ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
СБОРНИК ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ И ДИДАКТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие

Учебное пособие состоит из двух самостоятельных разделов. В первом разделе представлены тестовые задания в виде коротких задач по всем темам курса, предусмотренных учебной программой. Второй раздел учебного пособия представляет собой сборник дидактических материалов по темам, затрагиваемым в задачах. В нем представлены в частности основные термины и определения курса теоретической механики, логические цепочки к решению задач по статике, кинематике, динамике, а также необходимые справочные сведения.

Учебное пособие предназначено для студентов инженерных специальностей, изучающих курс «Теоретическая механика» и раздел «Теоретическая механика» в курсе механики.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Последние десятилетия внесли существенные изменения в регламент многих учебных курсов, в том числе и теоретической механики: значительно сократилось число часов, отводимых для аудиторных занятий, увеличилась доля часов на самостоятельную работу. В то же время учебные программы для отдельных специальностей предусматривают полноценное изучение курса. Наличие этих противоречивых обстоятельств, сопровождающих преподавание теоретической механики, явилось побудительным мотивом для написания учебного пособия, призванного облегчить для студента работу с учебным материалом при самостоятельном решении задач. Особенно очевидной необходимость издания такого пособия стала после анализа результатов федерального интернет-тестирования студентов по теоретической механике.

Учебное пособие состоит из двух разделов, логически связанных друг с другом. В первом – представлены тестовые задания в виде коротких задач по всем темам курса, предусмотренных учебной программой. Второй раздел учебного пособия представляет собой сборник дидактических материалов по темам, затрагиваемым в задачах. В нем представлены, в частности, основные термины и определения теоретической механики, алгоритмы решения задач статики, кинематики и динамики, а также необходимые справочные сведения. Материал во втором разделе учебного пособия расположен таким образом, что читатель легко отыщет информацию для решения той или иной задачи. При этом авторы не претендуют на подмену данным учебным пособием учебников и сборников задач по теоретической механике.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение курса теоретической механики при подготовке инженера имеет две основные цели, первой из которых является создание научной базы для изучения ряда последующих дисциплин «механического» профиля. Второй, менее очевидной целью является достижения такого уровня эрудиции, при достижении которого специалист смог бы в дальнейшем, изучив соответствующий материал, ставить и решать современные научно-технические задачи. Иначе говоря, вторая цель – научить студента учиться.

Достижение этих целей при обучении в высшем техническом учебном заведении невозможно без реализации практической направленности курса теоретической механики - без навыков решения задач.

Предлагаемое учебное пособие имеет именно такую практическую направленность и предназначено для обучения именно таким навыкам.

Однако, приобретение навыков решения задач теоретической механики невозможно без изучения теории (хотя бы в минимальном объёме). Исходя из этого, пособие содержит лишь краткие сведения из теории; поэтому обучающимся следует учитывать, что необходимым условием полного овладения курсом является работа с учебником (учебниками) и конспектом лекций.

Основными функциями процесса обучения в высшем учебном заведении являются обучающая и контролирующая функции. Обе они, как указывается в предисловии, реализованы в настоящем пособии. При этом осуществление этих функций в настоящем пособии позволяет охватить все разделы курса теоретической механики, предусмотренные учебными программами и учебными планами.

Таким образом, предлагаемое учебное пособие содержит все необходимые материалы для решения задач.

Источниками изложенного в пособии материала являются классическая литература по курсу теоретической механики и собственный опыт авторов, включающий в себя, в том числе, знакомство с постановкой вопроса в ведущих вузах страны и подготовку собственных учебных пособий.

В предлагаемом читателю учебном пособии оригинальными являются: сама идея построения пособия, словарь терминов и определений, большинство алгоритмов решения задач, а также элементы всех других дидактических материалов.

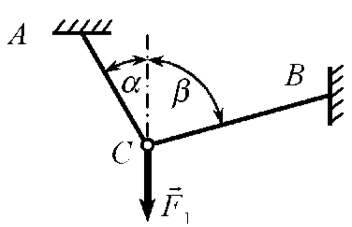
1. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1.1. Статика

1.1.1. Равновесие тела под действием сходящейся системы сил

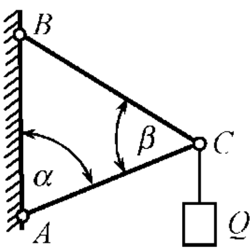
1.1.1.1. Силы $F_1 = F_2 = 10H$ и $\vec{F}_3$ находятся в равновесии. Линии действия сил между собой образуют углы по $120°$. Определить модуль силы $\vec{F}_3$.

1.1.1.2.



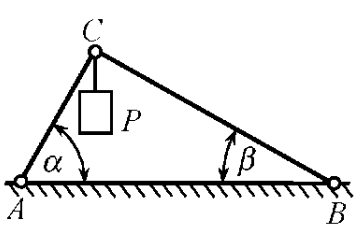
Определить модуль силы $\vec{F}_3$ натяжения троса BC и натяжение троса AC - $\vec{F}_2$. В положении равновесия углы $\alpha = 30°$ и $\beta = 75°$, сила $F_1 = 10H$.

1.1.1.3.



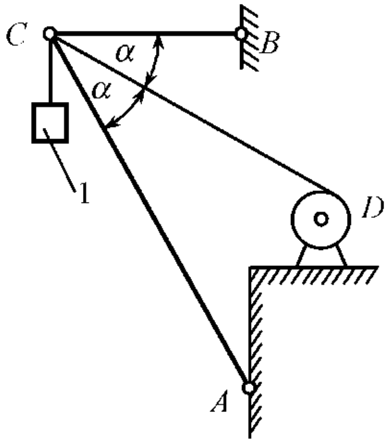
Шарнирный трёхзвенник ABC удерживает в равновесии груз, подвешенный к шарнирному болту C. Вес груза $Q = 6{,}7H$. Заданы углы $\alpha = 60°$ и $\beta = 45°$. Считая стержни AC и BC невесомыми, определить усилие в стержнях AC и BC.

1.1.1.4.



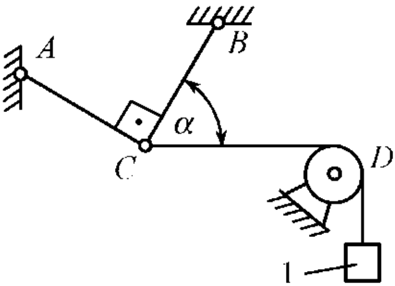
Два невесомых стержня AC и BC соединены в точке C и шарнирно прикреплены к полу. К шарниру C подвешен груз P. Определить реакцию стержня BC, если усилие в стержне AC равно $43H$, углы $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$. Определить также вес груза P.

1.1.1.5.



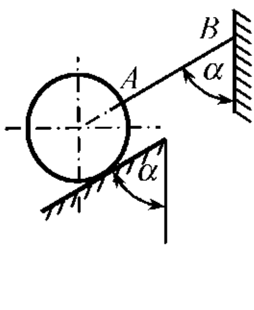
Определить реакцию стержня AC, удерживающего в равновесии груз 1 весом 14 Н с помощью цепи, намотанной на барабан D и перекинутой через блок C, если угол $\alpha = 30^0$. Определить также усилие в стержне BC.

1.1.1.6.



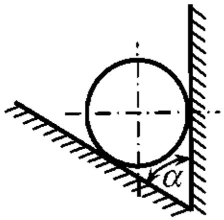
Два стержня AC и BC соединены шарнирно в точке C, к которой через блок D подвешен груз 1 весом $12H$. Определить реакцию стержня BC, если угол $\alpha = 60°$, и реакцию стержня AC.

1.1.1.7.



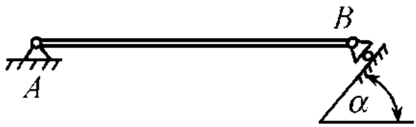
Однородный шар весом $12H$ удерживается в равновесии на гладкой наклонной плоскости с помощью веревки AB. Определить давление шара на плоскость, если угол $\alpha = 60°$. Определить также натяжение веревки AB.

1.1.1.8.



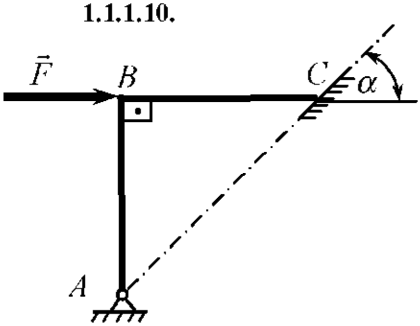
Однородный шар весом $40H$ опирается на две плоскости, пересекающиеся под углом $\alpha = 60°$. Определить давление шара на наклонную плоскость и на вертикальную плоскость.

1.1.1.9.



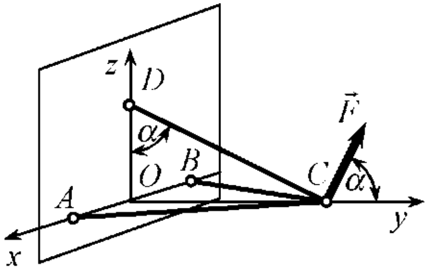
Вес однородной горизонтальной балки AB равен $180H$. Задан угол $\alpha = 45°$. Определить реакции шарнира A и шарнира B.

1.1.1.10.



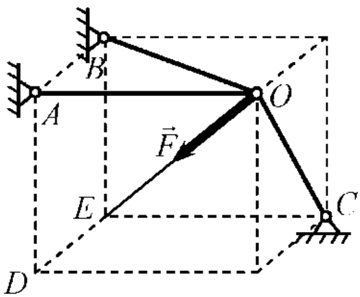
Изогнутый стержень ABC прикреплен к полу посредством шарнира A, а другой его конец C свободно опирается на гладкую плоскость, образующую угол $\alpha = 45°$ с горизонтом. Определить реакции шарнира и плоскости, если на стержень действует сила $F = 10H$.

1.1.1.11.



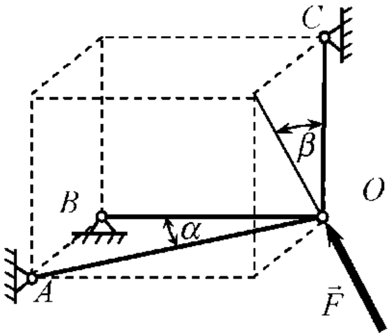
Три стержня AC, BC и DC соединены шарнирно в точке C. Определить усилие в стержне DC, если заданы сила $F = 50H$ и угол $\alpha = 60°$. Сила $\vec{F}$ находится в плоскости yOz.

1.1.1.12.



Три стержня AO, BO и CO соединены в шарнире O. Определить реакцию стержня CO, возникающую под действием силы $F = 12H$, приложенной к шарниру O, если расстояния $AB = AO = AD$. Сила $\vec{F}$ направлена по OE.

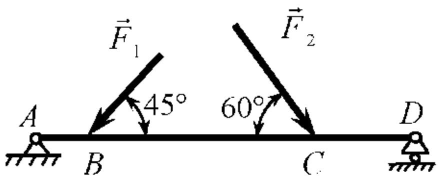
1.1.1.13.



Три стержня AO, BO и CO шарнирно-стержневой конструкции соединены в точке O, к которой приложена сила $F = 18H$. Определить усилия в стержнях AO, OC и OB, если углы $\alpha = 30°, \beta = 45°$.

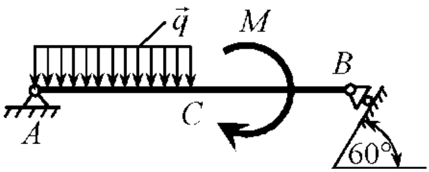
1.1.2. Равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил

1.1.2.1.



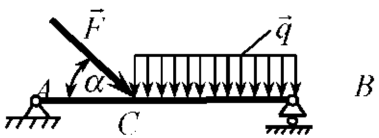
Определить реакцию опоры D, если силы $F_1 = 84{,}6H$; размеры $AB = 1м$, $BC = 3м$, $CD = 2м$.

1.1.2.2.



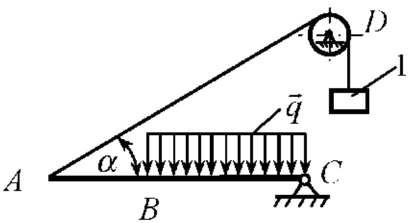
Определить момент M пары сил, при котором реакция опоры B равна $250H$, если интенсивность распределенной нагрузки $q = 150H/м$; размеры $AC = CB = 2м$.

1.1.2.3.



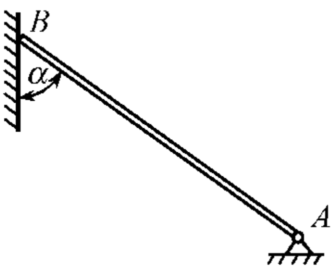
На балку AB действуют распределенная нагрузка интенсивностью $q = 2H/м$ и сила $F = 6H$. Определить реакцию опоры B, если расстояние $AC = AB/3$, угол $\alpha = 45°$.

1.1.2.4.



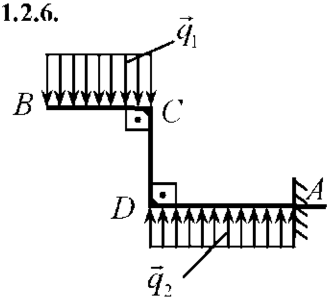
Балка AC закреплена в шарнире C и поддерживается в горизонтальном положении веревкой AD, перекинутой через блок. Определить интенсивность распределенной нагрузки q, если длины $BC = 5м$, $AC = 8м$, угол $\alpha = 45°$, а вес груза 1 равен $20H$.

1.1.2.5.



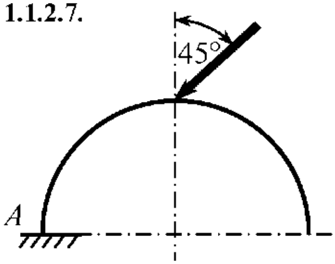
Конец B однородного бруса весом $100\,кH$, закрепленного в шарнире A, опирается на гладкую стену. Определить в кН давление бруса на стену, если угол $\alpha = 60°$.

1.1.2.6.



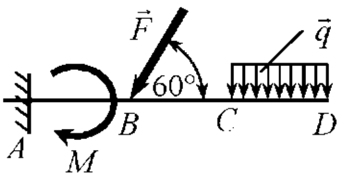
На изогнутую балку AB, заделанную в стену, действуют распределенные нагрузки интенсивностью $q_1 = 5H/м$ и $q_2 = 3H/м$. Определить реакцию заделки, если длины $BC = 3м$, $AD = 5м$.

1.1.2.7.



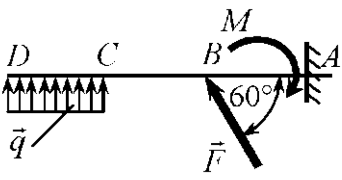
Арка, имеющая форму полуокружности, жестко заделана в точке A. Определить реакцию в заделке, если сила $F = 100H$.

1.1.2.8.



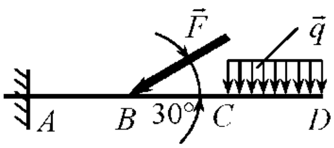
К балке AD приложена пара сил с моментом $M = 200H \cdot м$, распределенная нагрузка интенсивностью $q = 20H/м$ и сила $\vec{F}$. Какой должна быть величина этой силы для того, чтобы момент в заделке A равнялся $650H \cdot м$, если размеры $AB = BC = CD = 2м$? Определить также составляющие реакции X_A и Y_A заделки.

1.1.2.9.



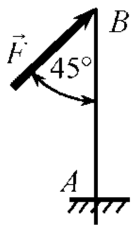
Определить интенсивность q распределенной нагрузки, при которой момент в заделке A равен $546H \cdot м$, если сила $F = 173H$, момент пары сил $M = 42H \cdot м$; размеры балки $AB = CD = 2м$, $BC = 1м$.

1.1.2.10.



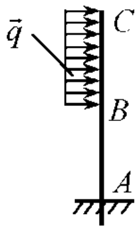
Определить величину силы F, при которой момент в заделке A равен $3700\ H \cdot м$, если интенсивность распределенной нагрузки $q = 200\ H / м$; размеры балки $AB = BC = 2м$, $CD = 3м$. Определить также составляющие реакции заделки X_A и Y_A.

1.1.2.11.



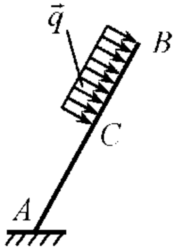
Определить силу F (в kH), при которой момент в заделке A равен $56\ kH \cdot м$, если расстояние $AB = 5{,}66м$. Определить также составляющие реакции заделки X_A и Y_A.

1.1.2.12.



Определить интенсивность q распределенной нагрузки, при которой момент в заделке A равен $480\ H \cdot м$, если размеры $AB = 3м$, $AB = 3м$. Определить также составляющие реакции заделки X_A и Y_A.

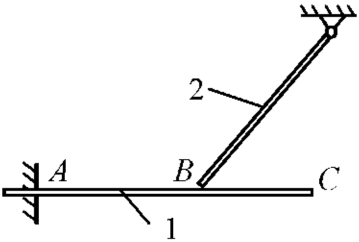
1.1.2.13.



Определить длину участка BC, при которой момент в заделке A равен $180\ H \cdot м$, если размер $AC = 2м$ и интенсивность распределенной нагрузки $q = 30\ H / м$.

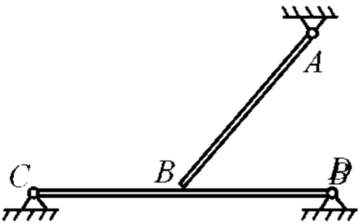
1.1.3. Равновесие системы двух тел под действием произвольной плоской системы сил

1.1.3.1.



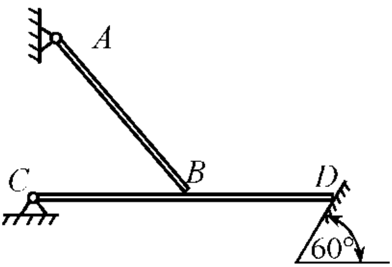
Однородный брус 2 весом $400\ H$ свободно опирается в точке B на однородную балку 1. Чему должен равняться вес балки 1, для того чтобы момент в заделке A был равен $265\ H \cdot м$, если размеры $AB = 1 м$, $BC = 0{,}8 м$.

1.1.3.2.



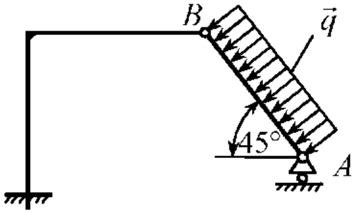
Однородная балка AB, вес которой равен $4 кH$, в точке B свободно опирается на горизонтальный стержень CD. Определить (в $кH$) реакцию подвижного цилиндрического шарнира D, если размеры $BC = BD$. Весом стержня CD пренебречь.

1.1.3.3.



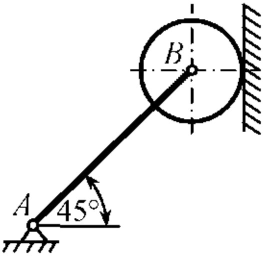
Однородная балка AB, вес которой $200 H$, свободно опирается в точке B на горизонтальную балку CD. Определить, с какой силой балка CD действует на опорную плоскость в точке D, если расстояние $CB = BD$, угол $\alpha = 60°$. Весом балки CD пренебречь.

1.1.3.4.



Стержень AB, длина которого $2м$, нагружен равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q = 100\ Н/м$. Определить реакцию опоры A.

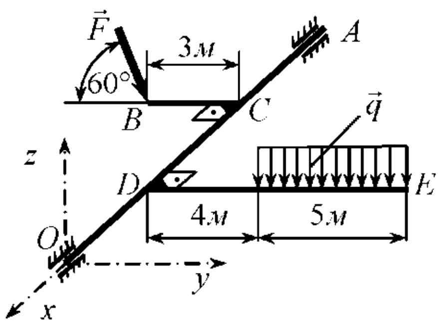
1.1.3.5.



На конце однородного стержня AB весом $80Н$ с помощью шарнира B установлен однородный диск весом $200Н$. Диск опирается на вертикальную гладкую стену. Определить силу воздействия диска на стену и составляющие реакции X_A и Y_A опоры A.

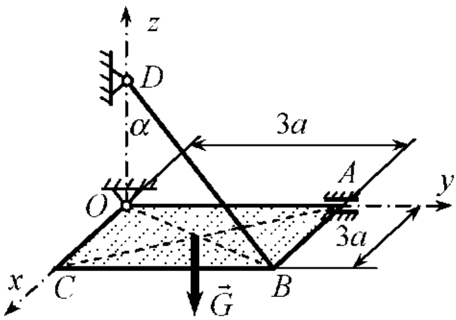
1.1.4. Равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил

1.1.4.1.



К валу OA под прямым углом прикреплены стержни BC и DE. К стержню DE приложена распределенная нагрузка $q = 0{,}5Н/м$. Определить модуль силы $\vec{F}$, уравновешивающей данную нагрузку, если $\vec{F} \parallel Oxz$.

1.1.4.2.

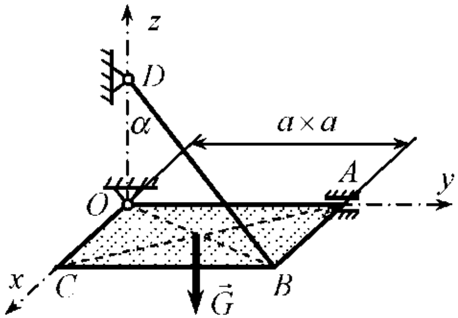


Однородная плита $OABC$ весом $G = 30H$ удерживается в горизонтальном положении шарнирами O, A и тросом BD. Определить:

1) натяжение троса, если $a = 2м$ и угол $\alpha = 60°$;

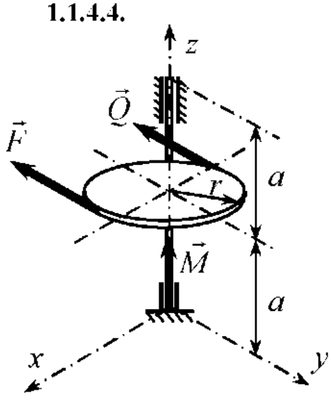
2) реакции шарниров O и A.

1.1.4.3.



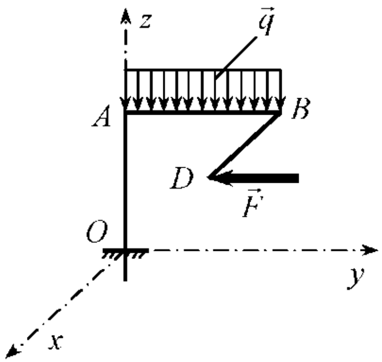
Однородная квадратная рама $OABC$ со стороною $a = 0{,}5м$ и весом $G = 140H$ под действием наложенных связей удерживается в горизонтальном положении. Определить натяжение троса BD, если угол $\alpha = 60°$.

1.1.4.4.



Сила $F = 2Q = 120\ H$, приложенная к шкиву, уравновешивается парой сил с моментом $M = 18\ H \cdot м$. Определить составляющие реакции X_A и Y_A подшипника A, если радиус шкива $r = 0{,}3м$, расстояния $a = 0{,}3м$ и сила $\vec{F} \parallel \vec{Q} \parallel Oy$.

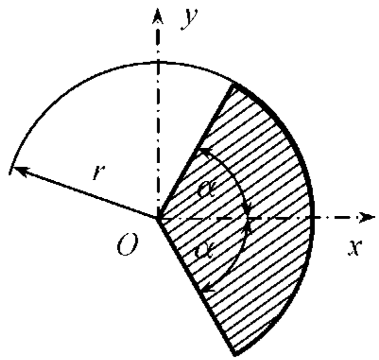
1.1.4.5.



Фигурная балка $OABD$ находится в равновесии. Определить реакцию заделки, если дано: $OA = 1,7м$, $AB = 2м$, $BD = 3,4м$, $BD \parallel Ox$, сила $F = 1\ kH$, интенсивность распределенной нагрузки $q = 2kH \cdot м$

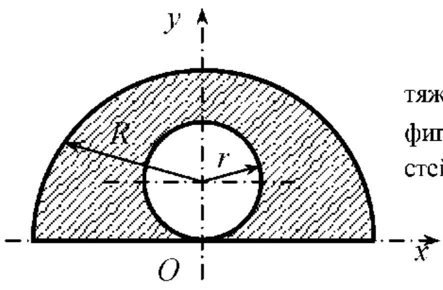
1.1.5. Центр тяжести

1.1.5.1.



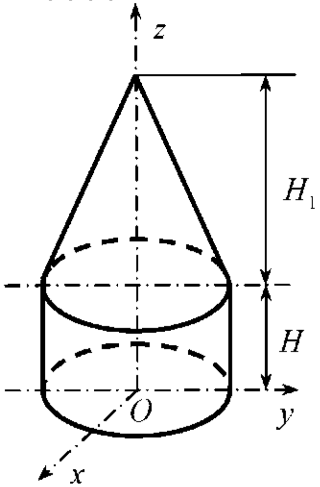
Определить координату x_C центра тяжести площади кругового сектора OAB, если радиус $r = 0,6м$, а угол $\alpha = 30°$.

1.1.5.2.



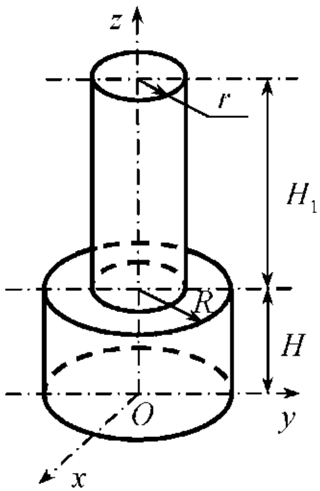
Определить координату центра тяжести y_C заштрихованной площади фигуры, если даны радиусы окружностей: $R = 0,99м$, $r = 0,33м$.

1.1.5.3.



Определить координату z_C центра тяжести однородного тела, состоящего из конуса и цилиндра, если высота $H_1 = 2H = 0{,}4м$.

1.1.5.4.



Определить координату z_C центра тяжести однородного тела, состоящего из двух цилиндров, если высота $H_1 = 2H$, радиус $R = 2r$, высота $H = 0{,}5м$.

1.2. Кинематика точки

1.2.1. Прямолинейное движение точки

1.2.1.1. Дано уравнение движения точки $x = \sin \pi t$. Определить скорость в ближайший после начала движения момент времени t, когда координата $x = 0{,}5 м$. Определить ускорение точки в этот момент времени.

1.2.1.2. Точка движется по прямой с постоянным ускорением $a = 0{,}3 м/с^2$. Определить начальную скорость точки, если через 6 секунд после начала движения скорость точки стала равной $3 м/с$.

1.2.1.3. Точка движется по прямой с ускорением $a = 0{,}5 м/с^2$. Определить, за какое время будет пройдено расстояние $9 м$, если при $t_0 = 0$ скорость точки $V_0 = 0$. Какова будет скорость точки в этот момент времени?

1.2.1.4. Сколько секунд должен работать двигатель, который сообщает ракете ускорение $3g$, чтобы скорость ракеты в прямолинейном движении возросла с 3 до $5 км/с$?

1.2.1.5. Скорость автомобиля равна $90 км/час$. Определить тормозной путь до полной остановки автомобиля, если среднее замедление его при торможении равно $3 м/с$.

1.2.2. Определение кинематических характеристик точки при координатном и векторном способах задания движения

1.2.2.1. Заданы уравнения движения точки $x = 2t$, $y = t$. Определить время t, когда расстояние от точки до начала координат достигнет $10 м$. Определить скорость точки в этот момент времени.

1.2.2.2. Заданы уравнения движения точки $x = 2t$, $y = 1 - \sin(0{,}1t)$. Определить ближайший момент времени, когда точка пересечет ось Ox. Определить также скорость точки в этот момент времени.

1.2.2.3. Проекция вектора скорости точки на ось x $V_X = 2\cos(\pi t)$. Определить координату x_1 точки в момент времени $t_1 = 1c$, если при $t_0 = 0$ координата $x_0 = 0$.

1.2.2.4. Даны проекции вектора скорости точки на координатные оси: $V_X = 3t$, $V_Y = 2t^2$, $V_Z = t^3$. Определить модуль вектора ускорения в момент времени $t_1 = 1c$ с и его направление (направляющие косинусы). Расстояния даны в метрах, время – в секундах.

1.2.2.5. Движение точки задано уравнениями $\dfrac{dx}{dt} = 0{,}3t^2$ и $y = 0{,}2t^3$. Определить ускорение точки в момент времени $t = 7c$ и скорость её в этот момент времени. Расстояния даны в метрах, время – в секундах.

1.2.2.6. Даны уравнения движения точки: $x = 0{,}3t^3$; $y = 2t^2$. Определить, в какой момент времени t ускорение точки равно $7 см/c^2$. Определить также скорость точки в этот момент времени. Координаты x и y заданы в сантиметрах, время – в секундах.

1.2.2.7. Положение точки на плоскости определяется её радиус-вектором $\vec{r} = 0{,}3t^2\vec{i} + 0{,}1t^3\vec{j}$. Определить модуль вектора ускорения точки в момент времени $t_1 = 2c$ с и его направление (по направляющим косинусам). Расстояния даны в метрах, время – в секундах.

1.2.2.8. Даны уравнения движения точки: $x = 0{,}01t^3$, $y = 200 - 10t$. Определить ускорение в момент времени, когда точка пересекает ось Ox. Как направлен вектор ускорения? Координаты x и y заданы в метрах, время – в секундах.

1.2.3 Определение кинематических характеристик точки при естественном способе задания движения

1.2.3.1. Точка движется по окружности согласно уравнению $s = 0{,}5t^2 + 4t$. Определить, в какой момент времени. Найти полное ускорение точки в момент времени, когда её скорость достигнет $10 м/с$. Радиус окружности $R = 1м$.

1.2.3.2. Касательное ускорение точки $a_\tau = 0{,}2t$. Определить момент времени t_1, когда скорость V точки достигнет величины $10 м/с$, если при $t_0 = 0$ скорость $V_0 = 2 м/с$. Какой путь пройдет точка за это время?

1.2.3.3. Проекции вектора скорости точки на оси координат определяются выражениями: $V_X = 0{,}2t^2$, $V_Y = 3 м/с$. Определить касательное, полное и нормальное ускорения точки в момент времени $t_1 = 2{,}5с$.

1.2.3.4. Точка движется по окружности согласно закону $s = 5t - 0{,}4t^2$. Определить момент времени t_1, при котором нормальное ускорение точки $a_n = 0$, а также величину полного ускорения для этого момента времени.

1.2.3.5. Дан закон движения точки по траектории: $s = 5t$. Определить радиус кривизны траектории в момент времени t_1, при котором нормальное ускорение точки $a_n = 3 м/с$, а также величину полного ускорения точки в этот момент времени.

1.2.3.6. По окружности, радиус которой $r = 7м$, движется точка согласно закону $s = 0{,}3t^2$. Определить момент времени t_1, при котором нормальное ускорение точки $a_n = 1{,}5 м/с^2$, а также величину полного ускорения точки в этот момент времени.

1.2.3.7. Точка движется по окружности радиуса $r = 200м$ из состояния покоя с постоянным касательным ускорением $a_\tau = 1 м/с^2$. Определить полное ускорение точки в момент времени $t_1 = 20с$.

1.3. Кинематика твёрдого тела

1.3.1. Вращательное движение

1.3.1.1. При равномерном вращении маховик делает 4 оборота в секунду. За сколько секунд маховик повернется на угол $\varphi = 24\pi$?

1.3.1.2. Ротор электродвигателя, начав вращаться равноускоренно, сделал 100 оборотов за первые 5 секунд. Определить угловое ускорение ротора и его угловую скорость через 10 секунд после начала вращения.

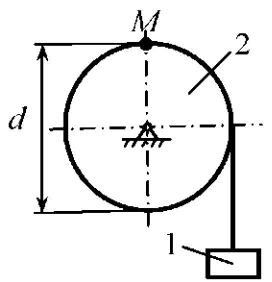
1.3.1.3. Тело вращается вокруг неподвижной оси согласно закону $\varphi = t^3 + 2$. Определить угловую скорость тела в момент времени, когда угол поворота $\varphi = 10\,рад$, а также его угловое ускорение.

1.3.1.4. Угловая скорость вращающегося тела изменяется согласно закону $\omega = 2 - 8t^2$. Определить промежуток времени от начала движения до остановки тела, а также угол поворота тела за это время.

1.3.1.5. Угловое ускорение вращающегося тела изменяется согласно закону $\varepsilon = 2t$. Определить угловую скорость тела в момент времени $t_1 = 4c$, если при $t_0 = 0$ его угловая скорость равна нулю. Сколько оборотов сделает тело за эти 4 секунды?

1.3.1.6. Тело вращается вокруг неподвижной оси согласно закону $\varphi = 4 + 2t^3$. Определить угловое ускорение тела в момент времени, когда угловая скорость $\omega = 6\,рад/c$.

1.3.1.7.

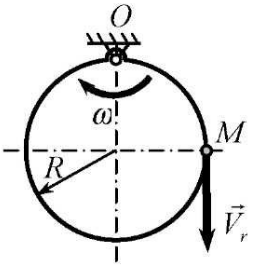


Груз 1 поднимается с помощью лебедки, барабан 2 которой вращается согласно закону $\varphi = 5 + 2t^3$. Определить скорость и ускорение точки M барабана в момент времени $t_1 = 1c$, если диаметр $d = 0{,}6м$.

1.3.1.8. Маховик вращается с постоянной частотой вращения, равной $90\ об/мин$. Определить ускорение точки маховика, находящейся на расстоянии $0{,}043м$ от оси вращения.

1.3.2. Сложное движение

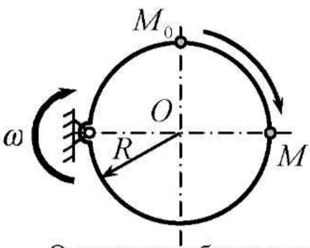
1.3.2.1.



Точка M движется по ободу диска, радиус которого $R = 0{,}1м$, согласно закону $S = OM = 0{,}3t$.

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в указанном положении, если закон вращения диска $\varphi = 0{,}4t$.

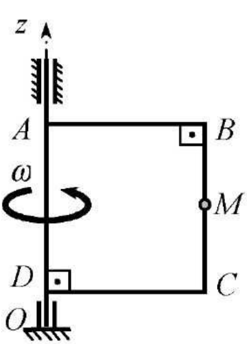
1.3.2.2.



Кольцо вращается вокруг оси O, перпендикулярной плоскости чертежа, с постоянной угловой скоростью $\omega = 4\ рад/с$. Находящийся на кольце шарик M движется по закону $S = M_0M = 0{,}1t$.

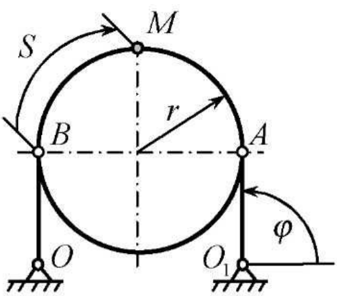
Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение шарика в указанном на чертеже положении, если радиус кольца $R = 0{,}1м$.

1.3.2.3.



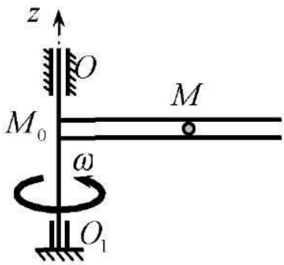
Пластина $ABCD$ вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью $\omega = 4t$. По ее стороне BC в направлении от B к C движется точка M с постоянной скоростью $9м/с$. Определить модуль абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки M в момент времени $t_1 = 3с$, если длина $AB = 1м$.

1.3.2.4.



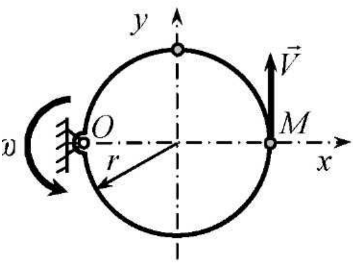
Звено O_1A вращается согласно уравнению $\varphi = 2t$. По ободу диска радиуса $r = 0{,}5м$ движется точка M по закону $S = 2rt$. Определить модуль абсолютного ускорения и абсолютной скорости точки M в момент времени $t_1 = 0{,}25\pi(c)$.

1.3.2.5.



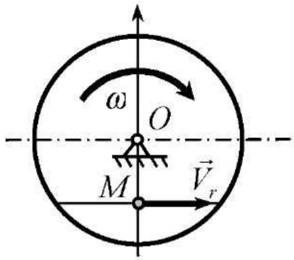
Трубка вращается вокруг оси OO_1 с угловой скоростью $\omega = 1{,}5\, рад/с$. Шарик M движется вдоль трубки по закону $M_0M = 4t(м)$. Найти модуль абсолютной скорости и абсолютного ускорения шарика в момент времени $t_1 = 2с$.

1.3.2.6.



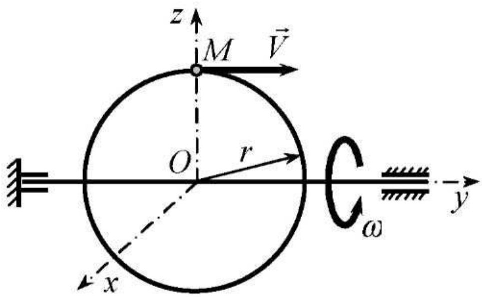
Кольцо радиуса $r = 0{,}5м$ вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 4\, рад/с$ в плоскости чертежа. По кольцу перемещается точка M с постоянной скоростью $V = 2м/с$. Определить модуль абсолютного ускорения и абсолютной скорости точки M в указанном положении.

1.3.2.7.



Точка M движется с относительной скоростью $V_r = 0{,}5t$ по хорде диска, вращающегося вокруг оси O, перпендикулярной плоскости диска, с угловой скоростью $\omega = 0{,}5\,рад/с$. Определить абсолютное ускорение и абсолютную скорость точки M в момент времени $t_1 = 2с$, если расстояние $OM = 0{,}02м$.

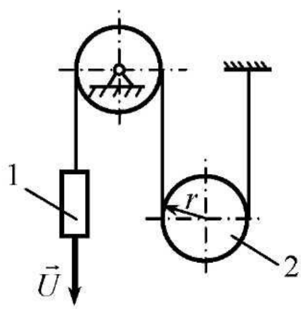
1.3.2.8.



Точка M движется с постоянной скоростью $V = 2м/с$ по кольцу радиуса $r = 0{,}5м$, которое вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 4\,рад/с$. Определить модуль абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки M в указанном положении.

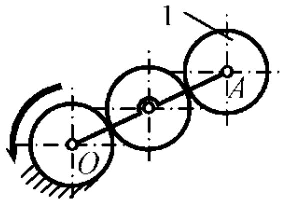
1.3.3 Плоскопараллельное движение

1.3.3.1.



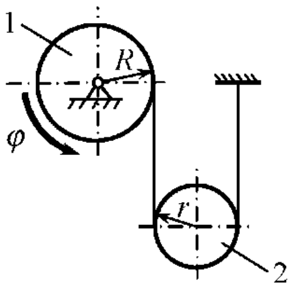
Скорость груза 1 $U = 0{,}5м/с$. Определить угловую скорость подвижного блока 2, если его радиус $R = 0{,}1м$.

1.3.3.2.



Кривошип OA вращается по закону $\varphi = 0{,}5t$. Определить угловую скорость колеса 1 планетарного механизма, если длина звена $OA = 0{,}2м$ и радиусы всех колес одинаковы.

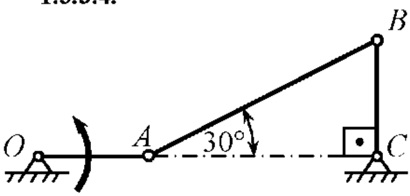
1.3.3.3.



Барабан 1 вращается согласно закону $\varphi = 0{,}3t^2$.

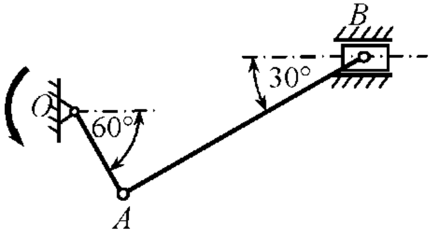
Определить угловое ускорение блока 2, если радиусы $R = 0{,}1м,\ r = 0{,}06м$.

1.3.3.4.



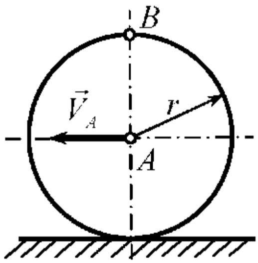
Для заданного положения шарнирного четырехзвенника определить скорость точки B, если точка A имеет скорость $1м/с$.

1.3.3.5.



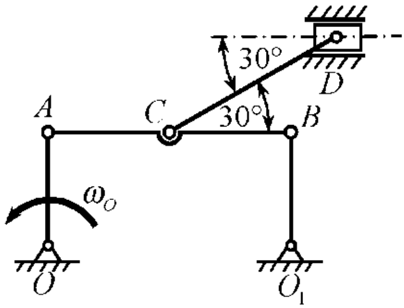
Определить угловую скорость шатуна AB кривошипно-ползунного механизма в указанном положении, если точка A имеет скорость $V_A = 3м/с$. Длина шатуна $AB = 1м$.

1.3.3.6.



Колесо радиуса $r = 0{,}1м$ катится без скольжения. Определить ускорение точки B, если центр колеса A перемещается с постоянной скоростью $V_A = 2м/с$.

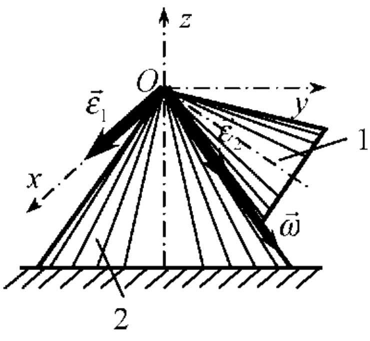
3.3.7



Кривошип OA шарнирного параллелограмма $OABO_1$ равномерно вращается с угловой скоростью $\omega_O = 4рад/с$. Определить угловое ускорение шатуна CD в данном положении механизма, если длины звеньев $OA = 20см$, $CD = 30см$.

1.3.4. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. Общий случай движения свободного твердого тела.

1.3.4.1

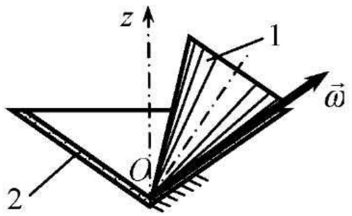


При качении конуса 1 по неподвижному конусу 2 в данный момент времени компоненты углового ускорения ε_1 и ε_2 (параллельная и перпендикулярная вектору угловой скорости $\vec{\omega}$) имеют значения:

$$\varepsilon_1 = 0{,}1\pi; \quad \varepsilon_2 = 0{,}2\pi$$

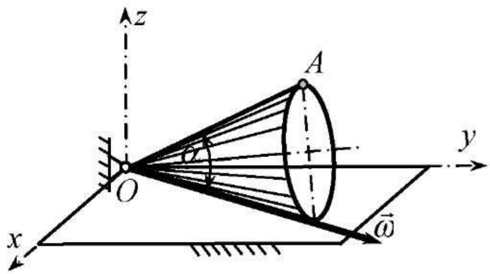
Определить угловое ускорение.

1.3.4.2.



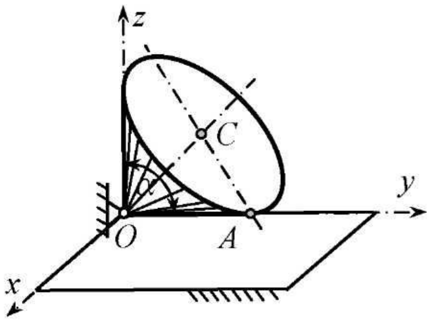
Конус 1 катится по внутренней поверхности неподвижного конуса 2 с угловой скоростью $\omega = 0{,}1\pi t^2$. Определить проекцию углового ускорения конуса на мгновенную ось вращения в момент времени $t_1 = 2c$.

1.3.4.3.



Конус вращается вокруг неподвижной точки O, катаясь по плоскости xOy с угловой скоростью $\omega = 2 рад/с$. Определить скорость точки A, если $OA = 0{,}2м$, $\alpha = 30°$.

1.3.4.4.



Конус с углом при вершине $\alpha = 90°$ и высотой $OC = 0{,}1м$ катится по горизонтальной плоскости xOy, вращаясь вокруг точки O, скорость центра основания $V_C = 0{,}1м/с$. Определить модуль осестремительного ускорения точки A.

1.3.4.5. Тело движется в пространстве согласно уравнениям

$$\left.\begin{aligned} x_M &= 0; \\ y_M &= 20t; \\ z_M &= 20t - 4{,}9t^2; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \theta &= 0{,}5\,рад; \\ \psi &= 3\,рад; \\ \varphi &= 12\left(1 - e^{-25t}\right) \end{aligned}\right\}$$

Определить модуль угловой скорости тела в момент времени $t_1 = 4c$.

1.3.4.6. Тело совершает свободное движение. В момент времени, когда ускорение точки O, принятой за полюс, $\vec{a}_O = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$, угловая скорость тела $\omega = 0$ и угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = 2\vec{j} - 5\vec{k}$, определить ускорение точки M тела, если $\overrightarrow{OM} = 2\vec{j} - 5\vec{k}$.

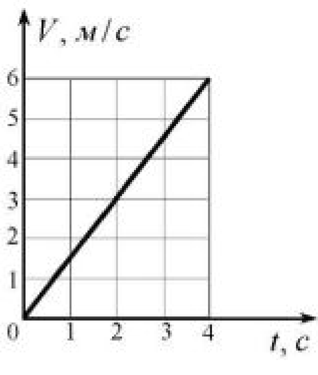
1.4. Динамика материальной точки

1.4.1. Первая задача динамики точки

1.4.1.1. Тело массой $m = 50кг$, подвешенное на тросе, поднимается вертикально с ускорением $a = 0{,}5м/c^2$. Определить силу натяжения троса.

1.4.1.2. Деталь массой $m = 0{,}5\ кг$ скользит вниз по лотку. Под каким углом к горизонтальной плоскости должен располагаться лоток, для того чтобы деталь двигалась с ускорением $a = 2м/c^2$? Угол выразить в градусах.

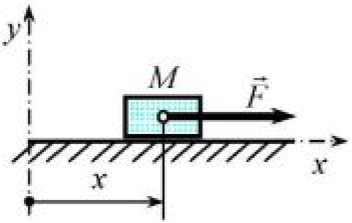
1.4.1.3.



Скорость движения точки массой $m = 24кг$ по прямой задана графиком функции $V = V(t)$.

Определить модуль равнодействующей сил, действующих на точку.

1.4.1.4.



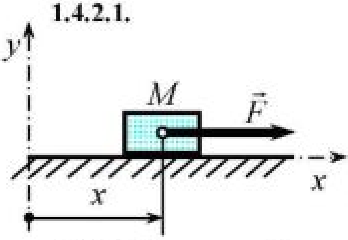
Тело M массой $2кг$ движется прямолинейно по закону $x = 10\sin(2t)$ под действием силы $\vec{F}$. Найти наибольшее значение этой силы.

1.4.1.5. Материальная точка массой $m = 16\ кг$ движется по окружности радиуса $R = 9м$ со скоростью $V = 0{,}8м/c$. Определить проекцию равнодействующей сил, приложенных к точке, на главную нормаль к траектории.

1.4.1.6. Материальная точка массой $m = 1кг$ движется по окружности радиуса $r = 2м$ со скоростью $V = 2t$. Определить модуль равнодействующей сил, приложенных к точке, в момент времени $t_1 = 1c$.

1.4.2. Вторая задача динамики точки

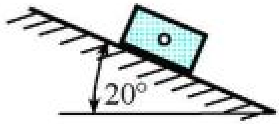
1.4.2.1.



Материальная точка M массой m движется вдоль горизонтальной оси Ox под действием силы $F = 2m(x+1)$. Определить скорость и ускорение точки в момент времени, когда ее координата $x = 0{,}5\ м$.

1.4.2.2. Тело массой $m = 20кг$ падает по вертикали, сила сопротивления воздуха $R = 0{,}04V^2$. Определить максимальную скорость падения тела.

1.4.2.3.



По наклонной плоскости из состояния покоя начинает скользить тело массой $m = 1кг$. Определить максимальную скорость тела, если сила сопротивления движению $R = 0{,}08V$.

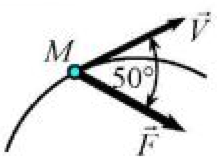
1.4.2.4. Материальная точка массой $m = 900кг$ движется по горизонтальной прямой под действием силы $F = 270t$, которая направлена по той же прямой. Определить скорость точки в момент времени $t_1 = 10c$, если при $t_0 = 0$ скорость $V_0 = 10м/c$. Определить также путь, пройденный точкой за эти $10c$.

1.4.2.5. Материальная точка массой $m = 25кг$ начала движение из состояния покоя по горизонтальной прямой под действием силы $F = 20t$, которая направлена по той же прямой. Определить путь, пройденный точкой за $4c$ и скорость точки в конце четвертой секунды от начала движения.

1.4.2.6. На материальную точку массой $m = 20кг$, которая движется по горизонтальной прямой, действует сила сопротивления $R = 0{,}2V^2$. За сколько секунд скорость точки уменьшится с 10 до $5м/c$? Какой путь пройдет точка за это время?

1.4.2.7. Определить путь, пройденный материальной точкой массой m по оси Ox за время $t_1 = 1c$, если она движется под действием силы $F_X = 12mt^2$. В момент времени $t_0 = 0$ координата $x_0 = 3м$, скорость $V_0 = 6м/c$.

1.4.2.8.

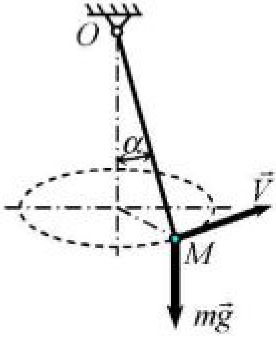


Материальная точка M массой $m = 6кг$ перемещается в горизонтальной плоскости по криволинейной траектории под действием силы $F = 8H$. Определить касательное ускорение точки.

1.4.2.9. Материальная точка движется по криволинейной траектории под действием силы, тангенциальная составляющая которой $F_\tau = 0{,}2t^2$, а нормальная составляющая $F_n = 8H$. Определить массу точки, если в момент времени $t_1 = 10c$ ее ускорение $a_1 = 0{,}7м/c$.

1.4.2.10. Материальная точка массой $m = 5кг$ движется по криволинейной траектории под действием силы, проекция которой на касательную $F_\tau = 7H$, на нормаль $F_n = 0{,}1t^2$. Определить модуль ускорения точки в момент времени $t_1 = 12c$.

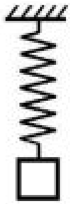
1.4.2.11.



Определить скорость точки M конического маятника, который при длине нити $OM = 1\text{м}$, описывает конус с углом при вершине $\alpha = 45°$.

1.4.3. Свободные прямолинейные колебания материальной точки

1.4.3.1.

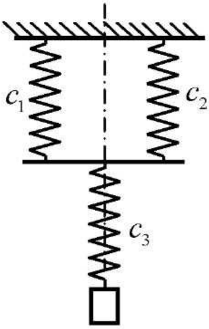


Определить максимальное удлинение пружины AB (в сантиметрах) при свободных вертикальных колебаниях груза, если он прикреплен в точке B к недеформированной пружине и начинает движение из состояния покоя. Статическая деформация пружины под действием груза равна 2см.

1.4.3.2. Определить период свободных вертикальных колебаний груза массой $m = 80\text{кг}$, который прикреплен к пружине с коэффициентом жесткости $c = 2\text{кН} / \text{м}$.

1.4.3.3. Дифференциальное уравнение колебательного движения груза, подвешенного к пружине, имеет вид $\ddot{x} + 20x = 0$. Определить массу груза, если коэффициент жесткости пружины $c = 150\text{Н} / \text{м}$.

1.4.3.4.

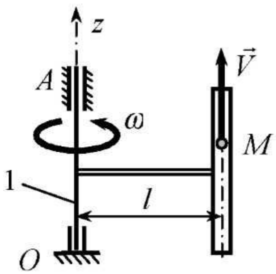


Определить частоту свободных вертикальных колебаний груза массой $m = 2кг$, если коэффициенты жесткости пружин $c_1 = c_2 = c_3 = 300H/м$

1.4.3.5. Дифференциальное уравнение колебательного движения материальной точки имеет вид $\ddot{x} + 8\dot{x} + 25x = 0$. Найти период затухающих колебаний.

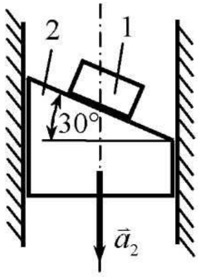
1.4.4. Относительное движение материальной точки

1.4.4.1.



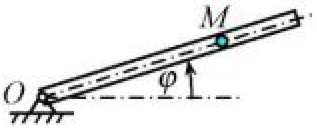
Шарик массой $m = 0{,}2кг$ движется со скоростью $V = 19{,}62м/с$ относительно вертикальной трубки, которая на расстоянии $l = 0{,}5м$ прикреплена к вертикальному валу 1. Вал вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 5 рад/с$. Определить переносную силу инерции шарика.

1.4.4.2.



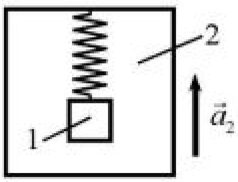
Груз 1 массой $m_1 = 1кг$ опускается по наклонной плоскости тела 2. Тело 2 движется в вертикальных направлениях вниз с ускорением $a_2 = 2м/с^2$. Определить силу давления груза 1 на тело 2.

1.4.4.3.



Трубка вращается вокруг оси O по закону $\varphi = t^2$. В трубке движется шарик M массой $m = 0{,}1 кг$ по закону $OM = 0{,}2t^3$. Определить модуль кориолисовой силы инерции шарика в момент времени $t_1 = 1с$.

1.4.4.4.

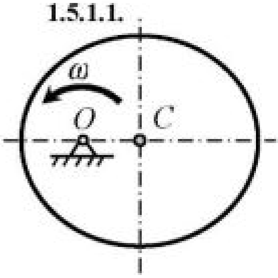


Кабина 2 лифта движется вверх с ускорением $a_2 = 0{,}5g$. Определить силу натяжения пружины, если подвешенный груз 1 весом $100H$ находится в состоянии относительного покоя.

1.5. Общие теоремы динамики

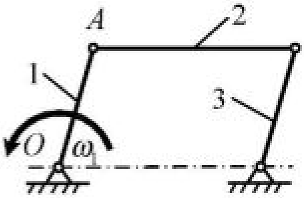
1.5.1. Теорема о движении центра масс. Теорема об изменении количества движения

1.5.1.1.



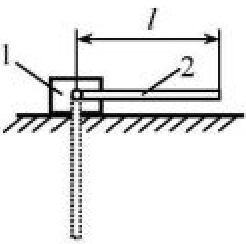
Диск массой $m = 20кг$ вращается равномерно вокруг неподвижной оси O с угловой скоростью $\omega = 10 рад/с$. Определить модуль и направление главного вектора внешних сил, приложенных к диску, если его центр тяжести удален от оси вращения на расстояние $OC = 0{,}5см$.

1.5.1.2.



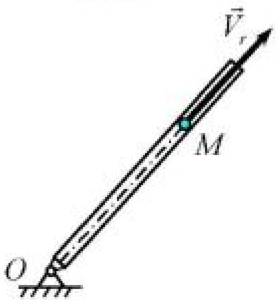
Кривошип 1 шарнирного параллелограмма вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_1 = 5 рад/с$. Определить модуль и направление главного вектора внешних сил, действующих на звено 2, если масса звена $m = 8кг$, длина $OA = 0{,}4м$.

1.5.1.3.



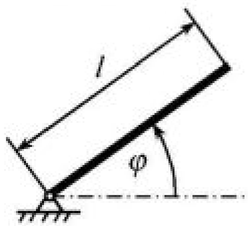
Тело 1 массой $4кг$ может двигаться по гладкой горизонтальной направляющей. На какое расстояние переместится тело 1, когда однородный стержень 2 массой $2кг$ и длиной $l = 0{,}6м$, опускаясь под действием силы тяжести, займет вертикальное положение. В начальный момент времени система находилась в покое.

1.5.1.4.



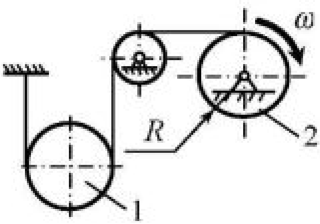
Трубка вращается с угловой скоростью $\omega = 10 рад/с$. Относительно трубки движется шарик M массой $m = 0{,}2кг$ со скоростью $V_r = 4м/с$. Определить модуль количества движения шарика в момент времени, когда расстояние $OM = 0{,}4м$.

1.5.1.5.



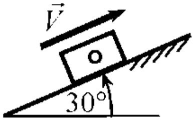
Однородный стержень массой $m = 10кг$ и длиной $l = 1м$ вращается по закону $\varphi = 5t^2$. Определить модуль количества движения этого стержня в момент времени $t_1 = 2с$.

1.5.1.6.



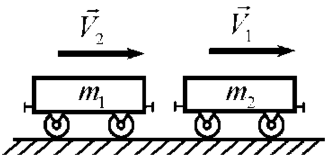
Шкив 2 радиуса $R = 0{,}2м$, вращаясь с угловой скоростью $\omega = 20 рад/с$, поднимает однородный цилиндр 1 массой $m = 50кг$. Определить модуль количества движения цилиндра 1.

1.5.1.7.



Тело, которому сообщили начальную скорость $V_0 = 20 м/с$, поднимается по шероховатой наклонной плоскости. Найти время движения тела до остановки, если коэффициент трения скольжения $f = 0{,}1$.

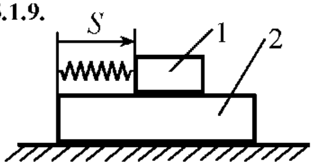
1.5.1.8.



По горизонтальному участку пути движутся два вагона, массы которых $m_1 = 6 \cdot 10^4 кг$, $m_2 = 2 \cdot 10^4 кг$ и скорости $V_1 = 1 м/с$, $V_2 = 3 м/с$. Второй вагон догоняет первый и сцепляется с ним.

Пренебрегая сопротивлением движению, определить скорость вагонов после сцепления.

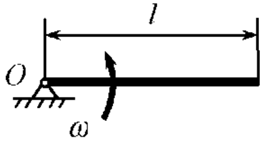
1.5.1.9.



Тело 1 массой $2 кг$ под действием пружины движется относительно тела 2 массой $8 кг$ по закону $S = 0{,}2 + 5\cos(\pi t)$. Тело 2 может скользить по горизонтальной направляющей без трения. Определить скорость тела 2 в момент времени $t_1 = 1/6\ (с)$, если оно начало двигаться из состояния покоя.

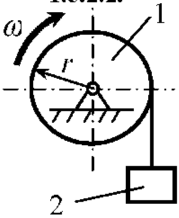
1.5.2. Теорема об изменении момента количества движения

1.5.2.1.



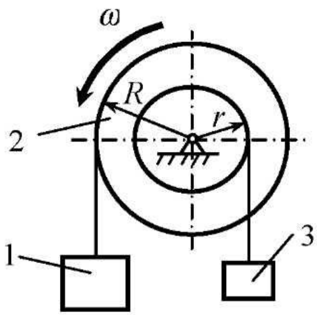
Однородный стержень длиной $l = 1 м$ и массой $m = 6 кг$ вращается с угловой скоростью $\omega = 10 рад/с$. Определить кинетический момент стержня относительно центра O.

1.5.2.2.



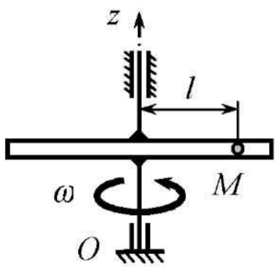
Цилиндр 1 начинает вращаться из состояния покоя под действием груза. Момент инерции цилиндра относительно оси вращения $I = 2 кгм^2$, радиус $r = 0{,}5 м$. Груз 2 имеет массу $m_2 = 1 кг$. Определить угловую скорость цилиндра ω через 1 секунду после начала движения.

1.5.2.3.



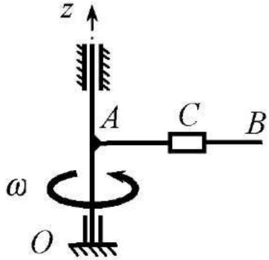
На барабан 2, момент инерции которого относительно оси вращения $I = 0{,}05 кгм^2$, намотаны нити, к которым прикреплены грузы 1 и 3 массой $m_1 = 2кг$, $m_3 = 1кг$. Определить угловую скорость барабана через 1 секунду после начала движения, если система приходит в движение под действием сил тяжести грузов 1 и 3 из состояния покоя. Радиусы барабана $R = 20см$, $r = 10см$.

1.5.2.4.



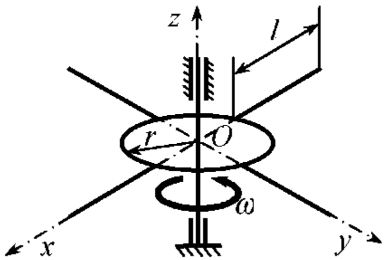
Трубка вращается вокруг вертикальной оси Oz, ее момент инерции $I_z = 0{,}075 кгм^2$. По трубке под действием внутренних сил системы движется шарик M массой $m = 0{,}1\ кг$. Когда шарик находится на оси Oz, угловая скорость $\omega_0 = 4 рад/с$. При каком расстоянии l угловая скорость равна $3 рад/с$?

1.5.2.5.



По стержню AB, жёстко соединённому с вертикальным валом, движется ползун C согласно закону $AC = 0{,}2 + 1{,}2t$. Ползун считать материальной точкой массой $m = 1\ кг$. Момент инерции вала OA со стержнем $I_z = 2{,}5 кгм^2$. Определить угловую скорость вала в момент времени $t_1 = 1с$, если начальная

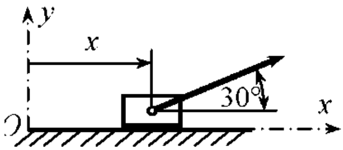
1.5.2.6.



Однородный диск радиуса $r = 0{,}1м$ и массой $5кг$ соединен с четырьмя стержнями длиной $l = 0{,}5м$ и массой $1кг$ каждый. Система тел начинает вращаться под действием внешних сил с угловой скоростью $\omega = 3t$. Определить момент внешних сил относительно оси Oz.

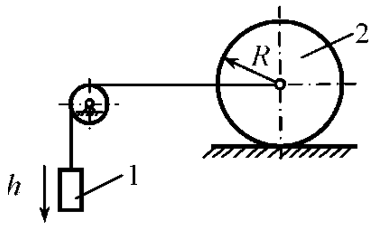
1.5.3. Теорема об изменении кинетической энергии

1.5.3.1.



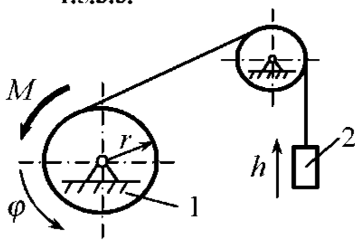
На тело действует постоянная по направлению сила $F = 4x^3$. Определить работу этой силы при перемещении тела из положения с координатой $x = 0$ в положение с координатой $x = 1м$.

1.5.3.2.



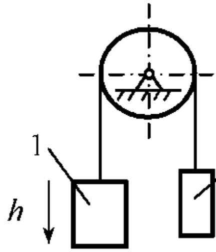
Груз 1 массой $m_1 = 2кг$ приводит в движение каток 2 массой $m_2 = 1\ кг$. Коэффициент трения качения $\delta = 0{,}01м$. Определить работу внешних сил системы при опускании груза 1 на высоту $h = 1м$, если радиус катка $R = 0{,}1м$.

1.5.3.3.



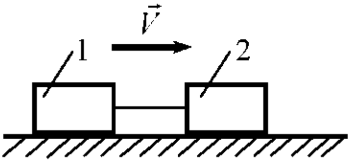
На барабан 1, радиус которого $r = 0{,}1м$, действует пара сил с моментом $M = 40 + \varphi^2$. Определить работу, совершенную парой сил и силой тяжести груза 2, масса которого $m_2 = 40\ кг$, при подъеме груза на высоту $h = 0{,}3м$.

1.5.3.4.



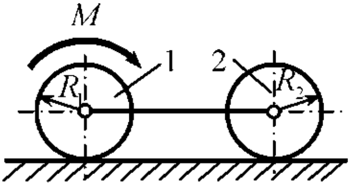
Грузы 1 и 2 массой $m_1 = 2кг$ и $m_2 = 1кг$ подвешены к концам гибкой нити, перекинутой через блок. Определить скорость груза 1 в момент времени, когда он опустился на высоту $h = 3м$. Движение грузов начинается из состояния покоя. Блок считать невесомым.

1.5.3.5.



Тела 1 и 2 одинаковой массы m, соединенные между собой гибкой нитью, движутся по горизонтальной плоскости, имея начальную скорость $V_0 = 2м/с$. Определить коэффициент трения скольжения, если тела останавливаются, пройдя путь, равный $4м$.

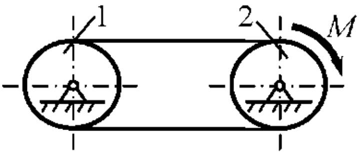
1.5.3.6.



Однородные цилиндрические катки 1 и 2 массой $20кг$ каждый приводятся в движение из состояния покоя постоянным моментом пары сил $M = 2Нм$.

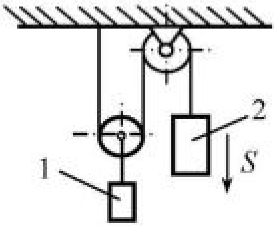
Определить скорость осей катков при их перемещении на расстояние $3м$, если радиусы $R_1 = R_2 = 0,2м$.

1.5.3.7.



Движение шкива 2 ременной передачи начинается из состояния покоя под действием постоянного момента $M = 0,5Нм$. После трех оборотов одинаковые по массе и размерам шкивы 1 и 2 имеют угловую скорость $2рад/с$. Определить момент инерции одного шкива относительно его оси вращения.

1.5.3.8.

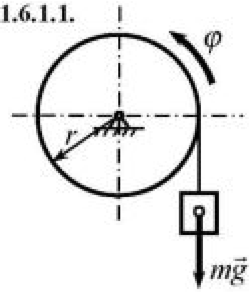


Определить скорость груза 2 в момент времени, когда он опустился вниз на расстояние $S = 4м$, если массы грузов $m_1 = 2кг$, $m_2 = 4кг$. Система тел вначале находилась в покое.

1.6. Общие принципы механики

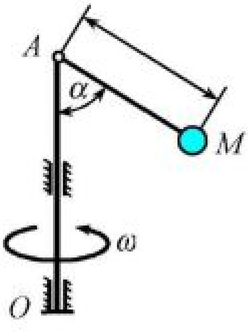
1.6.1. Принцип Даламбера. Метод кинетостатики

1.6.1.1.



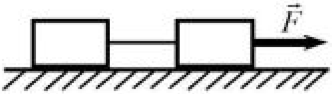
Груз массой $m = 60кг$ подвешен на нити, которая наматывается на барабан, вращающийся согласно уравнению $\varphi = 0{,}6t^2$. Определить натяжение каната, если радиус $r = 0{,}4м$.

1.6.1.2.



Определить (в градусах) величину угла α отклонения стержня AM с точечной массой M на конце от вертикальной оси вращения, если вал OA совместно со стержнем AM вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 4{,}47\ рад/с$, а длина $l = 0{,}981м$. Массой стержня AM пренебречь.

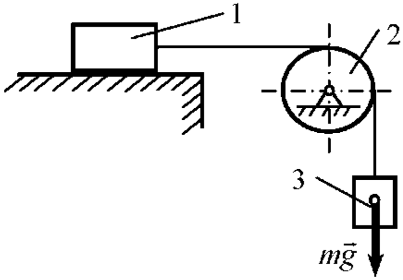
1.6.1.3.



Два одинаковых тела массой $1кг$ каждый соединены между собой нитью и движутся по горизонтальной плоскости под действием силы $F = 40\ Н$.

Коэффициент трения скольжения тел по плоскости $f = 0{,}1$. Определить натяжение нити.

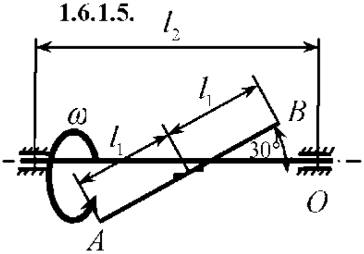
1.6.1.4.



Тело 1 скользит по гладкой горизонтальной плоскости под действием силы тяжести тела 3.

Определить натяжение нити, если тела 1 и 3 имеют массу $m = 3\ кг$ каждое. Массой блока 2 пренебречь.

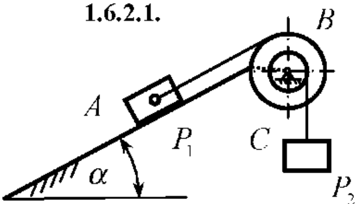
1.6.1.5.



Однородный стержень AB массой 1$кг$ равномерно вращается с угловой скоростью $\omega = 10\ рад/с$. Определить модуль динамической реакции подшипника O, если размеры $l_1 = 0{,}3м$, $l_2 = 0{,}8м$.

1.6.2. Принцип возможных перемещений

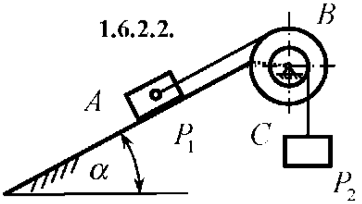
1.6.2.1.



Груз A весом P_1, находится на гладкой неподвижной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 40°$. К грузу прикреплена нить, перекинутая через ступенчатый блок B и несущая на конце груз C весом $P_2 = 120Н$.

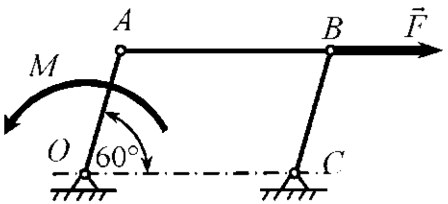
Определить величину P_1, при которой обеспечивается равновесие грузов. Внешний радиус ступенчатого блока в 2 раза больше внутреннего.

1.6.2.2.



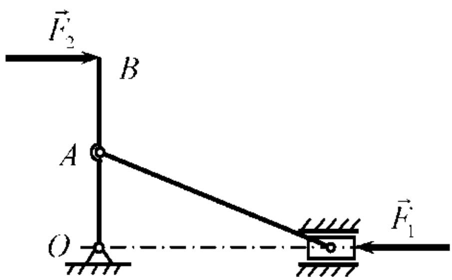
Груз A весом $P_1 = 100Н$, находится на неподвижной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 40°$. К грузу прикреплена нить, перекинутая через ступенчатый блок B и несущая на конце груз C весом $P_2 = 120Н$. Грузы A и B удерживаются в равновесии за счет сил трения между грузом A и наклонной плоскостью. Определить значение f коэффициента трения, при котором для заданных выше значений P_1 P_2 $и$ α обеспечивается равновесие грузов. Внешний радиус ступенчатого блока в 2 раза больше внутреннего.

1.6.2.3.



К шатуну AB шарнирного параллелограмма $OABC$ приложена горизонтальная сила $F = 50H$. Определить модуль момента M пары сил, которую необходимо приложить к криво кривошипу OA длиной $10см$ для того, чтобы уравновесить механизм.

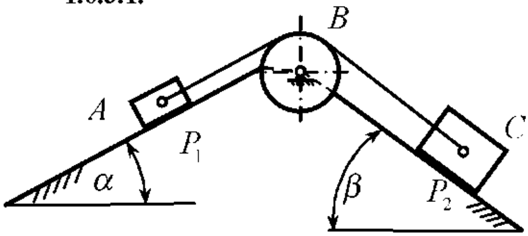
1.6.2.4.



Определить модуль силы $\vec{F}_2$, которую необходимо приложить к ползуну, для того чтобы механизм находился в равновесии, если сила $F_1 = 100H$ и $OA = AB$.

1.6.3. Общее уравнение динамики

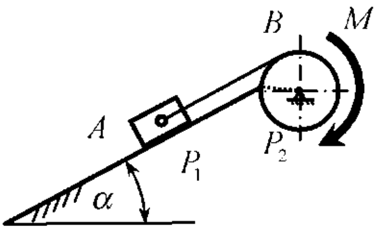
1.6.3.1.



Грузы A и C весом $P_1 = 40H$, и $P_2 = 120H$ движутся по двум гладким неподвижным плоскостям, составляющим с горизонтом углы $\alpha = 40°$ и $\beta = 45°$ соответственно.

Грузы скреплены невесомой нитью, перекинутой через блок B. Определить ускорение грузов.

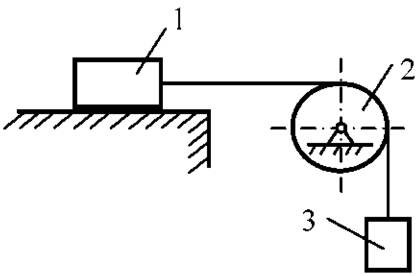
1.6.3.2.



К вороту B подъёмного устройства приложен вращающий момент $M = 2Нм$. Груз A весом $P_1 = 100H$, скрепленный невесомой нитью с воротом, поднимается по шероховатой неподвижной плоскости, составляющей с горизонтом угол α.

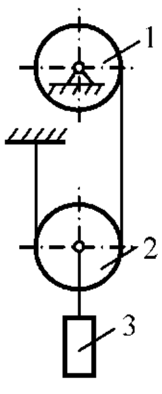
Ворот представляет собой однородный цилиндр весом $P_2 = 120H$ радиусом $r = 0,4м$. Коэффициент трения груза о плоскость $f = 0,1$. Определить ускорение груза.

1.6.3.3.



Два груза, массы которых $m_1 = m_3 = 2кг$, соединены между собой нитью, переброшенной через блок 2, массой которого можно пренебречь. Определить ускорение грузов, если коэффициент трения скольжения между грузом 1 и плоскостью $f = 0,1$.

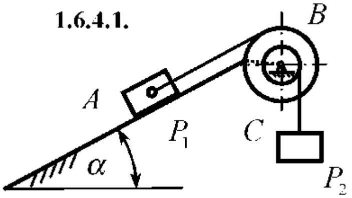
1.6.3.4.



Тела 1 и 2 - однородные диски, массы и радиусы которых одинаковы. Определить ускорение тела 3, если его массы $m_3 = m_2 = m_1$.

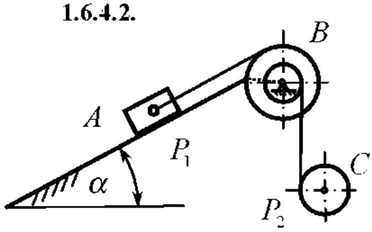
1.6.4 Уравнения Лагранжа II рода

1.6.4.1.



Груз A весом P_1, начинает двигаться из состояния покоя по гладкой неподвижной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 40°$. К грузу прикреплена нить, перекинутая через ступенчатый блок B и несущая на конце груз C весом $P_2 = 120H$. Найти уравнение движения груза A вдоль плоскости. Внешний радиус ступенчатого блока в 2 раза больше внутреннего.

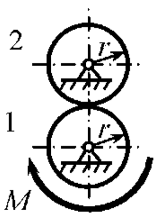
1.6.4.2.



Груз A весом $P_1 = 100H$, движется по шероховатой неподвижной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 40°$. К грузу прикреплена нить, перекинутая через ступенчатый блок B и несущая на конце однородный цилиндр C весом $P_2 = 120H$.

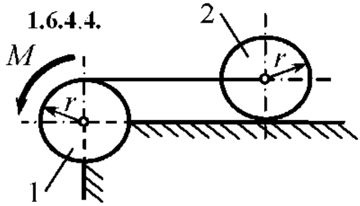
Цилиндр скатывается с нити, предварительно намотанной на цилиндр. Коэффициент трения груза A о плоскость $f = 0{,}1$. Определить ускорение груза A и оси цилиндра C. Внешний радиус ступенчатого блока в 2 раза больше внутреннего.

1.6.4.3.



Определить угловое ускорение диска 1, если на него действует пара сил с моментом $M = 0{,}4Нм$. Массы и радиусы однородных дисков 1 и 2 одинаковы: $m = 10кг$, $r = 0{,}2м$

1.6.4.4.



Определить угловое ускорение катка 2, катящегося без скольжения, если на блок 1 действует пара сил с моментом $M = 0{,}6H \cdot м$. Каток 2 считать однородным цилиндром массой $m = 4кг$ и радиусом $r = 0{,}5м$

2. ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

2.1. Основные термины и определения

№	Наименование	Определение. формула.
1.	Механика	Наука о движении.
2.	Теоретическая механика	Наука, в которой изучаются наиболее общие законы механического движения и механического взаимодействия материальных тел.
3.	Статика	Раздел механики, в котором изучается равновесие материальных тел под действием приложенных к ним сил.
4.	Механическое движение	Одна из форм движения материи, выражающаяся в изменении с течением времени положения тел в пространстве.
5.	Механическое взаимодействие	Одна из форм взаимодействия материи, выражающая изменение механического движения .
6.	Абсолютно твёрдое (недеформируемое) тело	Тело, расстояния между двумя любыми точками которого не изменятся.
7.	Однородное тело	Тело с одинаковыми свойствами во всех точках.
8.	Сила	Мера механического взаимодействия материальных тел.
9.	Система сил	Совокупность сил, действующих на тело.
10.	Уравновешенная система сил	Система сил, под действием которой тело находится в равновесии.
11.	Эквивалентные системы сил	Системы сил, которые, действуя порознь на тело, могут вызвать одно и тоже его движение.
12.	Равнодействующая системы сил	Сила. эквивалентная системе сил.
13.	Главный вектор системы сил	Геометрическая сумма сил системы. **См. также 2.2.1.**
14.	Главный момент системы сил	Геометрическая сумма векторов-моментов сил системы. **См. также 2.2.1.**
15.	Распределённая нагрузка	Силы, распределённые по длине, площади или объёму. **См. также 2.2.2.**
16.	Проекция силы на ось	Проекцией силы на ось называют длину отрезка оси, заключенную между проекциями начала и конца вектора этой силы на эту ось. **См. также 2.2.3.**

№	Наименование	Определение, формула.
17.	Проекция силы на плоскость	Проекцией силы на плоскость называют вектор, заключенный между проекциями начала и конца вектора этой силы на эту плоскость. **См. также 2.2.4.**
18.	Момент силы относительно центра (точки)	Моментом силы относительно центра (точки) называют взятое с соответствующим знаком произведение величины (модуля вектора) силы на плечо. **См. также 2.2.5.**
19.	Центр момента	Геометрическая точка, относительно которой вычисляется момент. **См. также 2.2.5.**
20.	Плечо силы	Плечом силы называют расстояние центра момента от линии действия силы - иными словами, длину перпендикуляра, опущенного из центра момента на линию действия силы. **См. также 2.2.5.**
21.	Вектор – момент силы относительно центра (точки)	Вектор, равный векторному произведению радиус-вектора точки приложения силы, проведённого из центра момента, на вектор этой силы. **См. также 2.2.6.**
22.	Пара сил	Парой сил называют систему двух равных по величине антипараллельных сил. **См. также 2.2.7.**
23.	Момент пары сил. .	Моментом пары называют взятое с соответствующим знаком произведение одной из сил пары на плечо. **См. также 2.2.7.**
24.	Плечо пары сил	Плечом пары называют расстояние между линиями действия сил пары. **2.2.7.**
25.	Вектор – момент пары сил	Вектором-моментом пары называют вектор, равный по модулю моменту пары, перпендикулярный плоскости пары и направленный так, что если смотреть с конца его возможное вращение тела под действием пары кажется происходящим против хода часовой стрелки. **См. также 2.2.8.**
26.	Момент силы относительно оси	Моментом силы относительно оси называют момент проекции силы на плоскость, перпендикулярную данной оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью. **См. также 2.2.9.**

№	Наименование	Определение. формула.
27.	Расчётная схема	Реальный объект, освобождённый от несущественных в данной задаче особенностей.
28.	Условия равновесия	Условия, которые соблюдаются, если тело находится в равновесии (необходимость) – с одной стороны, и выполнение которых обеспечивает равновесие тела (достаточность) – с другой стороны.
29.	Уравнения равновесия	Условия равновесия, записанные в форме уравнений. **См. также 2.4.2.**
30.	Центр параллельных сил	Центром параллельных сил называют точку на линии действия равнодействующей системы этих сил, вокруг которой поворачивается эта равнодействующая при одновременном повороте всех сил системы на один и тот же угол.
31.	Центр тяжести твёрдого тела	Центром тяжести твердого тела называют центр параллельных между собой сил тяжести отдельных частей этого тела, а равнодействующую этих сил – весом тела. **См. также 2.4.3.1-2.**
32.	Связи	Материальные тела, препятствующие свободному перемещению рассматриваемого тела в пространстве.
33.	Реакции связей	Силы, с которыми связи действуют на тело. **См. также 2.4.1.1-13**.
34.	Кинематика	Раздел механики, в котором изучается движение тел без учёта причин, вызывающих это движение.
35.	Кинематические характеристики	Характеристики движения: скорость, ускорение, траектория и др.
36.	Задание движения	Задать движение – это значит указать метод (способ), с помощью которого можно определить положение точки (тела) в любой момент времени. **См. также 2.5.1.1.**
37.	Точка	Тело, размерами которого можно пренебречь при решении данной задачи.
38.	Траектория точки	Линия, которую описывает точка при своём движении. (Геометрическое место точек, через которые последовательно проходит движущаяся точка.)
39.	Радиус-вектор точки	Вектор, проведённый из некоторого центра в движущуюся точку: $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

№	Наименование	Определение, формула.
		См. также 2.5.1.1.
40.	Уравнения движения	Аналитические зависимости соответствующих координат от времени. **См. также 2.5.1.2.**
41.	Графики движения	Графики, построенные по соответствующим уравнениям движения.
42.	Дуговая координата	Криволинейная координата, отсчитываемая по длине дуги траектории.
43.	Закон движения точки по траектории	Зависимость дуговой координаты от времени: $S = S(t)$. **См. также 2.5.1.3.**
44.	Годограф вектора некоторой переменной	Геометрическое место концов векторов переменной, если их начала снести в одну точку.
45.	Скорость точки	Векторная величина, характеризующая быстроту изменения положения точки: $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.
45.	Ускорение точки	Векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости как вектора: $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.
47.	Поступательное движение	Такое движение твёрдого тела, при котором любая прямая, неизменно связанная с телом остаётся параллельной самой себе в течение всего времени движения. **См. также 2.5.2.**
48.	Вращательное движение	Такое движение твёрдого тела, при котором, по крайней мере, две точки тела остаются неподвижными в течение всего времени движения. Прямая, проходящая через эти точки, называется осью вращения. **См. также 2.5.2.**
49.	Закон вращательного движения	Зависимость угла поворота тела от времени $\varphi = \varphi(t)$.
50.	Угловая скорость	Величина, характеризующая быстроту вращения тела: $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. **См. также 2.5.2.**
51.	Угловое ускорение	Величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости вращающегося тела:

№	Наименование	Определение, формула.
		$\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$. **См. также 2.5.2.**
52.	Сложное движение твёрдого тела	Любое непоступательное и невращательное движение твёрдого тела.
53.	Сложное движение точки	Движение точки, происходящее по отношению к нескольким системам отсчёта.
54.	Относительное движение	Движение тела (точки) по отношению к подвижной системе отсчёта.
55.	Переносное движение	Движение подвижной системы отсчёта по отношению к неподвижной .
56.	Абсолютное движение	Движение тела (точки) по отношению к неподвижной системе отсчёта.
57.	Плоскопараллельное движение	Такое движение, при котором все точки тела движутся в плоскостях, параллельных одной неподвижной плоскости.
58.	Мгновенный центр вращения	Точка, вокруг которой поворачивается тело в данный момент времени.
59.	Мгновенный центр скоростей	Точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. **См. также 2.5.3.**
60.	Сферическое движение	Такое движение твёрдого тела, при котором одна точка тела остаётся неподвижной в течение всего времени движения. Точка эта называется центром вращения.
61.	Мгновенная ось вращения	Геометрическое место точек тела, вращающегося вокруг неподвижного центра, скорости которых в данный момент времени равны нулю.
62.	Динамика	Раздел механики, в котором изучается движение материальных тел под действием приложенных к ним сил.
63.	Кинетика	Динамика с элементами статики.
64.	Материальная точка	Материальное тело, размерами которого можно пренебречь при решении данной задачи.
65.	Инерция	Стремление материального тела сохранять свою скорость, как по величине, так и по направлению.
66.	Механическая система	Мысленно выделенная исследователем совокупность материальных точек (тел), взаимодействующих между собой.

№	Наименование	Определение, формула.
67.	Первая (прямая) задача динамики	Определение сил по заданному движению.
68.	Вторая (обратная) задача динамики	Определение движения по заданным силам.
69.	Силы внешние	Силы, действующие на тела, принадлежащие выбранной механической системы, со стороны тел, в эту систему не входящих.
70.	Силы внутренние	Силы взаимодействия тел, входящих в одну механическую систему.
71.	Масса механической системы	Сумма масс точек (тел), входящих в механическую систему.
72.	Центр масс механической системы	Центром масс (центром инерции) механической системы называют точку, положение которой определяется нижеследующим радиус-вектором: $\vec{r}_C = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$. Для твёрдого тела $\vec{r}_C = \dfrac{\int_{(m)} \vec{r} \cdot dm}{\mathrm{M}}$.
73.	Количество движения (импульс) материальной точки	Мера движения материальной точки, равная произведению массы точки на вектор её скорости: $\vec{k} = m\vec{V}$.
74.	Количество движения (главный вектор количеств движения) механической системы (твёрдого тела)	Мера движения механической системы, равная геометрической сумму количеств движения точек (тел), входящих в состав системы: $\vec{K} = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{V}_k$. Для твёрдого тела $\vec{K} = \mathrm{M}\vec{V}_C$, где M - масса тела, $\vec{V}_C$ - скорость его центра масс.

№	Наименование	Определение, формула.
75.	Импульс силы	Импульсом силы (полным импульсом силы) называют меру действия силы, равную интегралу от элементарно импульса силы, взятому по времени. Элементарным импульсом силы называют меру действия силы, равную произведению вектора силы на дифференциал времени. $\vec{S} = \int\limits_{(t)} d\vec{S} = \int\limits_{0}^{t} \vec{F}dt$.
76.	Момент количества движения материальной точки относительно центра	Мера движения материальной точки, равная векторному произведению радиус-вектора точки, проведённого из этого центра, на вектор её количества движения: $\vec{l}_o = \vec{m}_O\left(m\vec{V}\right) = \vec{r} \times m\vec{V}$.
77.	Момент количества движения материальной точки относительно оси	Мера движения материальной точки, равная проекции вектора-момента материальной точки относительно центра на ось, проходящую через этот центр: $l_X = m_X\left(m\vec{V}\right) = l_{OX}$.
78.	Кинетический момент (момент количества движения, главный момент количеств движения) механической системы относительно центра	Мера движения системы, равная геометрическую сумму векторов-моментов количеств движения точек системы относительно этого центра: $\vec{L}_O = \sum\limits_{k=1}^{n} \vec{m}_O\left(m_k\vec{V}_k\right)$.
79.	Кинетический момент механической системы относительно оси	Мера движения механической системы, равная алгебраическую сумму моментов количеств движения точек системы относительно этой оси: $L_X = \sum\limits_{k=1}^{n} m_X\left(m_k\vec{V}_k\right)$.

№	Наименование	Определение, формула.
80.	Момент инерции относительно оси	Моментом инерции механической системы относительно оси называют характеристику распределения масс, равную $J_Z = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2$. Для сплошного тела $J_Z = \int_{(M)} r^2 dm$. **См. также 2.6.4.**
81.	Радиус инерции	Радиусом инерции твёрдого тела относительно оси называют расстояние от оси той точки тела, момент инерции которой относительно этой оси равен моменту инерции тела: $J_O = M\rho_Z^2 \Rightarrow \rho_Z = \sqrt{\frac{J_O}{M}}$.
82.	Кинетическая энергия материальной точки	Кинетической энергией материальной точки называют меру её движения, равную половине произведения массы точки на квадрат скорости: $T = \frac{mV_2}{2}$.
83.	Кинетическая энергия механической системы	Кинетической энергией механической системы называют меру её движения, равную сумме кинетических энергий материальных точек (тел), входящих в состав системы: $T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k V_k^2}{2}$.

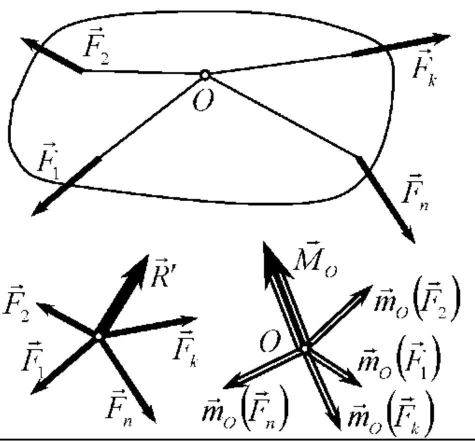
№	Наименование	Определение, формула.
84.	Кинетическая энергия твёрдого тела	Для тела, совершающего поступательное движение $T = \frac{MV^2}{2}$, где M - масса тела, V - скорость тела. Для тела, совершающего вращательное движение $T = \frac{J\omega^2}{2}$, где J - момент инерции тела относительно оси вращения, ω - угловая скорость тела. Для тела, совершающего сложное движение $T = \frac{MV_C^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2}$, где M - масса тела, V_C - скорость центра масс, J_C - момент инерции тела относительно мгновенной центральной оси, ω - угловая скорость тела.
85.	Работа силы	Работой силы на некотором перемещении называют меру действия силы, равную интегралу от элементарной работы силы, взятому по перемещению. **См. также 2.6.5.** Элементарной работой силы называют меру действия силы, равную произведению величины силы на элементарное перемещение и на косинус угла между вектором силы и вектором скорости точки приложения силы: $A_F = A(F) = \int_{(S)} dA_F = \int_{(S)} F \cdot \cos(\vec{F}^\wedge\vec{V}) \cdot dS$.
86.	Мощность	Мощностью называют быстроту совершения работы, равную производной от работы по времени: $N = \frac{dA_F}{dt}$. Для вращающегося тела $N = M\omega$.

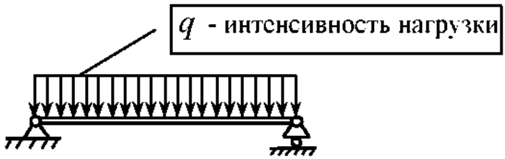
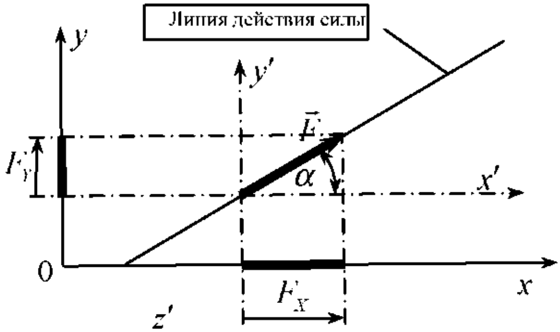
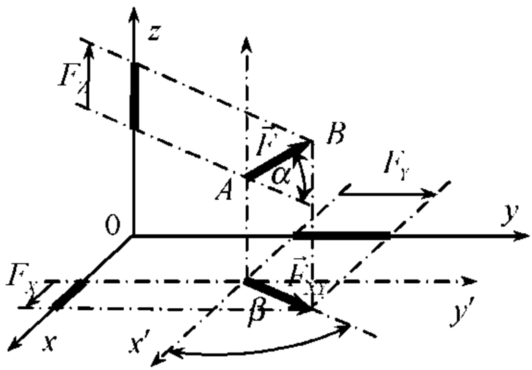
№	Наименование	Определение, формула.
87.	Сила инерции материальной точки	Сила, равная по величине произведению массы точки на её ускорение и направленная в сторону, противоположную вектору ускорения: $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$. **См. также 2.2.10.**
88.	Главный вектор сил инерции механической системы	Геометрическая сумма сил инерции точек системы: $\vec{R}^u = \sum_{k=1}^{n} \vec{\Phi}_k = -\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{a}_k$. Для твёрдого тела $\vec{R}^u = -\mathrm{M}\vec{a}_C$, где M - масса тела, $\vec{a}_C$ - ускорение центра масс.
89.	Главный момент сил инерции механической системы	Геометрическая (алгебраическая) сумма моментов сил инерции точек системы относительно этого центра (этой оси): $\vec{M}_O^u = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O\left(\vec{F}_k^u\right)$, $M_X^u = \sum_{k=1}^{n} m_X\left(\vec{F}_k^u\right)$. Для твёрдого тела $\vec{M}_O^u = -I_O\vec{\varepsilon}$, где I_O - момент инерции тела, $\vec{\varepsilon}$ - вектор углового ускорения тела.
90.	Аналитическая механика	Приложение математического анализа как метода к решению задач механики.
91.	Возможное перемещение	Возможным перемещением механической системы называют совокупность бесконечно малых перемещений точек системы, допускаемых её связями и осуществлённых в фиксированное время.
92.	Идеальные связи	Связи, сумма работ реакций которых на любом из возможных перемещений равна нулю.
93.	Число степеней свободы	Число независимых между собой параметров, однозначно определяющих положение всех точек механической системы в пространстве, называется числом степеней свободы системы s .

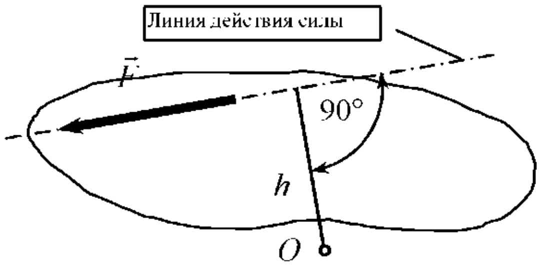
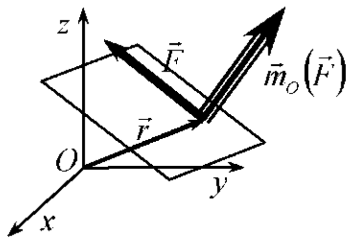
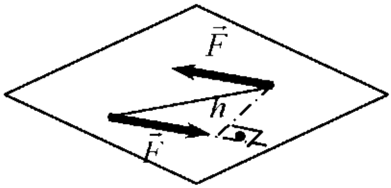
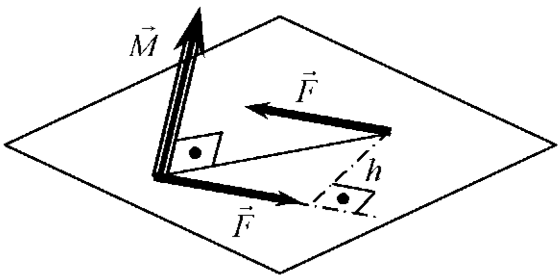
№	Наименование	Определение, формула.
94.	Обобщённые координаты	Независимые между собой параметры, число которых равно числу степеней свободы механической системы и которые однозначно определяют положение всех точек системы в пространстве, называются обобщёнными координатами $q_1, q_2 \ldots q_s$.
95.	Обобщённые скорости	Производные от обобщённых координат по времени $\dot{q}_1, \dot{q}_2 \ldots \dot{q}_s$.
96.	Обобщённые силы	Обобщёнными силами Q_i называют коэффициенты при приращениях обобщённых координат δq_i в выражении суммы элементарных работ: $\sum \delta A_{Fi} = Q_i \cdot \delta q_i$.
97.	Механические колебания	Механическими колебаниями называют механическое движение, обладающее той или иной степенью повторяемости.
98.	Свободные колебания	Такие колебания, при которых после кратковременного воздействия механическая система не испытывает внешних возмущений, то есть к ней не подводится внешняя энергия.
99.	Вынужденные колебания	Колебания, которые вызываются подводимой внешней энергией, то есть механическая система в течение всего времени движения испытывает внешние возмущения.
100.	Периодические колебания	Колебания, кинематические уравнения движения которых описываются периодическими функциями: $f(t) = f(t + \tau)$, где τ - период колебаний.
101.	Гармонические колебания	Колебания, происходящие по гармоническому закону – закону синуса или косинуса. **См. также 2.2.11.**
102.	Амплитуда гармонических колебаний	Абсолютная величина максимального отклонения от положения равновесия. **См. также 2.2.11.**
103.	Фаза гармонических колебаний	Аргумент гармоники: $\varphi = \omega t + \varphi_0$. **См. также 2.2.11.**

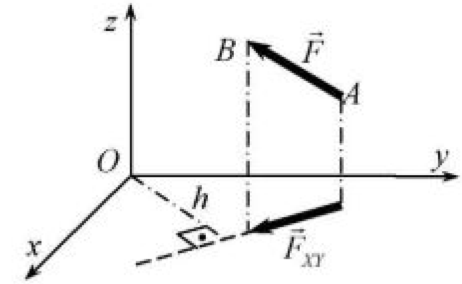
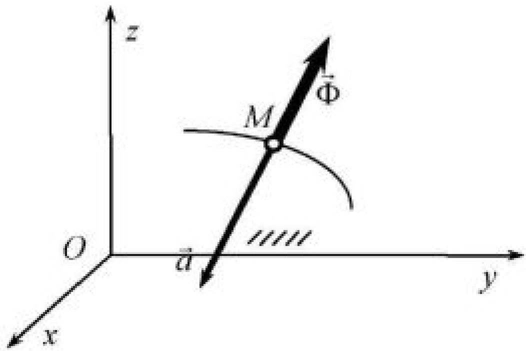
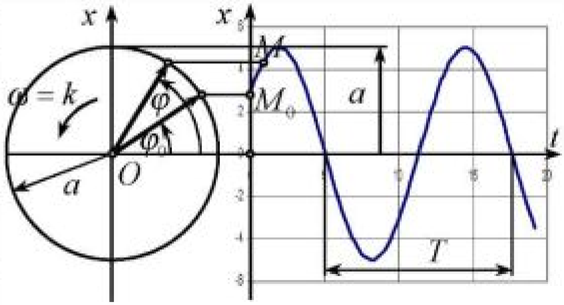
№	Наименование	Определение, формула.
104.	Начальная фаза колебаний	Значение фазы колебаний при $t = 0$. **См. также 2.2.11.**
105.	Частота колебаний круговая (циклическая)	Число колебаний в 2π секунд: $\omega = k = \dfrac{2\pi}{\tau}$. **См. также 2.2.11.**
106.	Собственные колебания	Общее решение однородных дифференциальных уравнений, соответствующих неоднородным дифференциальным уравнениям вынужденных колебаний. (Составляющая вынужденных колебаний, не зависящая от возмущающей силы).
107.	Собственные частоты	Частоты собственных колебаний.
108.	Резонанс (при отсутствии сил сопротивления)	Явление неограниченного возрастания амплитуды вынужденных колебаний при совпадении частоты собственных колебаний с частотой возмущающей силы. **См. также 2.2.12.**
109.	Резонанс (с учётом сил сопротивления)	Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при значении частоты собственных колебаний, близкой к частоте возмущающей силы. **См. также 2.2.13.**

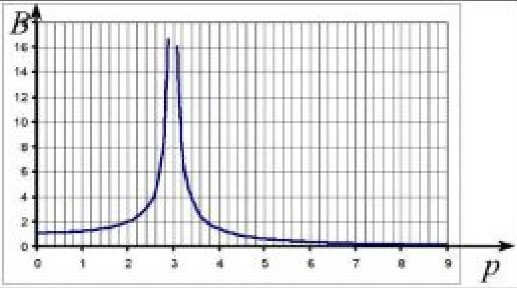
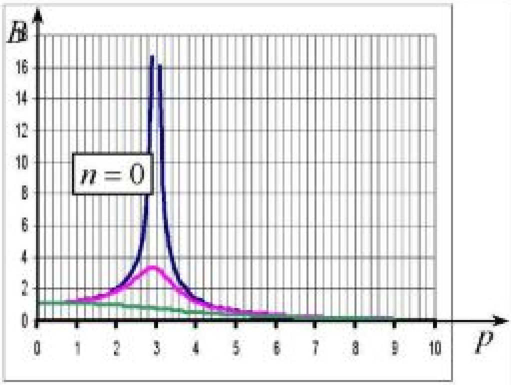
2.2. Иллюстрации к отдельным терминам и определениям

№	Наименование, формула.	Иллюстрация
1.	Главный вектор системы сил: $\vec{R}' = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$. Главный момент системы сил относительно центра O: $\vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O\left(\vec{F}_k\right)$.	

№	Наименование, формула.	Иллюстрация
2.	Распределённая нагрузка - силы, распределённые по длине.	
3.	Проекция силы на ось: $F_X = F\cos\alpha$, $F_Y = F\cos(90° - \alpha) = F\sin\alpha$.	
4.	Проекция силы на плоскость: $F_{XY} = F\cos\alpha$.	

№	Наименование, формула.	Иллюстрация
5.	Момент силы относительно центра (точки): $m_O\left(\vec{F}\right) = \pm Fh$.	
6.	Вектор – момент силы относительно центра (точки): $\vec{m}_O\left(\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$.	
7.	Пара сил. Момент пары сил: $M = \pm F \cdot h$.	
8.	Вектор – момент пары сил.	

№	Наименование, формула	Иллюстрация
9.	Момент силы относительно оси: $m_X\left(\vec{F}\right)=m_O\left(\vec{F}_{XY}\right)$.	
10.	Сила инерции материальной точки: $\vec{\Phi}=-m\vec{a}$.	
11.	Гармонические колебания: $q=a\sin\left(kt+\varphi_0\right)$. a - амплитуда гармонических колебаний; $\varphi=kt+\varphi_0$ - фаза гармонических колебаний; T - период гармонических колебаний; Частота колебаний круговая (циклическая) $k=\omega=\dfrac{2\pi}{T}$.	

12.	Резонанс (при отсутствии сил сопротивления).	
13.	Резонанс (с учётом сил сопротивления).	

2.3. Последовательность решения задач теоретической механики

2.3.1. Решение задач статики

2.3.1.1. Последовательность решения задач с использованием уравнений равновесия

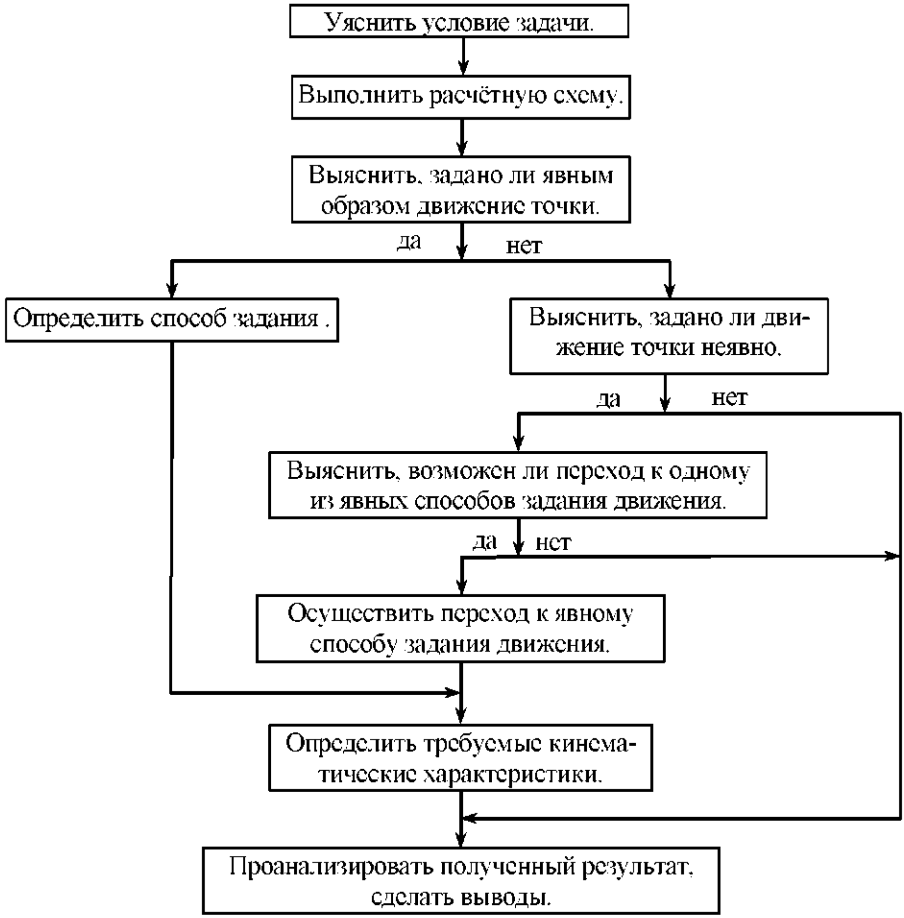
№	Выполняемые действия
1	Уяснить условие задачи, выполнить чертеж (рисунок).
2	Выбрать тело (систему тел), равновесие которого (которой) будет рассматриваться. Для выбранного тела (системы тел) изобразить соответствующую расчётную схему.
3	Изобразить на расчётной схеме силы, действующие на выбранное тело (систему тел): активные и реакции связей. Установить вид полученной системы сил.
4	Выбрать удобные оси координат (и центры моментов - если это нужно).
5	Записать соответствующие полученной системе сил (см. п.3) уравнения равновесия и решить их. **См. также 2.4.2.1-7.**
6	Проанализировать полученный результат, сделать выводы.
Примечание: В случае необходимости (для систем тел) пункты 2 – 5 выполняются для разных тел неоднократно.	

2.3.1.2. Последовательность определения положения центра тяжести

№	Выполняемые действия
1	Уяснить условие задачи, выполнить расчётную схему.
2	Выбрать произвольные (случайные) оси координат.
3	Мысленно разбить тело на части простой (элементарной) геометрической формы, для которых можно найти положения центров тяжести каждого из элементов тела.
4	Выразить координаты центров тяжести каждого из элементов тела по отношению к выбранной произвольной системе координат.
5	Исходя из физического смысла задачи, выбрать для её решения одну из групп формул ряда **2.4.3.1-4.** В зависимости от выбора найти значения либо сил тяжести, либо объёмов, либо площадей, либо длин для указанных в п.3 элементов тела. **См. также 2.4.3.2.** При этом силы тяжести (объёмы, площади) вырезов (полостей) считаются отрицательными
6	Подсчитать по выбранной группе формул координаты центра тяжести всего тела. Изобразить этот центр тяжести на расчётной схеме.
7	Проанализировать полученный результат, сделать выводы.

2.3.2. Решение задач кинематики

2.3.2.1. Последовательность решения задач кинематики точки



Примечание:

Так как поступательно движущееся тело можно считать материальной точкой независимо от его размеров, вышеприведённая последовательность является одновременно и последовательностью решения задач кинематики поступательного движения твёрдого тела. **См. также 2.5.2.**

2.3.2.2. Последовательность решения задач кинематики вращательного движения твёрдого тела

2.3.2.3. Последовательность решения задач кинематики сложного (составного) движения точки

№	Выполняемые действия
1	Уяснить условие задачи.
2	Изобразить расчётную схему. Если в задаче есть неподвижная ось вращения, перпендикулярная плоскости чертежа, то при выполнении расчётной схемы можно ограничиться одной фронтальной проекцией (видом спереди). А противном случае необходимо изобразить, по крайней мере, два проекции (два вида), например, фронтальной и вертикальной (видом спереди и видом сверху). К аксонометрии прибегать не рекомендуется.
3	Установить, какое тело совершает сложное (составное) движение. Установить, можно ли считать это тело кинематической точкой.
4	Выбрать неподвижные оси (ось) координат.
5	Выбрать подвижные оси (ось) координат. Эти оси (эту ось) следует выбирать так, чтобы движение тела (точки) по отношению к этим осям было простым (поступательным или вращательным), и чтобы движение подвижных осей по отношению к неподвижным осям было простым. Необходимо также указать, с каким физическим телом связываются подвижные оси.
6	Установить какое движение в условиях данной задачи является относительным. При этом необходимо указать тело (или точку), совершающее относительное движение. Если относительное движение совершает тело, необходимо указать вид этого движения (поступательного или вращательного). При этом, в случае поступательного движения необходимо указать форму траектории, в случае вращательного движения – ось вращения. Если относительное движение совершает точка, необходимо указать форму траектории.
7	Установить какое движение в условиях данной задачи является переносным. При этом необходимо указать тело, связанное с подвижными осями и совершающее, следовательно, переносное движение.
8	Ответить на вопросы задачи. При этом, отвечая на вопрос, связанный с определением скоростей, необходимо воспользоваться теоремой сложения скоростей. Для ответа на вопрос, связанный с определением ускорений, необходимо воспользоваться теоремой сложения ускорений. Соответствующие векторы необходимо изобразить на рисунке.
9	Проанализировать полученный результат, сделать выводы.

2.3.2.4. Последовательность решения задач кинематики плоскопараллельного движения твёрдого тела

№	Выполняемые действия
1	Уяснить условие задачи.
2	Изобразить расчётную схему.
3	Если в задаче рассматривается движение механизма, необходимо провести анализ движения его звеньев. При этом необходимо установить, какое движение совершает каждое из подвижных звеньев механизма. Если звено совершает поступательное движение, необходимо указать форму траектории. Если звено совершает вращательное движение, необходимо указать ось вращения. Если звено совершает плоскопараллельное движение, рекомендуется обратить внимание на «пограничные» точки – точки, принадлежащие как этому звену, так и другим звеньям (в первую очередь телам, совершающим простые движения).
4	При определении скоростей необходимо определиться, какое из двух представлений плоскопараллельного движения является в данной задаче предпочтительным: представление этого движения как сложного или как вращения вокруг мгновенного центра вращения. В первом случае рекомендуется выбрать одну из вышеуказанных «пограничных» точек в качестве полюса, определив её скорость (по величине и направлению), исходя из кинематики «граничащего» звена. Во втором случае рекомендуется повторить способы определения положения мгновенного центра скоростей. **См. также 2.5.3.**
5	При определении ускорений необходимо определиться, какое из двух представлений плоскопараллельного движения является в данной задаче предпочтительным: представление этого движения как сложного или как вращения вокруг мгновенного центра ускорений. В первом случае рекомендуется выбрать одну из вышеуказанных «пограничных» точек в качестве полюса, определив её ускорение (по величине и направлению), исходя из кинематики «граничащего» звена. Во втором случае рекомендуется повторить способы определения положения мгновенного центра ускорений.
6	Ответить на вопросы задачи.
7	Проанализировать полученный результат, сделать выводы.

2.3.2.5. Последовательность решения задач кинематики сферического движения твёрдого тела

№	Выполняемые действия
1	Уяснить условие задачи.
2	Изобразить расчётную схему.
3	Определить тело, совершающее сферическое движение. Таким телом является тело, имеющее одну неподвижную точку в течение всего времени движения – центр вращения.
4	Найти положение мгновенной оси вращения. Для этого необходимо найти точку тела, скорость которой в данный момент времени равна нулю, и соединить её отрезком прямой с центром вращения. Вектор абсолютной угловой скорости находится на мгновенной оси вращения.
5	Скорость точки A тела, вращающегося вокруг неподвижного центра O (совершающего сферическое движение) может быть определена по формуле $\vec{V}_A = \vec{\omega}\times\overrightarrow{OA} \Rightarrow V_A = \omega\cdot h$, где $\vec{\omega}$ - вектор абсолютной угловой скорости, h - расстояние точки A от мгновенной оси вращения.
5	Ускорение точки A тела, вращающегося вокруг неподвижного центра O (совершающего сферическое движение) равно векторной сумме двух её составляющих – осестремительной и вращательной: $\vec{a}_A = \vec{a}_A^{oc} + \vec{a}_A^{вр} = \vec{\omega}\times\vec{V}_A + \vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{OA}$, где $\vec{\varepsilon}$ - вектор абсолютного углового ускорения тела.
6	Ответить на вопросы задачи.
7	Проанализировать полученный результат, сделать выводы.

2.3.3. Последовательность решения задач динамики

2.3.3.1. Последовательность решения задач с использованием дифференциальных уравнений движения материальной точки

№	Выполняемые действия
1	Уяснить условие задачи, выполнить расчётную схему.
2	Попытаться установить тип решаемой задачи: - первая (прямая) задача динамики, - вторая (обратная) задача динамики, - задача смешанного типа.
3	Выбрать тело, движение которого будет рассматриваться, Установить, может ли выбранное тело считаться материальной точкой.
4	Изобразить выбранное тело в промежуточном (текущем) положении.

5	Изобразить силы, действующие на выбранное тело: активные и реакции связей.
6	Выбрать удобные оси координат. При решении второй задачи динамики записать начальные условия.
7.	Записать соответствующие выбранным осям координат дифференциальные уравнения и решить их. **См. также 2.6.1.**
8	Проанализировать полученный результат, сделать выводы.

2.3.3.2. Последовательность решения задач по исследованию прямолинейных колебаний материальной точки

№	Выполняемые действия
1	Уяснить условие задачи, выполнить расчётную схему.
2	Выбрать тело, движение которого будет рассматриваться. Установить, может ли выбранное тело считаться материальной точкой.
3	Изобразить материальную точку в промежуточном (текущем) положении. Кроме того, при необходимости изобразить материальную точку в следующих положениях: • в начальный момент времени; • в положении статического равновесия; • в положении, соответствующем недеформированной (натуральной) длине пружины.
4	Изобразить силы, действующие на выбранное тело: активные и реакции связей.
5	Выбрать удобные оси координат. Записать начальные условия
6	Записать дифференциальные уравнения движения. Привести их к каноническому виду.
7.	Записать кинематические уравнения движения. Постоянные интегрирования определить из начальных условий. При необходимости ответить на другие вопросы задачи.
8	Проанализировать полученный результат, сделать выводы.

2.3.3.3. Последовательность решения задач с использованием теоремы о движении центра масс

№	Выполняемые действия
1	Уяснить условие задачи, выполнить расчётную схему.
2	Попытаться установить тип решаемой задачи: - первая (прямая) задача динамики, - вторая (обратная) задача динамики, - задача смешанного типа.
3	Выбрать механическую систему, движение которой будет рассматриваться.

4	Изобразить внешние силы, действующие на выбранную механическую систему.
5	Выбрать удобные оси координат. При решении второй задачи динамики записать начальные условия.
6	Записать дифференциальные уравнения (**2.6.3.1.**)и решить их.
7	Проанализировать полученный результат, сделать выводы.

2.3.3.4. Последовательность решения задач с использованием теоремы об изменении количества движения

№	Выполняемые действия
1	Уяснить условие задачи, выполнить расчётную схему.
2	Попытаться установить тип решаемой задачи: - первая (прямая) задача динамики, - вторая (обратная) задача динамики, - задача смешанного типа.
3	Выбрать механическую систему, движение которой будет рассматриваться.
4	Изобразить внешние силы, действующие на выбранную механическую систему.
5	Выбрать удобные оси координат. При решении второй задачи динамики записать начальные условия.
6	Записать уравнения (**2.6.3.2.**) и решить их.
7	Проанализировать полученный результат, сделать выводы.

2.3.3.5. Последовательность решения задач с использованием теоремы об изменении момента количества движения

№	Выполняемые действия
1	Уяснить условие задачи, выполнить расчётную схему.
2	Попытаться установить тип решаемой задачи: - первая (прямая) задача динамики, - вторая (обратная) задача динамики, - задача смешанного типа.
3	Выбрать механическую систему, движение которой будет рассматриваться.
4	Изобразить внешние силы, действующие на выбранную механическую систему.
5	Выбрать удобные оси координат. При решении второй задачи динамики записать начальные условия.
6	Записать дифференциальные уравнения. (**2.6.3.3.**)и решить их.
7	Проанализировать полученный результат, сделать выводы.

2.3.3.3. Последовательность решения задач с использованием теоремы об изменении кинетической энергии

№	Выполняемые действия
1	Уяснить условие задачи, выполнить расчётную схему.
2	Попытаться установить тип решаемой задачи: - первая (прямая) задача динамики, - вторая (обратная) задача динамики, - задача смешанного типа.
3	Выбрать механическую систему, движение которой будет рассматриваться.
4	Изобразить внешние силы, действующие на выбранную механическую систему, а также реакции внутренних неидеальных связей (в первую очередь – силы упругости).
5	Записать уравнения теоремы (**2.6.3.4.**).
6	Подсчитать кинетическую энергию системы в конечном и начальном её положениях.
7	Подсчитать работы сил, указанных в п.4, на соответствующих перемещениях. **См. также 2.6.5.**
8	Подставить найденные значения энергий и работ в уравнение (1.9.1.) и решить его.
9	Проанализировать полученный результат, сделать выводы.

2.3.3.7. Последовательность решения задач динамики с использованием принципа Даламбера

№	Выполняемые действия
1	Уяснить условие задачи, выполнить расчётную схему.
2	Попытаться установить тип решаемой задачи: - первая (прямая) задача динамики, - вторая (обратная) задача динамики, - задача смешанного типа.
3	Выбрать механическую систему, движение которой будет рассматриваться.
4	Изобразить силы, действующие на выбранную механическую систему - активные и реакции связей. Изобразить силы инерции. **См. также 2.2.10.** Установить вид полученной системы сил.
5	Выбрать удобные оси координат (и центры моментов - если это нужно).
6	Записать соответствующие полученной системе сил (см. п.4) уравнения кинетостатики и решить их.
7	Проанализировать полученный результат, сделать выводы.

2.3.3.8. Последовательность решения задач динамики с использованием принципа возможных перемещений

№	Выполняемые действия
1	Уяснить условие задачи, выполнить расчётную схему.
2	Выбрать механическую систему, равновесие которой будет рассматриваться.
3	Убедиться в идеальности связей системы. При наличии неидеальных связей их реакции формально считать активными силами. **См. также 2.1.92.**
4	Изобразить активные силы, действующие на выбранную механическую систему, а также реакции неидеальных связей.
5	Записать выражение принципа возможных перемещений (**2.6.6.2.**) в общем виде.
6	Сообщить системе возможное перемещение. **См. также 2.1.91.**
7	Подсчитать сумму элементарных работ указанных в п.4 сил на возможных перемещениях точек приложения этих сил.
8	Выразить эти возможные перемещения через какое-либо одно и подставить полученные значения в вышеуказанную сумму, а результат - выражение (**2.6.6.2.**).
9	Сократить полученное уравнение на указанное в п.8 возможное перемещение.
10	Ответить на вопрос задачи.
11	Проанализировать полученный результат, сделать выводы.

2.3.3.9. Последовательность решения задач с использованием и общего уравнения динамики

№	Выполняемые действия
1	Уяснить условие задачи, выполнить расчётную схему.
2	Попытаться установить тип решаемой задачи: - первая (прямая) задача динамики, - вторая (обратная) задача динамики, - задача смешанного типа.
3	Выбрать механическую систему, движение которой будет рассматриваться.
4	Убедиться в идеальности связей системы. При наличии неидеальных связей их реакции формально считать активными силами.
5	Изобразить активные силы, действующие на выбранную механическую систему, а также реакции неидеальных связей. **См. также 2.1.92.**
6	Изобразить силы инерции. **См. также 2.2.10.**

7	Записать выражение общего уравнения динамики в общем виде. **См. также 2.6.6.3.**
8	Сообщить системе возможное перемещение.
9	Подсчитать сумму элементарных работ указанных в пп.5 и 6 сил на возможных перемещениях точек приложения этих сил.
10	Выразить эти возможные перемещения через какое-либо одно и подставить полученные значения в вышеуказанную сумму, а результат - выражение (**2.6.6.3.**).
11	Сократить полученное уравнение на указанное в п.9 возможное перемещение.
12	Ответить на вопрос задачи.
13	Проанализировать полученный результат, сделать выводы.

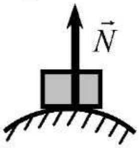
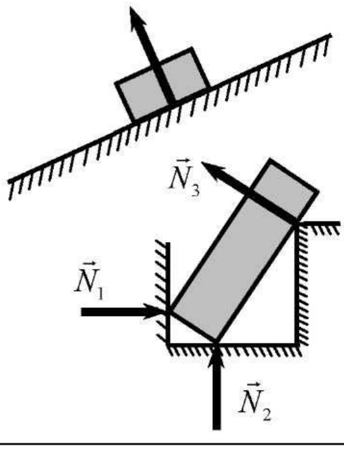
2.3.3.10. Последовательность решения задач с использованием уравнений Лагранжа II рода

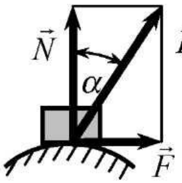
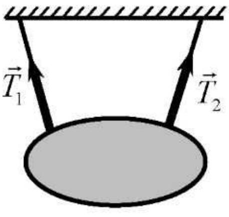
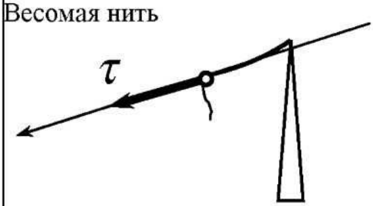
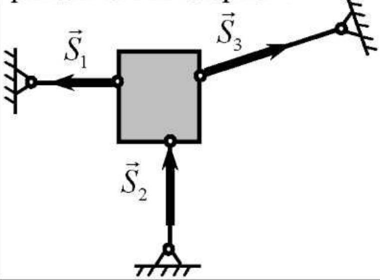
№	Выполняемые действия
1	Уяснить условие задачи, выполнить расчётную схему.
2	Попытаться установить тип решаемой задачи: - первая (прямая) задача динамики, - вторая (обратная) задача динамики, - задача смешанного типа.
3	Выбрать механическую систему, движение которой будет рассматриваться.
4	Убедиться в идеальности связей системы. При наличии неидеальных связей их реакции формально считать активными силами. **См. также 2.1.92.**
5	Определить число степеней свободы системы. **См. также 2.1.93.**
6	Выбрать обобщённые координаты. При решении второй задачи динамики записать начальные условия. **См. также 2.1.94.**
7	Записать уравнения Лагранжа для найденного числа степеней свободы и выбранных обобщённых координат. **См. также 2.6.6.4.**
8	Определить обобщённые силы системы: - изобразить активные силы, действующие на выбранную механическую систему, а также реакции неидеальных связей; - сообщить системе такое возможное перемещение, чтобы получила приращение лишь первая обобщённая координата; - подсчитать сумму элементарных работ указанных выше сил на соответствующих возможных перемещениях точек приложения этих сил; - в полученной сумме выразить значения вышеуказанных возможных перемещений через приращение первой обобщённой коорди-

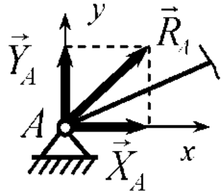
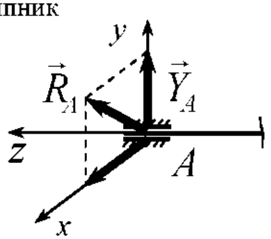
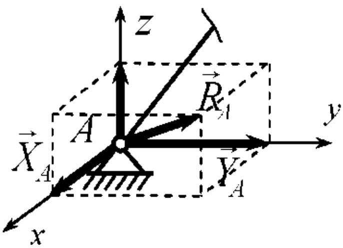
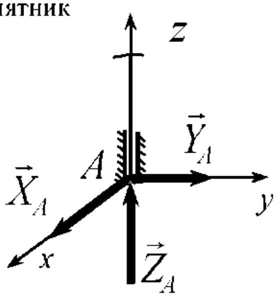
	наты, и вынести это приращение за скобку; - коэффициент при приращении первой обобщённой координаты в выражении суммы элементарных работ и будет первой обобщённой силой; - аналогичным образом определить остальные обобщённые силы.
9	Определить кинетическую энергию механической системы в абсолютном движении.
10	Подсчитать соответствующие производные.
11	Подставить значения подсчитанных производных и обобщённых сил в записанные ранее уравнения Лагранжа.
12	Ответить на вопрос задачи.
13	Проанализировать полученный результат, сделать выводы.

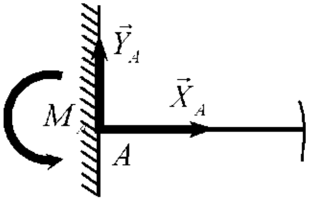
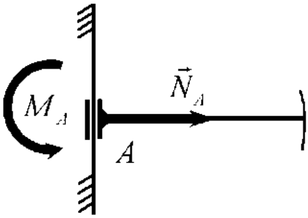
2.4. Статика

2.4.1. Основные типы связей

№	Тип связи	Реакция (реакции) связи
1.	Гладкая поверхность (плоскость)  	Реакция направлена по ***общей*** нормали к гладкой поверхности и поверхности (контуру) тела.
2.	Гладкая плоскость  	Реакция направлена по ***общему*** перпендикуляру к гладкой плоскости или плоскости (контуру) тела.

3.	Шероховатая поверхность (плоскость) 	К нормальной реакции добавляется сила трения
4.	Невесомая нерастяжимая нить 	Реакция направлена по нити к точке подвеса.
5.	Весомая нить 	Реакция направлена по касательной к нити.
6.	Невесомый недеформируемый прямолинейный стержень 	Реакция направлена по стержню.
7.	Подвижная шарнирная опора 	Реакция перпендикулярна плоскости перемещения катков.

8.	Неподвижный цилиндрический шарнир (неподвижная шарнирная опора) 	Реакция $\vec{R}_A$ цилиндрического шарнира перпендикулярна его оси A и пересекает эту ось. При решении задач реакцию $\vec{R}_A$ часто раскладывают на составляющие $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$.
9.	Подшипник 	Реакция $\vec{R}_A$ подшипника пересекает его ось и лежит в плоскости, перпендикулярной оси подшипника, то есть в плоскости xAy. При решении задач эту реакцию обычно раскладывают на составляющие $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, находящиеся в этой плоскости. ***Осевая составляющая реакции подшипника отсутствует***.
10.	Сферический (шаровой) шарнир 	Реакция сферического шарнира $\vec{R}_A$ проходит через центр шарнира. При решении задач эту реакцию обычно раскладывают на три составляющие - $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ и $\vec{Z}_A$. В случае, если на тело действует плоская система сил, составляющая реакции, не лежащая в плоскости действия сил отсутствует.
11.	Подпятник 	Реакция подпятника имеет три составляющие - $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ и $\vec{Z}_A$. В случае, если на тело действует плоская система сил, составляющая реакции, не лежащая в плоскости действия сил отсутствует.

12.	Жесткая заделка (защемление) 	Реакцией заделки кроме составляющих $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$ реактивной силы является реактивная пара сил с моментом M_A (короче говоря, реактивный момент M_A). В случае, если на тело действует произвольная пространственная система сил, реакция заделки может быть представлена тремя составляющими реактивной силы ($\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$) и тремя составляющими вектора- момента в заделке ($\vec{M}_{AX}$, $\vec{M}_{AY}$, $\vec{M}_{AZ}$).
13.	Скользящая заделка 	Реакцией скользящей заделки являются нормальная составляющая $\vec{N}_A$ и реактивный момент M_A.

2.4.2. Виды системы сил и соответствующие уравнения равновесия

№	Вид системы сил	Уравнения равновесия
1.	Система сил, расположенных на одной прямой	$\sum F_X = 0$
2.	Плоская система сходящихся сил	$\left.\begin{aligned}\sum F_X = 0\\ \sum F_Y = 0\end{aligned}\right\}$
.3.	Плоская система параллельных сил	$\left.\begin{aligned}\sum F_X = 0\\ \sum m_O(\vec{F}) = 0\end{aligned}\right\}$ или $\left.\begin{aligned}\sum m_A(\vec{F}) = 0\\ \sum m_B(\vec{F}) = 0\end{aligned}\right\}$

№	Вид системы сил	Уравнения равновесия
4.	Произвольная плоская система сил	$\left.\begin{array}{l}\sum F_X = 0\\ \sum F_Y = 0\\ \sum m_O\left(\vec{F}\right)=0\end{array}\right\}$ или $\left.\begin{array}{l}\sum F_X = 0\\ \sum m_A\left(\vec{F}\right)=0\\ \sum m_B\left(\vec{F}\right)=0\end{array}\right\}$ или $\left.\begin{array}{l}\sum m_A\left(\vec{F}\right)=0\\ \sum m_B\left(\vec{F}\right)=0\\ \sum m_C\left(\vec{F}\right)=0\end{array}\right\}$
5.	Пространственная система сходящихся сил	$\left.\begin{array}{l}\sum F_X = 0\\ \sum F_Y = 0\\ \sum F_Z = 0\end{array}\right\}$
6.	Пространственная система параллельных сил	$\left.\begin{array}{l}\sum F_X = 0\\ \sum m_Y\left(\vec{F}\right)=0\\ \sum m_Z\left(\vec{F}\right)=0\end{array}\right\}$
7.	Произвольная пространственная система сил	$\left.\begin{array}{l}\sum F_X = 0\\ \sum F_Y = 0\\ \sum F_Z = 0\\ \sum m_X\left(\vec{F}\right)=0\\ \sum m_Y\left(\vec{F}\right)=0\\ \sum m_Z\left(\vec{F}\right)=0\end{array}\right\}$

2.4.3. Центр тяжести

2.4.3.1. Координаты центра тяжести тел сложной формы

№	Тип тела	Координаты центра тяжести
1.	Неоднородное тяжёлое тело	$\left.x_C=\frac{\sum_{k=1}^{n}p_kx_k}{\sum_{k=1}^{n}p_k},y_C=\frac{\sum_{k=1}^{n}p_ky_k}{\sum_{k=1}^{n}p_k},z_C=\frac{\sum_{k=1}^{n}p_kz_k}{\sum_{k=1}^{n}p_k}\right\}$ При $n\to\infty$ $\left.x_C=\frac{\iiint_P x*dp}{P},y_C=\frac{\iiint_P y*dp}{P},z_C=\frac{\iiint_P z*dp}{P}\right\}$
2.	Однородное тяжёлое тело	$\left.x_C=\frac{\sum_{k=1}^{n}v_kx_k}{\sum_{k=1}^{n}v_k},y_C=\frac{\sum_{k=1}^{n}v_ky_k}{\sum_{k=1}^{n}v_k},z_C=\frac{\sum_{k=1}^{n}v_kz_k}{\sum_{k=1}^{n}v_k}\right\}$ При $n\to\infty$ $\left.x_C=\frac{\iiint_V x*dv}{V},y_C=\frac{\iiint_V y*dv}{V},z_C=\frac{\iiint_V z*dv}{V}\right\}$

№	Тип тела	Координаты центра тяжести
3.	Однородная плоская пластина постоянной толщины и сечение твердого тела плоскостью (пластина нулевой толщины)	$\left.x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} s_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} s_k}, y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} s_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} s_k}\right\}$ При $n \to \infty$ $\left.x_C = \frac{\iint_S x * ds}{S}, y_C = \frac{\iint_S y * ds}{S}\right\}$
4.	Однородная тяжелая линия постоянной площади поперечного сечения	$\left.x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} l_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} l_k}, y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} l_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} l_k}, z_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} l_k z_k}{\sum_{k=1}^{n} l_k}\right\}$ При $n \to \infty$ $\left.x_C = \frac{\int_L x * dl}{L}, y_C = \frac{\int_L y * dl}{L}, z_C = \frac{\int_L z * dl}{L}\right\}$

Примечания:

x_C, y_C, z_C - координаты центра тяжести C тела;

x_k, y_k, z_k - координаты центров тяжести C_k элементов тела;

p_k, v_k, s_k, l_k - силы тяжести, объёмы, площади и длины элементов неоднородного тела, однородного тела, плоского сечения и тяжелой линии соответственно;

dp, dv, ds, dl - дифференциалы вышеуказанных величин;

x, y, z - координаты dp, dv, ds, dl соответственно.

$$P=\sum_{k=1}^{n} p_k \text{ - вес тела; } V=\sum_{k=1}^{n} v_k \text{ - объём тела;}$$

$$S=\sum_{k=1}^{n} s_k \text{ - площадь сечения; } L=\sum_{k=1}^{n} l_k \text{ - длина линии}$$

2.4.3.2. Координаты центра тяжести тел простой формы

№	Название тела	Положение центра тяжести
1.	Однородная треугольная пластина и треугольное сечение	Центр тяжести находится на пересечении медиан, и находится, таким образом, на расстоянии двух третей от соответствующей вершины и одной трети от её основания
2.	Дуга однородной тяжелой окружности	$x_C=\dfrac{R\sin\alpha}{\alpha}$
3.	Однородный круговой сектор	$x_C=\dfrac{2}{3}\dfrac{R\sin\alpha}{\alpha}$
4.	Однородные конус и пирамида	Центр тяжести находится на отрезке прямой, соединяющей центр тяжести основания с вершиной, на расстоянии, составляющем четверть высоты фигуры, отсчитываемой от плоскости основания
5.	Однородные цилиндр и призма	Центр тяжести лежит в середине отрезке прямой, соединяющей центры тяжести оснований
6.	Однородный полушар	Центр тяжести находится на расстоянии $3R/8$ от диаметральной плоскости полушара

Примечания:

в формулах (2.4.3.2.) и (2.4.3.3.) x_C - абсцисса центра тяжести, причём x - ось симметрии;

R - радиус окружности и круга;

α - половина угла раствора дуги и сектора.

2.5. Кинематика

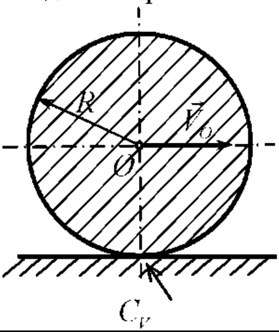
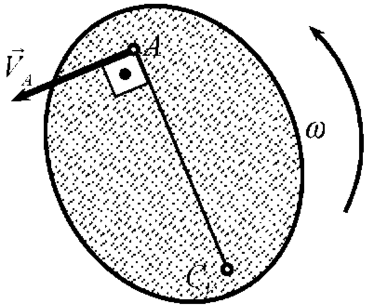
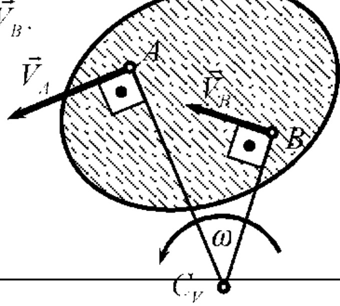
2.5.1. Способы задания движения точки

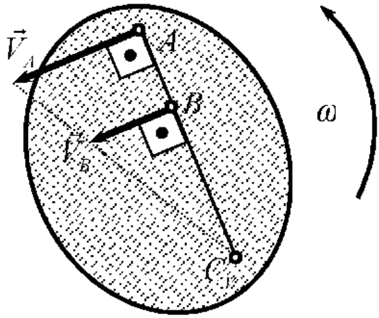
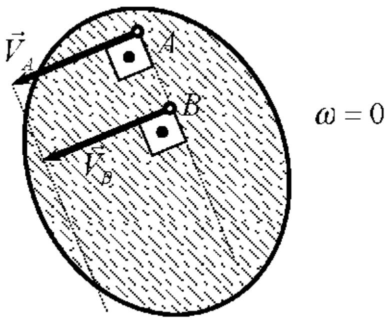
№1	Название способа	Задаваемые параметры движения
1.	Векторный	$\vec{r} = \vec{r}(t)$ -зависимость радиус-вектора $\vec{r}$ точки от времени t
2.	Координатный	$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array}\right\}$ - уравнения движения (зависимости соответствующих координат от времени t)
3.	Естественный	- траектория точки; - начало отсчёта и положительное направление отсчёта; - $S = S(t)$ - закон движения точки по траектории (зависимость дуговой координаты S от времени t)

2.5.2. Таблица аналогий между поступательным и вращательным движениями

Общая Характеристика движений	Вид движения	
	Поступательное	Вращательное
Закон движения	$S = S(t)$	$\varphi = \varphi(t)$
Скорость	$V = \dfrac{dS}{dt} = \dot{S}$	$\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$
Ускорение	$a_\tau = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{d^2 S}{dt^2} = \ddot{S}$	$\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$
Равномерное вращение	$V = const \Rightarrow S = Vt$	$\omega = const \Rightarrow \varphi = \omega t$
Равнопеременное вращение	$a_\tau = const \Rightarrow \begin{cases} V = V_0 + a_\tau t \\ S = S_0 t + a_\tau \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$	$\varepsilon = const \Rightarrow \begin{cases} \omega = \omega_0 + \varepsilon t \\ \varphi = \omega_0 t + \varepsilon \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$

2.5.3. Способы определения положения мгновенного центра скоростей (МЦС)

<table>
<tr><th>№</th><th>Что известно, расчётная схема</th><th>Алгоритм определения МЦС (C_V)</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Качение по неподвижной плоскости происходит без проскальзывания.

</td><td>Скорость точки контакта диска (колеса) с плоскостью (с дорогой) – нижней точки диска - при отсутствии проскальзывания совпадает с соответствующей точкой плоскости (дороги). Так как плоскость неподвижна, то скорость нижней точки диска равна нулю, а эта точка – МЦС диска.</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$\vec{V}_A$, ω.

</td><td>Для определения положения МЦС необходимо провести перпендикуляр к вектору $\vec{V}_A$, вычислить
$$AC_V = \frac{V_A}{\omega}$$
и отложить отрезок AC_V так, чтобы направления $\vec{V}_A$ и ω соответствовали друг другу.</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Направления $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$.

</td><td>Для определения МЦС необходимо провести перпендикуляры к векторам скоростей двух точек плоской фигуры до их пересечения.</td></tr>
</table>

№	Что известно, расчётная схема	Алгоритм определения МЦС (C_V)
4.	$\vec{V}_A \uparrow\uparrow \vec{V}_B$ и $\vec{V}_A \neq \vec{V}_B$. 	Для определения МЦС необходимо провести прямые, проходящие через начала и концы векторов скоростей двух точек плоской фигуры до их пересечения.
5.	$\vec{V}_A \uparrow\uparrow \vec{V}_B$ и $\vec{V}_A = \vec{V}_B$. 	Для определения МЦС необходимо провести прямые, проходящие через начала и концы векторов скоростей двух точек плоской фигуры. Так как параллельные прямые в эвклидовой геометрии не пересекаются, точка их пересечения находится в бесконечности. Тогда $\omega = \dfrac{V_A}{AC_V} = \dfrac{V_A}{\infty} = 0$, что означает случай мгновенно – поступательного движения.

2.6. Динамика

2.6.1. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

№	Название уравнений	Вид уравнений
1.	Дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекции на декартовы оси координат	$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \sum F_X \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \sum F_Y \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \sum F_Z \end{aligned}\right\}$
2.	Дифференциальные уравнения движения материальной точки в цилиндрических (полярных) координатах	$\left.\begin{aligned} m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) &= \sum F_r \\ m\left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right) &= \sum F_p \\ m\ddot{z} &= \sum F_Z \end{aligned}\right\}$ $\left(\left.\begin{aligned} m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) &= \sum F_r \\ m\left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right) &= \sum F_p \end{aligned}\right\}\right)$
3.	Дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекции на естественные оси координат	$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2V}{dt} &= \sum F_\tau \\ m\frac{V^2}{\rho} &= \sum F_n \\ 0 &= \sum F_b \end{aligned}\right\}$

Примечания:

m - масса материальной точки;

r - полярный радиус;

φ - полярный угол, p - направление трансверсали;

правые части дифференциальных уравнений (2.6.1.1.) - (2.6.1.3.) представляют собой суммы проекций сил, приложенных к материальной точке, на соответствующие оси координат.

2.6.2. Уравнения прямолинейных колебаний материальной точки

Вид колебаний	Каноническое дифференциальное уравнение	Уравнение движения (решение дифференциального уравнения)	Дополнительные сведения
Свободные колебания без учёта сил сопротивления	$\ddot{x} + k^2 x = 0$	$x = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt)$ или $x = A \sin(kt + \varphi_0)$	Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{k}$
Свободные колебания с учётом линейных сил сопротивления	$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0$	$n < k$, $r = \sqrt{k^2 - n^2}$ $x = e^{-nt}\left[C_1 \cos(rt) + C_2 \sin(rt)\right]$	Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{r}$
		$n > k$, $s = \sqrt{n^2 - k^2}$ $x = e^{-nt}\left(C_1 e^{st} + C_2 e^{-st}\right)$	Затухание апериодично
		$n = k$ $x = e^{-nt}\left(C_1 t + C\right)$	Затухание апериодично
Вынужденные колебания без учёта сил сопротивления	$\ddot{x} + k^2 x =$ $= h \sin(pt)$	$x = x_1 + x_2$ $x_2 = B \sin(pt)$, где $B = \dfrac{h}{k^2 - p^2}$	Резонанс: при $k = p$ $B \to \infty$
Вынужденные колебания с учётом линейных сил сопротивления	$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x =$ $= h \sin(pt + \delta)$	$x = x_1 + x_2$ $x_2 = B \sin(pt + \delta - \varepsilon)$, где $B = \dfrac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}$	

2.6.3. Общие теоремы динамики

№	Название теоремы	Аналитическое выражение, формулировка
1.	Теорема о движении центра масс	$\left.\begin{aligned} M\frac{d^2x_C}{dt^2} &= \sum F_X^e \\ M\frac{d^2y_C}{dt^2} &= \sum F_Y^C \\ M\frac{d^2z_C}{dt^2} &= \sum F_Z^e \end{aligned}\right\}$ Центр масс системы материальных точек движется как материальная точка, масса которой равна массе системы и на которую действуют внешние силы системы.
2.	Теорема об изменении количества движения	$\left.\begin{aligned} K_X - K_{0X} &= \sum S_X^e \\ K_Y - K_{0Y} &= \sum S_Y^C \\ K_Z - K_{0Z} &= \sum S_Z^e \end{aligned}\right\}$ Изменение количества движения проекции количества движения механической системы на некоторую ось за некоторый промежуток времени равно сумме проекций импульсов внешних сил системы на эту оси.
3.	Теорема об изменении момента количества движения	$\left.\begin{aligned} \frac{dL_X}{dt} &= \sum m_X\left(F^e\right) \\ \frac{dL_Y}{dt} &= \sum m_Y\left(F^e\right) \\ \frac{dL_Z}{dt} &= \sum m_Z\left(F^e\right) \end{aligned}\right\}$ Производная по времени от момента количества движения механической системы относительно некоторой оси равна сумме моментов внешних сил системы относительно этой оси.

№	Название теоремы	Аналитическое выражение, формулировка
4.	Теорема об изменении кинетической энергии	$$T - T_0 = \sum A_F^e + \sum A_F^i$$ Изменение кинетической энергии механической системы на некотором перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил системы на этом перемещении.

Примечания:

M - масса механической системы;

x_C, y_C, z_C - координаты центра масс C системы;

правые части дифференциальных уравнений (2.6.3.1.) представляют собой суммы проекций внешних сил на соответствующие оси координат;

$K_X, K_{0X}, K_Y, K_{0Y}, K_Z, K_{0Z}$ - проекции количества движения системы в конечный и начальный моменты времени на соответствующие оси координат;

правые части уравнений (2.6.3.2.) представляют собой суммы проекций импульсов внешних сил на соответствующие оси координат;

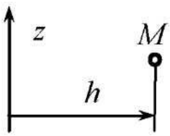
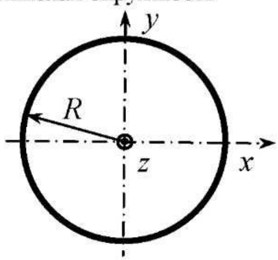
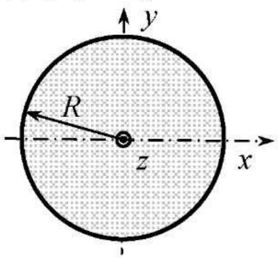
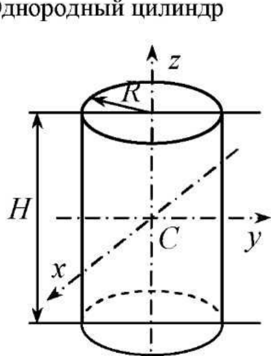
L_X, L_Y, L_Z - моменты количества движения системы относительно осей координат x, y, z;

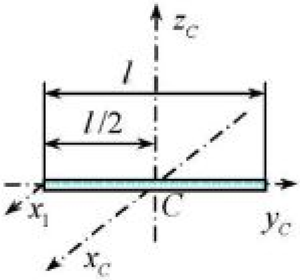
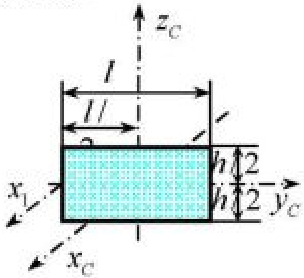
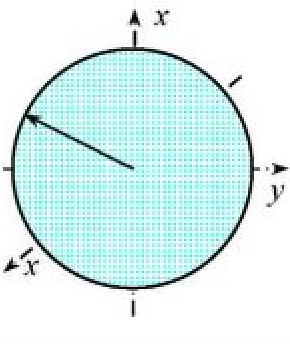
правые части уравнений (2.6.3.3.) представляют собой суммы моментов внешних сил относительно соответствующих координатных осей;

T и T_0 - кинетическая энергия системы в конечный и начальный моменты времени;

правые части уравнений (2.6.3.4.) представляют собой суммы работ внешних и внутренних сил системы на соответствующих перемещениях.

2.6.4. Моменты инерции тел простой формы

№	Название тела, схема	Значение момента инерции
1.	Материальная точка 	$J_Z = mh^2$
2.	Тяжелая окружность 	$J_Z = \mathrm{M}R^2$
3.	Однородный диск 	$J_Z = \dfrac{\mathrm{M}R^2}{2}$ $J_X = J_Y = \dfrac{\mathrm{M}R^2}{4}$
4.	Однородный цилиндр 	$J_Z = \dfrac{\mathrm{M}R^2}{2}$ $J_X = J_Y = \mathrm{M}\left(\dfrac{R^2}{4} + \dfrac{H^2}{12}\right)$

<table>
<tr><th>№</th><th>Название тела, схема</th><th>Значение момента инерции</th></tr>
<tr><td>5.</td><td>Однородный стержень

</td><td>$$J_{XC} = J_{ZC} = \frac{Ml^2}{12}$$
$$J_{X1} = \frac{Ml^2}{3}$$</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Однородная прямоугольная пластина

</td><td>$$J_{XC} = J_{ZC} = \frac{Ml^2}{12}$$
$$J_{YC} = J_{Y1} = \frac{Mh^2}{12}$$
$$J_{X1} = M\left(\frac{h^2}{12} + \frac{l^2}{3}\right)$$
$$J_{Z1} = \frac{Ml^2}{3}$$</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>Однородный шар

</td><td>$$J_X = J_Y = J_Z = \frac{2}{5}MR^2$$</td></tr>
</table>

2.6.5. Определение работы силы в частных случаях

№	Название частного случая	Формула для определения работы, пояснения
1.	Работа постоянной (по величине и направлению) силы.	$A_F = A(F) = F \cdot \cos\alpha \cdot S$; $\alpha = \vec{F} \wedge \vec{V}$, где $\vec{V}$ - скорость точки приложения силы.
2.	Работа силы, вращающей тело (работа вращающего момента).	$A_M = \int\limits_{(\varphi)} M \cdot d\varphi$, где M - , момент силы, вращающей тело, относительно центра (оси), или момент пары сил, вращающей тело (вращающий момент).
3.	Работа силы тяжести материальной точки.	$A_{mg} = mg(z_0 - z)$, причём ось z вертикальна и направлена вверх.
4.	Работа силы тяжести твердого тела.	$A_{\mathrm{Mg}} = \mathrm{M}g(z_{C0} - z_C)$, причём ось z вертикальна и направлена вверх, C - центр тяжести тела.
5.	Работа силы трения скольжения.	$A_{F\mathrm{TP}} = -fNS$, где f - коэффициент трения скольжения, N - нормальная реакция, S - путь, пройденный точкой приложения силы.
6.	Работа трения качения.	$A_{M\mathrm{TP}} = -\delta N\varphi$ где δ - коэффициент трения качения, N - нормальная реакция, φ - суммарный угол поворота.
7.	Работа силы упругости.	$A_{F\mathrm{У}} = \dfrac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda^2)$, где c - жёсткость (коэффициент упругости) упругой связи, λ_0 и λ - начальная и конечная деформации соответственно.

2.6.6. Общие принципы механики

№	Название принципа	Аналитическое выражение
1. 1*.	Принцип Даламбера, метод кинетостатики	$$\sum \vec{F} + \sum \vec{R} + \sum \vec{\Phi} = 0$$ $$\left.\begin{aligned} \sum F_X &= 0 \\ \sum F_Y &= 0 \\ \sum F_Z &= 0 \\ \sum m_X\left(\vec{F}\right) &= 0 \\ \sum m_Y\left(\vec{F}\right) &= 0 \\ \sum m_Z\left(\vec{F}\right) &= 0 \end{aligned}\right\}$$ При движении системы материальных точек в любой момент времени активные силы и реакции связей уравновешиваются силами инерции. Уравнениям динамики механической системы можно придать вид уравнений статики, если к активным и реактивным силам добавить силы инерции.
2.	Принцип возможных (виртуальных) перемещений	$$\sum \delta A_F = 0$$ Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно чтобы сумма элементарных работ активных сил системы на любом из возможных перемещений её была равна нулю.
3.	Принцип Даламбера – Лагранжа (общее уравнение динамики)	$$\sum \delta A\left(\vec{F}\right) + \sum \delta A\left(\vec{\Phi}\right) = 0$$ При движении механической системы с идеальными связями сумма элементарных работ активных сил системы и сил инерции на любом из возможных перемещений системы равна нулю.
4.	Уравнения Лагранжа II рода	$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

Примечания:
Вид и количество уравнений кинетостатики зависят от вида системы сил (активных, реактивных и сил инерции), приложенных к механической системе. Здесь имеется полная аналогия с уравнениями равновесия уравнениями (статики).

Библиографический список

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики, «Высшая школа», Москва, 1986, 1995.
2. Добронравов В.В., Никитин Н.Н, Дворников А.Л.. Курс теоретической механики. Издание 3-е, переработанное и дополненное. «Высшая школа», Москва, 1974.
3. Федосьев В.И. Сопротивление материалов, «Наука», Москва. 1979.
4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов, Москва, «Наука», 1986.
5. Яворский Б.М. и Детлаф А.А. Справочник по физике для инженеров и студентов ВУЗов. Москва. «Наука», 1964.
6. Физический энциклопедический словарь. Москва. «Советская энциклопедия», 1983.
7. Яблонский А.А. Курс теоретической механики, часть II. «Высшая школа», Москва, 1977.
8. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. «Высшая школа», Москва, 1990.
9. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики, том II. «Наука», Москва, 1979.
10. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики, том II. «Наука», Москва, 1983.
11. Бабаков И.М. Теория колебаний. «Наука», Москва, 1965.
12. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. «Высшая школа», Москва, 1975.
13. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. «Наука», Москва, 1966.

ПРИЛОЖЕНИЯ

П.1. Единицы измерения основных механических величин

Величина (обозначение)	Единицы измерения				
	SI (международная)		MKGS (техническая)		Соотношение между единицами
	Наимено-вание	Размерность (обозн.)	Наименование	Размерность (обозн.)	
1	2	3	4	5	6
Длина	**метр**	*м* , м	**метр**	*м*, м	
Время	**секунда**	*с*, с	**секунда**	*с*, с	
Масса	**кило-грамм**	*кг* , кг	*тем* (*инерта-* уст.)	$кГс^2 / м$	1 *тем* 9.81 *кг* 1 *кг*=0.102 *тем*
Сила	Ньютон	*Н*, Н	**кило-грамм силы**	*кГ*, кГ, *кгс*, кгс	1 *кГ*=9,81 *Н* 1 *Н* 0,102*кГ*
Телесный угол	радиан	*рад*, рад ***ВНЕ***-градус	радиан	*рад*, рад ***ВНЕ***-градус	$1^0 = \frac{\pi}{180} рад$ $1 рад = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$
Угловая скорость (ω)	радиан в секунду	*рад/с* (*1/с* ,$с^{-1}$) рад/$с^{-1}$, (1/с, $с^{-1}$)	радиан в секунду ***ВНЕ***-число оборотов в минуту	*рад/с* (*1/с* ,$с^{-1}$) *об/мин* (*n*)	$\omega = \frac{\pi n}{30}$ $n = \frac{30\omega}{\pi}$
Угловое ускорение	радиан в секунду в квадр.	*рад/с*^{2}, (*1/с*^{2}, $с^{-2}$) рад/с^2, (1/с. $с^{-2}$)	радиан в секунду в квадрате	*рад/с*^{2}, рад/с^2, (*1/с*^{2}, $с^{-2}$) (1/с. $с^{-2}$)	
Площадь	кв. метр	*м*^{2}, м^2	кв. метр	*м*^{2}, м^2	
Объем	куб. метр	*м*^{3}, м^3	куб. метр	*м*^{3}, м^3	
Работа. энергия	Джоуль	*Дж*. Дж *Дж* *Нм*	Кило-граммо-метр	*кГм*, кГм	1 *кГм* = 9,81 *Дж* 1 *Дж* 0,102 *КГм*

1	2	3	4	5	6
Мощ- ность	Ватт	*Вт*, Вт *Вт=Дж/с*	кило- граммо- метр в секунду ***ВНЕ-*** лошади- ная сила	*кГм/с*, кГм/с *л.с.*, л.с.	1 *кГм/с=* =9,81 *Вт* 1 *Вт=* 0,102 *кГм/с* ***ВНЕ-*** 1 *лс =* =75 *кГм/с* = 0,736 *кВт* 1 *кВт* 1,36 *лс*
Давление, механи- ческое напря- жение	Паскаль	*Па*, Па *Па =Н/м*^{2}	 ***ВНЕ-*** атмосфе- ра техни- ческая	*кГ/м*^{2} 1 *ат* *(атм)=* 1 *кГ/см*^{2}	1 *кГ/м*^{2}= =9,81 *Па* 1*Па*=0,102*кГм/м*^{2} ***ВНЕ-*** 1 *кГ/см*^{2}= =1 *ат*= =0,981*10^5*Па*= ≈ 0,1 *МПа*

Примечания:
1. *Тем* – техническая единица массы.
2. ВНЕ – внесистемные единицы.

П.2. Таблица часто встречающихся при решении задач интегралов

№	Интеграл
1.	$\int dt = t$
2.	$\int t dt = \frac{t^2}{2}$
3.	$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}$ для $n \neq -1$
4.	$\int \frac{dt}{t} = \ln t$
5.	$\int \frac{dt}{a+bt} = \frac{1}{b}\ln(a+bt)$
6.	$\int \frac{dt}{a^2+b^2t^2} = \frac{1}{b} arctg \frac{t}{a}$
7.	$\int \sin(at)dt = -\frac{1}{a}\cos(at)$
8.	$\int \cos(at)dt = \frac{1}{a}\sin(at)$
9.	$\int tg(at)dt = -\frac{1}{a}\ln\cos(at)$
10.	$\int e^{at}dt = \frac{1}{a}e^{at}$
11.	$\int \frac{dt}{a^2+t^2} = arctg \frac{t}{a}$
12.	$\int \frac{dt}{a^2-t^2} = Arth\frac{t}{a} = \frac{1}{2}\ln\frac{a+t}{a-t}$ при $\lvert t \rvert < a$
13.	$\int \frac{dt}{a^2-t^2} = Arcth\frac{t}{a} = \frac{1}{2}\ln\frac{t+a}{t-a}$ при $\lvert t \rvert > a$
14.	$\int \frac{dt}{at^2+bt+c} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} arctg \frac{2at+b}{\sqrt{\Delta}}$ для $\Delta > 0$, где $\Delta = 4ac - b^2$.

№	Интеграл
15.	$$\int \frac{dt}{at^2+bt+c} = -\frac{2}{\sqrt{-\Delta}} Arth \frac{2at+b}{\sqrt{-\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \ln \frac{2at+b-\sqrt{-\Delta}}{2at+b+\sqrt{-\Delta}}$$ для $\Delta < 0$, где $\Delta = 4ac - b^2$.
16.	$$\int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = \arcsin \frac{t}{a}$$
17.	$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+a^2}} = Arsh \frac{t}{a} + C_1 = \ln\left(t+\sqrt{t^2+a^2}\right) + C_2$$
18.	$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}} = Arch \frac{t}{a} + C_1 = \ln\left(t+\sqrt{t^2-a^2}\right) + C_2$$
19.	$$\int \frac{dt}{\sqrt{at^2+bt+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left(2\sqrt{a\left(at^2+bt+c\right)} + 2at + b\right) + C_1$$ для $a > 0$
20.	$$\int \frac{dt}{\sqrt{at^2+bt+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} Arsh \frac{2at+b}{\sqrt{\Delta}} + C_2$$ для $a > 0$, $\Delta > 0$, где $\Delta = 4ac - b^2$.
21.	$$\int \frac{dt}{\sqrt{at^2+bt+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln(2at+b)$$ для $a > 0$, $\Delta = 0$, где $\Delta = 4ac - b^2$.
22.	$$\int \frac{dt}{\sqrt{at^2+bt+c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2at+b}{\sqrt{-\Delta}}$$ для $a < 0$, $\Delta < 0$, где $\Delta = 4ac - b^2$.
Примечание: Там, где постоянные интегрирования опущены, их наличие подразумевается.	