ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Практикум

Практикум содержит сведения об основных теоретических положениях механики как учебной дисциплины, а также контрольные задания. Приводятся примеры решений задач по всем темам контрольных заданий.

Предназначен для студентов инженерных специальностей дневной и заочной форм обучения.

ВВЕДЕНИЕ

Курс теоретической механики, рассматривающий основные законы и принципы механики произвольного твердого тела и системы тел, играет существенную роль в подготовке инженеров любых специальностей.

В различных курсах по машиностроительным, механическим, строительным, приборостроительным и многим другим специальностям широко используются положения теоретической механики.

Большую роль в изучении теоретической механики играет рассмотрение типовых примеров и задач и самостоятельное решение контрольных заданий.

Настоящее издание включает в себя краткое изложение основных теоретических положений, контрольные задания с примерами решения типовых задач, список рекомендуемой учебно-методической литературы.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ КУРСА «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

Теоретическая механика изучает общие законы механического движения и взаимодействия материальных тел. Ее выводы и положения широко используются как при решении различных инженерных задач, так и при изложении дисциплин общеинженерного цикла: сопротивление материалов и строительная механика, гидравлика и гидрогазодинамика, детали машин и теория механизмов. В связи с этим изучение теоретической механики рассматривается как важный этап в подготовке будущего инженера.

В курсе теоретической механики студенты изучают три ее раздела: статику, кинематику и динамику.

Для изучения курса необходимо иметь соответствующую математическую подготовку. Во всех разделах курса, начиная со статики, широко используется векторная алгебра. Необходимо уметь вычислять проекции векторов на координатные оси, находить геометрически (построением векторного треугольника или многоугольника) и аналитически (по проекциям на координатные оси) сумму векторов, вычислять скалярное и векторное произведения двух векторов и знать свойства этих произведений, а в кинематике и динамике – дифференцировать векторы. Надо также уметь свободно пользоваться системой прямоугольных декартовых координат на плоскости и в пространстве, знать, что такое единичные векторы (орты) этих осей и как выражаются составляющие вектора по координатным осям с помощью ортов.

Для изучения кинематики надо уметь дифференцировать функции одного переменного, строить графики этих функций, ознакомиться с понятиями о естественном трехграннике, кривизне кривой и радиусе кривизны, знать основы теории кривых 2-го порядка, изучаемой в аналитической геометрии.

Для изучения динамики надо уметь находить интегралы (неопределенные и определенные) от простейших функций, вычислять частные производные и полный дифференциал функций нескольких переменных, а также уметь интегрировать дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными и линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка (однородные и неоднородные) с постоянными коэффициентами.

При изучении курса прежде всего необходимо освоить соответствующий теоретический материал.

Особое внимание следует уделить приобретению навыков решения задач. Поэтому после изучения соответствующего теоретического материала надо сначала разобраться в решениях задач, которые приводятся в учебнике, а затем решить самостоятельно несколько аналогичных задач из сборника задач и только после этого решить соответствующую задачу из контрольной работы.

Пояснения к контрольным заданиям

Студенты выполняют 5 контрольных работ.

Задание 1 (статика) – задачи С1-С4.

Задание 2 (кинематика) – задачи К1-К4.

Задание 3 (динамика) – задачи Д1 – Д4.

Задание 4 (динамика) – задачи Д5 – Д8.

Задание 5 (динамика) – задачи Д9 – Д11.

К каждой задаче даются 10 рисунков и таблица с дополнительными условиями.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице – по последней. Каждая контрольная выполняется в отдельной тетради. На обложке указываются: название дисциплины, номер работы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, факультет, специальность и домашний адрес студента.

Решение каждой задачи необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются и т.п.) и подробно излагать ход расчетов. Чертеж должен быть аккуратным и наглядным. На экзамен необходимо представить зачтенные по данному разделу курса работы, в которых отмеченные рецензентом погрешности должны быть исправлены.

ГЛАВА 1. СТАТИКА

§ 1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Условия равновесия

Статика – раздел теоретической механики, в котором изучаются способы эквивалентных преобразований систем сил, приложенных к твердому телу, а также условия равновесия твердых тел под действием приложенных к ним сил.

Условия равновесия свободного твердого тела под действием произвольной плоской системы сил могут быть записаны в виде трех независимых между собой уравнений равновесия

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}=0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky}=0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k)=0,$$

в которых оси проекций x и y, центр моментов А могут быть выбраны совершенно произвольно в плоскости действия сил $\vec{F}_k$ (k=1, 2, …n).

В целях упрощения этих уравнений рекомендуется оси x и y выбирать так, чтобы они были перпендикулярны или параллельны большему количеству сил, а центр моментов принимать в точке, где пересекаются линии действия неизвестных сил.

Существуют и две другие формы уравнений равновесия, получающиеся из первых путем замены уравнений проекций сил уравнениями их моментов:

$$\sum m_A = 0; \qquad \sum m_B = 0; \qquad \sum F_{kx} = 0$$

(здесь ось x не должна быть перпендикулярной прямой АВ),

$$\sum m_A = 0; \qquad \sum m_B = 0; \qquad \sum m_C = 0$$

(точки А, В и С не должны находиться на одной прямой).

В последних выражениях и везде в дальнейшем индекс суммирования при знаке Σ опущен для сокращения записей.

Любое из этих уравнений, не использованное при определении неизвестных реакций, может служить для проверки правильности решения задачи.

Проекцией силы $\vec{F}$ на какую-либо ось называется алгебраическая величина, численно равная отрезку этой оси, заключенному между проекциями начала и конца силы (рис. 1). Рекомендуется знак этой алгебраической величины определять путем сопоставления взаимного расположения вектора силы $\vec{F}$ и оси проекций, а ее модуль – из рассмотрения прямоугольного треугольника, одним из катетов которого является искомая проекция. Например, (рис. 1):

$F_x = F \cdot \cos\alpha$;

$F_Y = -F \cdot \sin\alpha$.

Проекция силы на ось имеет размерность силы.

Если сила $\vec{F}$ не лежит в одной плоскости с осью проекций X (рис. 2), то для нахождения F_x пользуются правилом двойного проектирования: сначала проектируют силу $\vec{F}$ на любую плоскость П, содержащую ось X, затем проектируют полученный вектор $\vec{F}_{П}$ на ось. Например, (рис. 2):

$F_x = -F \cdot \cos\varphi \cdot \cos\alpha$.

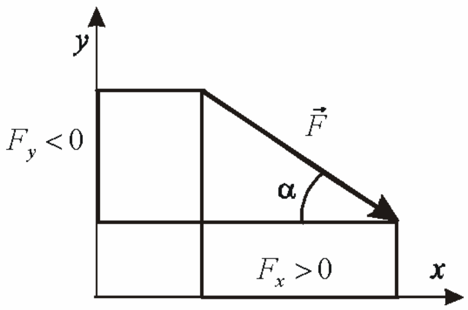


Рис. 1

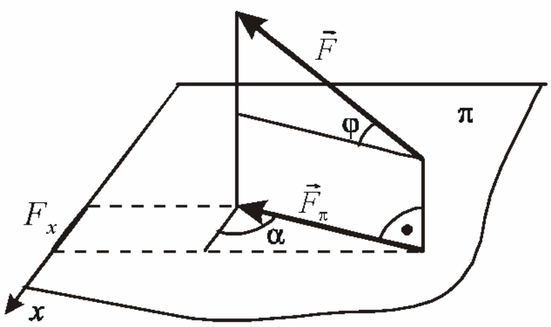


Рис. 2

Алгебраическим моментом силы $\vec{F}$ относительно какого-либо центра O (обозначается $m_o(\vec{F})$) называется взятое со знаком (+) или (-) произведение модуля этой силы на плечо (т.е. кратчайшее расстояние от центра моментов до линии действия силы). В статике принято считать этот момент положительным, если сила стремится повернуть тело вокруг центра моментов против хода часовой стрелки. Например, (рис. 3):

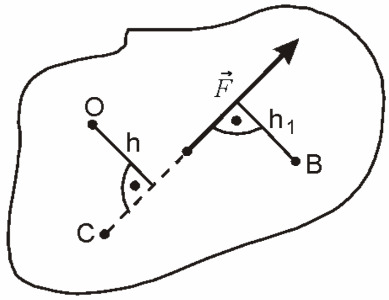


Рис. 3

$$m_o(\vec{F}) = F\cdot h;\ \ m_b(\vec{F}) = -F\cdot h_1;\ \ m_c(\vec{F}) = 0.$$

Если определение плеча силы относительно данного центра вызывает трудности геометрического характера, можно воспользоваться *теоремой Вариньона* о моменте равнодействующей силы, согласно которой алгебраический момент равнодействующей силы относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов сил, составляющих систему, относительно того же центра. Например, (рис. 4): либо

$m_o(\vec{F}) = -Fh$, либо $m_o(\vec{F}) = m_o(\vec{F'}) + m_o(\vec{F''}) = F'\cdot(c-a) - F''\cdot b.$

Второй способ значительно проще, если заданы размеры a, b, c и вектор силы $\vec{F}$.

Парой сил называется система двух равных антипараллельных сил, приложенных к телу (рис. 5). Действие пары сил на тело полностью определяется ее моментом.

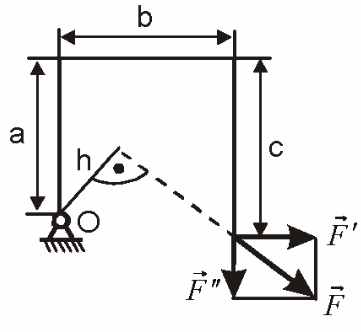


Рис. 4

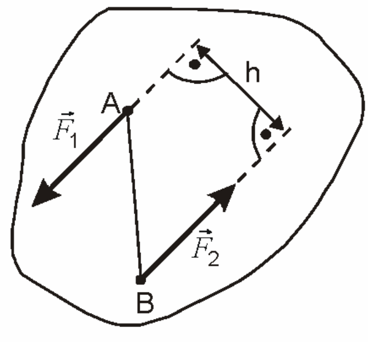


Рис. 5

Алгебраическим моментом пары называется взятое со знаком (+) или (-) произведение одной из сил пары на плечо пары (т.е. на кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары):

$$m = \pm F_1 \cdot h = \pm F_2 \cdot h \, .$$

Алгебраический момент пары, действующей против хода часовой стрелки, условно считается положительным, а по ходу часовой стрелки – отрицательным. На рис. 5:

$m = +F_1 \cdot h = +F_2 \cdot h$.

Момент пары не зависит от положения центра моментов, относительно которого он вычисляется. Поэтому пары на рисунках обозначают в виде круговых стрелок или в виде связанной системы равных, антипараллельных сил без указания величин последних и плеча пары. Эти стрелки показывают направление действия пары. Дополнительно указывается численное значение (модуль) их алгебраического момента.

Распределенными называются силы, приложенные к некоторой части объема или поверхности тела или к некоторой части линии. Они характеризуются интенсивностью, т.е. величиной силы, приходящейся на единицу объема, площади или длины.

Параллельные между собой распределенные силы одинакового направления имеют равнодействующую. Простейшие случаи замены распределенных сил равнодействующей силой показаны на рис. 6.

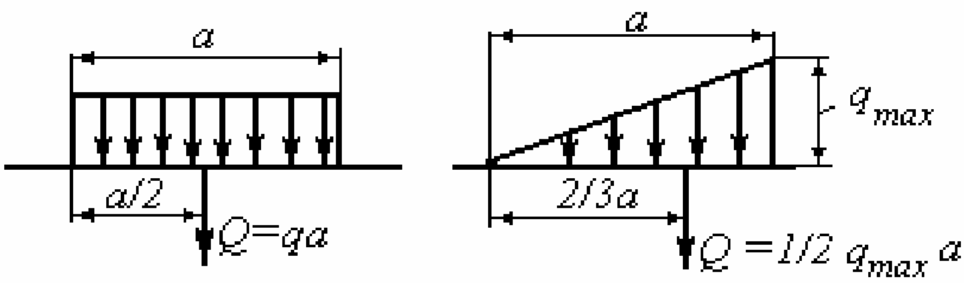


Рис. 6

При рассмотрении равновесия составной конструкции, состоящей из нескольких *сочлененных* между собой тел, необходимо обращать внимание на следующее. Силы взаимодействия между телами, входящими в систему, – внутренние силы. Они существуют попарно, подчиняясь принципу равенства действия и противодействия. Поэтому их не нужно включать в уравнения равновесия, составляемые для всей системы в целом. Когда рассматривается равновесие какой-нибудь части системы (какого-нибудь тела, входящего в систему), то остальная часть системы отбрасывается, а ее действие на оставшуюся часть заменяется силами реакций, приложенными в месте разъединения системы. Эти силы являются внешними по отношению к рассматриваемой части системы и должны учитываться при составлении уравнений равновесия наравне с другими внешними силами (заданными, а также неизвестными).

Другим примером сочлененной системы тел является жесткая конструкция, состоящая из стержней, соединенных друг с другом при помощи шарниров. Такая конструкция называется фермой. Условно считается, что стержни фермы прямолинейны и невесомы, а внешние нагрузки приложены к узлам (шарнирам) фермы. Это приводит к упрощению расчетов, т.к. такие стержни «работают» только на растяжение или сжатие. Причем усилия в стержнях фермы – это внутренние силы. Они исключаются из уравнений, когда рассматривается равновесие фермы в целом. Но эти же усилия становятся внешними по отношению к отдельным частям конструкции. В качестве таких объектов могут быть узлы фермы или ее части, получающиеся «сквозными сечениями» фермы по ее стержням. Соответствующие методы определения усилий в стержнях фермы получили названия «Метод вырезания узлов» и «Метод сквозных сечений». В первом случае рассматривается равновесие каждого узла фермы под действием приложенных к нему внешних сил (активных реакций опор) и внутренних (искомых или уже найденных) усилий в стержнях. Начинается решение с рассмотрения равновесия того узла фермы, где сходятся только два стержня. Затем переходят к рассмотрению равновесия следующего узла, в котором стержней с неизвестными усилиями не больше двух.

При использовании метода сквозных сечений ферма рассекается по тем стержням, усилия в которых требуется определить. Количество неизвестных усилий в этом случае не должно быть больше трех, а линии их действия не должны пересекаться в одной точке.

При расчете предполагается, что все стержни фермы растянуты, и усилия в них направляют «от узла».

Условия равновесия тела под действием *произвольной пространственной системы сил* записываются в виде уравнений:

$$\sum F_{kx} = 0\,; \qquad \sum F_{ky} = 0\,; \qquad \sum F_{kz} = 0\,;$$

$$\sum m_x\left(\vec{F}_k\right) = 0\,; \qquad \sum m_y\left(\vec{F}_k\right) = 0\,; \qquad \sum m_z\left(\vec{F}_k\right) = 0\,.$$

Моментом силы относительно оси называется алгебраический момент проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью. Из определения следует, что силы, параллельные оси моментов или пересекающие ее, не создают момента относительно этой оси. Например, если сила расположена в плоскости, параллельной координатной плоскости Oxz и образует с плоскостью Oxy угол α, то (рис. 7)

$$m_x(\vec{F}) = m_D(\vec{F''}) = = F''\cdot b = F\sin\alpha\cdot b;$$

$$m_y(\vec{F}) = m_K(\vec{F''}) = -F''\cdot a = -F\sin\alpha\cdot a;$$

$$m_z(\vec{F}) = m_O(\vec{F'}) = F'\cdot b = F\cos\alpha\cdot b.$$

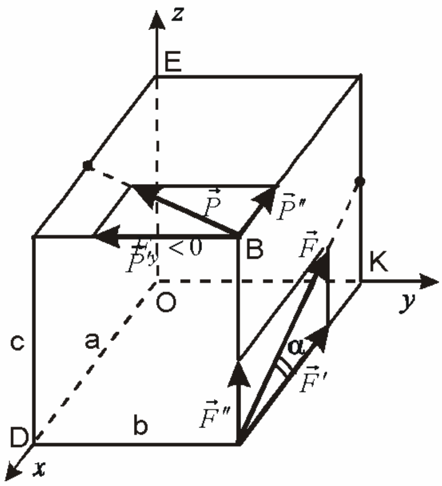


Рис. 7

Если сила Р лежит в плоскости, параллельной плоскости Oxy, приложена в точке В (a, b, c) и имеет составляющие P' и P'', параллельные осям Оy и Оx, справедливо (рис. 7):

$$m_x(\vec{P}) = P'\,c;$$

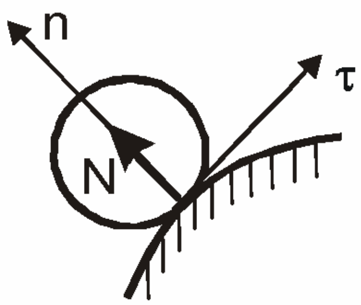
$$m_y(\vec{P}) = -P''\,c;$$

$$m_z(\vec{P}) = m_E(\vec{P}) = -P'\,a + P''\,b.$$

Моменту силы относительно оси присваивается знак «+», если при виде с конца оси моментов действие момента силы направлено против хода часовой стрелки.

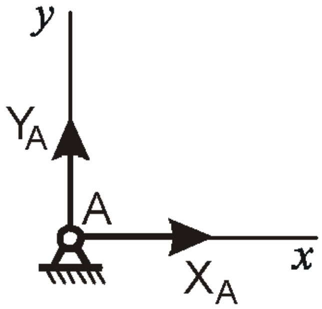
Типы опор и их реакции

Гладкая поверхность.

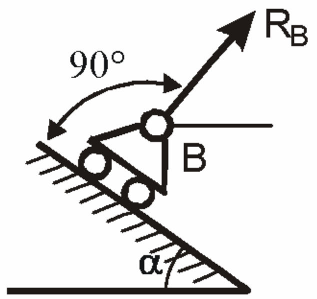


Реакция N направлена по нормали к поверхности.

Шарнирные опоры.

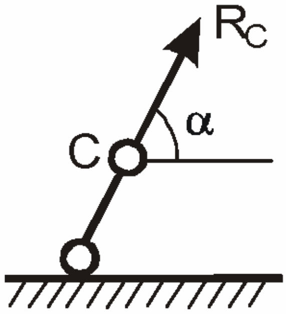


Шарнирно-неподвижная опора. В общем случае действует на конструкцию двумя реакциями: $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$.

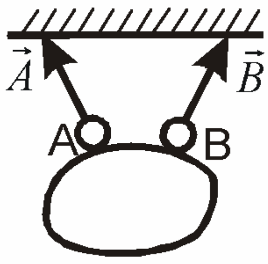


Шарнирно-подвижная опора. Действует на конструкцию реакцией $\vec{R}_B$, перпендикулярной опорной поверхности.

Стержневые опоры и гибкая нить.

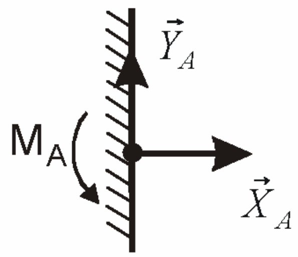


Реакция $\vec{R}_C$ стержневой опоры направлена вдоль стержня.



Реакции $\vec{A}$ и $\vec{B}$ направлены вдоль нитей.

Жесткая заделка.



Жесткая заделка действует на конструкцию двумя реакциями $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$ и парой сил с моментом M_A.

Общие правила решения задач

При решении задач следует:

- указать тело (систему тел, часть системы), равновесие которого рассматривается;
- освободить мысленно это тело от связей, заменив их действие соответствующими силами реакций;
- распределенные силы заменить их равнодействующими;
- выполнить рисунок, показав на нем выделенное тело (систему) с действующими на него силами (активными и силами реакций связей), оси проекций *x, y, z,* т.е. выполнить рисунок расчетной схемы рассматриваемого тела (системы);
- составить и решить уравнения равновесия.

Решение задач с учетом действия *сил трения* имеет свои особенности. В соответствии с приближенными законами, сила трения скольжения появляется лишь тогда, когда одно тело скользит по поверхности другого, или тогда, когда приложенные к телу силы стремятся сдвинуть его по поверхности другого тела. В обоих случаях *сила трения скольжения проявляется как сила сопротивления относительному проскальзыванию тел*.

При *скольжении* тела по поверхности другого $F_{тр} = F_{пред}$. Величина предельной силы трения пропорциональна силе нормального давления N между телами: $F_{пред} = f\ N$ (f – коэффициент трения скольжения).

В состоянии относительного равновесия величина силы трения скольжения может принимать любые значения в пределах $0 \le F_{тр} \le F_{пред}$. Величина и направление силы трения в этом случае определяются *из уравнений равновесия*.

§ 2. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Положение равновесия произвольной плоской системы сил

Задача С1

Жесткая рама, расположенная в вертикальной плоскости (рис. С1.0—С1.9, табл. С1), закреплена в точке А шарнирно, а в точке В прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках.

В точке С к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом P = 20 кН. На раму действуют пара сил с моментом M = 50 кН·м и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в таблице (например, в условиях № 1 на раму действует сила F_2 под углом 15^0 к горизонтальной оси, приложенная в точке D, и сила F_3 под углом 60^0 к горизонтальной оси, приложенная в точке E, и т. д.).

Определить реакции связей в точках А, В, вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять $\alpha = 0{,}2$ м.

Указания. Задача С1 – на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. При ее решении следует учесть, что натяжения обеих ветвей нити, перекинутой через блок, когда трением пренебрегают, будут одинаковыми. Уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей. При вычислении момента силы $\vec{F}$ часто удобно разложить ее на составляющие $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$, для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона; тогда $m_0(\vec{F}) = m_0(\vec{F}')$ + $+ m_0(\vec{F}'')$.

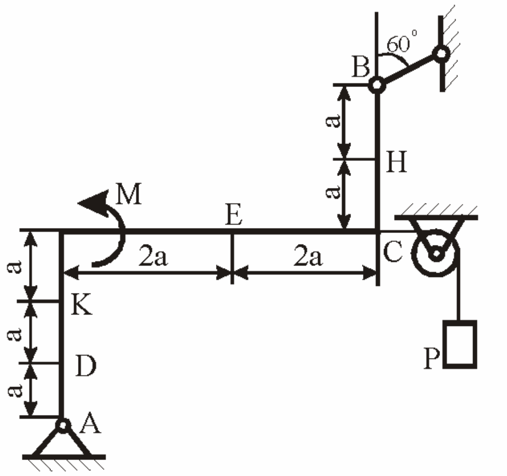


Рис. C1.0

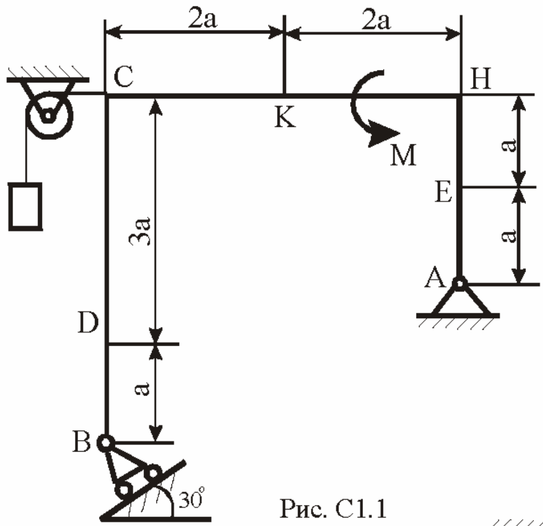


Рис. C1.1

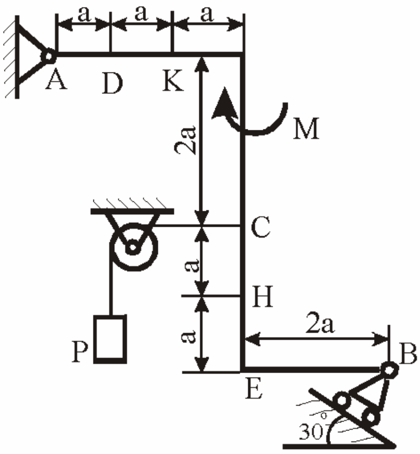


Рис. C1.2

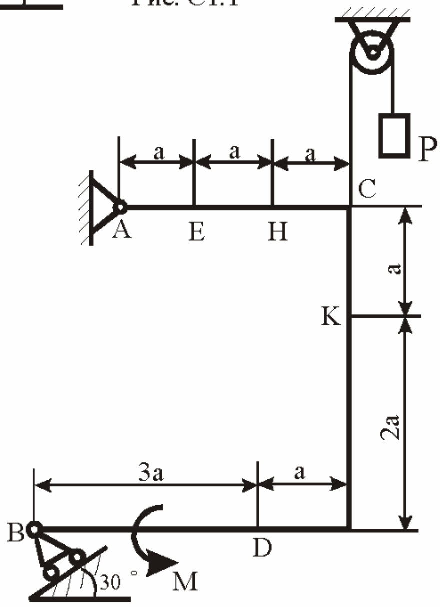


Рис. C1.3

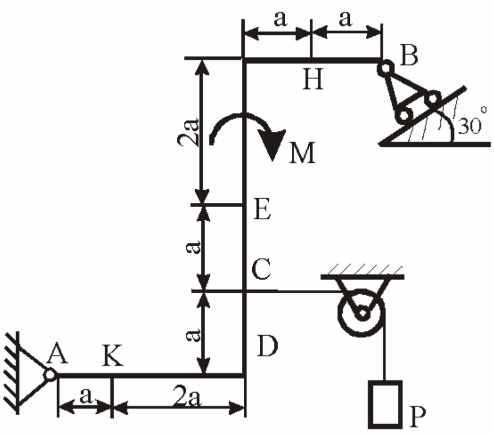


Рис. C1.4

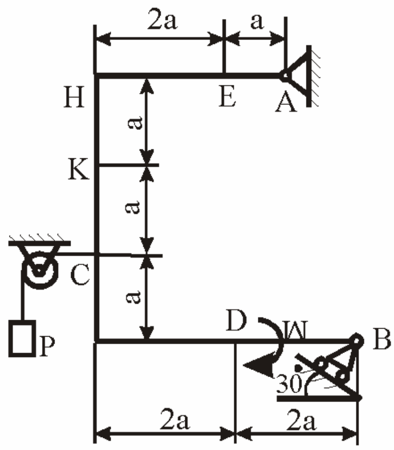


Рис. C1.5

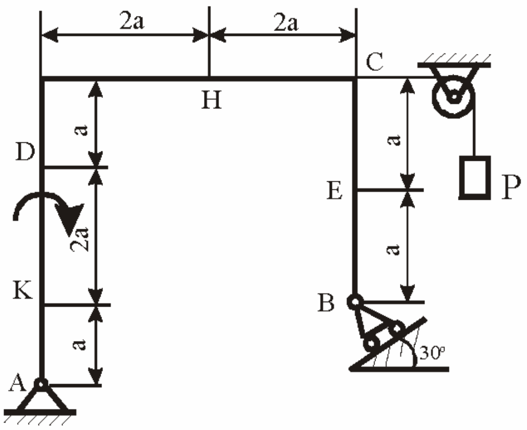


Рис. C1.6

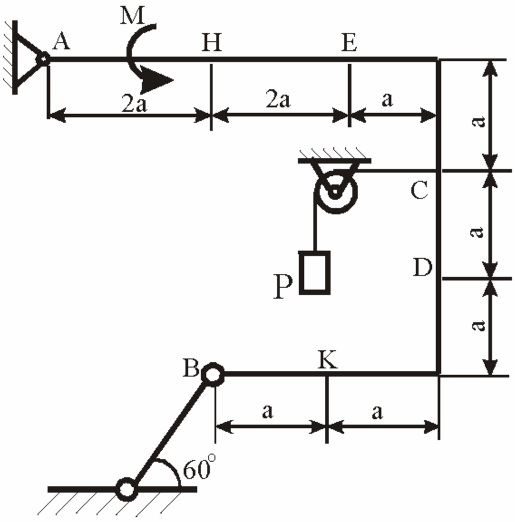


Рис. C1.7

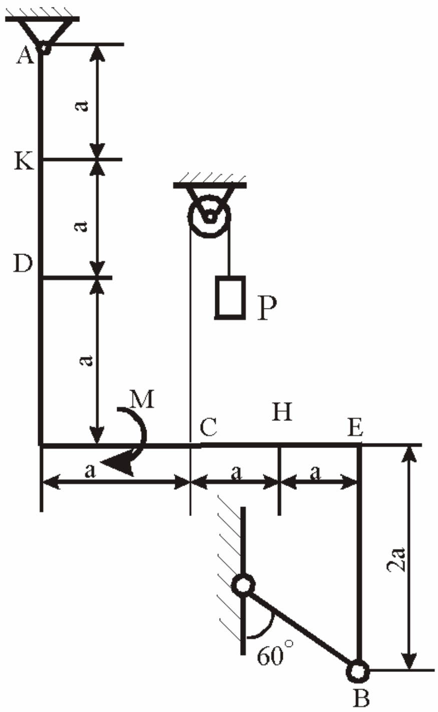


Рис. C1.8

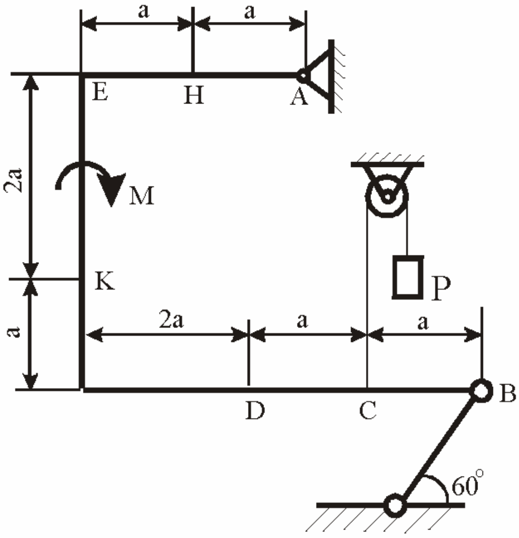
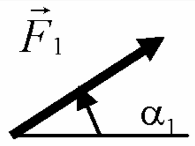
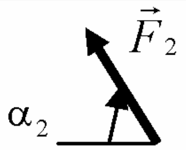
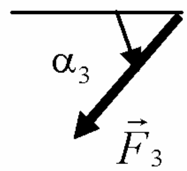
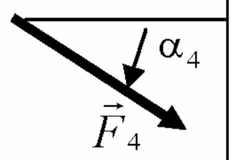


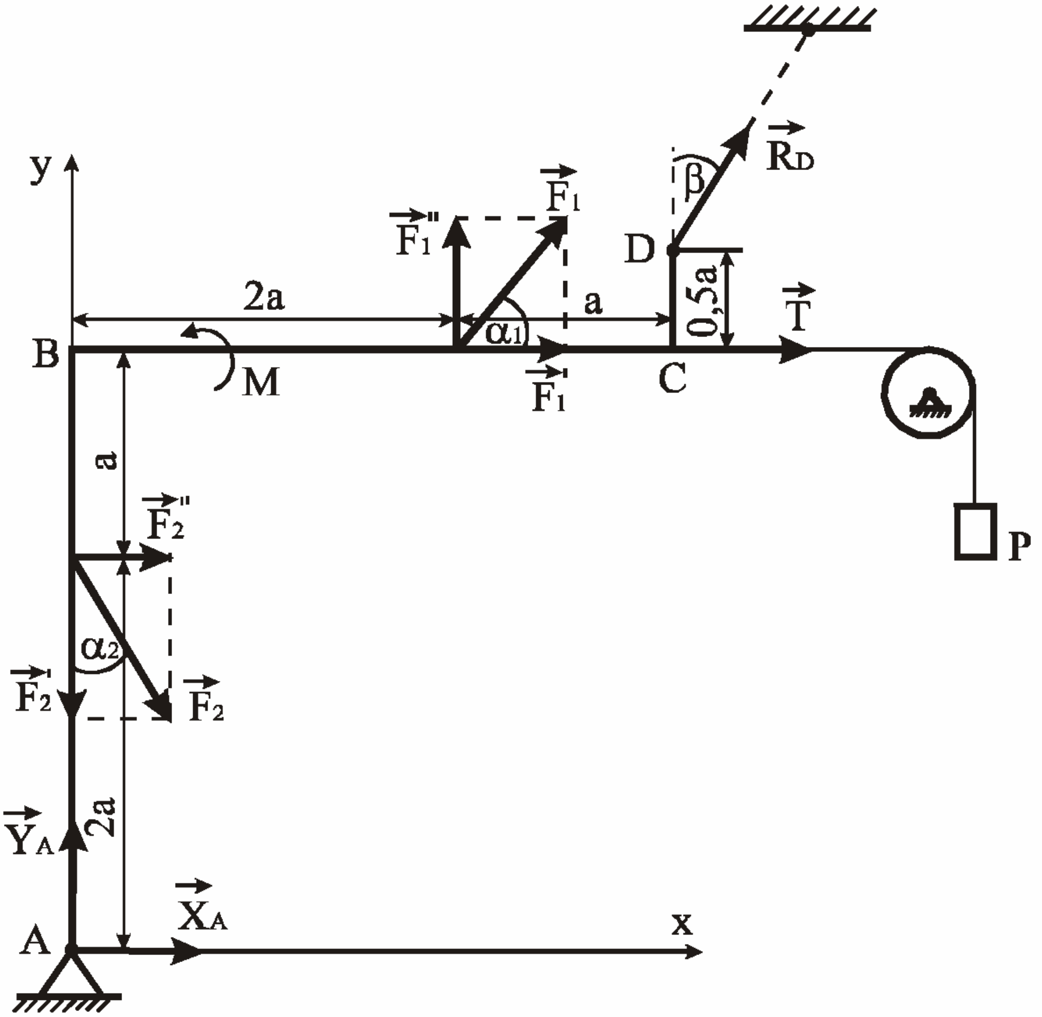
Рис. C1.9

Таблица С1

Силы								
	F_1 = 10 кН		F_2 = 20 кН		F_3 = 30 кН		F_4 = 40 кН	
Номер условия	Точка приложения	α_1 град.	Точка приложения	α_2 град.	Точка приложения	α_3 град.	Точка приложения	α_4 град.
0	H	30	-	-	-	-	K	60
1	-	-	D	15	E	60	-	-
2	K	75	-	-	-	-	E	30
3	-	-	K	60	H	30	-	-
4	D	30	-	-	-	-	E	60
5	-	-	H	30	-	-	D	75
6	E	60	-	-	K	15	-	-
7	-	-	D	60	-	-	H	15
8	H	60	-	-	D	30	-	-
9	-	-	E	75	K	30	-	-

Пример С1

Жесткая рама ABCD имеет в т. A неподвижную шарнирную опору, а т. D прикреплена к невесомому стержню. В т. C к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом P =20 кН. На раму действует пара сил с моментом M = = 75 кН·м и две силы F_1 =10 кН и F_2 =20 кН, составляющие со стержнями рамы углы $\alpha_1 = 30^0$ и $\alpha_2 = 60^0$ соответственно. При



определении размеров рамы принять *a* =*0,2* м. Определить реакции связей в точках А и D, вызванные действием нагрузки.

Дано: Р =20 кН, М =75 кН·м, F_1 =10 кН, F_2 =20 кН, α_1 =30^0, α_2 =60^0, β =60^0, *a*= 0,2 м.

Определить: X_A, $У_A$, R_D.

Решение.

1.Рассмотрим равновесие рамы. Проведем координатные оси *x, y* и изобразим действующие на раму силы: силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, пару сил с моментом М, натяжение троса $\vec{T}$ (по модулю Т = Р) и реакции связей $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{R}_D$ (реакцию неподвижной шарнирной опоры А представляем в виде составляющих $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$; стержневая опора препятствует перемещению т. D рамы в направлении вдоль стержня, поэтому в том же направлении будет действовать и реакция опоры $\vec{R}_D$).

2. Составим уравнения равновесия рамы. Для равновесия произвольной плоской системы сил достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки на плоскости равнялись нулю.

При вычислении моментов сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ относительно точки А воспользуемся теоремой Вариньона, т.е. разложим силы на составляющие F_1' =$F_1\cos\alpha_1$, F_1'' =$F_1\sin\alpha_1$; F_2' =$F_2\cos\alpha_2$,

F_2'' =$F_2\sin\alpha_2$ и учтем, что $M_A(\vec{F})=M_A(\vec{F'})+M_A(\vec{F''})$.

Получим:

$$\sum F_{kx}=0;\quad X_A+F_2\sin\alpha_2+F_1\cos\alpha_1+T+R_D\sin\beta=0, \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky}=0;\quad У_A-F_2\cos\alpha_2+F_1\sin\alpha_1+R_D\cos\beta=0, \qquad (2)$$

$$\sum M_A(\vec{F})=0;$$

$$-F_2\sin\alpha_2\cdot 2a+M+F_1\sin\alpha_1\cdot 2a-F_1\cos\alpha_1\cdot 3a-T\cdot 3a+R_D\cos\beta\cdot 3a-$$
$$-R_D\sin\beta\ 3{,}5a=0\ . \qquad (3)$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин, и решив эти уравнения, определим искомые реакции.

Из уравнения (3) определяем R_D =172,68 кН.

Из уравнения (1) определяем X_A= -195,52 кН.

Из уравнения (2) определяем $У_A$ = -81,34 кН.

Знаки «-» при величинах X_A и $У_A$ означают, что истинное направление этих реакций противоположно указанному на рисунке.

Проведем проверку.

Найдем $\sum M_B(\vec{F})= X_A\cdot 3a+F_2\sin\alpha_2\cdot a+F_1\sin\alpha_1\cdot 2a+$ $+R_D\cos\beta\cdot 3a+M-R_D\sin\beta\cdot 0.5a=-195.52\cdot 3\cdot 0.2+20\cdot 0{,}866\cdot 0.2+$ $+10\cdot 0{,}5\cdot 2\cdot 0{,}2+20+172{,}68\cdot 0{,}5\cdot 3\cdot 0.2+75-172.68\cdot 0.866\cdot 0.5\cdot 0.2=0$, т.к. $\sum M_B(\vec{F})=0$, то реакции опор найдены правильно.

Ответ: X_A = -195,52 кН, $У_A$ = -81,34 кН, R_D = 172,68 кН.

Задача С2

Конструкция состоит из жесткого угольника и стержня, которые в точке С или соединены друг с другом шарнирно (рис. С2.0 –С2.5), или свободно опираются один на другой (рис. С2.6 – С2.9). Внешними связями, наложенными на конструкцию, являются в точке А или шарнир, или жесткая заделка; в точке В –

или гладкая плоскость (рис. С2.0 и С2.1), или невесомый стержень BB' (рис. С2.2 и С2.3), или шарнир (рис. С2.4 – С2.9); в точке D – или невесомый стержень DD' (рис. С2.0, С2.3, С2.8), или шарнирная опора на катках (рис. С2.7).

На каждую конструкцию действуют: пара сил с моментом М =20 кН·м, равномерно распределенная нагрузка интенсивности q =10 кН/м и еще две силы. Эти силы, их направления и точки приложения указаны в табл. С2; там же в графе «Нагруженный участок» указано, на каком участке действует распределенная нагрузка (например, в условиях № 1 на конструкцию действуют сила $\vec{F}_2$ под углом 60^0 к горизонтальной оси , приложенная в точке L, сила $\vec{F}_4$ под углом 30^0 к горизонтальной оси, приложенная в точке Е, и нагрузка, распределенная на участке СК).

Определить реакции связей в точках А, В, С (для рис. С2.0, С2.3, С2.7, С2.8 также и в точке D), вызванные заданными нагрузками. При окончательных расчетах принять a =0,1 м. Направление распределенной нагрузки на различных по расположению участках указано в табл. С2а.

Указания. Задача С2 – на равновесие системы тел, находящихся под действием плоской системы сил. При ее решении можно или рассмотреть сначала равновесие всей системы, а затем равновесие одного из тел системы, изобразив его отдельно, или же сразу расчленить систему и рассмотреть равновесие каждого из тел в отдельности, учтя при этом закон о равенстве действия и противодействия. В задачах, где имеется жесткая заделка, следует учесть, что ее реакция представляется силой, модуль и направление которой неизвестны, и парой сил, момент которой также неизвестен.

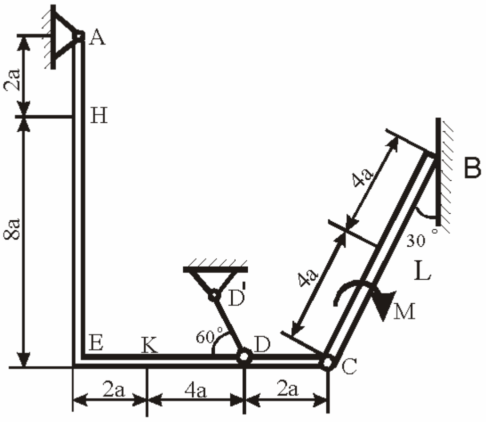


Рис. С2.0

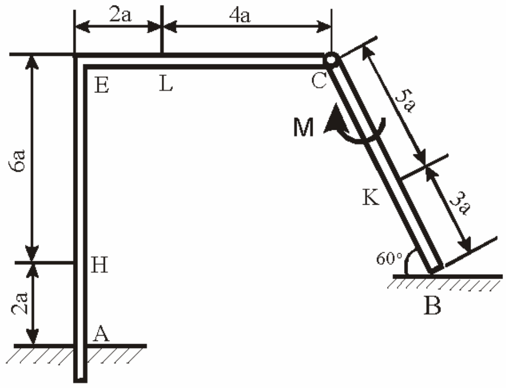


Рис. С2.1

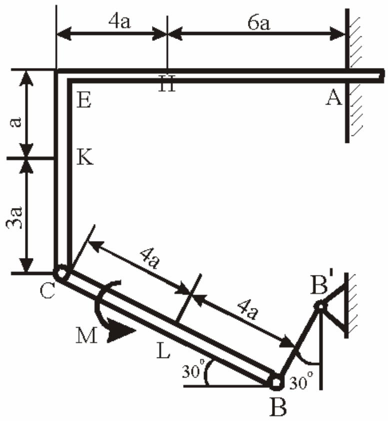


Рис. С2.2

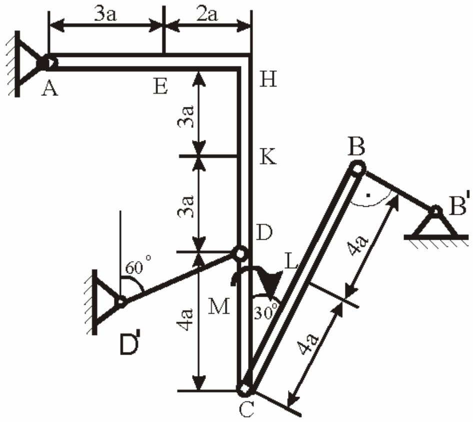


Рис. С2.3

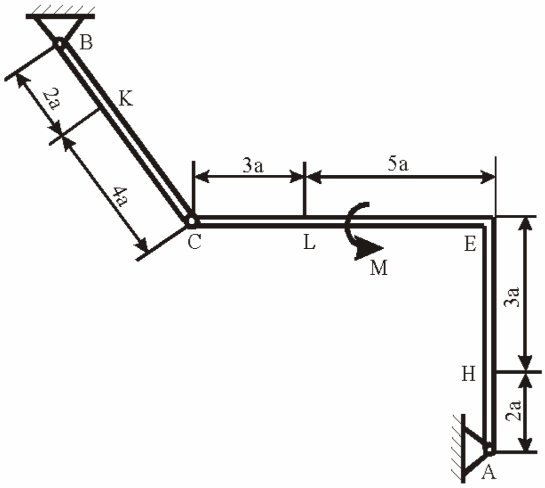


Рис. С2.4

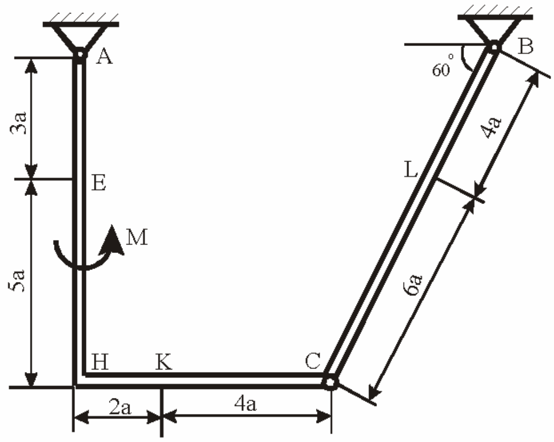


Рис. С2.5

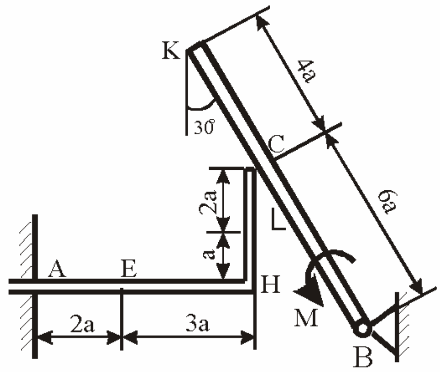


Рис. С2.6

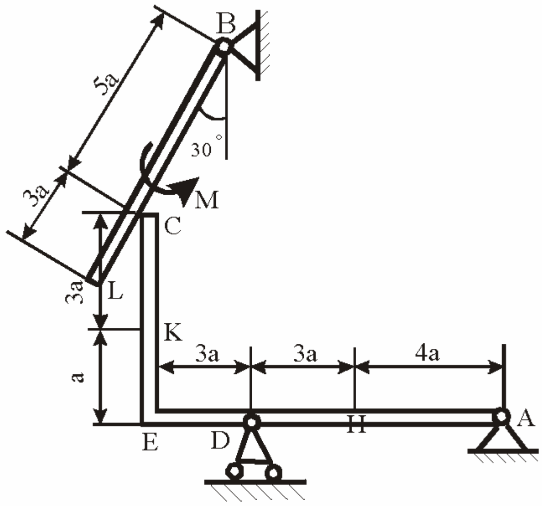


Рис. С2.7

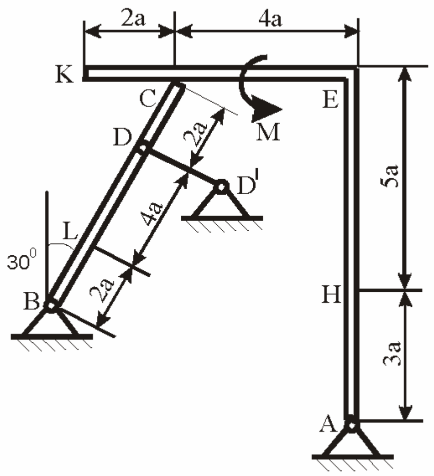


Рис. С2.8

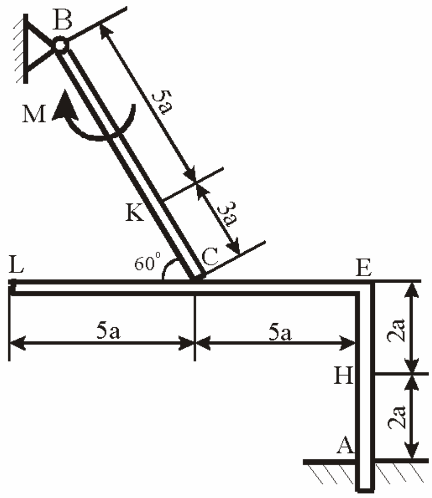


Рис. С2.9

Таблица С2

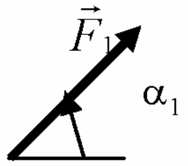
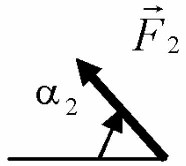
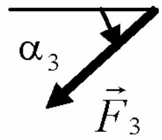
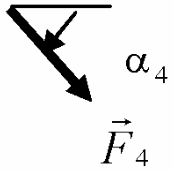
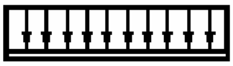
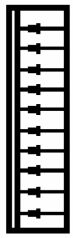
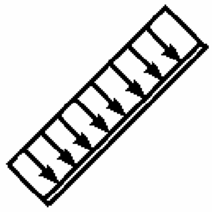
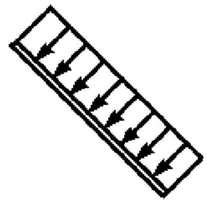
Силы									Нагруженный участок
	F_1 = 10 кН		F_2 = 20 кН		F_3 = 30 кН		F_4 = 40 кН		
Номер условия	Точка прило-жения	α_1 град.	Точка прило-жения	α_2 град.	Точка прило-жения	α_3 град.	Точка прило-жения	α_4 град.	
0		60	-	-	H	30	-	-	CL
1	-	-	L	60	-	-	E	30	CK
2	L	15	-	-	K	60	-	-	AE
3	-	-	K	30	-	-	H	60	CL
4	L	30	-	-	E	60	-	-	CK
5	-	-	L	75	-	-	K	30	AE
6	E	60	-	-	K	75	-	-	CL
7	-	-	H	60	L	30	-	-	CK
8	-	-	K	30	-	-	E	15	CL
9	H	30	-	-	-	-	L	60	CK

Таблица С2*а*

Участок на угольнике		Участок на стержне	
горизонтальный	вертикальный	Рис. 0, 3, 5, 7, 8	Рис. 1, 2, 4, 6, 9
			

Пример С2

Конструкция (рис. С2) состоит из жесткого угольника и стержня, которые в точке С свободно опираются друг о друга. Внешними связями, наложенными на конструкцию, являются: в точке А – жесткая заделка, в точке В – шарнир. На конструкцию действуют: пара сил с моментом М =80 кН·м, равномерно распределенная нагрузка интенсивности q =10 кН/м и силы: F_1 =15 кН и F_2 =25кН. При определении размеров конструкции принять a =0,35 м. Определить реакции связей в точках А, В и С.

Дано: М =80 кН·м, q =10 кН/м, F_1=15 кН, F_2=25 кН, a =0,35 м.

Определить: R_A, M_A, R_B, R_C.

Решение.

Выполняем его в соответствии с изложенной выше методикой.

1. В данной задаче изучается равновесие системы, состоящей из жесткого угольника и стержня.

2. Выбираем систему координат ХАУ (см. рис. С2).

3. Активными нагрузками на данную систему являются: распределенная нагрузка интенсивностью q, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и момент М.

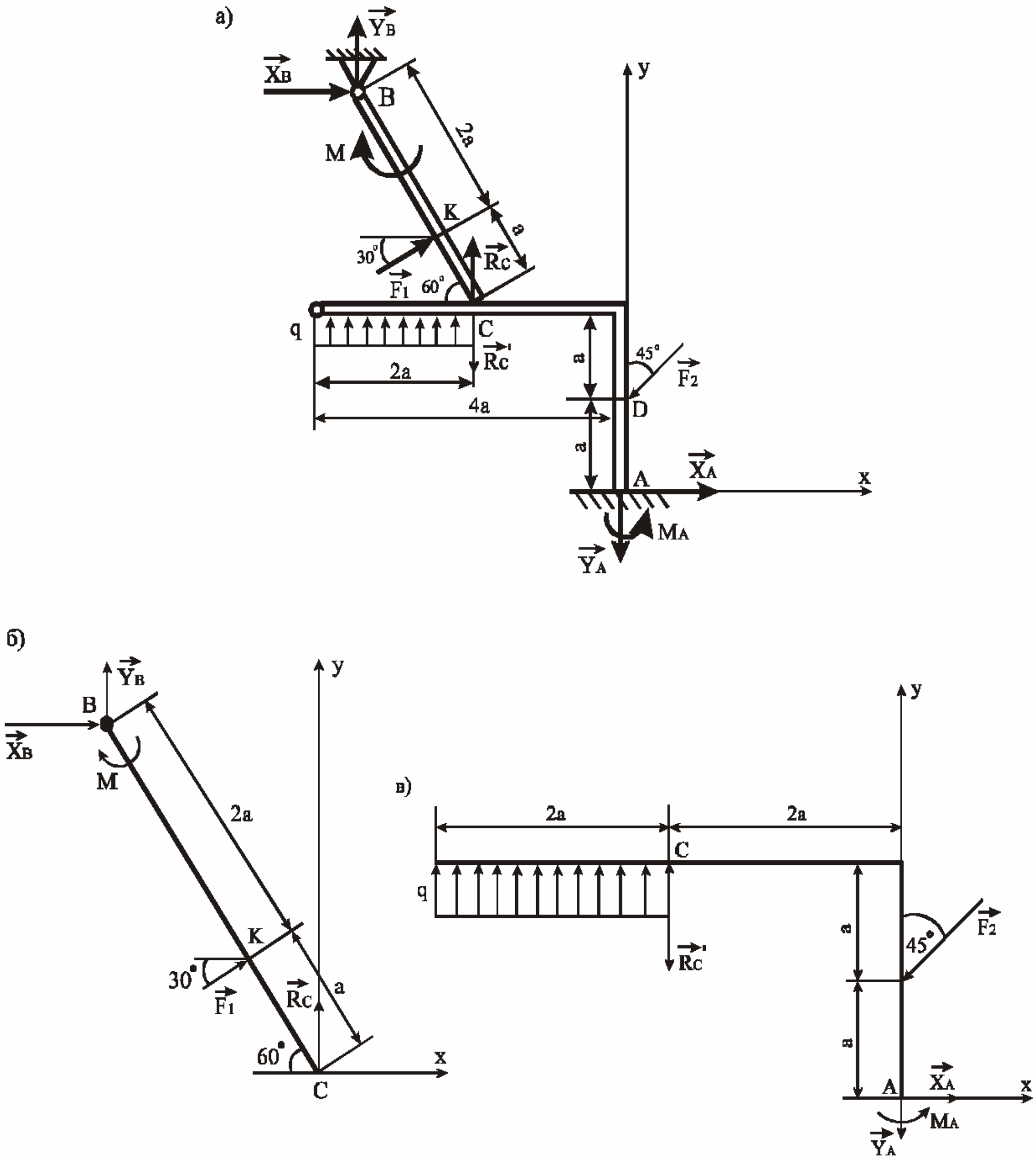

а)
$\vec{Y_B}$
$\vec{X_B}$
B
2a
M
K
a
30°
$\vec{R_C}$
$\vec{F_1}$
60°
q
C
$\vec{R_C'}$
2a
4a
a
45°
$\vec{F_2}$
D
a
A
$\vec{X_A}$
x
y
M_A
$\vec{Y_A}$
б)
$\vec{Y_B}$
B
$\vec{X_B}$
M
2a
K
30°
$\vec{F_1}$
$\vec{R_C}$
a
60°
C
x
y
в)
2a
2a
C
q
$\vec{R_C'}$
a
45°
$\vec{F_2}$
a
A
$\vec{X_A}$
x
y
M_A
$\vec{Y_A}$

Рис. С2

Изобразим на чертеже предполагаемые реакции связей. Так как жесткая заделка (в сечении А) препятствует перемещению этого сечения стержня вдоль направлений Х и У, а также повороту стержня вокруг точки А, то в данном сечении в результате действия заделки на стержень возникают реакции $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{M}_A$. Шарнирная опора в точке В препятствует перемещению данной точки стержня вдоль направлений Х и У. Следовательно, в точке В возникают реакции $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$. В точке С опоры стержня на угольник возникают реакция $\vec{R}_C$ действия угольника на стержень и реакция $\vec{R}'_C$ действия стержня на угольник. Эти реакции направлены перпендикулярно плоскости угольника, причем $R_C = R'_C$ (согласно закону о равенстве действия и противодействия).

1. Задачу решаем способом расчленения. Рассмотрим сначала равновесие стержня ВС (рис. С2б). На стержень действуют реакции связей $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$, $\vec{R}_C$, сила $\vec{F}_1$ и момент $\vec{M}$.

Для полученной плоской системы сил можно составить три уравнения равновесия, при этом сумму моментов внешних сил и реакций связей удобнее считать относительно точки В:

$$\sum F_{xk} = 0; \qquad X_B + F_1\cos30^0 = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{yk} = 0; \qquad У_B + F_1\sin30^0 + R_C = 0; \qquad (2)$$

$$\sum M_B\left(\vec{F}_k\right) = 0; \qquad 3a\cdot R_C\cos60^0 + F_1 2a - M = 0. \qquad (3)$$

Из уравнения (3) получим: R_C =132,38 кН.

Из уравнения (1) получим: X_B = -12,99 кН.

Из уравнения (2) получим: $У_B$ = -139,88 кН.

Реакция шарнира в точке В:

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = \sqrt{12{,}99^2 + 139{,}88^2} \approx 140{,}48 \text{ кН}.$$

Теперь рассмотрим равновесие угольника СА (рис. С2в). На угольник действуют: реакции связей $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{M}_A, \vec{R}'_C$, сила $\vec{F}_2$ и распределенная нагрузка q. Заметим, что $R'_C = R_C$ =132,38 кН. Для данной плоской системы сил можно составить три уравнения равновесия, при этом сумму моментов сил будем считать относительно точки С:

$\sum F_{xk} = 0$; $-F_2\sin45^0 + X_A=0$; (4)

$\sum F_{yk} = 0$; $q2a - R^{/}_C - F_2\cos45^0 - У_A=0$; (5)

$\sum M_C\left(\vec{F}_k\right) = 0$; $-q2a\cdot a - F_2\cos45^0 2a - F_2\sin45^0 a + X_A 2a -$

$- У_A 2a + M_A = 0.$ (6)

Из уравнения (4) получим: X_A = 17,75 кН.

Из уравнения (5) получим: $У_A$= -143,13 кН.

$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{17{,}75^2 + 143{,}13^2} = 144{,}22$ кН.

Из уравнения (6) получим: M_A= -91,53 кНм.

Задача решена.

А теперь для наглядного доказательства того, какое значение имеет правильный выбор точки, относительно которой составляется уравнение моментов, найдем сумму моментов всех сил относительно точки А (рис. С2в):

$$\sum M_A\left(\vec{F}_k\right) = -2aq3a + R'_C 2a + F_2 a\sin 45^0 + M_A = 0. \quad (7)$$

Из этого уравнения легко определить M_A:

M_A = -91,53 кНм.

Конечно, уравнение (6) дало то же значение M_A, что и уравнение (7), но уравнение (7) короче и в него не входят неизвестные реакции X_A и $У_A$, следовательно, им пользоваться удобнее.

Ответ: R_A =144,22 кН,, M_A = -91,53 кНм, R_B =140,48 кН, $R_C = R'_C$ =132,38 кН.

Условия равновесия пространственной системы сил

Задача С3

Шесть невесомых стержней соединены своими концами шарнирно друг с другом в двух узлах и прикреплены другими концами (тоже шарнирно) к неподвижным опорам А, В, С, D (рис. С3.0 – С3.9, табл. С3). Стержни и узлы (узлы расположены в вершинах H, К, L или М параллелепипеда) на рисунках не показаны и должны быть изображены решающим задачу по данным таблицы. В узле, который в каждой графе таблицы указан первым, приложена сила P=200 Н; во втором узле приложена сила Q =100 Н. Сила $\vec{P}$ образует с положительными направлениями координатных осей X, У, Z углы, равные соответственно α_1 =45^0, β_1 =60^0, γ_1 =60^0, а сила $\vec{Q}$ – углы

$\alpha_2 = 60°$, β_2 $=45^0$, $\gamma_2 = 60^0$; направления осей X, У, Z для всех рисунков показаны на рис. С3.0.

Грани параллелепипеда, параллельные плоскости ХУ, – квадраты. Диагонали других боковых граней образуют с плоскостью ХУ угол φ $=60^0$, а диагональ параллелепипеда образует с этой плоскостью угол $\theta = 51^0$. Определить усилия в стержнях.

Указания. Задача С3 – на равновесие пространственной системы сходящихся сил. При ее решении следует рассмотреть отдельно равновесие каждого из двух узлов, где сходятся стержни и приложены заданные силы, и учесть закон о равенстве действия и противодействия; начинать нужно с узла, где сходятся три стержня.

Изображать чертеж следует без соблюдения масштаба, так, чтобы лучше были видны все шесть стержней. Стержни следует пронумеровать в том порядке, в каком они указаны в таблице; реакции стержней обозначать буквой с индексом, соответствующим номеру стержня (например, N_1, N_2 и т.д.).

Таблица С3

Номер условия	0	1	2	3	4
Узлы	H, M	L, M	K, M	L, H	K, H
Стержни	HM, HA, HB, MA, MC, MD	LM, LA, LD, MA, MB, MC	KM, KA, KB, MA, MC, MD	LH, LC, LD, HA, HB, HC	KH, KB, KC, HA, HC, HD
Номер условия	5	6	7	8	9
Узлы	M, H	L, H	K, H	L, M	K, M
Стержни	MH, MB, MC, HA, HC, HD	LH, LB, LD, HA, HB, HC	KH, KC, KD, HA, HB, HC	LM, LB, LD, MA, MB, MC	KM, KA, KD, MA, MB, MC

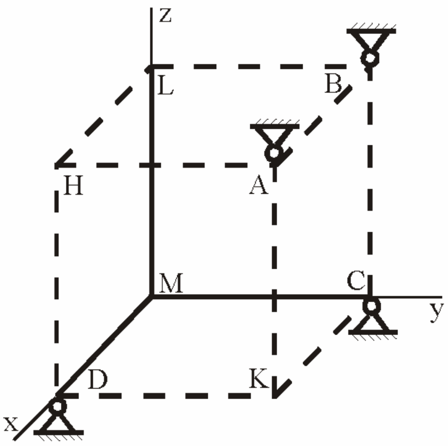


Рис. С3.0

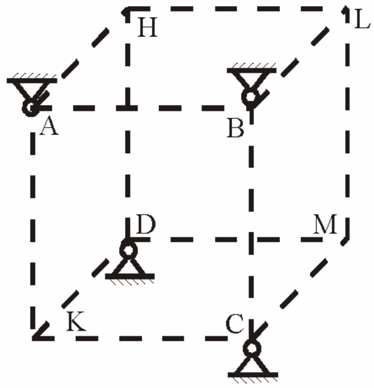


Рис. С3.1

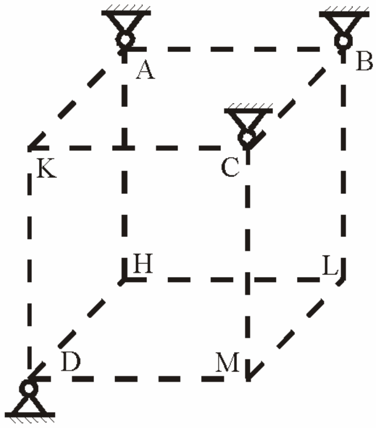


Рис. С3.2

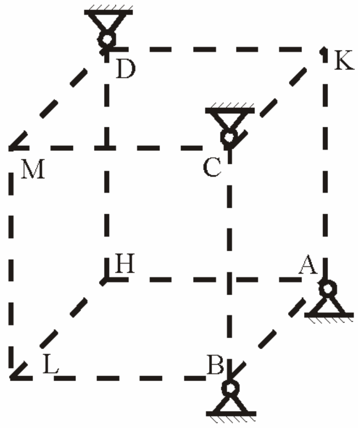


Рис. С3.3

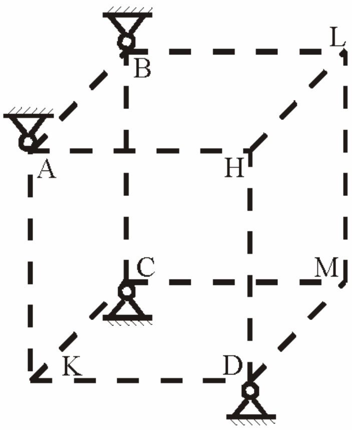


Рис. С3.4

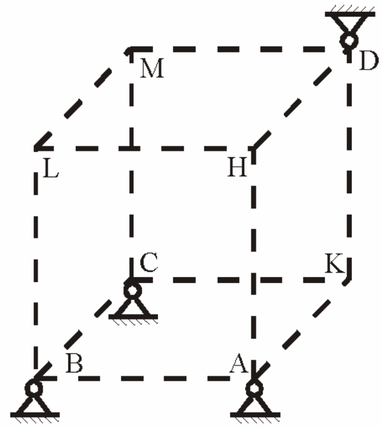


Рис. С3.5

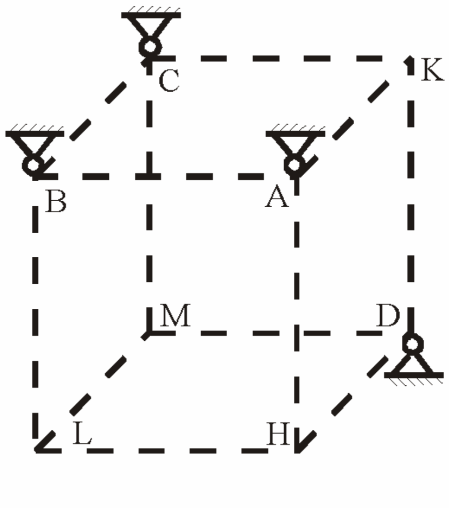


Рис. С3.6

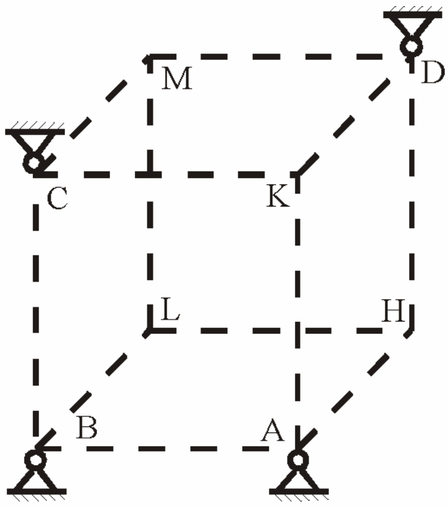


Рис. С3.7

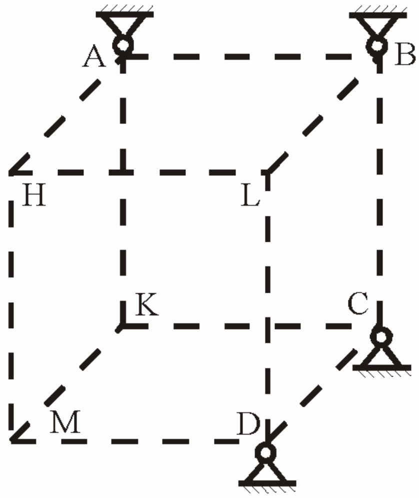


Рис. С3.8

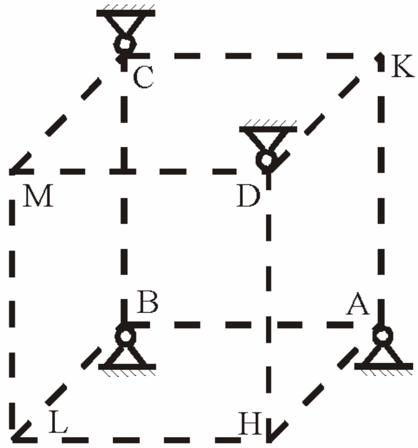


Рис. С3.9

Пример С3

Шесть невесомых стержней 1, 2,…6 соединены своими концами шарнирно в узлах (рис. С3). В узле L приложена сила $P = 250H$, в узле М – сила Q =50 Н. Сила $\vec{P}$ образует с положительными направлениями координатных осей X, У, Z углы, равные соответственно α_1 =45^0, β_1 =60^0, γ_1 =60^0, а сила $\vec{Q}$ – углы α_2 =60^0, β_2 =45^0, γ_2 =60^0.

Грани параллелепипеда, параллельные плоскости XУ, – квадраты. Диагонали других (боковых) граней образуют с плоскостью XУ угол φ =60^0, а диагональ параллелепипеда образует с этой плоскостью угол θ. Определить усилия в стержнях.

Дано: Р =250 Н, Q =50 Н, α_1 =45^0, β_1 =60^0, γ_1 =60^0, α_2=60^0, β_2 =45^0, γ_2 =60^0, φ=60^0.

Определить: N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6.

Решение.

Рассмотрим равновесие узла L (рис. С3а), в котором сходятся стержни 1, 2, 3. Реакции стержней $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$ направим от узла, считая стержни растянутыми. Получим систему сходящихся сил. Узел L находится в равновесии, если равнодействующая приложенных к нему сил $\vec{R}$=0, т.е. силовой пространственный многоугольник должен быть замкнутым. Однако построение его на плоском чертеже затруднительно. Эту задачу можно значительно проще решить аналитическим методом через проекции на оси координат.

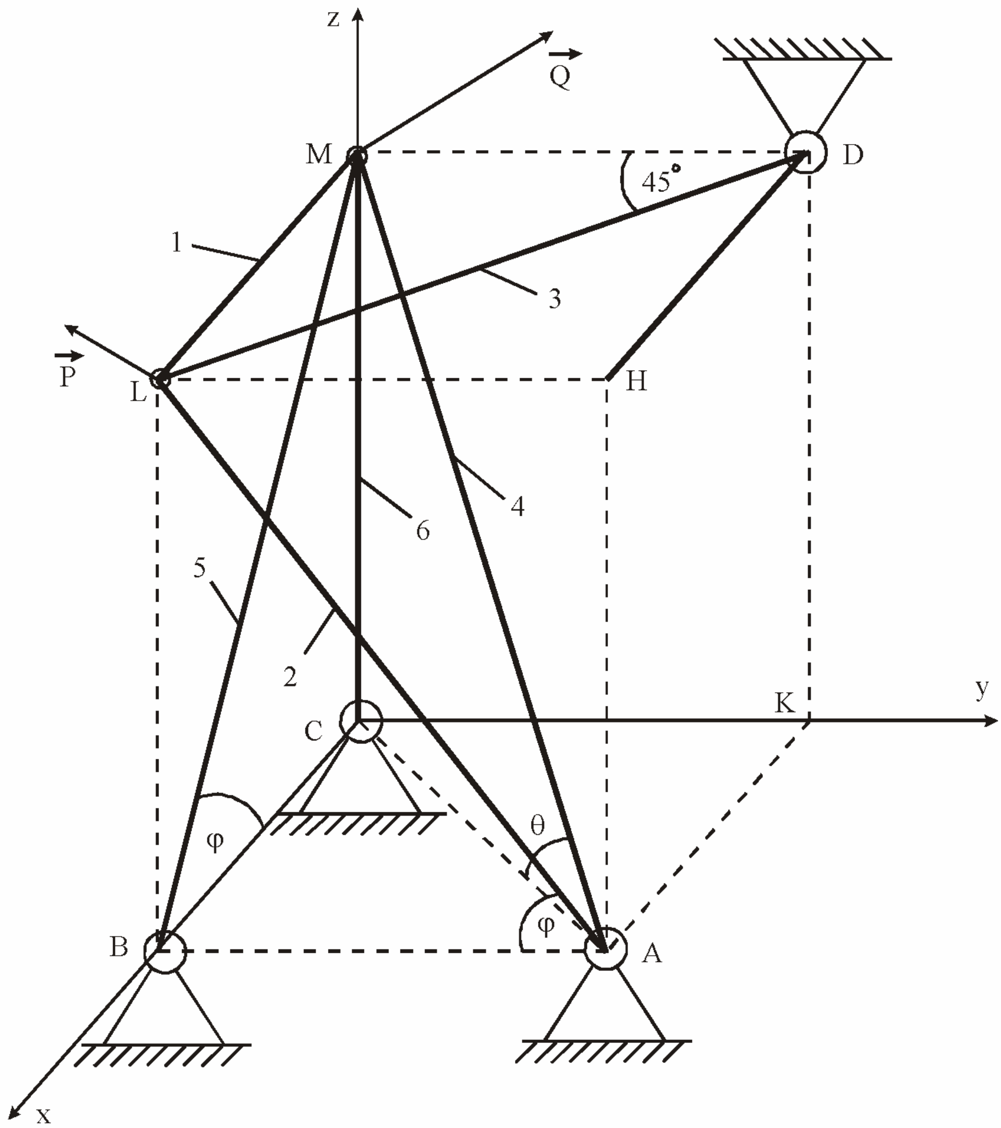


Рис. С3

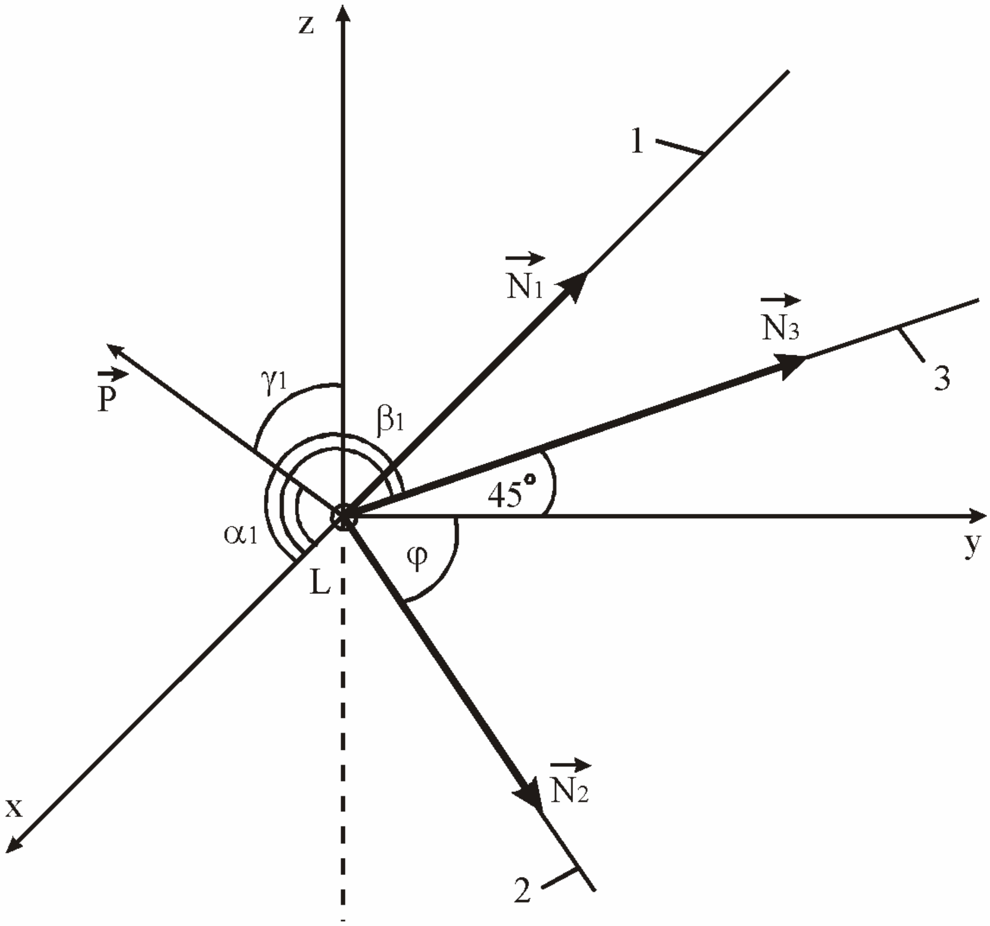


Рис. С3а

$$\sum_{k}^{n} F_{xk} = 0, \qquad \sum_{k}^{n} F_{yk} = 0, \qquad \sum_{k}^{n} F_{zk} = 0.$$

Проектируя силы на координатные оси, получим систему уравнений:

на ось X: $P\cos\alpha_1 - N_1 - N_3 \sin 45^0 = 0$; ($\vec{N}_2 \perp X$);

на ось У: $P\cos\beta_1 + N_3\cos 45^0 + N_2\cos\varphi = 0$; ($\vec{N}_1 \perp Y$);

на ось Z: $P\cos\gamma_1 - N_2\sin\varphi = 0$; ($\vec{N}_1, \vec{N}_3 \perp Z$).

Решением этой системы уравнений является:

$N_1 = 373{,}87$ Н; $N_2 = 144{,}51$ Н; $N_3 = -278{,}82$ Н.

Рассмотрим равновесие узла М (рис. С3б), в котором сходятся стержни 1, 4, 5 и 6.

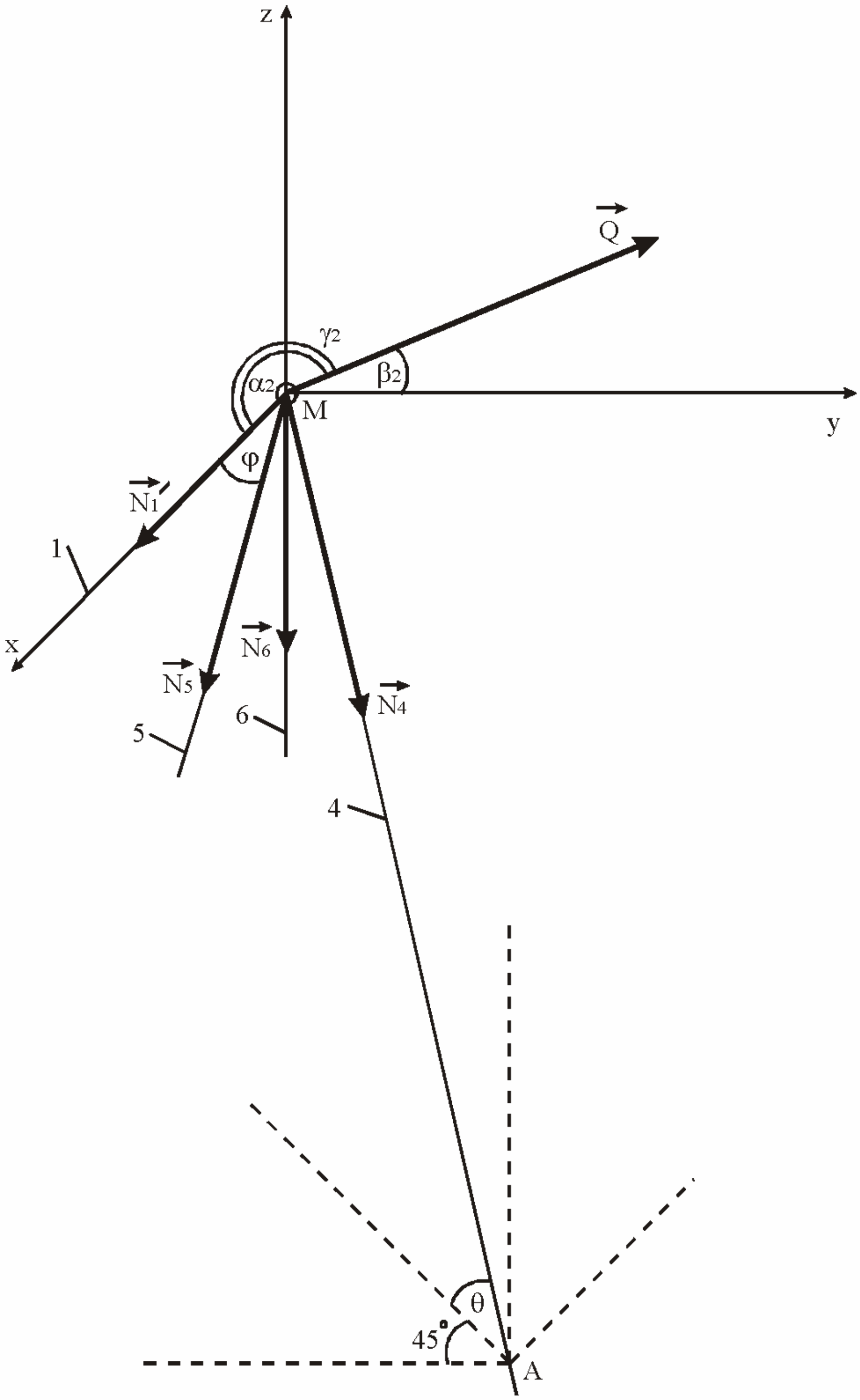


Рис. С3б

На узел действуют сила $\vec{Q}$ и реакции стержней $\vec{N}_1^{/}, \vec{N}_4, \vec{N}_5, \vec{N}_6$. Заметим сразу же, что по закону о равенстве действия и противодействия $\left|\vec{N}_1^{/}\right| = \left|\vec{N}_1\right|$.

Для дальнейших расчетов определим сначала угол θ, образованный диагональю параллелепипеда (стержень 4) с плоскостью XY.

Пусть длина стороны квадратного основания равна a. Тогда из прямоугольного Δ ABL длина AL равна $2a$, из прямоугольного Δ ALM длина AM (стержень 4) равна $a\sqrt{5}$. Но AM является гипотенузой в прямоугольном треугольнике Δ ACM, катет которого AC – диагональ квадрата основания, и поэтому его длина равна $a\sqrt{2}$. Следовательно: $\cos\theta = \sqrt{2}/\sqrt{5} = 0{,}632$, $\sin\theta =$ $=0{,}775$.

$Q\cos\alpha_2 + N_1^{/} + N_4\cos\theta\ \sin45^0 + N_5\cos\varphi = 0.$

$Q\cos\beta_2 + N_4\cos\theta\ \cos45^0 = 0.$

$Q\cos\gamma_2 - N_5\sin\varphi - N_6 - N_4\sin\theta = 0.$

Решением этой системы уравнений является:

N_4 = -79,11 Н; N_5 = -727,24 Н; N_6 = -570,76 Н.

Ответ:

N_1 =373,87 Н – стержень 1 растянут;

N_2 =144,51 Н – стержень 2 растянут;

N_3 = -278, 82 Н – стержень 3 сжат;

N_4 = -79,11 Н – стержень 4 сжат;

N_5 = -727,24 Н – стержень 5 сжат;

N_6 = -570,76 Н – стержень 6 сжат.

Задача С4

Две однородные тонкие прямоугольные плиты жестко соединены (сварены) под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром (или подпятником) в точке А, цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке В и невесомым стержнем 1 (рис. С4.0-С4.7) или же двумя подшипниками в точках А и В и двумя невесомыми стержнями 1 и 2 (рис. С4.8, С4.9); все стержни прикреплены к плитам и к неподвижным опорам шарнирами.

Размеры плит указаны на рисунках; вес большей плиты P_1 = =5 кН, вес меньшей плиты P_2 = 3 кН. Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей (плоскость xy – горизонтальная).

На плиты действует пара сил с моментом M = 4 кН·м, лежащая в плоскости одной из плит, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. С4; при этом силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_4$ лежат в плоскостях, параллельных плоскости xy, сила $\vec{F}_2$ – в плоскости, параллельной xz, и сила $\vec{F}_3$ – в плоскости, параллельной yz. Точки приложения сил (D, E, H, K) находятся в углах или серединах сторон плит.

Определить реакции связей в точках А и В и реакцию стержня (стержней). При подсчетах принять a = 0,6 м.

Указания. Задача С4 – на равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил. При ее решении учесть, что реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие (по всем трем координатным осям), а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (подшипника). При вычислении момента силы $\vec{F}$ часто удобно разложить ее на две составляющие $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$, параллельные координатным осям (или на три); тогда, по теореме Вариньона, $m_x(\vec{F}) = m_x(\vec{F}') + m_x(\vec{F}'')$ и т.д.

Пример С4

Две однородные прямоугольные плиты, сваренные под прямым углом друг к другу, закреплены сферическим шарниром в точке А, цилиндрическим подшипником в точке В и невесомым стержнем 1 (рис. С4). Стержень 1 прикреплен к плите (в точке Д) и к неподвижной опоре (в точке С) шарнирно.

Размеры плиты в направлениях, параллельных координатным осям, равны x_1= 1,5 м, y_1= 2,5 м, z_1= 1 м. Вес большей плиты P_1 = 5 кН, вес меньшей плиты P_2 = 3 кН.

На плиты действуют: пара сил с моментом M = 3 кН·м, лежащая в плоскости большей плиты, и две силы F_1= 15 кН, F_2 = =18 кН. Сила $\vec{F}_1$ расположена в плоскости xy и составляет угол

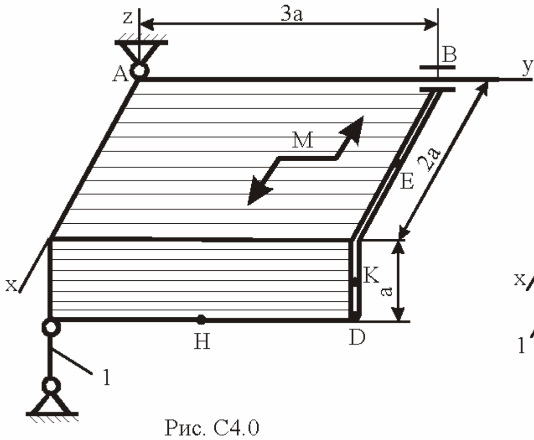


Рис. С4.0

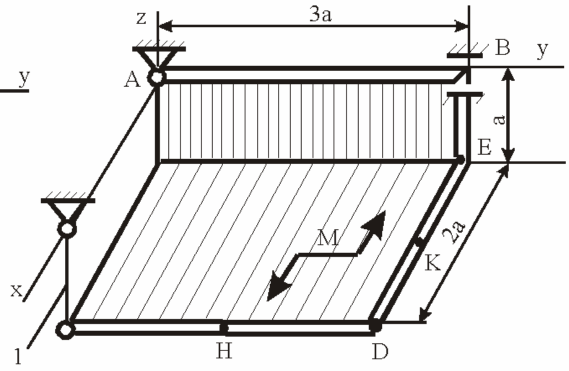


Рис. С4.1

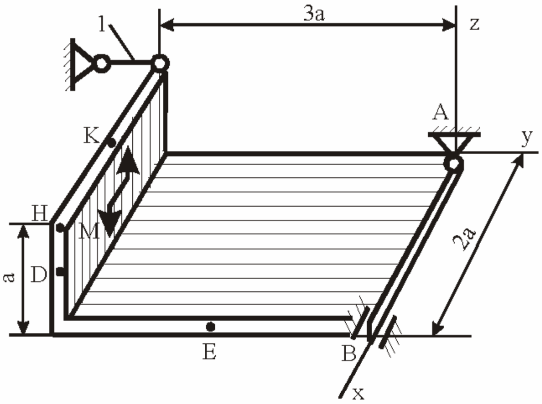


Рис. С4.2

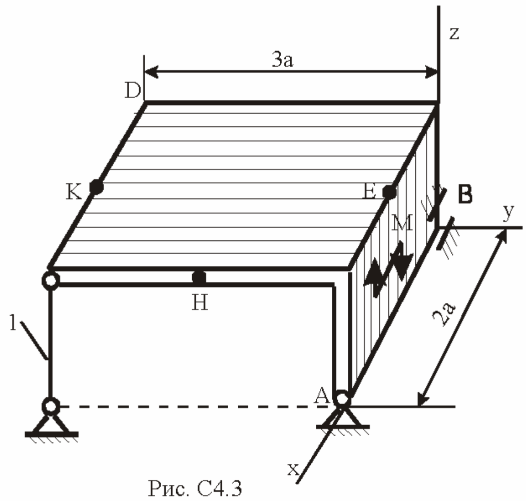


Рис. С4.3

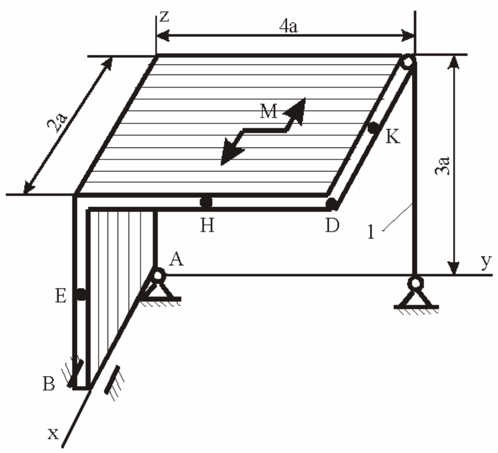


Рис. С4.4

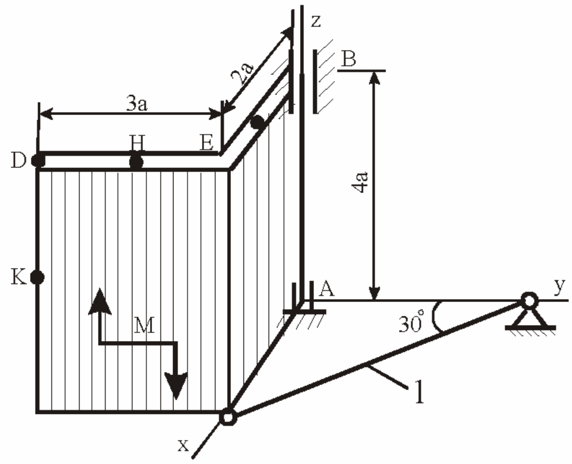


Рис. С4.5

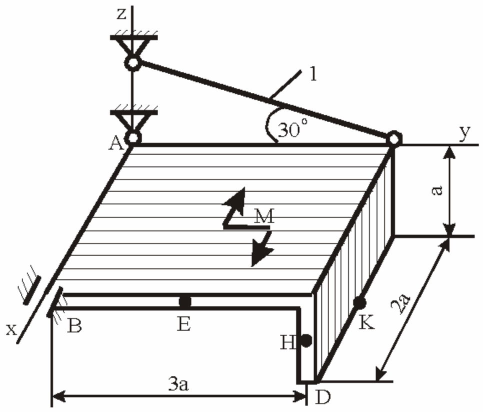


Рис. С4.6

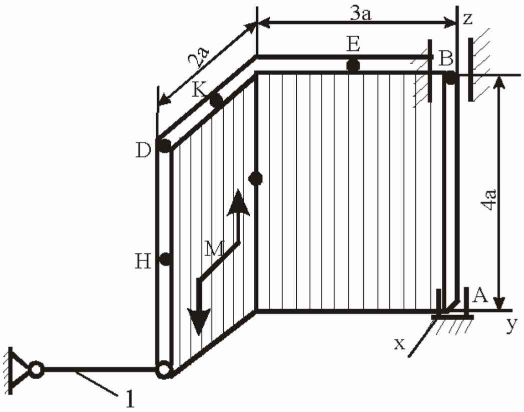


Рис. С4.7

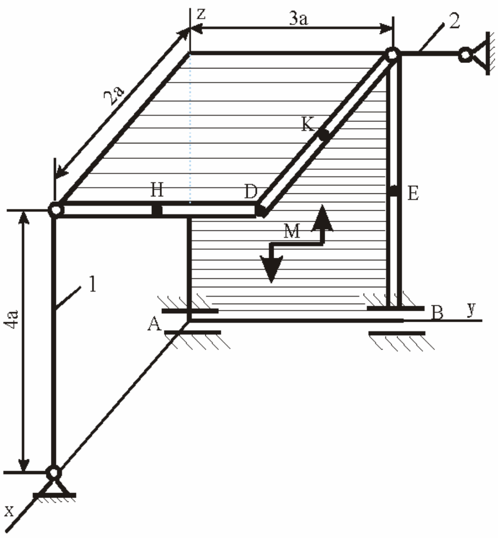


Рис. С4.8

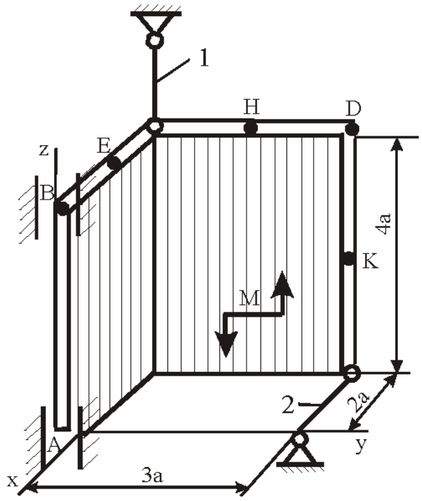
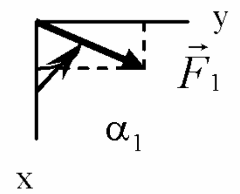
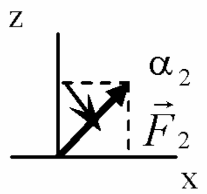
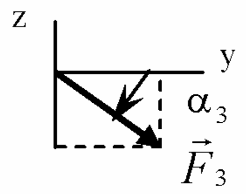
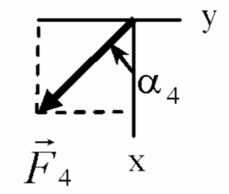


Рис. С4.9

Таблица С4

Силы								
	F_1 = 6 кН		F_2 = 8 кН		F_3 = 10 кН		F_4 = 12 кН	
Номер условия	Точка приложения	α_1 град.	Точка приложения	α_2 град.	Точка приложения	α_3 град.	Точка приложения	α_4 град.
0	E	60	H	30	-	-	-	-
1	-	-	D	60	E	30	-	-
2	-	-	-	-	K	60	E	30
3	K	30	-	-	D	0	-	-
4	-	-	E	30	-	-	D	60
5	H	0	K	60	-	-	-	-
6	-	-	H	90	D	30	-	-
7	-	-	-	-	H	60	K	90
8	D	30	-	-	K	0	-	-
9	-	-	D	90	-	-	H	30

$\alpha_1 = 30^0$ с осью x. Сила $\vec{F}_2$ расположена в плоскости, параллельной xz, и составляет угол $\alpha_2 = 45^0$ с осью z.

Определить реакции опор в точках А, В и стержня СД.

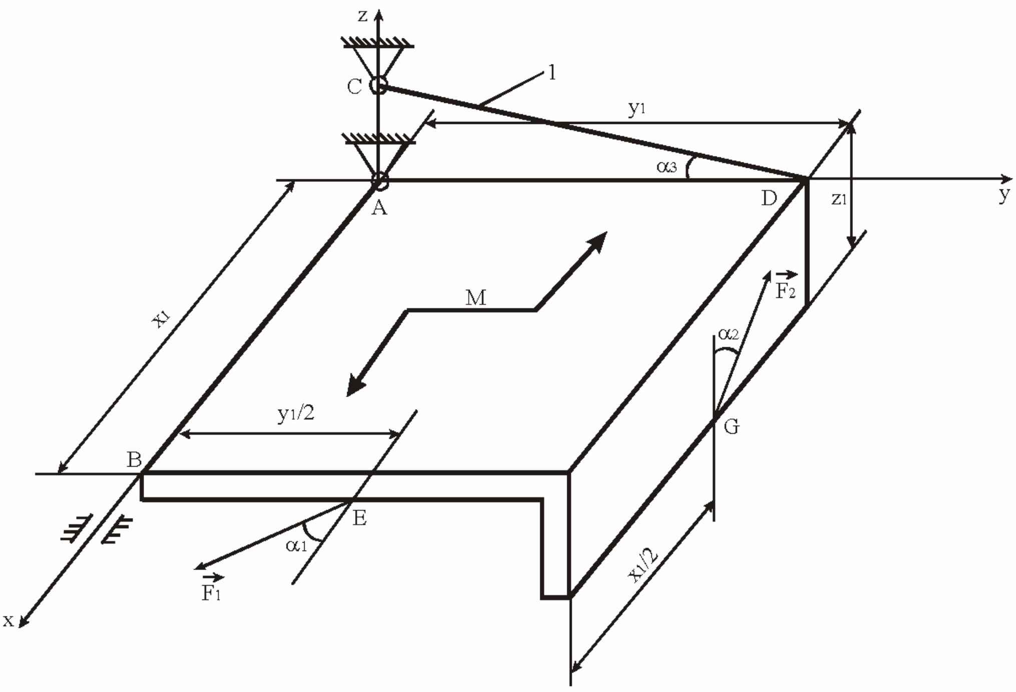


Рис. С.4

Дано: $x_1 = 1{,}5$ м, $y_1 = 2{,}5$ м, $z_1 = 1$ м, $P_1 = 5$ кН, $P_2 = 3$ кН, $M = 3$ кН·м, $F_1 = 15$ кН, $F_2 = 18$ кН, $\alpha_1 = 30^0$, $\alpha_2 = 45^0$, $\alpha_3 = 30^0$.

Определить: X_A, Y_A, Z_A, Y_B, Z_B и N.

Решение.

1. Рассмотрим равновесие тела, состоящего из двух сварных плит (рис. С4).

2. На тело действуют: сила $\vec{F}_1$ в точке E, сила $\vec{F}_2$ в точке C_2, сила тяжести $\vec{P}_1$ в точке C_1, сила тяжести $\vec{P}_2$ в точке C_2 (рис. С4а).

3. Реакции связей – в сферическом шарнире: $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$; в цилиндрическом подшипнике: $\vec{Y}_B, \vec{Z}_B$, реакция $\vec{N}$ невесомого стержня направлена вдоль стержня (см. рис. С4,а). На данном этапе решения задачи направления реакций назначаем произвольно, при этом предполагаем, что стержень 1 растянут.

4. В задаче шесть неизвестных реакций, следовательно, задача статически определимая.

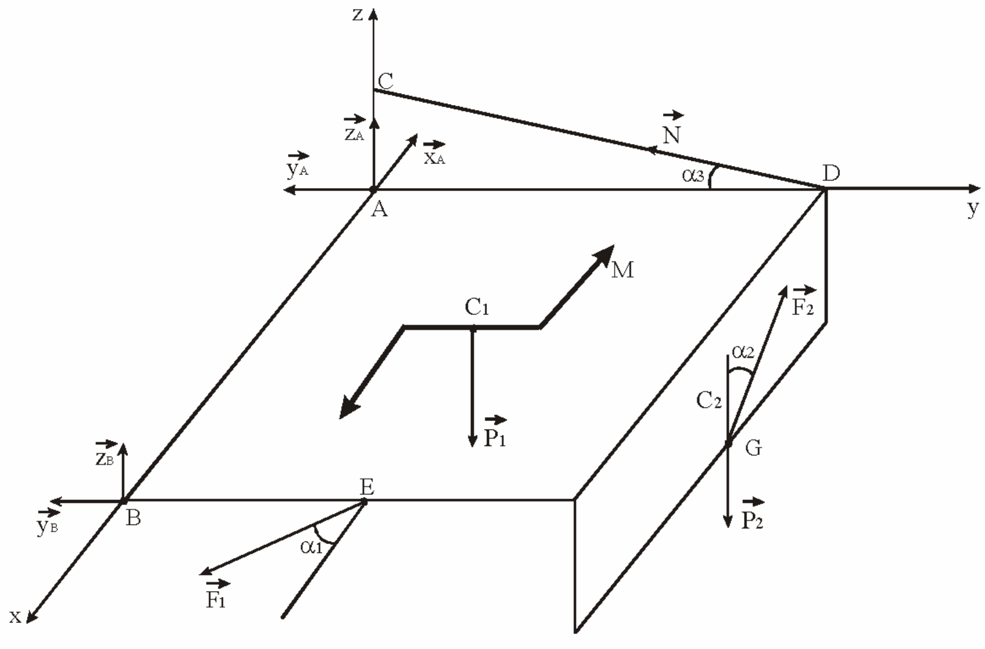


Рис. С.4а

6. Составим шесть уравнений равновесия полученной пространственной системы сил. При вычислении моментов сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{N}$ относительно координатных осей применяется теорема Вариньона, согласно которой момент силы относительно оси равен сумме моментов составляющих этой силы относительно той же оси.

$$\sum F_{XK} = 0;$$

$$F_1 \cos\alpha_1 - X_A - F_2 \sin\alpha_2 = 0;$$

$$\sum F_{YK} = 0;$$

$$-Y_B - F_1 \sin\alpha_1 - N\cos\alpha_3 - Y_A = 0;$$

$$\sum F_{ZK} = 0;$$

$$Z_B - P_1 - P_2 + F_2\cos\alpha_2 + N\sin\alpha_3 + Z_A = 0;$$

$$\sum M_X(\vec{F}_K) = 0;$$

$$-P_1\frac{y_1}{2} - P_2 y_1 - F_2\cos\alpha_2 y_1 + N\sin\alpha_3 y_1 = 0;$$

$$\sum M_Y(\vec{F}_K) = 0;$$

$$-Z_B x_1 + P_1\frac{x_1}{2} + P_2\frac{x_1}{2} - F_2\cos\alpha_2\frac{x_1}{2} + F_2\sin\alpha_2 z_1 = 0;$$

$$\sum M_Z(\vec{F}_K) = 0;$$

$$M - Y_B x_1 - F_1\cos\alpha_1\frac{y_1}{2} - F_1\sin\alpha_1 x_1 + F_2\sin\alpha_2 y_1 = 0\ .$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин и решив эти уравнения, найдем искомые реакции.

Ответ: X_A = 0,26 кН, Y_A = -45,69 кН, Z_A = -28,8 кН, Y_B = =6,84 кН, Z_B = 6,1 кН, N = 36,2 кН.

ГЛАВА 2. КИНЕМАТИКА

§ 1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Кинематика точки

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучается движение тел без учета причин, вызывающих это движение.

Механика изучает простейшую форму движения – механическое движение. Под механическим движением понимается изменение с течением времени относительного положения материальных тел.

Основная задача кинематики состоит в том, чтобы, зная закон движения данного тела (или точки), определить все кинематические величины, характеризующие как движение тела в целом, так и движение каждой его точки в отдельности.

Изучение кинематики следует начать с изучения движения точки (кинематики точки), а затем перейти к изучению кинематики твердого тела. Линия, описываемая движущейся точкой в пространстве, называется траекторией точки. По виду траектории движения точки делятся на криволинейные и прямолинейные.

Способы задания движения точки

Движение точки относительно выбранной системы отсчета будет задано, если в любой момент времени t будет известно положение точки в этой системе отсчета.

Существует три способа задания движения точки:

1) естественный;
2) координатный;
3) векторный.

1. Е с т е с т в е н н ы й с п о с о б

Чтобы задать движение точки естественным способом, нужно задать:

1) траекторию точки М относительно системы отсчета oxyz (рис. 1);

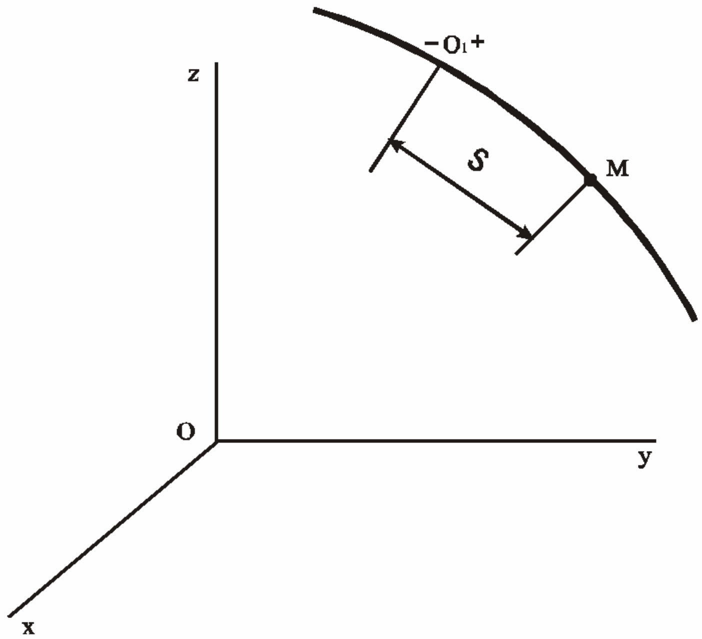


Рис. 1

2) начало отсчета на траектории (т. O_1) с указанием положительного направления отсчета;

3) закон движения точки вдоль траектории в виде $S = f(t)$, где S – дуговая координата точки, которая однозначно определяет положение точки М на траектории. Величина S определяет положение точки М на траектории, а не пройденный путь.

2. К о о р д и н а т н ы й с п о с о б

Естественный способ задания движения нагляден, но траектория точки бывает известна не всегда. На практике чаще применяется координатный способ задания движения точки. При этом способе положение движущейся точки определяется ее прямоугольными декартовыми координатами x, y, z, при движении все три координаты будут меняться с течением времени.

Зависимости

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t) \qquad (1)$$

этих координат от времени и представляют собой уравнения движения точки в декартовых осях координат (рис. 2).

Уравнения (1) являются одновременно и уравнением траектории точки в параметрическом виде, если за параметр принять время t.

Исключив из уравнений движения время t, можно получить уравнение траектории точки в обычной форме.

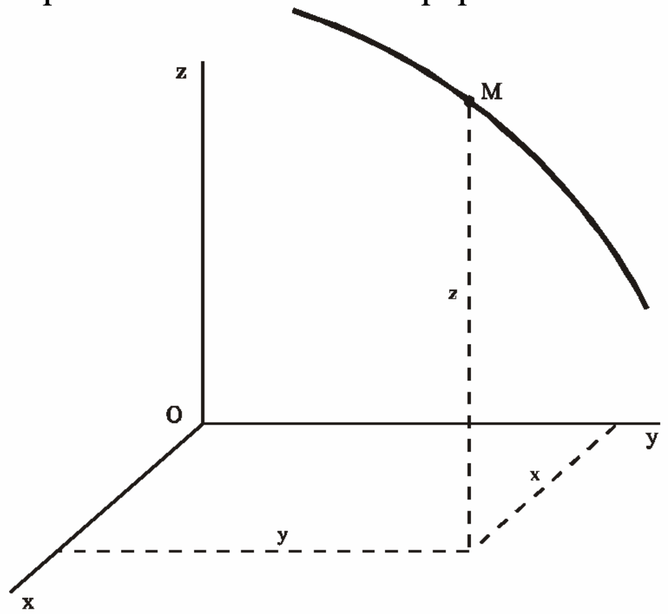


Рис. 2

3. В е к т о р н ы й с п о с о б

Положение движущейся точки М по отношению к системе отсчета oxyz может быть определено ее радиус-вектором $\vec{r}$, проведенным из начала осей координат в точку М. При движении точки М ее радиус-вектор $\vec{r}$ будет изменяться и по модулю, и по направлению (рис. 3), т.е.

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{2}$$

Равенство (2) и есть закон криволинейного движения точки в векторной форме.

Векторный способ задания движения точки удобен для установления общих зависимостей. Геометрическое место концов вектора $\vec{r}$ определяет траекторию движущейся точки. Введем понятие годографа вектора.

Годографом какого-либо вектора называют кривую, которую вычерчивает конец этого вектора (предполагается, что начало вектора находится все время в одной и той же точке). Следовательно, годографом радиус-вектора, определяющего положение точки, будет траектория точки.

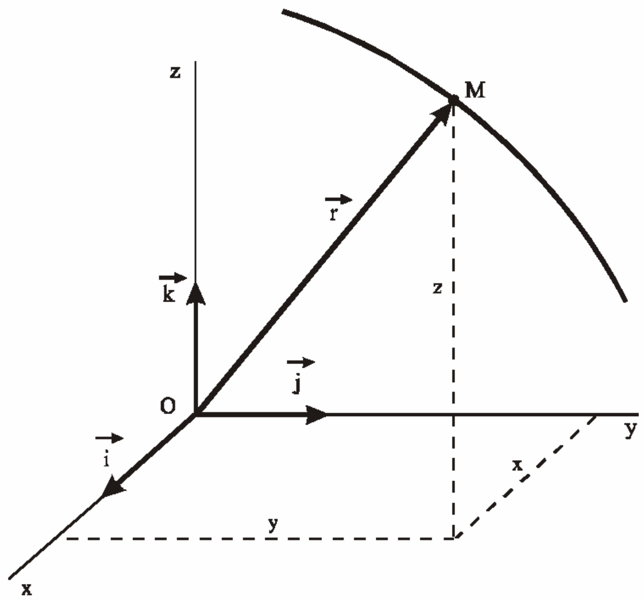


Рис. 3

Связь между координатным и векторным способами задания движения точки устанавливается с помощью равенства:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \tag{3}$$

где $x = r_x$, $y = r_y$, $z = r_z$, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – орты осей координат.

Определение скорости и ускорения точки при векторном способе задания ее движения

Скорость – векторная величина, характеризующая быстроту и направление движения точки в данной системе отсчета.

Пусть в момент времени t положение точки определяется радиус-вектором $\vec{r} = \vec{r}(t)$, а в момент времени $t + \Delta t$ – радиус-вектором $\vec{r}_1$. Величину $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$ будем называть вектором перемещения точки за время Δt.

Отношение вектора перемещения точки к промежутку времени, за который это перемещение произошло, называется средней скоростью точки за промежуток времени Δt.

$$\vec{V}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Мгновенной скоростью называется предел, к которому стремится средняя скорость $\vec{V}_{cp}$ при стремлении промежутка времени Δt к нулю.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}; \qquad \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{4}$$

Вектор скорости точки в данный момент времени равен первой производной от радиус-вектора точки по времени.

Вектор скорости точки в любой момент направлен по касательной к траектории в сторону движения.

Ускорением точки называется векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости точки.

Пусть в момент времени t движущаяся точка находилась в положении М и имела скорость $\vec{V}$, в момент времени $t_1 = t + \Delta t$ она приходит в положение M_1 и имеет скорость $\vec{V}_1$. За время $\Delta t = t_1 - t$ скорость точки изменилась на $\Delta\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}$.

Отношение приращения вектора скорости $\vec{V}$ к промежутку времени Δt, за который это приращение произошло, определяет вектор среднего ускорения за этот промежуток времени:

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta \mathrm{t}}.$$

По направлению вектор среднего ускорения совпадает с направлением вектора приращения скорости.

Мгновенным ускорением точки называется векторная величина $\vec{a}$, к которой стремится среднее ускорение $\vec{a}_{cp}$ при $\Delta t \to 0$.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}; \quad \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{5}$$

Вектор ускорения точки в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиус-вектора точки по времени.

Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания ее движения

1. Определение скорости точки.

Пусть движение точки задано в декартовой системе координат уравнениями: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$.

Согласно выражению (3), имеем $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Поскольку единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ выбранной системы координат постоянны, то на основании формулы (4) получаем:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

Разложение скорости $\vec{V}$ на компоненты по осям координат имеет вид:

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k},$$

где V_x, V_y, V_z –проекции скорости $\vec{V}$ на оси координат.

Сопоставляя обе формулы, определяющие скорость, получим:

$$V_x = dx/dt; \qquad V_y = dy/dt; \qquad V_z = dz/dt.$$

Проекции скорости на оси координат равны первым производным от соответствующих координат движущейся точки по времени.

Зная проекции скорости, легко определить ее модуль и направление.

$$\left.\begin{aligned} &V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}; \\ &\cos(\widehat{\vec{V},\vec{i}}) = V_x/V;\ \cos(\widehat{\vec{V},\vec{j}}) = V_y/V;\ \cos(\widehat{\vec{V},\vec{k}}) = V_z/V. \end{aligned}\right\}$$

2. Определение ускорения точки.

На основании формулы (5) вектор ускорения точки $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. Принимая во внимание, что $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, получим:

$$\vec{a} = \frac{dV_x}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}.$$

Раскладываем ускорение $\vec{a}$ на составляющие по осям координат

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

где a_x, a_y, a_z – проекции ускорения $\vec{a}$ на оси координат x, y, z.

Сравнивая последние две формулы, получим:

$a_x = dV_x/dt = d^2x/dt^2;$ $\qquad a_y = dV_y/dt = d^2y/dt^2;$

$a_z = dV_z/dt = d^2z/dt^2.$

Проекции ускорения на оси координат равны первым производным от проекций скоростей или вторым производным от соответствующих координат движущейся точки по времени.

Модуль и направление ускорения определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} &a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ ; \\ &\cos(\widehat{\vec{a},\vec{i}}) = a_x/a;\ \cos(\widehat{\vec{a},\vec{j}}) = a_y/a;\ \cos(\widehat{\vec{a},\vec{k}}) = a_z/a. \end{aligned}\right\}$$

Определение скорости при естественном способе задания движения точки

Определим скорость точки, когда ее движение задано естественным способом, т.е. известны ее траектория АВ, начало отсчета и направление отсчета дуговой координаты, а также уравнение движения точки по траектории $S = f(t)$.

Пусть в момент времени t точка находится в положении М и имеет дуговую координату $S = OM$, а в момент времени $t_1 = t + \Delta t$ занимает положение M_1 с дуговой координатой $S_1 = OM_1 = OM + OM_1 = S + \Delta S$. Приращение дуговой координаты $\Delta S = \cup MM_1$ (рис. 4).

Проведем из произвольного центра O_1, в точку М ее радиус-вектор $\vec{r}$, скорость точки М определится по формуле $\vec{V} = d\vec{r}/dt$.

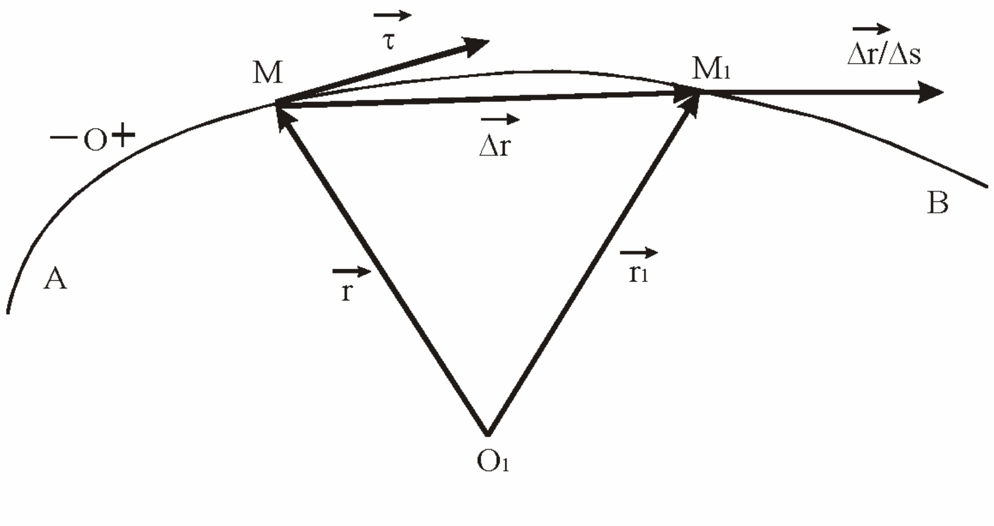


Рис. 4

Радиус-вектор $\vec{r}$ можно рассматривать не только как функцию времени, но и как функцию дуговой координаты точки $\vec{r} = \vec{r}(S)$.

Скорость точки представим в виде:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}, \quad \text{где } \frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}.$$

Вектор $\dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$ имеет то же направление, что и вектор $\Delta \vec{r}$, при $\Delta s \to 0$ его направление стремится к направлению касательной, проведенной в точке М в сторону возрастания дуговой координаты, модуль этого вектора стремится к единице:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \lim_{M_1 \to M} \frac{MM_1}{\cup MM_1} = 1.$$

Таким образом, вектор $\dfrac{d\vec{r}}{ds}$ имеет модуль, равный единице, и направлен по касательной к кривой в сторону увеличения дуговой координаты. Вектор $\dfrac{d\vec{r}}{ds}$ есть орт этого направления. Обозначим этот орт $\vec{\tau}$.

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}.$$

Таким образом, вектор скорости получим в виде:

$$\vec{V} = \vec{\tau} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Производная $\dfrac{ds}{dt}$ есть проекция скорости $\vec{V}$ на касательную, т.е. определяет алгебраическую величину скорости:

$$V = \frac{ds}{dt}.$$

Если $\dfrac{ds}{dt} > 0$, то S возрастает, точка движется в сторону возрастания дуговой координаты, направление $\vec{V}$ совпадает с направлением $\vec{\tau}$.

Если $\frac{ds}{dt} < 0$, дуговая координата убывает и направление скорости $\vec{V}$ противоположно направлению орта $\vec{\tau}$.

Естественные оси. Проведем в точке М кривой АВ соприкасающуюся плоскость. Нормальную плоскость, перпендикулярную к касательной, и спрямляющую плоскость, перпендикулярную соприкасающейся и нормальной плоскостям, и получим естественный трехгранник (рис. 5).

Линия пересечения соприкасающейся и нормальной плоскостей называется главной нормалью. Линия пересечения нормальной и спрямляющей плоскостей называется бинормалью кривой. Естественными координатами называются три взаимно перпендикулярные оси: касательная, направленная в сторону возрастания дуговой координаты, главная нормаль, направленная в сторону вогнутости кривой, и бинормаль, направленная по отношению к касательной и главной нормали так же, как ось *oz* направлена по отношению к осям *ox* и *oy* в правой системе координатных осей.

Единичные векторы естественных осей обозначаются соответственно: $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$.

Естественные координатные оси имеют начало в точке М кривой и при ее движении по этой кривой перемещаются вместе с ней, оставаясь взаимно перпендикулярными, но изменяя свое направление в пространстве.

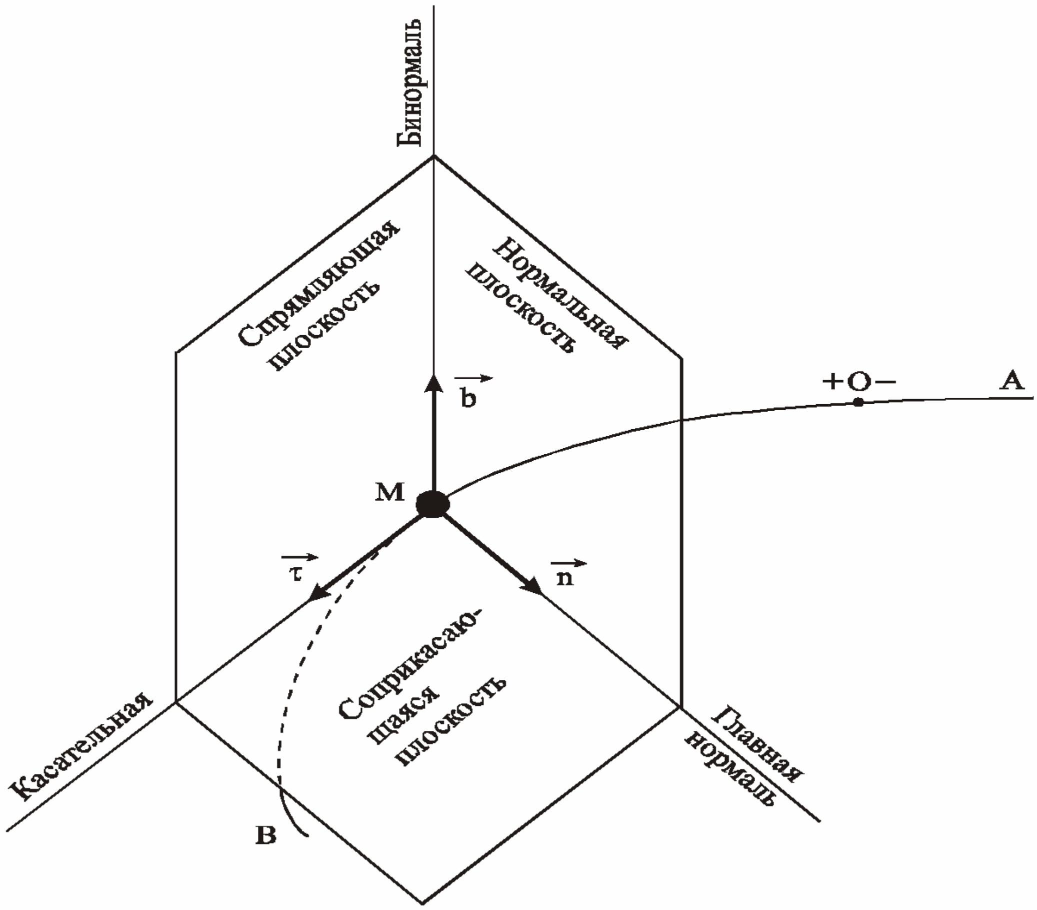


Рис. 5

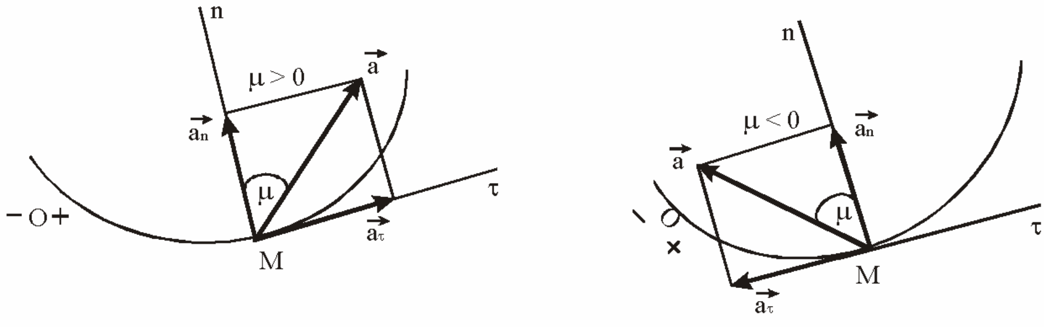
Определение ускорения при естественном способе задания движения точки

При естественном способе задания движения точки вектор $\vec{a}$ определяют по его проекции на оси Mτnb, имеющие начало в точке M и движущиеся вместе с ней:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}; \qquad a_n = \frac{V^2}{\rho}; \qquad a_в = 0.$$

Проекция ускорения точки на касательную равна первой производной от численной величины скорости или второй производной от криволинейной координаты точки по времени, а проекция ускорения на главную нормаль равна квадрату скорости, деленному на радиус кривизны траектории в данной точке кривой. Проекция ускорения на бинормаль равна нулю.

Отложим вдоль касательной Mτ и главной нормали Mn векторы $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$, численно равные a_τ и a_{n}. Эти векторы изображают касательную и нормальную составляющие ускорения точки. Составляющая $\vec{a}_n$ всегда направлена вглубь траектории точки (величина a_{n} всегда положительна), а составляющая $\vec{a}_\tau$ может быть направлена или в положительном или в отрицательном направлении оси Mτ , в зависимости от знака проекции a_τ (рис. 6а и б).



а) б)

Рис. 6

Вектор ускорения точки $\vec{a}$ изображается диагональю параллелограмма, построенного на составляющих $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ вектора $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, и по модулю равен:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{\rho}\right)^2}\ .$$

Направление вектора $\vec{a}$ определяют по формуле:

$$tg\,\mu = \frac{a_\tau}{a_n},$$

где μ есть угол отклонения вектора $\vec{a}$ от нормали Mn.

Кинематика твердого тела

Различают пять видов движения твердого тела:

1) поступательное движение;

2) вращательное движение;

3) плоское или плоскопараллельное движение;

4) сферическое движение;

5) общий случай движения твердого тела.

Поступательное и вращательное движения являются простейшими движениями твердого тела.

Поступательное движение твердого тела

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, проходящая через две точки тела, движется параллельно самой себе.

Изучение поступательного движения твердого тела основано на следующих теоремах: при поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории; в каждый момент времени все точки тела имеют равные скорости и ускорения.

Из этих теорем следует, что поступательное движение твердого тела будет вполне определено, если известно движение только одной какой-нибудь его точки, например, центра масс. Поэтому изучение поступательного движения твердого тела сводится к изучению какой-нибудь его точки, т.е. к задаче кинематики точки.

Уравнениями поступательного движения твердого тела являются уравнения любой его точки, например, центра тяжести:

$$x_c = f_1(t); \qquad y_c = f_2(t); \qquad z_c = f_3(t).$$

Вращательное движение твердого тела.

Вращательным движением вокруг оси будем называть движение твердого тела, при котором некоторая прямая, принадлежащая телу – ось вращения – остается неподвижной.

Каждая точка тела, не лежащая на оси вращения, описывает окружность, плоскость которой перпендикулярна к оси вращения и центр которой лежит на этой оси.

Рассмотрим вопрос об аналитическом определении закона вращательного движения. Для этого введем понятие об угле поворота.

Определим положение вращающегося тела таким образом: зададим положительное направление оси z, через эту ось проведем две полуплоскости, неподвижную P и подвижную Q, связанную с твердым телом и вращающуюся вместе с ним. Двугранный угол φ между этими полуплоскостями, отсчитываемый от неподвижной полуплоскости P к подвижной Q, называется углом поворота тела. Условимся считать этот угол положительным, если, смотря с положительного направления *z*, можно увидеть его отложенным против движения стрелки часов. Измеряется угол φ в радианах (рис. 7).

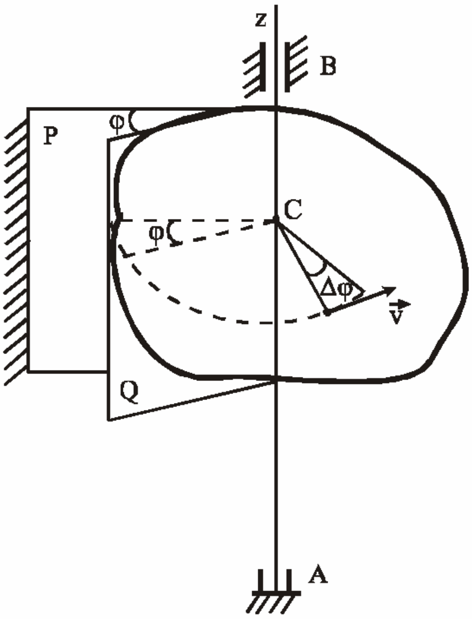


Рис. 7

Угол φ, определяя положение подвижной полуплоскости, определяет положение всего вращающего тела. Поэтому его можно рассматривать как угловую координату тела.

При вращении тела угол поворота φ изменяется в зависимости от времени, т.е. является функцией времени t

$$\varphi = f(t).$$

Полученное уравнение называется уравнением или законом вращательного движения тела в любой момент времени.

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела являются угловая скорость ω и угловое ускорение ε этого тела.

Угловая скорость тела в данный момент времени численно равна первой производной от угла поворота по времени:

$$\omega = d\varphi / dt$$

Угловую скорость можно изобразить в виде вектора $\vec{\omega}$, численная величина которого $\omega = d\varphi / dt$ и который направлен вдоль оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки.

Угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости тела с течением времени:

Угловое ускорение тела в данный момент времени численно равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота по времени.

$$\varepsilon = d\omega / dt = d^2\varphi / dt^2 .$$

Угловое ускорение можно изобразить вектором $\vec{\varepsilon}$, направленным вдоль оси вращения. Направление $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением $\vec{\omega}$, когда тело вращается ускоренно и противоположно $\vec{\omega}$ при замедленном вращении.

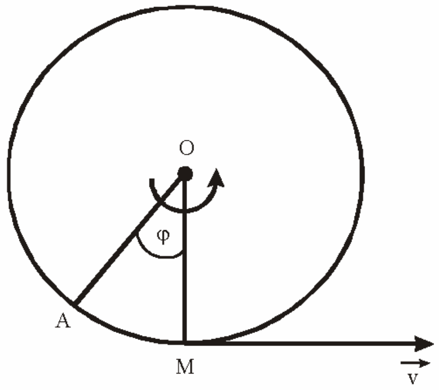


Рис. 8

Скорость и ускорение твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Рассмотрим движение какой-нибудь точки M вращающегося тела. Радиус окружности, которую описывает точка M, равный расстоянию этой точки от оси вращения тела, обозначим через R (рис. 8); точку пересечения этой окружности с неподвижной плоскостью P обозначим через A, а центр этой окружности – через O.

Предположим, что тело вращается в положительном направлении, т.е. в направлении возрастания угла φ.

Будем определять положение точки M на ее траектории дуговой координатой s, т.е. длиной дуги OM, отсчитываемой от неподвижной точки О, причем за положительное направление отсчета дуги s примем положительное направление отсчета угла φ.

Тогда $s = \varphi R$, отсюда находим скорость точки М:

$$V = ds/dt = R\frac{d\varphi}{dt}$$

или

$$V = R\omega . \tag{6}$$

Итак, модуль скорости вращающегося тела равен произведению абсолютного значения угловой скорости тела на расстояние этой точки от оси вращения.

Скорость направлена по касательной к окружности, которую описывает точка М.

Так как для всех точек тела ω имеет в данный момент времени одно и то же значение, то из формулы (6) следует, что линейные скорости вращающегося тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения.

Для нахождения ускорения точки М воспользуемся формулами:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}; \qquad a_n = \frac{V^2}{\rho}.$$

В нашем случае:

$$a_\tau = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}; \qquad a_n = \frac{(\omega R^2)}{R^2} = \omega^2 R$$

или

$$\left.\begin{aligned} a_\tau &= R\varepsilon; \\ a_n &= \omega^2 R. \end{aligned}\right\}$$

Касательное ускорение направлено по касательной к траектории в сторону движения, если тело вращается ускоренно, или в обратную, если тело вращается замедленно. Нормальное ускорение направлено всегда по радиусу к оси вращения (рис. 9).

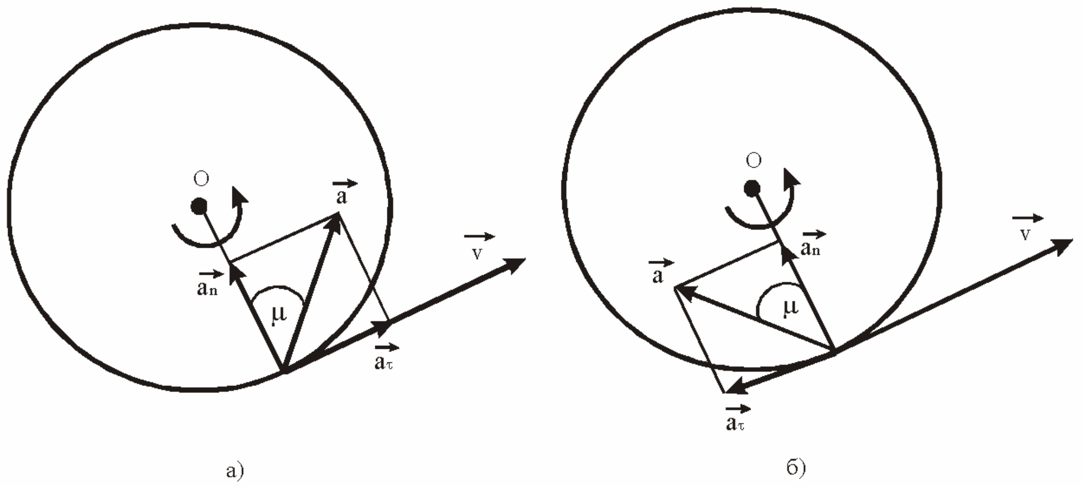


Рис. 9

Полное ускорение точки М будет:
$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{R^2\varepsilon^2 + R^2\omega^4}$$

или $a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

Отклонение вектора полного ускорения от радиуса описываемой точкой окружности определяется углом μ , который вычисляется по формуле:

$$tg\mu = \frac{|a_\tau|}{a_n} \quad \text{или} \quad tg\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

Так как ω и ε для всех точек тела в данный момент времени имеют одно и то же значение, то ускорения всех точек вращающегося тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения и образуют в данный момент времени один и тот же угол μ с радиусами описываемых ими окружностей.

Плоскопараллельное движение твердого тела

Плоскопараллельным, или плоским, называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости.

Примерами такого движения являются: 1) качение колеса по прямолинейному рельсу; 2) движение шатуна кривошипно-шатунного механизма.

Изучение плоскопараллельного движения тела сводится к изучению движения плоской фигуры, движущейся в своей плоскости.

Любое непоступательное перемещение плоской фигуры в ее плоскости можно рассматривать как совокупность двух перемещений: поступательного перемещения плоской фигуры вместе с произвольной точкой, называемой полюсом, и поворота вокруг полюса. При этом поступательное перемещение зависит от выбора полюса, а величина угла поворота от выбора полюса не зависит. От выбора полюса не будет зависеть ни угловая скорость, ни угловое ускорение вращательного движения.

Уравнения плоскопараллельного движения твердого тела:

$$\begin{cases} x_A = f_1(t); \\ y_A = f_2(t); \\ \varphi = f_3(t). \end{cases}$$

Поступательная часть плоскопараллельного движения тела описывается первыми двумя уравнениями, а вращение вокруг полюса – третьим уравнением.

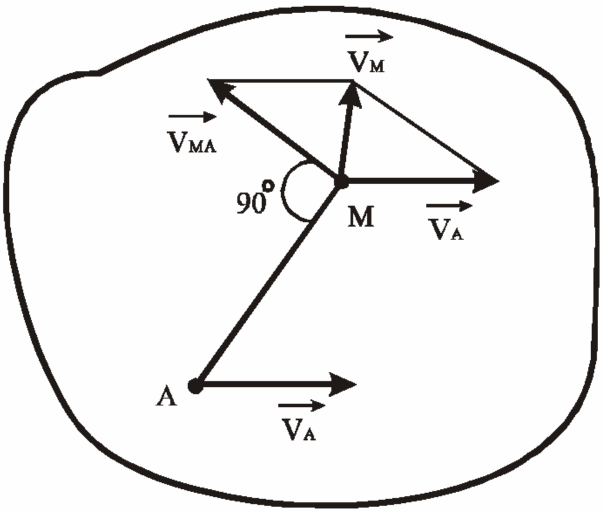


Рис. 10

Скорость любой точки M тела геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки A, принятой за полюс, и скорости точки M в ее вращении вместе с телом вокруг этого полюса:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}.$$

Модуль и направление скорости находятся построением соответствующего параллелограмма (рис. 10).

Для определения скоростей точек плоской фигуры целесообразно использовать следующие методы.

Один из таких методов дает теорема: проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, соединяющую эти точки, равны друг другу.

Рассмотрим какие-нибудь две точки A и B тела (рис. 11). Принимая точку A за полюс, получаем $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$.

Проектируя обе части этого равенства на линию AB и учитывая, что $\vec{V}_{BA} \perp AB$, находим:

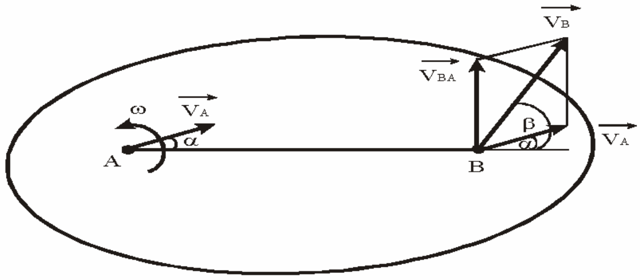


Рис. 11

$$V_B \cos\beta = V_A \cos\alpha .$$

Таким образом, теорема доказана.

Эта теорема позволяет легко находить скорость данной точки тела, если известны направление движения этой точки и скорость какой-нибудь другой точки того же тела.

Второй, простой и наглядный, метод определения скоростей тела при плоскопараллельном движении основан на понятии о мгновенном центре скоростей.

Мгновенным центром скоростей называется точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Если тело движется непоступательно, то такая точка в каждый момент времени t существует и притом единственная.

Пусть в момент времени t точки A и B тела имеют скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$, не параллельные друг другу (рис. 12). Тогда точка P, лежащая на пересечении перпендикуляров Aa к вектору $\vec{V}_A$ и Bв к вектору $\vec{V}_B$, будет мгновенным центром скоростей, т.к. $\vec{V}_P = 0$.

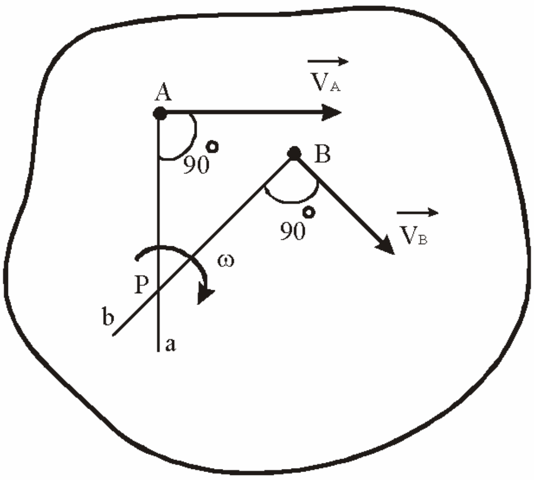


Рис. 12

Точка неподвижной плоскости, с которой совпадает в данный момент времени мгновенный центр скоростей P, называется мгновенным центром вращения фигуры.

Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей.

Если в момент времени t точку P принять за полюс, то скорость точки A будет равна $\vec{V}_A = \vec{V}_P + \vec{V}_{AP} = \vec{V}_{AP}$.

Т.к. $\vec{V}_P = 0$, такой же результат получится для любой другой точки тела. Следовательно, скорость любой точки тела равна ее вращательной скорости вокруг мгновенного центра скоростей P.

При этом $V_A = \omega \cdot PA \qquad (\vec{V}_A \perp PA) \qquad (7)$

$$V_B = \omega \cdot PB \qquad (\vec{V}_B \perp PB)$$

Из равенства (7) следует:

$$\frac{V_A}{PA} = \frac{V_B}{PB},$$

т.е. скорости точек тела пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей.

Из формулы (7) видно, что угловая скорость тела равна в каждый данный момент времени отношению скорости какой-нибудь точки плоской фигуры к ее расстоянию от мгновенного центра:

$$\omega = \frac{V_B}{PB}.$$

Следует, однако, все время отчетливо представлять себе отличие плоского движения от вращательного вокруг неподвижной оси, заключающееся в том, что в плоском движении положение центра вращения в каждый момент меняется.

Следовательно, плоское движение в целом представляет собой последовательный ряд мгновенных вращений вокруг центров, занимающих различные положения.

Ускорения точек плоской фигуры

Ускорение любой точки М тела при плоскопараллельном движении (так же, как и скорость) складывается из ускорений, которые она получает при поступательном и вращательном движениях этого тела:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}.$$

При этом для ускорения $\vec{a}_{\text{MA}}$ точки М во вращательном движении вокруг полюса А получаем:

$$a_{MA} = MA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \qquad tg\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2},$$

где ω и ε – угловая скорость и угловое ускорение тела, μ – угол между направлением $\vec{a}_{MA}$ и отрезком МА.

Ускорение любой точки М тела геометрически складывается из ускорения какой-либо точки, принятой за полюс, и ускорения точки М в ее вращении вместе с телом вокруг этого полюса. Модуль и направление ускорения находятся построением соответствующего параллелограмма (рис. 13).

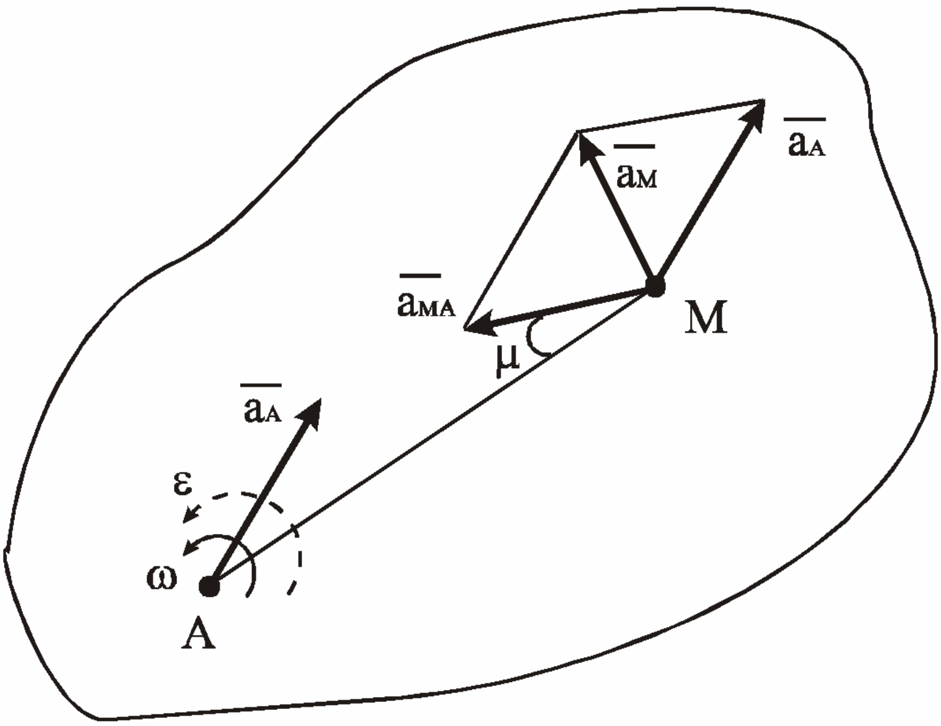


Рис. 13

При решении задач удобнее вектор $\vec{a}_{MA}$ заменять его касательной $(\vec{a}_{MA}^{\tau})$ и нормальной $(\vec{a}_{MA}^{n})$ составляющими, где

$$(\vec{a}_{MA}^{\tau}) = AM \cdot \varepsilon, \qquad (\vec{a}_{MA}^{n}) = AM \cdot \omega^2 .$$

Если полюс А движется непрямолинейно, то его ускорение будет складываться из касательного и нормального, и тогда

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^{n} + \vec{a}_{MA}^{\tau} + \vec{a}_{MA}^{n} .$$

Мгновенный центр ускорений

При непоступательном движении плоской фигуры в ее плоскости в каждый момент времени имеется точка Q, ускорение которой равно нулю. Эта точка называется мгновенным центром ускорений.

Определяется положение центра Q, если известны ускорение $\vec{a}_A$ какой-либо точки А и величины ω и ε, следующим образом.

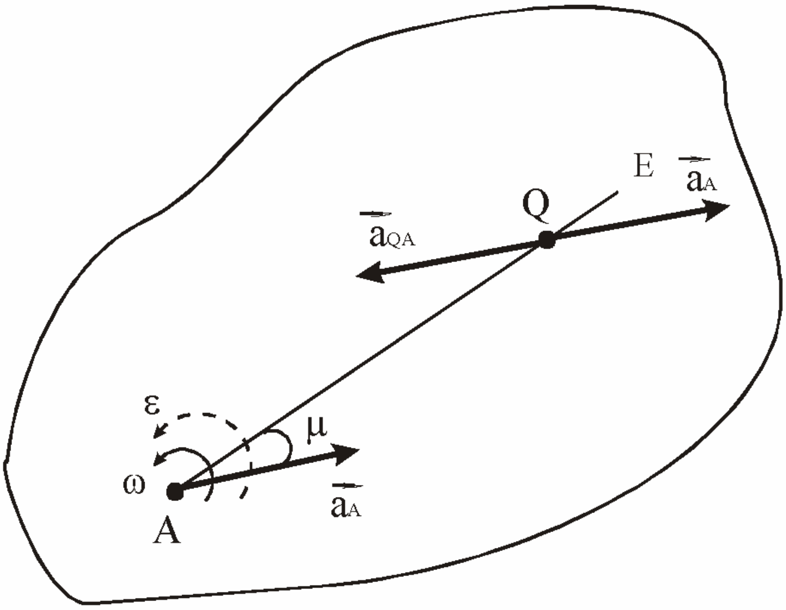


Рис. 14

1. Вычисляем величину угла μ по формуле:

$$tg\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

2. От точки A под углом μ к вектору $\vec{a}_A$ проводим прямую AE, при этом прямая AE должна быть отклонена от $\vec{a}_A$ на угол μ в сторону направления ε .

3. Вдоль AE откладываем отрезок AQ, равный

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Полученная точка Q будет мгновенным центром ускорений $\vec{a}_Q = \vec{a}_A + \vec{a}_{QA} = 0$:

$$a_{QA} = QA \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = a_A.$$

Вектор $\vec{a}_{QA}$ с линией AQ должен образовывать угол μ, $\vec{a}_{QA} = -\vec{a}_A$, $\vec{a}_Q = 0$.

Если точку Q выбрать за полюс, то ускорение любой точки M тела будет равно:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_Q + \vec{a}_{MQ} = \vec{a}_{MQ}, \qquad a_M = QM \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Ускорение любой точки тела равно ее ускорению во вращательном движении вокруг мгновенного центра ускорений Q:

$$\frac{a_M}{QM} = \frac{a_A}{QA}.$$

Ускорения точек тела пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра. В общем случае движения тела в данный момент времени положения мгновенного центра скоростей P и мгновенного центра ускорений Q не совпадают.

Сложное движение точки

В ряде случаев при решении задач механики движение точки (или тела) приходится рассматривать одновременно по отношению к двум системам отсчета, из которых одна считается условно неподвижной, а другая определенным образом движется по отношению к первой. Движение, совершаемое при этом точкой (или телом), называется составным, или сложным.

Движение точки по отношению к неподвижной системе отсчета называется абсолютным, а по отношению к подвижной системе отсчета – относительным. Движение подвижной системы отсчета по отношению к неподвижной называется переносным.

Траектория, скорость и ускорение точки окажутся различными в зависимости от того, рассматриваем ли мы ее абсолютное или относительное движение.

Траектория, описываемая точкой в ее абсолютном движении и наблюдаемая неподвижным наблюдателем, называется абсолютной траекторией. Траектория, описываемая точкой в ее относительном движении и воспринимаемая подвижным наблюдателем, называется относительной траекторией.

Скорость и ускорение точки в абсолютном движении называют абсолютной скоростью и абсолютным ускорением точки и обозначают $\vec{V}_a$ и $\vec{a}_a$.

Скорость и ускорение точки в относительном движении называют относительной скоростью и относительным ускорением точки и обозначают $\vec{V}_r$ и $\vec{a}_r$ (или $\vec{V}_{OTH}$ и $\vec{a}_{OTH}$).

Скорость и ускорение подвижной системы отсчета относительно неподвижной называют переносной скоростью и переносным ускорением и обозначают $\vec{V}_e$ и $\vec{a}_e$ (или $\vec{V}_{\Pi EP}$ и $\vec{a}_{\Pi EP}$).

Основная задача изучения составного движения состоит в установлении зависимостей между скоростями и ускорениями относительного, переносного и абсолютного движений точки.

Теорема о сложении скоростей: при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме ее переносной и относительной скоростей:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e .$$

Эту теорему называют правилом параллелограмма или треугольника скоростей.

Абсолютное ускорение точки при сложном движении определяется по формуле:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c ,$$

которая выражает теорему Кориолиса: абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, характеризующего изменение относительной скорости в относительном движении, переносного, характеризующего изменение переносной скорости в переносном движении, и кориолисова, характеризующего изменение относительной скорости в переносном движении и переносной скорости в относительном движении.

Если переносное движение поступательно, то $\omega_e = 0$ и $a_c = 0$. Тогда:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e .$$

Следовательно, при поступательном переносном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного и переносного ускорений.

Относительное и переносное ускорения точки вычисляются по известным формулам кинематики. Кориолисово ускорение вычисляется по формуле:

$$\vec{a}_c = 2 \times (\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r) .$$

Таким образом, кориолисово ускорение точки равно удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного движения на относительную скорость точки.

Если угол между векторами $\vec{V}_r$ и $\vec{\omega}_e$ обозначить через α, то по модулю:

$$a_c = 2\omega_e \cdot V_r \cdot \sin\alpha .$$

Направлен вектор $\vec{a}_c$ так же, как и вектор $\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$, т.е. перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\vec{\omega}_e$ и $\vec{V}_r$

в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение $\vec{\omega}_e$ с $\vec{V}_r$ видно происходящим против хода часовой стрелки (рис. 15).

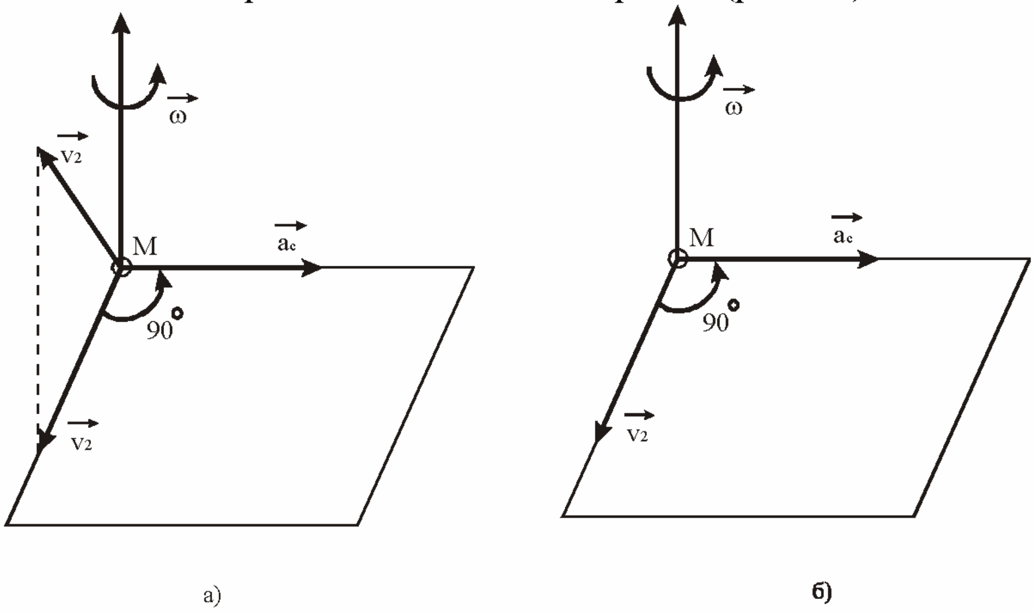


Рис. 15

Ускорение Кориолиса равно нулю в трех следующих случаях.

1. Если $\omega_e = 0$, т.е. в случае поступательного переносного движения или в моменты обращения в нуль угловой скорости непоступательного переносного движения.

2. Если $V_r = 0$, т.е. когда относительная скорость в данный момент времени обращается в нуль.

Если $\alpha = 0$ или $\alpha = 180^0$, т.е. когда относительное движение происходит по направлению, параллельному оси переносного вращения или если в данный момент времени вектор $\vec{V}_r$ параллелен этой оси.

§ 2. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Определение скоростей и ускорений материальной точки по заданным уравнениям движения

Задача К1

Под номером К1 помещены две задачи К1а и К1б, которые надо решить.

Задача К1а. Точка В движется в плоскости *xy* (рис. К1.0 – К1.9, табл К1; траектория точки на рисунках показана условно).

Закон движения точки задан уравнениями: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, где x и y выражены в см, t – в секундах.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени t_1= =1 с определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Зависимость $x = f_1(t)$ указана непосредственно на рисунках, а зависимость $y= f_2(t)$ дана в табл. К1 (для рис. К1.0 – К1.2 – в графе 2, для рис. К1.3 – К1.6 – в графе 3, для рис. К1.7 – К1.9 – в графе 4).

Задача К1б. Точка движется по дуге окружности радиуса R= =2 м по закону $s=f(t)$, заданному в табл. К1 в графе 5 (s – в метрах, t – в секундах), где s =AM – расстояние точки от некоторого начала A, измеренное вдоль дуги окружности. Определить скорость и ускорение точки в момент времени t_1 =1 с. Изобразить на рисунке векторы $\vec{V}$ и $\vec{a}$, считая, что точка в этот момент находится в положении M, а положительное направление отсчета s – от A к M.

Указания. Задача К1 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются скорость, касательное и нормальное ускорения точки при естественном способе задания ее движения. В задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени t_1 =1 с.

Таблица К1

Номер условия	$y = f_2(t)$, рис. К1.0 – К1.2	$y = f_2(t)$, рис. К1.3 – К1.6	$y = f_2(t)$, рис. К1.7 – К1.9	$s = f(t)$
1	2	3	4	5
0	$12\sin(\frac{\pi}{6}t)$	$2t^2 + 2$	$4\cos(\frac{\pi}{6}t)$	$4\cos(\frac{\pi}{6}t)$
1	$6\cos(\frac{\pi}{3}t)$	$8\sin(\frac{\pi}{4}t)$	$6\cos^2(\frac{\pi}{6}t)$	$2\sin(\frac{\pi}{3}t)$
2	$-3\sin^2(\frac{\pi}{6}t)$	$(2+t)^2$	$4\cos(\frac{\pi}{3}t)$	$6t - 2t^2$
3	$9\sin(\frac{\pi}{6}t)$	$2t^3$	$10\cos(\frac{\pi}{6}t)$	$-2\sin(\frac{\pi}{6}t)$
4	$3\cos(\frac{\pi}{3}t)$	$2\cos(\frac{\pi}{4}t)$	$-4\cos^2(\frac{\pi}{6}t)$	$4\cos(\frac{\pi}{3}t)$
5	$10\sin(\frac{\pi}{6}t)$	$2 - 3t^2$	$12\cos(\frac{\pi}{3}t)$	$-3\sin(\frac{\pi}{3}t)$
6	$6\sin^2(\frac{\pi}{6}t)$	$2\sin(\frac{\pi}{4}t)$	$-3\cos(\frac{\pi}{6}t)$	$3t^2 - 10t$
7	$-2\sin(\frac{\pi}{6}t)$	$(t+1)^3$	$-8\cos(\frac{\pi}{3}t)$	$-2\cos(\frac{\pi}{3}t)$
8	$9\cos(\frac{\pi}{3}t)$	$2 - t^3$	$9\cos(\frac{\pi}{6}t)$	$3\sin(\frac{\pi}{6}t)$
9	$-8\sin(\frac{\pi}{6}t)$	$4\cos(\frac{\pi}{4}t)$	$-6\cos(\frac{\pi}{3}t)$	$-2\cos(\frac{\pi}{6}t)$

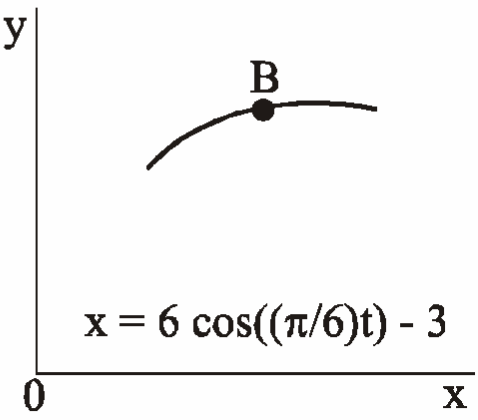


Рис. К1.0

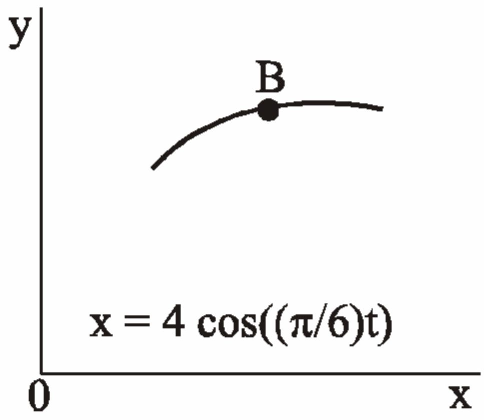


Рис. К1.1

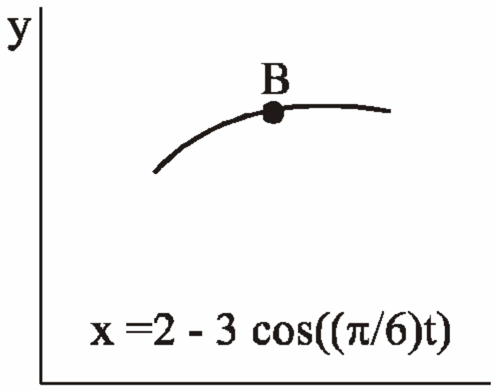


Рис. К1.2

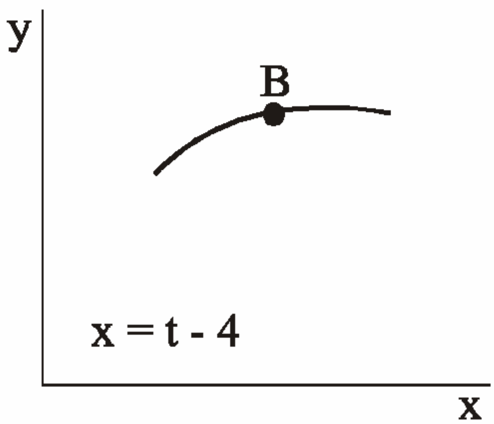


Рис. К1.3

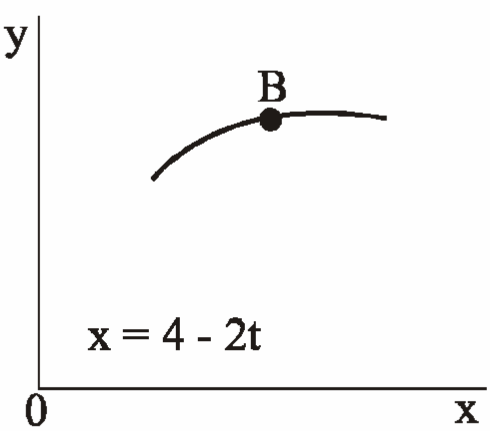


Рис. К1.4

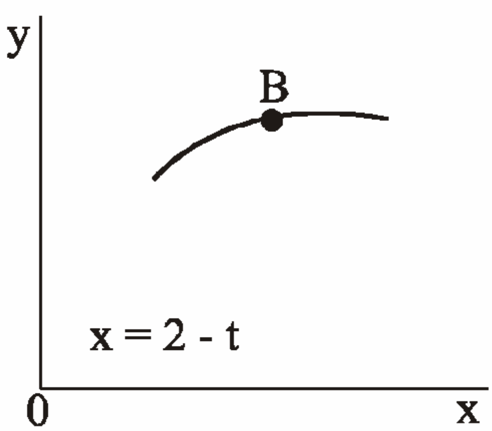


Рис. К1.5

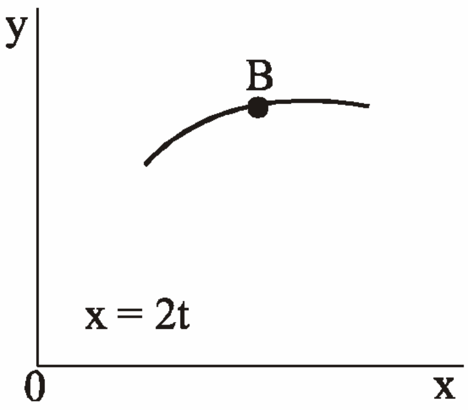


Рис. К1.6

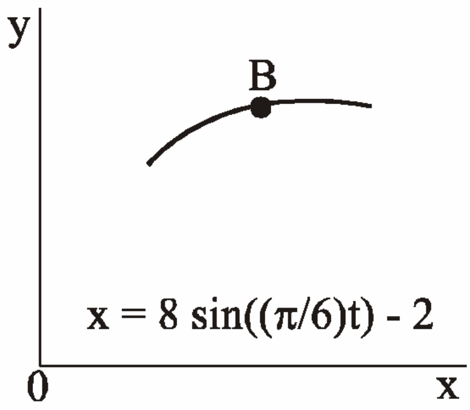


Рис. К1.7

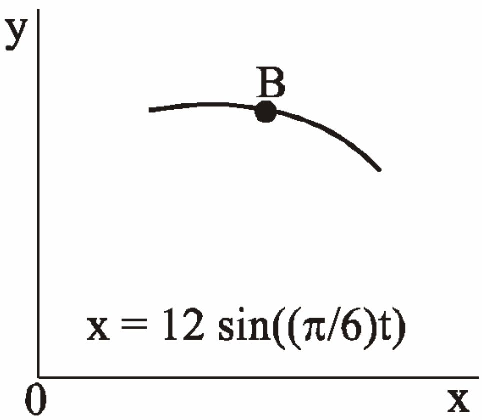


Рис. К1.8

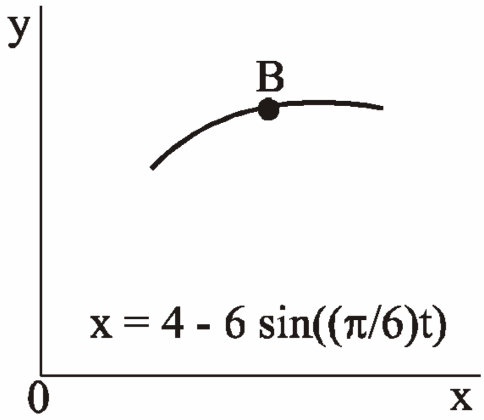


Рис. К1.9

Пример К1а. *Даны* уравнения движения точки в плоскости xy:

$x = 3t$,

$y = 4t^2 - 1$

(x, y – в см, t – в секундах).

Определить уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1$ с найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение.

1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t:

$t = x/3$,

$y = 4(x/3)^2 - 1$.

Отсюда окончательно находим уравнение траектории точки (параболы, рис. К1а):

$y = 4/9\,x^2 - 1.$

2. Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$V_x = dx/dt = 3,$

$V_y = dy/dt = 8t,$

$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ и при $t_1 = 1$ с,

$$V_{1x} = 3 \text{ см/с},$$
$$V_{1y} = 8 \text{ см/с},$$
$$V_1 = 8{,}54 \text{ см/с}. \qquad (1)$$

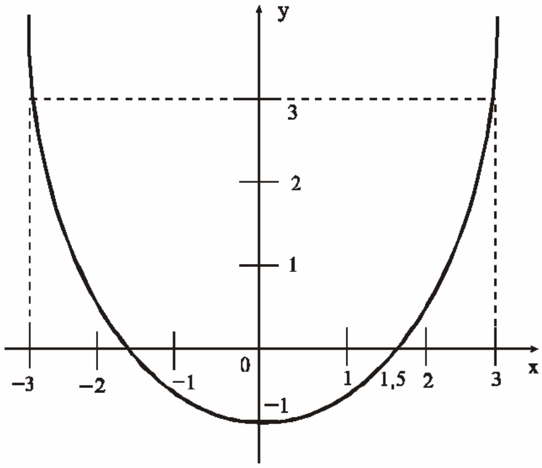


Рис. К1а

3. Аналогично найдем ускорение точки:

$a_x = dV_x/dt = 0,$

$a_y = dV_y/dt = 8,$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

и при $t_1 = 1$ с

$a_{1x} = 0$; $a_{1y} = 8$ см/с^2;

$$a_1 = 8 \text{ см/с}^2. \qquad 2)$$

4. Касательное ускорение найдем, дифференцируя по времени равенство:

$V^2 = V_x^2 + V_y^2.$

Получим: $2V\,dV/dt = 2V_x\,dV_x/dt + 2V_y\,dV_y/dt,$

откуда:

$$a_\tau = dV/dt = \left(V_x a_x + V_y a_y\right)/V. \qquad (3)$$

Числовые значения всех величин, входящих в правую часть выражения (3), определены и даются равенствами (1) и (2).

Подставив в (3) эти числа, найдем сразу, что при $t_1 = 1$ с

$a_{1\tau} = 7{,}49$ см/с^2.

5. Нормальное ускорение точки:

$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}.$

Подставляя сюда найденные числовые значения a_1 и $a_{1\tau}$, получим, что при $t_1 = 1$ с

$a_{1n} = 2{,}81$ см/с^2.

6. Радиус кривизны траектории $\rho = V^2/a_n$.

Подставляя сюда числовые значения V_1 и a_{1n}, найдем, что при $t_1 = 1$ с

$\rho_1 = 25{,}95$ см.

Ответ: $V_1 = 8{,}54$ см/с, $a_1 = 8$ см/с^2, $a_{1\tau} = 7{,}49$ см/с^2, $a_{1n} = 2{,}81$ см/с^2, $\rho_1 = 25{,}95$ см.

Пример К1б

Точка движется по дуге окружности радиуса R =1 м по закону $S = 0{,}4\sin(\pi t)$ (s – в метрах, t – в секундах), где s = AM (рис. К1б). *Определить* скорость и ускорение точки в момент времени $t_1 = 1$ с.

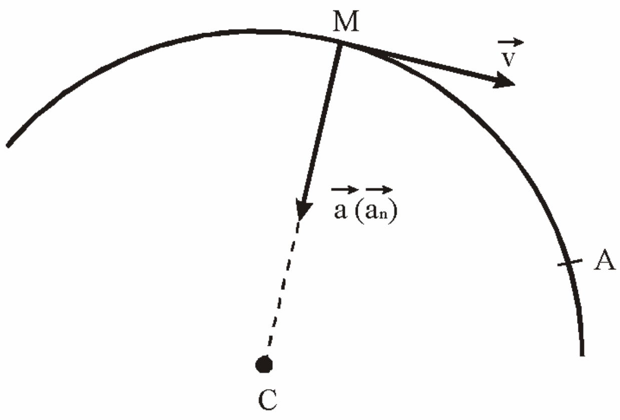


Рис. К1б

Решение.

Определяем скорость точки:

$V = ds/dt = 0{,}4\cos(\pi t)$.

При $t_1 = 1$ с получим $V_1 = 0{,}4\pi = -1{,}26$ м/с.

Ускорение находим по его касательной и нормальной составляющим:

$a_\tau = dV/dt = -0{,}4\pi^2\sin(\pi t)$,

$a_n = V^2/\rho = V^2/\mathrm{R}$.

При $t_1 = 1$ с получим, учтя, что R = 1 м

$a_{1\tau} = 0$,

$a_{1n} = 1{,}59$ м/с^2,

тогда ускорение точки при $t_1 = 1$ с будет:

$$a_1 = a_1 = \sqrt{a_{1\tau}^2 + a_{1n}^2} = a_{1n} = 1{,}59 \text{ м/с}^2.$$

Изобразим на рис. К1б векторы $\vec{V}_1$, $\vec{a}_1$, учитывая знак V_1 и считая положительным направление от A к M.

Кинематика поступательного и вращательного движений

Задача К2

Механизм состоит из ступенчатых колес 1-3, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки и груза 5, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес (рис. К2.0 – К2.9, табл. К2). Радиусы ступеней колес равны соответственно: у колеса 1 – r_1 =2 см, R_1 =4 см, у колеса 2 – r_2 = 6см, R_2 =8 см, у колеса 3 – r_3 = 12 см, R_3 =16 см. На ободьях колес расположены точки A, B и C.

В графе «Дано» таблицы указан закон движения или закон изменения скорости ведущего звена механизма, где $\varphi_1(t)$ – закон вращения колеса 1, $s_4(t)$ – закон движения рейки 4, $\omega_2(t)$ – закон изменения угловой скорости колеса 2, $V_5(t)$ – закон изменения скорости груза 5 и т.д. (везде φ выражено в радианах, s – в сантиметрах, t – в секундах). Положительное направление для φ и ω против хода часовой стрелки, для s_4, s_5 и V_4, V_5 – вниз.

Определить в момент времени t_1 =2 с указанные в графах «Найти» скорости (V – линейные, ω – угловые) и ускорения (a – линейные, ε – угловые) соответствующих точек или тел (V_5 – скорость груза 5 и т.д.).

Указания. Задача К2 – на исследование вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. При решении задачи учесть, что, когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же, а когда два колеса связаны ременной передачей, то скорости всех точек ремня и, следовательно, точек, лежащих на ободе каждого из этих колес, в данный момент времени численно одинаковы; при этом считается, что ремень по ободу колеса не скользит.

Таблица К2

Номер условия	Дано	Найти	
		скорости	ускорения
0	$S_4 = 4(7t - t^2)$	V_B, V_C	ε_2, a_A, a_5
1	$V_5 = 2(t^2 - 3)$	V_A, V_C	ε_3, a_B, a_4
2	$\varphi_1 = 2t^2 - 9$	V_4, ω_2	ε_2, a_C, a_5
3	$\omega_2 = 7t - 3t^2$	V_5, ω_3	ε_2, a_A, a_4
4	$\varphi_3 = 3t - t^2$	V_4, ω_1	ε_1, a_B, a_5
5	$\omega_1 = 5t - 2t^2$	V_5, V_B	ε_2, a_C, a_4
6	$\varphi_3 = 2(t^2 - 3t)$	V_4, ω_2	ε_1, a_C, a_5
7	$V_4 = 3t^2 - 8$	V_A, ω_3	ε_3, a_B, a_5
8	$S_5 = 2t^2 - 5t$	V_4, ω_3	ε_1, a_C, a_4
9	$\omega_3 = 8t - 3t^2$	V_5, V_B	ε_2, a_A, a_4

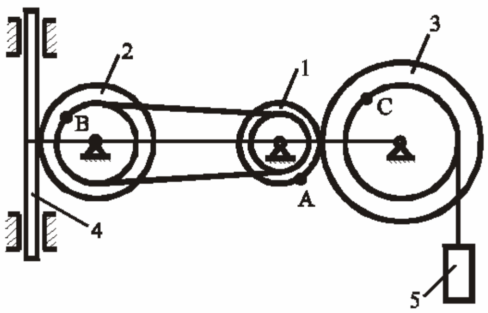


Рис. К2.0

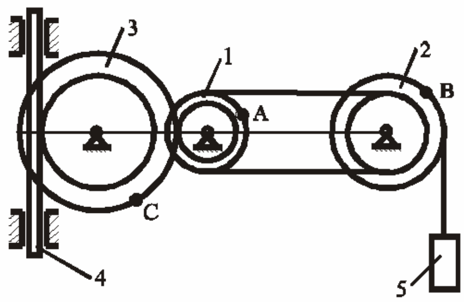


Рис. К2.1

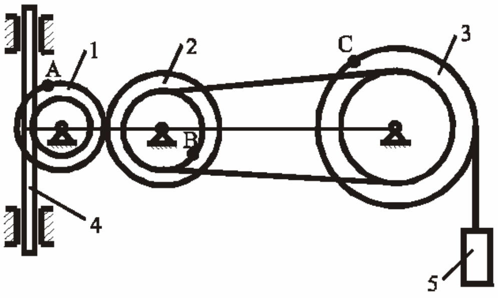


Рис. К2.2

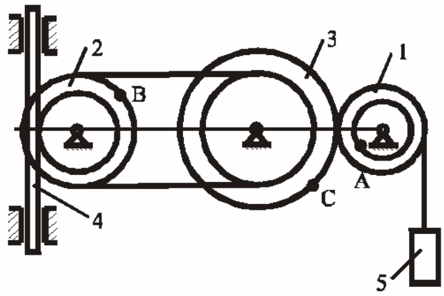


Рис. К2.3

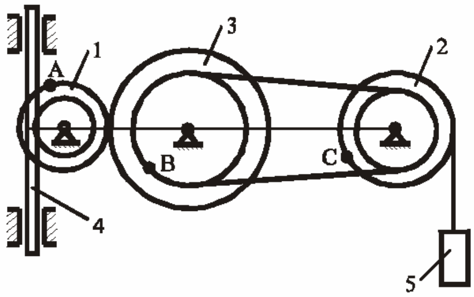


Рис. К2.4

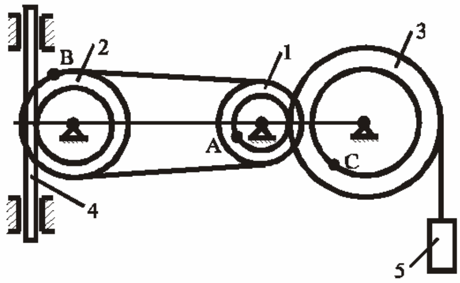


Рис. К2.5

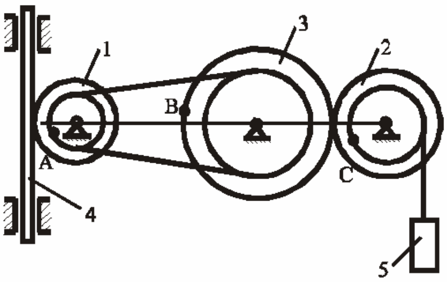


Рис. К2.6

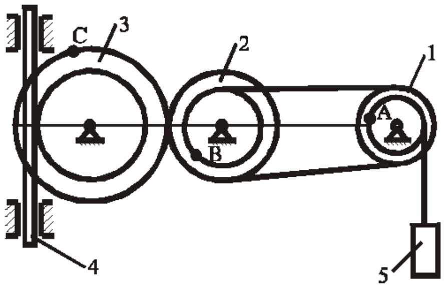


Рис. К2.7

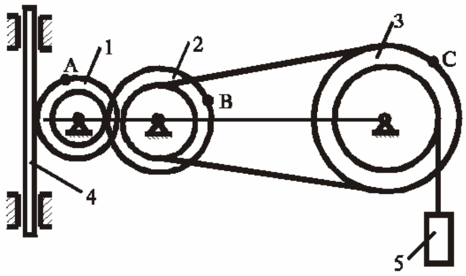


Рис. К2.8

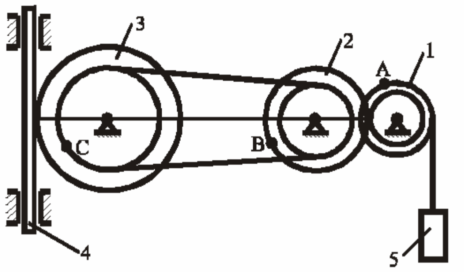


Рис. К2.9

Пример К2.

Рейка 4 находится в зацеплении со ступенчатым колесом 3, связанным ременной передачей с колесом 2, которое находится в зацеплении с колесом 1, на которое намотана нить с грузом 5 (рис. К2). Закон изменения угловой скорости колеса 1 – $\omega_1 = f(t)$.

Дано: R_1 =4 см, r_1= 2 см, R_2 =8 см, r_2 =6 см, r_3 =12 см, R_3 = = 16 см, $\omega_1 = 5t - 4t^2$, t_1=1 с.

Определить: V_5, V_B, ε_2, a_C, a_4 в момент времени $t = t_1$.

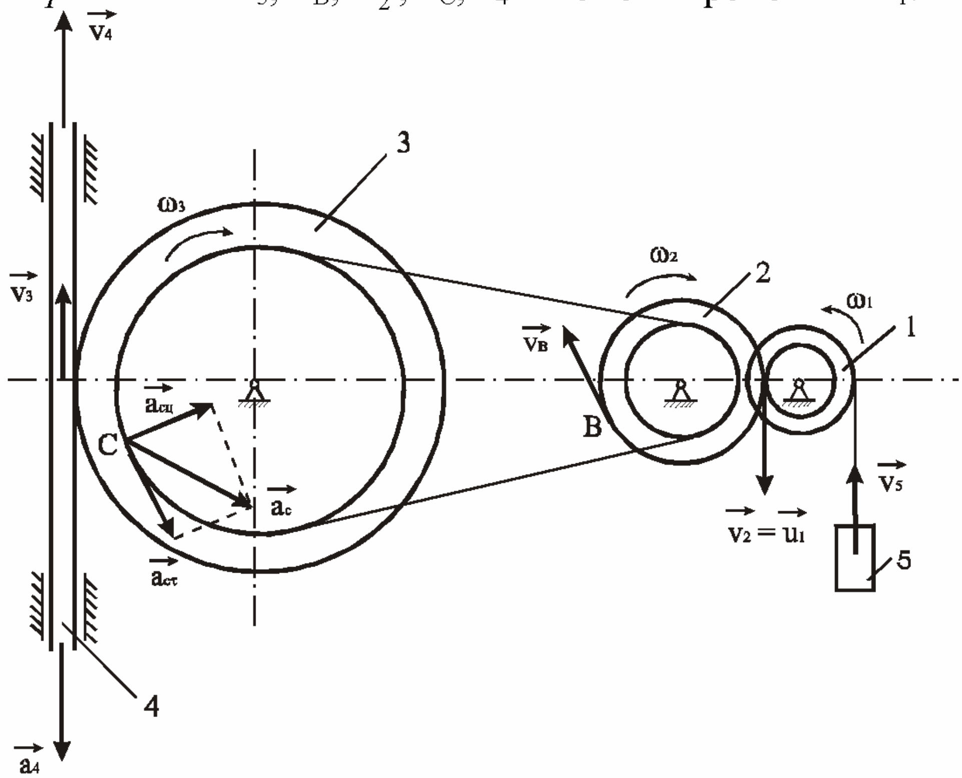


Рис. К2

Решение.

Условимся обозначать скорости точек, лежащих на внешних ободах колес (радиуса R_i) через V_i, а точек, лежащих на внутренних ободах (радиуса r_i), – через u_i.

1. Определяем V_5. Так как $V_5 = V_1$, то $V_5 = V_1 = \omega_1 \cdot R_1$ = $= (5t - 4t^2)\, R_1$.

Для момента времени t_1=1 с

V_5 =4 см/с.

2. Определяем V_B. Так как колеса 1 и 2 находятся в зацеплении, то $V_2 = u_1$ и $\omega_2 \cdot R_2 = \omega_1 \cdot r_1$.

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{r_1}{R_2} = \frac{1}{4}\left(5t - 4t^2\right).$$

Тогда $V_B = \omega_2 \cdot R_2$ $=2(5t - 4t^2)$.

Для момента времени t_1=1 с V_B=2 см/с.

3. Определяем ε_2. По определению углового ускорения $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \frac{5}{4} - 2t$.

Для момента времени t_1=1 с ε_2 =-3/4 = -0,75 с$^{-2}$.

4. Определяем a_C.

Для точки С $\vec{a}_C = \vec{a}_{C\tau} + \vec{a}_{Cn}$, где численно $a_{C\tau} = \varepsilon_3 \cdot r_3$, $a_{Cn} = \omega_3^2 \cdot r_3$.

Поэтому необходимо найти ω_3 и ε_3. Так как колеса 2 и 3 соединены ременной передачей, то $u_2 = u_3$,

$$\omega_2 \cdot r_2 = \omega_3 \cdot r_3,$$

$$\omega_3 = \omega_2 \cdot \frac{r_2}{r_3} = \frac{1}{8}\left(5t - 4t^2\right),$$

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = \frac{1}{8}(5 - 8t).$$

Для момента времени t_1=1 с

ω_3 =0,125 с$^{-1}$; ε_3 = -0,375 с$^{-2}$.

Тогда a_{Cn} =0,19 см/с^2, $a_{C\tau}$ =-4,5 см/с^2,

$a_C = \sqrt{a_{C\tau}^2 + a_{Cn}^2}$ =4,5 см/с^2.

5. Определяем a_4. Так как рейка 4 и колесо 3 находятся в зацеплении, то V_4=V_3,

$$V_4 = \omega_3 R_3 = 2(5t - 4t^2).$$

Тогда $a_4 = \dot{V}_4 = 2(5 - 8t)$.

Для момента времени t_1=1 с a_4 = -6 см/с^2.

Ответ: V_5 =4 см/с, V_B=2 см/с, ε_2 = -0,75 с$^{-2}$, a_C =4,5 см/с^2, a_4= =-6 см/с^2.

Определение скоростей и ускорений точек тела при плоском движении

Задача К3

Плоский механизм состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна B или E (рис. К3.0 – К3.7) или из стержней 1, 2, 3 и ползунов B и E (рис. К3.8, К3.9), соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1, O_2 шарнирами; точка D находится в середине стержня AB. Длины стержней равны соответственно l_1 =0,4 м, l_2 =1,2 м, l_3 =1,4 м, l_4 =0,6 м. Положение механизма определяется углами $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \theta$. Значения этих углов и других заданных величин указаны в табл. К3а (для рис. К3.0 – К3.4) или в табл. К3б (для рис. К3.5 – К3.9); при этом в табл. К3а ω_1, ω_4 – величины постоянные.

Определить величины, указанные в таблицах в графах «Найти».

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие углы: по ходу или против хода часовой стрелки (например, угол γ на рис. К3.8 следует отложить от DB против хода часовой стрелки, а на рис. К3.9 – по ходу часовой стрелки и т.д.).

Построение чертежа следует начинать со стержня, направление которого определяется углом α; ползун с направляющими для большей наглядности изобразить так, как в примере К3 (см. рис. К3б).

Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против хода часовой стрелки, а заданные скорость $\vec{V}_B$ и ускорение $\vec{a}_B$ – от точки B к *b* (на рис. К3.5 – К3.9).

Указания. Задача К3 – на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При ее решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему (или это понятие) к каждому звену механизма в отдельности.

При определении ускорений точек механизма исходить из векторного равенства $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^{n}$, где A – точка, ускорение $\vec{a}_A$ которой или задано, или непосредственно определяется по условиям задачи (если точка А движется по дуге окружности, то $\vec{a}_A = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n$); В – точка, ускорение $\vec{a}_B$ которой нужно определить.

Таблица К3а

(к рис. К3.0 –К3.4)

Номер условия	Углы, град.					Дано		Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/с	ω_4, 1/с	V точек	ω звена	a точки	ε звена
0	0	60	30	0	120	6	-	B, E	DE	B	AB
1	90	120	150	0	30	-	4	A, E	AB	A	AB
2	30	60	30	0	120	5	-	B,E	AB	B	AB
3	60	150	150	90	30	-	5	A, E	DE	A	AB
4	30	30	60	0	150	4	-	D, E	AB	B	AB
5	90	120	120	90	60	-	6	A, E	AB	A	AB
6	90	150	120	90	30	3	-	B, E	DE	B	AB
7	0	60	60	0	120	-	2	A, E	DE	A	AB
8	60	150	120	90	30	2	-	D, E	AB	B	AB
9	30	120	150	0	60	-	8	A, E	DE	A	AB

Таблица К3б

(к рис. К3.5 –К3.9)

Номер условия	Углы, град.					Дано				Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1 1/с	ε_1 1/с^2	V_B, м/с	a_B, м/с^2	V точек	ω звена	a точки	ε звена
0	120	30	30	90	150	2	4	-	-	B, E	AB	B	AB
1	0	60	90	0	120	-	-	4	6	A, E	DE	A	AB
2	60	150	30	90	30	3	5	-	-	B, E	AB	B	AB
3	0	150	30	0	60	-	-	6	8	A, E	AB	A	AB
4	30	120	120	0	60	4	6	-	-	B, E	DE	B	AB
5	90	120	90	90	60	-	-	8	10	D, E	DE	A	AB
6	0	150	90	0	120	5	8	-	-	B, E	DE	B	AB
7	30	120	30	0	60	-	-	2	5	A, E	AB	A	AB
8	90	120	120	90	150	6	10	-	-	B, E	DE	B	AB
9	60	60	60	90	30	-	-	5	4	D,E	AB	A	AB

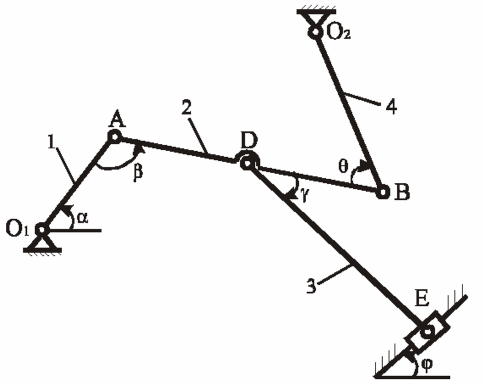


Рис. 3.0

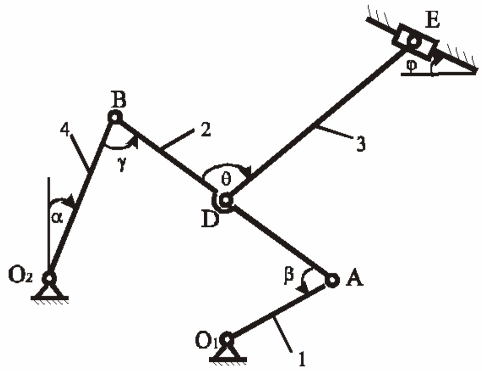


Рис.3.1

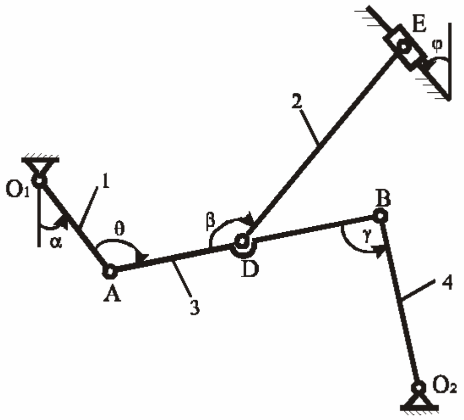


Рис. К3.2

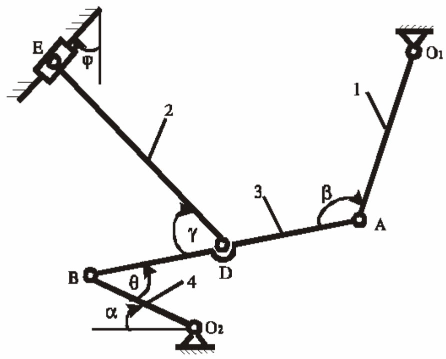


Рис. К3.3

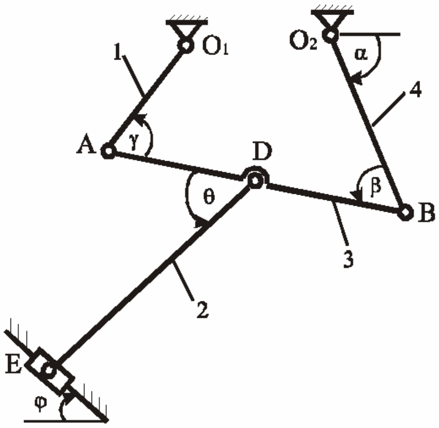


Рис. К3.4

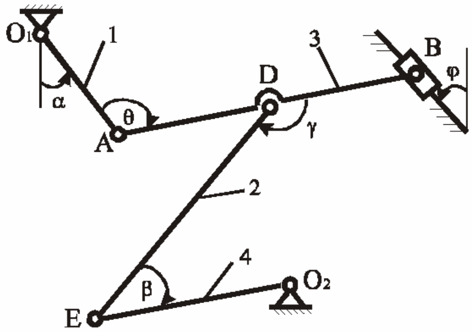


Рис. К3.5

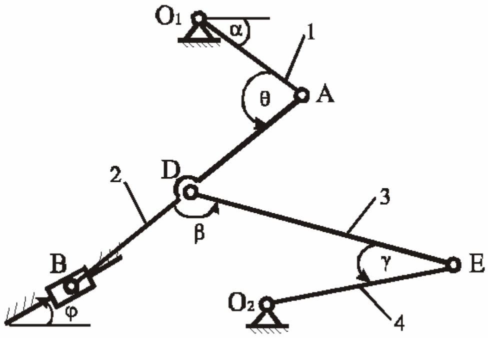


Рис. К3.6

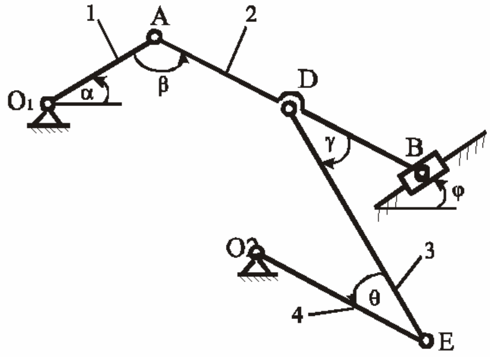


Рис. К3.7

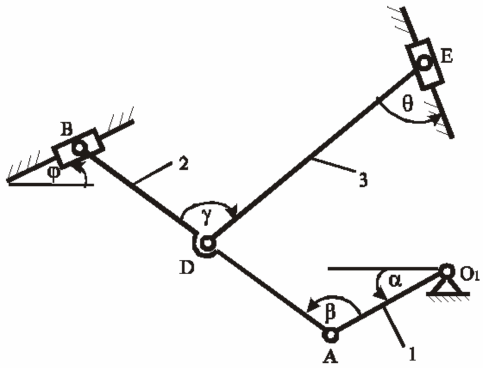


Рис. К3.8

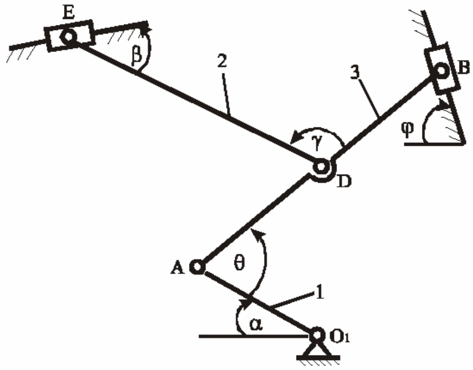


Рис. К3.9

Пример К3

Механизм состоит из стержней 1, 2, 3, и ползунов В и Е, соединенных друг с другом и с неподвижной опорой O_1 (рис. К3а).

Дано: $\alpha = 90°$; $\beta = 120°$; $\gamma = 90°$; $\varphi = 90°$; $\theta = 60°$;

V_B = 8 м/с; a_B =10 м/с^2; l_1=0,4 м; l_2=1,2 м; l_3 =1,4 м, AD = DB.

Определить: V_D, V_E, ω_{DE} , a_A, ε_{AB} .

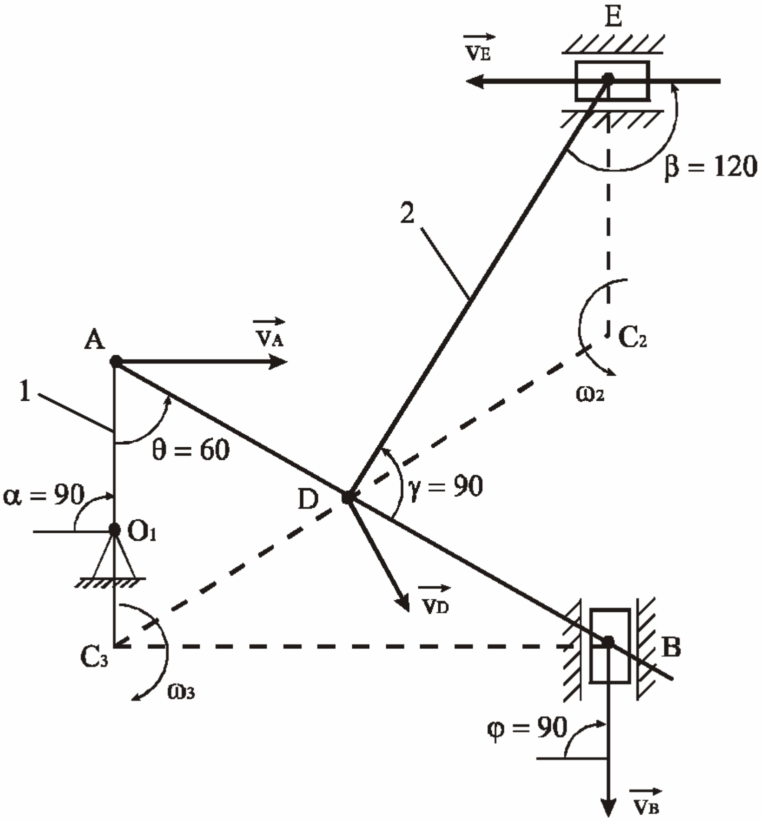


Рис. К3а

Решение.

1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. К3а).

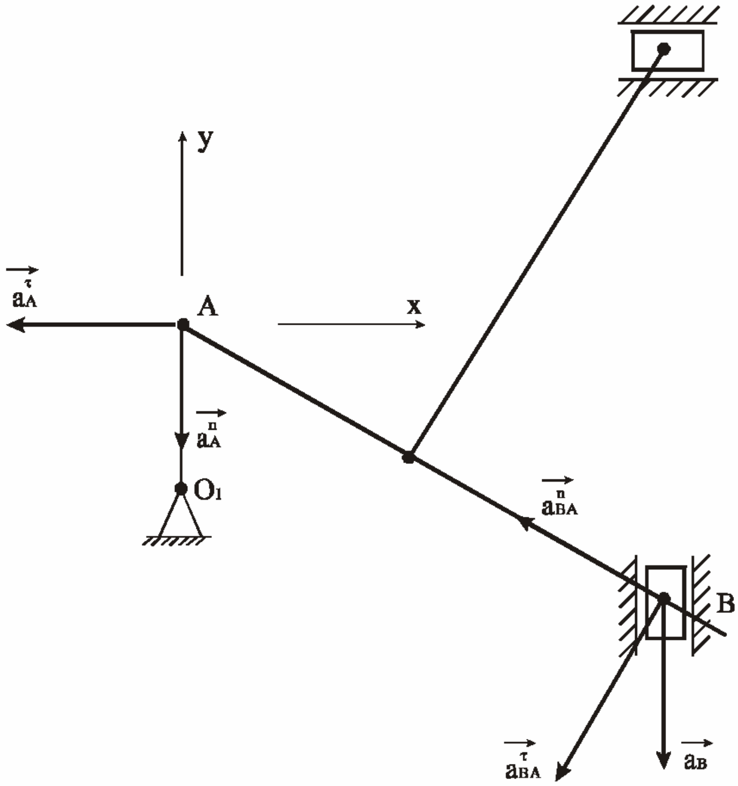


Рис. К3б

2. Определяем V_D. Точка D принадлежит стержню AB. Для определения V_D сначала найдем величину и направление скорости $\vec{V}_A$ точки А. $\vec{V}_A \perp O_1A$. Теперь, зная $\vec{V}_B$ и направление $\vec{V}_A$, воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела на прямую, соединяющую эти точки.

Учитывая, что проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки, устанавливаем в какую сторону направлен вектор $\vec{V}_A$:

$V_B\cos60^0 = V_A\cos30^0$;

$V_A = V_B\cos30^0/\cos60^0 = 13,86$ м/с.

Зная $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$, строим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня AB, это точка C_3, лежащая на пересечении перпендикуляров к $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$, восстановленных из точек А и В.

По направлению вектора $\vec{V}_A$ определяем направление поворота стержня AB вокруг МЦС C_3. Вектор скорости $\vec{V}_D$ перпендикулярен отрезку C_3D, соединяющему точки D и C_3, и направлен в сторону поворота. Величину V_D найдем из пропорции: $V_D/C_3D = V_A/C_3A$. Треугольник AO_3D – равносторонний. $C_3D = C_3A = 0,7$ м; $V_D = V_A = 13,86$ м/с.

3. Определяем $\vec{V}_E$. Точка E принадлежит стержню ED. Направление $\vec{V}_E$ найдем, учитывая, что точка E принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно:

$V_D\cos60^0 = V_E\cos60^0$; $V_E = V_D = 13{,}86$ м/с.

4. Определяем ω_{DE}. Строим МЦС стержня (т. C_2). $\Delta\, DC_2E$ – равнобедренный, $C_2D = C_2E$; C_2D определим по теореме синусов:

$C_2D/\sin30^0 = DE/\sin120^0$,

$C_2D = l_2 \sin30^0/\sin120^0 = l_2 \sin30^0/\cos30^0 = 0{,}69$ м, тогда

$$\omega_{DE} = V_D/C_2D = 20 \text{ с}^{-1}.$$

5. Определяем a_A.

Изображаем все векторы ускорений (рис. К3б).

Точка A движется по окружности радиуса O_1A, в этом случае $\vec{a}_A$ представлена двумя составляющими:

$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^{n}$.

Вектор $\vec{a}_A^{n}$ направлен вдоль AO_1, а $\vec{a}_A^{\tau}$ – перпендикулярно AO_1, где:

$V_A = \omega_1 \cdot l_1$; $\omega_1 = V_A/l_1 = 34{,}65$ с$^{-1}$,

$\vec{a}_A^{n} = \omega_1^2 \cdot l_1 = 480$ м/с^2.

Для определения $\vec{a}_A$ воспользуемся равенством:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^{n} + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^{n}.$$

Вектор $\vec{a}_{BA}^{n}$ направлен вдоль BA, вектор $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ перпендикулярен BA.

Численно $a_{BA}^{n} = \omega_3^2 \ell_3$.

Находим ω_3 с помощью построенного МЦС C_3 стержня 3:

$$\omega_3 = \frac{V_A}{C_3A} = 19{,}8 \text{ с}^{-1},$$

$$a_{BA}^{n} = 548{,}9 \text{ м/с}^2.$$

Таким образом, у величин, входящих в равенство, неизвестны только числовые значения a_A^{τ} и a_{BA}^{τ}. Их можно найти, спроецировав обе части равенства на какие-нибудь две оси.

Чтобы определить a_{BA}^{τ}, спроецируем обе части равенства на ось y:

$$-a_B = -a_A^{n} + a_{BA}^{n}\cos60° - a_{BA}^{\tau}\cos30°,$$

$$a_{BA}^{\tau} = \frac{a_B - a_A^{n} + a_{BA}^{n}\cos60°}{\cos30°} = -225{,}8 \text{ м/с}^2.$$

Так как $a_{\text{BA}}^{\tau} < 0$, то, следовательно, вектор $\vec{a}_{\text{BA}}^{\tau}$ направлен в противоположную сторону от показанного.

Чтобы определить $\vec{a}_{\text{A}}^{\tau}$, спроектируем обе части равенства на ось x:

$0 = -a_{\text{A}}^{\tau} - a_{\text{BA}}^{\text{n}} \cos 30° - a_{\text{BA}}^{\tau} \cos 60°$,

$a_{\text{A}}^{\tau} = -a_{\text{BA}}^{\text{n}} \cos 30° - a_{\text{BA}}^{\tau} \cos 60° = -362{,}4$ м/с^2.

$a_{\text{A}}^{\tau} < 0$, следовательно, вектор $\vec{a}_{\text{A}}^{\tau}$ направлен в противоположную сторону:

$$a_{\text{A}} = \sqrt{\left(a_{\text{A}}^{\tau}\right)^2 + \left(a_{\text{A}}^{\text{n}}\right)^2} = 601{,}4$$

Определяем ε_{AB} из равенства $a_{\text{BA}}^{\tau} = \varepsilon_3 \ell_3$:

$$\varepsilon_3 = \frac{\left|a_{\text{BA}}^{\tau}\right|}{\ell_3} = 161{,}3 \text{ с}^{-2}.$$

Ответ: V_{D}= 13,86 м/с, V_{E}=13,86 м/с, $\omega_{\text{DE}} = 20$ с$^{-1}$,

$a_{\text{A}} = 601{,}4$ м/с^2,

$\varepsilon_{\text{AB}} = 161{,}3$ с$^{-2}$.

Сложное движение материальной точки

Задача К4

Прямоугольная пластина (рис. К4.0 – К4.4) или круглая пластина радиуса R =60 см (рис. К4.5 – К4.9) вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = f_1(t)$, заданному в табл. К4. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунках дуговой стрелкой. На рис. К4.0, К4.1, К4.2, К4.5, К4.6 ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O (пластина вращается в своей плоскости); на рис. К4.3, К4.4, К4.7, К4.8, К4.9 ось вращения OO_1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой BD (рис. К4.0 – К4.4) или по окружности радиуса R (рис. К4.5 – К4.9) движется точка M; закон ее относительного движения, т.е. зависимость s =AM $=f_2(t)$ (s –в сантиметрах, t – в секундах), задан в таблице отдельно для рис. К4.0 – К4.4, и для рис. К4.5 – К4.9; там же даны размеры b и l. На рисунках точка M показана в положении, при котором s =AM > 0 (при s < 0 точка M находится по другую сторону от точки A).

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени t_1 =1 с.

Указания. Задача К4 – на сложное движение точки. Для ее решения следует воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений. Прежде чем производить все расчеты, необходимо по условиям задачи определить, где находится точка М на пластине в момент времени t_1 =1 с, и изобразить точку именно в этом положении (а не в произвольном, как показано на рисунках к задаче).

В случаях, относящихся к рис. К4.5 – К4.9, при решении задачи не подставлять числовое значение R, пока не будут определены положение точки М в момент времени t_1 =1 с и угол между радиусами СМ и СА в этот момент.

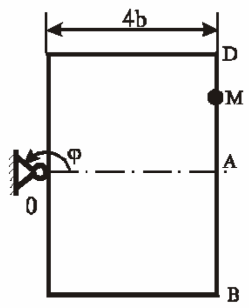


Рис. К4.0

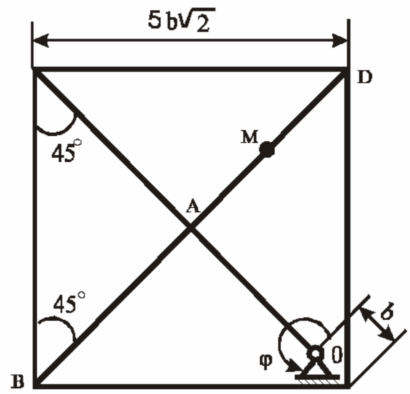


Рис. К4.1

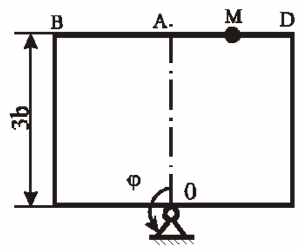


Рис. К4.2

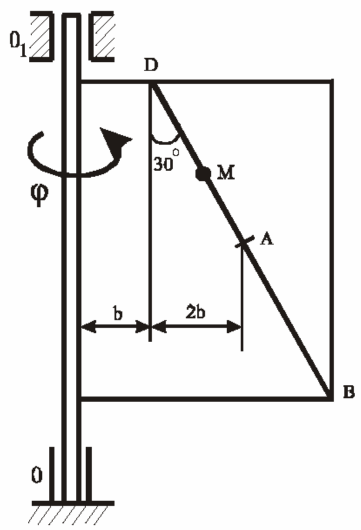


Рис. К4.3

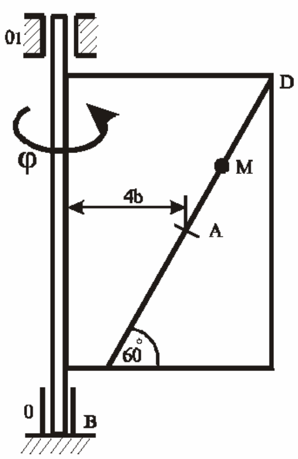


Рис. К4.4

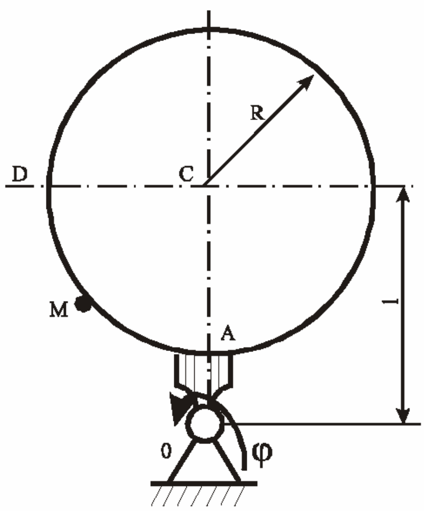


Рис. К4.5

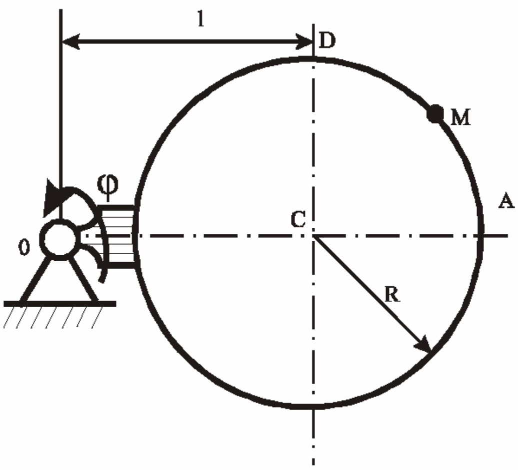


Рис. К4.6

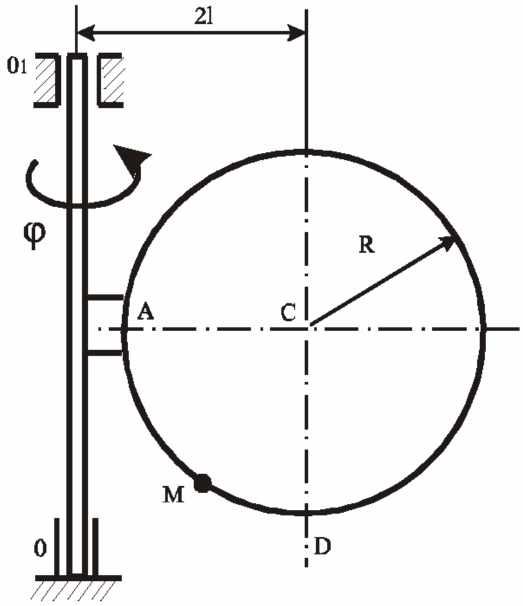


Рис. К4.7

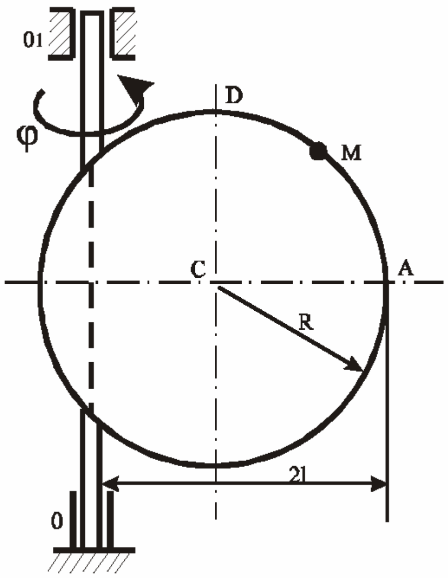


Рис. К4.8

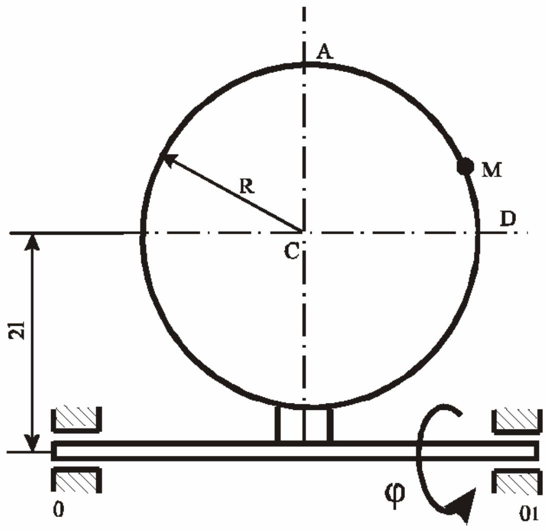


Рис. К4.9

Таблица К4

Номер условия	Для всех рисунков $\varphi = f_1(t)$	Для рис. К4.0-К4.4		Для рис. К4.5-К4.9	
		b, см	s = AM = $f_2(t)$	l	s = AM = $f_2(t)$
0	$4(t^2 - t)$	12	$50(3t - t^2)$-64	R	$\frac{\pi}{3}R\,(4t^2 - 2t^3)$
1	$3t^2$ -8t	16	$40(3t^2 - t^4)$ -32	4/3 R	$\frac{\pi}{2}R\,(2t^2 - t^3)$
2	$6t^3 - 12t^2$	10	$80(t^2 - t)$+40	R	$\frac{\pi}{3}R\,(2t^2 - 1)$
3	$t^2 - 2t^3$	16	$60(t^4 - 3t^2)$+56	R	$\frac{\pi}{6}R\,(3t - t^2)$
4	$10t^2 - 5t^3$	8	$80(2t^2 - t^3)$-48	R	$\frac{\pi}{3}R\,(t^3 - 2t)$
5	$2(t^2 - t)$	20	$60\,(t^3 - 2t^2)$	R	$\frac{\pi}{6}R\,(t^3 - 2t)$
6	$5t - 4t^2$	12	$40(t^2 - 3t) + 32$	3/4R	$\frac{\pi}{2}R\,(t^3 - 2t^2)$
7	$15t - 3t^3$	8	$60(t - t^3) + 24$	R	$\frac{\pi}{6}R\,(t - 5t^2)$
8	$2t^3 - 11t$	10	$50\,(t^3 - t)$ - 30	R	$\frac{\pi}{3}R\,(3t^2 - t)$
9	$6t^2 - 3t^3$	20	$40(t - 2t^3)$ - 40	4/3 R	$\frac{\pi}{2}R\,(t - 2t^2)$

Пример К4

Круглая пластина R = 60 см вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 2(t^2 - t)$. По дуге окружности R движется точка по закону $S = AM_1 = \frac{\pi}{6}R(t^3 - 2t)$.

Дано: R=60 см; $\varphi = 2(t^2 - t)$; l=R; $S = \dfrac{\pi}{6} R(t^3 - 2t)$; t_1= 1 с.

Определить: $V_{абс}$ и $a_{абс}$.

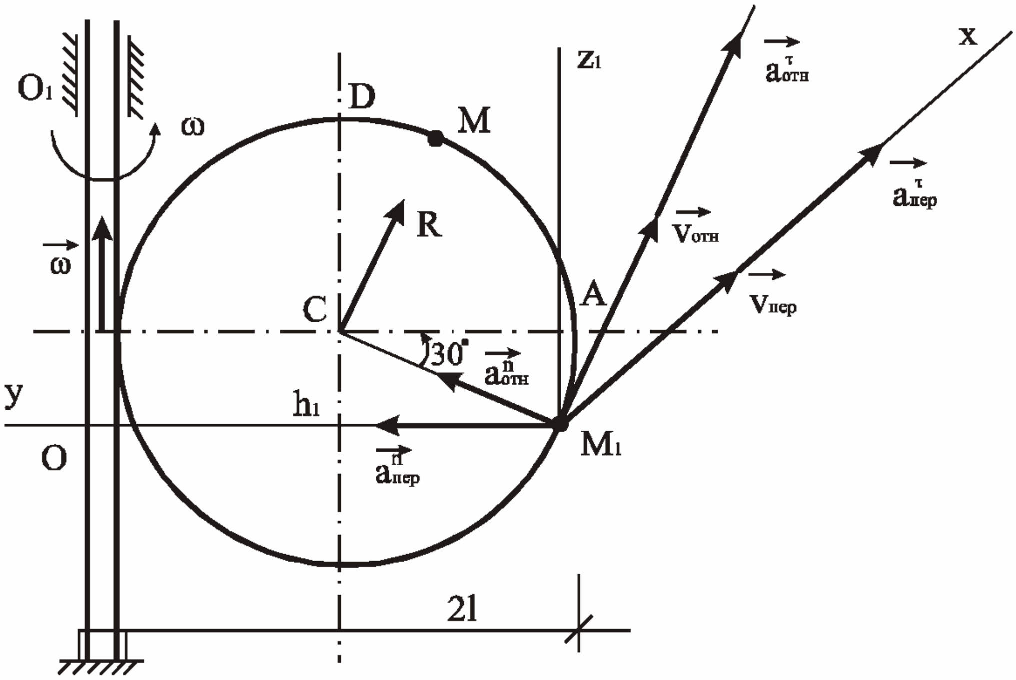


Рис. К4

Решение.

Рассмотрим движение точки M как сложное, считая ее движение по дуге окружности относительным, а вращение пластины – переносным движением. Тогда абсолютная скорость $\vec{V}_{абс}$ и абсолютное ускорение $\vec{a}_{абс}$ точки найдутся по формулам:

$$\vec{V}_{абс} = \vec{V}_{отн} + \vec{V}_{пер},$$

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор},$$

где $\vec{a}_{отн} = \vec{a}^{\tau}_{отн} + \vec{a}^{n}_{отн}$,

$$\vec{a}_{пер} = \vec{a}^{\tau}_{пер} + \vec{a}^{n}_{пер}.$$

Определим все входящие в равенство величины.

1. Относительное движение

Это движение происходит по закону

$$S = A\breve{M} = \frac{\pi}{6} R\left(t^3 - 2t\right).$$

Установим, где будет находиться точка М на дуге окружности в момент времени t_1, полагая, что $t_1 = 1$ с:

$$S_1 = \frac{\pi}{6} R\left(1^3 - 2 \cdot 1\right) = -\frac{\pi R}{6}.$$

Знак «минус» свидетельствует о том, что точка М в момент времени t_1=1 с находится снизу от точки А. Изображаем ее в этом положении: $\angle ACM_1 = \frac{S_1}{R} = -\frac{\pi}{6}$.

Находим числовые значения $V_{отн}$, $a^{\tau}_{отн}$, $a^{n}_{отн}$:

$$V_{отн} = \dot{S} = \frac{\pi}{6} R\left(3t^2 - 2\right) = 0{,}31 \text{ м/с}.$$

$$a^{\tau}_{отн} = \dot{V}_{отн} = \frac{\pi}{6} R\left(6t \quad - 0\right) = 1{,}88 \text{ м/с}^2.$$

$$a^{n}_{отн} = \frac{V^2_{отн}}{R} = 0{,}16 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}^{\,n}_{отн}$ направлен к центру С окружности, векторы $\vec{V}_{отн}$ и $\vec{a}^{\,\tau}_{отн}$ направлены в сторону положительного отсчета.

2. Переносное движение

Это движение происходит по закону $\varphi = 2(t^2 - t)$.

Найдем сначала угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения:

$\omega = \dot{\varphi} = 2(2t - 1)$, $\varepsilon = \dot{\omega} = 4$,

при $t_1 = 1$ с, $\omega = 2$ с$^{-1}$, $\varepsilon = 4$ с$^{-2}$.

Для определения $\vec{V}_{пер}$ находим сначала расстояние $h_1 = O'M_1$ точки M_1 от оси вращения.

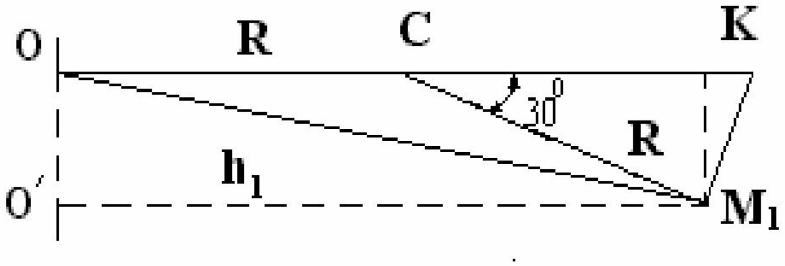


Рис. К4а

CK =Rcos30^0 =0,52 м, OK =CK + R =1,12 м,

M_1O' = OK=1,12 м.

Находим: $V_{пер} = |\omega| \cdot h_1$ =224 см/с, $a^{\tau}_{пер} = |\varepsilon| \cdot h_1$ =448 см/с^2,

$a^{n}_{пер} = \omega^2 \cdot h_1$ =448 см/с^2.

Изобразим векторы $\vec{V}_{пер}$ и $\vec{a}^{\tau}_{пер}$ перпендикулярно плоскости DAO$'$, а вектор $\vec{a}^{n}_{пер}$ – по линии MO$'$ к оси вращения.

3. Кориолисово ускорение

Т.к. угол между вектором $\vec{V}_{отн}$ и осью вращения (вектором $\vec{\omega}$) равен 30^0, то численно в момент времени t_1 =1 с

$a_{кор} = 2|\omega| \cdot |V_{отн}| \cdot \sin 30^0$ =2·0,31·2·(1/2) =0,68 см/с^2.

Направление $\vec{a}_{кор}$ найдем по правилу Жуковского. Для этого вектор $\vec{V}_{отн}$ спроектируем на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена противоположно вектору $\vec{a}^{n}_{пер}$), и затем эту проекцию повернем на 90^0 в сторону ω, т.е. против хода часовой стрелки. Получим направление вектора $\vec{a}_{кор}$. Он направлен перпендикулярно плоскости пластины так же, как и вектор $\vec{V}_{пер}$.

4. Определение $V_{абс}$ и $a_{абс}$ Т.к. $\vec{V}_{абс} = \vec{V}_{отн} + \vec{V}_{пер}$, а векторы $\vec{V}_{отн}$ и $\vec{V}_{пер}$ взаимноперпендикулярны, то

$V_{абс} = \sqrt{V^2_{отн} + V^2_{пер}}$ = 234 см/с.

По теореме о сложении ускорений

$\vec{a}_{абс} = \vec{a}^{n}_{отн} + \vec{a}^{n}_{пер} + \vec{a}^{\tau}_{отн} + \vec{a}_{кор}$.

Для определения $a_{абс}$ проведем координаты M_1xyz и вычислим проекции $a_{абс}$ на эти оси. Векторы $\vec{a}^{\tau}_{пер}$ и $\vec{a}_{кор}$ лежат на оси x, а векторы $\vec{a}^{n}_{пер}$ и $\vec{a}^{n}_{отн}$ расположены в плоскости M_1yz_1, т.е. в плоскости пластины.

Проецируя обе части равенства на оси M_1xyz, получаем:

$a_{абс\,x} = a^{\tau}_{пер} + a_{кор}$ =448,62 см/с^2,

$a_{абс\,z} = a^{n}_{отн} \cdot \sin 30^0 + a^{\tau}_{отн} \cdot \cos 30^0 \cdot$ =1,71 см/с^2,

$a_{абс\,y} = a^{n}_{пер} + a^{n}_{отн} \cdot \cos 30^0 + a^{\tau}_{отн} \cdot \sin 30^0$ =449,08 см/с^2.

Находим затем $a_{абс}$. $a_{абс} = \sqrt{a^2_{абсx} + a^2_{абсy} + a^2_{абся}}$ =634,8 см/с^2.

Ответ: $V_{абс}$ =234 см/с; $a_{абс}$ =634,8 см/с^2.

ГЛАВА 3. ДИНАМИКА

§ 1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ДИНАМИКИ

Динамика точки

Определение закона движения материальной точки по заданным силам, действующим на точку, – одна из задач динамики. В проекциях на оси инерциальной системы декартовых координат дифференциальные уравнения движения точки записываются следующим образом:

$$m\ddot{x} = F_x, \qquad m\ddot{y} = F_y, \qquad m\ddot{z} = F_z, \tag{1}$$

где m – масса точки; F_x, F_y, F_z – проекции равнодействующих всех сил, действующих на точку, на оси координат. В общем случае силы могут быть постоянными, зависящими от времени, положения, скорости и ускорения точки. Силами, зависящими от положения точки, являются, например, силы отталкивания и притяжения, силы упругости пружин; зависящими от скорости – силы сопротивления среды движению точки.

В результате интегрирования системы дифференциальных уравнений второго порядка (1) определяется закон движения точки в декартовых координатах:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \qquad z = f_3(t).$$

При интегрировании системы (1) появляется шесть произвольных постоянных, и для их определения в условие задачи должны быть включены дополнительные данные – начальные условия движения, которые определяют положение точки и ее скорость в начальный момент времени.

Иногда интегрирование системы (1) представляет значительные трудности и не может быть выполнено в квадратурах. Тогда дифференциальные уравнения движения точки решаются приближенными методами, в частности, с использованием вычислительных машин.

Дифференциальное уравнение относительного движения материальной точки

Рассмотрим движение точки по отношению к системе отсчета (СО), произвольно движущейся относительно неподвижной СО.

Движение точки относительно неподвижной СО называется абсолютным, движение относительно подвижной СО – относительным, движение подвижной СО относительно неподвижной – переносным.

Из раздела кинематики мы знаем, что в случае непоступательного переносного движения абсолютное ускорение материальной точки складывается из относительного, переносного и кориолисова:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c .$$

Подставив это выражение в основное уравнение динамики

$$m\vec{a} = \vec{F} ,$$

получаем:

$$m\vec{a}_r + m\vec{a}_e + m\vec{a}_c = \vec{F} \qquad \text{или} \qquad m\vec{a}_r = \vec{F} + (-m\vec{a}_e) + (-m\vec{a}_c) .$$

Введем два вектора

$\vec{F}_e^{\text{ин}} = -m\vec{a}_e$ – переносная сила инерции,

$\vec{F}_c^{\text{ин}} = -m\vec{a}_c = -2m[\vec{\omega}_e \times \vec{\upsilon}_r]$ – кориолисова сила инерции.

Тогда основное уравнение динамики относительного движения материальной точки примет вид:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_e^{\text{ин}} + \vec{F}_c^{\text{ин}} .$$

Общие теоремы динамики механических систем

Центром масс материальной системы называется точка, положение которой определяется радиус-вектором $\vec{r}_c$ по формуле:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k ,$$

где $M = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k$ – масса материальной системы; m_k, $\vec{r}_k$ – массы и радиус-векторы точек материальной системы.

Декартовы координаты центра масс материальной системы даются формулами:

$$x_c = \frac{1}{M}\sum m_k x_k ; \quad y_c = \frac{1}{M}\sum m_k y_k ; \qquad z_c = \frac{1}{M}\sum m_k z_k .$$

Зависимость между скоростью центра масс и скоростями точек (составных частей) материальной системы имеет вид:

$$\vec{v}_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k}{M} ,$$

т.е. $\dot{x}_c = \dfrac{1}{M}\sum\limits_{k} m_k \dot{x}_k ; \;\; \dot{y}_c = \dfrac{1}{M}\sum\limits_{k} m_k \dot{y}_k ; \;\; \dot{z}_c = \dfrac{1}{M}\sum m_k \dot{z}_k .$

Теорема о движении центра масс механической системы имеет вид:

$$M\vec{a}_c = \sum_i \vec{F}_i^e \ , \qquad (2)$$

где $\sum_i \vec{F}_i^e$ – сумма внешних сил, действующих на точки системы. В проекциях на декартовы оси из (2) получим:

$$M\ \ddot{x}_c = \sum_i F_{ix}^e\ ; \qquad M\ \ddot{y}_c = \sum_i F_{iy}^e\ ;\ M\ \ddot{z}_c = \sum_i F_{iz}^e\ .$$

Импульсом материальной системы называется величина

$$\vec{Q} = M\,\vec{v}_c = \sum_k m_k \vec{v}_k\ .$$

Теорема об изменении импульса системы записывается в виде:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^e = \frac{d\left(\mathrm{M}\vec{v}_c\right)}{dt}$$

или в декартовых координатах

$$\frac{d(Mv_{cx})}{dt} = \sum_i F_{ix}^e\ ; \quad \frac{d(Mv_{cy})}{dt} = \sum_i F_{iy}^e; \qquad \frac{d(Mv_{cx})}{dt} = \sum_i F_{iz}^e\ .$$

Момент импульса системы материальных точек относительно центра O определяется по формуле:

$$\vec{L}_0 = \sum_{k=1}^{n}\left[\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k\right].$$

Теорема об изменении момента импульса системы записывается в виде:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum_i \vec{M}_O(\vec{F}_i^e)\,,$$

где $\sum_i M_O(\vec{F}_i^e)$ – сумма моментов внешних сил, действующих на точки системы. Та же теорема, записанная относительно неподвижных осей декартовых координат, имеет вид:

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum_i\ M_x\left(\vec{F}_i^e\right); \qquad \frac{dL_y}{dt} = \sum_i M_y(\vec{F}_i^e)\ ; \qquad \frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_z(\vec{F}_i^e)\ .$$

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i ,$$

где $\sum_{k=1}^{n} A_k^e$ – сумма работ всех внешних сил, действующих на систему; $\sum_{k=1}^{n} A_k^i$ – сумма работ внутренних сил.

В случае неизменяемой механической системы $\sum_{k=1}^{n} A_k^i = 0,$ поэтому теорему об изменении кинетической энергии системы можем записать в виде:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e .$$

При решении задач кинетическую энергию системы можно определить как сумму кинетической энергии всех тел системы:

$$T = T_1 + T_2 + \ldots + T_n .$$

Кинетическая энергия твердого тела в различных случаях его движения определяется:

– при поступательном движении:

$$T = \frac{mv^2}{2},$$

– при вращении вокруг неподвижной оси z:

$$T = \frac{I_z \omega^2}{2},$$

где I_z – момент инерции твердого тела относительно оси z;

– при вращательном движении вокруг неподвижной точки:

$$T = \frac{I_\omega \omega^2}{2},$$

где I_ω – момент инерции твердого тела относительно мгновенной оси вращения ω (переменная величина);

– при плоском движении:

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_{C_z} \omega^2}{2},$$

где v_C – скорость центра масс;

I_{C_z} – момент инерции твердого тела относительно оси z, проходящий через центр масс;

или

$$T = \frac{I_P \omega^2}{2},$$

где I_P – момент инерции твердого тела относительно оси, проходящий через т. P – мгновенный центр скоростей.

Элементарная работа силы:

– при поступательном движении: $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$;

– при вращении вокруг неподвижной оси: $dA = M_z \cdot d\varphi$;

– при плоском движении: $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}_c + M_{z_c} d\varphi$.

Дифференциальные уравнения движения твердого тела:

– при поступательном движении:

$$\begin{cases} M\ddot{x}_c = F_x^e, \\ M\ddot{y}_c = F_y^e, \\ M\ddot{z}_c = F_z^e; \end{cases}$$

– при вращении вокруг неподвижной оси z:

$$I_z \ddot{\varphi} = M_z(\vec{F}^e)$$

– при плоскопараллельном движении:

$$\begin{cases} M\ddot{x}_c = F_x^e, \\ M\ddot{y}_c = F_y^e, \\ I_z \ddot{\varphi} = M_{cz}(\vec{F}^e). \end{cases}$$

Принцип Даламбера

Принцип Даламбера позволяет уравнениям динамики придать форму уравнений статики. Рассмотрим следующие случаи:

– свободная материальная точка. Если на нее действует сила $\vec{F}$, то согласно 2-му закону Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

откуда получаем:

$$\vec{F} + (-m\vec{a}) = 0$$

или $$\vec{F} + \vec{F}_{ин} = 0,$$

где $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}$ – сила инерции.

Т.о. получаем: если в любой момент времени к действующим на точку активным силам присоединить силу инерции, то полученная система сил будет уравновешенной.

Это положение выражает принцип Даламбера для свободной материальной точки;

– несвободная материальная точка.

Пусть на материальную точку действует сумма активных сил, равнодействующую которых обозначим $\vec{F}$, и реакция связи $\vec{R}$. Тогда:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R} \text{ или}$$
$$\vec{F} + \vec{R} + (-m\vec{a}) = 0,$$
$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{F}_{ин} = 0$$

получаем: если в любой момент времени к действующим на точку активным силам и реакции связи присоединить силу инерции, то полученная система сил будет уравновешенной (принцип Даламбера для несвободной материальной точки);

– в случае несвободной механической системы принцип Даламбера можно представить в виде двух векторных уравнений:

$$\begin{cases} \vec{F}^{e} + \vec{R} + \vec{F}_{ин} = 0, \\ \vec{M}_{O}(\vec{F}^{e}) + \vec{M}_{O}(\vec{R}) + \vec{M}_{O}(\vec{F}_{ин}) = 0, \end{cases}$$

где $\vec{F}^{e}$ – главный вектор активных сил;

$\vec{R}$ – главный вектор реакций связей;

$\vec{F}_{ин}$ – главный вектор сил инерции;

$\vec{M}_{O}(\vec{F}^{e})$, $\vec{M}_{O}(\vec{R})$, $\vec{M}_{O}(\vec{F}_{ин})$ – главные моменты активных сил, реакций связей и сил инерции соответственно относительно центра O.

Основы аналитической механики

Аналитическая механика устанавливает общие принципы изучения движения и равновесия механических систем математическими методами.

Механическая система называется несвободной, если на ее положение (перемещение) наложены ограничения, называемые связями.

Классификация связей:

1) голономные и неголономные связи.

Связь, накладывающая ограничение на положение точки (системы), но не ограничивающая значение ее скорости, называется голономной или геометрической.

Уравнение голономной связи (стационарной и нестационарной):

$$f(x, y, z) = 0$$

или: $$f(x, y, z, t) = 0 .$$

Связь, накладывающая ограничение не только на положение точки в пространстве, но и на ее скорость, называется неголономной или кинематической. Уравнение такой связи:

$$\mathrm{f}(x, y.z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0 ,$$

причем $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ входят в это уравнение таким образом, что оно не может быть проинтегрировано и выражено в конечном виде;

2) удерживающие и неудерживающие связи.

Если во время движения точка, подчиняясь связям, остается на некоторой поверхности или линии, то связь называется удерживающей или неосвобождающей. Математически такая связь выражается в виде равенства, например:

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (точка движется по поверхности сферы радиуса R).

Если точка может покидать поверхность или линию, то связь называется неудерживающей или освобождающей. Математически такие связи выражаются в виде неравенств, например:

$R^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$ (точка может двигаться внутри и по поверхности сферы радиуса R);

3) стационарные и нестационарные связи.

Если связь не изменяет своей формы и своего положения в пространстве с течением времени, то связь называется стационарной.

Если форма и положение связи в пространстве с течением времени изменяются, то связь называется нестационарной;

4) идеальные и реальные связи.

Если реакция связи направлена по нормали к поверхности, ограничивающей движение точки, то связь называется идеальной, а поверхность – гладкой.

Если реакция связи направлена под некоторым углом к нормали, то связь называется реальной, а поверхность –

шероховатой. Касательная составляющая реакция связи называется силой трения.

Возможные (виртуальные) и действительные перемещения

Понятие о возможных перемещениях является одним из важнейших понятий аналитической механики.

Действительным перемещением $d\vec{r}$ точки называется такое элементарное перемещение, которое она фактически совершает в пространстве за время dt при данных связях под действием приложенных сил.

Возможным (виртуальным) перемещением точки называется такое малое перемещение, мысленно совершаемое из данной точки в фиксированный момент времени и не нарушающее связь с точностью до членов первого порядка малости включительно.

Т.е. при этом должно выполняться условие:

$$(\frac{\partial f}{\partial x})_o \delta x + (\frac{\partial f}{\partial y})_o \delta y + (\frac{\partial f}{\partial z})_o \delta z = 0,$$

или: $$(grad\, f)_o \delta\vec{r} = 0.$$

Если связь представляет собой некоторую поверхность, то $grad\, f$ в некоторой точке нормален к этой поверхности, а, следовательно, виртуальное перемещение $\delta\vec{r}$ лежит обязательно в касательной плоскости к этой поверхности (рис. 1).

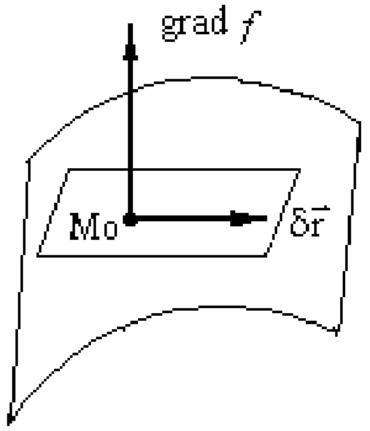


Рис. 1

В случае стационарной связи хотя бы одно виртуальное перемещение $\delta\vec{r}$ совпадает с действительным $d\vec{r}$.

В случае нестационарной связи ни одно виртуальное перемещение $\delta\vec{r}$ не совпадает с действительным $d\vec{r}$.

Введем понятие о возможной (виртуальной) работе как о работе силы $\vec{F}$ на возможном перемещении ее точки приложения $\delta\vec{r}$:

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} .$$

Теперь дадим общее определение понятия об идеальных связях, которым мы уже пользовались: идеальными называются связи, для которых сумма элементарных работ их реакции на любом возможном перемещении системы равна нулю, т.е.

$$\sum(\vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k) = 0 .$$

Принцип возможных перемещений: для того, чтобы механическая система, на которую наложены удерживающие, нестационарные и идеальные связи, находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил на любом возможном перемещении системы равнялась нулю и начальные скорости точек системы также равнялись нулю:

$$\sum_{k=1}^{n}(\vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k) = 0, \qquad \vec{v}_k(0) = 0 .$$

Принцип возможных перемещений дает общий метод решения задач статики. С другой стороны, принцип Даламбера позволяет использовать методы статики для решения задач динамики. Применяя эти два принципа одновременно, мы можем получить общий метод решения задач динамики, называемый ***общим уравнением динамики*** (или принцип Даламбера-Лагранжа).

Принцип Даламбера-Лагранжа гласит: при движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n}\delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n}\delta A_k^u = 0 ,$$

где $\sum_{k=1}^{n}\partial A_k^a$ – сумма элементарных работ активных сил;

$\sum_{k=1}^{n} \partial A_k^u$ – сумма элементарных работ сил инерции.

Уравнения Лагранжа II-го рода

Применение уравнений Лагранжа II-го рода является наиболее общим приемом составления дифференциальных уравнений движения в задачах динамики материальной системы. Использование этих уравнений особенно целесообразно при рассмотрении систем с несколькими степенями свободы. Заметим, что во многих простых задачах механики могут быть успешно применены общие теоремы, и метод Лагранжа является более громоздким. Удачно выбрать общие теоремы можно лишь на основе значительных навыков в решении задач или путем ряда неудачных проб и ошибок. Поэтому справедлива точка зрения, что при отсутствии ясного плана решения задачи лучше всего использовать уравнения Лагранжа.

При составлении уравнений Лагранжа существенную роль играет удачный выбор обобщенных координат, что обеспечивает относительную простоту процесса записи этих уравнений.

Обобщенными координатами называются независимые параметры, однозначно определяющие положения точек материальной системы. Число независимых обобщенных координат материальной системы, подчиненной идеальным связям, равно числу ***степеней свободы***.

Одним из существенных этапов решения задач с помощью уравнений Лагранжа II-го рода является определение обобщенных сил системы. Обобщенными силами Q_j, где j =1, 2…..s (s – число степеней свободы) называются коэффициенты, стоящие в выражении суммы работ активных сил при соответствующих обобщенных виртуальных перемещениях – вариациях обобщенных координат.

Определение обобщенных сил следует проводить в следующем порядке:

а) выяснить число степеней свободы рассматриваемой системы материальных точек и выбрать соответствующие обобщенные координаты q_j (j =1, 2…..s);

б) изобразить все активные силы системы;

в) если не все связи, наложенные на материальную систему, являются идеальными, то добавить к активным силам соответствующие реакции связей (например, силы трения);

г) дать независимые обобщенные виртуальные перемещения δq_j системе в числе, равном числу обобщенных координат;

д) вычислить виртуальную сумму работ всех активных сил, включая реакции неидеальных связей, на обобщенном виртуальном перемещении δq_j. При этом все остальные обобщенные виртуальные перемещения надо считать равными нулю, т.е. $\delta q_j \neq 0$, $\delta q_1 = \delta q_2 = \ldots = \delta q_{j-1} = \delta q_{j+1} = \ldots = \delta q_s = 0$.

Аналогично нужно определить все остальные обобщенные силы.

Уравнениями Лагранжа II-го рода называется следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для обобщенных координат:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\right) = Q_j, \quad (j = 1,2,\ldots s),$$

где T – кинетическая энергия системы,

$\dot{q}_j = \dfrac{dq_j}{dt}$ – обобщенные скорости.

Для составления этой системы необходимо:

а) определить обобщенные силы системы Q_j ранее описанным способом;

б) вычислить кинетическую энергию T рассматриваемой механической системы;

в) найти частные производные кинетической энергии по обобщенным скоростям $\dot{q}_i$ и обобщенным координатам q_i;

г) вычислив полные производные по времени от частных производных кинетической энергии по $\dot{q}_i$, записать s уравнений Лагранжа.

§ 2. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Динамика материальной точки

Задача Д1

Груз D массой m, получив в точке A начальную скорость v_0, движется в изогнутой трубе ABC, расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный (рис. Д 1.0 —Д 1.9, табл. Д1).

На участке AB на груз, кроме силы тяжести, действуют постоянная сила $\vec{Q}$ (ее направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды R, зависящая от скорости $\vec{v}$ груза (направлена против движения); трением груза о трубу на участке AB пренебречь.

В точке B груз, не изменяя своей скорости, переходит на участок BC трубы, где на него, кроме силы тяжести, действуют сила трения (коэффициент трения груза о трубу $f = 0{,}2$) и переменная сила $\vec{F}$, проекция которой F_x на ось x задана в таблице.

Считая груз материальной точкой и зная расстояние AB=l или время t_1 движения груза от точки A до точки B, найти закон движения груза на участкеBC, т. е. $x = f(t)$, где x = BD.

Указания. Задача Д1 — на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение основной задачи динамики). Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки (груза) на участке AB, учтя начальные условия. Затем, зная время движения груза на участке AB или длину этого участка, определить скорость груза в точке B. Эта скорость будет начальной для движения груза на участке BC. После этого нужно составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке BC тоже с учетом начальных условий, ведя отсчет времени от момента, когда груз находится в точке B, и полагая в этот момент $t = 0$. При интегрировании уравнения движения на участке AB в случае, когда задана длина l участка, целесообразно перейти к переменному x, учтя, что

$$\frac{dv_x}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx}$$

Таблица Д1

Номер условия	m, кг	v_0, м/с	Q, Н	R, Н	l, м	t_1, с	F_x, Н
0	2	20	6	$0{,}4v$	–	2,5	$2\sin(4t)$
1	2,4	12	6	$0{,}8v^2$	1,5	–	$6t$
2	4,5	24	9	$0{,}5v$	–	3	$3\sin(2t)$
3	6	14	22	$0{,}6v^2$	5	–	$-3\cos(2t)$
4	1,6	18	4	$0{,}4v$	–	2	$4\cos(4t)$
5	8	10	16	$0{,}5v^2$	4	–	$-6\sin(2t)$
6	1,8	24	5	$0{,}3v$	–	2	$9t^2$
7	4	12	12	$0{,}8v^2$	2,5	–	$-8\cos(4t)$
8	3	22	9	$0{,}5v$	–	3	$2\cos(2t)$
9	4,8	10	12	$0{,}2v^2$	4	–	$-6\sin(4t)$

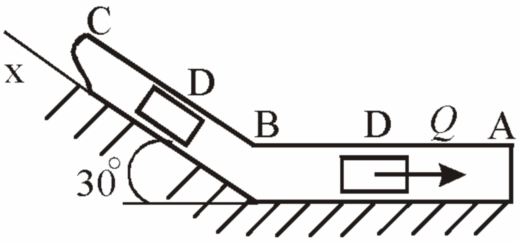


Рис. Д1.0

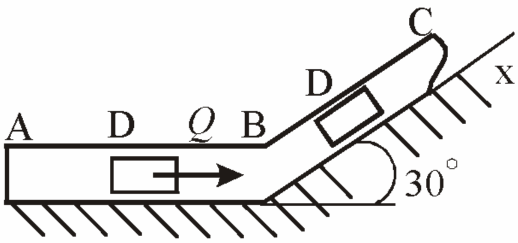


Рис. Д1.1

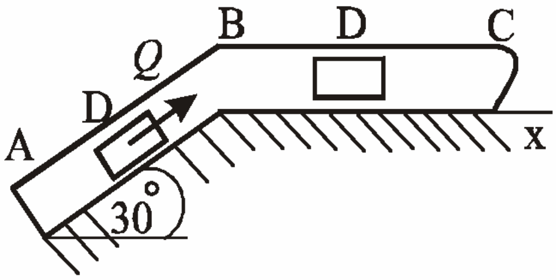


Рис. Д1.2

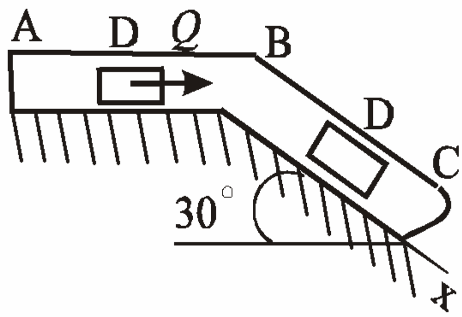


Рис. Д1.3

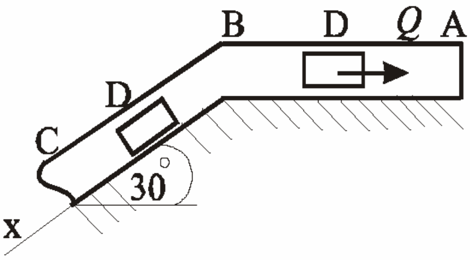


Рис. Д1.4

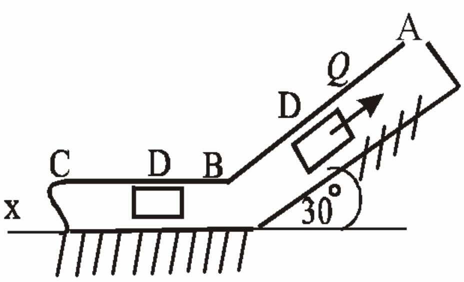


Рис. Д1.5

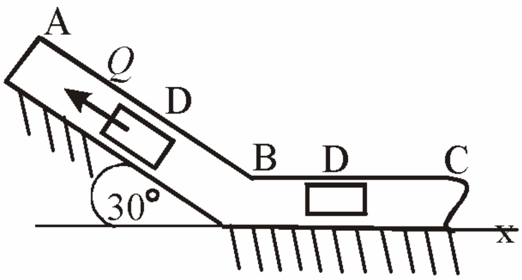


Рис. Д1.6

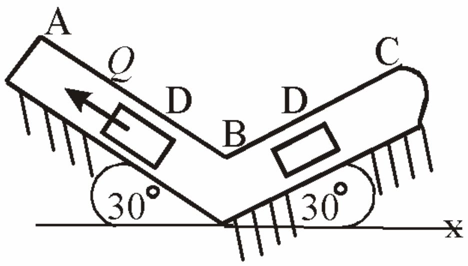


Рис. Д1.7

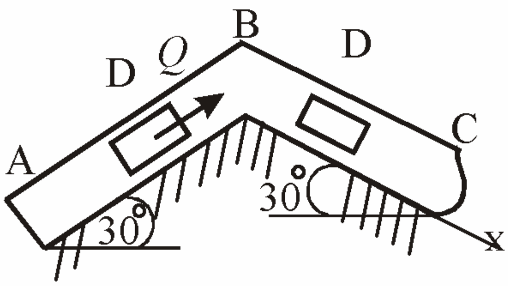


Рис. Д1.8

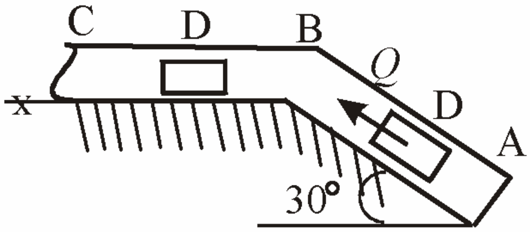


Рис. Д1.9

Пример Д1

На наклонном участке AB трубы (рис. Д1) на груз D массы m действуют сила тяжести P, сила сопротивления R и сила трения $F_{тр}$; коэффициент трения равен f; время движения груза от точки A, где $v = v_0$, до точки B равно t_1; на вертикальном участке BC на груз действуют сила тяжести и переменная сила F=F(t), заданная в ньютонах.

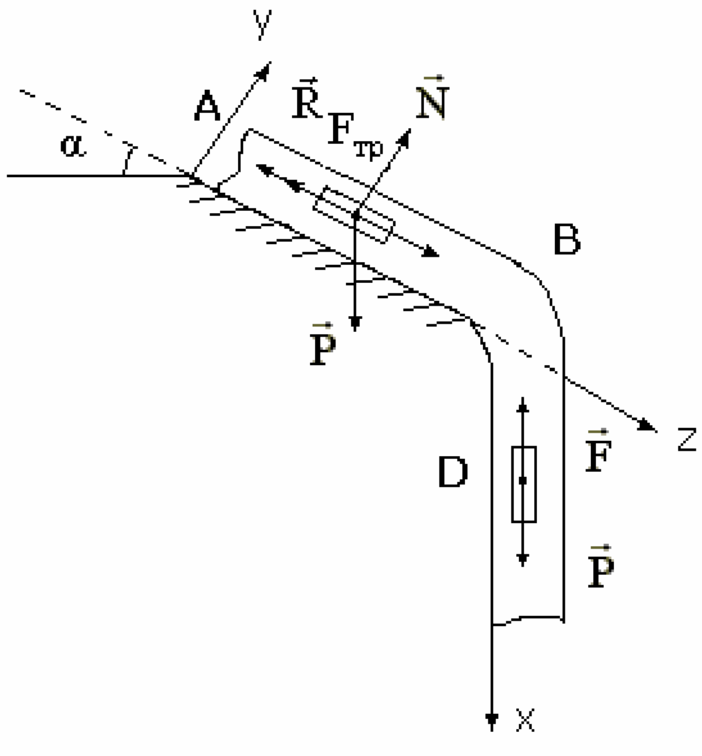


Рис. Д1

Дано: m=2 кг, R = μ v, где μ = 0,5 кг/с, f=0,2, v_0=2 м/с , t_1 = = 2 с, α =30°, $F = -1 + 7\sin t$.

Определить закон движения груза на участке ВС, т.е. зависимость $x = f(t)$.

Решение.

Рассмотрим движение груза на участке АВ. Выберем начало отсчета в точке А и направим ось A_z в сторону движения (рис. Д1). Тогда начальные условия будут: при $t = 0$ $z = 0, v_z = v_0$. Изображаем в произвольном положении груз и действующие на него силы $\vec{R}, \vec{P}, \vec{F}_{\text{тр}}$ и $\vec{N}$ (нормальная реакция трубы). Составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось A_z:

$$m\frac{dv_z}{dt} = \sum F_{kz} \text{ или } m\frac{dv_z}{dt} = R_z + P_z + F_{\text{тр}z} + N_z . \tag{1}$$

Проекции сил имеют значения $R_z = -R = -\mu v$, $P_z = P\sin\alpha = mg\sin\alpha$.

$F_{тр\,z} = -F_{тр} = -f\,N$, $N_z = 0$, и уравнение (1) примет вид

$$m\frac{dv_z}{dt} = mg\sin\alpha - fN - \mu v . \tag{2}$$

Для определения N составим уравнение в проекции на ось A_y:

$$0 = N - P\cos\alpha$$

или

$$N = P\cos\alpha = mg\cos\alpha .$$

Подставим найденное значение N в уравнение (2) и, разделив обе части уравнения на m, получим:

$$\frac{dv_z}{dt} = g\sin\alpha - fg\cos\alpha - \frac{\mu}{m}v . \tag{3}$$

Обозначим и подсчитаем величины:

$$k = g\sin\alpha - fg\cos\alpha ,$$

$$k = 10(0{,}5 - 0{,}2\cdot 0{,}866) = 3{,}27 \text{ м/с}^2, \tag{4}$$

$$s = \frac{\mu}{m}, \qquad S = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25 \text{ с}^{-1}.$$

С учетом (4) уравнение (3) примет вид:

$$\frac{dv}{dt} = k - sv .$$

Разделяя переменные, запишем:

$$\frac{dv}{k - sv} = dt .$$

Общее решение данного уравнения есть

$$\ln|k - sv| = -st + c_1 . \qquad (5)$$

Найдем постоянную интегрирования, используя начальные условия: при t=0, $v = v_0$

$$c_1 = \ln|k - sv_0| .$$

Уравнение (5) теперь перепишется в виде:

$$\frac{k - sv}{k - sv_0} = e^{-st} ,$$

откуда

$$v = \frac{k}{s} - (\frac{k}{s} - v_0)e^{-st} .$$

При $t = t_1$, т.е. в точке B скорость груза равна

$$v_1 = \frac{k}{s} - (\frac{k}{s} - v_0)e^{-st_1} = \frac{3,27}{0,25} - (\frac{3,27}{0,25} - 2)e^{-0,5} = 6,43 \text{ м/с}.$$

Рассмотрим теперь движение груза на участке BC. Выберем начало отсчета в точке B и направим ось B_x вертикально вниз. Будем считать, что при t=0, x=0, $v_x = v_1$. На груз действуют силы тяжести P и переменная сила F, зависящая только от t. Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось B_x имеет вид:

$$m\frac{dv}{dt} = mg + 1 - 7\sin t . \qquad (6)$$

Заметим, что в уравнениях (2) и (6) переменные силы выражены через величины, от которых они зависят. Обе стороны уравнения (6) поделим на m и запишем

$$\frac{dv}{dt} = g + \frac{1}{m} - \frac{7}{m} \cdot \sin t . \qquad (7)$$

Уравнение (7) дважды последовательно интегрируем и, определяя из начальных условий постоянные интегрирования, находим искомую зависимость x=f(t):

$$v = gt + \frac{t}{m} + \frac{7}{m} \cdot \cos t + C_2 . \qquad (8)$$

При t = 0, $v_1 = \frac{7}{m} + C_2$, $\quad C_2 = v_1 - \frac{7}{m}$.

Подставляем найденное значение C_2 в (8), получим

$$v = \frac{dx}{dt} = v_1 - \frac{7}{m} + \frac{mg+1}{m} \cdot t + \frac{7}{m} \cdot \cos t,$$

откуда

$$x = v_1 t - \frac{7}{m} t + \frac{mg+1}{2m} t^2 + \frac{7}{m} \sin t + C_3. \qquad (9)$$

При t = 0 $\quad C_3 = 0$.

Окончательно получим:

$$x = \frac{mv_1 - 7}{m} t + \frac{mg+1}{2m} t^2 + \frac{7}{m} \sin t.$$

Подставив числовые значения величин m, g и v_1, получим закон движения груза в виде:

x=2,9t + 5,15t^2 + 3,5·sint, где t – в с, x – в м.

Задача Д2

Груз 1 массы m укреплен на пружинной подвеске в лифте (рис. Д2.0 – Д2.9, табл. Д2). Лифт движется вертикально по закону $z = 0{,}5\alpha_1 t^2 + \alpha_2 \sin(\omega t) + \alpha_3 \cos(\omega t)$ (ось z направлена по вертикали вверх; z выражено в метрах, t – в секундах). На груз действует сила сопротивления среды $R = \mu v$, где v – скорость груза по отношению к лифту.

Найти закон движения груза по отношению к лифту, т.е. $x = f(t)$; начало координат поместить в точке, где находится прикрепленный к грузу конец пружины, когда пружина не деформирована. При этом во избежание ошибок в знаках направить ось x в сторону удлинения пружины, а груз изобразить в положении, при котором x>0, т.е. пружина растянута. При подсчетах можно принять g = 10 м/с^2. Массой пружин и соединительной планки 2 пренебречь.

В таблице обозначено: c_1, c_2, c_3 – коэффициенты жесткости пружин, λ_0 – удлинение пружины с эквивалентной жесткостью в начальный момент времени t=0, v_0 – начальная скорость груза по отношению к лифту (направлена вертикально вверх). Прочерк в столбцах c_1, c_2, c_3 означает, что соответствующая пружина отсутствует и на чертеже изображаться не должна. Если при этом конец одной из оставшихся пружин окажется свободным, его следует прикрепить в соответствующем месте или к грузу, или к потолку (полу) лифта; то же следует сделать, если свободными окажутся соединенные планкой 2 концы обеих оставшихся пружин.

Условие $\mu = 0$ означает, что сила сопротивления R отсутствует.

Указания. Задача Д2 охватывает одновременно относительное движение и колебания материальной точки.

Сначала нужно составить дифференциальное уравнение относительного движения (по отношению к лифту) рассматриваемого в задаче груза, для чего присоединить к действующим силам переносную силу инерции. Затем прикрепленные к грузу пружины (по условиям задачи их будет две) заменить эквивалентной пружиной с коэффициентом жесткости $c_{экв} = c$, произведя соответствующий расчет.

а) Если пружины соединены друг с другом последовательно (как пружины с жесткостями c_1 и c_2 на рис. Д2.0), то при равновесии под действием некоторой силы $\vec{Q}$, приложенной к свободному концу пружины, усилия в любом поперечном сечении пружин одинаковы и равны Q. Удлинения пружин $\lambda_1 = Q/c_1$, $\lambda_2 = Q/c_2$, удлинение эквивалентной пружины $\lambda = Q/c$ и $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Отсюда

$$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2};$$

б) Если груз прикреплен к двум параллельным пружинам (как к пружинам с жесткостями c_1 и c_2 на рис. Д2.1) или находится между двумя пружинами, то при равновесии под действием некоторой силы $\vec{Q}$ каждая из пружин и эквивалентная пружина имели бы одно и то же удлинение λ. Тогда для двух пружин $c_1\lambda + c_2\lambda = Q$, а для эквивалентной пружины – $c\lambda = Q$, отсюда $c = c_1 + c_2$.

После того, как уравнение будет составлено (это будет линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка), его следует проинтегрировать, учтя начальные условия.

Таблица Д2

Номер условия	m, кг	c_1, Н/м	c_2, Н/м	c_3, Н/м	α_1, м/с^2	α_2, м	α_3, м	ω, 1/с	μ, Н·с/м	λ_0, м	v_0, м/с
0	1	300	150	-	0	0.1	0	15	0	0	0
1	0,8	-	240	120	-1,5g	0	0	-	8	0.1	0
2	0,5	-	100	150	0	0.8	0	5	0	0	4
3	1	240	-	160	0	0	0.5	6	0	0	0
4	0,5	80	120	-	-g	0	0	-	6	0.15	0
5	2	-	400	400	0	0	0.1	16	0	0	0
6	0,4	60	-	120	g	0	0	-	4	0	2
7	0,5	120	-	180	0	0.1	0	20	0	0	0
8	0,4	50	200	-	0	0	0.2	20	0	0.15	0
9	1	200	-	300	1,5g	0	0	-	20	0	3

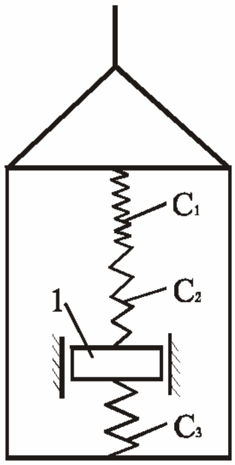


Рис. Д2.0

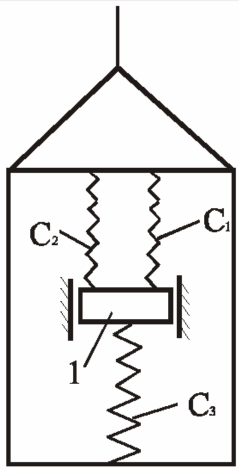


Рис. Д2.1

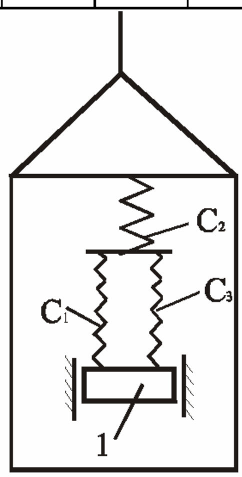


Рис. Д2.2

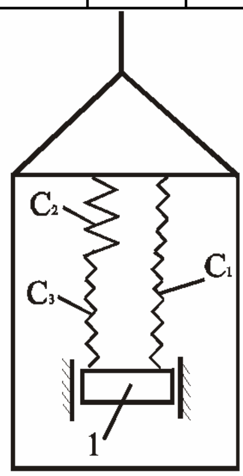


Рис. Д2.3

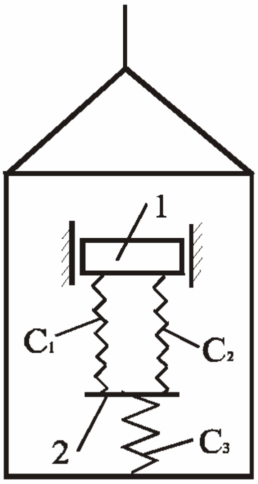


Рис. Д2.4

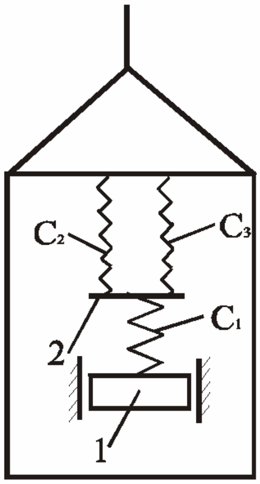


Рис. Д2.5

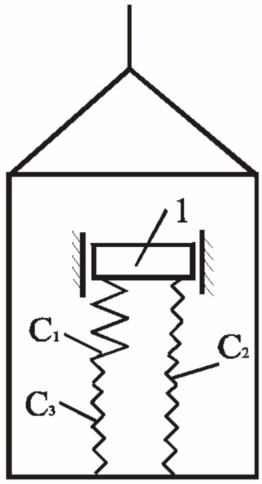


Рис. Д2.6

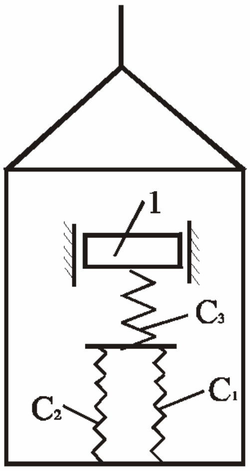


Рис. Д2.7

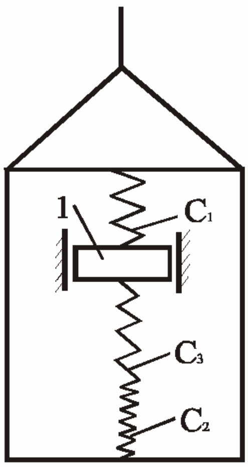


Рис. Д2.8

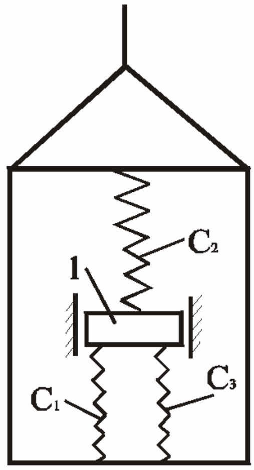


Рис. Д2.9

Пример Д2

В приборе для измерения ускорений движущихся тел (рис. Д2) груз М массы m укреплен на пружине с коэффициентом жесткости *с*. Ось пружины совпадает с направлением движения аппарата. Аппарат движется по закону $z = 0{,}5\,gt^2$ (неподвижная ось z направлена по вертикали вверх). Начальное удлинение пружины равно λ_0, а начальная скорость груза по отношению к аппарату – v_0 (направлена вертикально вниз).

Дано: m =0,2 кг, с = 100 Н/м, λ_0 =0,01 м, v_0 =0,5 м/с.

Определить: x=f(t) – закон движения груза по отношению к аппарату.

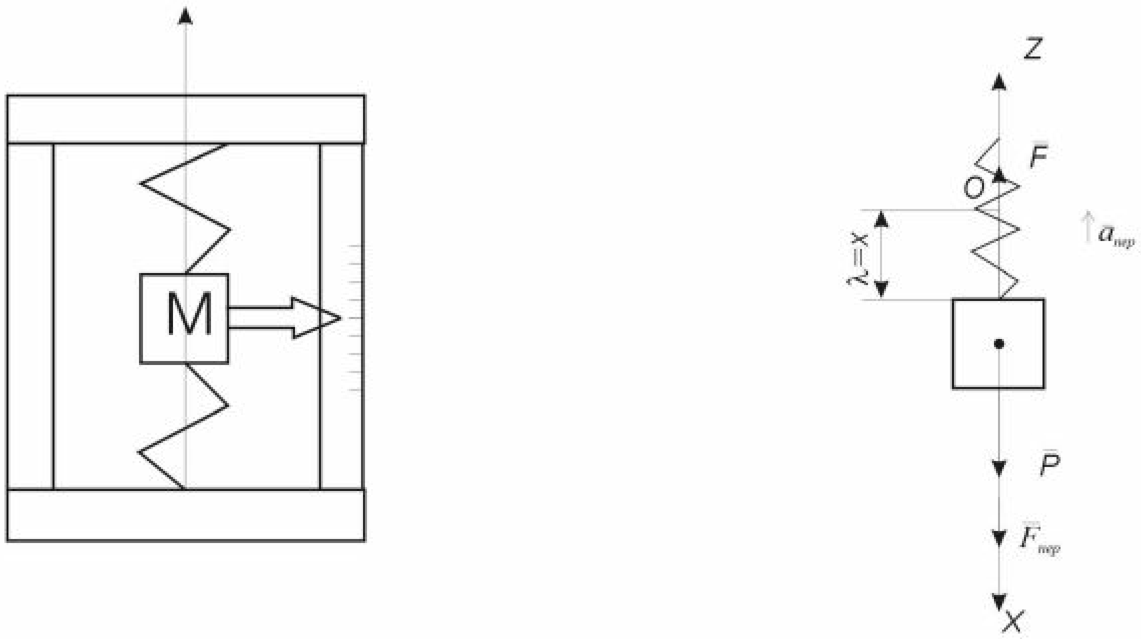


Рис. Д2

Решение.

Пусть груз прикреплен к концу эквивалентной пружины с жесткостью c и начальным удлинением λ_0 (рис. Д2). В ускоренно движущейся системе отсчета, жестко связанной с аппаратом, на груз действуют сила тяжести $\vec{P}$, сила упругости $\vec{F}$ и переносная сила инерции $\vec{F}^{\text{и}}_{\text{пер}} = -m\vec{a}^{\text{и}}_{\text{пер}}$. Пусть начало 0 оси 0X подвижной системы координат совпадает с концом недеформированной пружины, а ось X направлена в сторону удлинения пружины. Уравнение относительного движения имеет вид

в векторной форме:

$$m\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{F}^{\text{и}}_{\text{пер}},$$

в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = P_x + F_x + F^{\text{и}}_{\text{пер x}}. \qquad (1)$$

Далее находим $P_x = P = mg$, $F_x = -c\lambda = -cx$, где $\lambda = x$ – удлинение пружины, $F^{u}_{пер\,x} = -ma_{пер\,x}$.

Учитывая, что оси z и x противоположно направлены, получим:

$$a_{пер\,x} = -a_{пер\,z} = -\ddot{z} = -g \text{ и } F^{u}_{пер\,x} = mg.$$

Подставляя все найденные выражения проекций сил в уравнение (1), получим:

$$m\ddot{x} = mg - cx + mg. \qquad (2)$$

Введем обозначения $k^2 = \frac{c}{m} = 500\ c^{-2}$, b=2g=20 м/с^2.

Уравнение (2) теперь может быть записано в виде:

$$\ddot{x} + k^2 x = b. \qquad (3)$$

Для нахождения закона движения груза необходимо проинтегрировать уравнение (3). Это уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение находим в виде $x = x_1 + x_2$, где x_1 есть решение соответствующего однородного уравнения $\ddot{x} + k^2 x = 0$,

$$x_1 = C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt). \qquad (4)$$

Величины C_1 и C_2 в уравнении (4) – неопределенные постоянные. Величина x_2 есть частное решение уравнения (3). Ищем его в виде $x_2 = A$, где А – постоянная величина. Подставляя это выражение в уравнение (3), получим $k^2 A = b$ или

$$x_2 = A = \frac{b}{k^2}.$$

Таким образом, общим решением уравнения (3) является выражение:

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt + \frac{b}{k^2}. \qquad (5)$$

Найдем величины C_1 и C_2 из начальных условий. Так как при t=0 $x = \lambda_0$, то из уравнения (5) получим:

$$\lambda_0 = C_2 + \frac{b}{k^2} \text{ или } C_2 = \lambda_0 - \frac{b}{k^2}.$$

Продифференцировав (5) один раз по t, получим

$$v_x = \dot{x} = C_1 k \cos kt - C_2 k \sin kt. \qquad (6)$$

Поскольку при t=0 $v_x = v_0$, то из (6) получим $v_0 = C_1 k$, или

$C_1 = \frac{v_0}{k}$.

Подставляя найденные выражения для C_1 и C_2 в уравнение (5), получим:

$$x = \frac{v_0}{k} \sin kt + \left(\lambda - \frac{b}{k^2}\right) \cos kt + \frac{b}{k^2}.$$

Подставим значения величин v_0, k, λ_0, b и k^2.

x= (0,022 sin(22,36t) – 0,03 cos (22,36t) +0,04) м.

Это уравнение и определяет искомый закон движения груза, т.е. закон совершаемых им колебаний.

Общие теоремы динамики

Задача Д3

Механическая система состоит из грузов D_1 массы $m_1 = 2$ кг и D_2 массы $m_2 = 6$ кг и из прямоугольной вертикальной плиты массы $m_3 = 12$ кг, движущейся вдоль горизонтальных направляющих (рис. Д3.0 – Д3.9, табл. Д3). В момент времени $t_0 = 0$, когда система находилась в покое, под действием внутренних сил грузы начинают двигаться по желобам, представляющим собой окружности радиусов r = =0,4 м и R = 0,8 м.

При движении грузов угол $\varphi_1 = \angle A_1C_3D_1$ изменяется по закону $\varphi_1 = f_1(t)$, а угол $\varphi_2 = \angle A_2C_3D_2$ – по закону $\varphi_2 = f_2(t)$. В табл. Д3 эти зависимости даны отдельно для рис. Д3.0 – Д3.4 и Д3.5 – Д3.9, где φ выражено в радианах, t – в секундах.

Считая грузы материальными точками и пренебрегая всеми сопротивлениями, определить закон изменения со временем величины, указанной в таблице в графе «Найти», т.е. $x_3 = f_3(t)$ и N = f(t), где x_3 – координата центра C_3 плиты (зависимость $x_3 = f_3(t)$ определяет закон движения плиты),

N – полная нормальная реакция направляющих.

Указания. Задача Д3 – на применение теоремы о движении центра масс. При этом для определения $x_3 = f_3(t)$ составить уравнение в проекции на горизонтальную ось x, а для определения N – на вертикальную ось y.

Таблица Д3

Номер условия	Рис. Д3.0- Д3.4		Рис. Д3.5 – Д3.9		Найти
	$\varphi_1 = f_1(t)$	$\varphi_2 = f_2(t)$	$\varphi_1 = f_1(t)$	$\varphi_2 = f_2(t)$	
0	$\frac{\pi}{3}(t^2+1)$	$\frac{\pi}{6}(t^2-1)$	$\frac{\pi}{2}(3-t^2)$	$\frac{\pi}{3}(t^2+2)$	x_3
1	$\pi(2-t)$	$\frac{\pi}{4}(t+3)$	$\frac{\pi}{4}(2t-1)$	$\frac{\pi t}{6}$	N
2	$\frac{\pi}{4}(t^2+2)$	$\frac{\pi}{6}(5-t^2)$	$\frac{\pi}{3}(4-t^2)$	πt^2	x_3
3	$\frac{\pi t}{3}$	$\frac{\pi}{2}(t-2)$	$\frac{\pi}{6}(3t-2)$	$\frac{\pi}{2}(3-t)$	N
4	$\frac{\pi}{4}(1-3t^2)$	$\frac{\pi}{3}(t^2-4)$	$\frac{\pi t^2}{2}$	$\frac{\pi}{4}(2-t^2)$	x_3
5	$\frac{\pi}{6}(t+2)$	$\frac{\pi}{4}(1-t)$	$\frac{\pi}{3}-t$	$\frac{\pi}{6}(t-1)$	N
6	πt^2	$\frac{\pi}{6}(1-2t^2)$	$\frac{\pi}{4}(2t^2-3)$	$\frac{\pi}{3}(2-t^2)$	x_3
7	$\frac{\pi}{3}(5-t)$	$\frac{\pi}{4}(t+4)$	$\frac{\pi t}{6}$	$\frac{\pi}{4}(4-t)$	N
8	$\frac{\pi}{6}(t^2+3)$	$\frac{\pi}{2}(2-t^2)$	$\frac{\pi}{3}(4-t^2)$	$\pi(t^2+2)$	x_3
9	$\frac{\pi}{2}(4-t)$	$\pi(t+5)$	$\frac{\pi}{6}(2t-1)$	$\frac{\pi}{2}(2-t)$	N

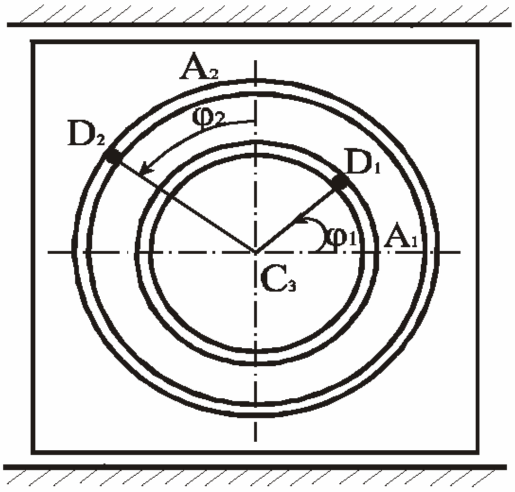


Рис. Д3.0

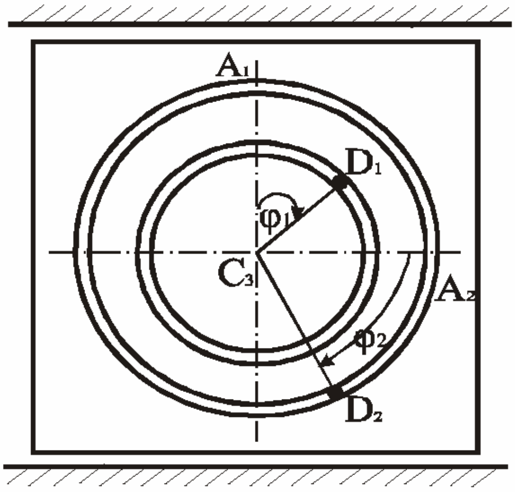


Рис. Д3.1

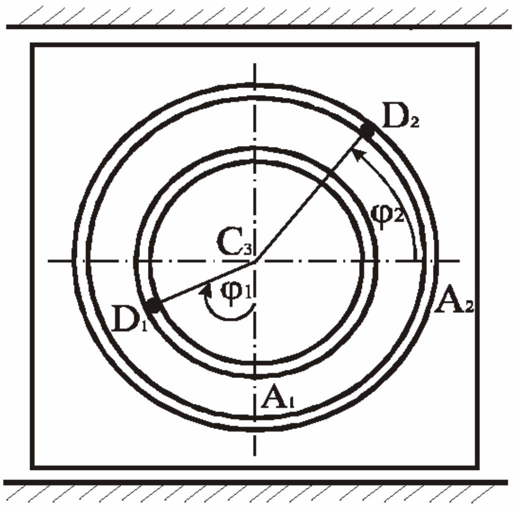


Рис. Д3.2

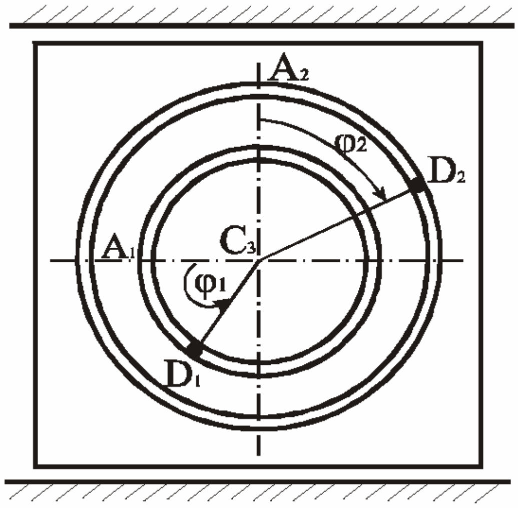


Рис. Д3.3

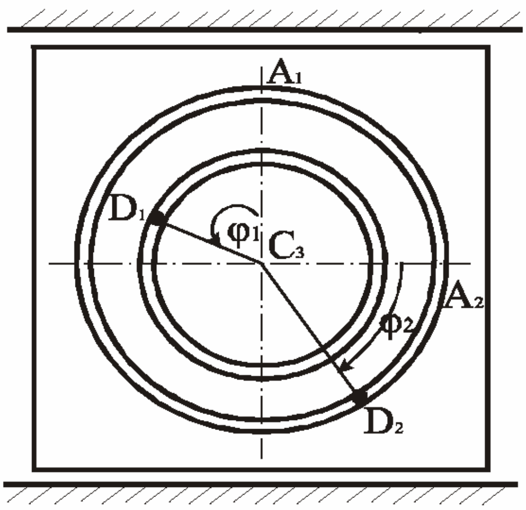


Рис. Д3.4

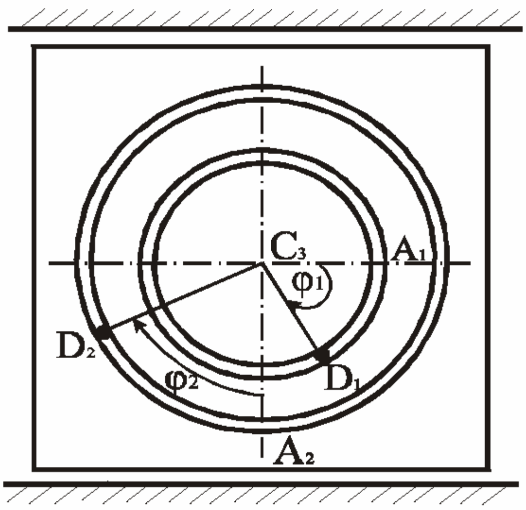


Рис. Д3.5

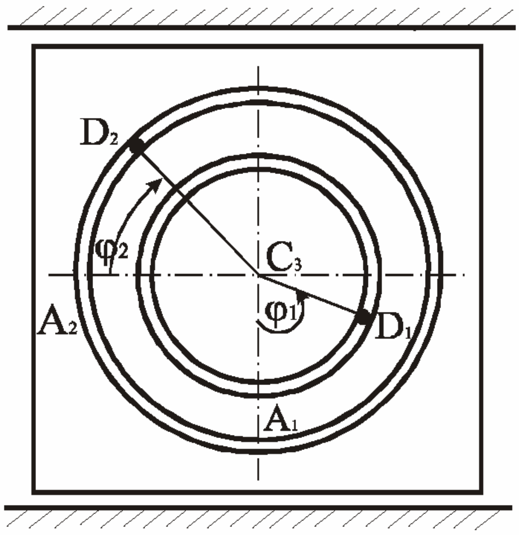


Рис. Д3.6

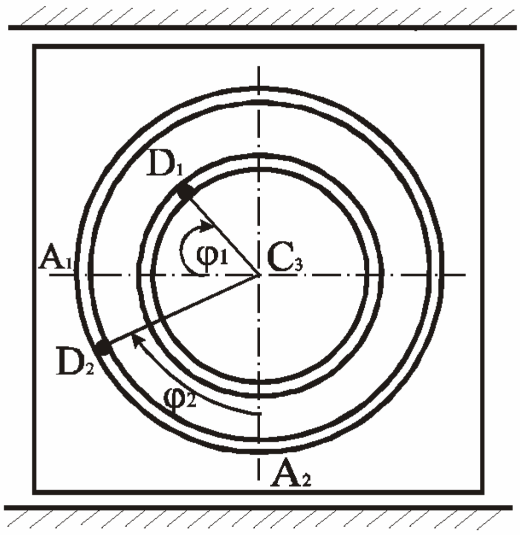


Рис. Д3.7

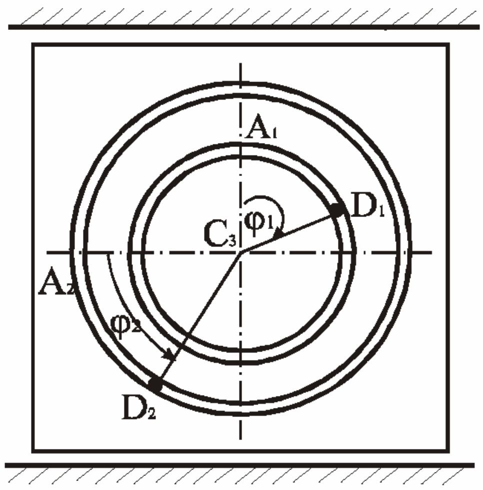


Рис. Д3.8

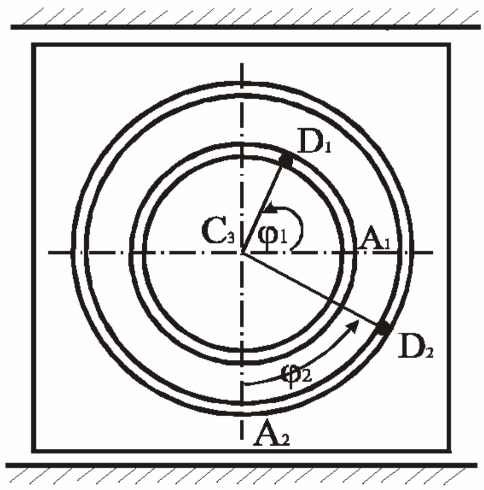


Рис. Д3.9

Пример Д3

Механическая система состоит из грузов D_1 массы m_1=5 кг и $D2$ массы m_2=12 кг и из прямоугольной вертикальной плиты массы m_3=25 кг, движущейся вдоль горизонтальных направляющих (рис. Д3). В момент времени $t_0 = 0$, когда система находилась в покое, под действием внутренних сил грузы начинают двигаться по желобу, представляющему собой окружность радиуса R=1 м, по законам $\varphi_1 = \pi(1-t)$ и $\varphi_2 = (\pi/2)t^2 + 2$, где t – в с, φ_1 и φ_2 – в рад.

Определить $x_3 = f_3(t)$ – закон движения плиты и $N = f(t)$ – закон изменения со временем полной нормальной реакции направляющих.

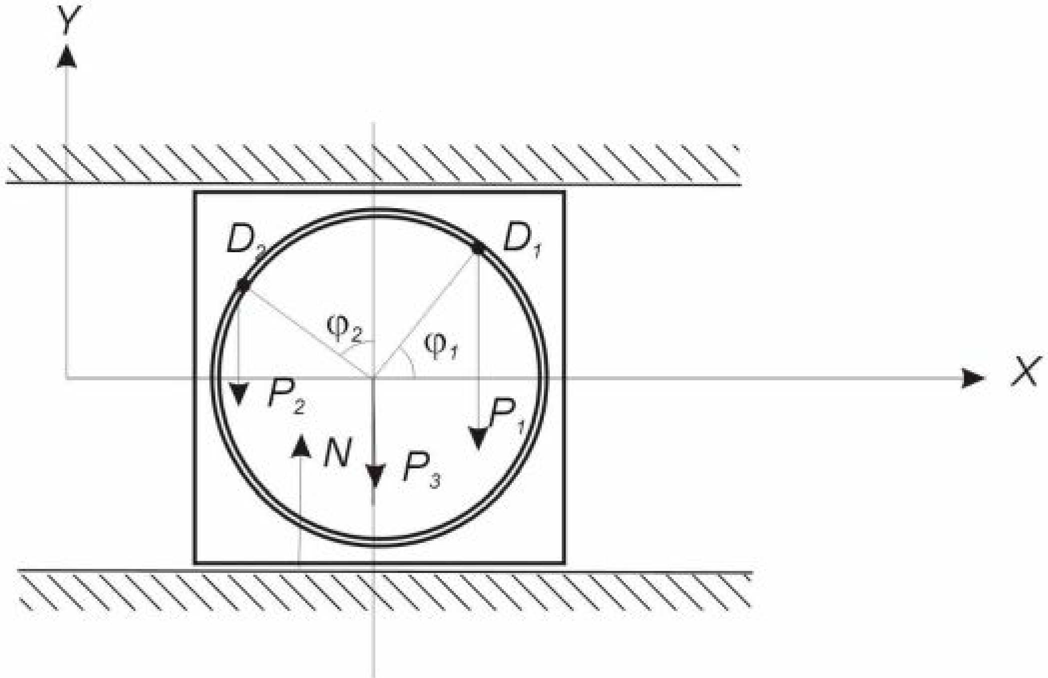


Рис. Д3

Решение.

Механическая система выбрана так, что наперед неизвестные силы, т.е. силы упругости, с которыми каждый из грузов взаимодействует с плитой, являются внутренними. Поэтому при решении данной задачи применима теорема о движении центра масс.

Рассмотрим систему в произвольном положении (рис. Д3). Изобразим все внешние силы, действующие на систему: силы тяжести $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ и реакцию направляющих $\vec{N}$. Проведем координатные оси OXY так, чтобы оси X и Y проходили через точку C_{3_0}, где находился центр масс плиты в момент времени $t_0 = 0$.

1. Для определения $x_3 = f_3(t)$ запишем уравнение, выражающее теорему о движении центра масс данной системы:

$$M\vec{a}_c = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \vec{N}, \qquad (1)$$

где $M = m_1 + m_2 + m_3$ – масса системы.

Проектируя обе части равенства (1) на координатную ось x, получим:

$$M\,\ddot{x}_c = 0, \qquad (2)$$

т.к. все внешние силы вертикальны.

Из уравнения (2) следует, что $\ddot{x}_c = 0$ или $\dot{x}_c = v_{cx} = const$.

Поскольку в начальный момент времени скорость v_c, а следовательно, и проекция скорости v_{cx} были равны нулю, то и в любой момент времени $\dot{x}_c = v_{cx} = 0$,
отсюда

$$x_c = const\,, \tag{3}$$

т.е. центр масс системы не перемещается вдоль оси OX.

Будем находить величину x_c по формуле:

$$x_c = \frac{1}{M}(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)\,.$$

В произвольный момент времени $x_1 = x_3 + R\cos\varphi_1$, $x_2 = x_3 -$
$- R\sin\varphi_2$.

В начальный момент времени (при $t=t_0=0$) $x_1=R\cos\pi$, $x_2=$
$= - R\sin 2$, $x_3 = 0$.

В соответствии с уравнением (3) координаты центра масс системы в начальный и произвольный момент времени равны:

$$x_3 = \frac{m_1 R[\cos(\pi t) - 1] + m_2 R[\sin(\frac{\pi}{2}t^2 + 2) - \sin 2]}{m_1 + m_2 + m_3}\,.$$

Ответ: x= $[0{,}12\cos(\pi t) + 0{,}29\sin(\frac{\pi}{2}t^2 + 2) - 0{,}26]$ м, где t – в секундах.

2. Для определения N=f(t) запишем уравнение (1) в проекции на ось y:

$$M\ddot{y}_c = \mathrm{N} - \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_3\,. \tag{4}$$

Учитывая, что $P_1=m_1g$, $P_2=m_2g$, $P_3=m_3g$, перепишем уравнение (4) в виде:

$$N = M\ddot{y}_c + (m_1 + m_2 + m_3)g\,. \tag{5}$$

Зависимость величины $\ddot{y}_c$ от времени определяет зависимость от времени величины N.

В соответствии с определением центра масс механической системы можем написать:

$$My_c = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3\,, \tag{6}$$

Продифференцируем уравнение (6) два раза по времени:

$$M\dot{y}_c = -\pi m_1 R\cos(\pi - \pi t) - \pi m_2 R t\sin(\frac{\pi}{2}t^2 + 2)\,,$$

$$M\ddot{y}_c = -\pi^2 m_1 R\sin(\pi - \pi t) - \pi m_2 R\sin(\frac{\pi}{2}t^2 + 2) - \pi^2 m_2 R t^2\cos(\frac{\pi}{2}t^2 + 2)\,.$$

С учетом найденного значения $M\ddot{y}_c$ определим из уравнения (5) искомую зависимость N=f(t).

Ответ: $N = 420–49{,}35\sin(\pi t)-37{,}70\sin(\frac{\pi}{2}t^2+2)$ -

$-8{,}44t^2\cos(\frac{\pi}{2}t^2+2)$, где t – в секундах, N – в ньютонах.

Задача Д4

Механическая система состоит из прямоугольной вертикальной плиты 1 массы $m_1 = 18$ кг, движущейся вдоль горизонтальных направляющих, и груза D массы $m_2 = 6$ кг (рис. Д4.0 — Д4.9, табл. Д4). В момент времени $t_0 = 0$, когда скорость плиты $v_0 = 2$ м/с, груз под действием внутренних сил начинает двигаться по желобу плиты.

На рис. Д4.0 – Д4.3 желоб KE прямолинейный и при движении груза расстояние s = AD изменяется по закону $s = f_1(t)$, а на рис. Д4.4 – Д4.9 желоб – окружность радиуса R = 0,8 м и при движении груза угол $\varphi = \angle AC_1D$ изменяется по закону $\varphi = f_2(t)$. В табл. Д4 эти зависимости даны отдельно для рис. Д4.0 и Д4.1, для рис. Д4.2 и Д4.3 и т.д., где s выражено в метрах, φ – в радианах, t – в секундах.

Считая груз материальной точкой и пренебрегая всеми сопротивлениями, определить зависимость $v = f(t)$, т.е. скорость плиты как функцию времени.

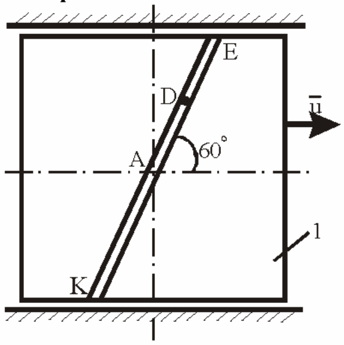


Рис. Д4.0

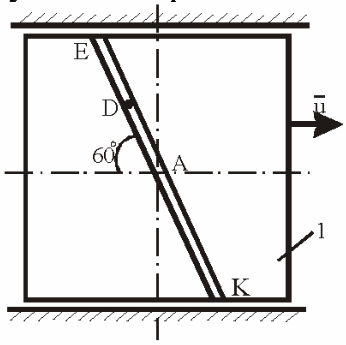


Рис. Д4.1

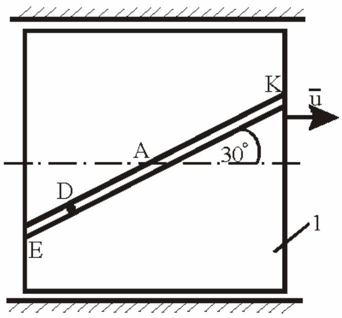


Рис. Д.4.2

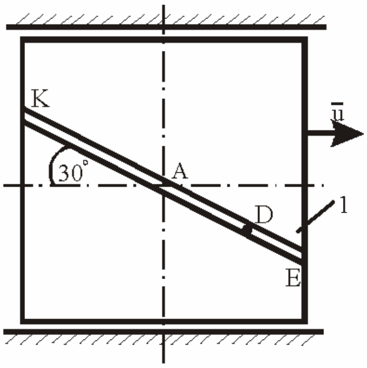


Рис. Д4.3

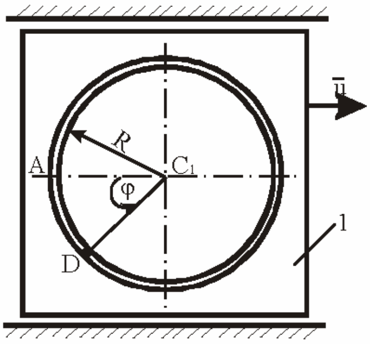


Рис. Д4.4

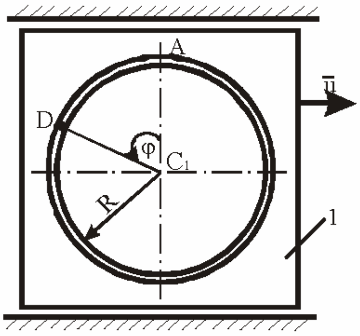


Рис. Д.4.5

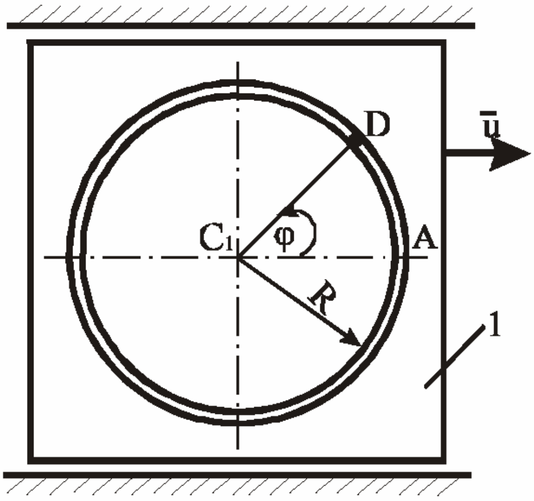


Рис. Д.4.6

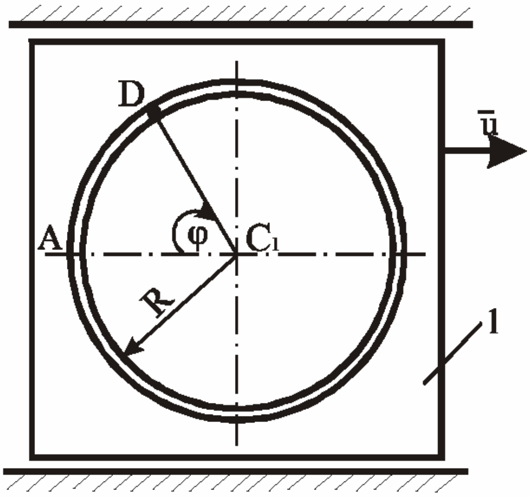


Рис. Д4.7

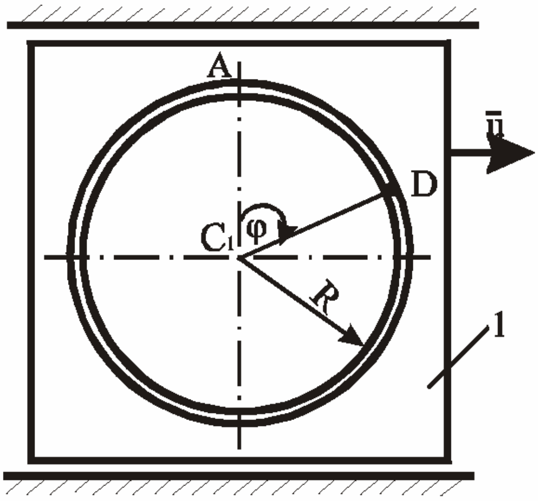


Рис. Д4.8

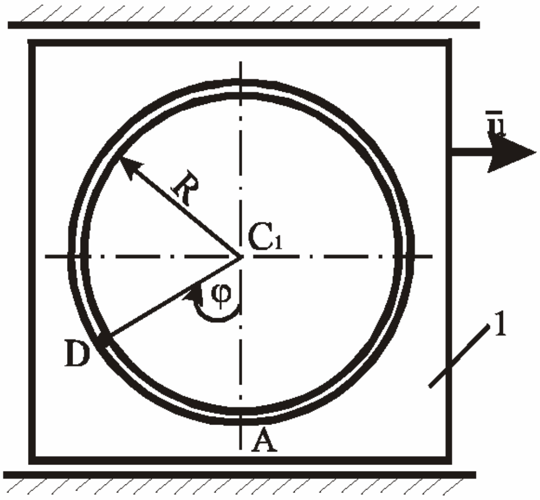


Рис. Д4.9

Таблица Д4

Номер условия	$s = f_1(t)$		$\varphi = f_2(t)$	
	рис. Д4.0, Д4.1	рис. Д4.2, Д4.3	рис. Д4.4 – Д4.6	рис. Д4.7 – Д4.9
0	$0{,}8\sin(\pi t^2)$	$0{,}4(3t^2-2)$	$\pi(3-2t^2)/3$	$\pi(2t^2-1)$
1	$1{,}2\cos(\pi t/2)$	$0{,}6\sin(\pi t^2/2)$	$\pi(1-3t^2)/4$	$\pi(1-4t^2)/3$
2	$0{,}6(2t^2-1)$	$0{,}8\cos(\pi t)$	$\pi(t^2-3)/6$	$\pi(3+4t^2)/6$
3	$0{,}4\sin(\pi t^2/3)$	$0{,}5\sin(\pi t^2/6)$	$\pi(2-t^2)$	$\pi(t^2+1)/2$
4	$0{,}5\cos(\pi t/6)$	$1{,}2\cos(\pi t/3)$	$\pi(1+2t^2)/6$	$\pi(1-5t^2)/4$
5	$0{,}6\sin(\pi t^2/4)$	$0{,}5(3-4t^2)$	$\pi(5t^2+1)/4$	$\pi(t^2-4)/3$
6	$0{,}8(2-3t^2)$	$0{,}8\sin(\pi t^2/3)$	$\pi(t^2-2)/2$	$\pi t^2/4$
7	$0{,}6\cos(\pi t/3)$	$0{,}4\cos(\pi t/4)$	$\pi(3+t^2)/3$	$\pi(3t^2-1)/6$
8	$1{,}2\sin(\pi t^2/6)$	$1{,}2\sin(\pi t^2)$	$\pi t^2/2$	$\pi(t^2+3)/4$
9	$0{,}8\cos(\pi t/4)$	$0{,}6\cos(\pi t/6)$	$\pi(t^2+2)/6$	$\pi(2-t^2)/4$

Указания. Задача Д4 – на применение теоремы об изменении количества движения системы. При решении составить уравнение, выражающее теорему, в проекции на горизонтальную ось.

Пример Д4

Механическая система состоит из прямоугольной вертикальной плиты 1 массы m_1, движущейся вдоль горизонтальных направляющих, и груза D массы m_2 (рис. Д4). В момент времени $t_0 = 0$, когда скорость плиты $v = v_0$, груз под действием внутренних сил начинает двигаться по желобу, представляющему собой окружность радиуса R, по закону $\varphi = \varphi(t)$.

Дано: m_1=12 кг, m_2=8 кг, v_0 =1,0 м/с, R=0,5 м, $\varphi = \pi\sin(2\pi t^2)$ рад (t – в секундах).

Определить $v = f(t)$ – закон изменения скорости плиты.

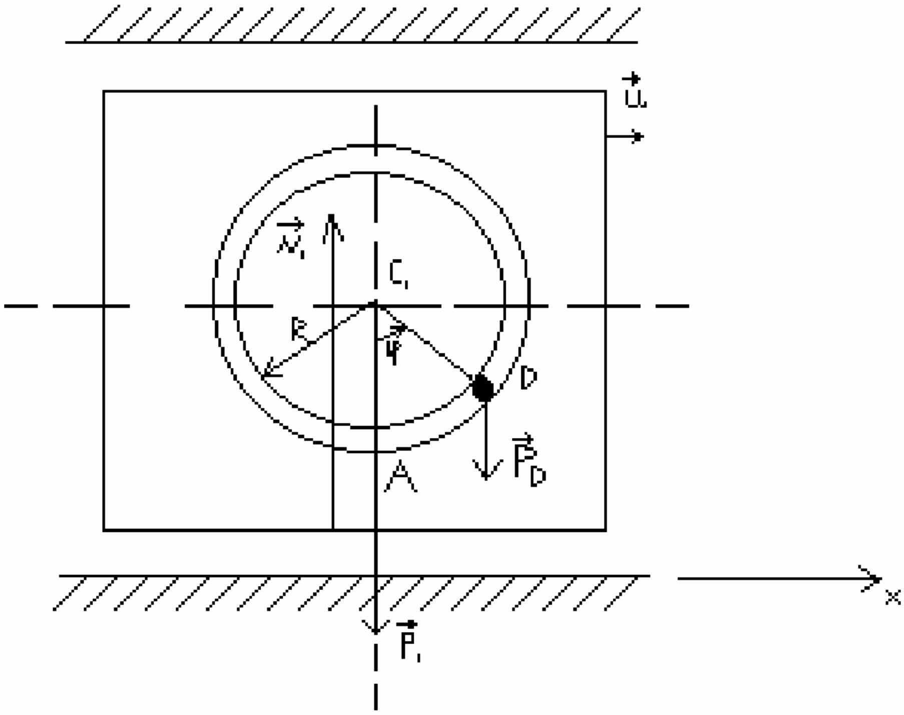


Рис. Д4

Решение.

Рассмотрим систему, состоящую из плиты 1 и груза D, и определим внешние силы, действующие на нее. На груз D действует сила тяжести $\vec{P}_D$, на плиту действует сила тяжести $\vec{P}_1$ и нормальная реакция направляющих $\vec{N}_1$. Применим к данной системе теорему об изменении количества движения в проекции на ось x, проведенную вдоль направляющих:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e, \qquad \frac{dQ_x}{dt} = P_{Dx} + P_{1x} + N_{1x}. \qquad (1)$$

Здесь Q_x – проекция количества движения системы на ось x. Поскольку силы P_D, P_1, N_1 все вертикальны, то из (1) получим

$$\frac{dQ_x}{dt} = 0 \text{ или } Q_x = const. \qquad (2)$$

Таким образом, в условиях данной задачи выполняется закон сохранения количества движения системы в проекции на ось x. Используя равенство (2), составим равенство начального (при $t = t_0 = 0$) и конечного (при произвольном t) количества движения системы:

$$Q_{0x} = Q_x; \; m_1 u_{0x} + m_2 v_{0Dx} = m_1 u_x + m_2 v_{Dx}. \qquad (3)$$

В уравнении (3) буквой v обозначена скорость груза; u_x и v_{Dx} – конечные, а u_{0x} и v_{D0x} – начальные значения проекций скоростей на ось x.

Выразим величины, входящие в уравнение (3), через время t и заданные величины:

$$u_{0x} = u_0.$$

Абсолютную скорость $\vec{v}_D$ груза представим в виде суммы переносной скорости $\vec{v}_D^{\,пер}$ и относительной скорости $\vec{v}_D^{\,отн}$:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_D^{\,пер} + \vec{v}_D^{\,отн}.$$

В проекции на ось x

$$\vec{v}_{Dx} = \vec{v}_{Dx}^{\,пер} + \vec{v}_{Dx}^{\,отн}.$$

Переносная скорость $\vec{v}_D^{\,пер} = u_x$ равна скорости $\vec{u}$ поступательного движения плиты. Следовательно, $v_D^{пер} = \vec{v}_{Dx}^{\,пер} = u_x$, $v_{D0x}^{пер} = u_{0x} = u_0$. Вектор относительной скорости $\vec{v}_D^{\,отн}$ направлен перпендикулярно радиусу C_1D вращения груза и по модулю равен

$$v_D^{отн} = R|\dot{\varphi}|.$$

Поскольку

$$\varphi = \pi \sin(2\pi t^2) \text{ и } \dot{\varphi} = 4\pi^2 t \cos(2\pi t^2), \qquad (4)$$

то в начальный момент времени положение груза определяется углом $\varphi=0$ и $v_D^{отн}=0$. Отсюда $\vec{v}_{D0x}^{\,отн}=0$.

С учетом найденного, $v_{D0x} = v_{D0x}^{пер} + v_{D0x}^{отн} = u_0$.

В начальной фазе движения, когда время t увеличивается от начального значения t_0, $\varphi > 0$ и $\dot{\varphi} > 0$. Рассматривая груз D в произвольном положении в начальной фазе движения (груз D на рис. Д4) найдем выражение для проекции вектора $\vec{v}_D^{\,отн}$ на ось x:

$$v_{Dx}^{отн} = R\dot{\varphi}\cos\varphi$$

или

$$v_{Dx}^{отн} = R 4\pi^2 t \cos(2\pi t^2)\cos[\pi \sin(2\pi t^2)].$$

Подставим найденные выражения в уравнение (3)

$$m_1 u_0 + m_2 u_0 = m_1 u_x + m_2 (u_x + 4\pi^2 Rt \cos(2\pi t^2)\cos[\pi \sin(2\pi t^2])).$$

Выражая u_x и подставляя числовые данные задачи, получим закон изменения скорости плиты:

$$u_x = 1 - 7{,}90 t \cos(2\pi t^2)\cos[\pi \sin(2\pi t^2)] \text{ м/с}.$$

Задача Д5

Однородная горизонтальная платформа (круглая радиуса R или прямоугольная со сторонами R и $2R$, где R=1,2 м) массы m_1 = 24 кг вращается с угловой скоростью ω_0=10 с$^{-1}$ вокруг вертикальной оси z, отстоящей от центра масс C платформы на расстоянии $OC = b$ (рис. Д5.0 – Д5.9, табл. Д5); размеры для всех прямоугольных платформ показаны на рис. Д5.0а (вид сверху).

В момент времени $t_0 = 0$ по желобу платформы начинает двигаться (под действием внутренних сил) груз D массы m_2 = 8 кг по закону $s = AD = F(t)$, где s выражено в метрах, t – в секундах. Одновременно на платформы начинает действовать пара сил с моментом M (задан в Н*м; при M<0 его направление противоположно показанному на рисунках).

Определить, пренебрегая массой вала, зависимость $\omega = f(t)$, т.е. угловую скорость платформы как функцию времени.

На всех рисунках груз D показан в положении, при котором s>0 (когда s<0, груз находится по другую сторону от точки *A)*. Изображая чертеж решаемой задачи, провести ось z на заданном расстоянии $OC = b$ от центра С.

Указания. Задача Д5 – на применение теоремы об изменении кинетического момента системы. При применении теоремы к системе, состоящей из платформы и груза, кинетический момент K_z системы относительно оси z определяется как сумма моментов платформы и груза. При этом следует учесть, что абсолютная скорость груза складывается из относительной $\vec{v}_{отн}$ и переносной $\vec{v}_{пер}$ скоростей, т.е. $\vec{v} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер}$. Поэтому и количество движения этого груза $m\vec{v} = m\vec{v}_{отн} + m\vec{v}_{пер}$. Тогда можно воспользоваться теоремой Вариньона (статика), согласно которой $m_z(m\vec{v}) = m_z(m\vec{v}_{отн}) + m_z(m\vec{v}_{пер})$; эти моменты вычисляются так же, как моменты сил. Подробнее ход решения разъяснен в примере Д5.

При решении задачи полезно изобразить на вспомогательном чертеже вид платформы сверху (с конца оси z), как это сделано на рис. Д5.0а – Д5.9а.

Момент инерции пластины массы m относительно оси Cz, перпендикулярной пластине и проходящей через ее центр масс C, равен:

для прямоугольной пластины со сторонами a_1 и a_2:

$$I_{Cz} = m(a_1^2 + a_2^2)/12;$$

для круглой пластины радиуса R:

$$I_{Cz} = mR^2/2.$$

Таблица Д5

Номер условия	b	$S=F(t)$	M
0	R	$-0{,}4t^2$	6
1	$R/2$	$0{,}6t^2$	$4t$
2	R	$-0{,}8t^2$	-6
3	$R/2$	$10t$	$-8t$
4	R	$0{,}4t^3$	10
5	$R/2$	$-0{,}5t$	$-9t^2$
6	R	$-0{,}6t$	8
7	$R/2$	$0{,}8t$	$6t^2$
8	R	$0{,}4t^3$	-10t
9	$R/2$	$0{,}5t^2$	$12t^2$

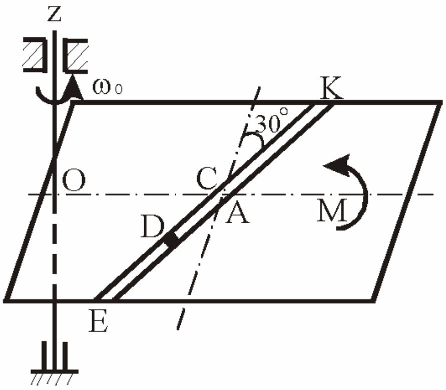


Рис. Д5.0

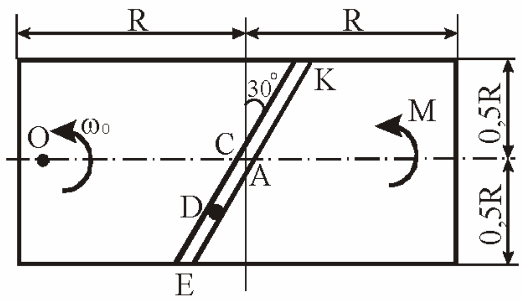


Рис. Д5.0а

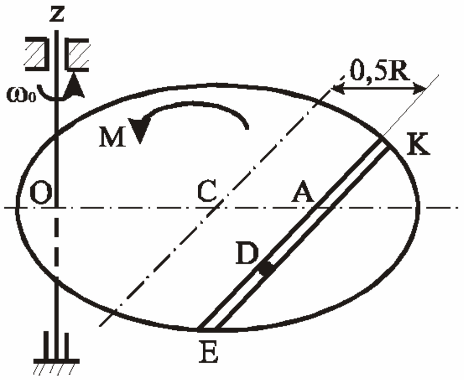


Рис. Д5.1

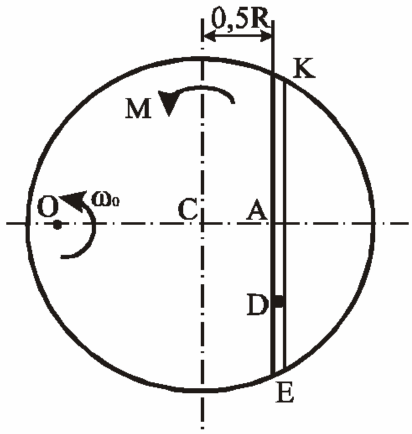


Рис. Д5.1а

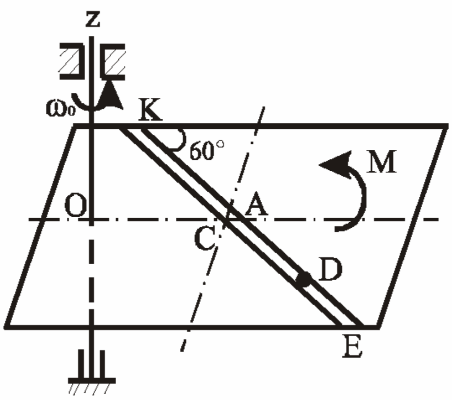


Рис. Д5.2

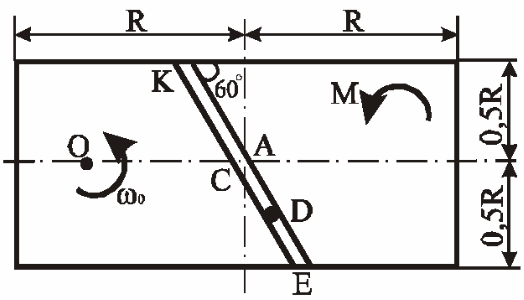
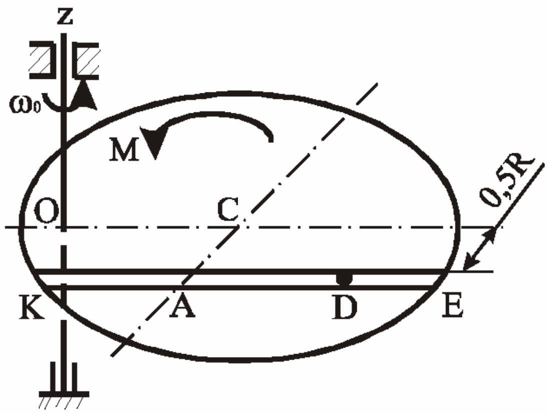


Рис. Д5.2а



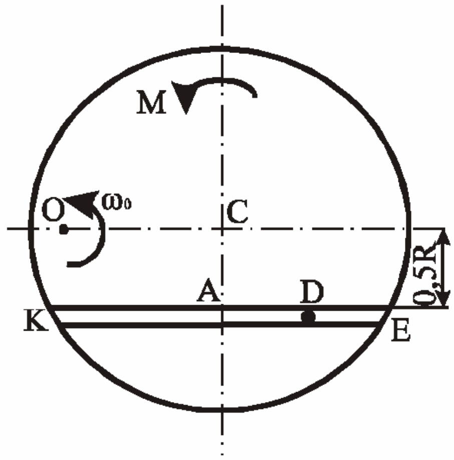
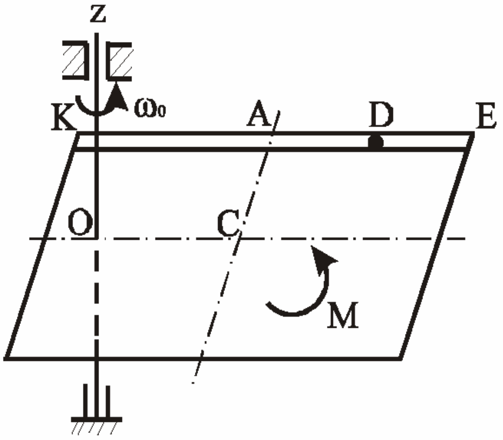


Рис. Д5.3

Рис. Д5.3а



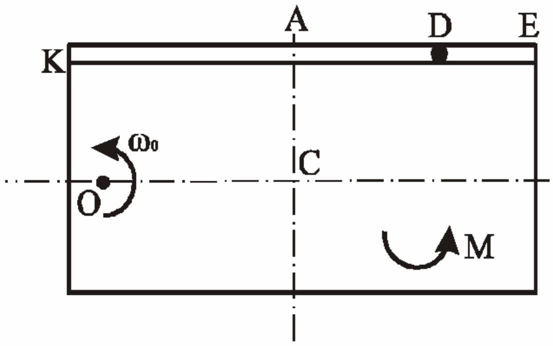
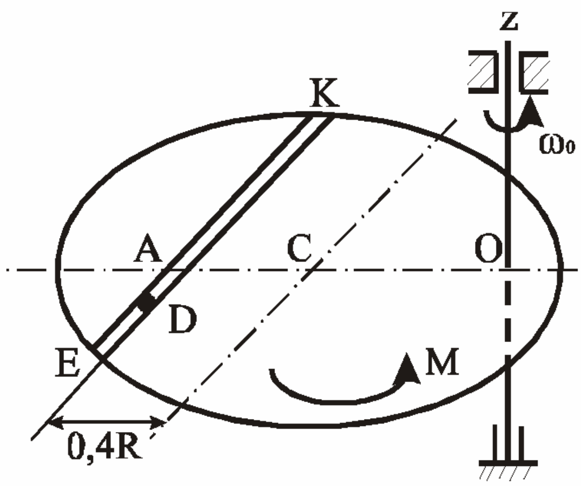


Рис. Д5.4

Рис. Д5.4а



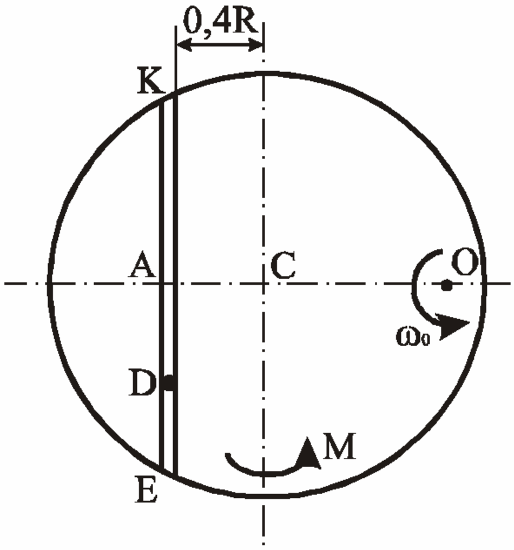
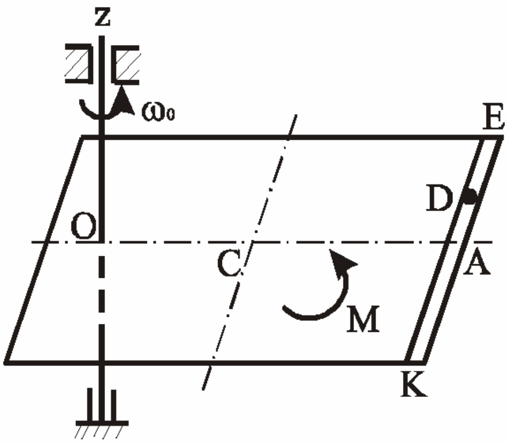


Рис. Д5.5

Рис. Д5.5а



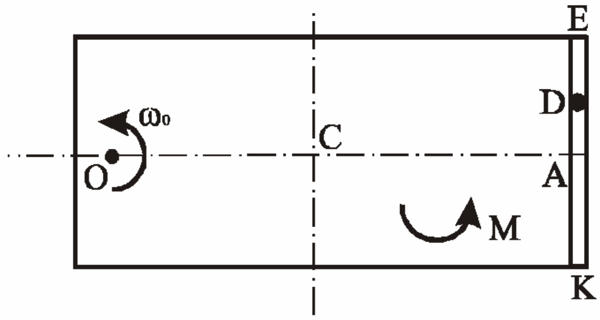
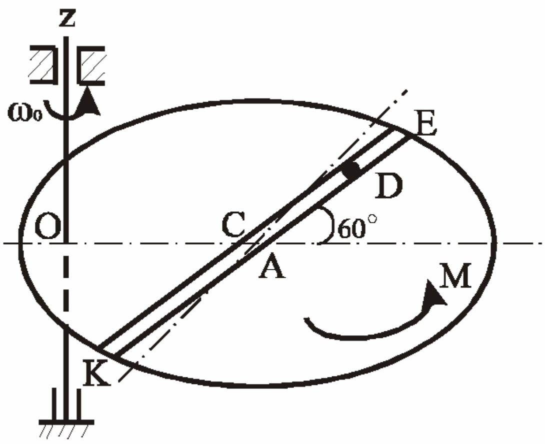


Рис. Д5.6

Рис. Д5.6а



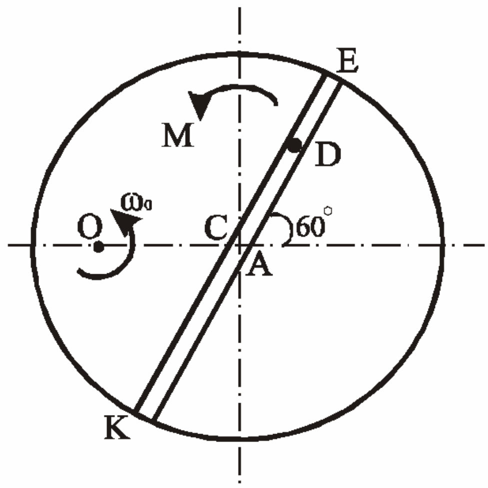
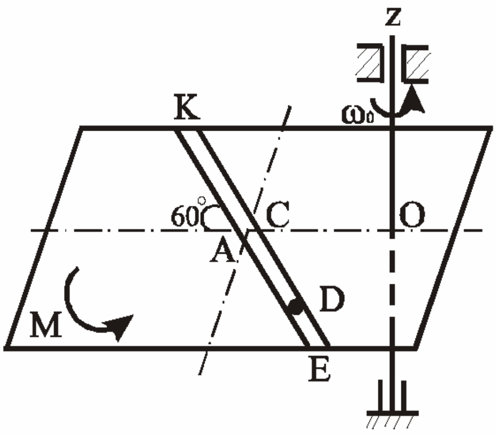


Рис. Д5.7

Рис. Д5.7а



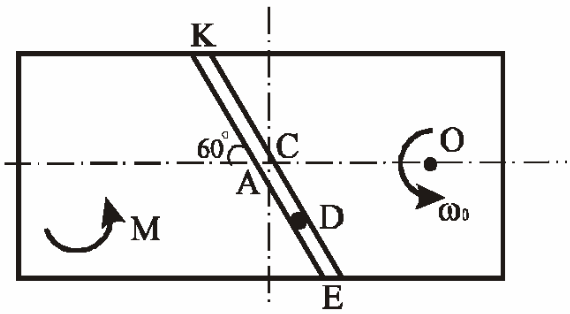


Рис. Д5.8

Рис. Д5.8а

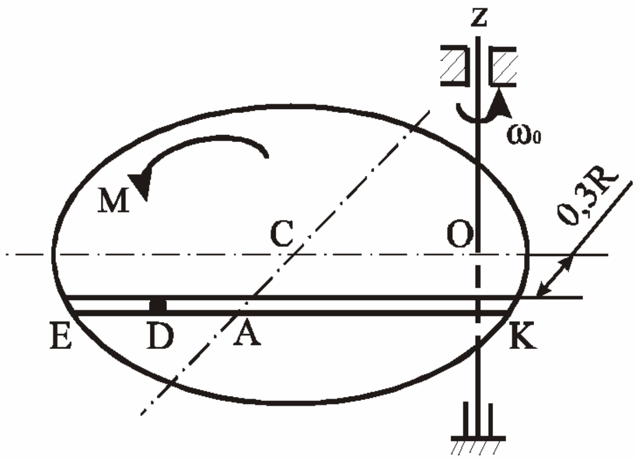


Рис. Д5.9

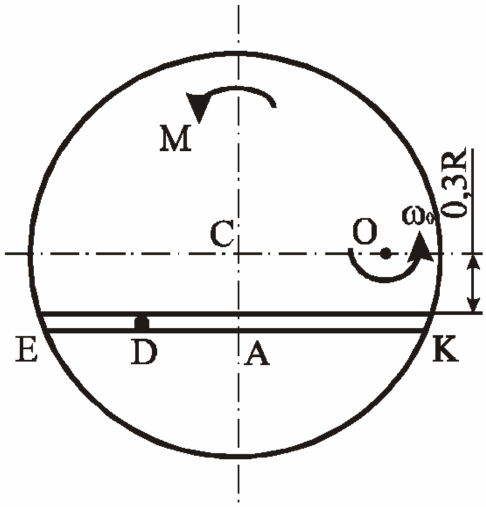


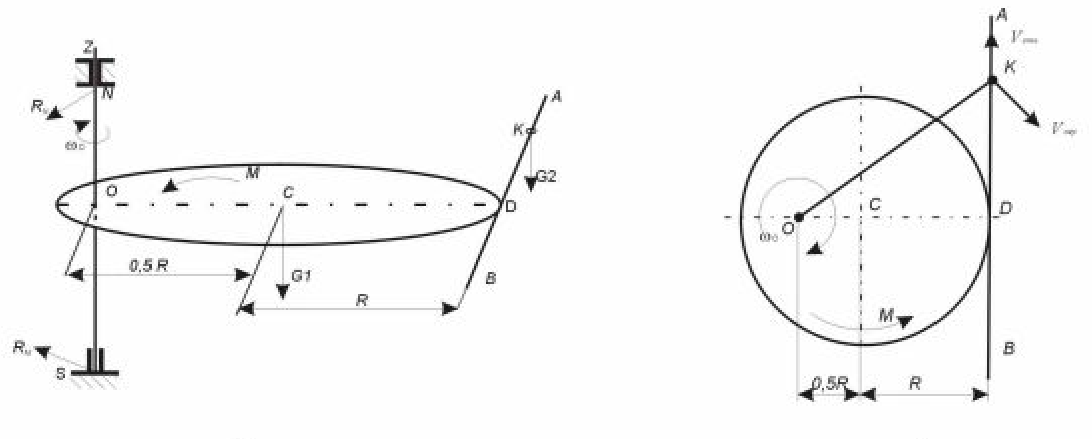
Рис. Д5.9а

Пример Д5

Однородная горизонтальная платформа (круглая радиуса R), имеющая массу m_1, и стержень AB жестко скреплены в точке D, основании радиуса платформы CD, так, что стержень AB находится в плоскости платформы под прямым углом к радиусу CD. Платформа вращается с угловой скоростью ω_0 вокруг вертикальной оси z, отстоящей от центра масс C платформы на расстоянии OC=0,5R (рис. Д5а). В момент времени $t_0 = 0$ на платформу начинает действовать пара сил с моментом M, направленным противоположно ω_0; одновременно кольцо K массы m_2, находящееся на стержне AB в точке D, начинает двигаться по стержню (под действием внутренних сил) по закону $s = DK = F(t)$.

Дано: m_1 =10 кг , m_2 =1 кг, R =1 м , ω_0 = 2 с$^{-1}$, $s = 0{,}5\,t^2$ (s – в метрах, t – в секундах), $M = kt^2$, где k=4 Нм/с^2.

Определить: $\omega = f(t)$ – закон изменения угловой скорости платформы.



а *б*

Рис. Д5

Решение

Рассмотрим механическую систему, состоящую из платформы и кольца K (рис. Д5а). На систему действуют внешние силы: сила тяжести платформы $\vec{G}_1$, сила тяжести кольца $\vec{G}_2$, силы реакции подшипников $\vec{R}_S$ и $\vec{R}_N$, а также пара сил с моментом *M*. Запишем теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси *z*:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z(\vec{F}_K^e). \qquad (1)$$

Так как силы $\vec{G}_1$ и $\vec{G}_2$ параллельны оси z , а силы $\vec{R}_S$ и $\vec{R}_N$ пересекают ось z , то их моменты относительно оси z равны нулю. Будем считать положительным направление моментов против хода часовой стрелки, тогда $\sum m_z(\vec{F}_K^e) = M = kt^2$.

Перепишем теперь уравнение (1) в виде:

$$\frac{dK_z}{dt} = kt^2.$$

Интегрируя, получим

$$K_z = \frac{k}{3}t^3 + C_1. \qquad (2)$$

Для рассматриваемой механической системы

$$K_z = K_z^{пл} + K_z^K, \qquad (3)$$

где $K_z^{пл}, K_z^K$ – кинетические моменты платформы и кольца соответственно.

Поскольку платформа совершает вращательное движение, то справедливо

$$K_z^{пл} = I_z\omega, \qquad (4)$$

где I_z – момент инерции платформы относительно оси z. Используя формулу Гюйгенса и формулу для момента инерции круглого диска относительно центральной оси, для величины I_z получим:

$$I_z = I_{Cz'} + m_1(OC)^2 = 0{,}5m_1R^2 + 0{,}25m_1R^2 = 0{,}75m_1R^2 .$$

Подставляя полученный результат в выражение (4), получим:

$$K_z^{пл} = 0{,}75m_1R^2\omega . \tag{5}$$

Для нахождения кинетического момента K_z^K рассмотрим рис. Д 5б, на котором движение кольца К представлено в виде суммы двух движений. Относительное движение совершается со скоростью $\vec{V}_{отн}$, переносное – со скоростью $\vec{V}_{пер}$. Так как кольцо К движется по закону s=DK=0,5t^2, то $V_{отн} = \dot{s} = t$. Направление вектора $\vec{V}_{отн}$ определяется знаком $\dot{s}$. В данных условиях задачи $\dot{s} > 0$. При $\dot{s} < 0$ направление $\vec{V}_{отн}$ на рис. Д 5б было бы противоположным. Затем, учитывая направление ω_0, определяем направление вектора $\vec{V}_{пер}$ ($\vec{V}_{пер} \perp$ OK); численно $V_{пер} = \omega OK$.

По теореме Вариньона:

$$K_z^K = m_z(m_2\vec{V}_{отн}) + m_z(m_2\vec{V}_{пер}) = m_2V_{отн}OD - m_2\vec{V}_{пер}OK . \tag{6}$$

Из рис. Д 5б OD=1,5R ; $OK^2 = OD^2 + s^2$ = 2,25R^2 + 0,25t^4.

С учетом полученного перепишем формулу (6) в виде:

$$\begin{aligned} K_z^K &= m_2\vec{V}_{отн}OD - m_2\omega OK^2 = \\ &= 1{,}5m_2Rt - m_2\omega(2{,}25R^2 + 0{,}25t^4). \end{aligned} \tag{7}$$

Подставляя формулы (5) и (7) в формулу (3), получим с учетом данных задачи:

$$\begin{aligned} K_z &= 0{,}75m_1R^2\omega + 1{,}5m_2Rt - m_2\omega(2{,}25R^2 + 0{,}25t^4) = \\ &= 5{,}25\omega + 1{,}5t - 0{,}25\omega t^4, \end{aligned}$$

тогда уравнение (2) примет вид (учтем k = 4):

$$-0{,}25\omega t^4 + 1{,}5t + 5{,}25\omega = \frac{4}{3}t^3 + C_1 . \tag{8}$$

Постоянную интегрирования определяем по начальным условиям: при $t = 0$ $\omega = \omega_0$. Получим C_1 = 5,25, ω_0 = 10,5 кгм^2/с.

Подставляя найденное значение C_1 в уравнение (8), находим искомую зависимость ω от t.

Ответ: ω =(5,33t^3 – 6t+ 42)/(21 – t^4), где t – в секундах, ω – в с$^{-1}$.

Задача Д6

Механическая система состоит из грузов 1 и 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней R_3=0,3 м, r_3=0,1 м и радиусом инерции относительно оси вращения ρ_3 =0,2 м, блока 4 радиуса R_4=0,2 м и катка (или подвижного блока) 5 (рис. Д6.0 – Д6.9, табл. Д6); тело 5 считать сплошным однородным цилиндром, а массу блока 4 – равномерно распределенной по ободу. Коэффициент трения грузов о плоскость f=0,1. Тела системы соединены друг с другом нитями, перекинутыми через блоки и намотанными на шкив 3 (или на шкив и каток); участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. К одному из тел прикреплена пружина с коэффициентом жесткости с.

Под действием силы F=f(s), зависящей от перемещения s точки ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя; деформация пружины в момент начала движения равна нулю. При движении на шкив 3 действует постоянный момент M сил сопротивления (от трения в подшипниках).

Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение s станет равным s_1=0,2 м. Искомая величина указана в графе «Найти» таблицы, где обозначено: v_1, v_2, v_{c5} – скорости грузов 1, 2 и центра масс тела 5 соответственно, ω_3 и ω_4 – угловые скорости тел 3 и 4.

Все катки, включая и катки, обмотанные нитями (как, например, каток 5 на рис. Д6.2), катятся по плоскостям без скольжения.

На всех рисунках не изображать груз 2, если m_2=0; остальные тела должны изображаться и тогда, когда их масса равна нулю.

Таблица Д6

Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	c, Н/м	M, Н·м	$F=f(s)$, Н	Найти
0	0	6	4	0	5	200	1,2	80(4+5s)	ω_3
1	8	0	0	4	6	320	0,8	50(8+3s)	v_1
2	0	4	6	0	5	240	1,4	60(6+5s)	v_2
3	0	6	0	5	4	300	1,8	80(5+6s)	ω_4
4	5	0	4	0	6	240	1,2	40(9+4s)	v_1
5	0	5	0	6	4	200	1,6	50(7+8s)	v_{c5}
6	8	0	5	0	6	280	0,8	40(8+9s)	ω_3
7	0	4	0	6	5	300	1,5	60(8+5s)	v_2
8	4	0	0	5	6	320	1,4	50(9+2s)	ω_4
9	0	5	6	0	4	280	1,6	80(6+7s)	v_{c5}

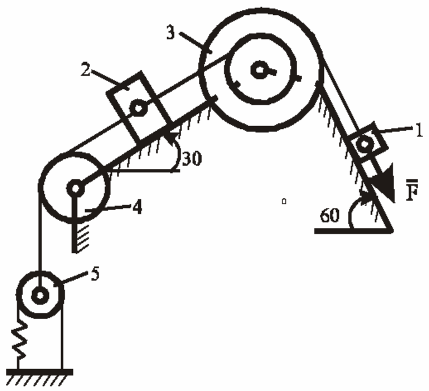


Рис. Д6.0

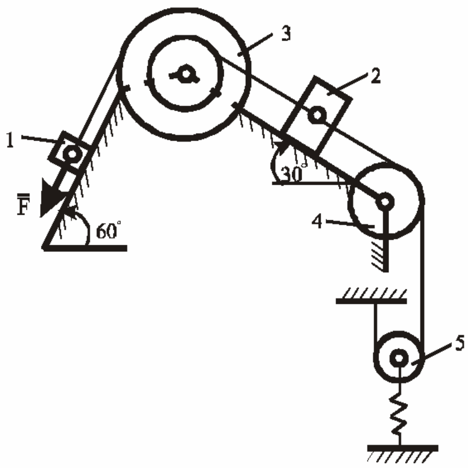


Рис. Д6.1

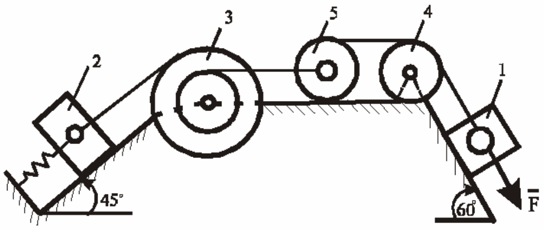


Рис. Д6.2

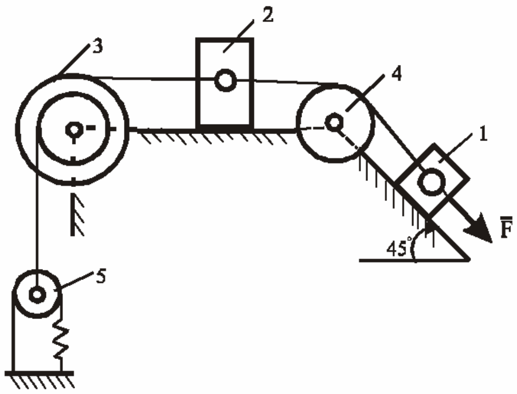


Рис. Д6.3

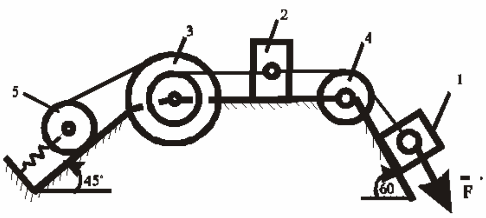


Рис. Д6.4

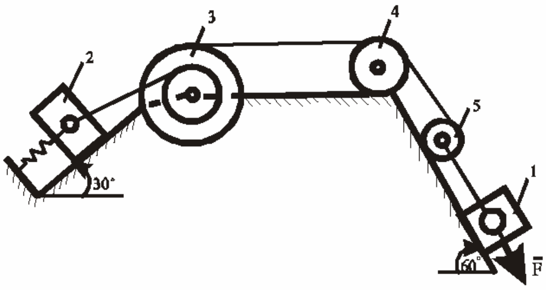


Рис. Д6.5

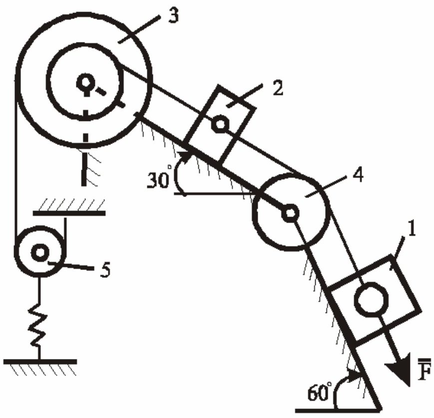


Рис. Д6.6

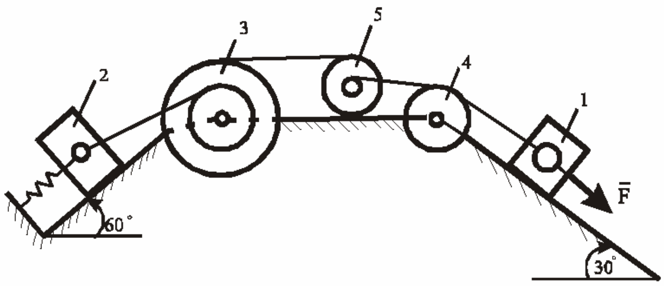


Рис. Д6.7

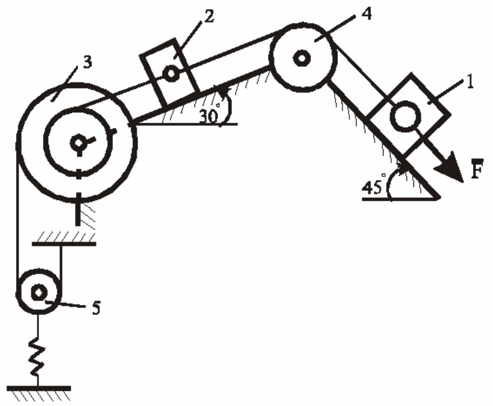


Рис. Д6.8

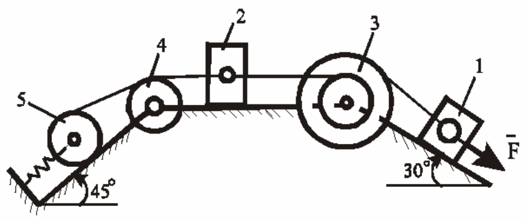


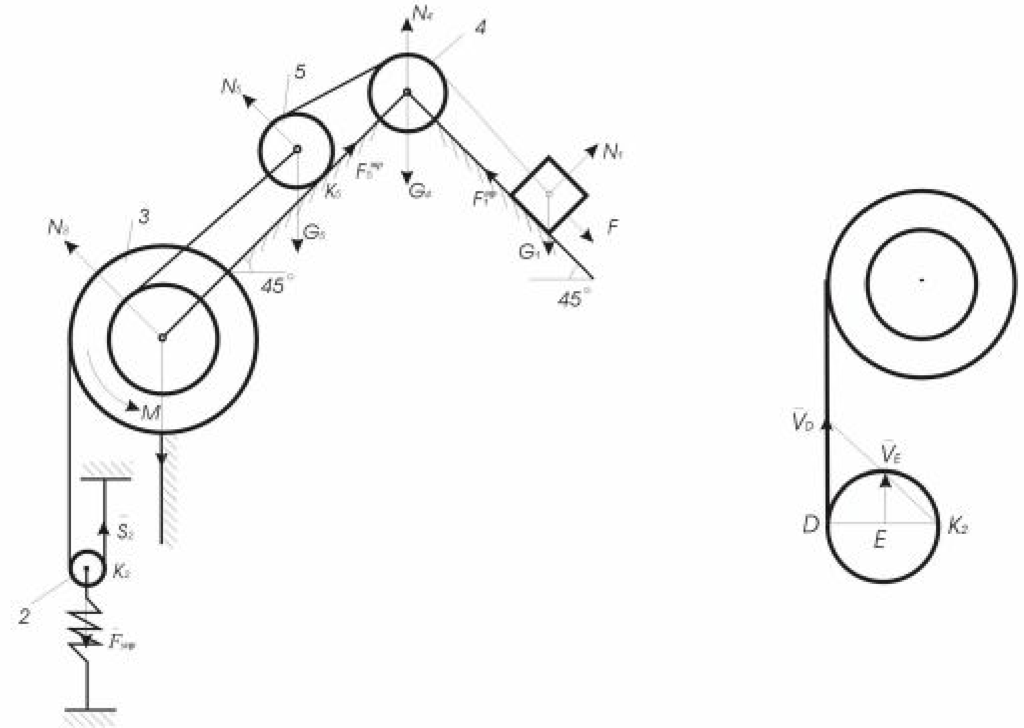
Рис. Д6.9

Указания. Задача Д6 – на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы. При решении задачи следует учесть, что кинетическая энергия Т системы равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел; эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задаче надо определить. При вычислении Т для установления зависимости между скоростями точек тела, движущегося плоскопараллельно, или между его угловой скоростью и скоростью центра масс воспользоваться мгновенным центром скоростей (кинематика). При вычислении работы надо все перемещения выразить через заданное перемещение s_1, учтя, что зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями.

Пример Д6

Механическая система (рис. Д6а) состоит из груза 1, подвижного блока 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней R_3 и r_3 и радиусом инерции относительно оси вращения ρ_3 , блока 4 и сплошного однородного цилиндрического катка 5. Коэффициент трения груза 1 о плоскость равен f. Тела системы соединены нитями, намотанными на шкив 3 и каток 5. К центру блока 2 прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c; ее начальная деформация равна нулю.

Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы $F=f(s)$, зависящей от перемещения s точки ее приложения. На шкив 3 при движении действует постоянный момент М сил сопротивления.



а б

Рис. Д6

Дано: m_1 = 10 кг, m_2 = 0 кг, m_3 = 3 кг, m_4 = 1 кг, m_5 = 5 кг, R_3= =0,3 м, r_3 = 0,1 м, ρ_3 = 0,2 м, f = 0,1, c = 300 Н/м, M = 0,5 Н·м, F= = 70(3+s) Н, s_1 = 0,2 м.

Определить ω_4 в тот момент, когда $s = s_1$.

Решение.

Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из весомых тел 1, 3, 4, 5 и невесомого тела 2, соединенных нитями. На систему действуют внешние силы: активные $\vec{F}, \vec{F}_{упр}$, G_1, G_3, G_4, G_5, реакции опор $\vec{N}_1, \vec{N}_3, \vec{N}_4, \vec{N}_5$, сила натяжения нити $\vec{S}_2$, силы трения $\vec{F}_1^{\text{тр}}, \vec{F}_5^{mp}$ и момент M.

Применим к системе теорему об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum A_к^e \,. \qquad (1)$$

Так как в начальный момент система находилась в покое, то T_0 =0. Кинетическая энергия системы Т складывается из кинетических энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_3 + T_4 + T_5. \qquad (2)$$

Учитывая, что тело 1 движется поступательно, тело 5 плоскопараллельно, а тела 3 и 4 совершают вращательное движение, получим:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2; \qquad T_3 = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2;$$

$$T_4 = \frac{1}{2} I_4 \omega_4^2; \qquad T_5 = \frac{1}{2} m_5 v_{c5}^2 + \frac{1}{2} I_{c5} \omega_5^2. \tag{3}$$

Все входящие сюда скорости надо выразить через искомую ω_4.

Отметим сначала, что радиус блока 4 и радиус катка 5 связаны соотношением $r_4 = 2r_5$. Из геометрии схемы также следует равенство $r_5 = r_3$, и, следовательно, $r_4 = 2r_3$. Заметим также, что $v_{c5} = v_A$, где A – любая точка обода радиуса r_3 шкива 3, $v_5 = v_1 = v_B$, где v_5 – скорость точки обода катка 5, диаметрально противоположной мгновенному центру скоростей катка K_5, а B – любая точка обода блока 4. Тогда:

$$\left.\begin{aligned} v_1 = \omega_4 r_4 = 2r_3\omega_4 \quad & \omega_3 = v_{c5}/r_3 = v_1/2r_3 = \omega_4 \\ v_{c5} = r_3\omega_4 \quad & \omega_5 = v_{c5}/r_5 = \omega_4 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Найдем моменты инерции, входящие в (3).

$$I_3 = m_3\rho_3^2;\ I_4 = m_4 r_4^2 = 4m_4 r_3^2;\ I_{c5} = \frac{1}{2} m_5 r_5^2 = \frac{1}{2} m_5 r_3^2. \tag{5}$$

Подставив все величины (4) и (5) в равенство (3), а затем, используя равенство (2), получим окончательно:

$$T = [r_3^2(2m_1 + 2m_4 + 3/4m_5) + 1/2\, m_3\rho_3^2]\omega_4^2. \tag{6}$$

Теперь найдем сумму работ всех внешних сил при перемещении, которое будет иметь система, когда груз 1 пройдет путь s_1.

Работы восьми сил равны нулю, так как реакция $\vec{N}_1$ перпендикулярна перемещению груза, силы $\vec{S}_2$, $\vec{N}_5$ и $\vec{F}_5^{TP}$ приложены в мгновенных центрах скоростей K_2 и K_5 и точки приложения сил $\vec{G}_3, \vec{N}_3, \vec{G}_4, \vec{N}_4$ неподвижны.

Введем обозначения: s_{C5} – перемещение центра катка 5, φ_3 – угловое перемещение шкива 3, λ_0, λ_1 – начальное и конечное удлинения пружины. Работы остальных сил равны:

$$A(\vec{F}) = \int_0^{s_1} 70(3+s)ds = 35(6s_1 + s_1^2),$$

$$A(\vec{F}_1^{тр}) = -\vec{F}_1^{тр}\ s_1 = -fG_1s_1\cos 45^0,$$
$$A(G_1) = G_1\ s_1 \sin 45^0,$$
$$A(\vec{G}_5) = -G_5\ s_{C5} \sin 45^0,$$
$$A(M) = -M\ \varphi_3,$$
$$A(\vec{F}_{УПР}) = \frac{c}{2}\ (\lambda_0^2 - \lambda_1^2).$$

По условиям задачи $\lambda_0=0$. Тогда $\lambda_1= s_E$, где s_E – перемещение точки E (конца пружины). Величины s_E, s_{C5} и φ_3 надо выразить через заданное перемещение s_1; для этого учтем, что зависимость между перемещениями здесь такая же, как и между соответствующими скоростями. Тогда, так как $\omega_3= v_1/2r_3$, $v_{C5}=0{,}5v_1$ (см. равенства (4)), то и $\varphi_3=s_1/2r_3$, $s_{C5}=0{,}5s_1$. Далее из рис. Д 6б видно, что $v_Д= \omega_3 R_3$, а так как точка K_2 является мгновенным центром скоростей для блока 2 (он как бы катится по участку нити K_2L), то $v_E=0{,}5v_Д=0{,}5\,\omega_3 R_3$. Заменяя скорости перемещениями, получим $s_E=0{,}5\,\varphi_3 R_3=0{,}25(R_3/r_3)s_1$. Используя найденные значения s_{C5}, φ_3 и λ_1, для суммы вычисленных работ получим:

$$\sum A_к^e = 35(6s_1 + s_1^2) + G_1s_1\sin 45° - fG_1s_1\cos 45° -$$
$$-\frac{1}{2}G_5s_1\sin 45° - \frac{1}{2}M\frac{s_1}{r_3} - \frac{c}{32}\frac{R_3^2}{r_3^2}s_1^2. \tag{7}$$

Подставляя выражения (6) и (7) в уравнение (1) и учитывая, что $T_0=0$, получим равенство:

$$[r_3^2(2m_1 + 2m_4 + 3/4m_5) + 1/2\,m_3\rho_3^2]\omega_4^2 = 35(6s_1 + s_1^2) +$$
$$+ G_1s_1\sin 45° - fG_1s_1\cos 45° - \frac{1}{2}G_5s_1\sin 45° - \tag{8}$$
$$-\frac{1}{2}M\frac{s_1}{r_3} - \frac{c}{32}\frac{R_3^2}{r_3^2}s_1^2.$$

Из равенства (8), подставив в него числовые значения заданных величин, найдем искомую угловую скорость ω_4.

Ответ: $\omega_4=8{,}7\ с^{-1}$.

Динамика плоского движения твердого тела

Задача Д7

Барабан радиуса R веса P имеет выточку (как у катушки) радиуса r =0,6R (рис. Д7.0 — Д7.9, табл. Д7). К концам намотанных на барабан нитей приложены постоянные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, направления которых определяются углом β; кроме сил, на барабан действует пара с моментом M; когда в таблице M<0, направление момента противоположно показанному на рисунке. При движении, начинающемся из состояния покоя, барабан катится без скольжения по шероховатой наклонной плоскости с углом наклона α так, как показано на рисунках.

Пренебрегая сопротивлением качению, определить закон движения центра масс C барабана, т.е. $x_c = f(t)$, и наименьшее значение коэффициента трения f о плоскость, при котором возможно качение без скольжения. Барабан рассматривать как сплошной однородный цилиндр радиуса R.

Указания. Задача Д7 — на применение дифференциальных уравнений плоскопараллельного движения твердого тела. При составлении уравнений следует во избежание ошибок в знаках направить координатную ось x в ту сторону, куда предполагается направленным движение центра C барабана, и считать тогда все моменты положительными, когда они направлены в сторону вращения барабана. Если фактически направление движения центра C другое, то в ответе получится a_c<0, но найденное значение $|a_c|$ будет верным. Силу трения, когда неясно, куда она направлена, можно направлять в любую сторону.

Определяя наименьшее значение коэффициента трения, при котором возможно качение без скольжения, учесть, что сила трения не может быть больше предельной, т.е. что $|F_{тр}| \leq fN$, откуда $f \geq |F_{тр}|/N$. Следовательно, $f_{\min} \geq |F_{тр}|/N$. Очень существенно, что во все эти выражения входят модули сил (мы не пишем $|N|$, так как в данной задаче не может быть N<0). Если при расчетах получится $F_{тр}$<0, то это означает лишь, что фактически сила $\vec{F}_{тр}$ направлена в другую сторону; в остальном весь расчет будет верен.

Таблица Д7

Номер условия	α	β	F_1	F_2	M
	град.				
0	30	60	0	0,4P	0
1	30	30	0.2P	0	0
2	0	30	0	0,2P	0,1PR
3	30	-	0	0	0,4PR
4	30	90	0,1P	0	-0,2PR
5	0	60	0,3P	0,1P	0
6	30	0	0	0,3P	0,2PR
7	0	60	0,2P	0	0,3PR
8	30	90	0	0,2P	-0,4PR
9	30	60	0,1P	0	-0,3PR

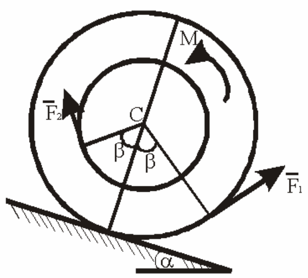


Рис. Д7.0

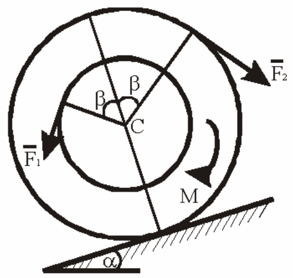


Рис. Д7.1

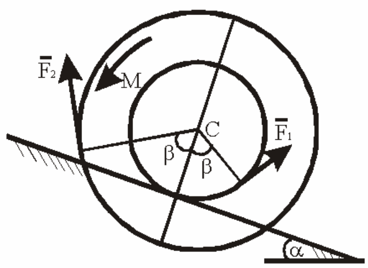


Рис. Д7.2

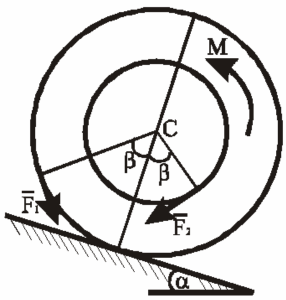


Рис. Д7.3

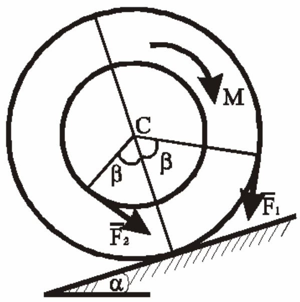


Рис. Д7.4

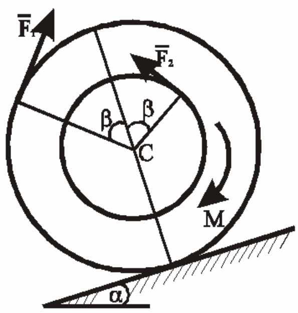


Рис. Д7.5

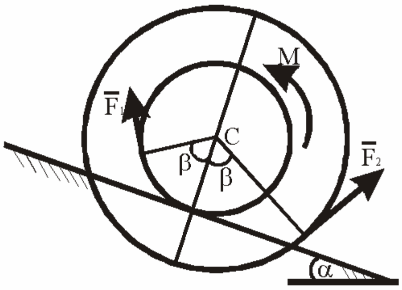


Рис. Д7.6

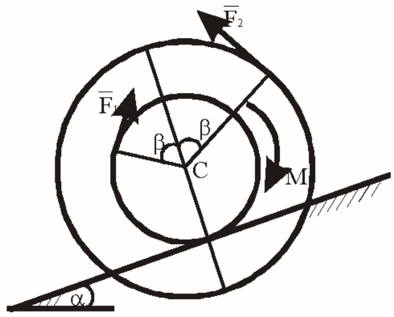


Рис. Д7.7

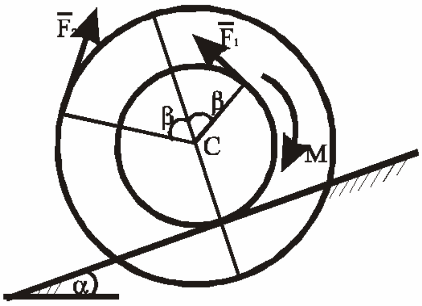


Рис. Д7.8

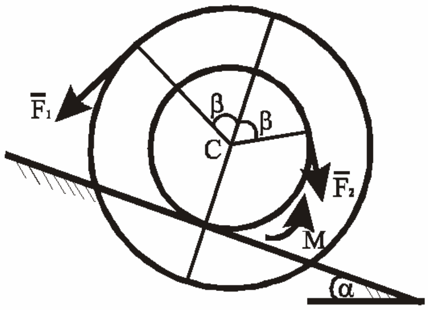


Рис. Д7.9

Пример Д7

Каток (сплошной однородный цилиндр) радиуса R и веса P начинает катиться без скольжения из состояния покоя по наклонной плоскости с углом наклона α ; на каток действует сила $\vec{F}$.

Дано: F =0,2P, α =60^0.

Определить: 1) $x_c=f(t)$ – закон движения центра масс катка;

2) $f_{\min}$ – наименьший коэффициент трения, при котором возможно качение без скольжения.

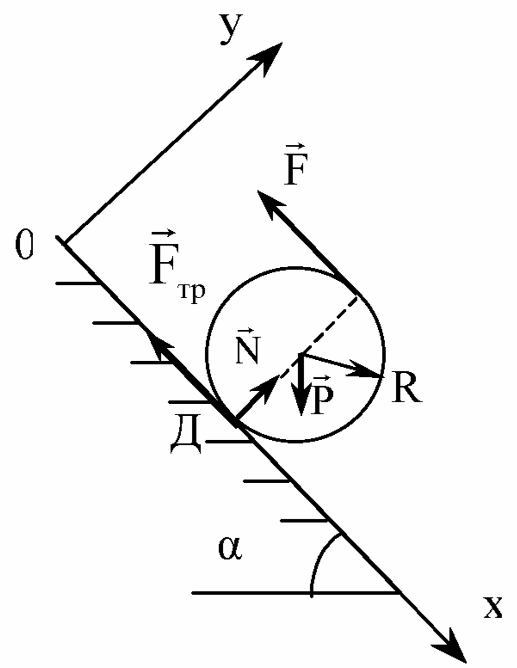


Рис. Д7

Решение.

Каток совершает плоскопараллельное движение. Покажем действующие на него силы: $\vec{P}, \vec{F}, \vec{N}, \vec{F}_{тр}$. Так как направление силы трения $\vec{F}_{тр}$ заранее неизвестно, выбираем его произвольно. Проведем оси Oxy так, что ось Oy проходит через начальное положение центра масс катка и ось Ox параллельна линии движения центра масс катка. Составим дифференциальное уравнение плоскопараллельного движения:

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{kx}; \qquad m\ddot{x}_C = P\sin\alpha - F - F_{тр}; \qquad (1)$$

$$m\ddot{y}_C = \sum F_{ky}; \qquad m\ddot{y}_C = N - P\cos\alpha; \qquad (2)$$

$$I_{Cz}\cdot\varepsilon = \sum \mathrm{M}_{Cz}(\vec{F}_k); \qquad \frac{mR^2}{2}\varepsilon = F_{тр}R - FR. \qquad (3)$$

За положительное направление для моментов принято направление по ходу часовой стрелки, т.е. в ту сторону, куда будет вращаться каток при движении центра С от оси Оу.

Учитывая, что центр масс катка не движется в направлении оси y и y_C=R=$const$, определяем, что в уравнениях (1) – (3) четыре неизвестные величины: $\ddot{x}_C, F_{тр}, N$ и ε. Две из них, $\ddot{x}_C$ и ε, должны быть связаны кинематическим соотношением.

Действительно, поскольку в точке Д находится мгновенный центр скоростей катка (движение без скольжения), то $\dot{x}_C = v_C = \omega R$. Дифференцируя последнее равенство по времени, получим:

$$\ddot{x}_C = \dot{\omega} R = \varepsilon \cdot R. \qquad (4)$$

Теперь в четырех уравнениях (1) – (4) четыре неизвестные величины.

Найдем $x_c=f(t)$. Выразим из уравнения (3) $F_{тр}$ и подставим в уравнение (1), получим (с учетом равенства (4)):

$$m\ddot{x}_C = P\sin\alpha - 2F - \frac{1}{2}m\ddot{x}_C.$$

Отсюда: $$\ddot{x}_C = \frac{2}{3}\frac{P\sin\alpha - 2F}{m}.$$

Подставим данные задачи и учтем, что $P=mg$. Получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x}_C = 0{,}31g. \qquad (5)$$

Интегрируя, получим:

$$\dot{x}_C = 0{,}31gt + C_1; \qquad x_C = \frac{0{,}31}{2}gt^2 + C_1 t + C_2. \qquad (6)$$

Подставим в равенства (6) начальные условия: при $t=0$ $x_C=0$, $\dot{x}_C = v_C = 0$. Найдем $C_1=0$, $C_2=0$. Окончательно из (6) находим закон движения центра C:

$$x_C=0{,}16gt^2. \qquad (7)$$

Определим $f_{\min}$. При качении без скольжения

$$\left|F_{тр}\right| \le fN. \qquad (8)$$

Величину N находим из уравнения (2), учитывая, что $\ddot{y}_C = 0$. Получим:

$$N = P\cos\alpha = P\cos 60^\circ = 0{,}5P. \qquad (9)$$

Величину $F_{тр}$ найдем из уравнения (1), заменив в нем $\ddot{x}_C$ его значением из (5). Получим:

$$0{,}31mg = P\sin\alpha - F - F_{тр}.$$

Отсюда, так как $mg=P$, то

$$F_{тр} = P\sin 60^\circ - F - 0{,}31P = \frac{\sqrt{3}}{2}P - 0{,}31P = 0{,}36P. \qquad (10)$$

Здесь $F_{тр}$ получилась положительной, значит, направлена так, как показано на рис. Д7. Подставляя значения N и $F_{тр}$ из равенств (9) и (10) в неравенство (8), получим $0{,}36P \le f \cdot 0{,}5P$, откуда $f \geq 0{,}72$. Следовательно, наименьший коэффициент трения, при котором возможно качение катка без скольжения, $f_{\min} = 0{,}72$.

Принцип Даламбера

Задача Д8

Вертикальный вал АК (рис. Д8.0 – Д8.9), вращающийся с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ с$^{-1}$, закреплен подпятником в точке А и цилиндрическим подшипником в точке, указанной в табл. Д8 в графе 2 (AB = BD = DE = EK = $=a$). К валу жестко прикреплены тонкий однородный ломаный стержень массы $m=10$ кг, состоящий из частей *1* и *2* (размеры частей стержня показаны на рисунках, где $b = 0{,}1$ м, а их массы m_1 и m_2 пропорциональны длинам), и невесомый стержень длины $l = 4b$ с точечной массой m_3=3 кг на конце; оба стержня лежат в одной плоскости. Точки крепления стержней указаны в таблице в графах 3 и 4, а углы α, β, γ, φ даны в графах 5 – 8.

Пренебрегая весом вала, определить реакции подпятника и подшипника. При подсчетах принять $a = 0{,}6$ м.

Указания. Задача Д8 – на применение к изучению движения системы принципа Даламбера. При решении задачи учесть, что, когда силы инерции частиц тела (в данной задаче стержня) имеют равнодействующую $\vec{R}^{\text{и}}$, то численно $R^{и} = ma_c$, где a_c – ускорение центра масс С тела, но линия действия силы $\vec{R}^{\text{и}}$ в общем случае не проходит через точку С.

Таблица Д8

Номер условия	Под-шипник в точке	Крепление в точке		α, град	β, град.	γ, град.	φ, град
		ломаного стержня	невесо-мого стержня		Рис. Д8.0 – Д8.4	Рис. Д8.5 – Д8.9	
0	B	D	K	45	135	225	60
1	K	B	D	60	240	150	45
2	K	E	B	30	210	120	60
3	D	K	B	60	150	240	30
4	K	D	E	30	120	210	60
5	E	B	K	45	225	135	60
6	E	D	K	60	60	150	30
7	K	B	E	30	30	120	60
8	D	E	K	60	150	60	30
9	E	K	D	30	120	210	60

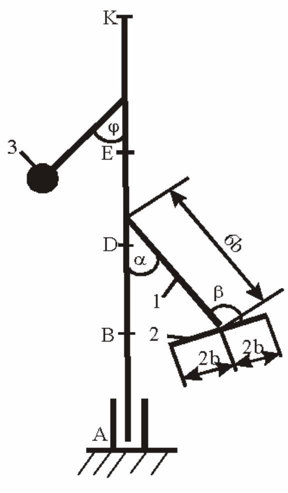


Рис. Д8.0

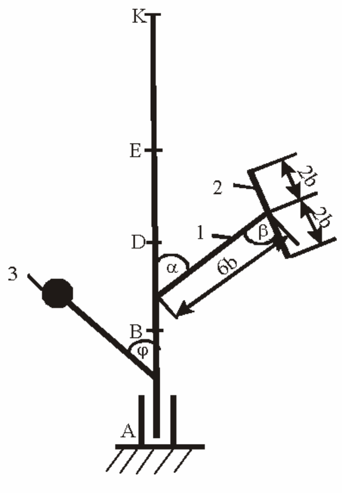


Рис. Д8.1

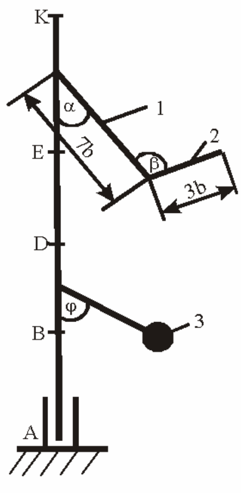


Рис. Д8.2

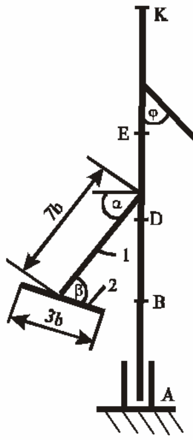


Рис. Д8.3

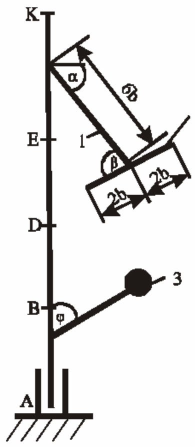


Рис. Д8.4

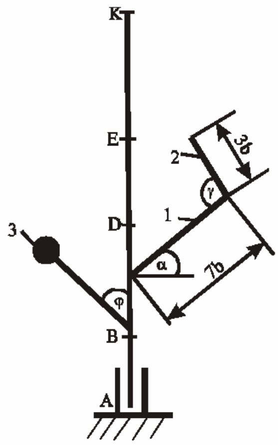


Рис. Д8.5

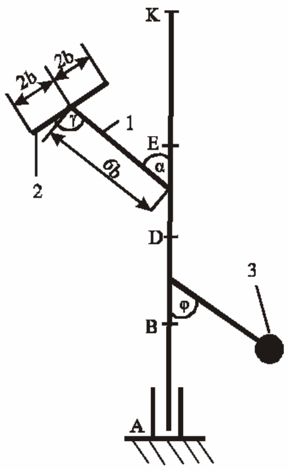


Рис. Д8.6

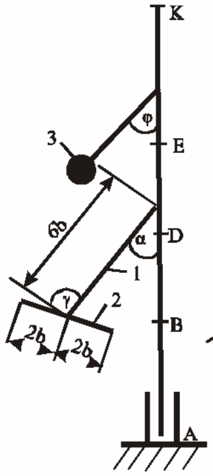


Рис. Д8.7

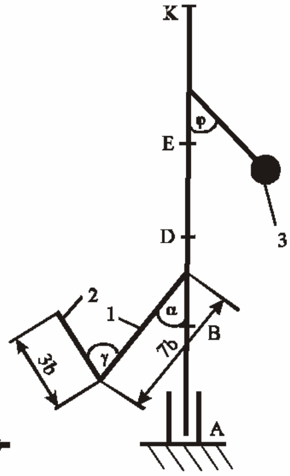


Рис. Д8.8

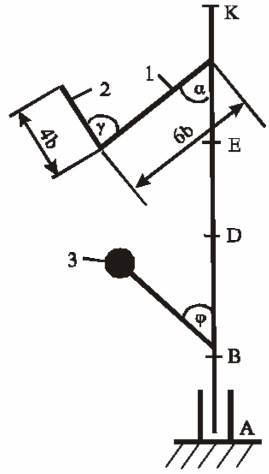


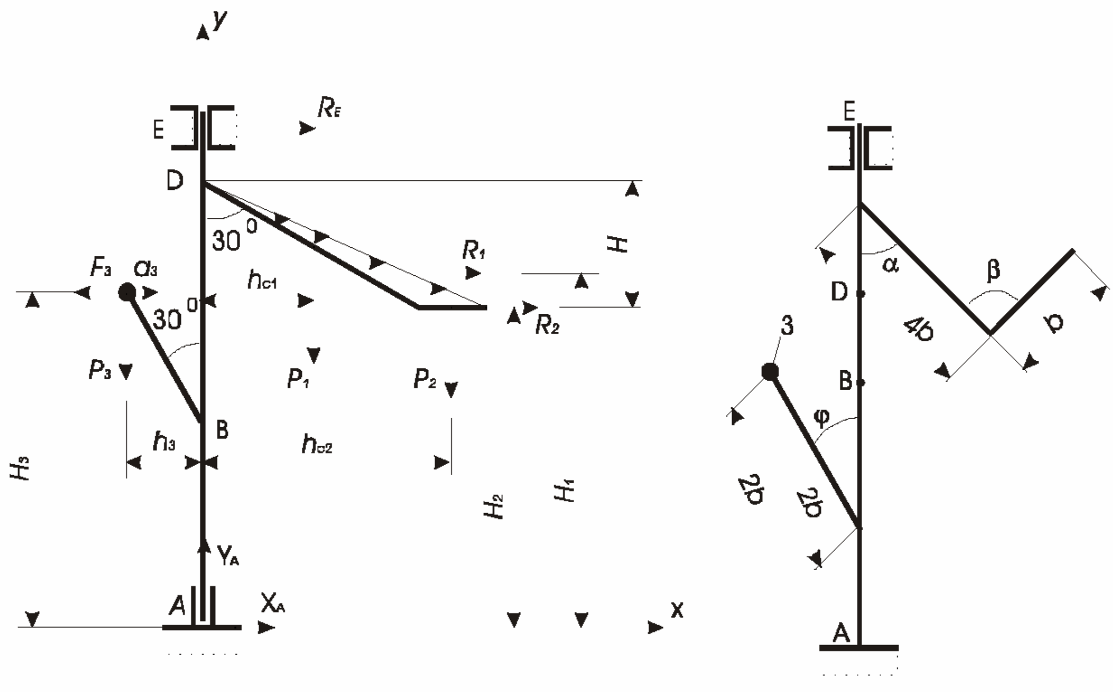
Рис. Д8.9

Пример Д8

Вертикальный вал длины $3a$ (AB = BD = DE = a), закрепленный подпятником A и подшипником E (рис. Д8б), вращается с постоянной угловой скоростью ω. К валу жестко прикреплен в точке D ломаный однородный стержень массы m и длины $5b$.,состоящий из двух частей 1 и 2, а в точке B прикреплен невесомый стержень длины $l = 2b$ с точечной массой m_3 на конце; оба стержня лежат в одной плоскости.

Дано: ω = 15 с$^{-1}$, $m = m_1 + m_2 = 10$ кг, m_3 =4 кг, α = 30^0,
β = 120^0, φ =30^0, a = 0,5 м, b = 0,1 м.

Определить: реакции подпятника A и подшипника E, пренебрегая весом вала.



а б

Рис. Д8

Решение.

Изображаем (с учетом заданных углов) вал и прикрепленные к нему в точках B и D стержни (рис. Д8а). Массы и веса частей 1 и 2 ломаного стержня пропорциональны длинам этих частей и соответственно равны

$$m_1 = 0{,}8\ m;\ m_2 = 0{,}2\,m;\ P_1 = 0{,}8\,mg\ ;\ P_2 = 0{,}2\,mg\ ;\ P_3 = m_3 g\ . \quad (1)$$

Для определения искомых реакций рассмотрим движение заданной механической системы и применим принцип Даламбера. Проведем вращающиеся вместе с валом оси Axy так, чтобы стержни лежали в одной плоскости xy, и изобразим действующие на систему силы: активные силы – силы тяжести $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ и реакции связей – составляющие реакции подпятника $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ и реакцию цилиндрического подшипника $\vec{R}_E$.

Согласно принципу Даламбера, присоединим к этим силам силы инерции элементов однородного ломаного стержня и груза, считая его материальной точкой.

Так как вал вращается равномерно, то полные ускорения элементов стержня равны нормальным ускорениям, $\vec{a}_k = \vec{a}_{kn}$, направлены к оси вращения и численно равны $a_{kn} = \omega^2 h_k$, где h_k

есть расстояния элементов от оси вращения. Тогда силы инерции $\vec{F}_k^u$ будут направлены от оси вращения и численно равны $F_k^u = \Delta m_k a_{kn} = \Delta m_k \omega^2 h_k$, где Δm_k – масса элемента. Так как все F_k^u пропорциональны h_k, то эпюра этих параллельных сил инерции для части 1 стержня образует треугольник. Силы $\vec{F}_k^u$, действующие на элементы части 2 стержня, параллельны ей (рис. Д8а).

Каждую из полученных систем параллельных сил инерции заменим ее равнодействующей, равной главному вектору этих сил. Так как модуль главного вектора сил инерции любого тела имеет значение $R^u = m\mathrm{a}_c$, где m – масса тела, a_c – ускорение его центра масс, то для частей стержня соответственно получим:

$$R_1^u = m_1 a_{c1}, R_2^u = m_2 a_{c2}. \qquad (2)$$

Сила инерции точечной массы 3 должна быть направлена в сторону, противоположную ее ускорению, и численно равна

$$F_3^u = m_3 a. \qquad (3)$$

Ускорения центров масс частей 1 и 2 стержня и груза 3 равны:

$$a_{c1} = \omega^2 h_{c1}, a_{c2} = \omega^2 h_{c2}, a_{c3} = \omega^2 h_{c3}, \qquad (4)$$

где h_{c1}, h_{c2} – расстояния центров масс частей стержня от оси вращения, а h_3 – соответствующее расстояние груза:

$$\begin{aligned} h_{c1} &= 2b\cos 60^0 = 0{,}1 \text{ м}, \\ h_{c2} &= 4b\cos 60^0 + 0{,}5b = 0{,}25 \text{ м}, \\ h_3 &= 2b\sin 30^0 = 0{,}1 \text{ м}. \end{aligned} \qquad (5)$$

Подсчитаем теперь по формулам (2) и (3) значения R_1^u, R_2^u и F_3^u :

$$\begin{aligned} R_1^u &= 0{,}8m\omega^2 h_{c1} = 180{,}0 \text{ н}, \\ R_2^u &= 0{,}2m\omega^2 h_{c2} = 112{,}5 \text{ н}, \\ F_3^u &= m_3\omega^2 h_3 = 90{,}0 \text{ н}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Линия действия равнодействующей $\vec{R}_1^u$ проходит через центр тяжести эпюры сил инерции части 1 стержня на расстоянии 2H/3 от вершины D треугольника, где $H = 4b\cos 30^0$. Линия действия равнодействующей $\vec{R}_2^u$ проходит вдоль части 2 стержня.

Согласно принципу Даламбера, приложенные внешние силы (активные и реакции связей) и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составим для этой плоской системы сил три уравнения равновесия. Получим

$$\sum F_{kx} = 0;$$

$$X_A + R_E - F_3^и + R_2^и + R_1^и = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0;$$

$$Y_A - P_1 - P_2 - P_3 = 0, \qquad (7)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = 0;$$

$$-R_E \cdot 3a + P_3 \cdot h_3 - P_1 \cdot h_{c1} -$$
$$-R_1^и \cdot H_1 - R_2^и \cdot H_2 + R_3^и \cdot H_3 = 0$$

где H_1, H_2, H_3 – плечи сил $\vec{R}_1^и$, $\vec{R}_2^и$, $\vec{F}_3^и$ относительно точки А. Найдем численные значения этих величин, учитывая, что

$$H = 4b\cos 30^0 = 0{,}35 \text{ м}.$$

$$H_1 = 2a - \frac{2}{3}H = 0{,}77 \text{ м}, \; H_2 = 2a - H = 0{,}65 \text{ м}, \qquad (8)$$

$$H_3 = a + 2b\cos 30° = 0{,}67 \text{ м}.$$

Подставив в уравнения (7) соответствующие величины из равенств (1), (5), (6) и (8) и решив эту систему уравнений (7), найдем искомые реакции.

Ответ: X_A=-95,0 н; Y_A= 140,0 н; R_E= -107,0 н.

Принцип возможных перемещений

Задача Д9

Механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, находится под действием приложенных сил в равновесии; положение равновесия определяется углами $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \theta$ (рис. Д9.0 — Д9.9, табл. Д9а и Д9б). Длины стержней механизма (кривошипов) равны: l_1 = 0,4 м, l_4 = 0,6 м (размеры l_2 и l_3 произвольны); точка Е находится в середине соответствующего стержня.

На ползун В механизма действует сила упругости пружины $\vec{F}$; численно $F = c\lambda$, где c – коэффициент жесткости пружины, λ – ее деформация. Кроме того, на рис. Д9.0 и Д9.1 на ползун D действует сила $\vec{Q}$, а на кривошип O_1A – пара сил с моментом M; на рис. Д9.2 – Д9.9 на кривошипы O_1A и O_2D действуют пары сил с моментами M_1 и M_2.

Определить, чему равна при равновесии деформация λ пружины, и указать, растянута пружина или сжата. Значения всех заданных величин приведены в табл. Д9а для рис. Д9.0 – Д9.4 и в табл. Д9б для рис. Д9.5 – Д9.9, где Q выражено в ньютонах, а M, M_1, M_2 – в Н·м.

Построение чертежа следует начинать со стержня, направление которого определяется углом α; для большей наглядности ползун с направляющими и пружину изобразить так, как в примере Д9 (см. рис. Д9, а также рис. Д9.10б). Если на чертеже решаемого варианта задачи прикрепленный к ползуну В стержень окажется совмещенным с пружиной (как на рис. Д9.10а), то пружину следует считать прикрепленной к ползуну с другой стороны (как на рис. Д9.10б, где одновременно иначе изображены направляющие).

Указания. Задача Д9 – на определение условий равновесия механической системы с помощью принципа возможных перемещений. Механизм в рассматриваемой задаче имеет одну степень свободы, т.е. одно независимое возможное перемещение. Для решения задачи нужно сообщить механизму возможное перемещение, вычислить сумму элементарных работ всех действующих активных сил и пар на этом перемещении и приравнять ее нулю. Все вошедшие в составленное уравнение возможные перемещения следует выразить через какое-нибудь одно.

Чтобы найти λ, надо из полученного условия равновесия определить силу упругости F. На чертеже эту силу можно направить в любую сторону (т.е. считать пружину или растянутой, или сжатой); верно ли выбрано направление силы, укажет знак.

Таблица Д 9а
(к рис. Д 9.0 – Д 9.4)

Номер усло-вия	Углы, град.					c, Н/см	Для рис. 0 – 1		Для рис.2 – 4	
	α	β	γ	φ	θ		M	Q	M_1	M_2
0	90	120	90	90	60	180	100	400	120	460
1	60	150	30	90	30	160	120	380	140	440
2	30	120	120	0	60	150	140	360	160	420
3	0	60	90	0	120	140	160	340	180	400
4	30	120	30	0	60	130	180	320	200	380
5	0	150	30	0	60	120	200	300	220	360
6	0	150	90	0	120	110	220	280	240	340
7	90	120	120	90	150	100	240	260	260	320
8	60	60	60	90	30	90	260	240	280	300
9	120	30	30	90	150	80	280	220	300	280

Таблица Д9б

(к рис. Д9.5 – Д9.9)

Номер условия	Углы, град.					c, Н/см	M_1	M_2
	α	β	γ	φ	θ			
0	30	30	60	0	150	80	200	340
1	0	60	60	0	120	90	220	320
2	60	150	120	90	30	100	240	300
3	30	60	30	0	120	110	260	280
4	90	120	150	90	30	120	280	260
5	30	120	150	0	60	130	300	240
6	60	150	150	90	30	140	320	220
7	0	60	30	0	120	150	340	200
8	90	120	120	90	60	160	360	180
9	90	150	120	90	30	180	380	160

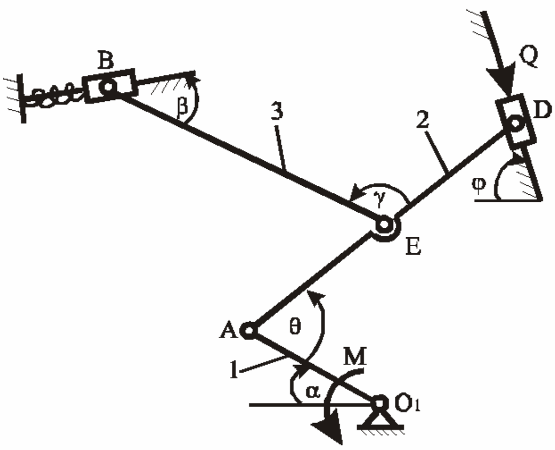


Рис. Д9.0

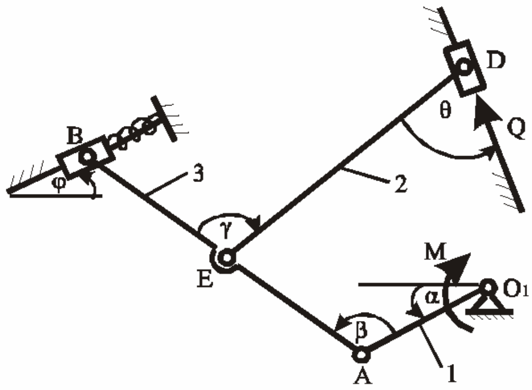


Рис. Д9.1

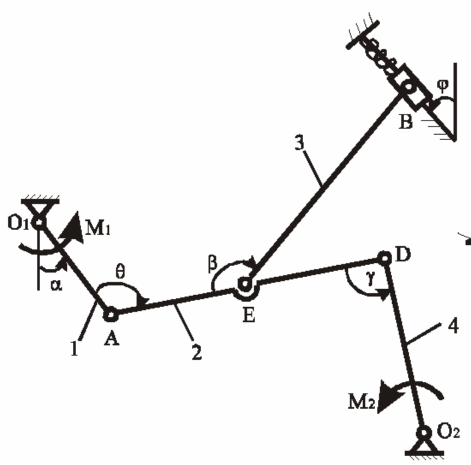


Рис. Д9.2

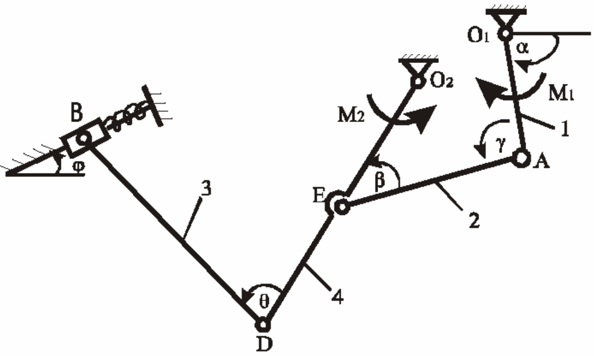


Рис. Д9.3

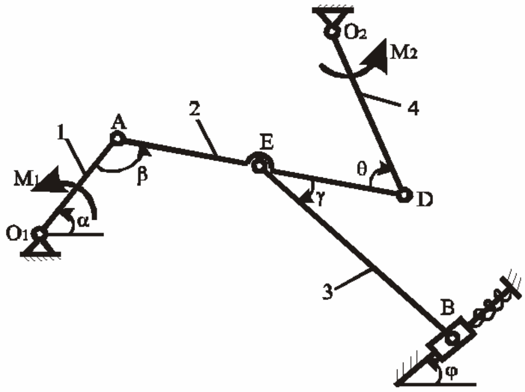


Рис. Д9.4

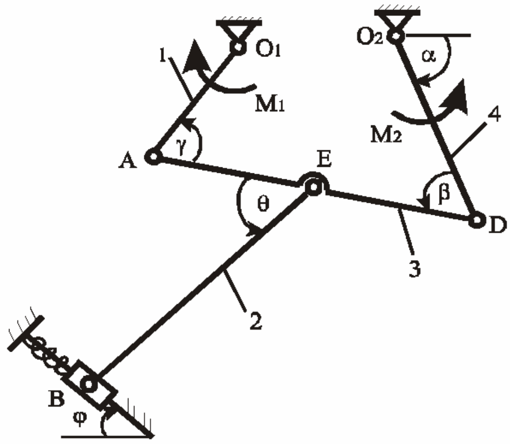


Рис. Д9.5

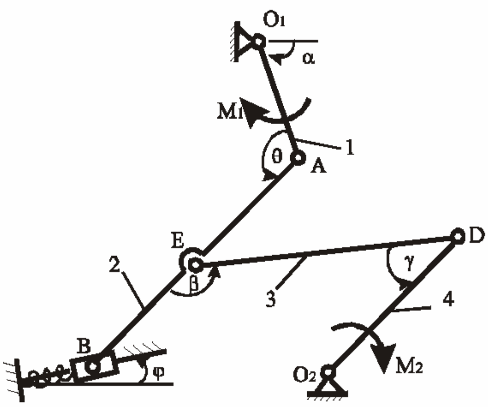


Рис. Д9.6

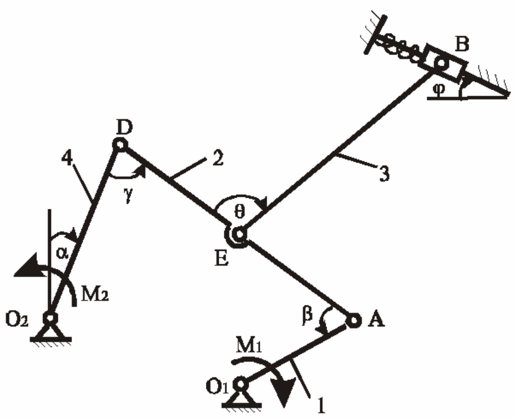


Рис. Д9.7

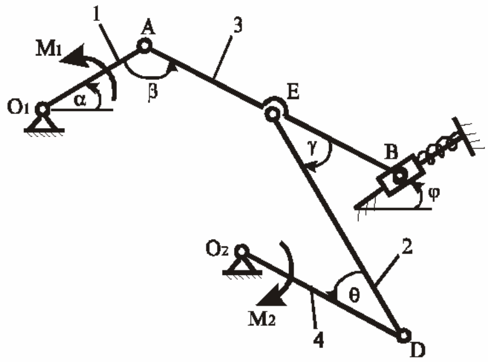


Рис. Д9.8

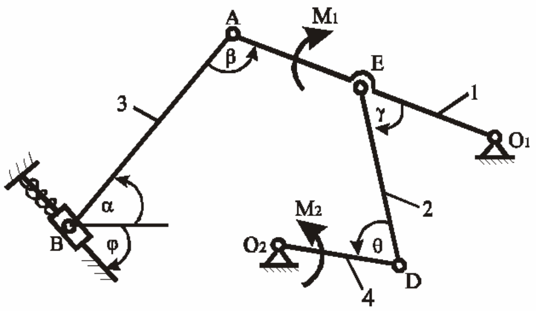
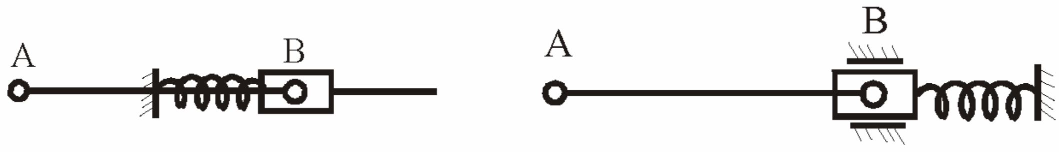


Рис. Д9.9



а) б)

Рис. Д9.10

Пример Д9

Механизм (рис. Д9а), расположенный в горизонтальной плоскости, состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна В, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами. К ползуну В прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c, к стержням 1 и 4 приложены пары сил с моментами M_1 и M_2 соответственно.

Дано: $\alpha = 30°, \beta = 60°, \gamma = 60°, \varphi = 0°, \theta = 120°, \psi = 30°$,
l_1 = 0,4 м, l_4 = 0,6 м, AE = ED, c = 100 Н/см, M_1 = 200 Н м, M_2 = =150 Н м.

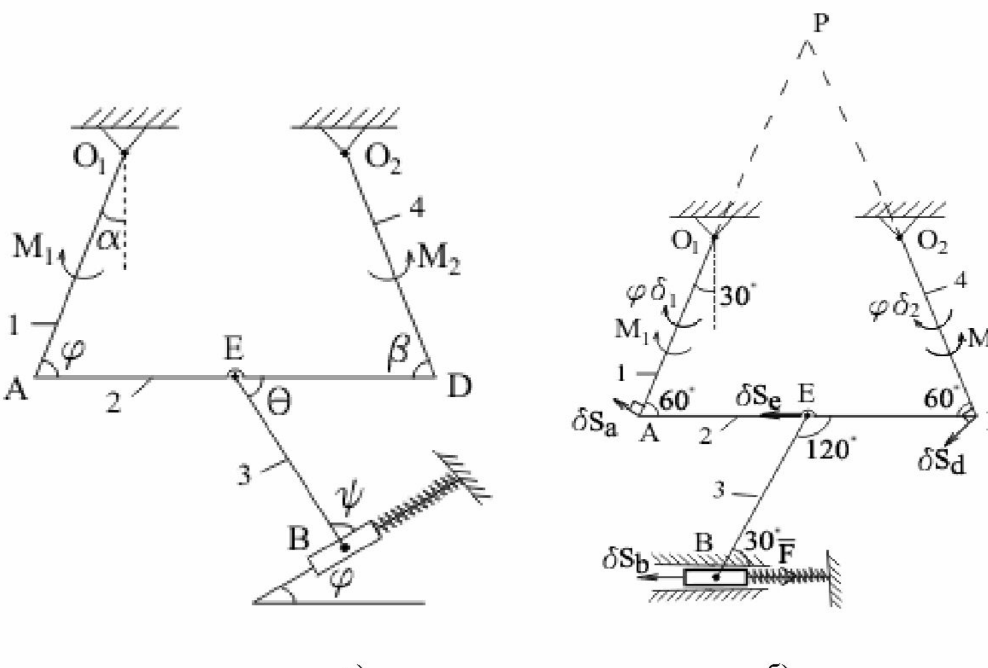
Определить: деформацию пружины λ при равновесном механизме.

Решение.

1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. Д9б). Для решения задачи воспользуемся принципом возможных перемещений, согласно которому

$$\sum \delta A_k = 0, \qquad (1)$$

где δA_k – элементарная работа активных сил на соответствующих возможных перемещениях.



а) б)

Рис. Д9

Изобразим действующие на механизм активные силы: силу упругости F (предполагая, что пружина растянута) и пары с моментом M_1 и M_2.

Неизвестную силу F найдем с помощью уравнения (1), а зная F и учитывая, что $F = c\lambda$, определим λ.

2. Чтобы составить уравнение (1), сообщим механизму возможное перемещение и введем следующие обозначения для перемещений звеньев, к которым приложены активные силы:

$\delta\varphi_1$ – поворот стержня 1 вокруг оси O_1,

$\delta\varphi_2$ – поворот стержня 4 вокруг O_2,

$\delta\varphi_B$ – перемещение ползуна (точки B).

Так как у механизма 1 степень свободы, то одно перемещение – независимое от других. Будем считать независимым перемещение $\delta\varphi_1$ и установим, какими тогда будут $\delta\varphi_2$ и $\delta\varphi_B$, выразив их через $\delta\varphi_1$; при этом важно определить и направления $\delta\varphi_2$ и $\delta\varphi_B$,так как иначе в уравнении (1) будут ошибки в знаках.

При расчетах учтем, что зависимость между возможными перемещениями здесь такая же, как между соответствующими скоростями звеньев механизма при его движении, и воспользуемся известными из кинематики соотношениями (как в примере К3).

Сначала найдем и изобразим δS_A (направление δS_A определяется направлением $\delta\varphi_1$), получим:

$$\delta S_A = l_1\,\delta\varphi_1\,, \tag{2}$$
$$\delta S_A \perp O_1A.$$

Теперь определим и изобразим $\delta\varphi_2$, для этого найдем сначала δS_D.

$\delta S_D \perp O_2D$. Учитывая, что проекции δS_A и δS_D на прямую AD должны быть равны друг другу (иметь одинаковые модули и знаки), получим

$$\delta S_A \cdot \cos 30 = \delta S_D \cdot \cos 30 \text{ и}$$
$$\delta S_D = \delta S_A = l_1 \cdot \delta\varphi_1\,. \tag{3}$$

Тогда:

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta S_D}{l_4} = \frac{l_1 \cdot \delta\varphi_1}{l_4}\,. \tag{4}$$

Чтобы определить δS_B, найдем сначала δS_E. Для этого построим мгновенный центр скоростей P стержня 2 (на пересечении перпендикуляров к δS_A и δS_D, восстановленных из точек A и D) и покажем направление поворота стержня 2 вокруг P, учтя направления δS_A и δS_D. Так как $\angle$PAD = $\angle$PDA $= 60°$, то ΔAPD – равносторонний и PE в нем – высота, поскольку AE = = ED. Тогда перемещение δS_E, перпендикулярное PE, будет направлено по прямой AD (при изображении δS_E учитываем направление поворота вокруг центра P).

Воспользовавшись тем, что проекции δS_A и δS_E на прямую AD должны быть равны друг другу, получим:

$$\delta S_E = \delta S_A \cdot \cos 30° = l_1 \cdot \delta\varphi \cdot \cos 30°\,. \tag{5}$$

Наконец, из условия равенства проекций δS_E и δS_B на прямую EB находим и изображаем δS_B:

$$\delta S_B \cdot \cos 30° = \delta S_E \cdot \cos 60° = \delta S_A \cdot \cos 30° \cdot \cos 60°\,,$$
$$\delta S_B = l_1 \cdot \delta\varphi_1 \cdot \cos 60°\,. \tag{6}$$

3. Теперь составляем для механизма уравнение (1):

$$M_1 \cdot \delta\varphi_1 - M_2 \cdot \delta\varphi_2 - F\delta\varphi_2 - F\delta S_B = 0\,. \tag{7}$$

Заменяя здесь $\delta\varphi_2$ и δS_B значениями (4) и (6) и вынося одновременно $\delta\varphi_1$ за скобки, получим:

$$(M_1 - M_2 \frac{l_1}{l_4} - F \cdot l_1 \cdot \cos 60°)\delta\varphi_1 = 0 . \qquad (8)$$

Так как $\delta\varphi_1 \neq 0$, то отсюда следует, что

$$M_1 - M_2 \frac{l_1}{l_4} - F \cdot l_1 \cdot \cos 60° = 0 . \qquad (9)$$

Из уравнения (9) находим значение F и определяем $\lambda = \frac{F}{c}$.

Ответ: λ = 5 см. (Знак указывает, что пружина, как и предполагалось, растянута.)

Общее уравнение динамики

Задача Д10

Механическая система состоит из однородных ступенчатых шкивов 1 и 2, обмотанных нитями, грузов 3 – 6, прикрепленных к этим нитям, и невесомого блока (рис. Д10.0 — Д10.9, табл. Д10). Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом M, приложенной к одному из шкивов. Радиусы ступеней шкива 1 равны: R_1= =0,2 м, r_1 = 0,1 м, а шкива 2 – R_2 = 0,3 м, r_2 = 0,15 м; их радиусы инерции относительно осей вращения равны соответственно ρ_1 = 0,1 м и ρ_2 = 0,2 м.

Пренебрегая трением, определить ускорение груза, имеющего больший вес; веса $P_1,\ldots,P_6$ шкивов и грузов заданы в таблице в ньютонах. Грузы, веса которых равны нулю, на чертеже не изображать (шкивы 1, 2 изображать всегда как части системы).

Таблица Д10

Номер условия	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	M, Н · м
0	10	0	20	30	40	0	10
1	0	40	0	10	20	30	12
2	20	30	40	0	10	0	16
3	0	20	10	30	0	40	18
4	30	0	20	0	40	10	12
5	0	10	30	40	20	0	16
6	40	0	0	20	30	10	10
7	10	20	0	40	0	30	18
8	0	40	10	0	30	20	12
9	30	0	40	20	10	0	16

Указания. Задача Д10 – на применение к изучению движения системы общего уравнения динамики (принципа Даламбера – Лагранжа). Ход решения задачи такой же, как в задаче Д9, только предварительно надо присоединить к действующим на систему силам соответствующие силы инерции. Учесть при этом, что для однородного тела, вращающегося вокруг своей оси симметрии (шкива), система сил инерции приводится к паре с моментом $M^u = I_z\ \varepsilon$, где I_z – момент инерции тела относительно оси вращения, ε – угловое ускорение тела; направление M^u противоположно направлению ε.

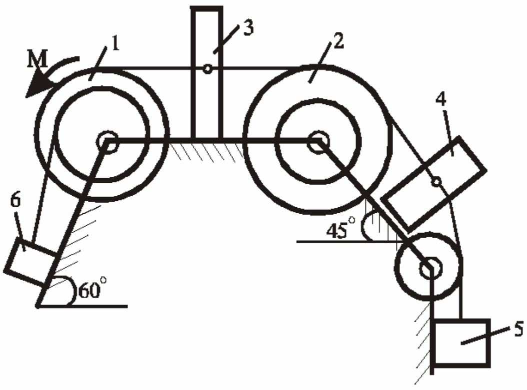


Рис. Д10.0

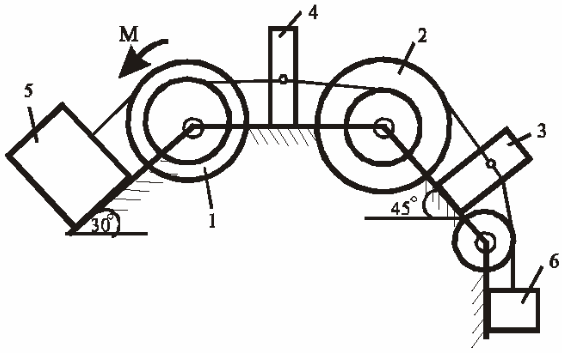


Рис. Д10.1

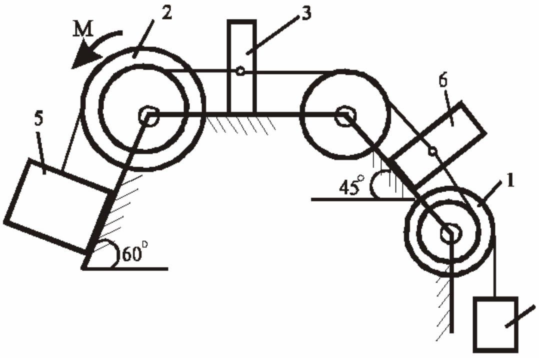


Рис. Д10.2

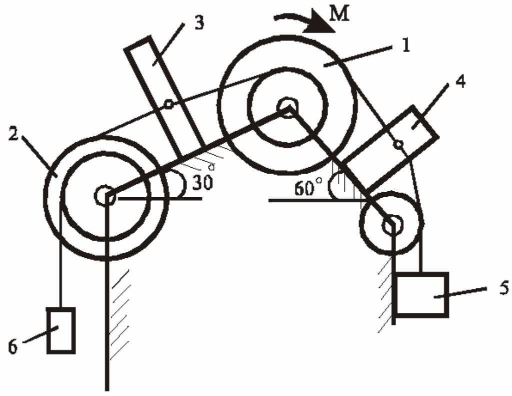


Рис. Д10.3

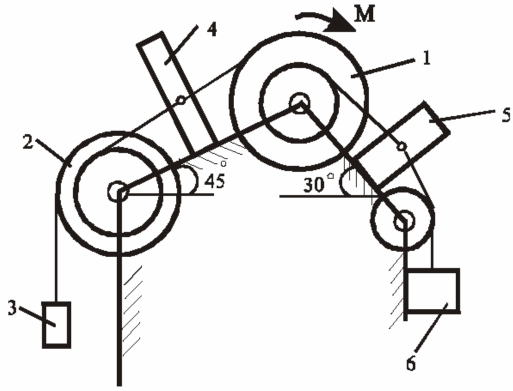


Рис. Д10.4

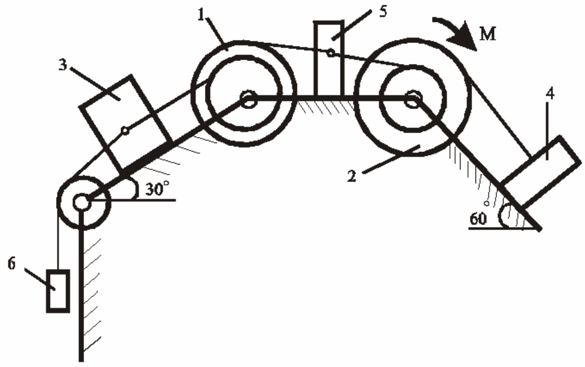


Рис. Д10.5

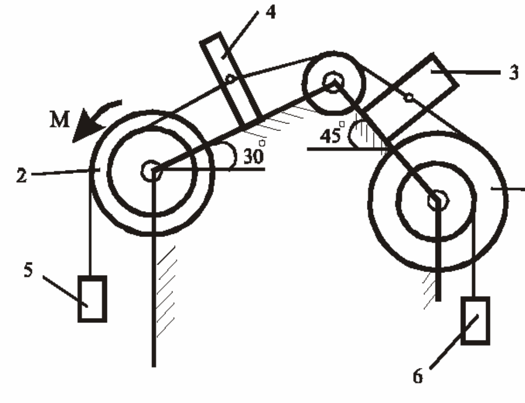


Рис. Д10.6

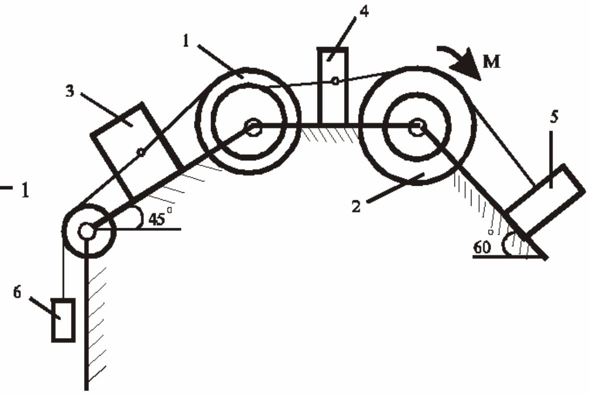


Рис. Д10.7

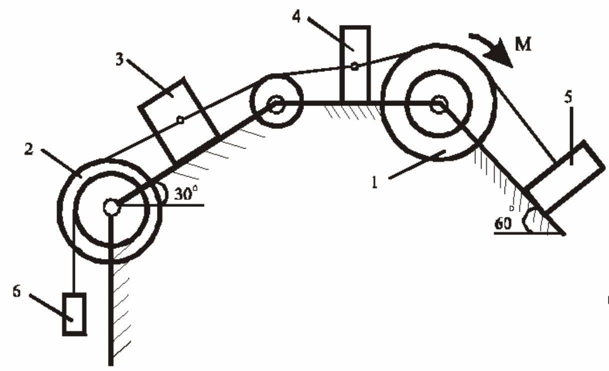


Рис. Д10.8

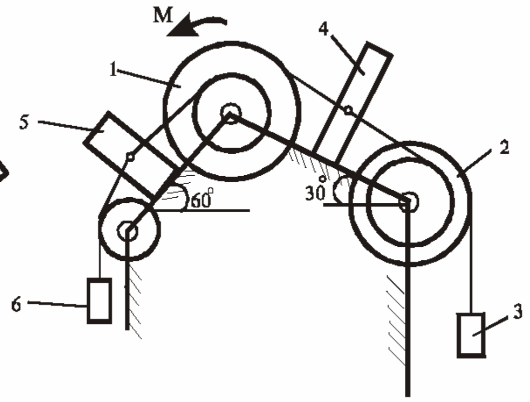


Рис. Д10.9

Пример Д10

Механическая система (рис. Д10) состоит из обмотанных нитями блока 1 радиуса R_1 и ступенчатого шкива 2 (радиусы ступеней R_2 и r_2, радиус инерции относительно оси вращения ρ_2), а также из грузов 3, 4 и 5, прикрепленных к нитям. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом M_1, приложенной к блоку 1.

Дано: $P_1 = 0$; $P_2 = 40$ H; $P_3 = 30$ H; $P_4 = 20$ H; $P_5 = 10$ H;
$M = 10$ H·м; $R_1 = 0{,}2$ м; $R_2 = 0{,}3$ м; $r_2 = 0{,}15$ м, $\rho_2 = 0{,}2$ м.

Определить: a_3 (трением пренебречь).

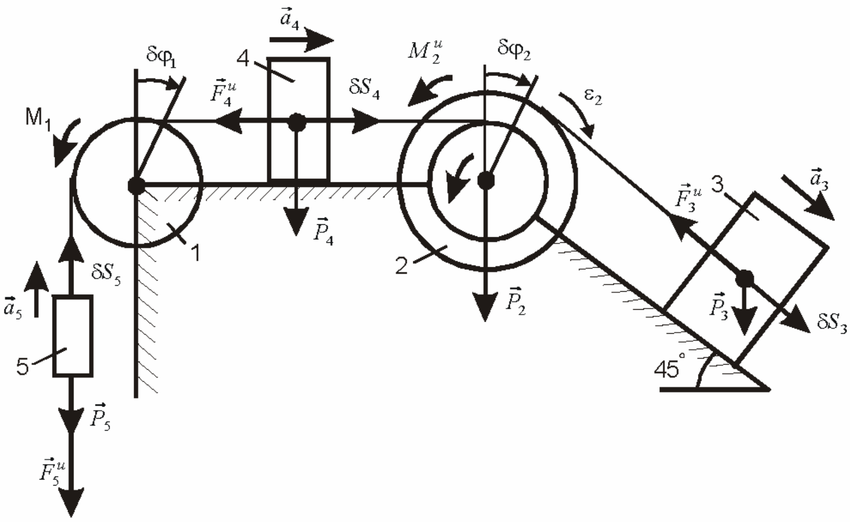


Рис. Д10

Решение.

1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из тел 1, 2, …,5, соединенных нитями. Система имеет 1 степень свободы. Связи, наложенные на систему, – идеальные.

Для определения ускорения a_3 применим общее уравнение динамики:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0, \tag{1}$$

где $\sum \delta A_k^a$ – сумма элементарных работ активных сил на любом возможном перемещении системы;

$\sum \delta A_k^u$ – сумма элементарных работ сил инерции соответственно.

2. Изображаем на чертеже активные силы: силы тяжести $\vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$, $\vec{P}_5$ и пару сил с моментом М.

Задавшись направлением ускорения a_3, изображаем на чертеже силы инерции $\vec{F}_3^u, \vec{F}_4^u, \vec{F}_5^u$ и пару сил с моментом M_2^u, величины которых равны:

$$F_3^u = \frac{P_3}{g} a_3;$$

$$F_4^u = \frac{P_4}{g} a_4; F_5^u = \frac{P_5}{g} a_5; M_2^u = \\ = I_2 \cdot \varepsilon_2 = \frac{P_2}{g} \rho_2^2 \varepsilon_2. \tag{2}$$

3. Сообщаем системе возможное перемещение и, составляя уравнение (1), получим

$$P_3\cos 45^\circ\cdot\delta s_3 - F_3^u\delta s_3 - M_2^u\cdot\delta\varphi_2 - F_4^u\cdot\delta s_4 - \\ - M\delta\varphi_1 - P_5\cdot\delta s_5 - F_5^u\cdot\delta s_5 = 0. \qquad (3)$$

Выразим все возможные переменные через $\delta\varphi_1$:

$$\delta s_5 = \delta\varphi_1\cdot R_1;\delta s_4 = \delta\varphi_1\cdot R_1;\delta\varphi_2 = \frac{R_1}{r_2}\delta\varphi_1;$$

$$\delta s_3 = \delta\varphi_2\cdot R_2 = \frac{R_1\cdot R_2}{r_2}\delta\varphi_1. \qquad (4)$$

Подставим величины (2) и (4) в уравнение (3), приведем его к виду:

$$[P_3(\cos 45^\circ - \frac{a_3}{g})\cdot R_2 - \frac{P_2}{g}\rho_2^2\varepsilon_2 - \\ - \frac{P_4}{g}a_4R_1 - M - P_5(1+\frac{a_5}{g})R_1]\cdot\delta\varphi_1 = 0. \qquad (5)$$

Входящие сюда величины ε_2, a_4, a_5 выразим через искомую величину a_3:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_3}{R_2};a_4 = \frac{r_2}{R_2}a_3;a_5 = a_4 = \frac{r_2}{R_2}a_3.$$

Затем, учтя, что $\delta\varphi_1 \neq 0$, приравняем к нулю выражение, стоящее в (5) в квадратных скобках.

Из полученного уравнения найдем:

$$a_3 = \frac{(P_3\cos 45^\circ R_2 - M - P_5P_1)g}{P_3R_2 + P_2\rho_2^2/R_2 + P_4r_2R_1/R_2 + P_5r_2R_1/R_2}.$$

Вычисления дают следующий ответ: a_3= -0,3 м/с^2. Знак «-» указывает, что ускорение груза 3 и ускорения других тел направлены противоположно показанным на рис. Д10.

Уравнения Лагранжа II рода

Задача Д11

Механическая система состоит из тел 1, 2, … 5 веса P_1, P_2, … P_5 соответственно, связанных друг с другом нитями, намотанными на ступенчатые блоки 1 и 2 (рис. Д11.0 – Д11.9, табл. Д11). Радиусы ступенчатых блоков 1 и 2 равны соответственно R_1 = R, r_1 = 0,4R, R_2 = R, r_2 = 0,8R. При вычислении моментов инерции все блоки, катки и колеса считать однородными сплошными цилиндрами радиуса R.

На систему, кроме сил тяжести, действует сила F, приложенная к телу 3 или 4 (если тело 3 в систему не входит, сила приложена в точке B к тележке), и пары сил с моментами M_1, M_2, приложенные к блокам 1 и 2; когда $M < 0$, направление момента противоположно показанному на рисунке.

На участке нити, указанном в таблице в графе «Пружина», включена пружина с коэффициентом жесткости c (например, если в графе стоит AB, то участок AB является пружиной, если AD, то AD – пружина и т.д.); в начальный момент времени пружина не деформирована.

Составить для системы уравнения Лагранжа и найти закон изменения обобщенной координаты x, т.е. $x = f(t)$, считая, что движение начинается из состояния покоя; определить также частоту и период колебаний, совершаемых телами системы при ее движении (о выборе координаты x см. «Указания»).

Прочерк в графах таблицы, где заданы веса, означает, что соответствующее тело в систему не входит (на чертеже не изображать), а ноль – что тело считается невесомым, но в систему входит; для колес, обозначенных номером 4, P_4 – их общий вес (вес платформы такой тележки не учитывается).

Указания. Задача Д11 – на применение к изучению движения системы уравнений Лагранжа. В задаче система имеет две степени свободы; следовательно, ее положение определяется двумя обобщенными координатами q_1 и q_2 и для нее должны быть составлены два уравнения.

Решение следует начать с выбора обобщенных координат, обозначив их $q_1 = x$ и $q_2 = \varphi$ или $q_1 = x$ и $q_2 = y$. За координату x принять удлинение пружины, отсчитываемое в сторону того из тел 3, 4 или 5 системы, к которому пружина прикреплена; например, если пружина прикреплена к этому телу в точке B и ее длина в произвольный момент времени равна AB, то x = AB – l_o, где l_o – длина недеформированной пружины. За координату φ принять угол поворота крайнего блока (этот блок может быть и невесомым), отсчитывая φ от начального положения. Если в систему ни один блок не входит, а входят лишь тела 3 и 4, за координату y принять расстояние тела 4 от начального положения. Соответствующие примеры даны на рис. Д11.10. Дальнейший ход решения разъяснен в примере Д11.

Таблица Д11

Номер условия	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	F	M_1	M_2	Пружина
0	4P	0	-	3P	-	4P	0	0	AB
1	0	2P	-	-	3P	0	0	-2PR	KE
2	0	2P	-	P	-	0	2PR	0	AB
3	-	0	2P	5P	-	0	0	2PR	BD
4	P	-	-	-	4P	0	-PR	0	KE
5	-	-	4P	3P	-	P	0	0	BD
6	2P	0	-	-	P	0	0	-PR	KE
7	-	4P	-	2P	-	3P	0	2PR	AB
8	-	4P	2P	0	-	0	0	3PR	BD
9	2P	0	-	P	-	0	2PR	0	AB

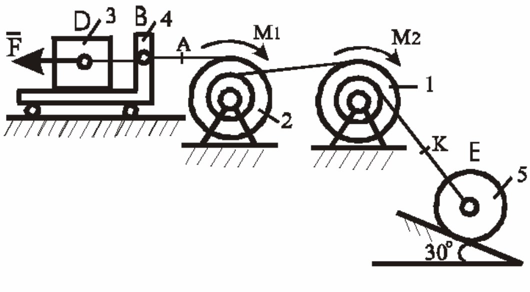


Рис. Д11.0

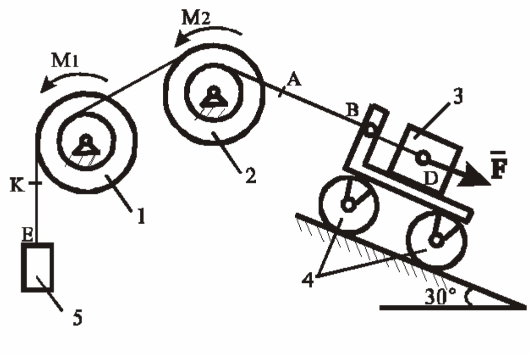


Рис. Д11.1

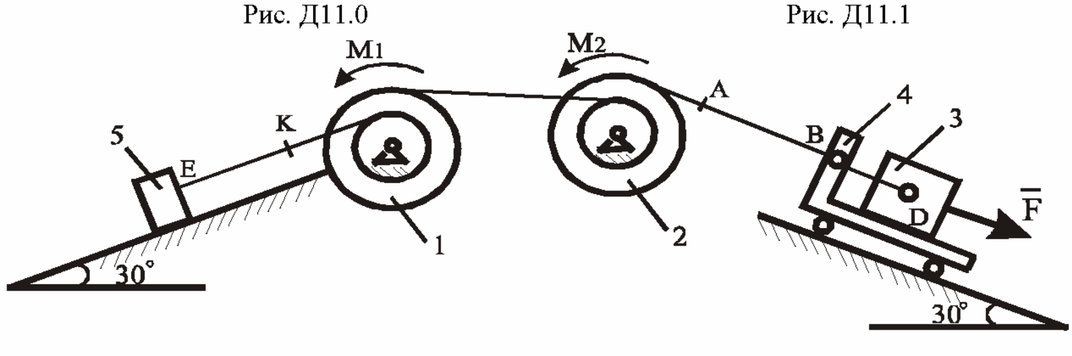


Рис. Д11.2

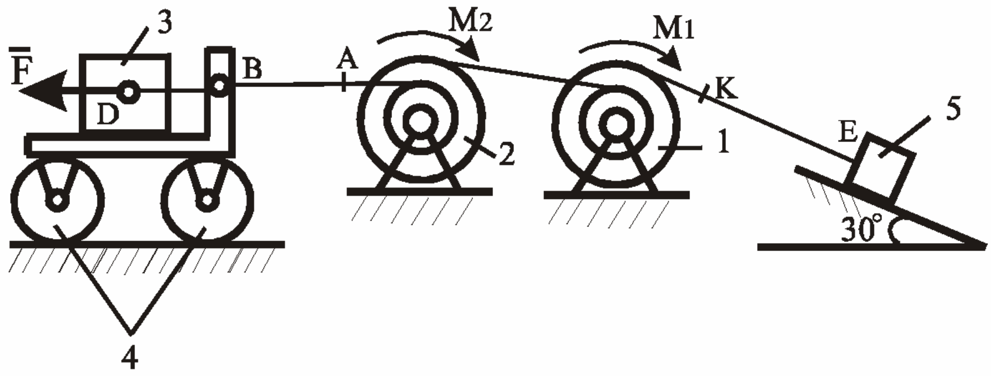


Рис. Д11.3

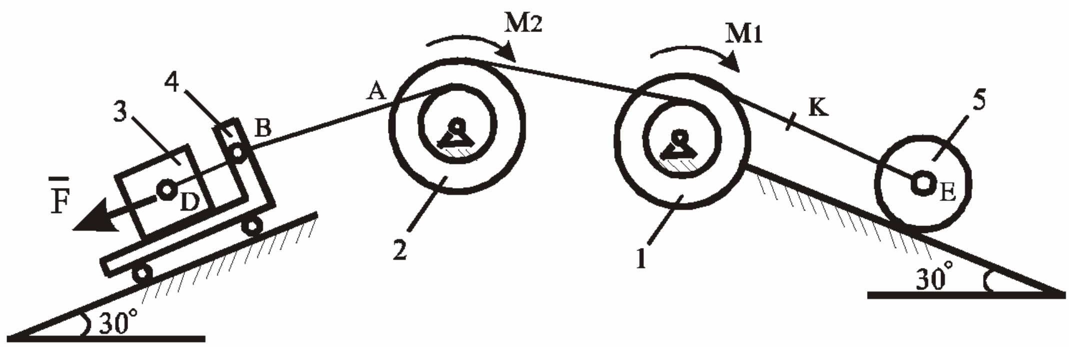


Рис. Д11.4

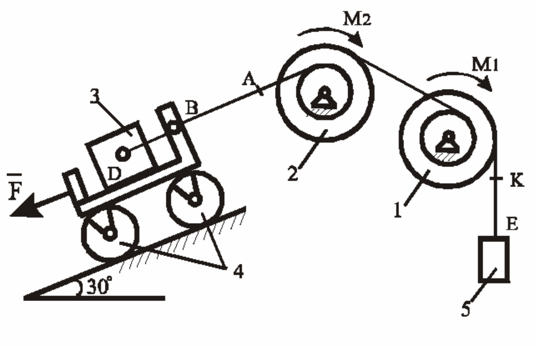


Рис. Д11.5

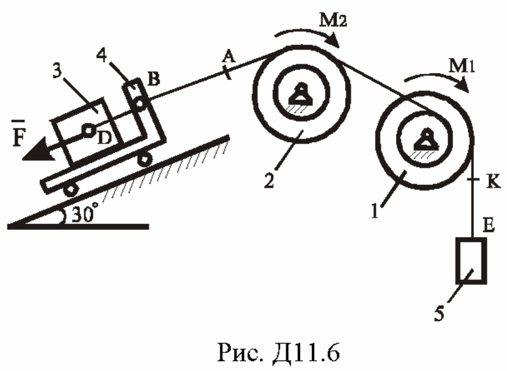


Рис. Д11.6

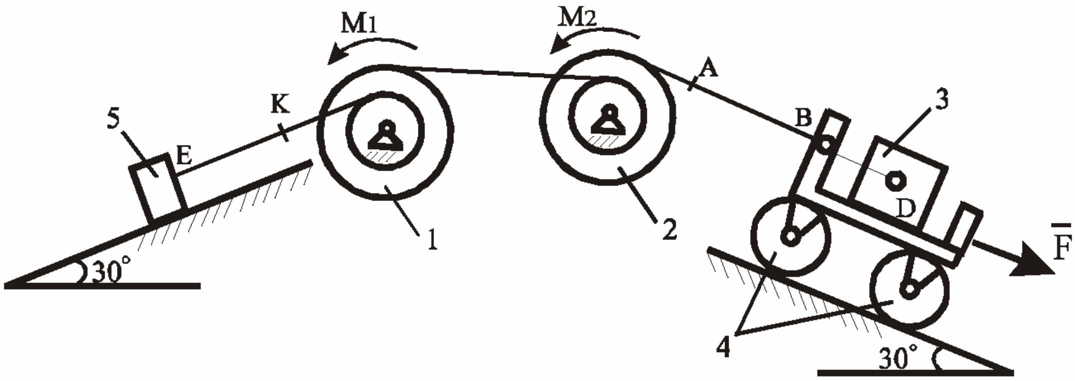


Рис. Д11.7

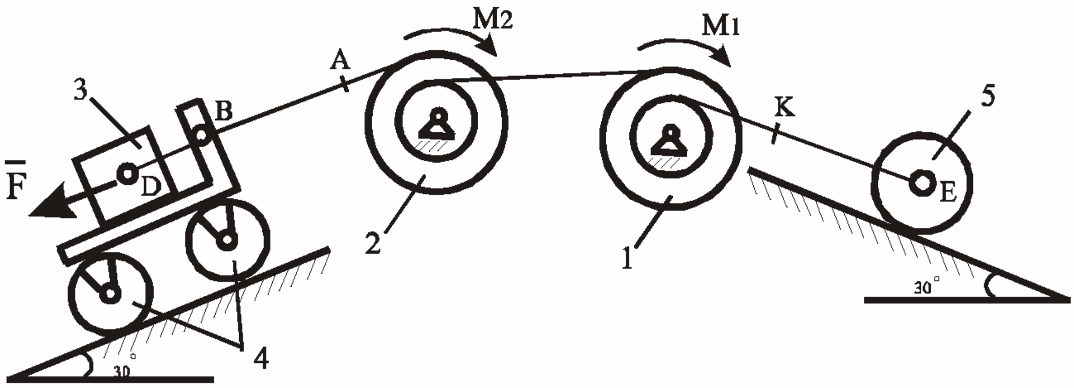


Рис. Д11.8

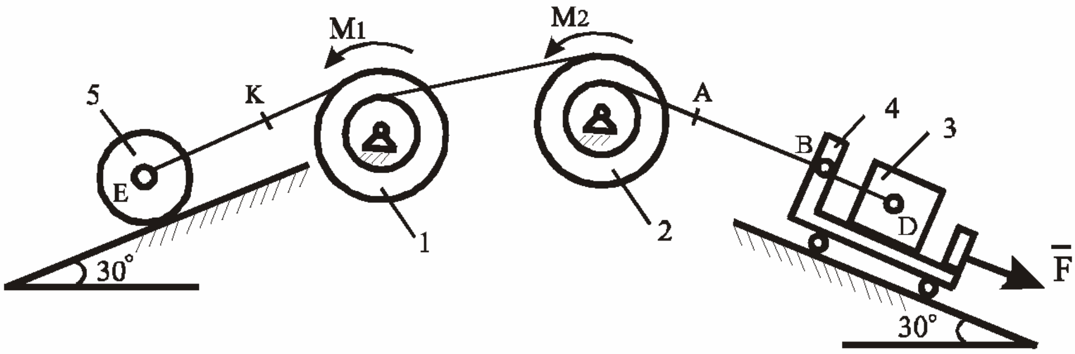
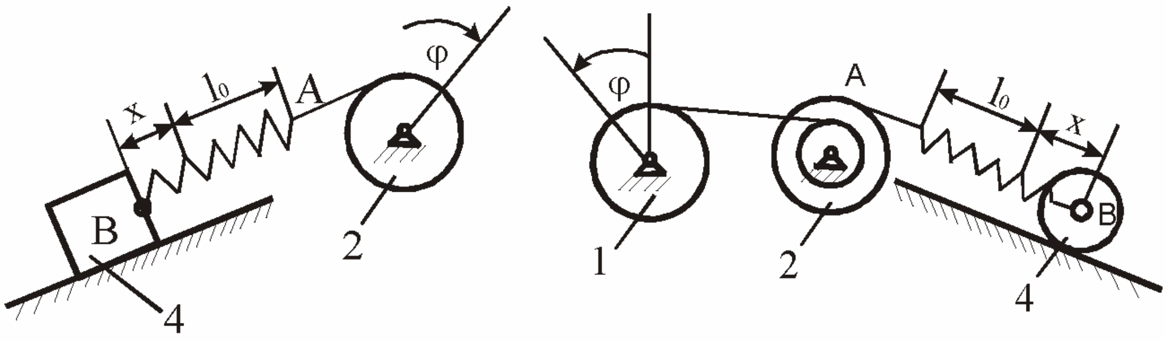


Рис. Д11.9



а) б)

Рис. Д11.10

Пример Д11

Механическая система (рис. Д11) состоит из барабана 1 радиуса R, к которому приложена пара сил с моментом M, тележки 2 и катка 3 (барабан и каток – однородные цилиндры); веса всех тел равны P_1, P_2, P_3; весом колес тележки пренебречь. Тележка соединена с барабаном намотанной на него нитью, а с катком – пружиной BD, коэффициент жесткости равен c. Система начинает движение из состояния покоя; пружина в этот момент не деформирована.

Дано: $P_1 = P$; $P_2 = P$; $M = 2PR$.

Определить: 1) $x = f(t)$, где x – удлинение пружины (или перемещение центра D катка по отношению к тележке); 2) частоту k и период t колебаний.

Решение.

1. Для решения задачи воспользуемся уравнениями Лагранжа II рода. Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Выберем в качестве обобщенных координат угол поворота барабана φ и удлинение пружины x ($q_1 = \varphi$; $q_2 = x$).

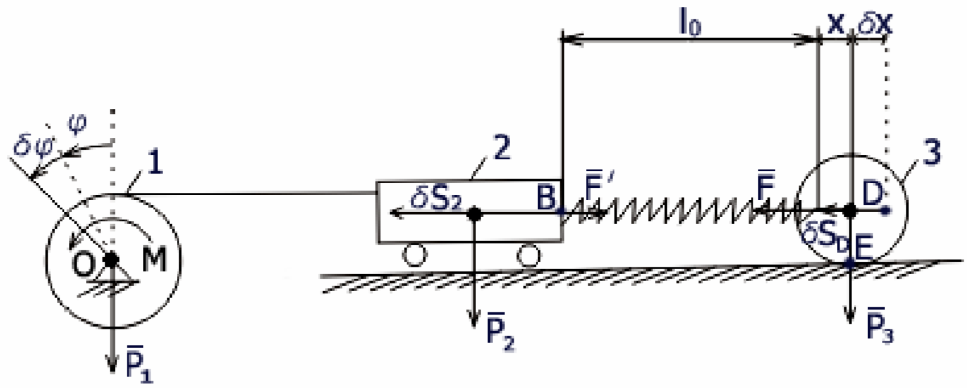


Рис. Д11

Тогда уравнения Лагранжа будут иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q_1 \ ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_2 \ . \qquad (1)$$

2. Определим кинетическую энергию T системы, равную сумме энергий всех тел:

$$T = T_1+T_2+T_3. \qquad (2)$$

Так как барабан вращается вокруг оси O, тележка движется поступательно, а каток – плоскопараллельно, то:

$$T_1 = \frac{1}{2}I_0\omega_1^2; \quad T_2 = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}V_2^2;$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\frac{P_3}{g}V_D^2 + \frac{1}{2}I_D\omega_3^2, \qquad (3)$$

где

$$I_0 = \frac{P_1R^2}{2g}, \quad I_D = \frac{P_3R_3^2}{2g}.$$

Все входящие сюда скорости надо выразить через обобщенные скорости $\dot{\varphi}$ и $\dot{x}$. Очевидно, что $\omega_1 = \dot{\varphi}$, $V_2 = R\omega_1 = R\dot{\varphi}$. Для определения V_D рассмотрим движение катка как сложное. Учитывая, что x определяет положение точки D по отношению к тележке, получим $\vec{V}_D = \vec{V}_D^{отн} + \vec{V}_D^{пер}$, где численно $\vec{V}_D^{отн} = \dot{x}$. Принимая во внимание, что при возрастании φ и x скорости $\vec{V}_D^{отн}$ и $\vec{V}_D^{пер}$ направлены в разные стороны и что точка E для катка – мгновенный центр скоростей, получим:

$$V_D = \dot{x} - R\dot{\varphi}, \quad \omega_3 = \frac{V_D}{ED} = \frac{\dot{x} - R\dot{\varphi}}{R_3}.$$

Подставляя все найденные значения скоростей и значения I_0 и I_D в равенства (3) и учитывая, что $P_1 = P_3 = P$, $P_2 = 2P$, получим окончательно из (2) следующее выражение для T:

$$T = \frac{P}{g}\left(\frac{9}{4}R^2\dot{\varphi}^2 - 2R\dot{\varphi}\dot{x} + \dot{x}^2\right). \qquad (4)$$

Отсюда находим:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{P}{g}\left(\frac{9}{2}R^2\dot{\varphi} - 2R\dot{x}\right); \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{P}{g}\left(-2R\dot{\varphi} + 2x\right); \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \qquad (5)$$

3. Теперь определим обобщенные силы Q_1 и Q_2 . Изображаем действующие на систему активные силы: силы тяжести, равные $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ силы упругости $\vec{F}$ и $\vec{F}'$, где численно $F' = F = cx$, и пару с моментом M.

а) Для определения Q_1 сообщим системе возможное перемещение, при котором координата φ получает приращение $\delta\varphi > 0$, а x не изменяется, т.е. $\delta x = 0$ (пружина при таком перемещении системы не изменяет свою длину). Тогда тележка и центр D катка получают одинаковые перемещения $\delta S_2 = \delta S_D = R\delta\varphi$ и элементарная работа действующих сил будет равна:

$$\delta A_1 = M \cdot \delta\varphi - F' \cdot \delta S_2 + F \cdot \delta S_D.$$

Заменив здесь все величины их значениями, найдем в результате, что:

$$\delta A_1 = M \cdot \delta\varphi = 2PR \cdot \delta\varphi,$$

$$Q_2 = 2PR. \qquad (6)$$

б) Для определения Q_2 сообщим системе возможное перемещение, при котором координата x получает приращение $\delta x > 0$, а φ не изменяется, т.е. $\delta\varphi = 0$ (барабан не поворачивается и тележка не перемещается). Тогда работу совершает только сила $\vec{F}$.

$$\delta A_2 = -F \cdot \delta x = -cx \cdot \delta x;$$

$$Q_2 = -cx. \qquad (7)$$

Подставляя величины (5), (6) и (7) в уравнения (1), получим следующие дифференциальные уравнения движения системы:

$$\frac{P}{g}\left(\frac{9}{2}R^2\ddot{\varphi} - 2R\ddot{x}\right) = 2PR,$$

$$\frac{P}{g}\left(-2R\ddot{\varphi} + 2\ddot{x}\right) = -cx. \tag{8}$$

4. Для определения $x = f(t)$ исключим из уравнений (8) $\ddot{\varphi}$. Получим дифференциальное уравнение вида:

$$\ddot{x} + k^2 x = a,$$

где

$$k^2 = \frac{9}{10}\frac{cg}{P}, \quad a = \frac{4}{5}g. \tag{9}$$

Общее решение уравнения (9) имеет вид $x = x_1 + x_2$, где x_1 – общее решение однородного уравнения $\ddot{x} + k^2 x = 0$, т.е.

$$x_1 = c_1 \sin(kt) + c_2 \cos(kt).$$

А x_2 – частное решение уравнения (9), которое будем искать в виде $x_2 = A$ = const. Подставляя x_2 в (9), получим $A = \frac{a}{k^2}$. Таким образом, общее решение уравнения (9) имеет вид:

$$x = c_1 \sin(kt) + c_2 \cos(kt) + \frac{a}{k^2}. \tag{10}$$

Продифференцировав уравнение (10), получим:

$$\dot{x} = c_1 \cos(kt) - c_2 \sin(kt). \tag{11}$$

По начальным условиям при t = 0, x = 0, $\dot{x} = 0$ (движение начинается из состояния покоя и пружина в этот момент не деформирована).
Подставляя эти величины в уравнение (10) и в уравнение (11), найдем из них, что $c_1 = 0$, $c_2 = -\frac{a}{k^2}$. Окончательно получаем искомую зависимость $x = f(t)$ в виде:

$$x = \frac{a}{k^2}\left(1 - \cos(kt)\right), \tag{12}$$

где значения a и k^2 даются последними двумя равенствами из (9). Таким образом, центр катка D совершает по отношению к тележке колебания, закон которых дает равенство (12). Частота k и период τ этих колебаний:

$$k = \sqrt{\frac{9cg}{10P}}; \qquad \tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{10P}{9cg}}. \tag{13}$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М., 1986.

2. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Ч. 1. – М., 1984.

3. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч. 2. – М., 1984.

4. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т. 1, 2. – М., 1985.

5. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М., 1986.

6. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике/Под ред. А.А. Яблонского. – М., 1985.

7. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. – М., 1961.

8. Айзенберг Т.Б., Воронков И.М., Осецкий В.М. Руководство к решению задач по теоретической механике. – М., 1965.

9. Бражниченко Н.А. Сборник задач по теоретической механике. – М., 1963.

ОГЛАВЛЕНИЕ