Так как оба груза движутся поступательно с одним и тем же ускорением, то

$$F_1^и = P_1 a / g, \quad F_2^и = P_2 a / g.$$

Модули сил трения равны:

$$F_1 = fP_1, \quad F_2 = fP_2.$$

Согласно принципу Даламбера полученная система сил должна находиться в равновесии. Составив уравнение равновесия в проекции на горизонтальную ось, получим

$$Q - fP_1 - fP_2 - (P_1 + P_2)a / g = 0.$$

Отсюда

$$a = [Q/(P_1 + P_2) - f]g.$$

Очевидно, что грузы будут двигаться, если $f < Q/(P_1 + P_2)$.

Так как натяжение нити является в рассматриваемой системе силой внутренней, то для ее определения расчленяем систему и применяем принцип Даламбера, например, ко второму грузу (рис.4б). На этот груз действуют сила $\overline{P}_2$, нормальная реакция $\overline{N}_2$, сила трения $\overline{F}_2$ и натяжение нити $\overline{T}$. Присоединив к ним силу инерции $F_2^и$ и составив уравнение равновесия в проекции на горизонтальную ось, получим

$$T - fP_2 - P_2 a / g = 0.$$

Подставив сюда найденное ранее значение a, окончательно найдем значение $\overline{T}$

$$T = QP_2 / (P_1 + P_2).$$

Интересно, что натяжение нити не зависит от силы трения и при одном и том же суммарном весе системы будет тем меньше, чем меньше вес второго (заднего) груза. Поэтому, например, в железнодорожном составе выгоднее в его головной части помещать более тяжелые вагоны, а в хвостовой части – более легкие.

Пример 3. Невесомый стержень CD длинны 2ℓ, несущий на каждом мз своих концов груз веса P, жестко скреплен в середине с вертикальной осью, опирающейся на подпятник A и подшипник B и вращающийся с постоянной угловой скоростью ω. Угол между осью и стержнем равен α, расстояние $AB = h$. Найти горизонтальные реакции X_A и X_B подпятника и подшипника в точках A и B и вертикальную реакцию Y_A подпятника в точке A (рис.5).

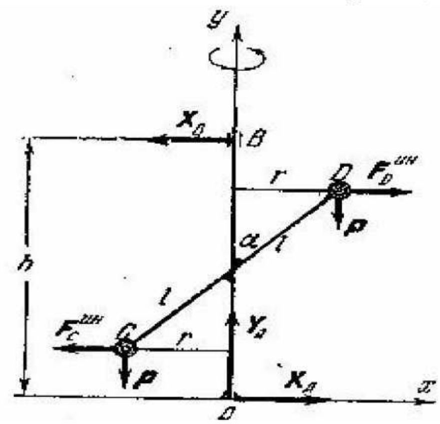


Рис.5

Решение. Так как грузы вращаются равномерно, то их касательные ускорения, а следовательно, и их касательные силы инерции равны нулю. Приложим к грузам нормальные силы инерции, направленные по радиусам вращения грузов от оси вращения, равные по модулю

$$F_C^{ин} = F_Д^{ин} = \Pr\omega^2 / g = P\ell\omega^2 \sin\alpha / g.$$

Составим три уравнения равновесия плоской системы сил, которым, согласно принципу Даламбера, должны удовлетворять заданные силы $\overline{P}$, силы инерции и реакции в точках A и B. Спроектировав все эти силы на оси Ax и Ay, получим

$$X_A - X_B = 0, \quad Y_A - 2P = 0.$$

Составим затем сумму моментов всех этих сил относительно точки A

$$hX_B - 2F_Д^{ин}\ell\cos\alpha = 0.$$

Решив эти уравнения, получим

$$Y_A = 2P \text{ и } X_A = X_B = P\ell^2\omega^2 \sin 2\alpha / gh.$$

Список рекомендуемой литературы

Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М.. 1964.Главы 27, 29.

Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М., 1986. Главы 26, 27.

Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. – М., 2004. Ч.2. Главы 13, 16.

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М., 1986 и последующие издания.

Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. – М., 1978 и последующие издания.

Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. – М., 1968. Ч.2, глава 9, § 6; глава 10, § 2.

Требования к студентам

Задачи, рекомендуемые для практических занятий [4]: №№ 39.2, 39.3, 39.15, 39.19, 41.1, 41.2, 41.5, 41.10.

Задания для самостоятельной работы в виде расчетно-графических работ:

Задание Д-6 из [5] или аналогичное задание из методических разработок кафедры.

Студент должен знать

Какой вид имеют дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела?

Каким видом дифференциальных уравнений плоскопараллельного движения твердого тела удобно пользоваться, если задана траектория центра масс тела?

В чем заключается сущность принципа Даламбера для материальной точки?

Каковы модуль и направление главного вектора сил инерции?

К чему приводятся силы инерции точек твердого тела:

а) при поступательном движении тела?

б) при плоскопараллельном движении тела, имеющего плоскость материальной симметрии?

Каково число и каков вид уравнений, выражающих принцип Даламбера для несвободной механической системы в проекциях на оси координат, в случаях, когда задаваемые внешние силы, реакции связей и силы инерции материальных точек твердого тела образуют:

а) плоскую систему параллельных сил?

б) произвольную плоскую систему сил?

в) систему параллельных сил в пространстве?

г) произвольную систему сил в пространстве?

Студент должен уметь

Составлять дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела в проекциях на оси декартовых координат.

Составлять дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела в проекциях на естественные оси координат.

Находить модуль и направление вектора силы инерции материальной точки.

С применением принципа Даламбера составлять необходимое число уравнений равновесия в различных случаях полученных систем сил.

Тесты 6 модуля

Диск массой 1 кг летит в вертикальной плоскости согласно уравнениям: xC = 0; yC = 14(1 – e- 0, 981t) – 10t; φ =3t. В момент времени 0,5 с значение главного вектора внешних сил равно…

7,92 8,83 8,25 7,29 9,01

Материальная точка массой 2 кг скользит по негладкой горизонтальной плоскости под действием силы 10 Н, составляющей 30° с горизонтальной плоскостью. Если коэффициент трения равен 0,1, то ускорение материальной точки равно…

4,9 3,6 5,1 2,7 2,9

Материальная точка массой 1 кг опускается по наклонной плоскости с углом наклона 30°. На нее действует суммарная сила сопротивления R = 0,11v, где v – скорость движения точки в м/с. Тогда наибольшая скорость точки равна…

44,6 37,9 51,3 49,7 39,8

Луна движется вокруг Земли на расстоянии 384 400 км от центра Земли с орбитальной скоростью 163 м/с. Масса Луны равна

7,35 • 1022 кг. Тогда сила в ЭН, с которой Земля притягивает Луну, равна…

4,76 6,81 5,62 5,08 4,82

Тело массой 20 кг движется поступательно с ускорением 20 м,с2. Тогда модуль главного вектора сил инерции равен…

600 500 300 200 400

Тело массой 10 кг движется поступательно по горизонтальной плоскости. Каждая точка тела движется по окружности радиуса 0,5 м с постоянной скоростью 1,5 м/с. Тогда модуль горизонтальной составляющей главного вектора внешних сил, действующих на тело, равен…

45 53 39 52 37

Движение однородного стержня массой 3 кг описывается уравнениями: xC = 1,2 м; yC = 0,001cos314t; φ = 0,01cos314t. Тогда при

0 с проекция вектора внешних сил на ось Оу равна…

- 321 - 296 188 216 339

Обруч летит в вертикальной плоскости согласно уравнениям:

xC = 3 м; yC = 4t – 4,9 t2; φ = 28(1 – e- 0, 1t). Момент инерции обруча относительно центральной оси симметрии равен 0,113 кг• м2. Тогда в момент времени 0,3 с значение главного момента внешних сил, действующих на обруч, равно…

0,041 - 0,031 - 0,029 0,037 0,025

Диск движется согласно уравнениям: xC = 10t; yC = 1,5 + 0,1sin2πt; φ = 0,1sin2πt. Момент инерции диска относительно центральной оси симметрии равен 7 500 кг• м2. Тогда в момент времени 11,1 с значение главного момента внешних сил, действующих на диск, относительно центральной оси симметрии в кН • м равно…

17,4	18,4	16,4	19,4	20,4

Материальная точка массой 0,6 кг колеблется на вертикальной пружине согласно закону x = 25 + 3sin20t (см). Тогда в момент времени 2 с модуль реакции пружины равен…

12,9	10,4	11,3	14,8	9,8

Материальная точка массой 1 кг колеблется на вертикальной пружине в густой смазке с силой сопротивления $\vec{R}$ = - 0,1 $\vec{v}$. В момент времени, когда ускорение точки равно 14 м/с2 и скорость точки равна

2 м/с, то реакция пружины равна…

22,9	20,7	24,1	23,6	21,4

Материальная точка движется в вертикальной плоскости по внутренней поверхности цилиндра (ось цилиндра горизонтальна) радиуса 9,81 м. В самом верхнем положении точки не произойдет ее отрыва от цилиндра при минимальной скорости точки равной…

8,35	9,81	3,14	7,92	6.37

Материальная точка массой 10 кг движется по окружности радиуса 3 м согласно закона s = 4t3. Тогда в момент времени 1 с модуль силы инерции точки равен…

439	671	537	894	777

Материальная точка массой 4 кг движется по окружности радиуса 4 м согласно закона s = 0,5t2 + 0,5sin4t Тогда в момент времени 5 с модуль силы инерции точки равен…

42,2	35,9	29,5	47,9	38,7

Модуль 7

В настоящем модуле выводятся принцип возможных перемещений и общее уравнение динамики. Приводятся основные понятия и определения, на основе которых формулируется принцип возможных перемещений для механической системы. Введением понятия идеальных связей и используя принцип Даламбера и принцип возможных перемещений, получено общее уравнение динамики. Рассмотрены примеры решения задач.

7.1. Принцип возможных перемещений

Возможными (или виртуальными) перемещениями несвободной механической системы называются воображаемые бесконечно малые перемещения, допускаемые в данный момент наложенными на систему связями.

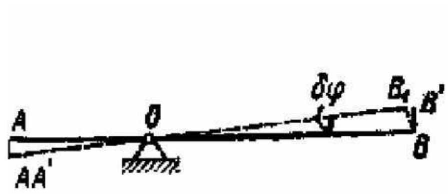


Рис.1

Рис.1

Возможные перемещения точек системы рассматривают как величины первого порядка малости, пренебрегая при этом величинами высших порядков малости. Поэтому криволинейные перемещения точек заменяют прямолинейными отрезками, отложенными по касательным к траекториям точек, и обозначают $\overline{\delta S}$. Так, например, возможным перемещением рычага AB (рис.1) является его поворот на бесконечно малый угол $\delta\varphi$ вокруг точки O. При этом повороте точки A и B должны переместиться по дугам окружностей AA_1 и BB_1.

С точностью до величин первого порядка малости эти перемещения заменяют возможными перемещениями $\overline{\delta S}_A = \overline{AA'}$ и $\overline{\delta S}_B = \overline{BB'}$ в виде прямолинейных отрезков, отложенных по касательным к траекториям точек, а по величине равных

$$\delta S_A = OA \cdot \delta\varphi, \quad \delta S_B = OB \cdot \delta\varphi.$$

Силы, действующие на несвободную точку или механическую систему, делят на задаваемые силы и реакции связей.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек $M_1, M_2,...M_n$, подчиненную связям: реакции связей обозначим $\overline{R}_1, \overline{R}_2,....\overline{R}_n$ (рис.2). Сообщим системе какое-либо возможное перемещение; возможные перемещения точек системы обозначим $\overline{\delta S}_1, \overline{\delta S}_2,....\overline{\delta S}_n$. Вычислим сумму работ реакций $\overline{R}_1, \overline{R}_2,....\overline{R}_n$ на этих перемещениях.

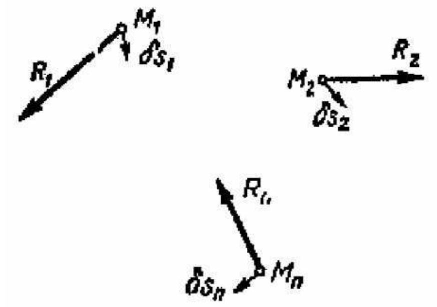


Рис.2

Если сумма работ реакций связей на любом возможном перемещении системы равна нулю, то такие связи называются идеальными.

Согласно этому определению, для идеальных связей

$$\sum R_i \delta S_1 \cos(\overline{R}_i, \overline{\delta S}_i) = 0 \quad (1)$$

При решении задач статики для определения реакций связей использовались уравнения равновесия твердого тела. При этом реакции связей не выделялись из общего числа приложенных к телу сил. В сложных несвободных механических системах определение реакций связей с помощью уравнений равновесия становится громоздким. В этих случаях целесообразно использовать принцип возможных перемещений, который формулируется так: необходимое и достаточное условие равновесия системы сил, приложенной к механической системе, подчиненной стационарным, двусторонним и идеальным связям, заключается в равенстве нулю суммы элементарных работ задаваемых сил на любом возможном перемещении системы из рассматриваемого ее положения

$$\sum P_i \delta S_i \cos(\overline{P}_i, \overline{\delta S}_i) = 0 \quad (2)$$

Если в каждую точку M_i системы из некоторого центра O провести вектор $\overline{r}_i$, то возможное перемещение этой точки $\overline{\delta S}_i$ будет соответствующим возможным приращением радиуса вектора точки

$$\overline{\delta S}_i = \overline{\delta r}_i \qquad (i = 1,2\ldots n).$$

Тогда уравнение работ (2) примет вид

$$\sum \overline{P}_i \overline{\delta r}_i = 0 \quad (3)$$

Если воспользоваться аналитическим выражением элементарной работы, то уравнение (3) можно представить в виде

$$\sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0, \quad (4)$$

где X_i, Y_i, Z_i и $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ - проекции соответственно задаваемой силы и возможного перемещения на неподвижные оси декартовых координат.

Если система имеет одну степень свободы, то одно из равенств (2), (3) или (4) устанавливает сразу условие равновесия задаваемых сил, приложенных к системе. Если же система имеет несколько степеней свободы, то уравнения работ составляют для каждого независимого перемещения системы в отдельности. Таким образом, получается столько условий равновесия системы, сколько степеней свободы она имеет.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. К рукоятке AB винтового пресса приложена пара $(\overline{P}, -\overline{P})$, лежащая в горизонтальной плоскости, причем силы этой пары направлены перпендикулярно к AB. Найти силу, сжимающую прессуемое тело, если шаг винта равен h, а длина $AB = 2\ell$ (рис.3).

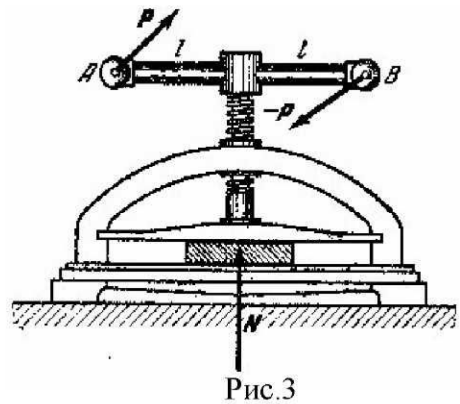


Рис.3

Решение. Обозначим через $\overline{N}$ вертикальную реакцию сжимаемого тела и дадим системе возможное перемещение, для чего повернем рукоятку AB на угол $\delta\varphi$ по часовой стрелке (если смотреть сверху). При этом система кроме этого вращательного перемещения получит и поступательное перемещение, равное по модулю δS и направленное по вертикали вниз. Уравнение, выражающее условие равновесия системы, будет иметь вид

$$2P\ell \cdot \delta\varphi - N\delta S = 0.$$

Отсюда

$$N = 2P\ell \cdot \delta\varphi / \delta S.$$

Найдем теперь зависимость между $\delta\varphi$ и δS. Так как поступательное перемещение винта пропорционально углу поворота его вокруг винтовой оси, и так как винт при повороте на угол, равный 2π, перемещается вдоль оси на расстояние, равное шагу h, то получим следующее соотношение

$$\frac{\delta\varphi}{2\pi} = \frac{\delta S}{h}.$$

Отсюда находим

$$\delta\varphi = 2\pi \cdot \delta S / h.$$

Подставив это значение $\delta\varphi$ в выражение для N, окончательно получим

$$N = 4\pi P\ell / h.$$

Искомая сила, сжимающая тело, равна по модулю найденной реакции N.

Пример 2. Найти условие равновесия кривошипно-шатунного механизма под действием горизонтальной силы $\overline{P}$, приложенной к ползуну B, и силы $\overline{Q}$, приложенной к пальцу кривошипа A и перпендикулярной к OA (рис.4)

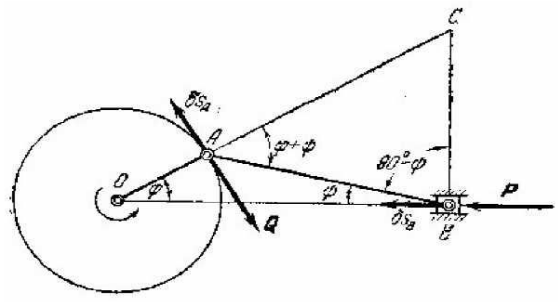


Рис.4

Решение. Сообщив механизму возможное перемещение и приравнивая нулю сумму работ $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ на этом перемещении , получим

$$P\delta S_B - Q\delta S_A = 0.$$

Отсюда получим

$$Q/P = \delta S_B / \delta S_A,$$

где δS_B и δS_A - модули возможных перемещений точек B и A, при этом перемещение точки B направлено по OB, а перемещение точки A - по касательной к ее траектории, то есть перпендикулярно к кривошипу OA. Чтобы найти зависимость между δS_A и δS_B, построим мгновенный центр скоростей C шатуна AB, который находится в точке пересечения перпендикуляров AC и BC к направлениям возможных перемещений (или скоростей) точек A и B. Согласно свойству мгновенного центра скоростей, эти перемещения пропорциональны расстояниям точек A и B от мгновенного центра скоростей шатуна, то есть

$$\delta S_B / \delta S_A = BC / AC,$$

откуда

$$Q/P = BC/AC.$$

Обозначим угол AOB через φ, угол наклона шатуна - через ψ; тогда

$$\angle CAB = \varphi + \psi, \quad \angle ABC = 90^0 - \psi.$$

Из треугольника ABC по теореме синусов находим

$$BC/AC = \sin(\varphi + \psi)/\cos\psi.$$

Следовательно,

$$Q/P = \sin(\varphi + \psi)/\cos\psi.$$

Таково условие, которому должны удовлетворять силы Q и P при равновесии.

7.2. Общее уравнение динамики

Согласно принципу Даламбера для несвободной механической системы геометрическая сумма главных векторов задаваемых сил, реакций связей и сил инерции материальных точек системы равна нулю. Отсюда на основании принципа возможных перемещений следует, что сумма элементарных работ всех этих сил при всяком возможном перемещении системы равна нулю. Но если на систему наложены идеальные связи, то сумма работ реакций таких связей при всяком возможном перемещении системы равна нулю. Поэтому, в случае идеальных связей сумма элементарных работ задаваемых сил и сил инерции точек системы при любом ее возможном перемещении равна нулю.

С учетом (4), будем иметь

$$\sum\left(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i\right) + \sum\left(\Phi_{ix}\delta x_i + \Phi_{iy}\delta y_i + \Phi_{iz}\delta z_i\right) = 0. \quad (5)$$

Представим проекции сил инерции Φ_{ix}, Φ_{iy} и Φ_{iz} в виде

$$\Phi_{ix} = -m_i\ddot{x}_i, \quad \Phi_{iy} = -m_i\ddot{y}_i, \quad \Phi_{iz} = -m_i\ddot{z}_i, \quad (6)$$

где $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$ - проекции ускорения точки системы на координатные оси; m_i - масса i -ой точки.

Подставив (6) в равенство (5), окончательно получим

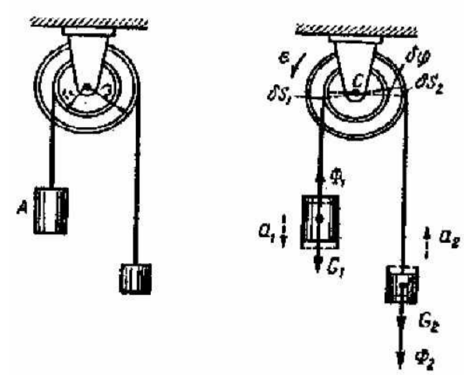
$$\sum\left[\left(X_i - m_i\ddot{x}_i\right)\delta x_i + \left(Y_i - m_i\ddot{y}_i\right)\delta y_i + \left(Z_i - m_i\ddot{z}_i\right)\delta z_i\right] = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7), полученное на основании двух основных принципов механики – принципа Даламбера и принципа возможных перемещений – называется общим уравнением динамики. От общего уравнения статики (4) оно отличается только тем, что, кроме проекций задаваемых сил на координатные оси, в него входят еще проекции сил инерции на те же оси.

Заметим, что общее уравнение динамики позволяет составлять дифференциальные уравнения движения любой механической системы.

Рассмотрим пример.

Пример 3. Барабаны радиусов r_1 и r_2, соединенные между собой жестко, могут вращаться вокруг горизонтальной оси. На барабан намотаны нерастяжимые нити, к концам которых подвешены груз A веса G_1 и груз B веса G_2. Система движется под действием сил тяжести грузов. Определить угловое ускорение барабанов, пренебрегая их массами и массой нитей (рис.5а)



а) рис.5 б)

Решение. Предположим, что соотношение весов грузов таково, что барабаны вращаются с угловым ускорением ε в направлении, обратном направлению вращения часовой стрелки (рис.5б).

Заданная механическая система имеет одну степень свободы и состоит из двух грузов, движущихся поступательно. Нити и барабаны, массы которых не учитываются, являются связями.

Покажем заданные силы тяжести $\overline{G}_1$ и $\overline{G}_2$. Силы инерции точек каждого груза, движущегося поступательно, приводятся к равнодействующей силе, приложенной в центре масс груза. Приложим к грузам условно силы инерции $\overline{\Phi}_1$ и $\overline{\Phi}_2$, направив их противоположно ускорениям грузов $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$. Так как ускорения грузов равны вращательным ускорениям точек ободов барабанов, то модули сил инерции будут равны

$$\Phi_1 = m_1 a_1 = m_1 a_1^{вр} = G_1 r_1 \varepsilon / g;$$

$$\Phi_2 = m_2 a_2 = m_2 a_2^{вр} = G_2 r_2 \varepsilon / g.$$

Сообщим системе возможное перемещение, повернув барабаны на угол $\delta\varphi$ по направлению их действительного вращения. Возможные перемещения грузов равны возможным перемещениям точек ободов барабанов

$$\delta S_1 = r_1 \delta\varphi; \quad \delta S_2 = r_2 \delta\varphi.$$

Составим общее уравнение динамики в виде (5)

$$G_1 \delta S_1 - \Phi_1 \delta S_1 - G_2 \delta S_2 - \Phi_2 \delta S_2 = 0.$$

Подставив в это уравнение значения возможных перемещений $\delta S_1, \delta S_2$ и сил инерции Φ_1, Φ_2, определим угловое ускорение барабанов

$$\varepsilon = (G_1 r_1 - G_2 r_2) g / (G_1 r_1^2 + G_2 r_2^2).$$

Список рекомендуемой литературы

1. Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М.. 1964.Главы 25, 27.

2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М., 1986. Глава 28.

Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. – М., 2004. Ч.2. Главы 17, 18.

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М., 1986 и последующие издания.

Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. – М., 1978 и последующие издания.

Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. – М., 1968. Ч.2, глава 10, § 4; § 5.

Требования к студентам

Задачи, рекомендуемые для практических занятий [4]: №№ 46.1, 46.2,

46.3,46.9, 46.10, 46.14, 47.1, 47.2, 47.3, 47.7, 47.9, 47.11, 47.15.

Задания для самостоятельной работы в форме расчетно-графических работ: Задание Д-14 из [5] или аналогичное задание из методических разработок кафедры.

Студент должен знать

Что называют возможными перемещениями механической системы?

Какие связи называют идеальными?

Как формулируется принцип возможных перемещений?

Как составляются уравнения работ для сил, действующих на механическую систему с несколькими степенями свободы?

Какова формулировка общего уравнения динамики?

Какой вид имеет общее уравнение динамики?

Студент должен уметь

Определять число степеней свободы механической системы.

Находить зависимость между возможными перемещениями отдельных точек механической системы.

Составлять уравнения работ для несвободной механической системы с идеальными связями.

Составлять общее уравнение динамики в проекциях на координатные оси.

Тесты 7 модуля

Твердое тело совершает движение, имея одну закрепленную точку. Тогда число степеней свободы этого тела равно…

1 2 3 4 5

Материальные точки 1, 2, 3, 4 и 5 движутся в пространстве. На материальную точку 1 наложена связь, уравнение которой имеет вид

x2 + y2 – 25 = 0. Связь, наложенная на точку 2, имеет вид

x2 + y2 + z2 – 25t2 ≤ 0. На материальную точку 3 наложена связь, уравнение которой имеет вид x2 + y2 + z2 – 25 = 0. Связь, наложенная на точку 4, имеет вид x2 + y2 = 25. На материальную точку 5 наложена связь, уравнение которой имеет вид x2 + z2 – 25 = 0. Тогда голономная неудерживающая связь наложена на точку…

1 2 3 4 5

Отношение между возможными перемещениями точек А и В прямолинейного стержня АВ, которые образуют с направлениями стержня соответственно углы 30° и 60°, равно…

0,577 0,867 0,254 0,481 0,365

Зубчатая передача состоит из двух колес с числом зубьев

z2 = 2 z1. На колесо 1 действует пара сила с моментом 10 Н•м. Тогда в случае равновесия передачи модуль момента пары сил, действующей на колесо 2, равен…

17 25 31 20 14

Грузы 1 и 2 (масса груза 1 в 2 раза меньше массы груза 2) прикреплены к тросу, переброшенному через блок, ось вращения которого неподвижна и горизонтальна. Тогда ускорение грузов равно…

2,94 4,83 3,75 2,53 3,27

К горизонтальной зубчатой рейке массой 2,5 кг приложена переменная сила F = 9t2. Зубчатое колесо, находящееся в зацеплении с зубчатой рейкой, имеет радиус 0,4 м и момент инерции относительно неподвижной оси вращения, равный 2 кг•м2. Тогда в момент времени

1 с угловое ускорение шестерни равно…

1,5 2,1 0,6 2,5 0,9

На материальную точку 1 наложена связь, уравнение которой имеет вид $x2 + y2 - 25 = 0$. Связь, наложенная на точку 2, имеет вид

$x2 + y2 + z2 - 25t2 = 0$. На материальную точку 3 наложена связь, уравнение которой имеет вид $x2 + y2 + z2 - 25t = 0$. Связь, наложенная на точку 4, имеет вид $x2 + y2 = 25t3$. На материальную точку 5 наложена связь, уравнение которой имеет вид $x2 + z2 - 25t4 = 0$. Тогда голономная стационарная связь наложена на точку…

1 2 3 4 5

Материальная точка двигается в плоскости Oxy по трубке, расположенной вдоль оси Ox. Тогда число степеней свободы этой точки равно…

1 2 3 4 5

Материальная точка свободно двигается в пространстве. Тогда число степеней свободы этой точки равно…

1 2 3 4 5

Оси вращения двух конических зубчатых колес неподвижны и перпендикулярны. Радиус колеса 1 равен 0,15 м, а радиус колеса 2 равен 0,3 м. Момент инерции колеса 1 относительно оси вращения равен 0,02 кг ● м2, а момент инерции колеса 2 относительно оси вращения равен 0,04 кг ● м2. На колесо 1 действует момент пары сил равный 0,15 Н ● м. Тогда угловое ускорение колеса 1 равно…

1 2 3 4 5

Зубчатое колесо, находящееся в зацеплении с зубчатой рейкой, имеет радиус 0,1 м и момент инерции относительно неподвижной оси вращения, равный 0,01 кг ● м2. К шестерне приложена пара сил с моментом равным 1,4 Н ● м. Масс рейки равна 1 кг. Тогда угловое ускорение шестерни равно…

20 21 22 23 24

К звездочке 1 цепной передачи велосипеда радиуса 0,05 м приложена пара сил с моментом равным 0,15 Н ● м. Радиус звездочки 2 равен 0,1 м. Момент инерции звездочки 1 относительно оси вращения равен 0,01кг ● м2, а момент инерции звездочки 2 относительно оси вращения равен 0,02 кг ● м2. Тогда угловое ускорение звездочки 1 равно…

9 10 11 12 13

Модуль 8

В настоящем модуле рассмотрены вынужденные колебания материальной точки и элементарная теория удара. Введением понятий восстанавливающей и возмущающей сил получено решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний материальной точки при отсутствии сопротивления среды. Приведено решение задачи в случае, когда частота возмущающей силы равна частоте собственных колебаний (резонанс). С использованием понятий ударной силы и времени удара выведено основное уравнение теории удара. Рассмотрены случаи прямого и косого удара тела о неподвижную преграду. Получена зависимость между углом падения и углом отражения при косом ударе. Рассмотрены примеры решения задач.

8.1. Вынужденные колебания материальной точки

Колебательное движение материальной точки происходит при условии, если на точку M, отклоненную от положения покоя O, действует сила $\overline{P}$, стремящаяся вернуть точку в это положение. Такая сила называется восстанавливающей.

Колебания, совершающиеся под действием только восстанавливающей силы, называются свободными.

Рассмотрим важный случай колебаний, возникающих когда на точку M кроме восстанавливающей силы $\overline{P}$ (рис.1), пропорциональной расстоянию от положения покоя O, действует еще периодически изменяющаяся $\overline{Q}$, проекция которой на ось Ox равна

$$Q_x = Q_o \sin pt \quad (1)$$

Эта сила называется возмущающей силой, а колебания, происходящие при действии такой силы называются вынужденными. Величина p в равенстве (1) является частотой возмущающей силы.

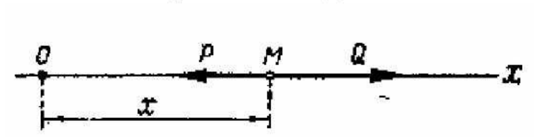


Рис.1

Учитывая, что проекция восстанавливающей силы $\overline{P}$ на ось Ox равна $P_x = -cx$, дифференциальное уравнение движения точки M запишется в виде

$$m\ddot{x} = -cx + Q_o \sin pt, \quad (2)$$

где m - масса точки; c - коэффициент пропорциональности, характеризующий восстанавливающую силу.

Разделим обе части последнего уравнения на m и введем обозначения

$$c/m = k^2, \quad Q_o/m = P_o. \quad (3)$$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$\ddot{x} + k^2x = P_o \sin pt. \quad (4)$$

Уравнение (4) является дифференциальным уравнением вынужденных колебаний точки при отсутствии сопротивления.

Как известно из теории дифференциальных уравнений, его решением будет $x = x_1 + x_2$, где x_1 - общее решение уравнения (4) без правой части, то есть решение уравнения свободных колебаний, а x_2 - какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения (4).

Из теории свободных колебаний известно, что $x_1 = A\sin(kt + \alpha)$, где A и α - постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Полагая, что $p \neq k$, будем искать решение x_2 в виде $x_2 = B\sin pt$, где B - постоянная величина, которую надо подобрать так, чтобы равенство (4) обратилось в тождество. Подставляя значение x_2 и его второй производной в уравнение (4), получим

$$-p^2 B\sin pt + k^2 B\sin pt = P_o \sin pt.$$

Это равенство будет выполняться при любом t, если $B(k^2 - p^2) = P_o$, откуда

$$B = P_o/(k^2 - p^2).$$

Таким образом, искомое частное решение будет

$$x_2 = P_o \sin pt/(k^2 - p^2). \quad (5)$$

Так как $x = x_1 + x_2$, то общее решение уравнения (4) имеет окончательно вид

$$x = A\sin(kt + \alpha) + P_o \sin pt/(k^2 - p^2). \quad (6)$$

Решение (6) показывает, что колебания точки слагаются в этом случае из:

1) колебаний с амплитудой A (зависящей от начальных условий) и частотой k, называемых собственными колебаниями; 2) колебаний с амплитудой B (не зависящей от начальных условий) и частотой p, которые называются вынужденными колебаниями.

На практике, благодаря неизбежному наличию тех или иных сопротивлений, собственные колебания будут довольно быстро затухать. Поэтому основное значение в рассматриваемом движении имеют вынужденные колебания, закон которых дается уравнением (5).

Как видно, частота p вынужденных колебаний равна частоте возмущающей силы. Амплитуду этих колебаний, если разделить числитель и знаменатель на k^2, можно представить в виде

$$B = \frac{P_o}{|k^2 - p^2|} = \frac{\lambda_o}{|1 - p^2/k^2|}, \quad (7)$$

где согласно (3) $\lambda_o = P_0/k^2 = Q_0/c$, т.е. λ_o есть величина статического отклонения точки под действием силы Q_o. Введем обозначения

$$z = p/k, \quad \eta = B/\lambda_o. \quad (8)$$

Безразмерный коэффициент η называют коэффициентом динамичности. Он показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний B (т.е. максимальное отклонение точки от центра колебаний) больше статического отклонения λ_o, и зависит от отношения частот z.

Из формулы (7) видно, что подбирая различные соотношения между p и k, можно получить вынужденные колебания с разными амплитудами. При $p = 0$ (или $p << k$) амплитуда равна λ_o

(или близка к ней). Если величина p близка к k, амплитуда B становится очень большой. Наконец, когда $p >> k$, амплитуда B становится очень малой (практически близка к нулю).

В случае, когда $p = k$, то есть когда частота возмущающей силы равна частоте собственных колебаний, имеет место так называемое явление резонанса. Формулами (5), (7) этот случай не описывается, но нетрудно заметить, что размахи вынужденных колебаний при резонансе будут со временем неограниченно возрастать так, как это показано на рис.2.

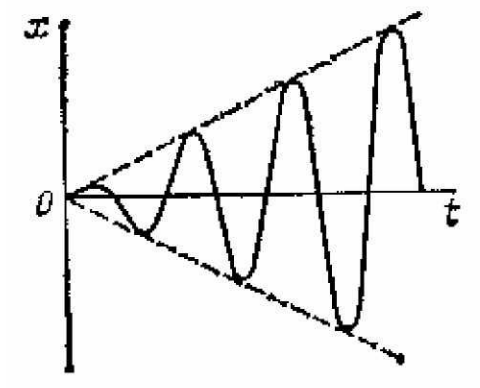


Рис.2

Ниже приводится (без вывода) закон вынужденных колебаний при резонансе ($p = k$) в случае отсутствия сопротивления среды

$$x_2 = -P_o t \cos pt / 2p \quad (9)$$

Как видно из (9), размахи вынужденных колебаний при резонансе действительно возрастают пропорционально времени, и закон этих колебаний имеет вид, показанный на рис.2.

Из полученных результатов вытекает, что вынужденные колебания обладают следующими свойствами, отличающими их от собственных колебаний точки:

а) амплитуда вынужденных колебаний от начальных условий не зависит;

б) частота вынужденных колебаний равна частоте возмущающей силы и от характеристик колеблющейся системы не зависит (возмущающая сила «навязывает» системе свою частоту колебаний);

в) даже при малой возмущающей силе (Q_o мало) можно получить интенсивные вынужденные колебания, если частота p близка к k (резонанс);

г) даже при больших значениях возмущающей силы вынужденные колебания можно сделать сколь угодно малыми, если частота p будет много больше k.

Во многих инженерных сооружениях явление резонанса крайне нежелательно и его следует избегать, подбирая соотношение между частотами p и k так, чтобы амплитуды вынужденных колебаний были практически равны нулю ($p >> k$).

Противоположный пример мы имеем в радиотехнике, где резонанс оказывается очень полезным и используется для отделения сигналов одной радиостанции от сигналов всех остальных (настройка приемника).

Рассмотрим пример.

Пример 1. Исследовать вынужденные колебания груза 1 массы m, подвешенного на пружине с коэффициентом жесткости c, если верхний конец D пружины совершает вертикальные колебания по закону $\xi = a_o \sin pt$.

Решение. Поместим начало координат O в положение статического равновесия груза и направим ось Ox по вертикали вниз (рис.3).

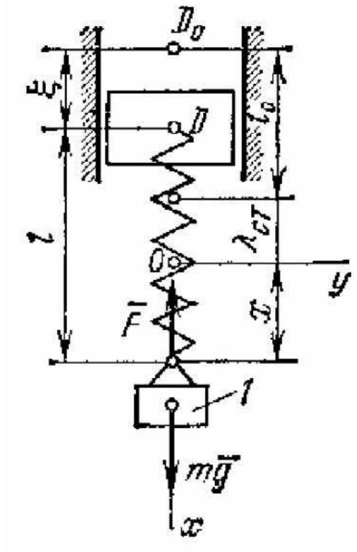


Рис.3

Если обозначить длину недеформированной пружины через ℓ_o, то ее длина в произвольный момент времени будет $\ell = \ell_o - \xi + \lambda_{cm} + x$, а удлинение $\lambda = \ell - \ell_o = \lambda_{cm} + x - \xi$. Тогда действующая на груз сила упругости

$F = c\lambda = c(\lambda_{cm} + x - \xi)$.

Составим дифференциальное уравнение движения груза

$$m\ddot{x} = -c\lambda + mg.$$

Учитывая, что $c\lambda_{cm} = mg$, получим

$$m\ddot{x} = -cx + c\xi.$$

Введя обозначение $c/m = k^2$, последнее уравнение примет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = k^2 a_o \sin pt.$$

Так как полученное уравнение совпадает с уравнением (4), если в нем считать $P_o = k^2 a_o$, то, следовательно, груз будет совершать вынужденные колебания. В данном случае $\lambda_o = a_o$, а амплитуда вынужденных колебаний определится по формуле (7).

Если $p << k$ (верхний конец пружины колеблется очень медленно), то согласно (7) и (8) получим, что $z \approx 0$ $B_o \approx 0$. Груз будет при этом колебаться так, как если бы пружина была жестким стержнем. При $p = k$ наступает резонанс, и размахи колебаний начнут сильно возрастать. Наконец, когда p будет много больше k ($z >> 1$), амплитуда $B \approx 0$. Груз при этом будет оставаться в положении статического равновесия (в точке O), хотя верхний конец пружины и совершает колебания с амплитудой a_o (частота этих колебаний столь велика, что груз как бы не успевает за ними следовать).

8.2. Элементарная теория удара

При движении тела под действием обычных сил скорости точек тела изменяются непрерывно, т.е. каждому бесконечно малому промежутку времени τ соответствует бесконечно малое приращение скорости. Однако если в числе действующих сил будут очень большие силы (порядка $1/\tau$), то приращение скорости за малый промежуток времени τ окажется величиной конечной.

Явление, при котором скорости точек тела за очень малый (близкий к нулю) промежуток времени τ изменяются на конечную величину, называется ударом.

Силы, при действии которых происходит удар, будем называть ударными силами $\overline{F}_{уд}$. Промежуток времени τ, в течение которого происходит удар, называют временем удара.

Так как ударные силы очень велики, то в теории удара в качестве меры взаимодействия тел рассматривают не сами ударные силы, а их импульсы. Ударный импульс

$$\overline{S}_{уд} = \int_o^{\tau} \overline{F}_{уд} d\tau = F_{уд.}^{ср.} \tau \qquad (10)$$

является величиной конечной. Импульсы неударных сил за время τ будут величинами очень малыми и ими практически можно пренебречь.

Обозначим скорость точки в начале удара $\overline{V}$, а скорость в конце удара $\overline{U}$. Тогда теорема об изменении количества движения точки при ударе запишется в виде

$$m(\overline{U} - \overline{V}) = \sum_{k=1}^{n} \overline{S}_k \quad , (11)$$

т.е. изменение количества движения материальной точки за время удара равно сумме действующих на точку ударных импульсов. Уравнение (11) является основным уравнением теории удара.

Из полученных результатов следует, что:

а) действием неударных сил за время удара можно пренебречь;

б) перемещениями точек тела за время удара можно пренебречь и считать тело во время удара неподвижным;

в) изменения скоростей точек тела за время удара определяются из уравнения (11).

Значение ударного импульса, появляющегося при соударении двух тел, зависит не только от их масс и скоростей до удара, но и от упругих свойств соударяющихся тел. Эти свойства при ударе характеризуются величиной, называемой коэффициентом восстановления.

Рассмотрим шар, падающий вертикально на неподвижную горизонтальную жесткую плиту (рис.4).

В момент, когда шар достигнет плиты, произойдет удар, называемый прямым. Считая движение шара поступательным, примем скорости частиц шара в момент начала удара равными $\overline{V}$, а в конце удара - $\overline{U}$. Механическая

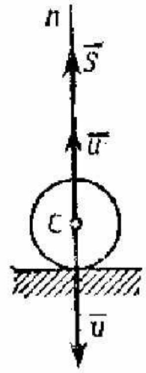


Рис.4

энергия шара полностью не восстанавливается, так как часть ее уходит на сообщение шару остаточных деформаций и его нагревание. Поэтому скорость U меньше скорости V.

Величина k, равная при прямом ударе тела о неподвижную преграду отношению модуля скорости в конце удара к модулю скорости в начале удара, называется коэффициентом восстановления при ударе.

$$k = U / V. \quad (12)$$

Значение коэффициента восстановления для разных тел определяется опытным путем. При изменении скорости V не в очень больших пределах величину k можно считать зависящей только от материала соударяющихся тел.

Различают случай абсолютно упругого удара ($k = 1$), при котором кинетическая энергия тела после удара полностью восстанавливается, а также случай абсолютно неупругого удара ($k = 0$), когда вся кинетическая энергия тела расходуется на его деформацию и нагревание.

Рассмотрим тело (шар) массы M, ударяющееся о неподвижную плиту. Действующей на тело ударной силой будет при этом реакция плиты; импульс этой силы за время удара обозначим через $\bar{S}$. Пусть нормаль к поверхности тела в точке его касания с плитой проходит через центр масс тела. Такой удар тела называется центральным. Если скорость $\bar{V}$ центра масс тела в начале удара направлена по нормали n к плите, то удар будет прямым, в противном случае – косым.

Составляя, в случае прямого удара, основное уравнение теории удара (11) в проекции на нормаль n (рис.4), получим $M(U_n - V_n) = S_n$.

Но при прямом ударе $U_n = U, V_n = -V, S_n = S$.

Следовательно,

$$M(U + V) = S.$$

Из равенства (12) получим второе уравнение, необходимое для решения задачи

$$U = kV.$$

Подставив это значение U в выражение для S, получим

$$S = MV(1 + k). \quad (13)$$

Как видно из (13), ударный импульс будет тем больше, чем больше коэффициент восстановления. Чтобы определить среднюю величину ударной силы (реакции), надо знать время удара τ, которое находится экспериментально.

Рассмотрим теперь случай косого удара. Пусть в этом случае скорость $\overline{V}$ центра масс тела в начале удара образует с нормалью к плите угол α, а скорость $\overline{U}$ в конце удара – угол β (рис.5). Тогда уравнение (11) в проекциях на касательную τ и нормаль n имеет вид

$$M(U_\tau - V_\tau) = 0, \quad M(U_n - V_n) = S.$$

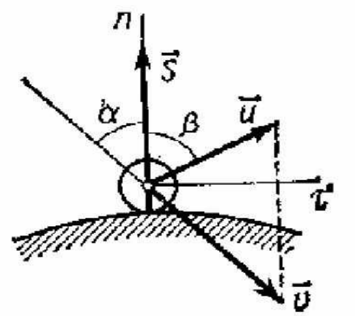


Рис.5

Коэффициент восстановления в данном случае равен отношению модулей $|U_n|$ и $|V_n|$, так как удар происходит только по направлению нормали к поверхности (трением пренебрегаем). Тогда с учетом знаков проекций получим $U_n = -kV_n$. В результате окончательно имеем:

$$U_\tau = V_\tau, \quad U_n = -kV_n, S = M\,|V_n|\,(1+k).$$

Если величины M, V, α и k известны, то из полученных уравнений можно найти модуль и направление скорости $\overline{U}$ и ударный импульс S. В частности, замечая, что $V\tau = |Vn| tg\alpha$ и $U_\tau = |U_n| tg\beta$, из первого равенства получим

$$|U_n| tg\beta = |V_n| tg\alpha,$$

откуда $k = |U_n| / |V_n| = tg\alpha / tg\beta$.

Так как $k < 1$, то $\alpha < \beta$, то есть угол падения всегда меньше угла отражения.

В заключении рассмотрим случай действия ударной силы на твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси z. Допустим, что на это тело в течении весьма короткого времени τ действует ударная сила $\overline{F}$,то есть к телу приложен удар

$$\overline{S} = \int_o^\tau \overline{F} dt. \quad (14)$$

Выясним, как изменится под влиянием этого удара угловая скорость тела. Обозначив угловую скорость тела в начале и в конце удара соответственно через ω_o и ω, и, опуская выкладки, получим

$$\omega - \omega_o = m_z(\overline{S}) / I_z, \quad (15)$$

где $m_z(\overline{S})$ -момент удара относительно оси вращения; I_z -момент тела относительно оси вращения z.

Из (15) следует, что изменение угловой скорости твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, вызываемое приложенным к нему ударом, равно моменту этого удара относительно оси вращения, разделенному на момент инерции тела относительно той же оси.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2. К однородному прямолинейному стержню $OA = \ell$, который может вращаться на шарнире вокруг горизонтальной оси O, приложен в его середине удар $\overline{S}$, перпендикулярный к оси вращения и к направлению стержня. Предполагая, что в начале удара стержень находится в покое, определить его угловую скорость в конце удара, а также модуль и направление ударного импульса, который передается при этом на шарнир O. Масса стержня равна M (рис.6).

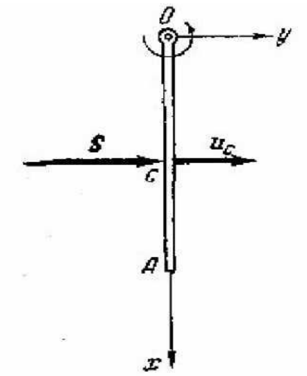


Рис.6

Решение. Искомую угловую скорость найдем по формуле (15), в которой согласно условию задачи нужно принять $\omega_o = 0$.

$$\omega = m_o(\overline{S})/I_o,$$

где $I_o = M\ell^2/3, \quad m_o(\overline{S}) = S\ell/2$.

Тогда для угловой скорости получим

$$\omega = 3S/2M\ell.$$

Обозначим ударный импульс реакции шарнира через $\overline{S}_o$, а скорость центра тяжести C стержня в конце удара – через $\overline{U}_c$. Эта скорость направлена перпендикулярно к стержню и по модулю равна $U_C = \ell\omega/2$.

Учитывая, что скорость центра тяжести стержня в начале удара равна нулю, а также, что изменение проекции на какую-нибудь ось количества движения центра масс тела равно сумме проекций на ту же ось внешних ударов, приложенных к телу, получим

а) $S_{ox} = 0$; б) $S_{oy} + S = MU_c$.

Из уравнения (б) получим

$$S_{oy} = MU_c - S = M\ell\omega/2 - S = 3S/4 - S = -S/4.$$

Так как $S_{ox} = 0$, то $S_o = |S_{oy}| = S/4$.

Знак минус в значении S_{oy} указывает на то, что удар $\overline{S}_o$ направлен по оси y влево. Удар, передающийся на шарнир, будет равен по модулю S_o, но направлен в противоположную сторону, то есть по оси y вправо.

Пример 3. Стальной шар массы $m = 1кг$ падает с высоты $H = 3м$ на стальную плиту. Коэффициент восстановления при ударе равен $k = 0{,}56$, а время удара $\tau = 0{,}0005с$. Определить ударный импульс, а также среднюю величину ударной реакции.

Решение. Скорость шара в начале удара определится по формуле

$$V = \sqrt{2gH} \approx 7{,}7м/с$$

Тогда скорость шара в конце удара по формуле (12) будет равна

$$U = kV = 4{,}3м/с$$

Величина ударного импульса определится по формуле (13)

$$S = MV(1+k) = 12H \cdot c$$

Так как время удара известно, то средняя величина ударной реакции будет равна

$$N_{уд} = S/\tau = 24000H$$

Список рекомендуемой литературы

1. Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М.. 1964.Главы 23, 31.

2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М., 1986. Главы 19,31.

Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. – М., 2004. Ч.2. Главы 3, 15.

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М., 1986 и последующие издания.

Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. – М., 1978 и последующие издания.

Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. – М., 1968. Ч.2. Глава 8, § 4;глава 12 § 1.

Требования к студентам

Задачи, рекомендуемые для практических занятий [4]: №№ 32.78, 32.79,

32.81, 32.84, 44.1, 44.2, 44.3, 44.4, 44.8.

Задания для самостоятельной работы в форме расчетно-графических работ: Задание Д-10 из [5] или аналогичное задание из методических разработок кафедры.

Студент должен знать

Какой вид имеет дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки и каково его общее решение?

Каковы частота и период вынужденных колебаний материальной точки?

От каких факторов зависит амплитуда вынужденных колебаний точки?

Что называют коэффициентом динамичности?

При каком условии возникает резонанс?

Какое явление называется ударом?

Какой эффект имеет действие ударной силы на материальную точку?

Что называют коэффициентом восстановления при ударе и в каких пределах находятся его числовые значения?

Какова зависимость между углами падения и отражения при ударе шара о гладкую неподвижную плоскость?

Какие изменения вносит действие ударных сил во вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси?

Студент должен уметь

Составлять дифференциальное уравнение вынужденных колебаний точки.

Находить частные решения дифференциальных уравнений при различных случаях возмущающей силы.

Находить решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний точки в случае резонанса.

Определять значение коэффициента динамичности при вынужденных колебаниях точки.

Составлять основное уравнение теории удара для материальной точки.

Определять коэффициент восстановления при прямом ударе.

Находить изменение угловой скорости вращающегося вокруг неподвиж-ной оси тела, подверженного удару.

Тесты 8 модуля

Дифференциальное уравнение колебательного движения материальной точки дано в виде $\ddot{x}$ + 10x = 1,5sin(5t + 0,4). Если максимальное значение вынуждающей силы равно 60 Н, то масса точки равна…

50 60 20 40 15

На тело, которое подвешено к пружине, действует вертикальная вынуждающая сила F = 30sin20t. Если угловая частота собственных колебаний тела равна 25 рад/с, то коэффициент динамичности равен…

2,78 1,96 2,31 1,88 3,27

Дифференциальное уравнение колебательного движения материальной точки имеет вид $\ddot{x}$ + 36x = 50sin(5t + 0,8). Тогда коэффициент динамичности равен…

2,95 3,27 2,61 3,87 4,11

На материальную точку массой 0,2 кг, движущуюся со скоростью $\vec{v}_1$ =

= 10$\vec{i}$ - 2$\vec{j}$, подействовала ударная сила. Если скорость точки после удара $\vec{v}_2$ = = - 6$\vec{i}$ + 8$\vec{j}$, то значение ударного импульса равно…

3,77 2,81 2,99 4,17 3,23

На материальную точку массой 0,4 кг, движущуюся со скоростью $\vec{v}_1$ =

$= -3\vec{i} - 4\vec{j}$, подействовал ударный импульс $\vec{s} = 1{,}8\vec{i} + 2{,}4\vec{j}$. Тогда модуль скорости точки после удара равен…

1,4 3,9 2,5 3,1 2,9

На материальную точку подействовал ударный импульс $\vec{s} = 10\vec{i}$. Скорость точки до удара $\vec{v}1 = -10\vec{i}$, скорость после удара $\vec{v}2 = 5\vec{i}$. Тогда масса материальной точки равна…

0,423 0,732 0.845 0, 667 0,587

При прямом ударе материальной точки по неподвижной преграде скорость до удара рана 6 м/с. Если коэффициент восстановления равен 0,5, то скорость точки после удара равна…

1 2 3 4 5

На тело массой 3 кг, которое подвешен к пружине, действует вертикальная вынуждающая сила F = 10sin5t. Если коэффициент динамичности равен 4, то коэффициент жесткости пружины равен…

200 50 100 300 35

На тело массой 50 кг, которое подвешен к пружине, действует вертикальная вынуждающая сила F = 200sin10t. Если амплитуда вынужденных колебаний равна 0,04 м, то коэффициент жесткости пружины в кН/м равен…

10 9 8 7 6

Дифференциальное уравнение вертикального колебательного движения материальной точки на пружине дано в виде

$\ddot{x}$ + 16x = 20sin(6t + 0,7). Если максимальное значение вынуждающей силы равно 80 Н, то коэффициент жесткости пружины равен…

55 64 78 34 40

Дифференциальное уравнение колебательного движения материальной точки дано в виде $5\ddot{x}$ + 320x = 90sin7t. Тогда угловая частота собственных колебаний точки равна…

5 6 7 8 9

При прямом ударе материальной точки по неподвижной преграде скорость до удара рана 8 м/с, а скорость точки после удара равна 6 м/с. Тогда коэффициент восстановления равен…

0,65 0,52 0,75 0,89 0,49

При прямом ударе материальной точки массой 1 кг по неподвижной преграде скорость до удара рана 2 м/с. Если коэффициент восстановления равен 0,6, то потеря кинетической энергии равна…

1,28 1,36 1,15 1,42 1,09

Тело массой 4 кг со скоростью 10 м/с ударяет по неподвижному телу массой 100 кг. Тогда модуль ударного импульса в первой фазе удара равен…

22,9 28,6 32,1 19,2 25,4