ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
СТАТИКА
Практикум

Учебное пособие содержит типовые задачи с решениями по статике, взятые из наиболее распространенного сборника задач И.В. Мещерского (§ 1–9). В начале пособия приведены основные теоретические положения и методические указания, используемые при решении задач. Решения даны с подробными пояснениями.

Для студентов и преподавателей технических вузов и естественных факультетов университетов, а также для лиц, самостоятельно изучающих теоретическую механику.

Предисловие

В последние десятилетия заметно возросло количество издаваемых решебников по физике, математике и механике для студентов технических вузов. Это обусловлено необходимостью создания базы для самостоятельной работы из-за сокращения времени на изучение данных дисциплин, а также на выполнение расчетно-графических и контрольных работ. Теоретическая часть курса при этом еще может быть скорректирована, а практическая уменьшается необратимо. Многие разделы механики, требующие больших затрат времени, не могут быть проработаны на практических занятиях с необходимой степенью детализации, в результате происходит «вымывание» трудного материала при изучении теоретической механики в целом и отдельных ее разделов.

Статика является первым разделом теоретической механики и считается самой простой частью данной дисциплины. Но тем не менее решение задач по статике является основой для понимания всех остальных разделов курса, а также для решения задач по динамике, которые справедливо признаны наиболее сложными.

Сборник задач И.В. Мещерского является самым известным учебным пособием по теоретической механике, выдержавшим десятки переизданий во многих странах мира. Он и сегодня широко используется в высших учебных заведениях технического профиля нашей страны. Первое пособие с решением задач этого сборника было издано в 1963 г. в Германии (H. Neuber, Zösunger zur Aufgabensammbung Mestscherski, 1963, DVW, 465 s.). Однако позднее сборник многократно переиздавался, при этом он исправлялся и дополнялся.

К сожалению, вследствие дефицита времени большая часть задач из этого сборника остается для основной массы студентов нерешенной, а значит, неизвестной. Предлагаемое учебное пособие содержит решения всех задач без исключения, что обеспечивает разнообразие, а различный подход к решению одной и той же задачи представляет определенный интерес для студентов и преподавателей. В начале пособия приведены основные теоретические положения статики и методические указания по решению задач различных типов. Ход решения представлен достаточно подробно, что полезно методически, так как обычно на занятиях студенты успевают записать решение без пояснений, а в дальнейшем с трудом могут объяснить путь его получения.

Введение

Механика является одной из древнейших наук, возникновение и развитие которой обусловлено потребностями практики.

Теоретическая механика — это наука, в которой изучаются общие законы движения и механического взаимодействия материальных тел математическими методами.

Наиболее часто при решении задач мы будем пользоваться такими понятиями, как сила, материальная точка и абсолютно твердое тело.

Сила — это количественная мера механического взаимодействия между физическими объектами; сила характеризуется модулем, направлением и точкой приложения, т.е. сила является вектором.

Примечание. Обычно, если сила обозначается некоторой буквой со знаком вектора, то модуль силы — той же буквой, но без знака вектора. Например, $\overline{F}$ — сила, F — модуль, т.е. $F = |\overline{F}|$.

Материальная точка — это тело, размеры которого в рассматриваемых конкретных условиях можно не учитывать (математическая точка, обладающая массой).

Абсолютно твердое тело — это такое материальное тело, в котором расстояния между любыми его точками остаются неизменными.

Курс механики состоит из трех разделов — статики, кинематики и динамики.

Статика изучает методы преобразования систем сил в эквивалентные системы сил и устанавливает условия равновесия сил, приложенных к твердому телу.

Кинематика исследует движение точки и материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения, вне связи с силами, определяющими это движение.

Динамика изучает движение материальных тел в зависимости от причин, его вызывающих.

Аксиомы статики

Аксиомы сформулированы на основе наблюдений и изучения окружающих нас явлений реального мира. Некоторые основные законы механики Галилея — Ньютона являются одновременно и аксиомами статики.

Аксиома 1 (аксиома инерции):

под действием взаимно уравновешивающихся сил материальная точка (тело) находится в состоянии покоя или движется прямолинейно и равномерно.

Аксиома 2 (аксиома равновесия двух сил):

две силы, приложенные к твердому телу, взаимно уравновешиваются только в том случае, если их модули равны и они направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис. 1).

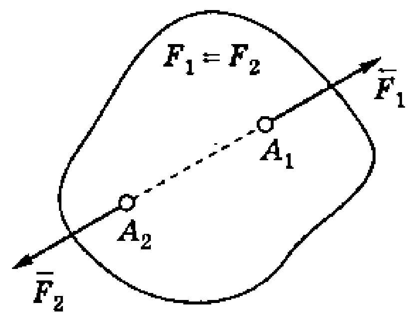


Рис. 1

Аксиома 3 (аксиома присоединения и исключения уравновешивающихся сил):

действие системы сил на твердое тело не изменится, если к ней присоединить или из нее исключить систему взаимно уравновешивающихся сил.

Следствие: не нарушая состояния твердого тела, силу можно переносить по линии ее действия в любую точку тела.

В механике твердого тела сила — это скользящий вектор.

Две системы сил называются ***эквивалентными***, если одну из них можно заменить другой, не нарушая состояния твердого тела.

Равнодействующей называется сила, которая эквивалентна данной системе сил.

Аксиома 4 (аксиома параллелограмма сил): равнодействующая двух сил, линии действия которых пересекаются, приложена в точке пересечения линий действия сил и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (рис. 2).

Геометрически равнодействующая равна $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$.

Модуль равнодействующей определяется по формуле

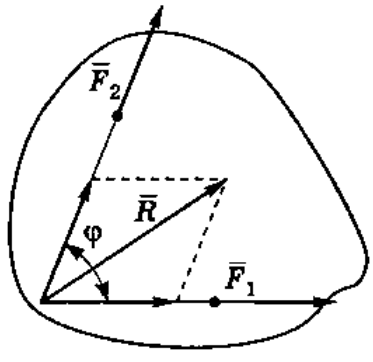


Рис. 2

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi}.$$

Аксиома 5 (аксиома равенства действия и противодействия): всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие (рис. 3).

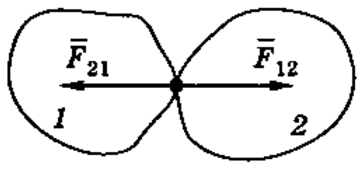


Рис. 3

Аксиома 6 (аксиома сохранения рановесия сил, приложенных к деформирующемуся телу при его затвердении (принцип отвердевания):
равновесие сил, приложенных к деформирующемуся телу, сохраняется при его затвердевании.

Несвободное твердое тело. Связи. Реакции связей

Твердое тело называется ***свободным***, если оно может перемещаться в пространстве в любом направлении.

Тело, ограничивающее свободу движения данного твердого тела, является по отношению к нему *связью.*

Твердое тело, свобода движения которого ограничена связями, называется ***несвободным***.

Все силы, действующие на несвободное твердое тело, наряду с делением на внешние и внутренние силы, можно также разделить на задаваемые (или активные) силы и реакции связей.

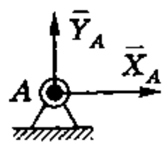
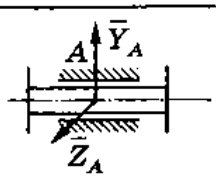
Задаваемые (*активные*) *силы* выражают действие на твердое тело других тел, вызывающих изменение его кинематического состояния.

Реакцией связи называется сила или система сил, выражающая механическое действие связи на тело.

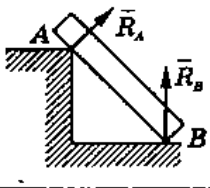
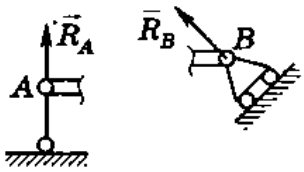
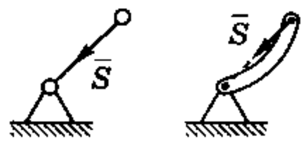
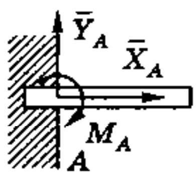
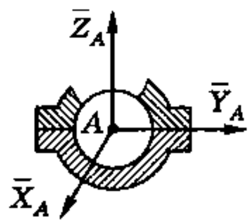
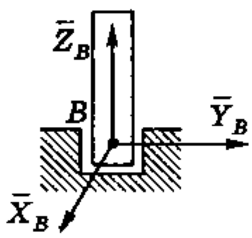
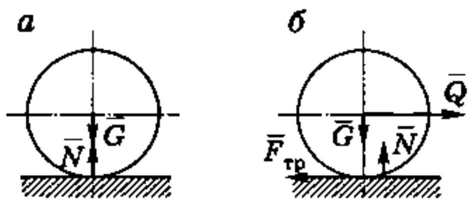
Одним из основных положений механики является **принцип освобождаемости от связей**, согласно которому несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, на которое, кроме задаваемых сил, действуют реакции связей. Так как связью может быть любое тело, то правильное определение направления реакций связей играет важную роль. В табл. 1 показаны наиболее распространенные виды связей.

Таблица 1

Связи и их реакции

Наименование связи	Направление реакций
Шарнирно-неподвижная опора	
Цилиндрический шарнир	

Окончание табл. 1

Наименование связи	Направление реакций
Свободное опирание	
Шарнирно-подвижная опора	
Невесомый стержень	
Жесткая заделка	
Сферический шарнир	
Подпятник	
Качение: без учета трения качения (*а*) с учетом трения качения (*б*)	

Все задачи на равновесие сил, приложенных к твердому телу (или точке) (см. §1–8), решают по следующему плану:

1. Выделяют объект равновесия, к которому приложена система взаимно уравновешивающихся сил.

2. Показывают все действующие на тело активные (задаваемые) силы.

3. Согласно принципу освобождаемости от связей действие связей заменяют реакциями связей.

4. Для полученной системы сил составляют уравнения равновесия.

5. Из полученной системы уравнений определяют искомые величины.

Проекция силы на ось

Проекцией вектора на ось называется направленный отрезок оси, заключенный между двумя перпендикулярами, опущенными из начала и конца вектора (рис. 4, *а*).

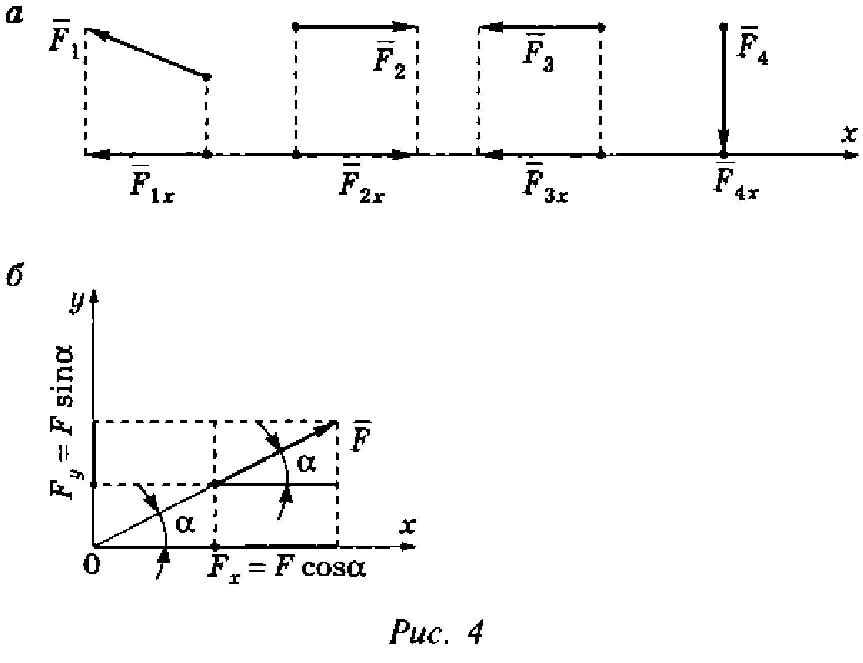


Рис. 4

Величина проекции силы на ось равна произведению модуля этой силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси: $F_x = F\cos\alpha$, $F_y = F\cos(90° - \alpha) = F\sin\alpha$ (рис. 4, *б*).

Примечание. Допускается (для краткости), если ясно, о чем идет речь, вместо «величина проекции» писать просто «проекция».

Понятие момента силы

Момент силы относительно точки

Момент силы $\overline{F}$ относительно точки A равен

$$\overline{M}_A = \bar{r} \times \overline{F}.$$

Вектор $\overline{M}_A$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат сила и точка, и направлен так, чтобы, глядя из конца вектора $\overline{M}_A$, видеть силу стремящейся повернуть тело против часовой стрелки (рис. 5).

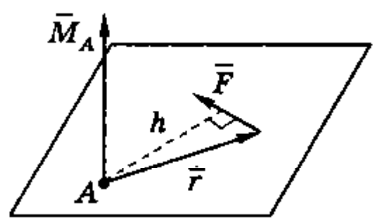


Рис. 5

Величина момента силы относительно точки равна взятому со знаком «+» или «–» произведению модуля силы (F) и кратчайшего расстояния от точки до линии действия силы (плечо h):

$$M_A(\overline{F}) = \pm Fh.$$

Знак «+» ставят, если сила стремится вращать тело относительно точки A против часовой стрелки, «–» — по часовой стрелке.

Момент силы относительно оси

Моментом силы относительно оси называется алгебраическая величина, равная взятому со знаком «+» или «–» произведению модуля проекции этой силы на перпендикулярную к оси плоскость и кратчайшего расстояния от линии действия проекции до оси. Знак «+» ставится, когда сила стремится повернуть тело относительно оси против часовой стрелки, «–» — по часовой стрелке (смотреть на силу с положительного направления соответствующей оси).

Таким образом, чтобы найти момент силы относительно оси z (рис. 6), необходимо:

1) спроецировать силу $\overline{F}$ на плоскость xOy — найти $\overline{F}_1$;

2) определить кратчайшее расстояние от линии действия проекции силы до оси, т.е. h_1;

3) составить алгебраическое произведение F_1h_1;

4) определить знак — для примера, изображенного на рис. 6, это знак «+»:

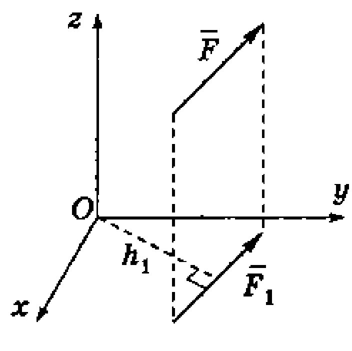


Рис. 6

$$M_z = F_1h_1.$$

Из определения следует, что если сила параллельна оси или ее линия действия пересекает ось, то момент такой силы относительно оси равен нулю.

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей силы

Теорема Вариньона формулируется следующим образом: момент равнодействующей относительно любой точки равен геометрической сумме моментов составляющих сил относительно этой точки, а момент равнодействующей силы относительно любой оси равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно оси.

Пример. Задана сила $\overline{F}$ и координаты точки M (x, y, z) приложения силы (рис. 7). Найдем моменты этой силы относительно осей координат.

Первый способ. Раскладываем силу на составляющие $\overline{F}_x$, $\overline{F}_y$, $\overline{F}_z$, а затем по теореме

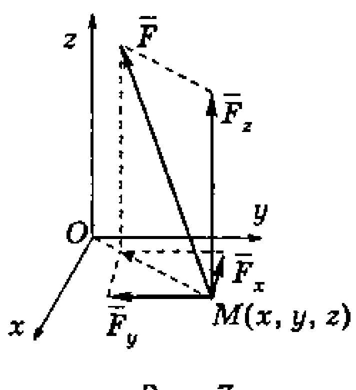


Рис. 7

Вариньона считаем момент каждой проекции относительно осей. Например, относительно оси x:

$$M_x(\bar{F}) = M_x(\bar{F}_x) + M_x(\bar{F}_y) + M_x(\bar{F}_z) = M_x(\bar{F}_z),$$

поскольку $M_x(\bar{F}_x) = 0$ (проекция $\bar{F}_x$ параллельна оси x), $M_x(\bar{F}_y) = 0$ (проекция $\bar{F}_y$ пересекает ось x).

Второй способ. Можно посчитать моменты силы по следующим формулам:

$$M_x(\bar{F}) = yF_z - zF_y, \quad M_y(\bar{F}) = zF_x - xF_z,$$
$$M_z(\bar{F}) = xF_y - yF_x.$$

Пара сил

Парой сил называется система двух параллельных сил, равных по модулю, направленных в разные стороны и не лежащих на одной прямой. Плоскость, в которой расположены силы, называется ***плоскостью пары.*** Расстояние h между линиями действия сил называется ***плечом пары*** (рис. 8). Пара сил не имеет равнодействующей.

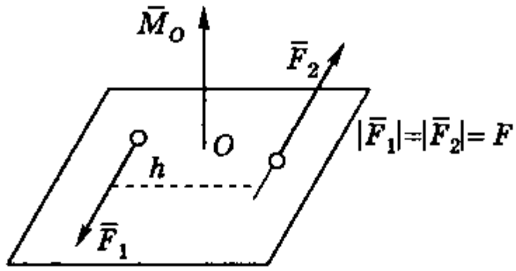


Рис. 8

Величина момента пары сил равна взятому со знаком «+» или «–» произведению модуля одной силы и плеча пары, т.е.

$$M_O = \pm Fh.$$

Знак «+» выбирается в том случае, если пара сил стремится вращать плоскость пары против часовой стрелки, «–» — по часовой стрелке.

Момент пары перпендикулярен плоскости пары и направлен так, чтобы, глядя из конца вектора $\overline{M}_O$, видеть, что пара поворачивает тело против часовой стрелки (см. рис. 8).

Примечание. В терминах «величина момента пары сил» и «величина момента силы относительно точки» (см. выше) для краткости (если ясно, о чем идет речь) можно опускать слово «величина».

Уравнения равновесия для различных систем сил

Понятие системы сил

Совокупность нескольких сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, ..., $\overline{F}_n$, действующих на данное тело, называется ***системой сил***.

Главный вектор $\overline{R}^*$ *системы сил* есть геометрическая сумма этих сил:

$$\overline{R}^* = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n.$$

Модуль главного вектора

$$R^* = \sqrt{\left(R_x^*\right)^2 + \left(R_y^*\right)^2 + \left(R_z^*\right)^2}.$$

Главный момент системы сил относительно точки O:

$$\overline{M}_O = \overline{M}_{1O} + \overline{M}_{2O} + \ldots + \overline{M}_{nO},$$

где $\overline{M}_{iO} = \overline{M}_O(\overline{F}_i)$, $i = \overline{1,\ n}$.

Его проекции $\overline{M}_x$, $\overline{M}_y$, $\overline{M}_z$ на оси x, y, z, проведенные через точку O, равны главным моментам системы сил относительно этих осей:

$$M_x = M_{1x} + M_{2x} + \ldots + M_{nx},$$

$$M_y = M_{1y} + M_{2y} + \ldots + M_{ny},$$

$$M_z = M_{1z} + M_{2z} + \ldots + M_{nz}.$$

Модуль и направление главного момента $\overline{M}_O$ определяются по формулам

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2},$$

$$\cos(\overline{M}_O, \bar{i}) = M_x / M_O, \cos(\overline{M}_O, \bar{j}) = M_y / M_O,$$

$$\cos(\overline{M}_O, \bar{k}) = M_z / M_O,$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — базис системы координат.

Система сходящихся сил

Сходящимися называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке. Равнодействующая $\overline{R}$ сходящихся сил приложена в точке пересечения линий действия сил и равна их геометрической сумме:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n.$$

Уравнения равновесия для плоской системы сходящихся сил:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0. \end{cases}$$

Уравнения равновесия для пространственной системы сходящихся сил:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0. \end{cases}$$

Система параллельных сил

Уравнения равновесия параллельных сил на плоскости.

Условия равновесия для системы параллельных сил: главный вектор и главный момент (относительно точки O) системы равны нулю:

$$\overline{R}^{*}=0,\ \overline{M}_O=0.$$

Этим условиям соответствует система уравнений:

а) $$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} M_{iO}=0,\\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0.\end{cases}$$

Здесь ось y выбрана так, чтобы силы были параллельны ей.

Существует и другая система уравнений равновесия параллельных сил на плоскости:

б) $$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} M_{iA}=0,\\ \sum_{i=1}^{n} M_{iB}=0.\end{cases}$$

При этом прямая AB не должна быть параллельна силам.

Уравнения равновесия для пространственной системы параллельных сил:

а) $$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0 \text{ (силы параллельны оси } x\text{)},\\ \sum_{i=1}^{n} M_{iy}=0,\\ \sum_{i=1}^{n} M_{iz}=0;\end{cases}$$

б) $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \text{ (силы параллельны оси } y), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} M_{ix} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} M_{iz} = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \text{ (силы параллельны оси } z), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} M_{ix} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} M_{iy} = 0. \end{cases}$

Система произвольно расположенных сил

Условием равновесия системы произвольно расположенных сил является равенство нулю главного вектора и главного момента, т.е.

$$\overline{R}^* = 0, \ \overline{M}_O = 0.$$

Уравнениями равновесия для плоской системы произвольно расположенных сил являются следующие три системы уранений:

а) $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} F_{iz} = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} F_{iu} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} F_{iA} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} F_{iB} = 0, \end{cases}$

ось u не должна быть перпендикулярна прямой AB;

в) $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} M_{iA} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} M_{iB} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} M_{iC} = 0, \end{cases}$

точки A, B, C не должны лежать на одной прямой.

Возможные случаи приведения сил, произвольно расположенных на плоскости

При приведении сил, произвольно расположенных на плоскости, к заданному центру O возможны следующие случаи:

Случай I. $\overline{R}^* = 0$; $\overline{M}_O = 0$.

Если главный вектор системы сил равен нулю и ее главный момент относительно центра приведения тоже равен нулю, то силы взаимно уравновешиваются.

Случай II. $\overline{R}^* = 0$; $\overline{M}_O \neq 0$.

Если главный вектор системы сил равен нулю, а ее главный момент относительно центра приведения не равен нулю, то силы приводятся к паре сил.

Момент этой пары сил равен главному моменту системы сил относительно центра приведения.

В этом случае главные моменты данной системы сил относительно всех точек плоскости равны по величине и совпадают по знаку.

Случай III. $\overline{R}^* \neq 0$; $\overline{M}_O = 0$.

Если главный вектор системы сил не равен нулю, а главный момент ее относительно центра приведения равен нулю, то силы приводятся к равнодействующей $\overline{R} = \overline{R}^*$, линия действия которой проходит через центр приведения.

Случай IV. $\overline{R}^* \neq 0$; $\overline{M}_O \neq 0$.

Покажем, что в этом случае заданная система сил также приводится к одной силе — равнодействующей данной системы сил.

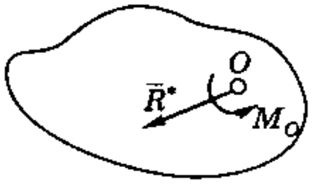


Рис. 9

Рис. 10

Рис. 11

Пусть, например, данная система сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$ приведена к силе $\overline{R}^* = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$, приложенной в центре приведения O, и к паре сил с моментом $\overline{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_{iO}$. Предположим, что $M_O > 0$ (рис. 9).

Выберем силы пары $\overline{R}_1^*$, $\overline{R}$ равными по модулю R^*. Тогда плечо этой пары следует взять равным

$$d = \frac{M_O}{R^*}.$$

Одну из сил пары $\overline{R}_1^*$ приложим в точке O, направив ее противоположно главному вектору $\overline{R}^*$ (рис. 10). Тогда другая сила пары должна быть приложена в точке K отрезка $OK = d$, отложенного перпендикулярно линии действия силы $\overline{R}_1^*$ таким образом, чтобы пара $\overline{R}_1^*$, $\overline{R}$ стремилась вращать плоскость чертежа против часовой стрелки. Силы $\overline{R}^*$ и $\overline{R}_1^*$, приложенные в центре приведения O, как равные и противоположно направленные, уравновешиваются, и рассматриваемая система приводится к одной силе $\overline{R}$, равной главному вектору сил и приложенной в точке K. Эта сила является равнодействующей данной системы сил (рис. 11).

На основе рассмотренных выше случаев приведения можно сделать следующий вывод.

Если силы, произвольно расположенные на плоскости, не уравновешиваются, то их можно привести или к одной силе, или к паре сил.

Уравнения равновесия сил, произвольно расположенных в пространстве

Модули главного момента $\overline{M}_O$ и главного вектора $\overline{R}^*$ рассматриваемой системы сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, ..., $\overline{F}_n$ определяются по формулам

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}; \quad R^* = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

Они равны нулю, если выполняются равенства

$$M_x = 0,\ M_y = 0,\ M_z = 0,\ F_x = 0,\ F_y = 0,\ F_z = 0,$$

которым соответствуют шесть основных уравнений равновесия n сил, расположенных произвольно в пространстве

$$1)\ \sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0; \qquad 4)\ \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;$$

$$2)\ \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0; \qquad 5)\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;$$

$$3)\ \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0; \qquad 6)\ \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0.$$

Уравнения 1)–3) называются уравнениями моментов сил относительно осей координат, уравнения 4)–6) — уравнениями проекций сил на оси.

Возможные случаи приведения сил, произвольно расположенных в пространстве

При приведении сил, произвольно расположенных в пространстве, к заданному центру O возможны следующие случаи:

Случай I. $\overline{R}^{*} = 0; \ \ \overline{M}_O = 0.$

Если главный вектор системы сил и ее главный момент относительно центра приведения равны нулю, то силы взаимно уравновешиваются.

Случай II. $\overline{R}^{*} = 0; \ \ \overline{M}_O \neq 0.$

Если главный вектор системы сил равен нулю, а ее главный момент относительно центра приведения не равен нулю, то силы приводятся к паре сил. Момент этой пары сил равен главному моменту системы сил относительно центра приведения. В этом случае главные моменты системы сил относительно всех точек пространства геометрически равны.

Случай III. $\overline{R}^* \neq 0$; $\overline{M}_O = 0$.

Если главный вектор системы не равен нулю, а ее главный момент относительно центра приведения равен нулю, то силы приводятся к равнодействующей силе $\overline{R} = \overline{R}^*$, линия действия которой проходит через центр приведения.

Случай IV. $\overline{R}^* \neq 0$; $\overline{M}_O \neq 0$; $\overline{M}_O \perp \overline{R}^*$.

Если главный вектор системы сил относительно центра приведения перпендикулярен главному вектору, то силы приводятся к равнодействующей силе $\overline{R} = \overline{R}^*$, линия действия которой не проходит через центр приведения.

Примечание. Случаи I–IV возможны при расположении сил в одной плоскости.

Случай V. $\overline{R}^* \neq 0$; $\overline{M}_O \neq 0$; $\overline{M}_O$ не перпендикулярен $\overline{R}^*$.

Если главный момент системы сил относительно центра приведения не перпендикулярен главному вектору, то силы приводятся к двум скрещивающимся силам или к силовому винту (динаме), т.е. к совокупности силы и пары сил, плоскость действия которой перпендикулярна силе.

Рассмотрим приведение системы сил к двум скрещивающимся силам (рис. 12). Пусть после приведения системы сил к некоторому центру O получена сила $\overline{R}^*$, равная главному вектору, приложенная в этом центре, и пара сил, момент которой $\overline{M} = \overline{M}_O$ не перпендикулярен $\overline{R}^*$.

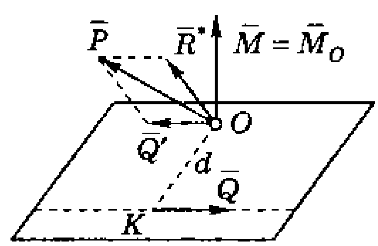


Рис. 12

Проведем плоскость, перпендикулярную моменту пары сил $\overline{M}$, и, выбрав плечо пары d и силы пары $Q = Q' = \dfrac{M}{d}$, расположим в этой плоскости пару сил $\overline{Q}, \overline{Q}'$, эквивалентную системе присоединенных пар. Приложим одну из сил пары $\overline{Q}'$ в точке O, а другую силу $\overline{Q}$ — на конце отрезка OK, проведенного из точки O перпендикулярно силе $\overline{Q}'$. Сложив приложенные в точке O силы $\overline{R}^*$ и $\overline{Q}'$, получим новую силу $\overline{P}$, которая вместе с силой $\overline{Q}$, приложенной к точке K, представляет собой совокупность двух скрещивающихся сил.

Покажем, что в этом случае рассматриваемую систему сил можно также привести к силовому винту — динаме, представляющей собой совокупность силы и пары сил, расположенной в плоскости, перпендикулярной линии действия этой силы.

Допустим, что в результате приведения заданной системы сил к центру O получена в этом центре сила $\overline{R}^*$ и пара сил, момент которой $\overline{M}$, равный главному моменту системы сил $\overline{M}_O$, не перпендикулярен $\overline{R}^*$ (рис. 13).

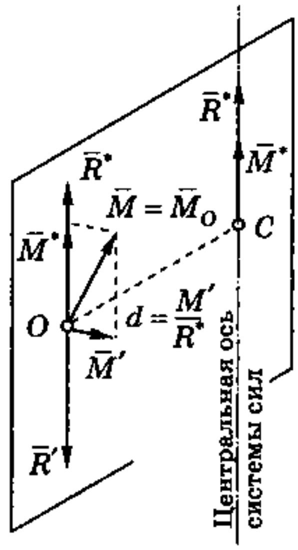


Рис. 13

Известно, что пару сил можно заменить двумя парами. Для этого разложим момент пары сил $\overline{M}$ на два составляющих момента: $\overline{M}^*$, направленный по $\overline{R}^*$, и $\overline{M}'$, направленный перпендикулярно $\overline{R}^*$:

$$\overline{M} = \overline{M}^* + \overline{M}'.$$

Изобразим в плоскости пару сил, имеющую момент $\overline{M}'$. Силы этой пары возьмем равными по модулю $\overline{R}^*$ и одну из сил пары $\overline{R}'$ приложим в точке O и направим противоположно главному вектору. Плечо этой пары сил

$$d = \frac{M'}{R^*}. \tag{1}$$

Отложим плечо $d = OC$ от точки O в плоскости по направлению, перпендикулярному векторам $\overline{R}^*$ и $\overline{M}'$ в такую сторону, чтобы, смотря навстречу вектору момента пары $\overline{M}'$, видеть пару сил стремящимися вращать плоскость против вращения часовой стрелки.

Две силы $\overline{R}^*$ и $\overline{R}'$, приложенные в точке O, взаимно уравновешиваются. Остается сила $\overline{R}^*$, приложенная в точке C, и пара сил с моментом $\overline{M}^*$, параллельным $\overline{R}^*$, который как свободный вектор перенесем из точки O в точку C.

Прямая, вдоль которой направлены $\overline{R}^*$ и $\overline{M}^*$, называется ***центральной осью системы сил*** (рис. 13).

Совокупность силы $\overline{R}^*$ и пары сил $\overline{P}$, $\overline{P}'$ с моментом $\overline{M}^*$, расположенной в плоскости, перпендикулярной плоскости действия этой силы, называют ***силовым винтом*** или ***динамой*** (рис. 14).

Полученную совокупность силы $\overline{R}^*$ в точке C и пары сил с моментом $\overline{M}^*$ можно рассматривать как результат приведения заданной системы сил к центру C, лежащему на центральной оси. Следовательно, момент пары сил $\overline{M}^*$ равен главному моменту $\overline{M}_C$ заданной системы сил относительно точки C, лежащей на центральной оси. Совокупность силы $\overline{R}^*$ и момента пары $\overline{M}^*$ можно перенести в любую точку центральной оси, так как эта ось является линией действия силы $\overline{R}^*$, а момент пары $\overline{M}^*$ является свободным вектором. Отсюда следует, что *главные моменты системы сил относительно всех точек центральной оси равны* $\overline{M}^*$.

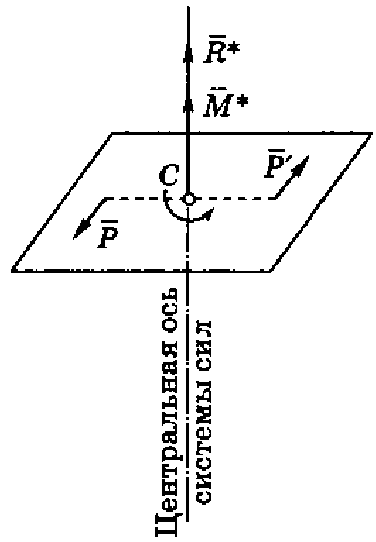


Рис. 14

Рассмотрим изменение главного момента $\overline{M}_O$ системы сил относительно произвольной точки O при изменении положения этой точки по отношению к центральной оси.

Поскольку

$$\overline{M} = \overline{M}_O = \overline{M}^* + \overline{M}' \text{ (см. рис. 13)},$$

где согласно формуле (1)

$$M' = R^* d,$$

то модуль главного момента M_O можно найти по формуле

$$M_O = \sqrt{M^{*2} + M'^2} = \sqrt{M^{*2} + R^{*2} d^2},$$

где d — расстояние от точки O до центральной оси.

Направление $\overline{M}_O$ определяется углом, образованным векторами $\overline{M}_O$ и $\overline{R}^*$:

$$\cos(\overline{M}_O, \overline{R}^*) = \frac{M^*}{M_O} = \frac{M^*}{\sqrt{M^{*2} + R^{*2} d^2}}.$$

Очевидно, что $\cos(\overline{M}_O, \overline{R}^*) > 0$ при $M^* > 0$, тогда $\angle(\overline{M}_O, \overline{R}^*) < 90^\circ$ и направление $\overline{M}^*$ совпадает с направлением $\overline{R}^*$ (см. рис. 13). При $\cos(\overline{M}_O, \overline{R}^*) < 0$ имеем $M^* < 0$, тогда $\angle(\overline{M}_O, \overline{R}^*) > 90^\circ$, т.е. направления $\overline{M}^*$ и $\overline{R}^*$ противоположны.

Инварианты системы сил

Первым (векторным) инвариантом системы сил является главный вектор системы сил, а *вторым (скалярным) инвариантом* является скалярное произведение главного вектора и главного момента этой системы.

Формула для вычисления *наименьшего главного момента*:

$$M^* = \frac{R_x^* M_x + R_y^* M_y + R_z^* M_z}{R^*}.$$

Так как числитель и знаменатель этой дроби инвариантны по отношению к центру приведения, то наименьший главный момент системы сил тоже инвариантен по отношению к центру приведения. Это означает, что *величина* проекции главного момента рассматриваемой системы сил относительно любого центра на направление главного вектора есть величина постоянная, не зависящая от положения этого центра.

При приведении системы сил к любой из точек центральной оси получаются две инвариантные величины $\overline{R}^*$ и $\overline{M}^*$, совокупность которых представляет собой динаму.

Центральная ось системы сил представляет собой геометрическое место точек пространства, относительно которых главные моменты заданной системы имеют наименьший модуль $M_{\min} = |M^*|$ и направлены вдоль этой оси.

Уравнение центральной оси записывается следующим образом:

$$\frac{M_x - (yR_z^* - zR_y^*)}{R_x^*} = \frac{M_y - (zR_x^* - xR_z^*)}{R_y^*} = \frac{M_z - (xR_y^* - yR_x^*)}{R_z^*} = \frac{M^*}{R^*},$$

где R^* — величина главного вектора заданной системы сил; R_x^*, R_y^*, R_z^* — величины проекций главного вектора на оси x, y, z; M_x, M_y, M_z — величины проекций главного момента $\overline{M}_O$ относительно начала координат; x, y, z — текущие координаты точек центральной оси.

Фермы. Определение усилий в стержнях ферм

Понятие фермы

Фермой называется геометрически неизменяемая шарнирно-стержневая конструкция (рис. 15).

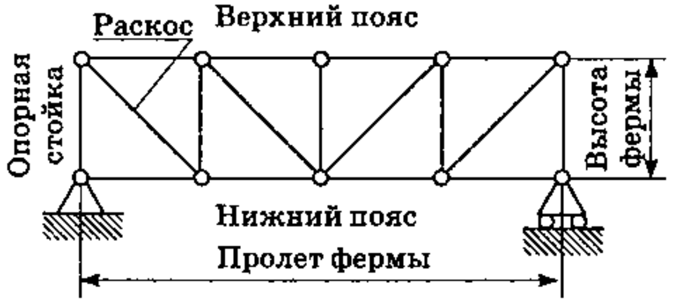


Рис. 15

Если оси всех стержней фермы лежат в одной плоскости, то ферма называется ***плоской***. Точки, в которых сходятся оси стержней, называются ***узлами фермы***, а узлы, которыми ферма опирается на основание, называются ***опорными узлами***.

Стержни плоской фермы, расположенные по верхнему контуру, образуют *верхний пояс*, а расположенные по нижнему контуру — *нижний пояс* фермы.

Вертикальные стержни называются ***стойками***, наклонные — ***раскосами.***

Существует два способа определения усилий в узлах ферм: способ вырезания узлов и метод сечений (метод Риттера.)

Способ вырезания узлов

Этот способ состоит в том, что мысленно вырезают узлы фермы, прикладывают к ним соответствующие внешние силы и реакции стержней и составляют уравнения равновесия сил, приложенных к каждому узлу.

Так как в начале расчета неизвестно, какие стержни фермы растянуты и какие сжаты, то условно предполагают, что все стержни растянуты (реакции стержней направлены от узлов). Если в результате вычислений получают ответ со знаком «минус», то соответствующий стержень сжат.

Найденные реакции стержней равны по модулю внутренним усилиям в стержнях.

Последовательность рассмотрения узлов определяется обычно условием, что число неизвестных сил, приложенных к узлу, не должно превышать числа уравнений равновесия сил (двух для плоской фермы и трех для пространственной). Тогда эти неизвестные определяются сразу из уравнения равновесия сил, действующих на данный узел.

Если ферма плоская, то можно проверить правильность вычислений, построив многоугольники сил, приложенных к ее узлам. Эти многоугольники должны быть замкнутыми.

Усилия в отдельных стержнях загруженной фермы могут оказаться равными нулю. Такие стержни принято называть ***нулевыми***. Ниже приведены леммы, пользуясь которыми можно определить нулевые стержни плоской фермы, не производя ее расчета.

Лемма 1: если в незагруженном узле плоской фермы сходятся два стержня, то усилия в этих стержнях равны нулю (рис. 16).

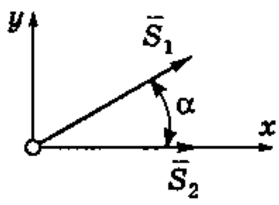


Рис. 16

В рассматриваемом узле действует плоская система сходящихся сил $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$. Составим уравнения равновесия для этих сил:

$$\begin{cases} S_2 + S_1 \cos\alpha = 0, \\ S_1 \cos(90^\circ - \alpha) = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $S_1 = 0$, $S_2 = 0$.

Лемма 2: если в незагруженном узле плоской фермы сходятся три стержня, из которых два расположены на одной прямой, то усилие в третьем стержне равно нулю. Усилия в первых двух стержнях равны между собой (рис. 17).

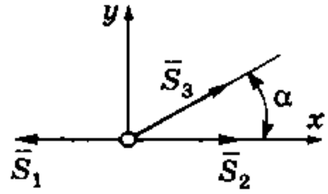


Рис. 17

Запишем уравнения равновесия сил, действующих на узел (плоская система сходящихся сил):

$$\begin{cases} -S_1 + S_2 + S_3 \cos\alpha = 0, \\ S_3 \cos(90^\circ - \alpha) = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $S_3 = 0$; $S_1 = S_2$.

***Лемма 3*:** если в узле плоской фермы сходятся два стержня и к узлу приложена внешняя сила, линия действия которой совпадает с осью одного из стержней, то усилие в этом стержне равно по модулю приложенной силе, а усилие в другом стержне равно нулю (рис. 18).

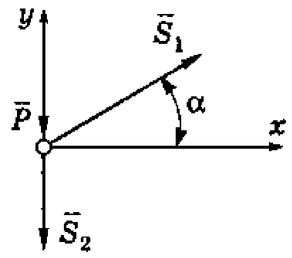


Рис. 18

Уравнения равновесия сил, действующих на узел:

$$\begin{cases} S_1 \cos\alpha = 0, \\ -P - S_2 + S_1 \sin\alpha = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $S_1 = 0$; $S_2 = -P$.

Метод сечений, или метод Риттера

При расчете ферм методом сечений рекомендуется такая последовательность действий:

1. Определяем опорные реакции, рассматривая равновесие фермы как твердого тела, находящегося под действием плоской системы сил.

2. Разрезаем мысленно ферму, к которой приложены все внешние силы, на две части так, чтобы число разрезанных стержней не превышало трех, и заменяем действие отброшенной части искомыми усилиями стержней, полагая все стержни растянутыми.

3. Составляем уравнения равновесия для части фермы так, чтобы в каждое уравнение входило одно неизвестное усилие; для этого составляем уравнение моментов относительно точек, где пересекаются линии действия двух неизвестных усилий; если два

стержня параллельны, то составляем уравнение проекций на ось, перпендикулярную этим стержням, в которое также войдет одно неизвестное усилие.

4. Решая каждое из составленных уравнений, находим искомое усилие в стержнях. Если в ответе получается величина со знаком «минус», то это означает, что стержень сжат, а не растянут.

Центр тяжести твердого тела

Дана система параллельных сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$, которые приводятся к равнодействующей. Будем считать точки приложения сил фиксированными.

Центром параллельных сил называется точка C приложения равнодействующей силы, обладающая тем свойством, что при повороте всех параллельных сил на один угол, с сохранением их параллельности, равнодействующая поворачивается вокруг центра параллельных сил на тот же угол.

Координаты центра параллельных сил C определяются формулами

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\pm F_i x_i)}{\sum_{i=1}^{n}(\pm F_i)}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\pm F_i y_i)}{\sum_{i=1}^{n}(\pm F_i)}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\pm F_i z_i)}{\sum_{i=1}^{n}(\pm F_i)},$$

где x_i, y_i, z_i — координаты точки приложения силы $\overline{F}_i$, $i = 1, 2, ..., n$; F_i — модуль силы, $\pm F_i$ — величина проекции силы $\overline{F}_i$ на ось, параллельную силам. При этом величина проекции силы считается положительной, если направления силы $\overline{F}_i$ и параллельной оси совпадают, и отрицательной, если направления силы $\overline{F}_i$ и параллельной оси противоположны.

Если твердое тело находится вблизи поверхности Земли, то к каждой материальной частице этого тела приложена сила тяжести (считаем, что материальные частицы распределены в твердом теле непрерывно). Силы тяжести двух материальных частиц, лежащих на земной поверхности и отстоящих друг от друга на 31 м, образуют угол, равный одной секунде.

Центр параллельных сил тяжести $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n$ называется ***центром тяжести*** C твердого тела, а сумма сил тяжести всех его материальных частиц называется ***весом*** $\overline{P}$ твердого тела:

$$\overline{P} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i. \tag{1}$$

Координаты x_C, y_C, z_C центра тяжести C твердого тела приближенно вычисляются по формулам

$$x_C = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} P_i x_i, \quad y_C = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} P_i y_i, \quad z_C = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} P_i z_i.$$

Эти формулы являются приближенными, так как координаты x_i, y_i, z_i точки приложения силы тяжести $\overline{P}_i$ i-й материальной частицы определяются с точностью до размеров этой частицы.

Положение центра тяжести C твердого тела по отношению к его материальным частицам не зависит от положения твердого тела.

Рассмотрим однородные твердые тела, для которых удельный вес всех их материальных частиц постоянен.

Координаты x_C, y_C, z_C *центра тяжести C однородного тела* приближенно вычисляются по формулам

$$x_C = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta v_i, \quad y_C = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} y_i \Delta v_i, \quad z_C = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} z_i \Delta v_i. \tag{2}$$

Здесь Δv_i — объем i-й материальной частицы; x_i, y_i, z_i — координаты точки приложения силы тяжести этой частицы; V — объем твердого тела: $V = \sum_{i=1}^{n} \Delta v_i$. Для повышения точности результата подсчета следует разбивать твердое тело на материальные частицы возможно меньшего объема.

Координаты x_C, y_C, z_C *центра тяжести C однородной поверхности* приближенно определяются формулами

$$x_C = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta s_i, \quad y_C = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} y_i \Delta s_i, \quad z_C = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} z_i \Delta s_i, \tag{3}$$

где Δs_i — площадь поверхности i-й материальной частицы; x_i, y_i, z_i — координаты точки приложения силы тяжести этой частицы; S — площадь поверхности твердого тела: $S = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i$.

В случае однородной пластинки, расположенной в плоскости xy (рис. 19), формулы (3) принимают вид

$$x_C = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta s_i, \quad y_C = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} y_i \Delta s_i, \quad z_C = 0. \tag{4}$$

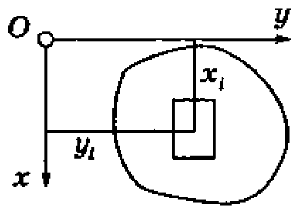


Рис. 19

Здесь суммы $\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta s_i$, $\sum_{i=1}^{n} y_i \Delta s_i$ называются ***статическими моментами площади***:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta s_i = M_{s_y} \ —$$

статический момент площади однородной плоской фигуры относительно оси y;

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \Delta s_i = M_{s_x} \ —$$

статический момент площади однородной плоской фигуры относительно оси x.

Если центр тяжести C однородной плоской фигуры лежит на некоторой оси, то статический момент площади относительно этой оси равен нулю. Например, если центр тяжести C лежит на оси x, то

$$M_{s_x} = \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta s_i = 0.$$

Координаты x_C, y_C, z_C *центра тяжести C однородной линии* приближенно вычисляются по формулам

$$x_C = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta l_i, \quad y_C = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{n} y_i \Delta l_i, \quad z_C = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{n} z_i \Delta l_i, \qquad (5)$$

где Δl_i — длина i-й материальной частицы; x_i, y_i, z_i — координаты точки приложения силы тяжести этой частицы; L — длина тела (линии) (например, проволоки):

$$L = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i.$$

Если плоская кривая лежит в плоскости xy, то $z_C = 0$.

В случаях, когда объемы, площади или длины каждой частицы, а также их центры тяжести могут быть определены точно, формулы (2)–(5) дают не приближенные, а точные значения координат центра тяжести всего тела. В общем случае вместо приближенных формул (2)–(5) можно пользоваться точными формулами:

а) для однородного твердого тела —

$$x_C = \frac{1}{V}\int\limits_{(V)} x\,dv, \qquad y_C = \frac{1}{V}\int\limits_{(V)} y\,dv, \qquad z_C = \frac{1}{V}\int\limits_{(V)} z\,dv,$$

где $V = \int\limits_{(V)} dv$ (интегрирование распространено по всему объему твердого тела);

б) для однородной поверхности —

$$x_C = \frac{1}{S}\int\limits_{(S)} x\,ds, \qquad y_C = \frac{1}{S}\int\limits_{(S)} y\,ds, \qquad z_C = \frac{1}{S}\int\limits_{(S)} z\,ds,$$

где $S = \int\limits_{(S)} ds$ (интегрирование распространено по всей поверхности твердого тела);

в) для лежащей в плоскости xy однородной плоской фигуры —

$$x_C = \frac{1}{S}\int\limits_{(S)} x ds, \qquad y_C = \frac{1}{S}\int\limits_{(S)} y ds, \qquad z_C = 0;$$

г) для однородной линии —

$$x_C = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} x dl, \qquad y_C = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} y dl, \qquad z_C = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} z dl,$$

где $L = \int\limits_{(L)} dl$ (интегрирование распространено по всей длине).

Если линия является плоской и лежит в плоскости xy, то $z_C = 0$.

Если в однородном твердом теле имеется плоскость симметрии, то центр тяжести C лежит в этой плоскости. Если же в теле имеется ось симметрии, то центр тяжести C лежит на этой оси.

Положения центров тяжести некоторых твердых тел простейшей симметричной формы:

а) центр тяжести однородного прямоугольника расположен в точке пересечения его диагоналей;

б) центр тяжести однородного треугольника находится в точке пересечения его медиан;

в) центр тяжести дуги однородной окружности (рис. 20) находится на оси симметрии, и его положение определяется координатами:

$$x_C = r\frac{\sin\alpha}{\alpha}, \ y_C = 0,$$

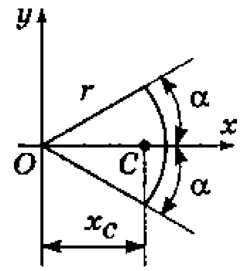


Рис. 20

где r — радиус окружности; α — половина центрального угла;

г) центр тяжести однородного кругового сектора (рис. 21) расположен на оси симметрии и имеет координаты:

$$x_C = \frac{2}{3}r\frac{\sin\alpha}{\alpha}, \ y_C = 0,$$

где r — радиус окружности; α — половина центрального угла;

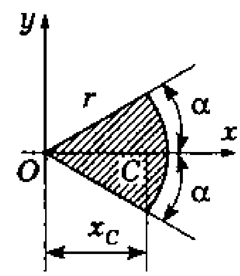


Рис. 21

д) центр тяжести C однородной призмы находится в середине отрезка, соединяющего центры тяжести C_1 и C_2 верхнего и нижнего оснований этой призмы (рис. 22), т.е.

$$C_1C = CC_2;$$

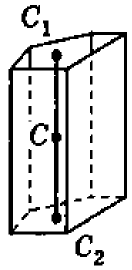


Рис. 22

е) центр тяжести C однородной пирамиды лежит на отрезке, соединяющем вершину O пирамиды с центром тяжести C_1 ее основания, на расстоянии 1/4 этого отрезка от центра тяжести основания пирамиды (рис. 23), т.е.

$$CC_1 = \frac{OC_1}{4};$$

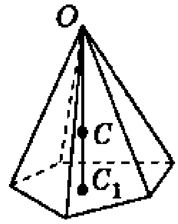


Рис. 23

ж) центр тяжести C однородного кругового конуса лежит на его высоте и отстоит на расстоянии 1/4 высоты от основания конуса (рис. 24), т.е.

$$AC = \frac{OA}{4}.$$

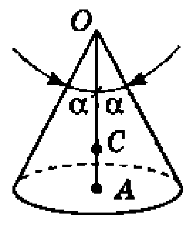


Рис. 24

При решении задач на определение положения центра тяжести однородного твердого тела существенную роль играет выбор осей координат.

Если в твердом теле имеется плоскость симметрии, то одну из осей координат, например z, следует направить перпендикулярно этой плоскости. Так как центр тяжести лежит в плоскости симметрии, т. е. в плоскости xy, то $z_C = 0$ и остается определить только две координаты: x_C и y_C.

Если в твердом теле имеется ось симметрии, то одну из координатных осей, например x, следует совместить с осью симметрии. Так как центр тяжести лежит на оси симметрии, т.е. на оси x, то $y_C = x_C = 0$ и остается определить только одну координату x_C.

Наиболее распространенным приемом использования формул (2)–(5) является мысленная *разбивка однородного твердого тела на такие части, положение центра тяжести каждой из которых либо известно, либо легко может быть определено.*

Так, например, при разбивке площади однородной плоской фигуры, изображенной на рис. 25, на три части (*1*, *2* и *3*) положение ее центра тяжести $C(x_C, y_C, z_C)$ определяется по формулам (4):

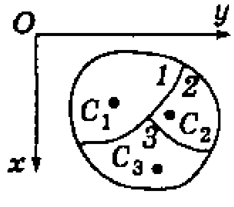


Рис. 25

$$x_C = \frac{x_1\Delta s_1 + x_2\Delta s_2 + x_3\Delta s_3}{\Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3}, \quad y_C = \frac{y_1\Delta s_1 + y_2\Delta s_2 + y_3\Delta s_3}{\Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3},$$

$$z_C = 0;$$

здесь x_1, y_1, z_1 — координаты центра тяжести C_1 части *1* плоской фигуры; Δs_1 — площадь первой части и т.д.

В некоторых случаях целесообразно заменить твердое тело не суммой, а разностью отдельных его частей. Так, например, в случае фигуры с двумя вырезами, изображенной на рис. 26, ее площадь можно записать в виде разности площадей сплошной фигуры *1* и двух вырезов *2* и *3*, т.е. $S = \Delta s_1 - \Delta s_2 - \Delta s_3$. Положение центра тяжести $C(x_C, y_C, z_C)$ данной плоской фигуры определяется по формулам

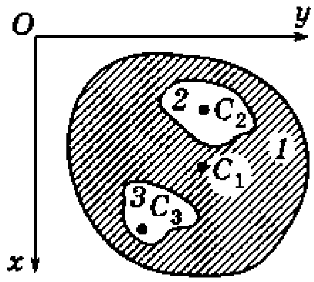


Рис. 26

$$x_C = \frac{x_1\Delta s_1 - x_2\Delta s_2 - x_3\Delta s_3}{\Delta s_1 - \Delta s_2 - \Delta s_3}, \quad y_C = \frac{y_1\Delta s_1 - y_2\Delta s_2 - y_3\Delta s_3}{\Delta s_1 - \Delta s_2 - \Delta s_3}, \quad z_C = 0;$$

здесь x_1, y_1, z_1 — координаты центра тяжести C_1 сплошной плоской фигуры *1*, площадь которой равна Δs_1; x_2, y_2, z_2 — координаты центра тяжести C_2 выреза *2*, площадь которого равна Δs_2; x_3, y_3, z_3 — координаты центра тяжести выреза *3*, площадь которого равна Δs_3.

I. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

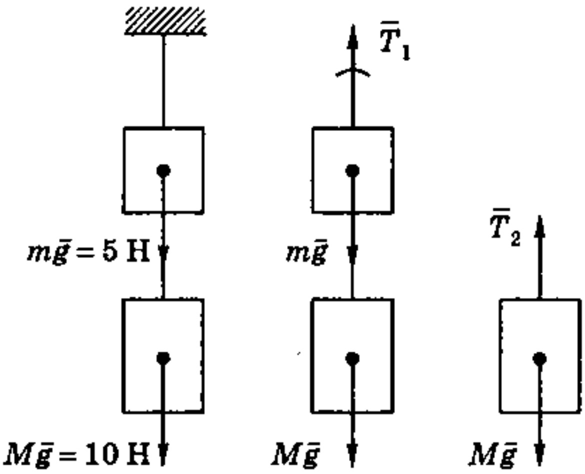
1. Силы, действующие по одной прямой

Задача 1.1

Два груза, в 10 Н и 5 Н, висящие на одной веревке, укреплены на ней в разных местах, причем больший груз висит ниже меньшего. Каково натяжение веревки, если верхний конец ее прикреплен к неподвижной точке?

Решение

Составим уравнение равновесия двух грузов (см. рисунок):



$$T_1 - mg - Mg = 0 \Rightarrow$$

$$T_1 = g(m + M) = 10 + 5 = 15.$$

Составим уравнение равновесия нижнего груза:

$$T_2 - Mg = 0 \Rightarrow$$

$$T_2 = Mg = 10\,\text{Н}.$$

Ответ: 10 Н; 15 Н.

Задача 1.2

Буксир тянет три баржи различных размеров, следующие одна за другой. Сила тяги винтов буксира в данный момент равна 18 кН. Сопротивление воды движению буксира равно 6 кН; сопротивление воды движению первой баржи — 6 кН, второй — 4 кН, третьей — 2 кН. Имеющийся в распоряжении канат выдерживает безопасно растягивающую силу в 2 кН. Сколько канатов нужно протянуть от буксира к первой барже, от первой ко второй, от второй к третьей, если движение прямолинейное и равномерное?

Решение

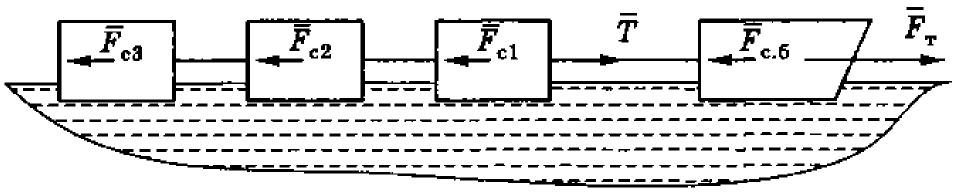


Рис. 1

Обозначим на рис. 1: $\overline{F}_т$ — сила тяги винтов буксира; $\overline{F}_{c.б}$ — сила сопротивления буксира; $\overline{T}$ — суммарная сила натяжения всех канатов; $\overline{T}_1$ — сила натяжения канатов между буксиром и 1-й баржей; $\overline{F}_{c1}$ — сила сопротивления 1-й баржи; $\overline{T}_2$ — сила натяжения канатов между 1-й и 2-й баржей; $\overline{F}_{c2}$ — сила сопротивления 2-й баржи; $\overline{F}_{c3}$ — сила сопротивления 3-й баржи; $\overline{T}_3$ — сила натяжения канатов между 2-й и 3-й баржей; $[T]$ — допустимая нагрузка на один канат.

Составим уравнение равновесия буксира (рис. 2):

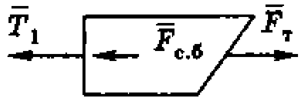


Рис. 2

$$F_т - T_1 - F_{c.б} = 0,$$

$$T_1 = F_т - F_{c.б} = 18 - 6 = 12 \text{ кН}.$$

Составим уравнение равновесия 1-й баржи (рис. 3):

Рис. 3

$$T_1 - T_2 - F_{c1} = 0,$$

$$T_2 = T_1 - F_{c1} = 12 - 6 = 6 \text{ кН}.$$

Составим уравнение равновесия 2-й баржи (рис. 4):

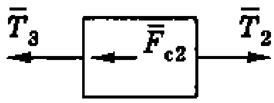


Рис. 4

$$T_2 - T_3 - F_{c2} = 0,$$

$$T_3 = T_2 - F_{c2} = 6 - 4 = 2 \text{ кН}.$$

Составим уравнение равновесия 3-й баржи (рис. 5):

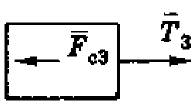


Рис. 5

$$T_3 - F_{c3} = 0,$$

$$T_3 = F_{c3} = 2 \text{ кН}.$$

Количество канатов, необходимое между буксиром и 1-й баржей, равно

$$\frac{T_1}{[T]} = \frac{12}{2} = 6;$$

между 1-й и 2-й баржей —

$$\frac{T_2}{[T]} = \frac{6}{2} = 3;$$

между 2-й и 3-й баржей —

$$\frac{T_3}{[T]} = \frac{2}{2} = 1.$$

Ответ: 6; 3; 1.

Задача 1.3

На дне шахты находится человек весом 640 Н; посредством каната, перекинутого через неподвижный блок, человек удерживает груз в 480 Н.

1) Какое давление оказывает человек на дно шахты?

2) Какой наибольший груз он может удержать с помощью каната?

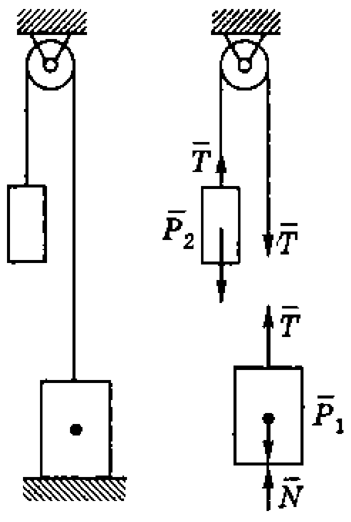
Решение

Пусть $P_1 = 640$ Н — вес человека; $P_2 = 480$ Н — вес груза; N — сила давления человека; T — сила натяжения нити (см. рисунок).

Составим уравнения равновесия для груза и человека:

$$T - P_2 = 0, \qquad (1)$$

$$T - P_1 + N = 0. \qquad (2)$$



Из (1) и (2) находим

$$N = P_1 - T = P_1 - P_2 = 640 - 480 = 160 \text{ Н}.$$

Из (2) следует: $N = P_1 - T$. Если $N = 0$, то

$$T = P_1 = 640 \text{ Н}, \; P_{2\max} = P_1 = 640 \text{ Н}.$$

Ответ: 1) 160 Н; 2) 640 Н.

Задача 1.4

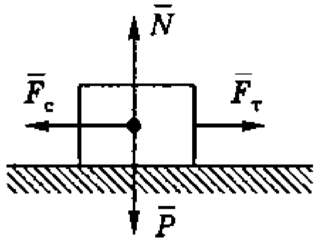
Поезд идет по прямолинейному горизонтальному пути с постоянной скоростью; вес поезда, не считая электровоза, 12 000 кН. Какова сила тяги электровоза, если сопротивление движению поезда равно 0,005 давления поезда на рельсы?

Решение

Обозначим на рисунке: $\bar{F}_т$ — сила тяги; $\bar{P}$ — вес поезда; $\bar{F}_с$ — сила сопротивления движению поезда; $\bar{N}$ — сила реакции рельсов.

Составим уравнения равновесия. Так как движение поезда является прямолинейным и равномерным, то приложенные к поезду силы уравновешены:

$$\begin{cases} F_т - F_с = 0, \\ N - P = 0, \\ F_с = 0{,}005N. \end{cases}$$



Из системы найдем:

$$F_т = F_с = 0{,}005N = 0{,}005 \cdot 12 \cdot 10^3 = 60 \text{ кН}.$$

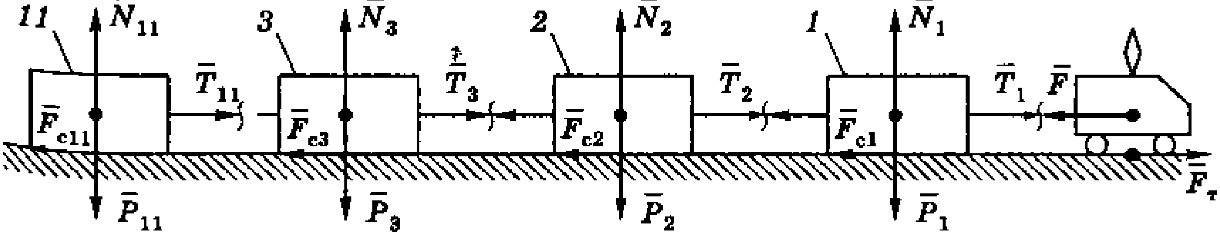
Ответ: 60 кН.

Задача 1.5

Пассажирский поезд состоит из электровоза, багажного вагона весом 400 кН и 10 пассажирских вагонов весом 500 кН каждый. Какова сила тяги электровоза, если сопротивление движению поезда равно 0,005 его веса? С какой силой будут натянуты вагонные стяжки? При решении задачи принять, что сопротивление движению распределяется между составом поезда пропорционально весу и что движение поезда равномерное.

Решение

Введем обозначения (см. рисунок): i — номер вагона начиная от электровоза, $i = \overline{1,\ 11}$; $F_т$ — сила тяги электровоза; F — сила со-



противления движению поезда; $\overline{P}_i$ — вес i-го вагона; $\overline{N}_i$ — реакция рельсов на i-й вагон; F_{ci} — сила сопротивления движению i-го вагона; T_i — сила натяжения стяжки i-го вагона.

Запишем уравнение равновесия электровоза:

$$F_{\text{т}} - F = 0.$$

Поскольку

$$F = 0{,}005(P_1 + P_2 + \ldots + P_{11}), \text{ то}$$

$$F_{\text{т}} = 0{,}005(400 + 10 \cdot 500) = 27 \text{ кН}.$$

Рассмотрим равновесие 11-го (последнего) вагона и запишем соответствующие уравнения:

$$T_{11} - F_{c11} = 0.$$

В силу того что сопротивление движению распределяется между составом поезда пропорционально весу, то

$$F_{c11} = 0{,}005 P_{11},$$

следовательно,

$$T_{11} = F_{c11} = 0{,}005 \cdot 500 = 2{,}5 \text{ кН}.$$

Затем рассмотрим равновесие 10-го вагона:

$$T_{10} - F_{c11} = 0.$$

Поскольку

$$F_{c10} = 0{,}005(P_{10} + P_{11}),$$

то

$$T_{10} = F_{c10} = 0{,}005(500 + 500) = 2 \cdot 2{,}5 \text{ кН}.$$

Рассуждая далее аналогично, получим:

$$T_9 = 3 \cdot 2{,}5 \text{ кН}; \ T_8 = 4 \cdot 2{,}5 \text{ кН}; \ \ldots; \ T_2 = 10 \cdot 2{,}5 \text{ кН}.$$

Наконец, рассмотрим 1-й (багажный) вагон и соответствующее уравнение равновесия:

$$T_1 - F_{c1} = 0.$$

Так как

$$F_{c1} = 0{,}005(P_1 + P_2 + \ldots + P_{11}),$$

то

$$T_1 = 0{,}005(400 + 10 \cdot 500) = 27 \text{ кН}.$$

О т в е т: сила тяги электровоза 27 кН, $T_{11} = 2{,}5$ кН, $T_{10} = 2 \cdot 2{,}5$ кН, ..., $T_2 = 10 \cdot 2{,}5$ кН, $T_1 = 27$ кН (нижний индекс означает номер вагона начиная от электровоза).

2. Силы, линии действия которых пересекаются в одной точке

Задача 2.1

В центре правильного шестиугольника приложены силы $F_1 = 1$ Н, $F_2 = 3$ Н, $F_3 = 5$ Н, $F_4 = 7$ Н, $F_5 = 9$ Н, $F_6 = 11$ Н, направленные к его вершинам. Найти величину и направление равнодействующей и уравновешивающей сил.

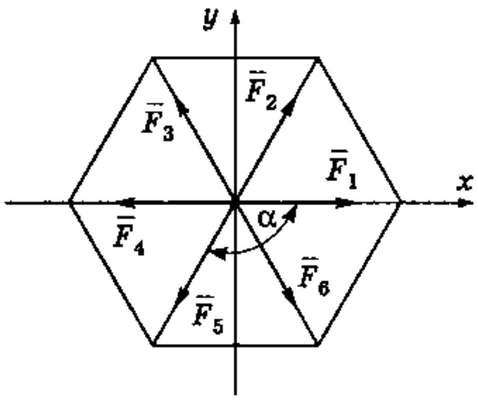
Решение

Найдем проекции равнодействующей сил $\overline{R}$ на оси координат (см. рисунок):

$$R_x = \sum_{i=1}^{6} F_{ix}; \quad R_y = \sum_{i=1}^{6} F_{iy}.$$

$$R_x = F_1 + F_2\cos 60^\circ - F_3\cos 60^\circ - F_4 - F_5\cos 60^\circ +$$
$$+ F_6\cos 60^\circ = 1 + \frac{3}{2} - \frac{5}{2} - 7 - \frac{9}{2} + \frac{11}{2} = -6 \text{ Н},$$

$$R_y = F_2\sin 60^\circ + F_3\sin 60^\circ - F_5\sin 60^\circ -$$
$$- F_6\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}(8-20) = -6\sqrt{3}.$$



Тогда

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{6^2 + 6^2\cdot 3} = 6\cdot 2 = 12 \text{ Н}.$$

$$\cos(\overline{R}, x) = \frac{R_x}{R} = -\frac{6}{12} = -0{,}5.$$

Таким образом, вектор равнодействующей направлен по вектору силы F_5, а вектор уравновешивающей силы — по вектору силы F_2.

Ответ: 12 Н; направление уравновешивающей противоположно направлению заданной силы в 9 Н.

Задача 2.2

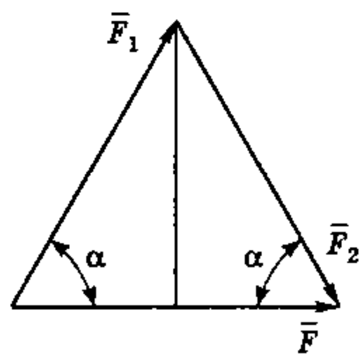
Силу в 8 Н разложить — на две по 5 Н каждая. Можно ли ту же силу разложить на две по 10 Н, 20 Н и т.д? На две по 100 Н?

Решение

Обозначим силу, которую требуется разложить, через $\overline{F}$, две другие — соответственно $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$. Изобразим на рисунке силу $\overline{F}$ как основание равнобедренного (так как $F_1 = F_2$) треугольника. Ввиду равенства углов наклона $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ к горизонту, получим

$$F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\alpha = F \Rightarrow \cos\alpha = \frac{F}{F_1 + F_2} = \frac{F}{2F_1},$$

где $F = 8$ Н, $F_1 = 5$ Н.



Тогда $\cos\alpha = 0{,}8$ и, выбрав соответствующий угол, силу $\overline{F}$ можно разложить на $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, $F_1 = F_2 = 5$ Н.

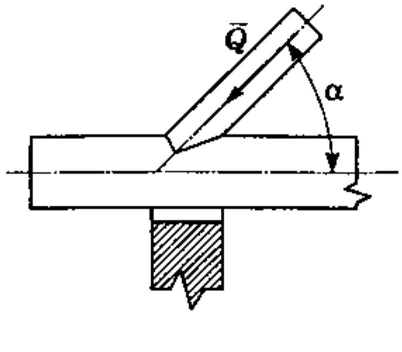
Аналогично можно решить задачу для $F_1 = 10$ Н, 20 Н, ..., 100 Н, каждый раз определяя нужный угол.

Это решение годится для случая, когда не указаны направления разложения сил.

Ответ: да, если не заданы направления разложения.

Задача 2.3

По направлению стропильной ноги, наклоненной к горизонту под углом $\alpha = 45°$, действует сила $Q = 2{,}5$ кН. Какое усилие S возникает при этом по направлению горизонтальной затяжки и какая сила N действует на стену по отвесному направлению?

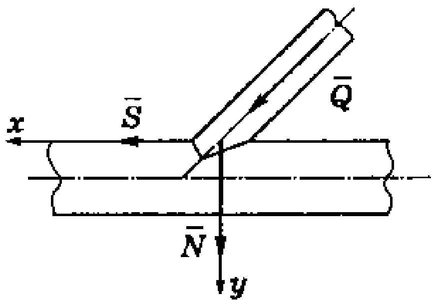


Р е ш е н и е

Разложим силу Q по направлениям x, y (см. рисунок). Получим

$$S = Q_x = Q\cos 45° = 2{,}5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}77 \text{ кН}.$$

$$N = Q_y = Q\cos 45° = 2{,}5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}77 \text{ кН}.$$



О т в е т: $S = N = 1{,}77$ кН.

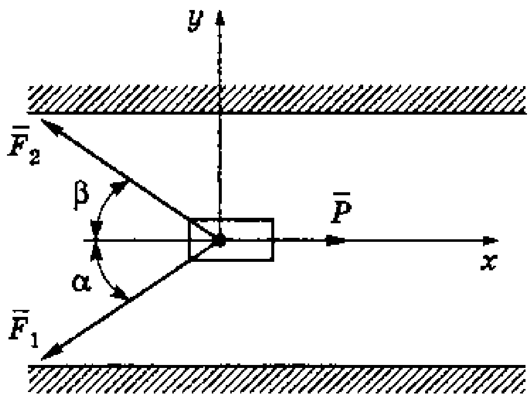
Задача 2.4

Два трактора, идущих по берегам прямого канала с постоянной скоростью, тянут барку при помощи двух канатов. Силы натяжения канатов равны $F_1 = 0{,}8$ кН и $F_2 = 0{,}96$ кН. Угол между ними равен $\alpha + \beta = 60°$. Найти сопротивление воды P, испытываемое баркой при ее движении, и углы α и β, которые должны составлять канаты с берегами канала, если барка движется параллельно берегам.

Р е ш е н и е

Изобразим на рисунке силы, действующие на барку. Так как барка движется с постоянной скоростью, то можно записать следующие уравнения равновесия:

$$\begin{cases} F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta - P = 0, \\ F_2 \sin\alpha - F_1 \sin\beta = 0. \end{cases}$$



Из второго уравнения системы следует $\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \dfrac{F_1}{F_2}$, или (поскольку $\beta = 60° - \alpha$)

$$\frac{\sin(60° - \alpha)}{\sin\alpha} = \frac{F_1}{F_2}.$$

После преобразований получим

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}F_2}{2F_1+F_2},\quad \alpha=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}F_2}{2F_1+F_2}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\cdot 0{,}96}{1{,}6+0{,}96}=33^\circ.$$

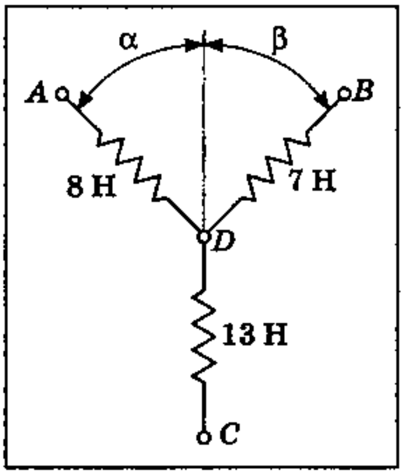
$$\beta=60^\circ-\alpha=60^\circ-33^\circ=27^\circ.$$

$$P=F_1\cos\left[\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}F_2}{2F_1+F_2}\right]+F_2\cos\left[60^\circ-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}F_2}{2F_1+F_2}\right]=1{,}53\text{ кН}.$$

О т в е т: $P=1{,}53$ кН; $\alpha=33^\circ$, $\beta=27^\circ$.

Задача 2.5

Кольца A, B и C трех пружинных весов укреплены неподвижно на горизонтальной доске. К крючкам весов привязаны три веревки, которые натянуты и связаны в один узел D. Показания весов: 8, 7 и 13 Н. Определить углы α и β, образуемые направлениями веревок, как указано на рисунке.



Р е ш е н и е

Представим данные из условия задачи на рисунке и обозначим оси.

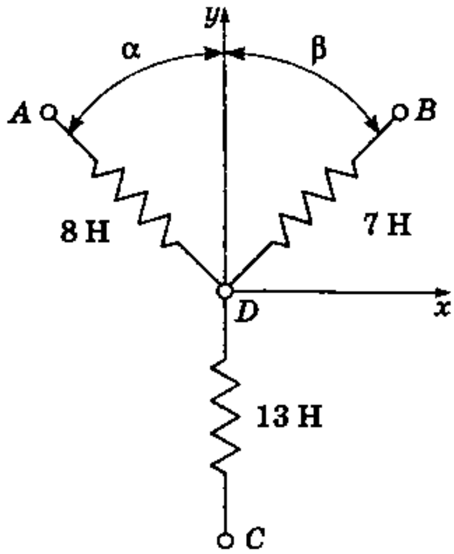
Рассмотрим равновесие узла D и составим систему уравнений:

$$\begin{cases}8\sin\alpha-7\sin\beta=0,\\8\cos\alpha+7\cos\beta-13=0.\end{cases}$$

После преобразований получим

$$\begin{cases}8\sqrt{1-\cos^2\alpha}=7\sqrt{1-\cos^2\beta},\\8\cos\alpha+7\cos\beta=13,\end{cases}$$

$$\begin{cases}64\cos^2\alpha-49\cos^2\beta=15,\\8\cos\alpha+7\cos\beta=13,\end{cases}$$



$$\begin{cases} 8\cos\alpha + 7\cos\beta = 13, \\ 8\cos\alpha - 7\cos\beta = \dfrac{15}{13}. \end{cases}$$

Следовательно,

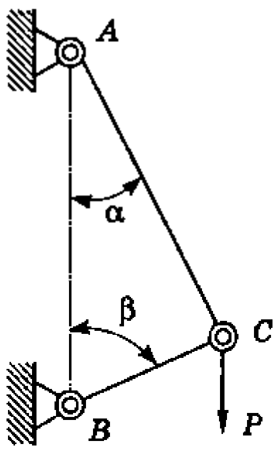
$$\cos\alpha = \frac{1}{16}\left(13 + \frac{15}{13}\right) = \frac{23}{26}, \quad \cos\beta = \frac{1}{14}\left(13 - \frac{15}{13}\right) = \frac{77}{91}.$$

Тогда $\alpha = 27{,}8°$, $\beta = 32{,}2°$.

Ответ: $\alpha = 27{,}8°$; $\beta = 32{,}2°$.

Задача 2.6

Стержни AC и BC соединены между собой и с вертикальной стеной посредством шарниров. На шарнирный болт C действует вертикальная сила P = 1000 Н.

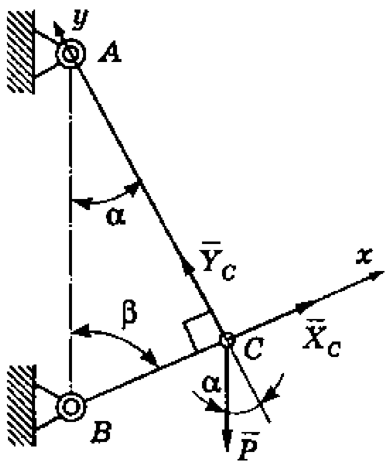


Определить реакции этих стержней на шарнирный болт C, если углы, составляемые стержнями со стеной, равны: $\alpha = 30°, \beta = 60°$.

Решение

Пользуясь тем, что $\alpha + \beta = 90°$ и, следовательно, $\angle C = 90°$, получим следующие уравнения равновесия (уравнения проекций) (см. рисунок):

$$\begin{cases} X_C - P\sin\alpha = 0, \\ Y_C - P\cos\alpha = 0. \end{cases}$$



Поэтому

$$X_C = 1000\sin 30° = 500 \text{ Н},$$

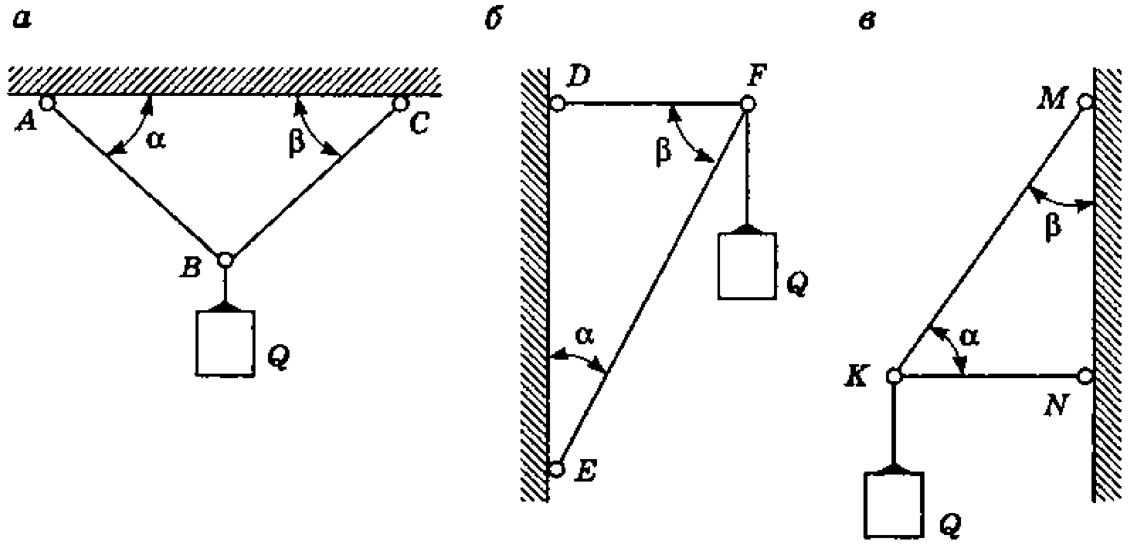
$$Y_C = 1000\cos 30° = 866 \text{ Н}.$$

Далее, рассматривая равновесие стержней, можно определить реакции в шарнирах A и B и направления этих реакций.

Ответ: 866 Н; 500 Н.

Задача 2.7

На рисунках *а*, *б*, *в*, как и в предыдущей задаче, схематически изображены стержни, соединенные между собой, с потолком и стенами посредством шарниров. К шарнирным болтам *B*, *F*, *K* подвешены грузы Q = 1000 Н. Определить усилия в стержнях для случаев: а) $\alpha=\beta=45°$; б) $\alpha=30°$, $\beta=60°$; в) $\alpha=60°$, $\beta=30°$.



Решение

а) Рассмотрим равновесие узла B (рис. 1):

$$\begin{cases} -N_1\cos\alpha+N_2\cos\alpha=0, \\ (N_1+N_2)\sin\alpha=Q. \end{cases}$$

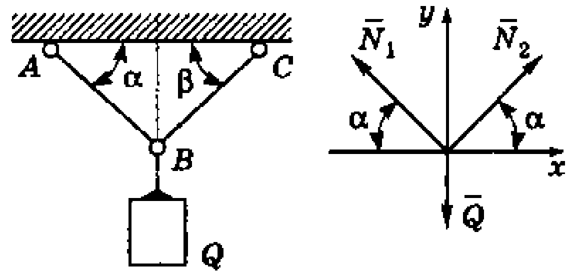


Рис. 1

Следовательно,

$$N_1=N_2=\frac{Q}{2\sin\alpha}=\frac{1000}{2\sin 45°}=707\ \text{Н}.$$

б) Рассмотрим равновесие узла F (рис. 2):

$$\begin{cases} N_1+N_2\cos\beta=0, \\ N_2\cos\alpha+Q=0, \end{cases}$$

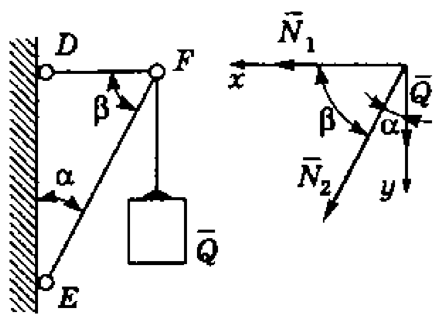


Рис. 2

$$N_2 = -\frac{Q}{\cos\alpha} = -\frac{1000}{\cos 30^\circ} = -577 \text{ Н},$$

$$N_1 = -Q\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = -1000\frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = -1154 \text{ Н}.$$

в) Рассмотрим равновесие узла K (рис. 3):

$$\overline{N}_1 + \overline{N}_2 + \overline{Q} = 0.$$

Из силового треугольника KQN найдем:

$$N_1 = Q\operatorname{tg}\beta = 577 \text{ Н},$$

$$N_2 = \frac{Q}{\cos\beta} = 1154 \text{ Н}.$$

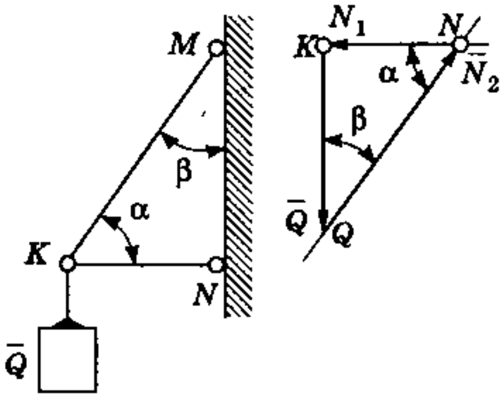


Рис. 3

О т в е т: а) $N_1 = N_2 = 707$ Н;

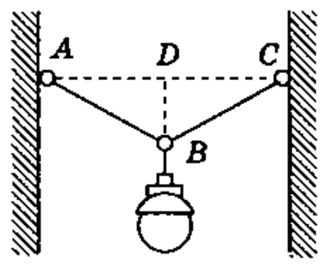
б) $N_1 = -557$ Н, $N_2 = -1154$ Н;

в) $N_1 = 557$ Н, $N_2 = 1154$ Н.

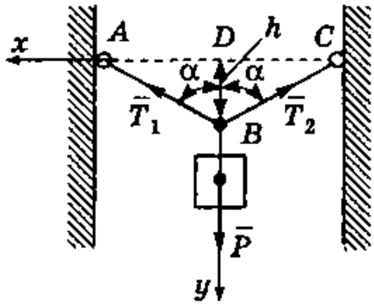
П р и м е ч а н и е. Здесь и далее ответы могут отличаться от ответов, приведенных в задачнике, знаками. Это связано с тем, что при решении задач выбор направлений осей координат или(и) искомых векторов сил (моментов сил) может быть различным.

Задача 2.8

Уличный фонарь подвешен в точке B к середине троса ABC, прикрепленного концами веревки к крюкам A и C, находящимся на одной горизонтали. Определить натяжения T_1 и T_2 в частях троса AB и BC, если вес фонаря $P = 150$ Н, длина всего троса ABC равна $l = 20$ м и отклонение точки его подвеса от горизонтали $BD = h = 0{,}1$ м. Весом троса пренебречь.



Решение



Покажем на рисунке силы, действующие на систему, и реакции связей.

Составим уравнения равновесия узла B:

$$\begin{cases} T_1 \sin\alpha - T_2 \sin\alpha = 0, \\ P - T_1\cos\alpha - T_2\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует $T_1 = T_2$, поэтому из второго уравнения получим

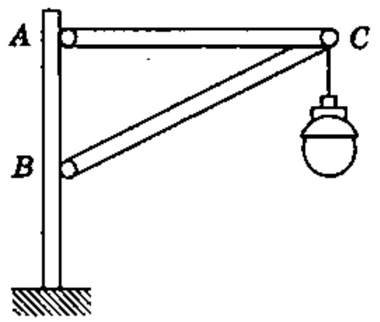
$$2T_1\cos\alpha = P.$$

Поскольку $\cos\alpha = \dfrac{2h}{l}$, то

$$2T_1 = \frac{Pl}{4h} = \frac{150\cdot 20}{4\cdot 0,1} = 7500\ \text{Н} = 7,5\ \text{кн}.$$

Ответ: $T_1 = T_2 = 7,5$ кН.

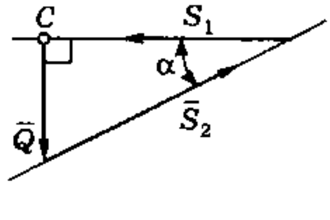
Задача 2.9



Уличный фонарь весом 300 Н подвешен к вертикальному столбу с помощью горизонтальной поперечины $AC = 1,2$ м и подкоса $BC = 1,5$ м. Найти усилия S_1 и S_2 в стержнях AC и BC, считая крепления в точках A, B и C шарнирными.

Решение

Определим расстояние $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = 0,9$ м.



Построим силовой треугольник (см. рисунок). Так как узел C находится в равновесии, то $\bar{Q} + \bar{S}_2 + \bar{S}_1 = 0$.

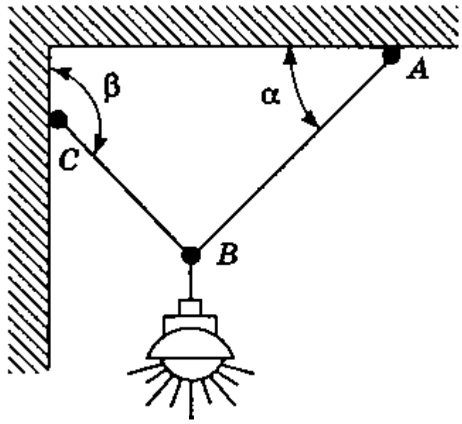
$$\frac{S_1}{Q} = \frac{AC}{AB}, \quad S_1 = Q\frac{AC}{AB} = 300 \cdot \frac{1,2}{0,9} = 400 \text{ Н},$$

$$\frac{S_2}{Q} = \frac{BC}{AB}, \quad S_2 = Q\frac{BC}{AB} = 300 \cdot \frac{1,5}{0,9} = 500 \text{ Н}.$$

Ответ: $S_1 = 400$ Н; $S_2 = 500$ Н.

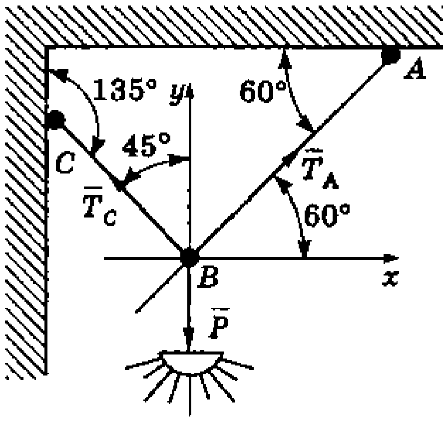
Задача 2.10

Электрическая лампа весом 20 Н подвешена к потолку на шнуре AB и затем оттянута к стене веревкой BC. Определить натяжения: T_A шнура AB и T_C веревки BC, если известно, что угол $\alpha = 60°$, а угол $\beta = 135°$. Весом шнура и веревки пренебречь.



Решение

Покажем на рисунке силы, действующие на систему, и реакции связей.



Составим уравнения равновесия узла B:

$$\begin{cases} T_A \cos 60° - T_C \cos 45° = 0 \\ T_A \sin 60° + T_C \sin 45° = P. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует

$$\frac{T_A}{2} = T_C\frac{\sqrt{2}}{2}, T_A = \sqrt{2}T_C.$$

Подставляя выражение для T_A во второе уравнение системы, получим

$$\sqrt{2}T_C\frac{\sqrt{3}}{2} + T_C\frac{\sqrt{2}}{2} = P,$$

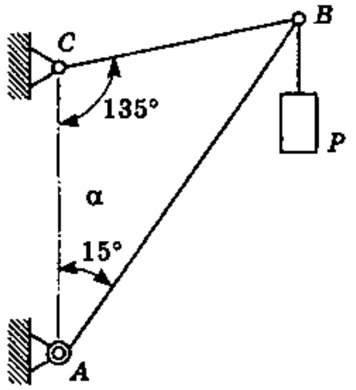
$$T_C(\sqrt{6}+\sqrt{2})=2P,$$

$$T_C=\frac{\sqrt{2}P}{1+\sqrt{3}}=10,4\ \text{Н};$$

$$T_A=\frac{2P}{1+\sqrt{3}}=14,6\ \text{Н},$$

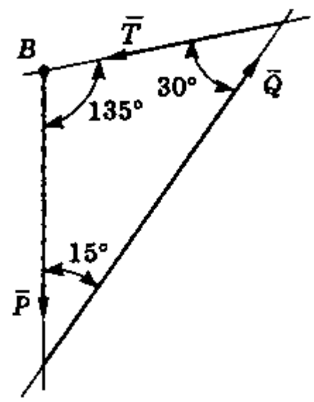
О т в е т: T_A = 14,6 Н; T_C = 10,4 Н.

Задача 2.11



Мачтовый кран состоит из стрелы *AB*, прикрепленной шарниром *A* к мачте, и цепи *CB*. К концу *B* стрелы подвешен груз *P* = = 2 кН; углы *BAC* = 15°, *ACB* = 135°. Определить натяжение *T* цепи *CB* и усилие *Q* в стреле *AB*.

Р е ш е н и е



Построим силовой треугольник *TPQ* (см. рисунок). Так как узел находится в равновесии, то

$$\bar{Q}+\bar{T}+\bar{P}=0.$$

По теореме синусов найдем:

$$\frac{P}{\sin 30^\circ}=\frac{T}{\sin 15^\circ},$$

$$T=P\frac{\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ}=1,04\ \text{кН};$$

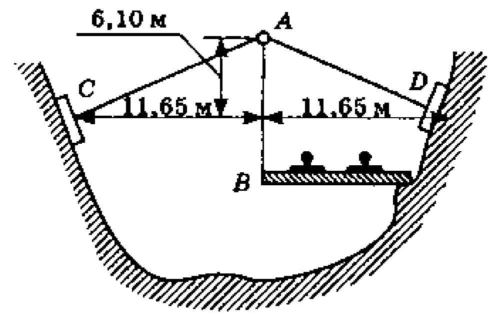
$$\frac{P}{\sin 30^\circ}=\frac{Q}{\sin 135^\circ},$$

$$Q=P\frac{\sin 135^\circ}{\sin 30^\circ}=2,83\ \text{кН}.$$

О т в е т: $T=1,04$ кН; $Q=2,83$ кН.

Задача 2.12

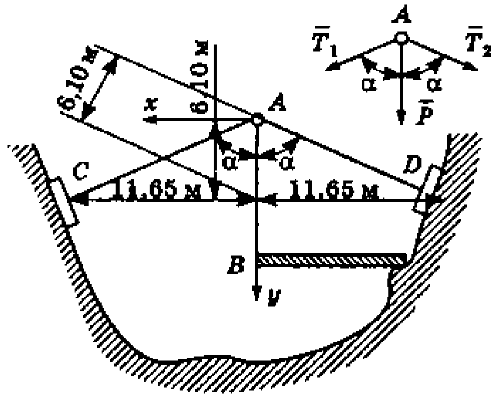
На железной дороге, проведенной в горах, участок пути в ущелье подвешен так, как показано на рисунке. Предполагая подвеску AB нагруженной силой $P = 500$ кН, найти усилия в стержнях AC и AD.



Решение

Составим уравнения равновесия узла A (см. рисунок):

$$\begin{cases} T_1 \sin\alpha - T_2 \sin\alpha = 0, \\ P + T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\alpha = 0, \end{cases} \Rightarrow$$



$$\begin{cases} T_1 = T_2, \\ 2T_1 \cos\alpha + P = 0. \end{cases}$$

Вычислим

$$\cos\alpha = \frac{6,1}{\sqrt{11,65^2 + 6,1^2}} = \frac{6,1}{13,15} =$$

$$= 4,6386 \cdot 10^{-1}.$$

Тогда из системы получим

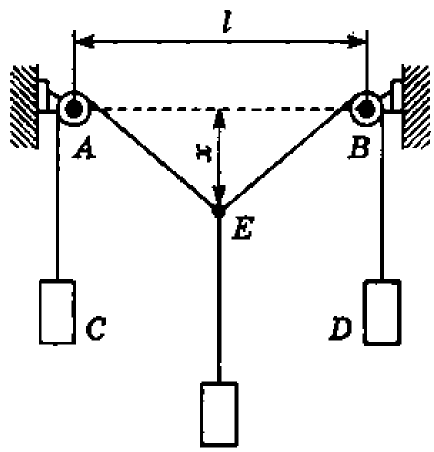
$$T_2 = T_1 = -\frac{P}{2\cos\alpha} = -539 \text{ кН}.$$

Таким образом, стержни сжаты.

Ответ: стержни AC и AD сжаты одинаковым усилием 539 кН.

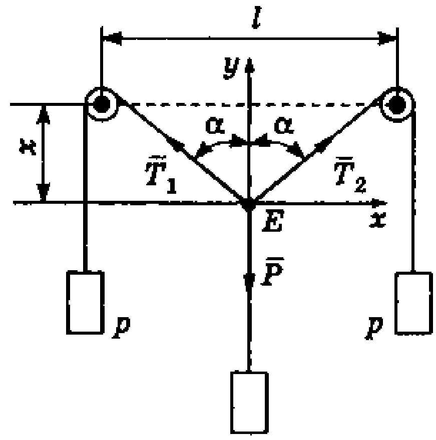
Задача 2.13

Через два блока A и B, находящихся на одной горизонтальной прямой $AB = l$, перекинута веревка $CAEBD$. К концам C и D веревки подвешены гири весом p каждая, а к точке E — гиря весом P. Определить, пренебрегая трением на блоках и их размерами, расстояние x точки E от прямой AB в положении равновесия. Весом веревки пренебречь.



Решение

Покажем на рисунке силы, действующие на систему, и реакции связей.



Составим уравнения равновесия гири E:

$$\begin{cases} T_2 \sin\alpha - T_1 \sin\alpha = 0, \\ T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\alpha - P = 0. \end{cases}$$

Поскольку $T_1 = T_2 = p$, то из второго уравнения системы найдем:

$$2p\cos\alpha = P.$$

Так как

$$\cos\alpha = \frac{2x}{\sqrt{l^2 + 4x^2}},$$

то

$$\frac{4px}{\sqrt{l^2 + 4x^2}} = P, \quad x = \frac{Pl}{2\sqrt{4p^2 - P^2}}.$$

Ответ: $x = \dfrac{Pl}{2\sqrt{4p^2 - P^2}}$.

Задача 2.14

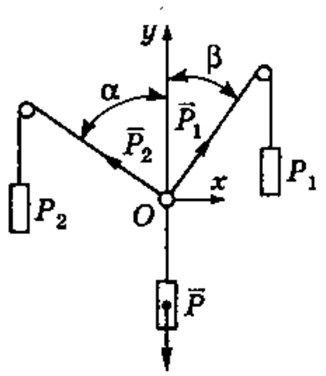
Груз весом $P = 25$ Н удерживается в равновесии двумя веревками, перекинутыми через блоки и натягиваемыми грузами. Один из этих грузов весит $P_1 = 20$ Н; синус угла, образуемого соответствующей веревкой с вертикалью, равен 0,6. Пренебрегая трением на блоках, определить вес P_2 второго груза и угол α, образуемый второй веревкой с вертикальной линией. Весом веревки пренебречь.

Решение

Покажем на рисунке силы, действующие на систему, и реакции связей.

Составим уравнения равновесия узла O:

$$\begin{cases} P_1 \sin\beta - P_2 \sin\alpha = 0, \\ P_1 \cos\beta + P_2 \cos\alpha - P = 0. \end{cases}$$



Найдем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{P_1 \sin\beta}{P - P_1 \cos\beta} = \frac{P_1 \sin\beta}{P - P_1\sqrt{1-\sin^2\beta}} = \frac{4}{3},$$

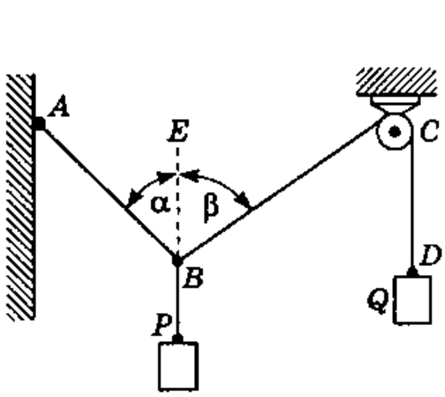
следовательно, $\sin\alpha = 0{,}8$.

$$P_2 = \sqrt{P_1^2 + P^2 - 2PP_1 \cos\alpha} = 15 \text{ Н}.$$

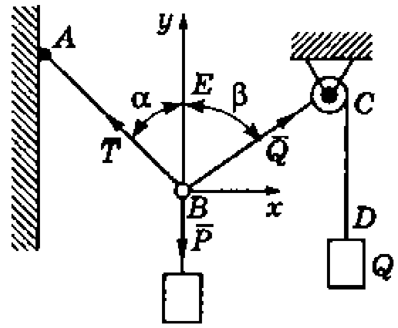
Ответ: $P_2 = 15$ Н; $\sin\alpha = 0{,}8$.

Задача 2.15

К веревке AB, один конец которой закреплен в точке A, привязаны в точке B груз P и веревка BCD, перекинутая через блок; к концу ее D привязана гиря Q весом 100 Н. Определить, пренебрегая трением на блоке, натяжение T веревки AB и величину груза P, если в положении равновесия углы, образуемые веревками с вертикалью BE, равны: $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$.



Решение



Покажем на рисунке силы, действующие на систему.

Составим уравнения равновесия узла B:

$$\begin{cases} -T\sin\alpha + Q\sin\beta = 0, \\ T\cos\alpha + Q\cos\beta - P = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

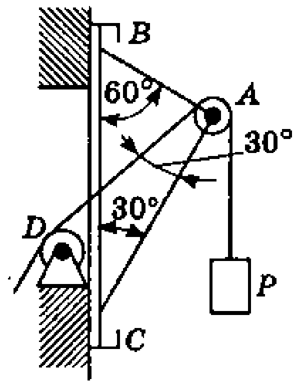
или

$$\begin{cases} T\sin\alpha = Q\sin\beta, \\ T\cos\alpha + Q\cos\beta = P \end{cases} \Rightarrow$$

$$T = Q\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 100\sqrt{1{,}5} = 122 \text{ Н}, \; P = 122\frac{\sqrt{2}}{2} + 100\frac{1}{2} = 137 \text{ Н}.$$

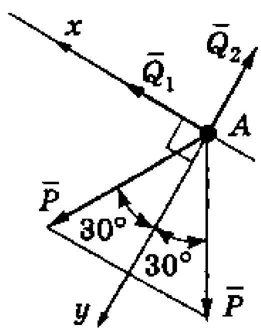
Ответ: T = 122 Н; P = 137 Н.

Задача 2.16



Груз P = 20 кН поднимается магазинным краном BAC посредством цепи, перекинутой через блок A и через блок D, который укреплен на стене так, что угол CAD = 30°. Углы между стержнями крана: ABC = 60°, ACB = 30°. Определить усилия Q_1 и Q_2 в стержнях AB и AC.

Решение



Покажем на рисунке силы, действующие на систему, и реакции связей.

Составим уравнения равновесия узла A:

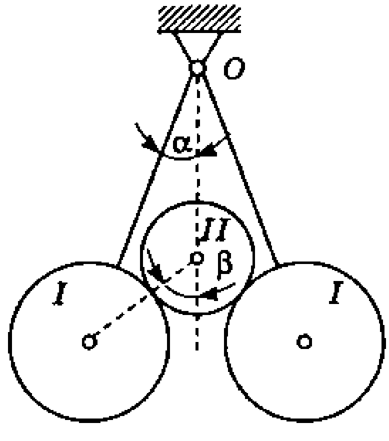
$$\begin{cases} Q_1 + P\sin 30° - P\sin 30° = 0, \\ -Q_2 + 2P\cos 30° = 0. \end{cases}$$

Получим Q_1 = 0, $Q_2 = 2P\cos 30° = 2 \cdot 20\cos 30°$ = = 34,6 кН.

Ответ: Q_1 = 0; Q_2 = 34,6 кН.

Задача 2.17

Два одинаковых цилиндра *I* весом *P* каждый подвешены на нитях к точке *O*. Между ними лежит цилиндр *II* весом *Q*. Вся система находится в положении равновесия. Цилиндры *I* не касаются друг друга. Определить зависимость между углом α, образованным нитью с вертикалью, и углом β, образованным прямой, проходящей через оси цилиндров *I* и *II*, с вертикалью.



Решение

Составим уравнение равновесия цилиндра *II* (рис. 1) для проекций на ось *y*:

$$2N\cos\beta - Q = 0$$

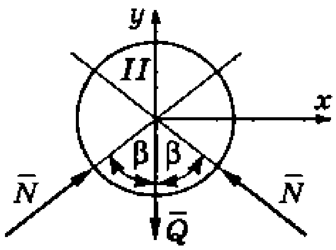


Рис. 1

и уравнения равновесия цилиндра *I* (рис. 2) для проекций на оси *x* и *y*:

$$T\sin\alpha - N\sin\beta = 0,$$

$$T\cos\alpha - N\cos\beta = P.$$

Решив все три уравнения совместно, получим искомое соотношение:

$$T\sin\alpha = \frac{Q}{2}\operatorname{tg}\beta,$$

$$T\cos\alpha = \frac{2P+Q}{2},$$

$$\operatorname{tg}\beta = \left(1+\frac{2P}{Q}\right)\operatorname{tg}\alpha.$$

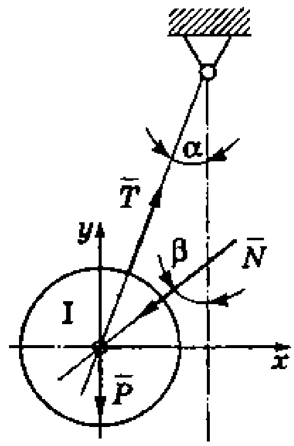
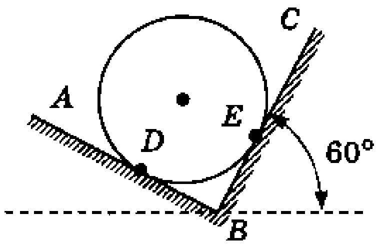


Рис. 2

Ответ: $\operatorname{tg}\beta = \left(1+\frac{2P}{Q}\right)\operatorname{tg}\alpha.$

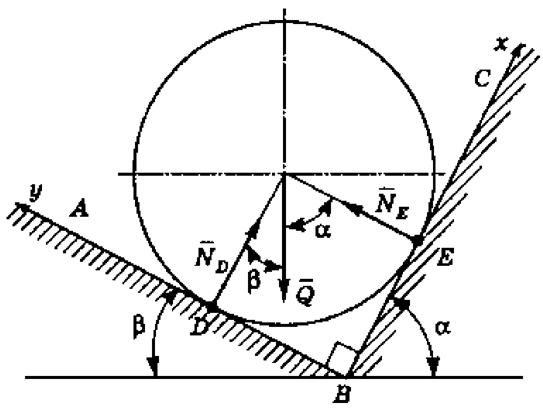
Задача 2.18

На двух взаимно перпендикулярных гладких наклонных плоскостях *AB* и *BC* лежит однородный шар весом $Q = 60$ Н. Определить давление шара на каждую плоскость, зная, что плоскость *BC* составляет с горизонтом угол 60°.



Решение

Составим уравнения равновесия шара (см. рисунок):



$$\begin{cases} N_D - Q\cos\beta = 0, \\ N_E - Q\cos\alpha = 0, \end{cases}$$

где $\alpha = 60°$; $\beta = 30°$.

Найдем:

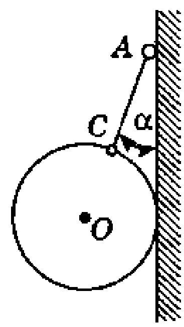
$$N_D = Q\cos 30° = 52 \text{ Н},$$

$$N_E = Q\cos 60° = 30 \text{ Н}.$$

Ответ: $N_D = 52$ Н; $N_E = 30$ Н.

Задача 2.19

К вертикальной гладкой стене подвешен на тросе *AC* однородный шар *O*. Трос составляет со стеной угол α, вес шара *P*. Определить натяжение троса *T* и давление *Q* шара на стену.



Решение

Воспользуемся теоремой о трех непараллельных силах, под действием которых шар находится в равновесии: $\bar{T}$, $\bar{P}$, $\bar{Q}$ (рис. 1).

Условие равновесия шара имеет вид

$$\bar{T} + \bar{Q} + \bar{P} = 0.$$

Из силового треугольника QPT (рис. 2) найдем:

$$T = \frac{P}{\cos\alpha}; \quad Q = P\operatorname{tg}\alpha.$$

Ответ: $T = \frac{P}{\cos\alpha}$; $Q = P\operatorname{tg}\alpha$.

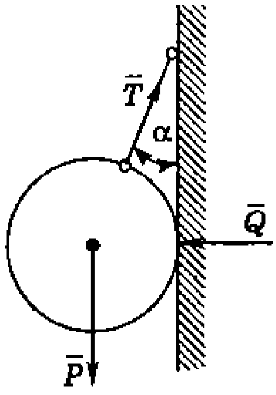


Рис. 1

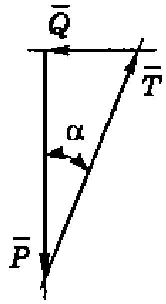
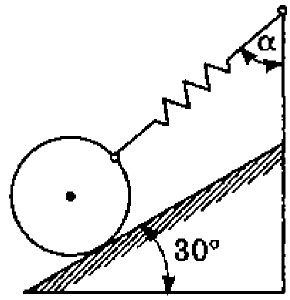


Рис. 2

Задача 2.20

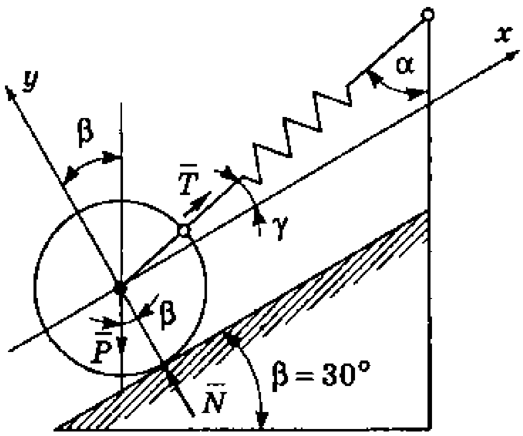
Однородный шар весом 20 Н удерживается на гладкой наклонной плоскости тросом, который привязан к пружинным весам, укрепленным над плоскостью; показания пружинных весов 10 Н. Угол наклона плоскости к горизонту равен 30°. Определить угол α, составляемый направлением троса с вертикалью, и давление Q шара на плоскость. Весом пружинных весов пренебречь.



Решение

Составим уравнения равновесия шара (см. рисунок):

$$\begin{cases} T\cos\gamma - P\sin\beta = 0 \\ T\sin\gamma - P\cos\beta + N = 0. \end{cases}$$



После подстановки числовых значений в первое уравнение системы получим:

$$10\cos\gamma = 10 \Rightarrow \cos\gamma = 1, \gamma = 0°, \alpha = 60°.$$

Из второго уравнения имеем

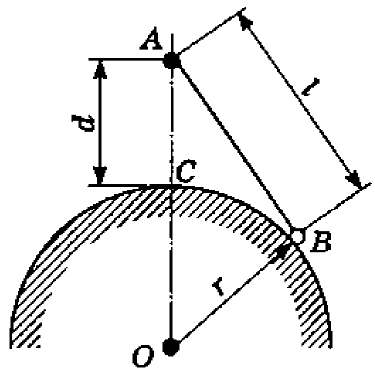
$$N = P\cos\beta - T\sin\gamma = 20\cos 30° = 17{,}3 \text{ Н}.$$

Так как $N = Q$, то Q = 17,3 Н.

Ответ: $\alpha = 60°$; Q = 17,3 Н.

Задача 2.21

Шарик B весом P подвешен к неподвижной точке A посредством нити AB и лежит на поверхности гладкой сферы радиусом r; расстояние точки A от поверхности сферы $AC = d$, длина нити $AB = l$, прямая AO вертикальна. Определить натяжение T нити и реакцию Q сферы. Радиусом шарика пренебречь.



Решение

Воспользуемся теоремой о трех непараллельных силах. Шарик находится под действием сил $\overline{T}$, $\overline{Q}$, $\overline{P}$ (рис. 1). Условие равновесия шарика имеет вид

$$\overline{T} + \overline{Q} + \overline{P} = 0.$$

Из подобия треугольника AOB и силового треугольника PQT (рис. 2) найдем:

$$\frac{T}{P} = \frac{l}{r+d}, \quad T = P\frac{l}{r+d};$$

$$\frac{Q}{P} = \frac{r}{r+d}, \quad Q = P\frac{r}{r+d}.$$

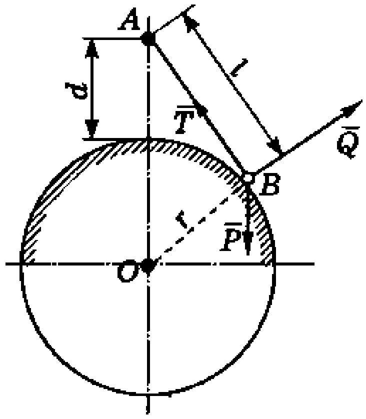


Рис. 1

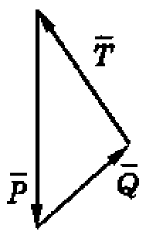
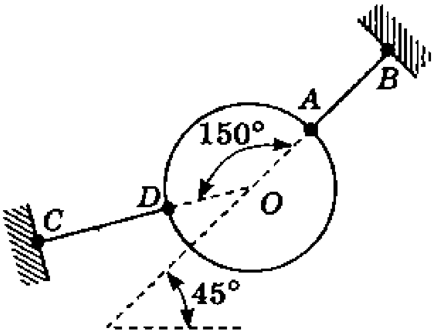


Рис. 2

Ответ: $T = P\dfrac{l}{r+d}$; $Q = P\dfrac{r}{r+d}$.

Задача 2.22

Однородный шар весом 10 Н удерживается в равновесии двумя тросами AB и CD, расположенными в одной вертикальной плоскости и составляющими один с другим угол 150°. Трос AB наклонен к горизонту под углом 45°. Определить натяжение тросов.



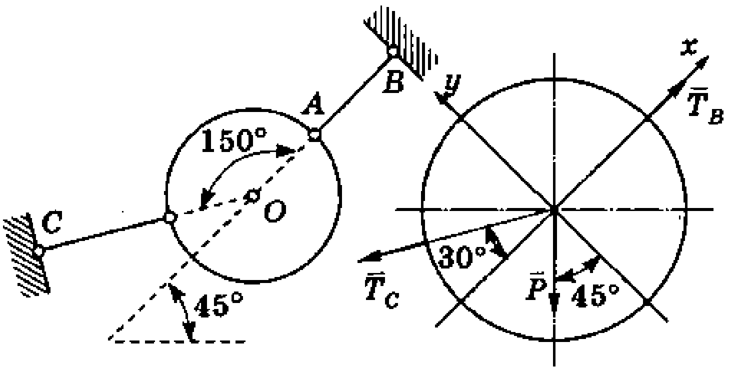
Решение

Составим уравнения равновесия шара (см. рисунок):

$$\begin{cases} T_B - T_C\cos 30^\circ - P\sin 45^\circ = 0, \\ T_C\sin 30^\circ - P\cos 45^\circ = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$T_C = P\frac{\cos 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 10\frac{\cos 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 14{,}1 \text{ Н},$$

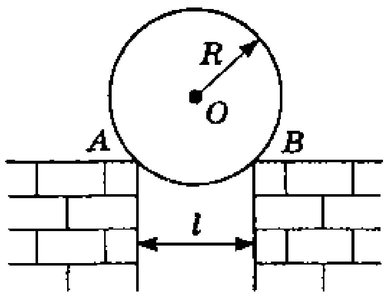
$$T_B = T_C\cos 30^\circ + P\sin 45^\circ = P\frac{\cos 15^\circ}{\sin 30^\circ} = 10\frac{\cos 15^\circ}{\sin 30^\circ} = 19{,}3 \text{ Н}.$$



Ответ: $T_B = 19{,}3$ Н; $T_C = 14{,}1$ Н.

Задача 2.23

Котел с равномерно распределенным по длине весом $P = 40$ кН и радиусом $R = 1$ м лежит на выступах каменной кладки. Расстояние между стенками кладки $l = 1{,}6$ м. Пренебрегая трением, найти давление котла на кладку в точках A и B.

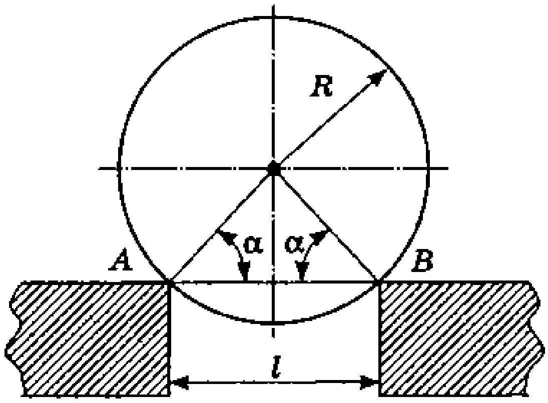


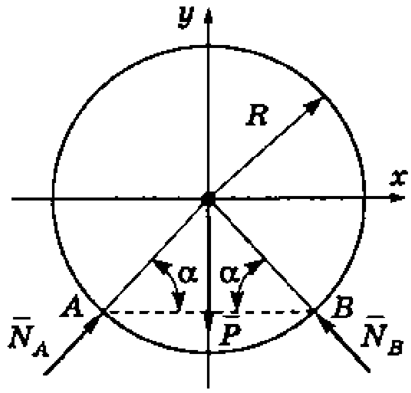
Решение

Покажем на рисунке данные из условия задачи и силы, действующие на систему.

Определим угол α:

$$\cos\alpha = \frac{l}{2R}, \quad \sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{l}{2R}\right)^2}.$$





Составим уравнения равновесия котла:

$$\begin{cases} N_A \cos\alpha - N_B \cos\alpha = 0, \\ N_A \sin\alpha + N_B \sin\alpha - P = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим:

$$\begin{cases} N_A = N_B, \\ 2N_A \sin\alpha = P. \end{cases}$$

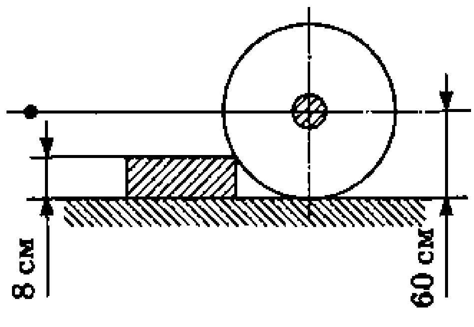
Следовательно,

$$N_A = N_B = \frac{P}{2\sqrt{1-(l/2R)^2}} = \frac{40}{2\sqrt{1-(1{,}6/2)^2}} = 33{,}3 \text{ кН}.$$

О т в е т: $N_A = N_B = 33{,}3$ кН.

Задача 2.24

Вес однородного трамбовочного катка равен Q = 20 кН, радиус его r = 60 см. Определить горизонтальное усилие P, необходимое для перетаскивания катка через каменную плиту высотой h = 8 см, в положении, указанном на рисунке.



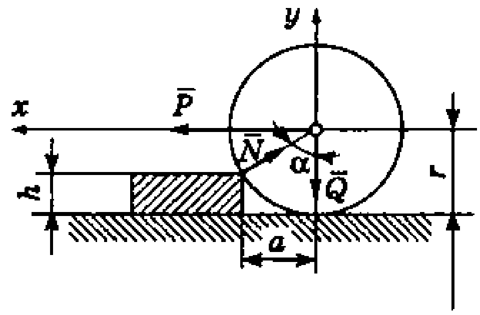
Р е ш е н и е

Покажем на рисунке силы, действующие на каток.
Составим уравнения равновесия катка:

$$\begin{cases} P - N \sin\alpha = 0, \\ N \cos\alpha - Q = 0. \end{cases}$$

Из системы найдем:

$$P = Q \operatorname{tg} \alpha .$$



Из геометрических построений:

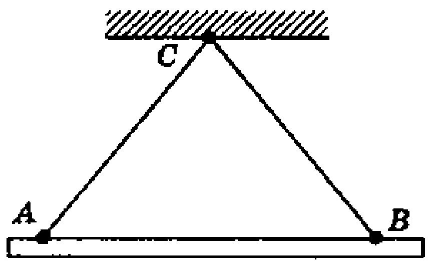
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{r-h}, \quad a = \sqrt{h(2r-h)},$$

окончательно получим

$$P = Q\frac{\sqrt{h(2r-h)}}{r-h}, \; P = 11{,}5 \text{ кН}.$$

Ответ: $P = 11{,}5$ кН.

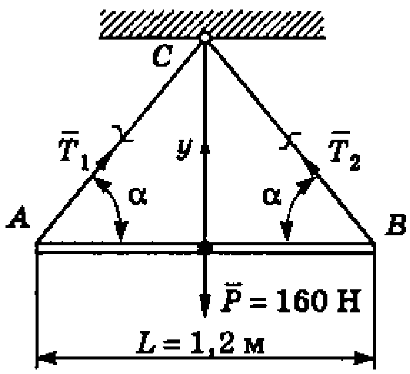
Задача 2.25



Однородный стержень AB весом 160 Н, длиной 1,2 м подвешен в точке C на двух тросах AC и CB одинаковой длины, равной 1 м. Определить натяжение тросов.

Решение

Покажем на рисунке данные из условия задачи и действующие на систему силы.



Введем обозначение $AC = CB = b = 1$ м.

Найдем угол α:

$$\cos\alpha = \frac{L}{2b}; \quad \sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{L}{2b}\right)^2}.$$

Составим уравнение равновесия стержня (для проекций на ось y):

$$T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\alpha - P = 0.$$

Поскольку натяжения тросов одинаковы по величине, т.е. $T_1 = T_2 = T$, то можно записать

$$2T \sin\alpha = P.$$

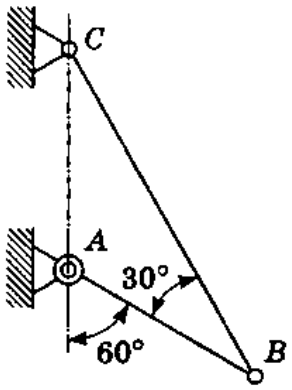
Следовательно,

$$T = \frac{P}{2\sqrt{1-\left(\frac{L}{2b}\right)^2}} = \frac{160}{2\sqrt{1-\left(\frac{1,2}{2\cdot 1}\right)^2}} = 100 \text{ Н}.$$

О т в е т: натяжение каждого троса равно 100 Н.

Задача 2.26

Однородный стержень AB прикреплен к вертикальной стене посредством шарнира A и удерживается под углом 60° к вертикали при помощи троса BC, образующего с ним угол 30°. Определить величину и направление реакции R шарнира, если известно, что вес стержня равен 20 Н.

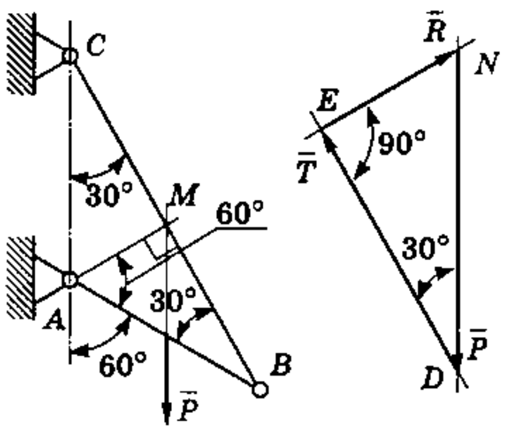


Р е ш е н и е

Воспользуемся теоремой о трех непараллельных силах.

Условие равновесия стержня (см. рисунок) имеет вид

$$\overline{R} + \overline{P} + \overline{T} = 0.$$



Из треугольника NDE найдем:

$$R = P\sin 30° = 20\sin 30° = 10 \text{ Н}.$$

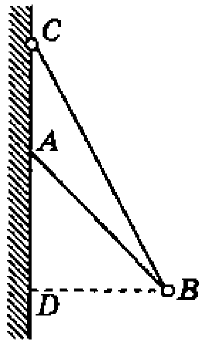
Искомый угол (R, AC) равен углу MAB:

$$\angle MAB = 60°.$$

О т в е т: $R = 10$ Н; угол $(R, AC) = 60°$.

Задача 2.27

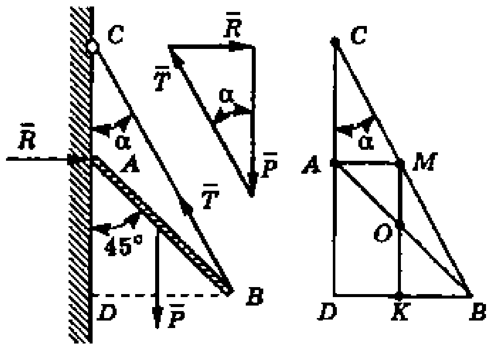
Верхний конец однородного бруса A, длина которого $l = 2$ м, а вес $P = 50$ Н, упирается в гладкую вертикальную стену. К нижнему концу B привязан трос BC. Найти, на каком расстоянии AC надо прикрепить трос к стене для того, чтобы брус находился в равновесии, образуя угол $BAD = 45°$. Найти натяжение T троса и реакцию R стены.



Решение

Из геометрических соображений (см. рисунок):

$$\frac{AM}{AC} = \operatorname{tg} \alpha.$$



По теореме о трех непараллельных силах, они пересекаются в точке M.

Так как $\Delta OAM = \Delta OKB$, то

$$AM = KB = \frac{l}{2} \sin 45°.$$

Тогда

$$\frac{l}{2AC} \sin 45° = \operatorname{tg} \alpha. \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$\frac{DB}{CD} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ или } \frac{l}{CD} \sin 45° = \operatorname{tg} \alpha. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получим

$$2AC = CD,\ AC = AD = l \cos 45° = 1{,}41 \text{ м};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{2l \cos 45°} \sin 45° = \frac{1}{2}.$$

Условие равновесия бруса:

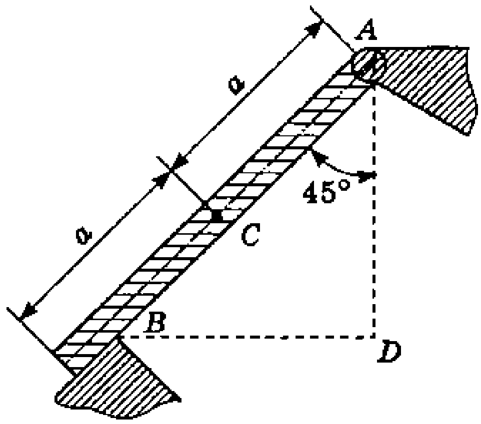
$$\overline{R} + \overline{P} + \overline{T} = 0.$$

$$R = P\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}P = 25\text{ Н},\; T = \frac{P}{\cos\alpha} = 56\text{ Н}.$$

О т в е т: $AC = AD = 1{,}41$ м; $T = 56$ Н; $R = 25$ Н.

Задача 2.28

Оконная рама AB, изображенная на рисунке в разрезе, может вращаться вокруг горизонтальной оси шарнира A и своим нижним краем B свободно опирается на уступ паза. Найти реакции опор, если дано, что вес рамы, равный 89 Н, приложен к середине C рамы и $AD = BD$.



Р е ш е н и е

Так как рама находится в равновесии,

$$\overline{R}_B + \overline{R}_A + \overline{P} = 0.$$

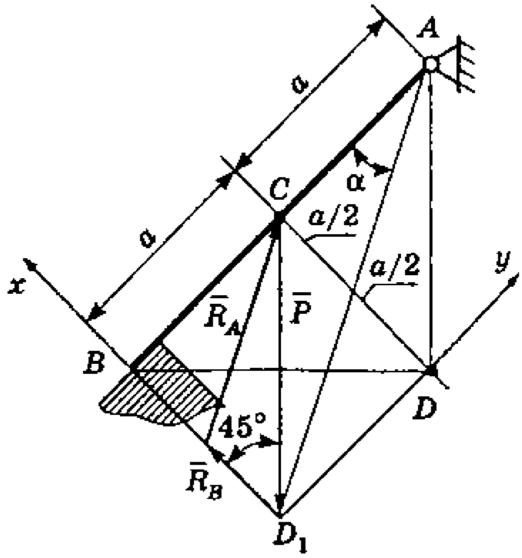
Спроецируем это равенство на оси x и y (см. рисунок):

$$R_A \cos\alpha = P\sin 45^\circ, \qquad (1)$$

$$R_A \sin\alpha + R_B = P\cos 45^\circ. \qquad (2)$$

Кроме того, заметим, что

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}.$$



Из (1) и (2) найдем:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{P\cos 45^\circ - R_B}{P\sin 45^\circ},$$

откуда

$$R_B = \frac{1}{2} P \sin 45° = \frac{1}{2} \cdot 89 \cdot 0,707 = 31,5 \text{ Н}.$$

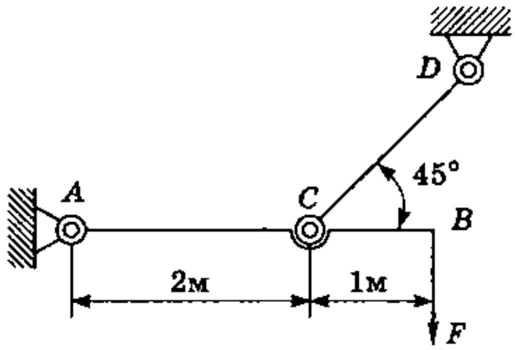
Из уравнения (2) найдем:

$$R_A = \frac{1}{\sin\alpha}(P\cos 45° - R_B) = 70,4 \text{ Н}.$$

Ответ: $R_A = 70,4$ Н; $R_B = 31,5$ Н.

Задача 2.29

Балка AB поддерживается в горизонтальном положении стержнем CD, крепления в A, C и D шарнирные. Определить реакции опор A и D, если на конце балки действует вертикальная сила $F = 5$ кН. Размеры указаны на рисунке. Весом пренебречь.



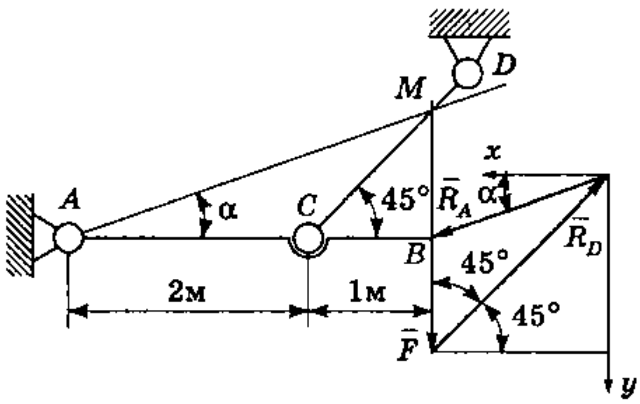
Решение

Так как балка находится в равновесии,

$$\bar{F} + \bar{R}_A + \bar{R}_D = 0.$$

Спроецируем это равенство на оси x и y (см. рисунок). Получим систему

$$\begin{cases} R_A \cos\alpha - R_D \sin 45° = 0, \\ R_A \sin\alpha + F - R_D \cos 45° = 0. \end{cases}$$



Из треугольника ABM найдем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Исключим из уравнений системы реакцию R_A, получим уравнение

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{R_D\cos 45^\circ - F}{R_D\sin 45^\circ}.$$

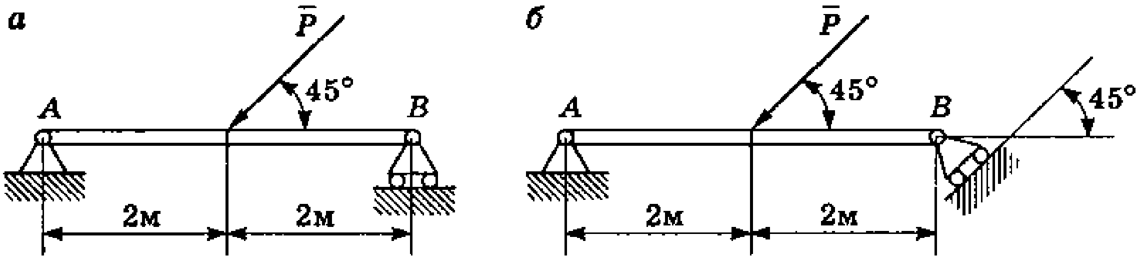
Решая это уравнение, найдем реакции R_D и R_A:

$$R_D=\frac{3F}{2\sin 45^\circ}=10{,}6\ \text{кН};\ R_A=R_D\cdot\frac{\sin 45^\circ}{\cos\alpha}=10{,}6\frac{0{,}707}{3}\sqrt{10}=7{,}9\ \text{кН}.$$

Ответ: $R_A=7{,}9$ кН; $R_D=10{,}6$ кН.

Задача 2.30

Балка AB шарнирно закреплена на опоре A; у конца B она положена на катки. В середине балки, под углом 45° к ее оси, действует сила $P=2$ кН. Определить реакции опор для случаев (*а*) и (*б*), взяв размеры с рисунков и пренебрегая весом балки.



Решение

а) По теореме о трех непараллельных силах, действующие на балку силы пересекаются в точке C (рис. 1).

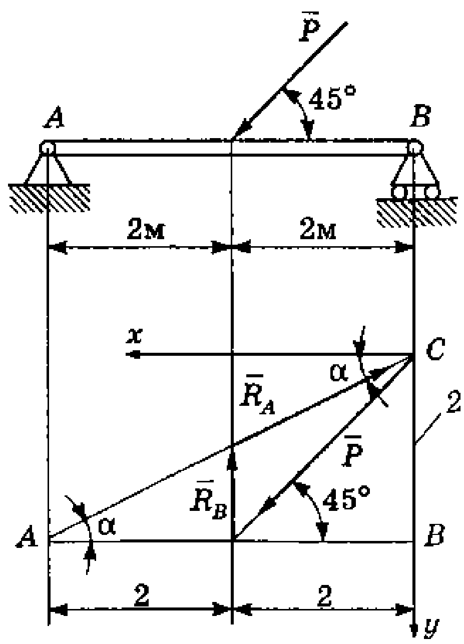


Рис. 1

Составим уравнения равновесия балки AB:

$$\begin{cases}-R_A\cos\alpha+P\cos 45^\circ=0,\\ -R_B\sin 45^\circ-R_A\sin\alpha=0.\end{cases}$$

Тогда

$$R_A=P\frac{\cos 45^\circ}{\cos\alpha}=2\frac{0{,}707}{(2/\sqrt{5})}=1{,}58\ \text{кН},$$

$$R_B = P\sin 45° - R_A \sin\alpha = 2\cdot 0{,}707 - 1{,}58\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}71 \text{ кН}.$$

б) Воспользуемся теоремой о трех непараллельных силах. Запишем уравнение равновесия балки в виде

$$\overline{P} + \overline{R}_B + \overline{R}_A = 0 \text{ (рис. 2)}.$$

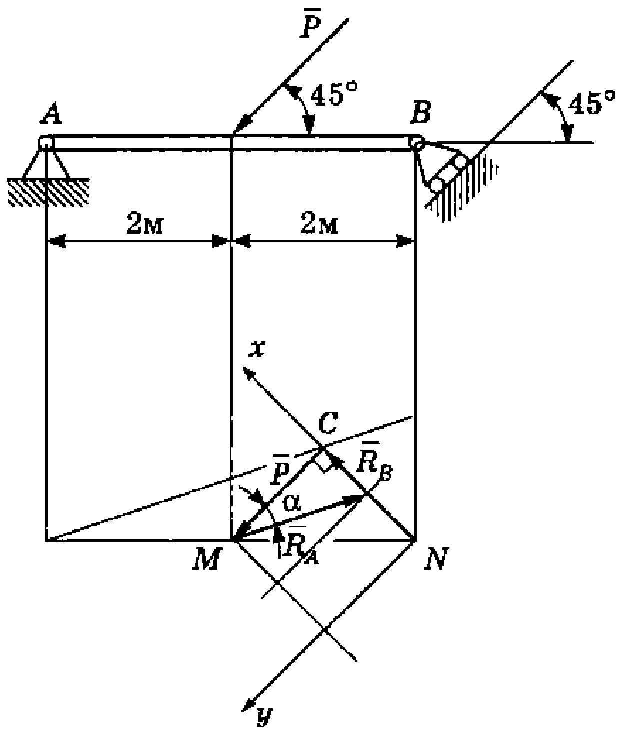


Рис. 2

Из треугольника MCN найдем угол α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}, \quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Так как треугольник MCN — прямоугольный, то сразу найдем

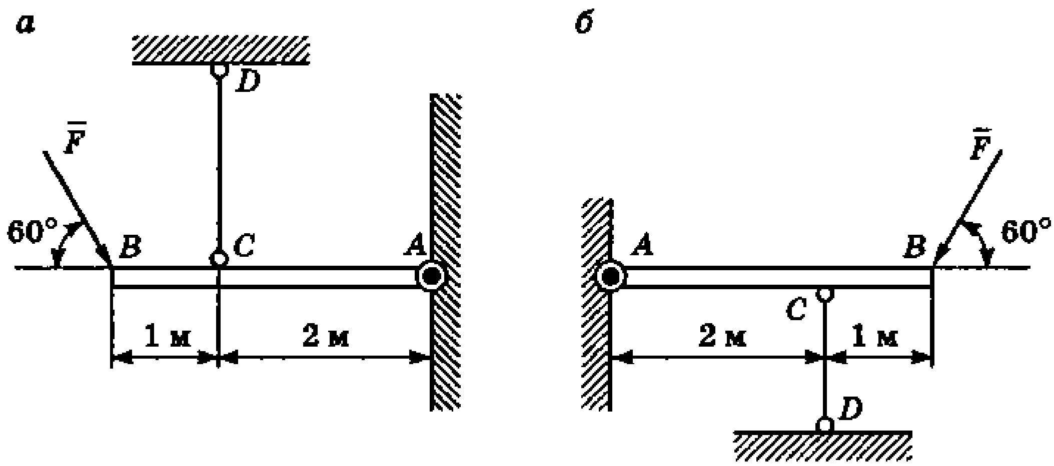
$$R_B = P\operatorname{tg}\alpha = 2\cdot\frac{1}{2} = 1 \text{ кН},$$

$$R_A = \frac{P}{\cos\alpha} = P\frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} = 2{,}24 \text{ кН}.$$

О т в е т: а) $R_A = 1{,}58$ кН, $R_B = 0{,}71$ кН; б) $R_A = 2{,}24$ кН, $R_B = 1$ кН.

Задача 2.31

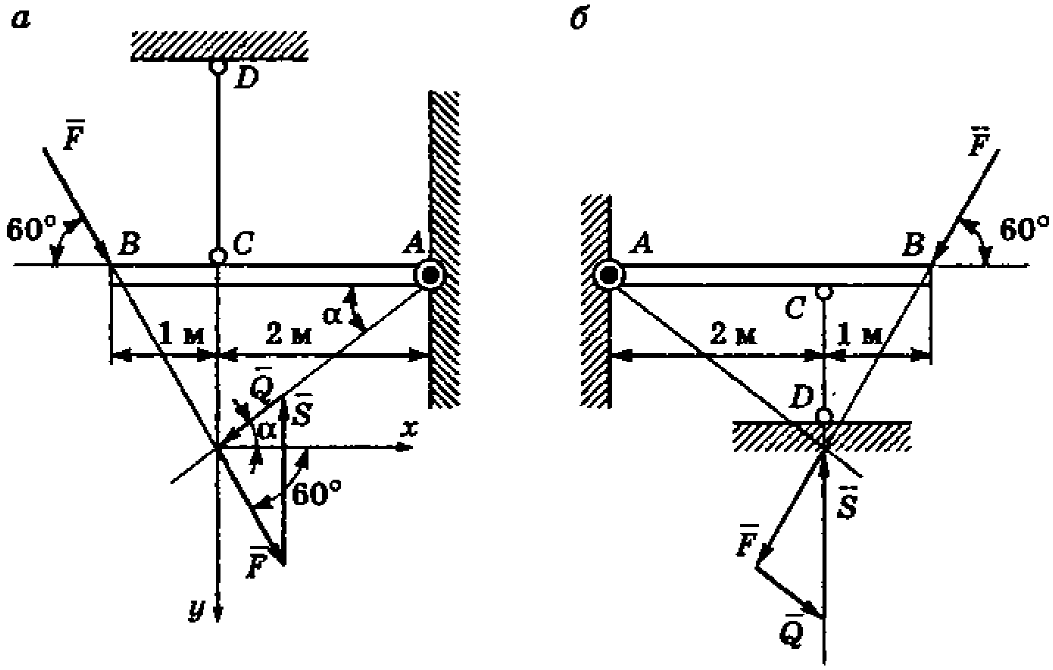
На фрагментах (*а*) и (*б*) рисунка изображены балки AB, удерживаемые в горизонтальном положении стержнями CD. На концах балок действуют силы $F = 30$ кН под углом 60° к горизонту. Взяв размеры с рисунка, определить усилия S в стержнях CD и давление Q балок на стêну, если крепления в A, C и D шарнирные. Весом стержней и балок пренебречь.



Решение

Из рисунка найдем

$$BC = AC\,\mathrm{tg}\,\alpha,\quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{tg}\,60^\circ}{2},\quad \sin\alpha = \sqrt{\frac{3}{7}},\quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$



Уравнения равновесия балки:

$$\begin{cases} -Q\cos\alpha + F\cos 60^\circ = 0, \\ -S + Q\sin\alpha + F\sin 60^\circ = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получим

$$Q = F\frac{\cos 60^\circ}{\cos\alpha} = 30\frac{0{,}5\sqrt{7}}{2} = 19{,}8 \text{ кН},$$

из второго —

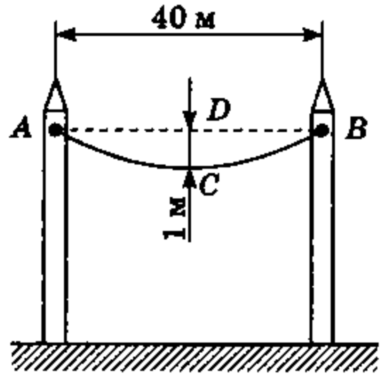
$$S = Q\sin\alpha + F\sin 60^\circ = 39 \text{ кН}.$$

Очевидно, что в обоих случаях силы одинаковые.

Ответ: а) S = 39 кН, Q = 19,8 кН; б) S = 39 кН, Q = 19,8 кН.

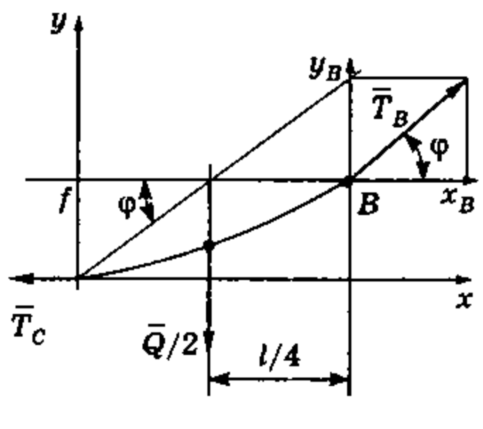
Задача 2.32

Электрический провод ACB натянут между двумя столбами так, что образует пологую кривую, стрела провисания которой $CD = f = 1$ м. Расстояние между столбами $AB = l = 40$ м. Вес провода $Q = 0{,}4$ кН. Определить натяжение провода: T_C — в средней точке, T_A и T_B — на концах. При решении задачи считать, что вес каждой половины провода приложен на расстоянии $l/4$ от ближнего столба.



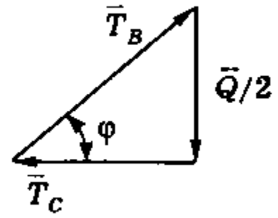
Решение

Составим уравнения равновесия правой половины провода (см. рисунок):



$$\begin{cases} T_B\cos\varphi - T_C = 0, \\ T_B\sin\varphi - \dfrac{Q}{2} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_B\cos\varphi = T_C, \\ T_B\sin\varphi = \dfrac{Q}{2}. \end{cases}$$



Следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Q}{2T_C}.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f}{l/4} = \frac{4f}{l},$$

поэтому

$$\frac{Q}{2T_C} = \frac{4f}{l}, \quad T_C = \frac{Ql}{8f}.$$

Так как

$$\sin\varphi = \frac{4f/l}{\sqrt{1+(4f/l)^2}},$$

то

$$T_B = T_A = \frac{Q}{2\sin\varphi} = \frac{Q}{2}\frac{\sqrt{1+(4f/l)^2}}{4f/l}.$$

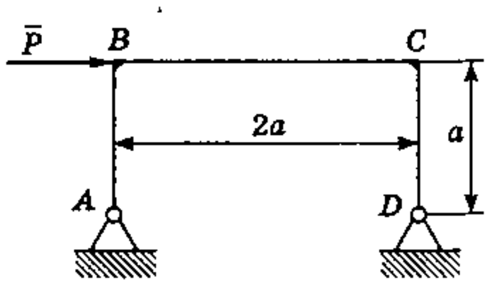
Подставив числовые значения, получим

$$T_C = 2 \text{ кН}, \; T_B = T_A = 2{,}01 \text{ кН}.$$

О т в е т: $T_C = 2$ кН; $T_B = T_A = 2{,}01$ кН.

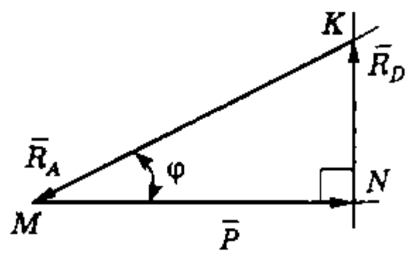
Задача 2.33

Для рамы, изображенной на рисунке, определить реакции R_A и R_D, возникающие при действии горизонтальной силы P, приложенной в точке B. Весом рамы пренебречь.



Р е ш е н и е

Из геометрических соображений (см. рисунок):



$$AC = \sqrt{5a^2} = a\sqrt{5},$$

$$\sin\varphi = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos\varphi = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}.$$

Запишем уравнение равновесия рамы, пользуясь теоремой о трех силах:

$$\overline{R}_A + \overline{R}_D + \overline{P} = 0.$$

Из силового треугольника MKN найдем реакцию R_D:

$$R_D = P\operatorname{tg}\varphi = \frac{P}{2}$$

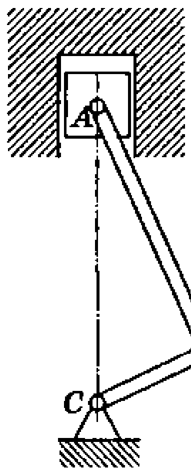
и реакцию R_A:

$$R_A = \frac{P}{\cos\varphi} = \frac{P}{2\sqrt{5}/2} = P\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $R_A = P\dfrac{\sqrt{5}}{2}$; $R_D = \dfrac{P}{2}$.

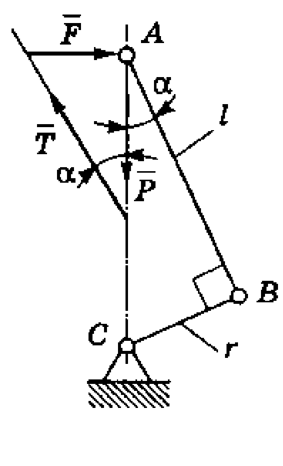
Задача 2.34

В двигателе внутреннего сгорания площадь поршня равна 0,02 м^2, длина шатуна AB = 30 см, длина кривошипа BC = 6 см. Давление газа в данный момент над поршнем равно P_1 = 1000 кПа, под поршнем P_2 = 200 кПа. Найти силу T, действующую со стороны шатуна AB на кривошип BC, вызванную перепадом давлений газа, если угол ABC = 90°. Трением между поршнем и цилиндром пренебречь.



Решение

Из геометрических соображений (см. рисунок)



$$\frac{r}{l} = \operatorname{tg}\alpha,$$

тогда

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{r}{l}\right)^2}}.$$

Сила давления газов равна: $P = S(P_1 - P_2)$, где S — площадь поршня.

Запишем уравнение равновесия трех непараллельных сил:

$$\bar{P} + \bar{T} + \bar{F} = 0.$$

Из силового треугольника получим

$$T = \frac{P}{\cos\alpha} = P\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2} = S(P_1 - P_2)\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2} =$$

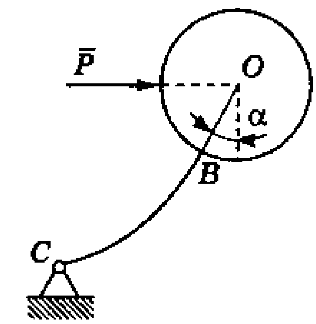
$$= 0{,}02(1000 - 200)\sqrt{1 + \left(\frac{6}{30}\right)^2} = 16{,}3 \text{ кН}.$$

Ответ: $T = 16{,}3$ кН.

Примечание. Здесь и далее ответ может совпадать с ответом, приведенным в задачнике, лишь приближенно. Это обусловлено возможными округлениями или погрешностями в расчетах.

Задача 2.35

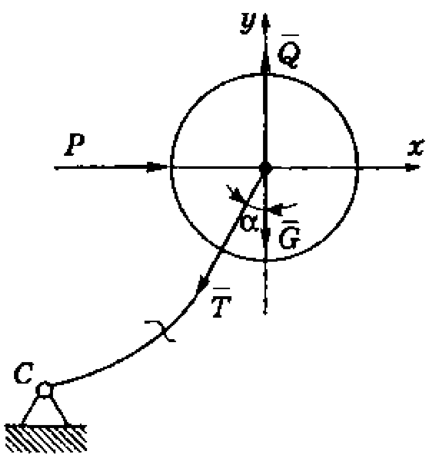
Воздушный шар, вес которого равен G, удерживается в равновесии тросом BC. На шар действует подъемная сила $\bar{Q}$ и горизонтальная сила давления ветра $\bar{P}$. Определить натяжение троса в точке B и угол α.



Решение

Покажем на рисунке силы, действующие на систему.

Составим уравнения равновесия шара:



$$\begin{cases} P - T\sin\alpha = 0, \\ (Q - G) - T\cos\alpha = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} T\sin\alpha = P, \\ T\cos\alpha = Q - G. \end{cases}$$

Из системы найдем:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{P}{Q-G},\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{P}{Q-G},\ \alpha=\operatorname{arctg}\frac{P}{Q-G}.$$

Возведем уравнения системы в квадрат и сложим:

$$T^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=P^2+(Q-G)^2,$$

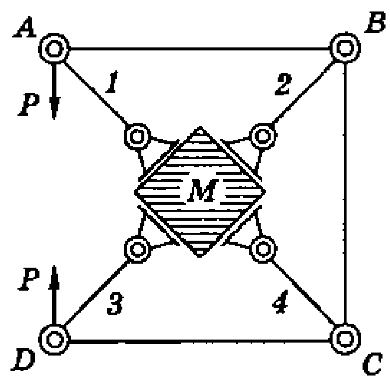
$$T^2=P^2+(Q-G)^2.$$

Следовательно,

$$T=\sqrt{P^2+(Q-G)^2}.$$

Ответ: $T=\sqrt{P^2+(Q-G)^2}$; $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{P}{Q-G}$.

Задача 2.36



Для сжатия цементного кубика M по четырем граням пользуются шарнирным механизмом, в котором стержни AB, BC и CD совпадают со сторонами квадрата $ABCD$, а стержни 1, 2, 3, 4 равны между собой и направлены по диагоналям того же квадрата; две равные по модулю силы P прикладываются к точкам A и D, как показано на рисунке. Определить силы N_1, N_2, N_3, N_4, сжимающие кубик, и усилия S_1, S_2, S_3 в стержнях AB, BC и CD, если величина сил, приложенных в точках A и D, равна 50 кН.

Решение

Составим уравнения равновесия узла A (см. рисунок):

$$\begin{cases} S_1-N\cos 45^\circ=0, \\ N_1\sin 45^\circ-P=0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$N_1=\frac{P}{\sin 45^\circ}=\frac{50}{0{,}707}=70{,}7 \text{ кН},$$

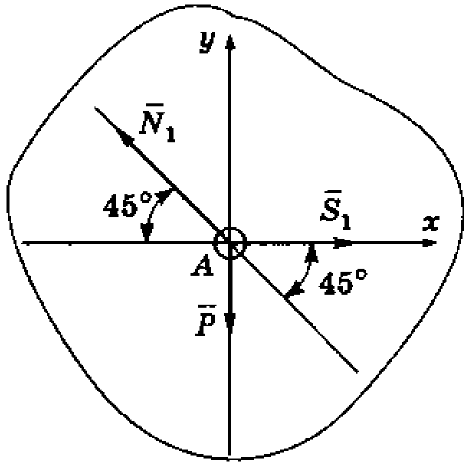
$S_1 = N_1 \cos 45° = 70{,}7 \cdot 0{,}707 = 50$ кН.

В силу симметрии задачи

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = 70{,}7 \text{ кН},$$

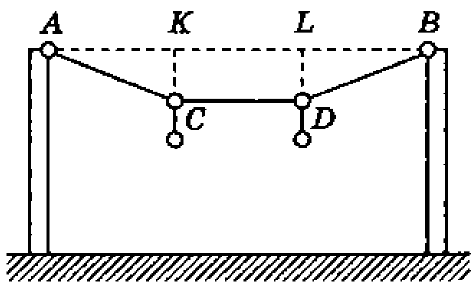
$$S_1 = S_2 = S_3 = 50 \text{ кН}.$$

Ответ: $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = 70{,}7$ кН; растягивающие усилия $S_1 = S_2 = S_3 = 50$ кН.



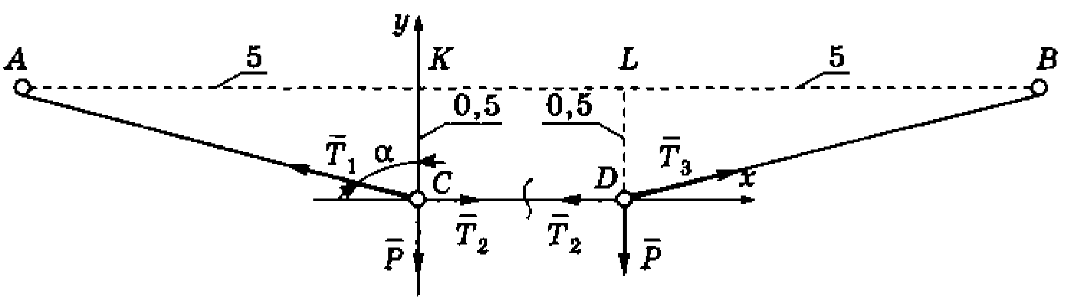
Задача 2.37

Два трамвайных провода подвешены к поперечным проволочным канатам, из которых каждый прикреплен к двум столбам. Столбы расставлены вдоль пути на расстоянии 40 м друг от друга. Для каждого поперечного каната расстояния $AK = KL = LB =$ $= 5$ м; $KC = LD = 0{,}5$ м. Пренебрегая весом проволочного каната, найти натяжения T_1, T_2 и T_3 в частях его AC, CD и DB, если вес 1 м провода равен 7,5 Н.



Решение

По условию задачи $P = 40 \cdot 7{,}5 = 300$ Н.



Из рисунка найдем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{0{,}5} = 10, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Составим уравнения равновесия узла C:

$$\begin{cases} -T_1 \sin\alpha + T_2 = 0, \\ T_1 \cos\alpha - P = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_1 \sin\alpha = T_2, \\ T_1 \cos\alpha = P. \end{cases}$$

$$T_2 = P \operatorname{tg}\alpha = 300 \cdot 10 = 3000 \text{ Н} = 3 \text{ кН},$$

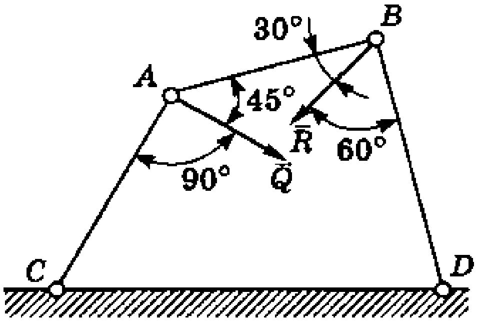
$$T_1 = P\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = 300\sqrt{1+10^2} = 3015 \text{ Н} = 3{,}015 \text{ кН}.$$

Аналогично можно сказать, что $T_3 = T_1 = 3{,}015$ кН.

О т в е т: $T_1 = T_3 = 3{,}015$ кН; $T_2 = 3$ кН.

Задача 2.38

К шарниру A стержневого шарнирного четырехугольника $ABDC$, сторона CD которого закреплена, приложена сила $Q = 100$ Н под углом $BAQ = 45°$. Определить величину силы $\overline{R}$, приложенной в шарнире B под углом $ABR = 30°$ таким образом, чтобы четырехугольник $ABDC$ был в равновесии, если углы: $CAQ = 90°$, $DBR = 60°$.



Р е ш е н и е

1-й способ (рис. 1).

Составим уравнение моментов относительно точки O:

$$Q \cdot a\sqrt{2} - Ra \cdot \cos 30° = 0.$$

$$R = Q\frac{\sqrt{2}}{\cos 30°} = 2 \cdot 100\frac{1{,}414}{1{,}732} = 163 \text{ Н}.$$

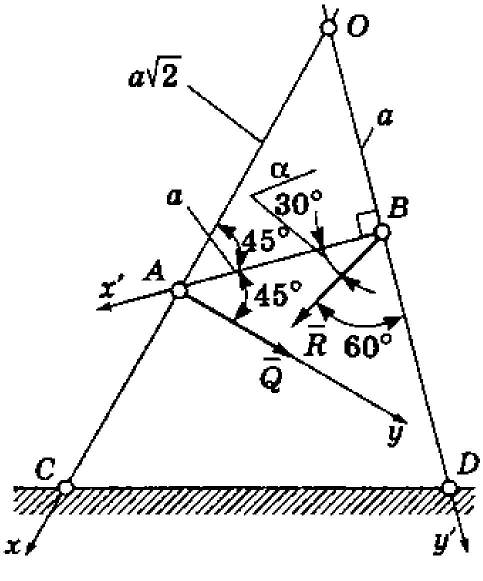


Рис. 1

2-й способ (рис. 2).

Применим метод вырезания узлов:

$$\begin{cases} Q + S\cos 45^\circ = 0, \\ R\cos 30^\circ + S = 0. \end{cases}$$

$$S = -R\cos 30^\circ,$$

$$Q - R\cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ = 0,$$

$$R = \frac{Q}{\cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ} = 163 \text{ Н}.$$

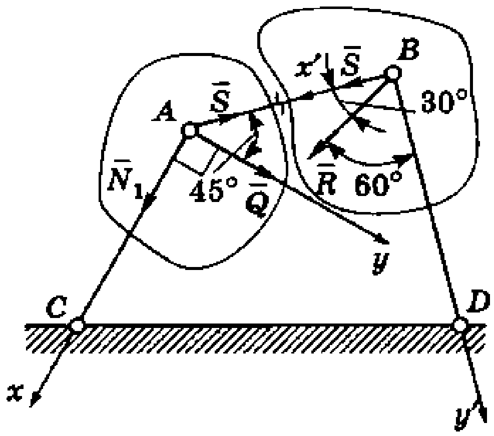
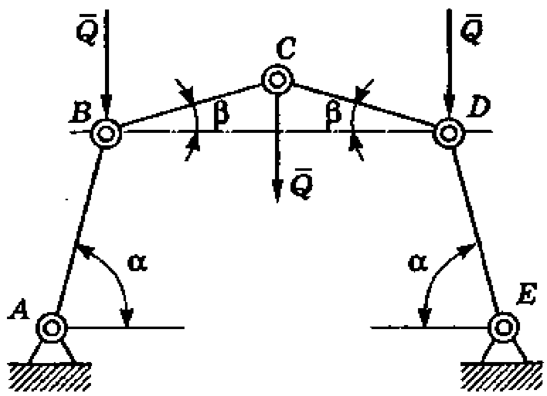


Рис. 2

Ответ: $R = 163$ Н.

Задача 2.39

Стержневой шарнирный многоугольник состоит из четырех равных стержней; концы A и E шарнирно закреплены; узлы B, C и D нагружены одинаковой вертикальной нагрузкой $\bar{Q}$. В положении равновесия угол наклона крайних стержней к горизонту $\alpha = 60^\circ$. Определить угол β наклона средних стержней к горизонту.



Решение

Покажем на рисунке силы, действующие на систему.

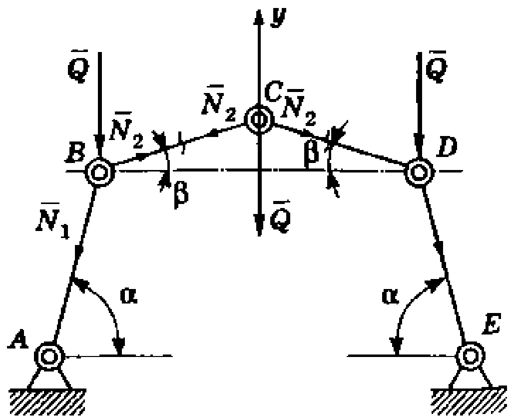
Составим уравнения равновесия узлов.

Узел B:

$$\begin{cases} -N_1\cos\alpha + N_2\cos\beta = 0, \\ -N_1\sin\alpha + N_2\sin\beta - Q = 0. \end{cases}$$

Узел C (проекции на ось y):

$$-2N_2\sin\beta - Q = 0.$$



Следовательно, $Q = -2N_2 \sin\beta$.

Из системы получим

$$\begin{cases} N_1 \cos\alpha = N_2 \cos\beta, \\ N_1 \sin\alpha = N_2 \sin\beta - Q, \end{cases}$$

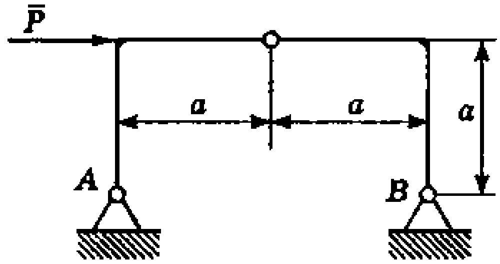
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{N_2 \sin\beta - Q}{N_2 \cos\beta} = \frac{N_2 \sin\beta + 2N_2 \sin\beta}{N_2 \cos\beta} = 3\frac{\sin\beta}{\cos\beta}, \text{ т.е.}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = 3\operatorname{tg}\beta. \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \beta = 30°.$$

Ответ: $\beta = 30°$.

Задача 2.40

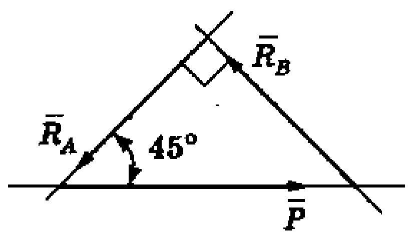
Для трехшарнирной арки, показанной на рисунке, определить реакции опор A и B, возникающие при действии горизонтальной силы $\overline{P}$. Весом арки пренебречь.



Решение

Запишем уравнение равновесия арки, пользуясь теоремой о трех силах:

$$\overline{P} + \overline{R}_A + \overline{R}_B = 0.$$



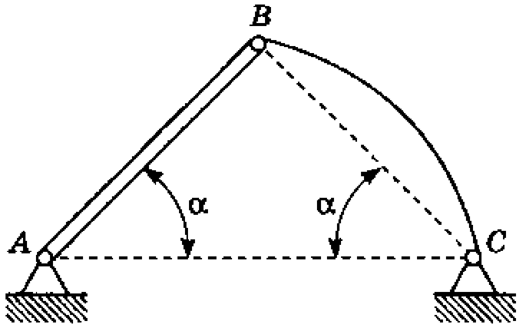
Из силового треугольника (см. рисунок) найдем:

$$R_A = R_B = P\cos 45° = P\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $R_A = R_B = P\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 2.41

Прямолинейный однородный брус AB весом P и невесомый стержень BC с криволинейной осью произвольного очертания соединены шарнирно в точке B и так же соединены с опорами A и C, расположенными на одной горизонтали AC. Прямые AB и BC образуют с прямой AC углы $\alpha = 45°$. Определить реакции опор A и C.



Решение

По теореме о трех непараллельных силах построим точку O_1 (см. рис. 1).

Из треугольника ABO_1 найдем:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}, \quad \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

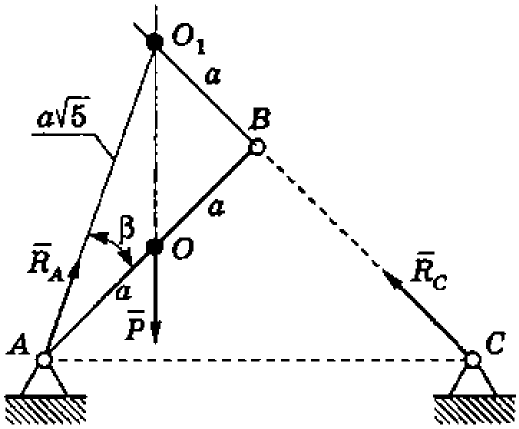


Рис. 1

Запишем уравнение равновесия бруса AB:

$$\bar{P} + \bar{R}_A + \bar{R}_C = 0.$$

Спроецируем полученное векторное уравнение на оси x, y (рис. 2):

$$\begin{cases} R_A \cos\beta - P\sin 45° = 0, \\ R_C + R_A \sin\beta - P\cos 45° = 0, \end{cases}$$

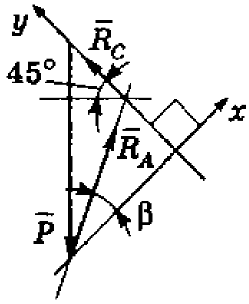


Рис. 2

откуда найдем:

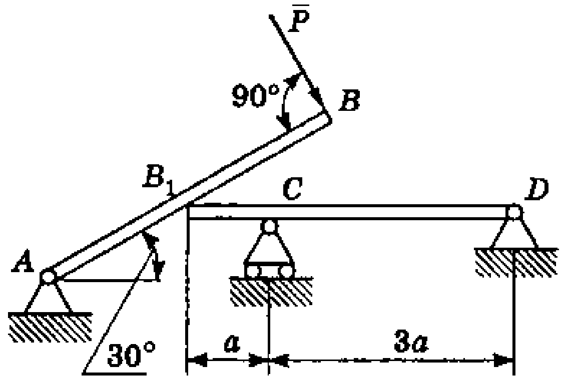
$$R_A = P\frac{\sin 45°}{\cos\beta} = P\frac{\sqrt{10}}{4},$$

$$R_C = P\frac{\sqrt{2}}{2} - R_A \sin\beta = P\frac{\sqrt{2}}{2} - P\frac{\sqrt{2}}{4} = P\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $R_A = \frac{\sqrt{10}}{4}P$; $R_C = \frac{\sqrt{2}}{4}P$.

Задача 2.42

Наклонная балка AB, на конец которой действует сила $\overline{P}$, серединой B_1 опирается на ребро консоли балки CD. Определить опорные реакции, пренебрегая весом балок.



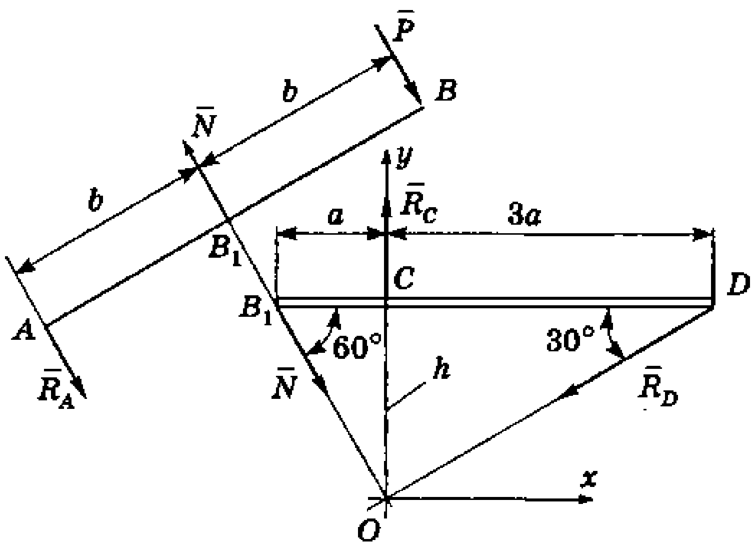
Решение

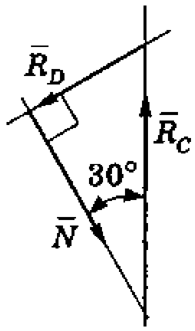
Рассмотрим равновесие балки AB (см. рисунок). Для определения усилия взаимодействия балок AB и CD составим уравнения моментов — относительно точки A:

$$N \cdot b - P \cdot 2b = 0 \Rightarrow N = 2P;$$

относительно точки B_1:

$$R_A \cdot b - P \cdot b = 0 \Rightarrow R_A = P.$$





Рассмотрим равновесие балки B_1D. Силы, приложенные к балке B_1D, образуют систему сходящихся сил. Условия равновесия системы сходящихся сил:

$$\overline{R}_D + \overline{N} + \overline{R}_C = 0,$$

или

$$\begin{cases} -N\sin 60^\circ + R_C - R_D\sin 30^\circ = 0, \\ N\cos 60^\circ - R_D\cos 30^\circ = 0. \end{cases}$$

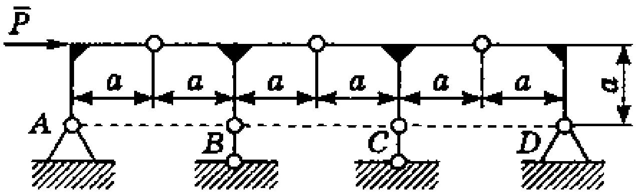
Решая систему, получим

$$R_D = N\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2P}{\sqrt{3}}; \quad R_C = N\sin 60^\circ + R_D\sin 30^\circ = \frac{4P}{\sqrt{3}}.$$

О т в е т: $R_A = P$; $R_D = \dfrac{2P}{\sqrt{3}}$; $R_C = \dfrac{4P}{\sqrt{3}}$.

Задача 2.43

Дана система, состоящая из арок, размеры которых указаны на рисунке. Определить реакции опор A, B, C и D, возникающие при действии горизонтальной силы $\overline{P}$.



Р е ш е н и е

В предположении, что арки невесомы, рассмотрим равновесие арки AA_1M (рис. 1). Пользуясь теоремой о трех непараллельных силах, построим силовой треугольник PNR_A, где $\overline{R}_A$ — реакция шарнира A, $\overline{N}$ — реакция шарнира M (рис. 2).

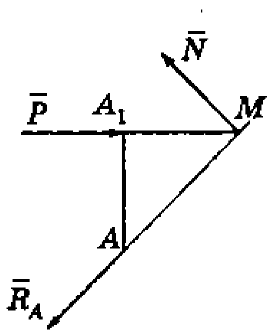


Рис. 1

Условие равновесия системы сходящихся сил:

$$\overline{R}_A + \overline{N} + \overline{P} = 0.$$

Из силового треугольника PNR_A найдем:

$$R_A = P\cos 45^\circ = P\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad N = P\cos 45^\circ = P\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

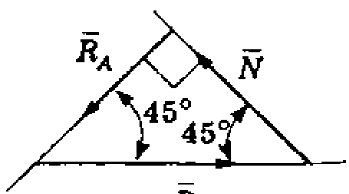


Рис. 2

Рассмотрим равновесие части арки MB_1BN, где $\overline{N}$ — сила реакции шарнира M на часть арки MB_1BN, $\overline{N}_1$ — сила реакции шарнира N на часть арки MB_1BN, $\overline{R}_B$ — реакция опоры B (рис. 3).

Условие равновесия системы сходящихся сил:

$$\overline{R}_B + \overline{N} + \overline{N}_1 = 0.$$

Из силового треугольника R_BNN_1 (рис. 4) найдем:

$$R_B = 2N\cos 45° = P.$$

$$N_1 = N = P\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

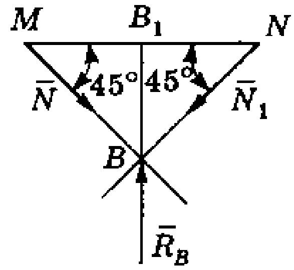


Рис. 3

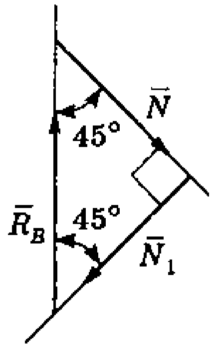


Рис. 4

Рассмотрим равновесие части арки NC_1CK (рис. 5).

Условие равновесия системы сходящихся сил:

$$\overline{R}_C + \overline{N} + \overline{N}_1 = 0.$$

Из силового треугольника P_CNN_1 (рис. 6) найдем:

$$R_C = 2N\cos 45° = P.$$

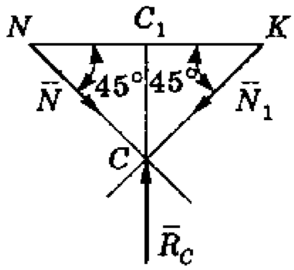


Рис. 5

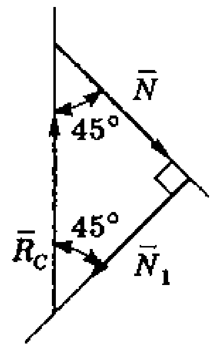


Рис. 6

Рассмотрим равновесие части арки KD_1D (рис. 7).

Условие равновесия системы сходящихся сил:

$$\overline{R}_D + \overline{N} = 0.$$

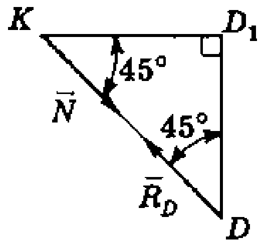


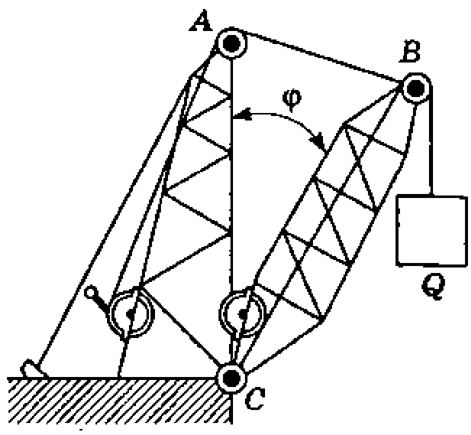
Рис. 7

Следовательно,

$$R_D = P\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

О т в е т: $R_A = P\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $R_B = P$; $R_C = P$; $R_D = P\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 2.44



Кран состоит из неподвижной башни AC и подвижной фермы BC, которая имеет шарнир C и удерживается тросом AB. Груз $Q = 40$ кН висит на цепи, перекинутой через блок в точке B и идущей к вороту по прямой BC. Длина $AC = BC$. Определить, пренебрегая весом фермы и трением на блоке, натяжение T троса AB и силу P, сжимающую ферму по прямой BC, как функции угла $ACB = \varphi$.

Решение

Рассмотрим равновесие блока B. Силы, действующие на блок, изображены на рис. 1.

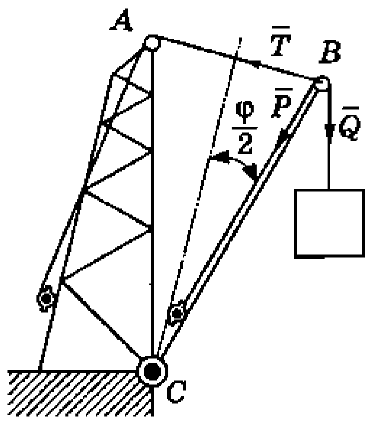


Рис. 1

Составим уравнения равновесия (уравнения проекций) идеального блока (рис. 2), где $\bar{R}_A$ — реакция на блок B со стороны фермы, $\bar{T}$ — сила натяжения троса, $\bar{Q}$ — вес (натяжение ветвей цепи):

$$\begin{cases} -T - Q\sin\dfrac{\varphi}{2} + Q\sin\dfrac{\varphi}{2} + R_A\sin\dfrac{\varphi}{2} = 0, \\ R_A\cos\dfrac{\varphi}{2} - 2Q\cos\dfrac{\varphi}{2} = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы найдем:

$$R_A = 2Q = 80 \text{ кН}.$$

Из первого —

$$T = R_A\sin\frac{\varphi}{2} = 80\sin\frac{\varphi}{2}.$$

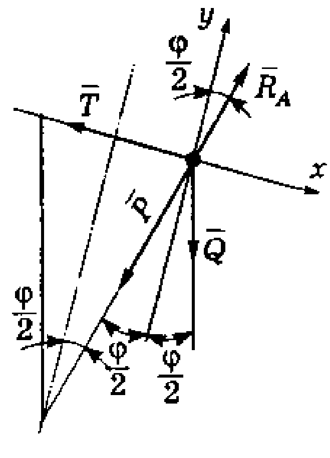


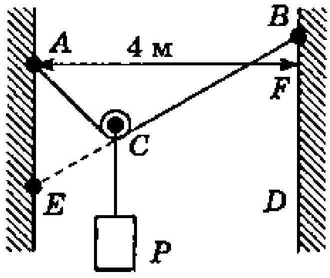
Рис. 2

Согласно аксиоме 2 (о равновесии двух сил) $P = R_A = 80$ кН.

Ответ: $T = 80\sin\dfrac{\varphi}{2}$ кН; $P = 80$ кН независимо от угла φ.

Задача 2.45

Блок C с грузом $P = 18$ Н может скользить вдоль гибкого троса ACB, концы которого A и B прикреплены к стенам. Расстояние между стенами 4 м; длина троса 5 м. Определить натяжение при равновесии блока с грузом, пренебрегая весом троса и трением блока о трос.

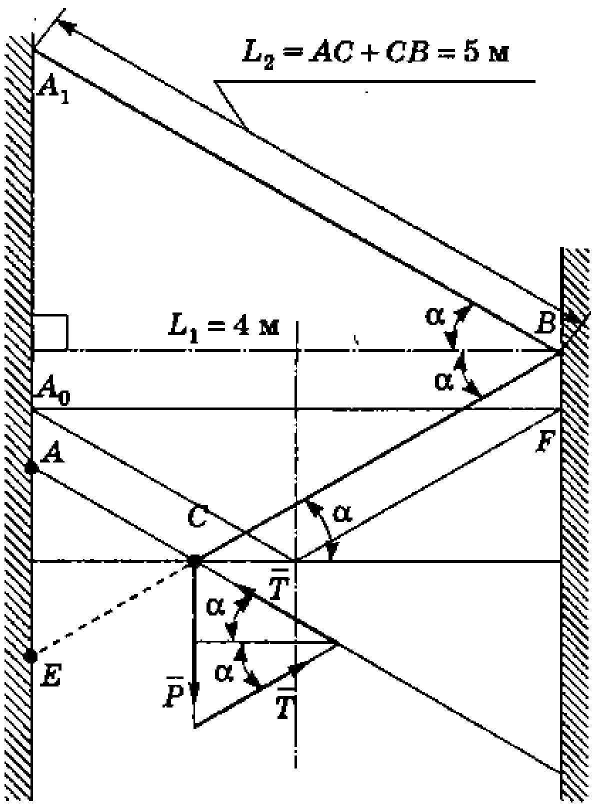


Р е ш е н и е

Так как блок идеальный, то трение между блоком и нитью отсутствует, поэтому натяжение ветвей нити с одной и с другой стороны одинаковое и составляет величину T.

Из геометрических построений (см. рисунок) вытекает, что

$$\sin\alpha = \frac{A_0A_1}{A_1B} = \frac{\sqrt{L_2^2 - L_1^2}}{L_2}.$$



Из силового треугольника найдем:

$$2T\sin\alpha = P,\ 2T = \frac{\sqrt{L_2^2 - L_1^2}}{L_2} = P,$$

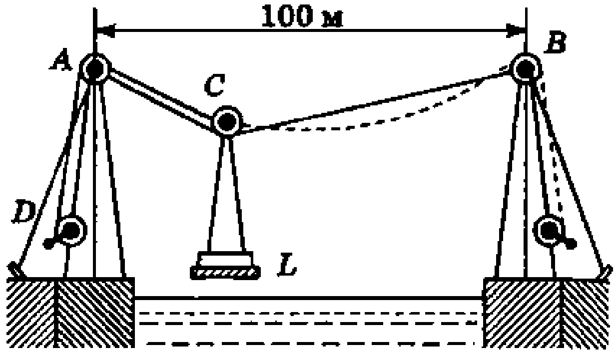
откуда

$$T = \frac{P}{2}\frac{L_2}{\sqrt{L_2^2 - L_1^2}} = 15\ \text{Н}.$$

О т в е т: 15 Н независимо от высоты BF.

Задача 2.46

Для переправы через реку устроена люлька L, которая посредством ролика C подвешена к стальному тросу AB, закрепленному в вершинах башен A и B. Для передвижения ролика C к левому берегу служит канат CAD, перекинутый через блок A и наматываемый на ворот D; такой же канат имеется для подтягивания люльки к правому берегу. Точки A и B находятся на одной горизонтали на расстоянии AB = 100 м одна от другой; длина троса ACB равна 102 м; вес люльки 50 кН. Пренебрегая весом канатов и троса, а также трением ролика о трос, определить натяжение каната CAD и натяжение троса ACB в тот момент, когда длина ветви AC составляет 20 м.



Решение

Рассмотрим треугольники ACM, MCB (рис. 1). Обозначив $AM = x$, $MB = y$, $MC = z$, с помощью теоремы Пифагора найдем

$$x^2 + z^2 = 20^2; \quad y^2 + z^2 = 82^2.$$

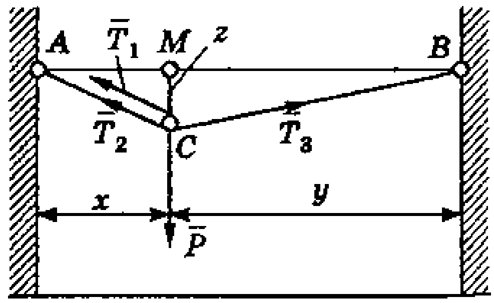


Рис. 1

Таким образом, получим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 100, \\ x^2 + z^2 = 20^2, \\ y^2 + z^2 = 82^2. \end{cases}$$

Решив систему, найдем: x = 17,38 м; y = 81,82 м; z = 9,9 м.

Из рис. 2 вычислим:

$$\sin\alpha_1 = \frac{z}{AC} = \frac{9{,}9}{20} = 0{,}495,$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{x}{AC} = \frac{17{,}38}{20} = 0{,}869,$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{z}{CB} = \frac{9{,}9}{82} = 0{,}121, \quad \cos\alpha_2 = \frac{81{,}62}{82} = 0{,}995.$$

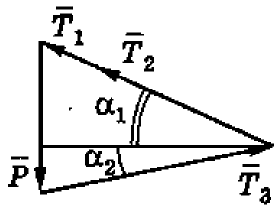


Рис. 2

Составим уравнения равновесия узла C:

$$\begin{cases}(T_1 + T_2)\cos\alpha_1 - T_3\cos\alpha_2 = 0,\\ (T_1 + T_2)\sin\alpha_1 + T_3\sin\alpha_2 - P = 0.\end{cases}$$

Обозначим $T_1 + T_2 = T_0$, тогда последняя система уравнения примет вид

$$\begin{cases}T_0\cos\alpha_1 = T_3\cos\alpha_2,\\ T_0\sin\alpha_1 + T_3\sin\alpha_2 = P.\end{cases}$$

Решим данную систему уравнений:

$$T_3 = T_0\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2};$$

$$T_0\sin\alpha_1 + T_0\frac{\cos\alpha_1\sin\alpha_2}{\cos\alpha_2} = P;$$

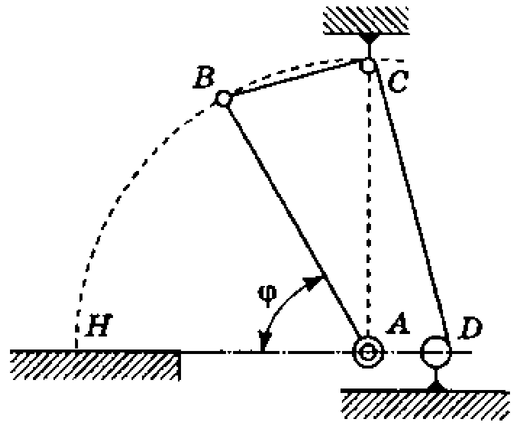
$$T_0(\sin\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2\cos\alpha_1) = P;$$

$$T_0 = \frac{P}{\sin\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2\cos\alpha_2} = 7{,}5 \text{ кН};$$

$$T_3 = P\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2(\sin\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2\cos\alpha_1)} = \frac{P}{\sin\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_1\cos\alpha_2} = 95{,}6 \text{ кН}.$$

О т в е т: $T_{CAD} = T_0 = 7{,}5$ кН; $T_{CB} = T_{CA} = T_3 = 95{,}6$ кН.

Задача 2.47



Оконная рама AB, изображенная на рисунке в разрезе, весом 100 Н открывается, вращаясь вокруг горизонтальной оси A, при помощи шнура BCD, огибающего блоки C и D. Блок C, размерами которого пренебрегаем, и точка A лежат на одной вертикали; вес рамы приложен в ее середине; трением также пренебрегаем. Найти натяжение T шнура в зависимости от угла φ, образуемого рамой AB с горизонталью AH, предполагая $AB = AC$, а также наибольшее и наименьшее значения этого натяжения.

Решение

Из рис. 1 найдем $\angle BAC = 90° - \varphi$.

Так как треугольник BAC равнобедренный, то

$$\alpha = \frac{1}{2}\angle BAC = 45° - \frac{\varphi}{2}.$$

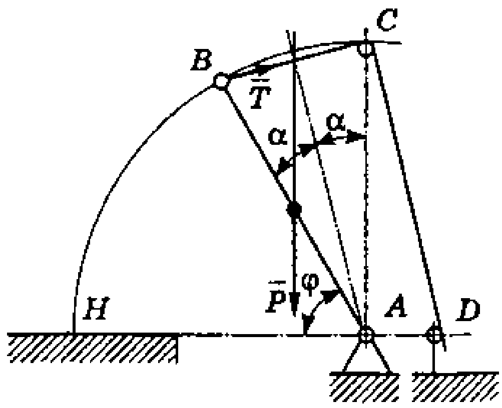


Рис. 1

Из силового треугольника MLK, образованного силами, действующими на оконную раму (рис. 2), найдем:

$$T = 100\sin\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right).$$

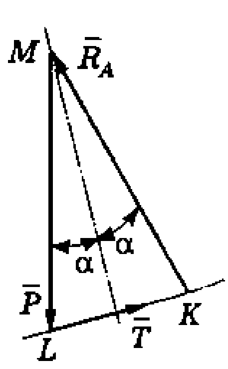


Рис. 2

Из этой зависимости определяем:

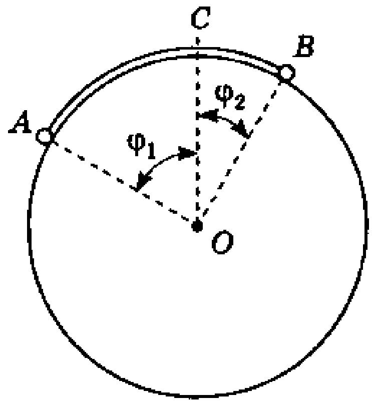
при $\varphi = 0$ $T_{max} = 100\sin 45° = 70{,}7$ Н;

при $\varphi = 90°$ $T_{min} = 0$.

Ответ: $T = 100\sin(45° - \frac{\varphi}{2})$ Н; $T_{max} = 70{,}7$ Н при $\varphi = 0$; $T_{min} = 0$ при $\varphi = 90°$.

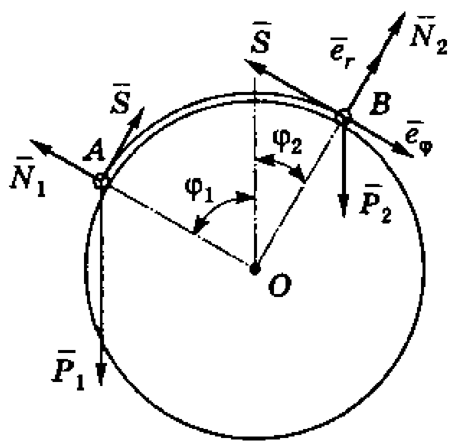
Задача 2.48

На круглом гладком цилиндре с горизонтальной осью и радиусом $OA = 0{,}1$ м лежат два шарика A и B; вес первого 1 Н, второго 2 Н. Шарики соединены нитью AB длиной 0,2 м. Определить углы φ_1 и φ_2, составляемые радиусами OA и OB с вертикальной прямой OC в положении равновесия, и давления N_1 и N_2 шариков на цилиндр в точках A и B. Размерами шариков пренебречь.



Решение

Покажем на рисунке силы, действующие на систему.



Составим уравнения равновесия для шарика A:

$$\begin{cases} N_1 - P_1 \cos\varphi_1 = 0, \\ S - P_1 \sin\varphi_1 = 0 \end{cases}$$

и для шарика B:

$$\begin{cases} N_2 - P_2 \cos\varphi_2 = 0, \\ S - P_2 \sin\varphi_2 = 0. \end{cases}$$

Длина нити равна $OA(\varphi_1 + \varphi_2) = 0{,}1(\varphi_1 + \varphi_2) = 0{,}2$, следовательно, $\varphi_1 + \varphi_2 = 2$.

Из уравнений равновесия следуют соотношения:

$$N_1 = P_1 \cos\varphi_1;$$

$$N_2 = P_2 \cos\varphi_2;$$

$$S = P_1 \sin\varphi_1;$$

$$S = P_2 \sin\varphi_2.$$

Из двух последних найдем:

$$\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \frac{P_2}{P_1} = 2.$$

Далее вычислим:

$$\frac{\sin(2-\varphi_2)}{\sin\varphi_2} = 2,\ \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\sin 2}{2+\cos 2},$$

откуда

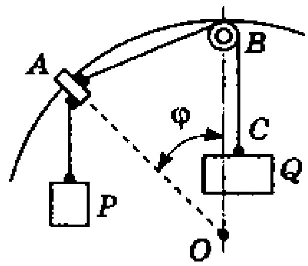
$$\varphi_2 = 29°50',\ \varphi_1 = 84°45',$$

$$N_1 = \cos\varphi_1 = 0{,}092\ \text{Н},\ N_2 = 2\cos\varphi_2 = 1{,}73\ \text{Н}.$$

Ответ: $\left(\varphi_1 = 2-\varphi_2;\ \operatorname{tg}\varphi_2 = \dfrac{\sin 2}{2+\cos 2}\right)$ $\varphi_1 = 84°45'$; $\varphi_2 = 29°50'$; $N_1 = 0{,}092$ Н; $N_2 = 1{,}73$ Н.

Задача 2.49

Гладкое кольцо A может скользить без трения по неподвижной проволоке, согнутой по окружности, расположенной в вертикальной плоскости. К кольцу подвешена гиря P и привязана веревка ABC, которая перекинута через неподвижный блок B, находящийся в высшей точке окружности; размерами блока пренебрегаем. В точке C подвешена гиря Q.



Определить центральный угол φ дуги AB в положении равновесия, пренебрегая весом кольца и трением на блоке, и указать условие, при котором возможно равновесие.

Решение

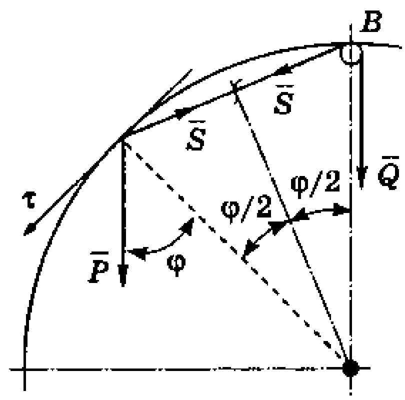
Покажем на рисунке силы, действующие на систему.

Так как блок идеальный, то $S = Q$.

Найдем проекции сил, действующих на точку B, на касательную τ, и запишем уравнение равновесия:

$$P\sin\varphi - S\cos\frac{\varphi}{2} = 0,$$

или после преобразований:



$$\left(2P\sin\frac{\varphi}{2}-S\right)\cos\frac{\varphi}{2}=0.$$

Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l}2P\sin\dfrac{\varphi}{2}-Q=0,\\ \cos\dfrac{\varphi}{2}=0,\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\sin\dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{Q}{2P}\\ \cos\dfrac{\varphi}{2}=0.\end{array}\right.$$

Уравнение

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{Q}{2P}$$

имеет решение $\varphi=\varphi_1$ только при выполнении условия

$$\left|\frac{Q}{2P}\right|\le 1,\ \text{т.е.}\ \frac{Q}{2P}\le 1.$$

Уравнение

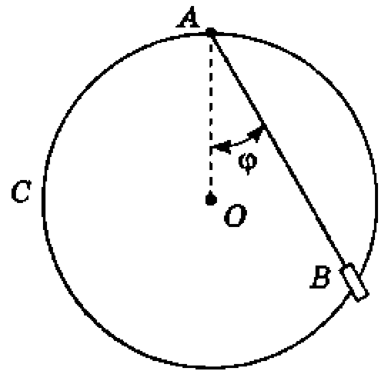
$$\cos\frac{\varphi}{2}=0$$

имеет решение $\varphi=\varphi_2=\pi$ при любых значениях P и Q. Но данное решение ($\varphi_1=\pi$) можно получить и в предыдущем случае при $\dfrac{Q}{2P}=1$.

Ответ: $\sin\dfrac{\varphi_1}{2}=\dfrac{Q}{2P}$; $\varphi_2=\pi$; первое из указанных положений равновесия возможно при $\dfrac{Q}{2P}<1$, второе — при любых Q и P.

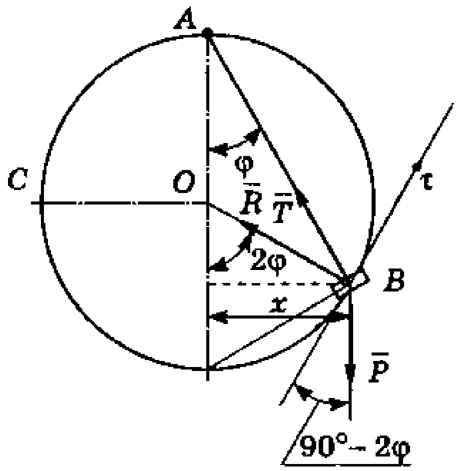
Задача 2.50

На проволочной окружности ABC радиусом R, расположенной в вертикальной плоскости, помещено гладкое кольцо B, вес которого P; размерами кольца пренебречь. Кольцо посредством упругой нити AB соединено с наивысшей точкой A окружности. Определить угол φ в положении равновесия, зная, что сила натяжения нити T пропорциональна ее относительному удлинению, причем коэффициент пропорциональности равен k.



Решение

Покажем на рисунке силы, действующие на систему.



Если через L и l обозначить длину нити соответственно в состоянии растянутом и нерастянутом, то

$$T = k\frac{L-l}{l}, \text{ или } T = k\frac{\Delta l}{l}.$$

Спроецируем силы $\overline{T}$, $\overline{R}$ и $\overline{P}$ на касательную τ и запишем уравнение равновесия:

$$T\sin\varphi = P\sin 2\varphi, \quad \text{или} \quad \sin\varphi(2P\cos\varphi - T) = 0.$$

Тогда

$$\left[\begin{array}{l}\sin\varphi = 0,\\ 2P\cos\varphi - T = 0.\end{array}\right.$$

Имеем

$$\Delta l = \frac{\cos\varphi \cdot l \cdot 2P}{k}; \quad (\Delta l + l)\sin\varphi = x.$$

Так как $x = R\sin 2\varphi$, то

$$(\Delta l + l)\sin\varphi = R\sin 2\varphi; \quad \cos\varphi\frac{2P}{k}\cdot l + l = 2R\cos\varphi;$$

$$2\cos\varphi\left(R - \frac{P}{k}l\right) = l; \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}\frac{kl}{kR - Pl}.$$

Из последнего соотношения следует, что $\cos\varphi$ определен при $k \le \frac{2Pl}{2R-l}$. В противном случае $\varphi = 0$.

О т в е т: $\cos\varphi = \frac{1}{2}\frac{kl}{kR-Pl}$, если $k \le \frac{2Pl}{2R-l}$, в противном случае $\varphi = 0$.

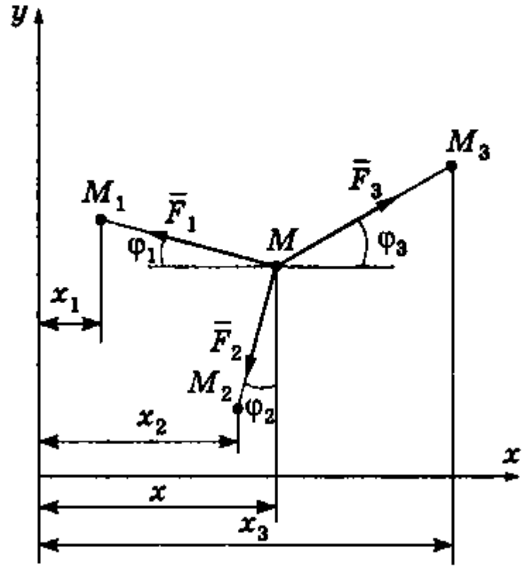
П р и м е ч а н и е. В ответе задачника — опечатка в знаке неравенства.

Задача 2.51

Точка M притягивается тремя неподвижными центрами $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ силами, пропорциональными расстояниям: $F_1 = k_1r_1$, $F_2 = k_2r_2$, $F_3 = k_3r_3$, где $r_1 = MM_1$, $r_2 = MM_2$, $r_3 = MM_3$, а k_1, k_2, k_3 — коэффициенты пропорциональности. Определить координаты x, y точки M в положении равновесия.

Р е ш е н и е

Представим на рисунке данные условия задачи.



Запишем уравнения равновесия точки M:

$$\begin{cases} -F_1\cos\varphi_1 - F_2\sin\varphi_2 + F_3\cos\varphi_3 = 0, \\ F_1\sin\varphi_1 - F_2\cos\varphi_2 + F_3\sin\varphi_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем:

$$F_1\cos\varphi_1 = k_1r_1\cos\varphi_1 = k_1(x - x_1),$$

$$F_2\sin\varphi_2 = k_2r_2\sin\varphi_2 = k_2(x - x_2),$$

$$F_3\cos\varphi_3 = k_3r_3\cos\varphi_3 = k_3(x_3 - x).$$

Подставив эти выражения в первое уравнение системы, получим

$$-k_1(x - x_1) - k_2(x - x_2) + k_3(x_3 - x) = 0,$$

или

$$x(k_1+k_2+k_3)=k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3,$$

$$x=\frac{k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3}{k_1+k_2+k_3}.$$

Аналогично преобразуем второе уравнение системы и найдем:

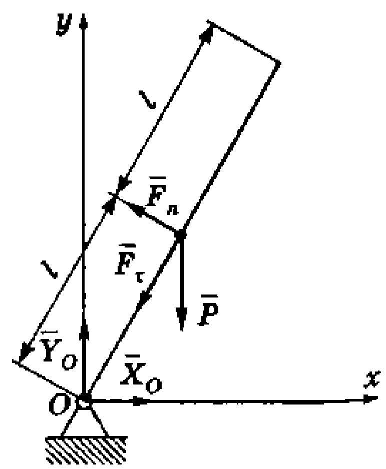
$$y=\frac{k_1y_1+k_2y_2+k_3y_3}{k_1+k_2+k_3}.$$

Ответ: $x=\dfrac{k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3}{k_1+k_2+k_3}$; $y=\dfrac{k_1y_1+k_2y_2+k_3y_3}{k_1+k_2+k_3}$.

Задача 2.52

Однородная прямоугольная пластинка весом 50 Н подвешена так, что может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей вдоль одной из ее сторон. Равномерно дующий ветер удерживает ее в наклонном положении под углом 18° к вертикальной плоскости. Определить равнодействующую давлений, производимых ветром на пластинку перпенидикулярно ее плоскости.

Решение



Рассмотрим все силы, действующие на пластинку (см. рисунок): $\bar F$ — сила давления ветра; $\bar P$ — сила тяжести пластинки; $\bar X_O+\bar Y_O$ — сила реакции шарнира O.

Разложим силу $\bar F$ на нормальную и касательную составляющие:

$$\bar F=\bar F_n+\bar F_\tau.$$

Для того чтобы определить искомую равнодействующую давлений, составим уравнение моментов относительно точки O:

$$F_n l-Pl\sin\alpha=0.$$

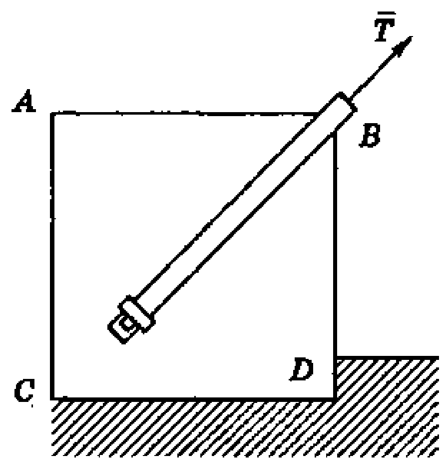
Откуда найдем:

$$F_n = P\sin\alpha = 50\sin 18^\circ = 50\cdot 0{,}314 = 15{,}7\ \text{Н}.$$

Ответ: $50\sin 18^\circ = 15{,}7$ Н.

Задача 2.53

Концевая цепь цепного моста заложена в каменное основание, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда, среднее сечение которого есть *ABDC*. Стороны $AB = AC = 5$ м, удельный вес кладки 25 кН/м^3; цепь расположена на диагонали *BC*. Найти необходимую длину *b* третьей стороны параллелепипеда, если натяжение цепи $T = 1000$ кН. (Основание должно быть рассчитано на опрокидывание вокруг ребра *D*; при расчете пренебрегаем сопротивлением грунта.)



Решение

Представим на рис. 1 данные условия задачи.

Для того чтобы опрокинуть основание, необходимо, чтобы сила реакции $\overline{R}$ прошла через диагональ *AD*.

Из соответствующего силового треугольника (рис. 2) найдем:

$$\overline{P} = T\sqrt{2}.$$

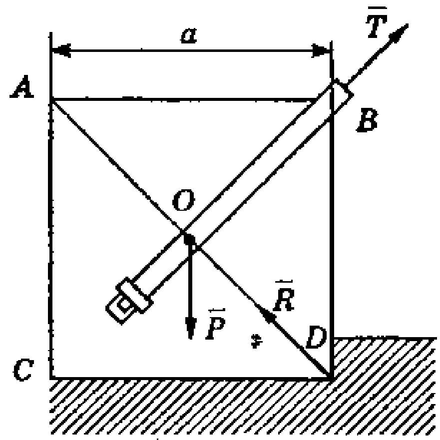


Рис. 1

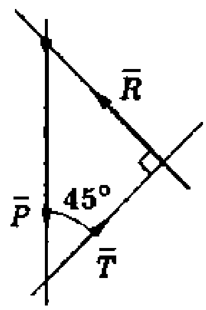


Рис. 2

Пусть $\gamma = 25$ кН/м^3 — удельный вес кладки; b — длина третьей стороны. Тогда

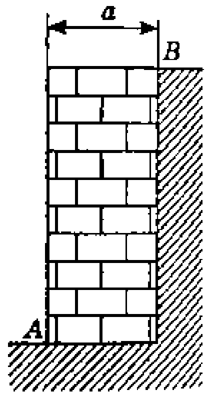
$$P = \gamma \cdot a^2 b, \quad T\sqrt{2} = \gamma \cdot a^2 b, \quad b = \frac{T\sqrt{2}}{\gamma \cdot a^2} = \frac{1000 \cdot \sqrt{2}}{25 \cdot 5 \cdot 5} = 2{,}26 \text{ м},$$

т.е. 2,26 м — предельная величина b, при которой возможно опрокидывание. Следовательно, при $b > 2{,}26$ м опрокидывание на произойдет.

О т в е т: $b > 2{,}26$ м.

Задача 2.54

Земляная насыпь подпирается вертикальной стеной AB. Найти необходимую толщину стены a, предполагая, что давление земли на стену направлено горизонтально, приложено на 1/3 ее высоты и равно 60 кН/м (на метр длины стены); удельный вес кладки 20 кН/м^3. (Стена должна быть рассчитана на опрокидывание вокруг ребра A.)



Р е ш е н и е

Рассмотрим предельное равновесие стены. В таком состоянии на стену действуют силы: $\overline{R}$ — реакция со стороны фундамента; $\overline{P}$ — сила веса стены; $\overline{F}$ — сила давления земли на стену (рис. 1).

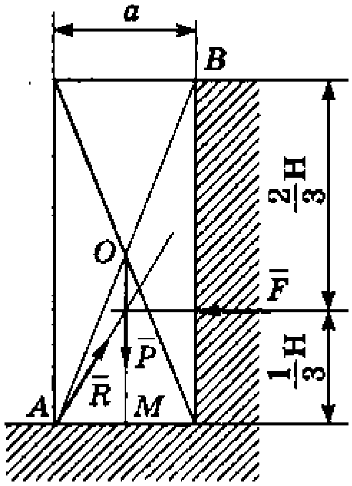


Рис. 1

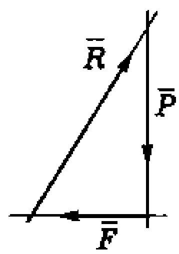


Рис. 2

Условие равновесия стены имеет вид

$$\overline{R}+\overline{P}+\overline{F}=0.$$

Из подобия треугольников AOM (рис. 1) и RPF (рис. 2) найдем:

$$\frac{F}{P}=\frac{a/2}{H/3}, \quad a=\frac{2}{3}H\frac{F}{P}.$$

Поскольку по условию $g=60$ кН/м, $\gamma=20$ кН/м, то можно найти (рис. 3):

$$F=g\cdot b; \quad P=\gamma\cdot a\cdot H\cdot b;$$

$$a=\frac{2}{3}H\frac{gb}{\gamma\cdot a\cdot H\cdot b}.$$

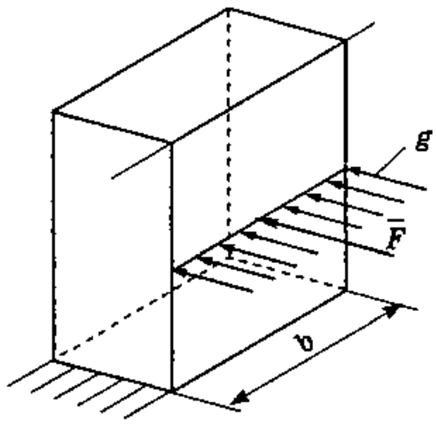


Рис. 3

Откуда

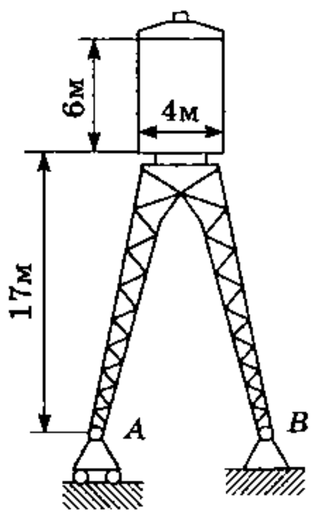
$$a^2=\frac{2g}{3\gamma}, \quad a=\sqrt{\frac{2g}{3\gamma}}=\sqrt{\frac{2\cdot 60}{3\cdot 20}}=\sqrt{2}\ \text{м}.$$

Поскольку найденное значение $a=\sqrt{2}$ м — это значение для предельного равновесия, то и для всех $a\geq\sqrt{2}$ м равновесие будет сохраняться.

Ответ: $a\geq\sqrt{2}$ м.

Задача 2.55

Водонапорная башня состоит из цилиндрического резервуара высотой 6 м и диаметром 4 м, укрепленного на четырех симметрично расположенных столбах, наклоненных к горизонту; дно резервуара находится на высоте 17 м над уровнем опор; вес башни 80 кН, давление ветра рассчитывается на площадь проекции поверхности резервуара на плоскость, перпендикулярную направлению ветра, причем удельное давление ветра принимается равным 1,25 кПа.



Определить необходимое расстояние AB между основаниями столбов. (Расстояние AB должно быть рассчитано на опрокидывание давлением ветра при горизонтальном его направлении.)

Решение

Рассмотрим предельное равновесие резервуара (рис. 1). В таком состоянии реакция опоры A равна $R_A = 0$. Условие равновесия резервуара имеет вид

$$\bar{R}_B + \bar{P} + \bar{F} = 0.$$

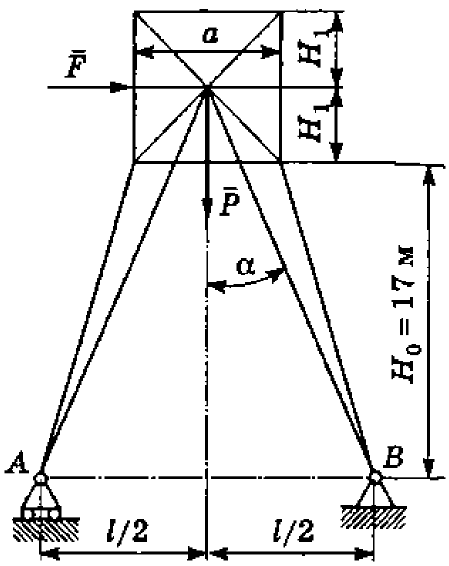


Рис. 1

Из силового треугольника (рис. 2) найдем:

$$\frac{F}{2} = P \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{где} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{l/2}{H_1 + H_0}.$$

Сила давления воздуха

$$F = P_0 \cdot 2H_1 a,$$

где P_0 — удельное давление ветра.

Имеем

$$P_0 \cdot H_1 \cdot a \le P \frac{l/2}{H_1 + H_0},$$

$$l \ge \frac{2P_0}{P} H_1 \cdot a(H_1 + H_0) = \frac{2 \cdot 1{,}25 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 20}{20} = 15 \text{ м}.$$

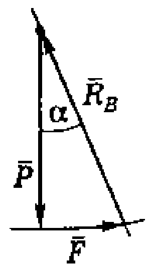


Рис. 2

Ответ: $AB \ge 15$ м.

3. Параллельные силы

Задача 3.1

Определить вертикальные реакции опор, на которые свободно оперта у своих концов горизонтальная балка длиной l, нагруженная равномерно по q Н на единицу длины. Вес балки считать включенным в равномерно распределенную нагрузку.

Решение

Заменим равномерно распределенную нагрузку интенсивности q (рис. 1) эквивалентной ей силой $Q = ql$, приложенной в центре участка AB (рис. 2). Освободимся от связей в опорах A и B, заменив их соответствующими реакциями связей $\overline{R}_1$ и $\overline{R}_2$. Балка AB находится в равновесии под действием полученной плоской параллельной системы сил. В качестве необходимых и достаточных условий равновесия выберем равенство нулю главных моментов всех сил относительно точек A и B:

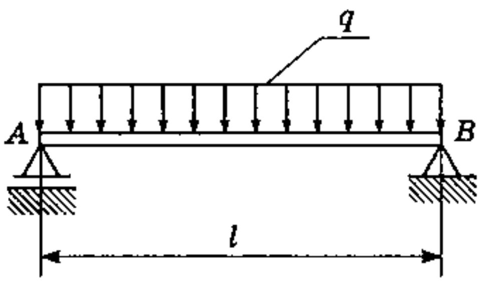


Рис. 1

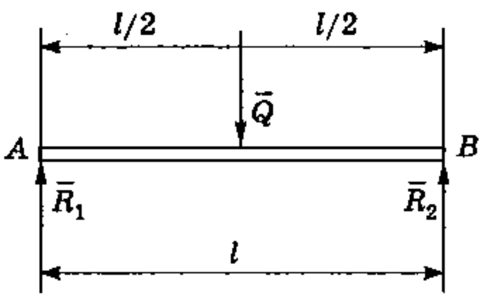


Рис. 2

$$\begin{cases} -Q\dfrac{l}{2} + R_2 l = 0, \\ Q\dfrac{l}{2} - R_1 l = 0. \end{cases}$$

Решив систему, найдем:

$$R_1 = R_2 = \frac{Q}{2} = \frac{ql}{2}.$$

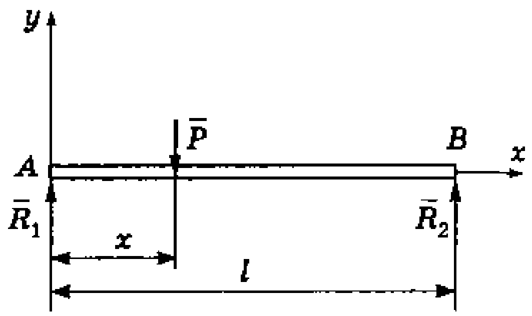
Ответ: $R_1 = R_2 = \dfrac{Q}{2} = \dfrac{ql}{2}$.

Задача 3.2

Определить вертикальные реакции опор горизонтальной балки пролета l, если груз P помещен на ней на расстоянии x от первой опоры.

Решение

Представим данные условия задачи на рисунке.



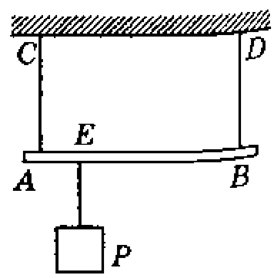
После замены связей в точках A и B соответствующими реакциями $\overline{R}_1$ и $\overline{R}_2$ получим параллельную систему сил. Введя систему координат xAy, составим уравнения равновесия для моментов сил относительно точки A и для проекций на ось y:

$$\begin{cases} R_2 l - Px = 0, \\ R_1 - P + R_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_2 = P\dfrac{x}{l}, \\ R_1 = P - R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_2 = P\dfrac{x}{l}, \\ R_1 = P\dfrac{l-x}{l}. \end{cases}$$

Ответ: $R_1 = P\dfrac{l-x}{l}$; $R_2 = P\dfrac{x}{l}$.

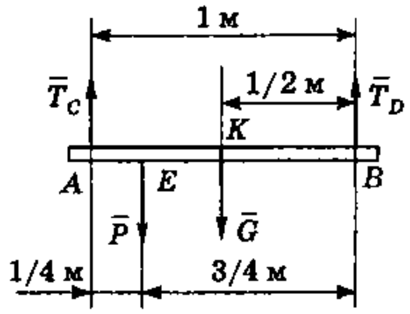
Задача 3.3

Однородный стержень AB, длина которого 1 м, а вес 20 Н, подвешен горизонтально на двух параллельных веревках AC и BD. К стержню в точке E на расстоянии $AE = 1/4$ м подвешен груз $P = 120$ Н. Определить натяжения веревок T_C и T_D.



Решение

На выбранный объект равновесия (стержень AB) действуют заданная активная сила $\overline{P}$ и вес $\overline{G}$. В результате их действия в паралдельных веревках AC и BD возникают реактивные усилия $\overline{T}_C$ и $\overline{T}_D$ (см. рисунок). Для определения модулей сил реакций $\overline{T}_C$ и $\overline{T}_D$ составим уравнения равновесия плоской параллельной системы сил (для моментов относительно точек A и B):



$$\begin{cases} -P\cdot AE - G\cdot AK + T_D\cdot AB = 0, \\ -T_C\cdot AB + P\cdot EB + G\cdot KB = 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $AK = KB = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}$ м,

найдем:

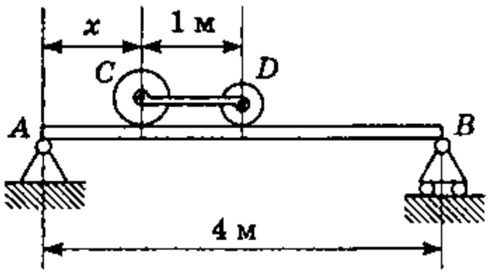
$$T_C = P\cdot\frac{3}{4} + G\cdot\frac{1}{2} = 90 + 10 = 100 \text{ Н},$$

$$T_D = P\cdot\frac{1}{4} + G\cdot\frac{1}{2} = 30 + 10 = 40 \text{ Н}.$$

О т в е т: $T_C = 100$ Н; $T_D = 40$ Н.

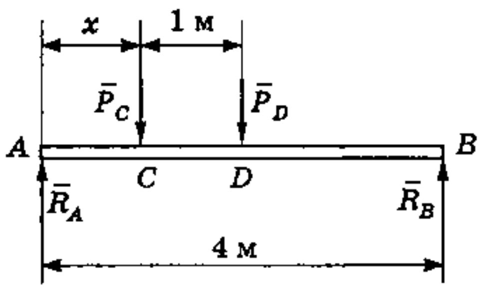
Задача 3.4

На горизонтальную балку, лежащую на двух опорах, расстояние между которыми равно 4 м, положены два груза, один C в 2 кН, другой D в 1 кН, так, что реакция опоры A в два раза больше реакции опоры B, если пренебречь весом балки. Расстояние CD между грузами равно 1 м. Каково расстояние x до груза C от опоры A?



Р е ш е н и е

Изобразим на рисунке действующие на объект равновесия активные силы $\overline{P}_C$, $\overline{P}_D$ и реакции $\overline{R}_A$, $\overline{R}_B$ (после замены связей в точках A и B их реак-



циями). Условия равновесия полученной параллельной системы сил запишем для моментов всех сил относительно точек A и B:

$$\begin{cases} R_B \cdot 4 - P_D(x+1) - P_C \cdot x = 0, \\ -R_A \cdot 4 + P_C(4-x) + P_D(3-x) = 0. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение системы на 2 и складывая его со вторым уравнением, получим

$$(2R_B - R_A) \cdot 4 + P_C(4-3x) + P_D(1-3x) = 0.$$

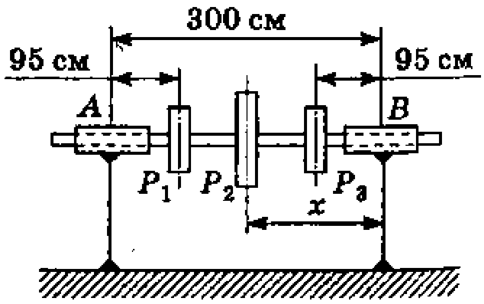
Так как по условию задачи $R_A = 2R_B$, то

$$P_C(4-3x) - P_D(3x-1) = 0 \Rightarrow x = \frac{4P_C + P_D}{3(P_D + P_C)}; \; x = \frac{4 \cdot 2 + 1}{3(1+2)} = 1 \text{ м}.$$

Ответ: $x = 1$ м.

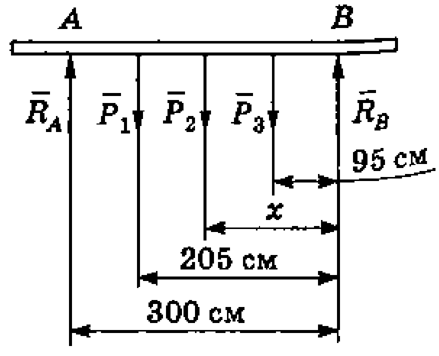
Задача 3.5

Трансмиссионный вал AB несет три шкива весом $P_1 = 3$ кН, $P_2 = 5$ кН, $P_3 = 2$ кН. Размеры указаны на рисунке. Определить, на каком расстоянии x от подшипника B надо установить шкив весом P_2, чтобы реакция подшипника A равнялась реакции подшипника B; весом вала пренебречь.



Решение

На рисунке показана схема нагружения вала AB, а также силы реакций, действующие на объект равновесия после отбрасывания связей. Уравнения равновесия для моментов сил относительно точек B и A будут иметь вид



$$\begin{cases} -R_A \cdot 300 + P_1 \cdot 205 + P_2 \cdot x + P_3 \cdot 95 = 0, \\ R_B \cdot 300 - P_3 \cdot 205 - P_2(300-x) - P_1 \cdot 95 = 0. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы с учетом $R_A = R_B$, получим

$$P_1(205-95)+P_2(2x-300)-P_3(205-95)=0.$$

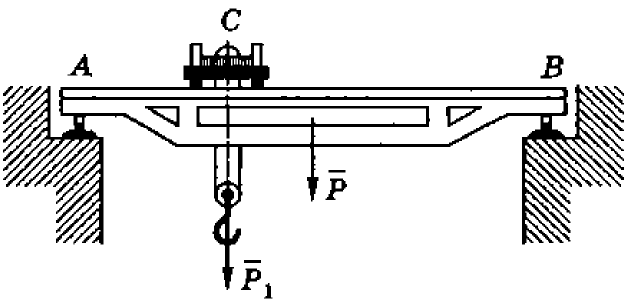
Следовательно,

$$x=\frac{(P_3-P_1)\cdot 110+P_2\cdot 300}{2P_2};\quad x=\frac{-110+5\cdot 300}{2\cdot 5}=139 \text{ см.}$$

Ответ: $x = 139$ см.

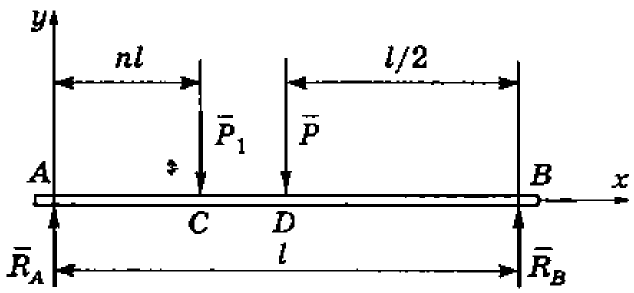
Задача 3.6

Найти величины давлений мостового крана AB на рельсы в зависимости от положения тележки C, на которой укреплена лебедка. Положение тележки определить расстоянием ее середины от левого рельса в долях общей длины моста. Вес моста $P = 60$ кН, вес тележки с поднимаемым грузом $P_1 = 40$ кН.



Решение

Представим на рисунке данные условия задачи. Введем обозначение $n=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AC}{l}$. Тогда $AC = nl$, $AD = DB = \dfrac{1}{2}l$. После освобождения от связей в опорах A и B и замены их силами реакций $\bar{R}_A$, $\bar{R}_B$ получим плоскую систему параллельных сил.



В системе координат xAy запишем уравнения равновесия для моментов всех сил относительно точки A и проекций сил на ось y:

$$\begin{cases} -P_1 \cdot AC - P \cdot AD + R_B \cdot AB = 0, \\ R_A - P_1 - P + R_B = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы, после замены AC, AD, AB их значениями через l, найдем:

$$R_B = \frac{P_1 \cdot nl + P \cdot \frac{1}{2} l}{l} = 30 + 40n = (3 + 4n) \cdot 10 \text{ кН}.$$

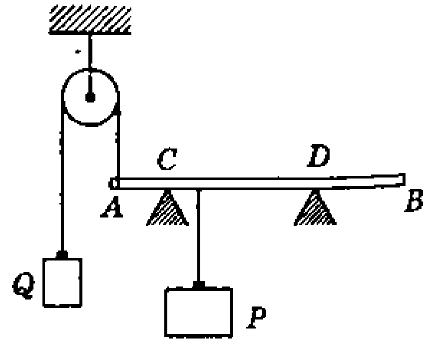
Далее из второго уравнения системы получим

$$R_A = P + P_1 - R_B = 70 - 40n = (7 - 4n) \cdot 10 \text{ кН}.$$

Ответ: $R_A = (7-4n) \cdot 10$ кН; $R_B = (3+4n) \cdot 10$ кН, где $n = \dfrac{AC}{AB}$.

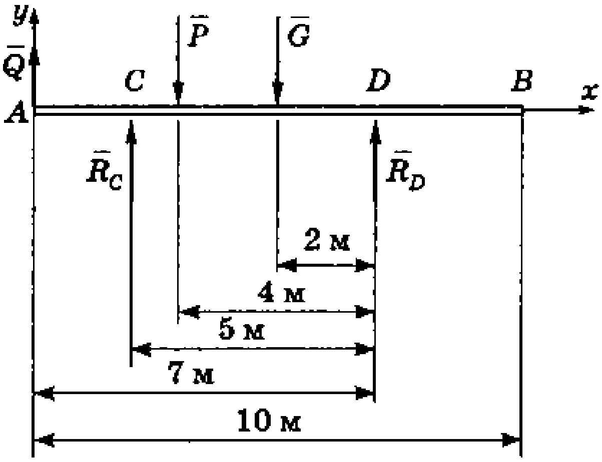
Задача 3.7

Балка AB длиной 10 м и весом 2 кН лежит на двух опорах C и D. Опора C отстоит от конца A на 2 м, опора D от конца B — на 3 м. Конец балки A оттягивается вертикально вверх посредством перекинутого через блок троса, на котором подвешен груз Q весом 3 кН. На расстоянии 3 м от конца A к балке подвешен груз P весом 8 кН. Определить реакции опор, пренебрегая трением на блоке.



Решение

Рассмотрим равновесие балки AB, к которой приложены заданные силы $\overline{P}, \overline{Q}, \overline{G}$ и реакции в опорах C и D. При этом усилия со стороны грузов P и Q передаются посредством троса, прикрепленного к балке (см. рисунок). Так как действующие на объект равновесия активные силы представляют собой систему параллельных сил, то и возникающие в опорах реакции будут параллельны этим силам. Для полученной плоской параллельной системы из пяти сил составим уравнения равновесия для моментов сил относительно точки D и для проекций этих сил на ось y:



$$\begin{cases} -Q\cdot 7 - R_C\cdot 5 + P\cdot 4 + G\cdot 2 = 0, \\ Q + R_C - P - G + R_D = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы найдем:

$$R_C = \frac{P\cdot 4 + G\cdot 2 - Q\cdot 7}{5} = 3\ \text{кН}.$$

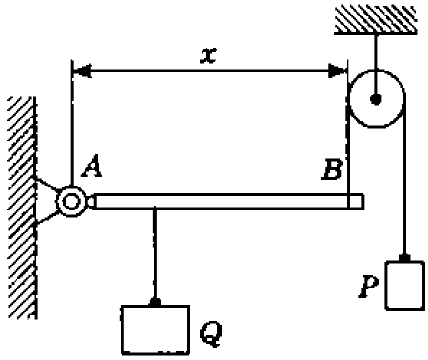
Из второго —

$$R_D = P + G - Q - R_C = 4\ \text{кН}.$$

Ответ: $R_C = 3$ кН; $R_D = 4$ кН.

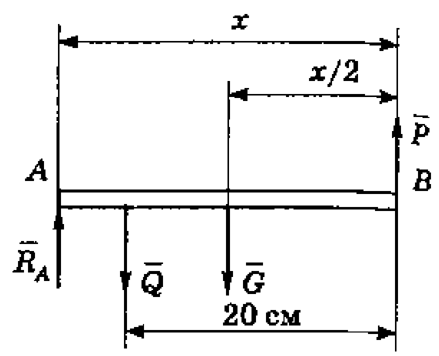
Задача 3.8

Горизонтальный стержень AB весом 100 Н может вращаться вокруг неподвижной оси шарнира A. Конец B оттягивается кверху посредством перекинутой через блок нити, на которой подвешена гиря $P = 150$ Н. В точке, находящейся на расстоянии 20 см от конца B, подвешен груз Q весом 500 Н. Как велика длина x стержня AB, если он находится в равновесии?



Решение

Покажем на рисунке силы, действующие на стержень.



Усилие P передается через блок и направлено в точке B по нити вверх. Освобождаясь в точке A от связи и заменяя ее силой реакции, получим плоскую параллельную систему сил.

Запишем уравнение равновесия для моментов сил относительно точки A:

$$-Q(x-20)-G\cdot\frac{x}{2}+P\cdot x=0.$$

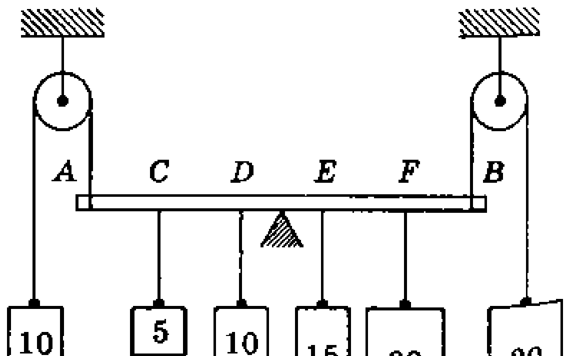
Найдем:

$$x=\frac{Q\cdot 20}{Q+\dfrac{G}{2}-P}=\frac{500\cdot 20}{400}=25 \text{ см}.$$

Ответ: $x=25$ см.

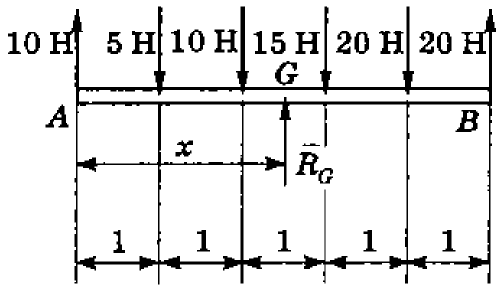
Задача 3.9

Конец A горизонтального стержня AB весом 20 Н и длиной 5 м оттягивается кверху посредством перекинутой через блок веревки, на которой подвешен груз весом 10 Н. Конец B таким же образом оттягивается кверху посредством груза весом 20 Н. В точках C, D, E и F, отстоящих одна от другой и от точек A и B на 1 м, подвешены грузы весом соответственно 5, 10, 15 и 20 Н. В каком месте надо подпереть стержень, чтобы он оставался в равновесии?



Решение

Покажем на рисунке силы, действующие на систему.



Наличие опоры в точке G соответствует «появлению» в этом месте соответствующей силы реакции. Для находящейся в равновесии плоской параллельной системы сил должно выполняться, в частности, условие равенства нулю суммы моментов этих сил относительно точки G, что приводит к уравнению

$$-10x+5(x-1)+10(x-2)-15(5-x-2)-20(5-x-1)+20(5-x)=0.$$

Отсюда найдем:

$$x=\frac{5+20+45+80-100}{20}=2{,}5\ \text{м}.$$

Ответ: в середине.

Задача 3.10

К однородному стержню, длина которого 3 м, а вес 6 Н, подвешены четыре груза на равных расстояниях друг от друга, причем два крайних — на концах стержня. Первый груз слева весит 2 Н, каждый последующий тяжелее предыдущего на 1 Н. На каком расстоянии x от левого конца нужно подвесить стержень, чтобы он оставался горизонтальным?

Решение

Представим данные условия задачи на рис. 1. Выберем систему координат, изобразим действующие на балку активные силы и силу реакции связи $\bar{R}_C$ (рис. 2). Задачу можно решить аналогично предыдущей, составив одно уравнение равновесия для мо-

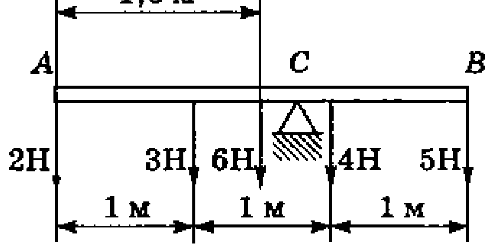


Рис. 1

ментов сил относительно точки C. Но можно использовать и другие условия равновесия полученной плоской параллельной системы сил, а именно для проекций на ось y и для моментов относительно точки A:

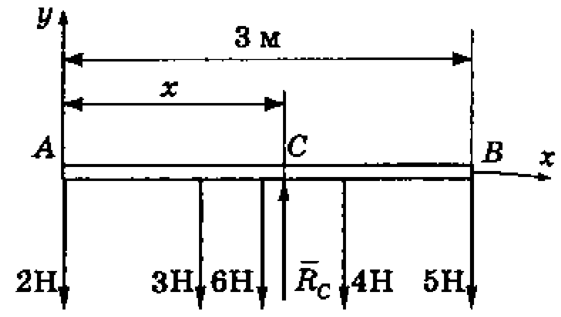


Рис. 2

$$\begin{cases} -2-3-6+R_C-4-5=0, \\ -3\cdot1-6\cdot1{,}5+R_C\cdot x-4\cdot2-5\cdot3=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$R_C=2+3+4+5+6=20 \text{ Н},$$

$$x=\frac{3+9+8+15}{20}=1{,}75 \text{ м}.$$

Ответ: $x=1{,}75$ м.

Задача 3.11

Однородная горизонтальная балка соединена со стеной шарниром и подперта в точке, лежащей на расстоянии 160 см от стены. Длина балки 400 см, ее вес 320 Н. На расстояниях 120 см и 180 см от стены на балке лежат два груза весом 160 Н и 240 Н. Определить опорные реакции.

Решение

Представим данные условия задачи на рис. 1. Изобразив внешние заданные силы $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{G}$ (вес) и освободившись от связей в шарнире A и опоре C, заменив их реакциями связей $\bar{R}_A$ и $\bar{R}_C$, параллельными активным силам, получим плоскую параллельную систему сил (рис. 2). Введем систему координат, направив ось x по балке, а ось y — перпендикулярно вверх. Составим уравнения равновесия (для моментов сил относительно точки A и для проекций сил на ось y):

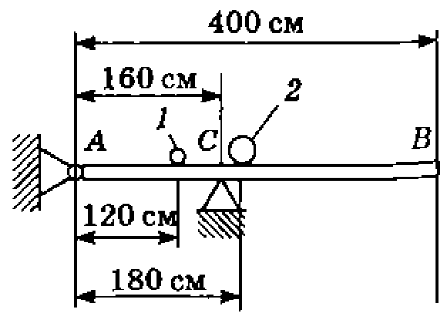


Рис. 1

$$\begin{cases} -P_1 \cdot 120 + R_C \cdot 160 - P_2 \cdot 180 - G \cdot 200 = 0, \\ R_A - P_1 + R_C - P_2 - G = 0. \end{cases}$$

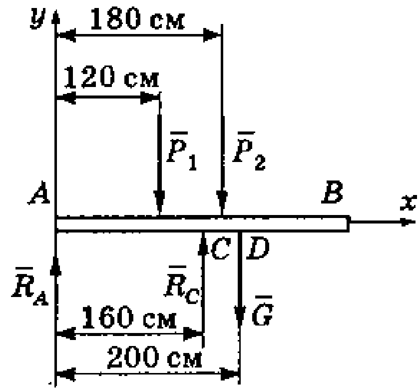


Рис. 2

Получим

$$R_C = \frac{160 \cdot 120 + 240 \cdot 180 + 320 \cdot 200}{160} = 790 \text{ Н},$$

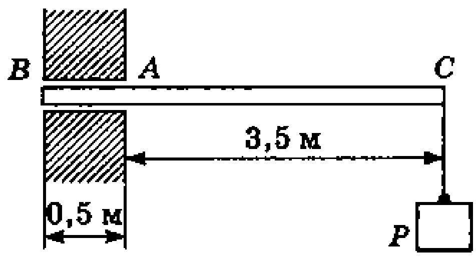
$$R_A = P_1 + P_2 + G - R_C = -70 \text{ Н}.$$

Знак «–» показывает, что реакция в шарнире A направлена противоположно показанной на рисунке, т.е. вниз. Реакция $\bar{R}_C$ получилась со знаком «+», т. е. направлена, как и предполагалось, вверх.

Ответ: $R_C = 790$ Н — вверх; $R_A = 70$ Н — вниз.

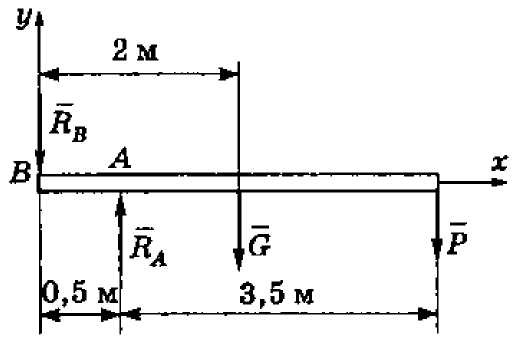
Задача 3.12

Однородная горизонтальная балка длиной 4 м и весом 5 кН заложена в стену, толщина которой равна 0,5 м, так, что опирается на нее в точках A и B. Определить реакции в этих точках, если к свободному концу балки подвешен груз P весом 40 кН.



Решение

Заменяя связи, наложенные на балку в точках A и B стены, соответствующими реакциями $\bar{R}_B$ и $\bar{R}_A$, и изображая действующие на балку силу тяжести $\bar{G}$ и нагрузку $\bar{P}$ (см. рисунок), придем к плоской параллельной системе сил. Составим уравнения равновесия (для моментов сил относительно точек B и A):



$$\begin{cases} R_A \cdot 0{,}5 - G \cdot 2 - P \cdot 4 = 0, \\ R_B \cdot 0{,}5 - G \cdot 1{,}5 - P \cdot 3{,}5 = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$R_A = \frac{5 \cdot 2 + 40 \cdot 4}{0,5} = 340 \text{ кН},$$

$$R_B = \frac{5 \cdot 1,5 + 40 \cdot 3,5}{0,5} = 295 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности решения запишем уравнение равновесия для проекций сил на ось y:

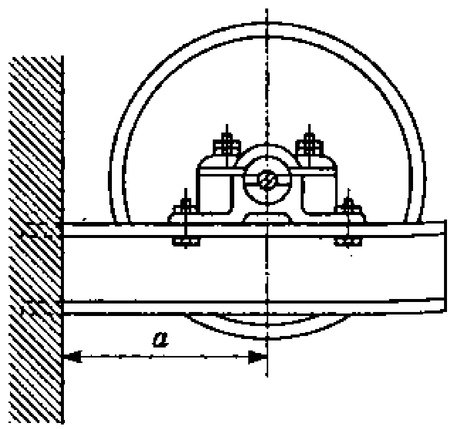
$$-R_B + R_A - G - P = 0 \Rightarrow -295 + 340 - 5 - 40 = 0 \text{ — верно.}$$

Полученные знаки «+» в численных значениях $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ подтверждают, что реакция $\overline{R}_B$ направлена вниз, а $\overline{R}_A$ — вверх.

Ответ: $\overline{R}_A = 340$ кН — вверх; $\overline{R}_B = 295$ кН — вниз.

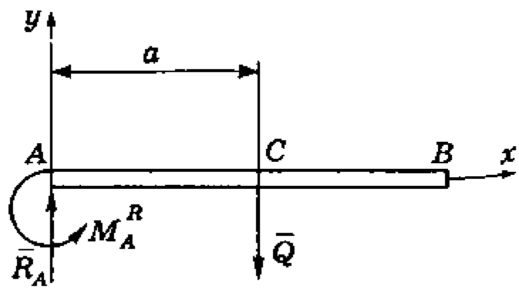
Задача 3.13

Горизонтальная балка заделана одним концом в стену, а на другом конце поддерживает подшипник вала. От веса вала, шкивов и подшипника балка испытывает вертикальную нагрузку Q, равную 1,2 кН. Пренебрегая весом балки и считая, что нагрузка Q действует на расстоянии $a = 0,75$ м от стены, определить реакции заделки.



Решение

В общем случае в жесткой заделке A под действием силы $\overline{Q}$ возникает сила реакции $\overline{R}_A$ и момент M_A^R (см. рисунок). Уравнения равновесия можно составить двумя способами.



1-й способ (для проекций сил на ось y и для моментов относительно точки A):

$$\begin{cases} R_A - Q = 0, \\ M_A^R - Q \cdot a = 0. \end{cases}$$

2-й способ (для проекций сил относительно точек A и C):

$$\begin{cases} M_A^R - Q \cdot a = 0, \\ M_A^R - R_A \cdot a = 0. \end{cases}$$

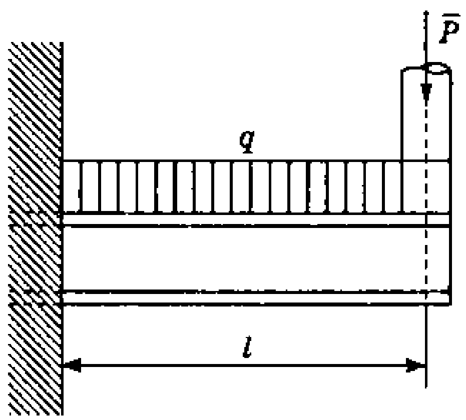
Решая полученные системы уравнений, получим один и тот же результат: $R_A = Q = 1{,}2$ кН; $M_A^R = Q \cdot a = 0{,}9$ кН·м.

С точки зрения теории пар сила $\overline{R}_A$ совместно с силой $\overline{Q}$ образует пару сил, равную и противоположно направленную моменту реактивной пары M_A^R.

Ответ: $R_A = 1{,}2$ кН; $M_A^R = 0{,}9$ кН·м.

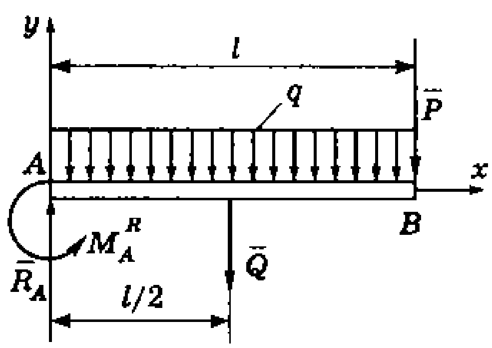
Задача 3.14

Горизонтальная балка, поддерживающая балкон, подвергается действию равномерно распределенной нагрузки интенсивности $q = 2$ кН/м. На балку у свободного конца передается нагрузка от колонны $P = 2$ кН. Расстояние оси колонны от стены $l = 1{,}5$ м. Определить реакции заделки.



Решение

Заменим равномерно распределенную нагрузку интенсивности $q = 2$ кН/м одной сосредоточенной силой $Q = ql = 3$ кН, приложенной в середине балки AB. На конце балки изобразим заданную активную силу $\overline{P}$, передаваемую колонной (см. рисунок).



В жесткой заделке A возникает реактивная сила $\overline{R}_A$ и реактивная пара сил M_A^R. Введем систему координат xAy и составим уравнения равновесия (для проекций на ось y и для моментов относительно точки A):

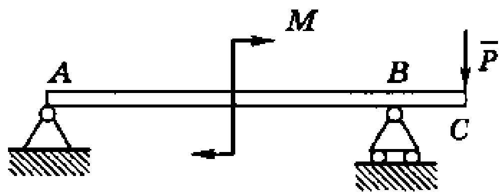
$$\begin{cases} R_A - Q - P = 0, \\ M_A^R - Q \cdot \dfrac{l}{2} - P \cdot l = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $R_A = Q + P = 5$ кН, $M_A^R = 2 \cdot 1{,}5 + 3 \cdot 0{,}75 = 5{,}25$ кН·м.

Ответ: $R_A = 5$ кН; $M_A^R = 5{,}25$ кН·м.

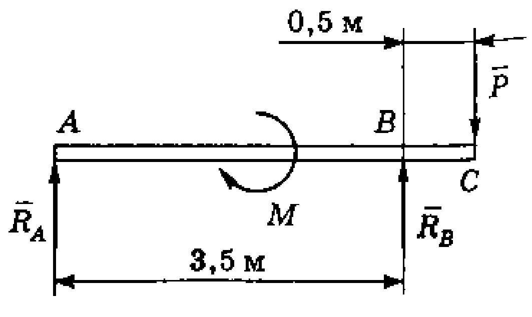
Задача 3.15

На консольную горизонтальную балку действует пара сил с моментом $M = 6$ кН·м, а в точке C — вертикальная нагрузка $P = 2$ кН. Длина пролета балки $AB = 3{,}5$ м, вынос консоли $BC = 0{,}5$ м. Определить реакции опор.



Решение

Изобразим на рисунке консольную балку AC (BC — консоль), в которой в результате внешнего воздействия силой $\overline{P}$ и парой сил интенсивностью M в опорах A и B возникнут реакции связей $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$, параллельные силе $\overline{P}$. Запишем уравнения равновесия (для моментов относительно точек A и B):



$$\begin{cases} -M + R_B \cdot 3{,}5 - P \cdot 4 = 0, \\ -R_A \cdot 3{,}5 - M - P \cdot 0{,}5 = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$R_B = \frac{M+4P}{3{,}5} = -\frac{6+4\cdot 2}{3{,}5} = 4 \text{ кН},$$

$$R_A = -\frac{M+0{,}5P}{3{,}5} = -\frac{6+0{,}5\cdot 2}{3{,}2} = -2 \text{ кН}.$$

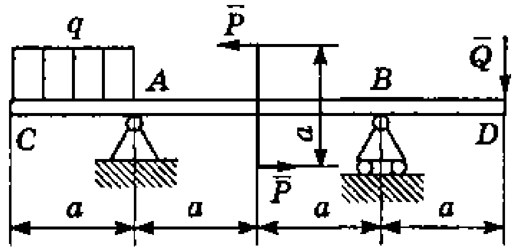
Знаки показывают, что реакция в опоре B направлена, как и изображено, — вверх, а реакция $\overline{R}_A$ — противоположно изображенной на рисунке, т.е. вниз.

Для проверки запишем уравнение равновесия в проекциях на вертикальную ось:

$$R_A + R_B - P = 0 \Rightarrow -2+4-2 = 0 \text{ — верно.}$$

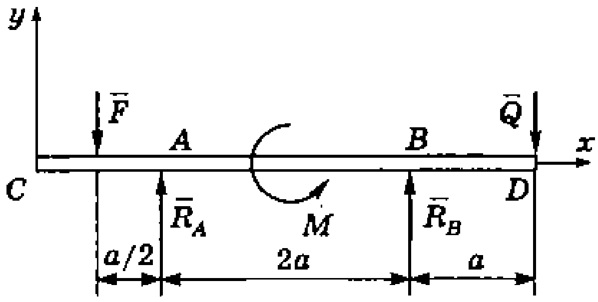
Ответ: $R_A = -2$ кН; $R_B = 4$ кН.

Задача 3.16



На двухконсольную горизонтальную балку действует пара сил ($\overline{P}$, $\overline{P}$), на левую консоль — равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q, а в точке D правой консоли — вертикальная нагрузка $\overline{Q}$. Определить реакции опор, если $P = 1$ кН, $Q = 2$ кН, $q = 2$ кН/м, $a = 0{,}8$ м.

Решение



Заменим равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q сосредоточенной силой $F = qa$, приложенной в середине левой консоли AC (см. рисунок). Пару сил заменим эквивалентной ей парой с моментом $M = Pa$, вращающим балку против часовой стрелки. Заменив связи их реакциями, в результате получим плоскую параллельную систему сил.

Введем систему координат xy и составим уравнения равновесия (для моментов относительно точки A и для проекций на ось y):

$$\begin{cases} F \cdot \dfrac{a}{2} + M + R_B \cdot 2a - Q \cdot 3a = 0, \\ -F + R_A + R_B - Q = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$R_B = \frac{3Qa - Pa - F\dfrac{a^2}{2}}{2a} = \frac{3Q - P - \dfrac{qa}{2}}{2} = 2{,}1 \text{ кН},$$

$$R_A = F + Q - R_B = qa + Q - R_B = 1{,}5 \text{ кН}.$$

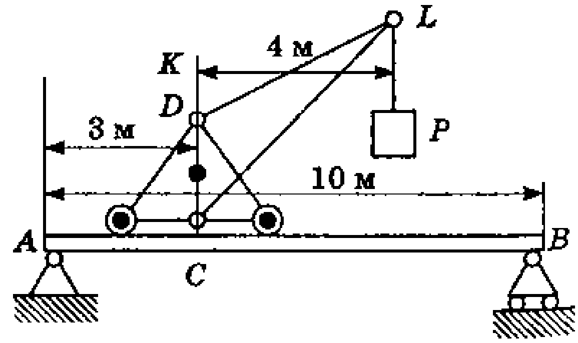
Для проверки запишем уравнение равновесия для моментов сил относительно точки D:

$$qa \cdot \frac{7}{2}a + Pa - R_A \cdot 3a - R_B a = 0;\ 0{,}8(5{,}6 + 1 - 4{,}5 - 2{,}1) = 0;\ 0 = 0.$$

Ответ: $R_B = 2{,}1$ кН; $R_A = 1{,}5$ кН.

Задача 3.17

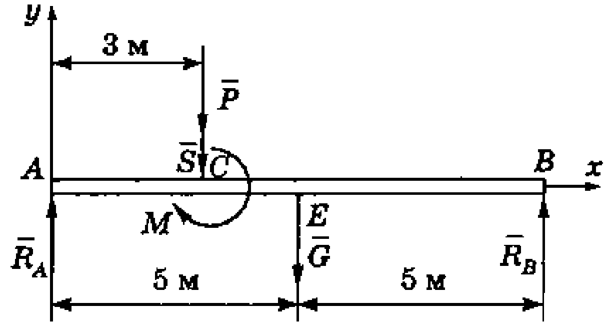
На балке AB длиной 10 м уложен путь для подъемного крана. Вес крана равен 50 кН и центр тяжести его находится на оси CD; вес груза P равен 10 кН; вес балки AB равен 30 кН; вылет крана KL = 4 м; расстояние AC = 3 м. Найти опорные реакции в точках A и B для такого положения крана, когда стрела крана DL находится в одной вертикальной плоскости с балкой AB.



Решение

Покажем на рисунке нагрузку, действующую на балку, и реакции связей.

Воздействие крана на балку передается в местах контакта его колес с балкой. Однако известно, что сила тяжести крана $\bar{S}$ лежит на прямой DC и поэтому ее можно приложить к балке в точке C. При приведении веса груза P к точке C следует добавить момент пары сил $M = P \cdot KL = 10 \cdot 4 = 40$ кНм. В результате на балку AB действуют активные параллельные силы $\bar{P}$ и $\bar{S}$ в точке C, сила тяжести $\bar{G}$ в середине пролета AB — в точке E. Заменяя связи в точках A и B их реакциями, получим плоскую параллельную систему сил. Запишем условия равновесия (для моментов сил относительно точек A и B):



$$\begin{cases} -(P+S)\cdot 3 - G\cdot 5 - M + R_B \cdot 10 = 0, \\ -R_A \cdot 10 + (P+S)\cdot 7 + G\cdot 5 - M = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$R_B = \frac{60\cdot 3 + 30\cdot 5 + 40}{10} = 37 \text{ кН},$$

$$R_A = \frac{60\cdot 7 + 30\cdot 5 - 40}{10} = 53 \text{ кН}.$$

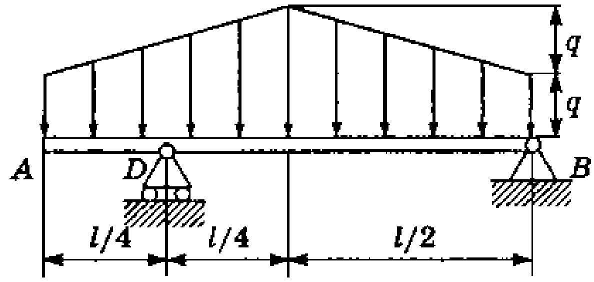
Проверка (уравнение равновесия для проекций на ось y):

$$R_A - P - S - G + R_B = 0, 53 - 10 - 50 - 30 + 37 = 0 \text{ — верно.}$$

О т в е т: $R_A = 53$ кН; $R_B = 37$ кН.

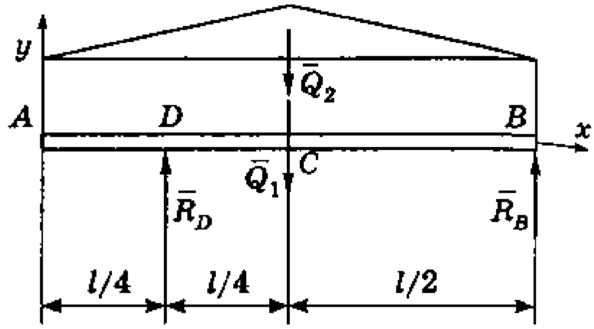
Задача 3.18

Балка AB длиной l м несет распределенную нагрузку, показанную на рисунке. Интенсивность нагрузки равна q Н/м на концах A и B балки и $2q$ Н/м в середине балки. Пренебрегая весом балки, найти реакции опор D и B.



Решение

Заменим распределенную нагрузку эквивалентной ей сосредоточенной силой $\overline{Q}$. В силу симметрии она приложена в середине пролета AB — точке C (см. рисунок). Представим:



$$\overline{Q} = \overline{Q}_1 + \overline{Q}_2,$$

где $\overline{Q}_1$ — суммарное усилие от прямоугольной нагрузки, $\overline{Q}_2$ — от треугольной. Численно они равны площадям соответствующих фигур (эпюр):

$$Q_1 = ql, \quad Q_2 = \frac{ql}{2} \Rightarrow Q = \frac{3ql}{2}.$$

Уравнения равновесия после отбрасывания связей и замены их реакциями $\overline{R}_D$ и $\overline{R}_B$ при действующей нагрузке Q запишем для моментов сил относительно точек D и B:

$$\begin{cases} -Q\dfrac{l}{4} + R_B\dfrac{3}{2}l = 0, \\ -R_D\dfrac{3}{4}l + Q\dfrac{l}{2} = 0. \end{cases}$$

Получим

$$R_B = \frac{Q}{3} = \frac{1}{2}ql \text{ Н}, \quad R_D = \frac{2}{3}Q = ql \text{ Н}.$$

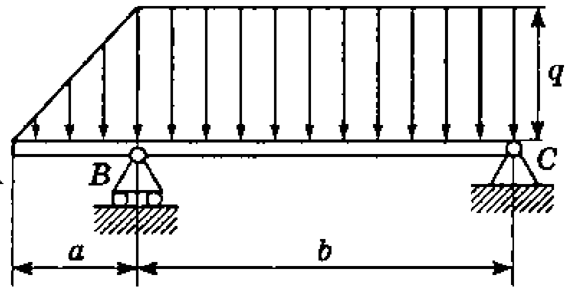
Проверка (уравнение равновесия в проекциях на ось y):

$$R_D - Q + R_B = 0; \quad ql - \frac{3}{2}ql + \frac{1}{2}ql = 0 \text{ — верно.}$$

Ответ: $R_B = \dfrac{1}{2}ql$ Н; $R_D = ql$ Н.

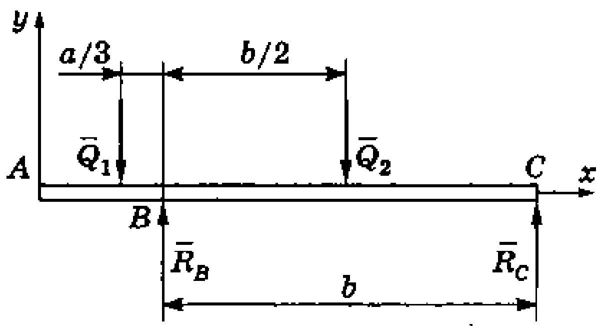
Задача 3.19

Горизонтальная балка AC, опертая в точках B и C, несет между опорами B и C равномерно распределенную нагрузку интенсивности q Н/м; на участке AB интенсивность нагрузки уменьшается по линейному закону до нуля. Найти реакции опор B и C, пренебрегая весом балки.



Решение

Равномерно распределенную на участке BC нагрузку заменим сосредоточенной силой $Q_2 = qb$, приложенной посредине пролета BC (см. рисунок). На участке AB распределенную по линейному закону нагрузку заменим эквивалентной силой Q_1,



равной площади соответствующего треугольника, т.е. $Q_1 = \frac{1}{2}qa$, и приложенной в его центре тяжести — на расстоянии $\frac{1}{3}a$ от точки B. Вводя систему координат xAy и заменяя связи силами реакций $\bar{R}_B$ и $\bar{R}_C$, составим для полученной плоской системы сил, приложенной к балке AB, уравнения равновесия (для моментов сил относительно точки B и для проекций сил на ось y):

$$\begin{cases} Q_1 \cdot \dfrac{a}{3} - Q_2 \cdot \dfrac{b}{2} + R_C \cdot b = 0, \\ -Q_1 + R_B - Q_2 + R_C = 0. \end{cases}$$

Заменяя Q_1 и Q_2 их значениями, найденными выше, из системы получим

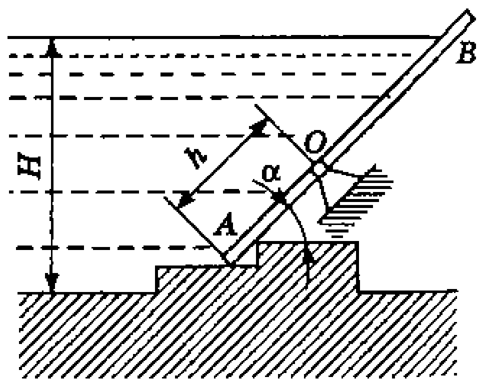
$$R_C = \frac{Q_2 \frac{b}{2} - Q_1 \frac{a}{3}}{b} = \frac{q\frac{b^2}{2} - q\frac{a^2}{6}}{b} = \frac{q}{6}\left(3b - \frac{a^2}{b}\right) \text{ Н}.$$

$$R_B = Q_1 + Q_2 - R_C = qb + \frac{1}{2}qa - \frac{1}{2}qb + \frac{1}{6}q\frac{a^2}{b} = \frac{q}{6}\left(3a + 3b + \frac{a^2}{b}\right).$$

Ответ: $R_B = \frac{q}{6}\left(3a + 3b + \frac{a^2}{b}\right)$ Н; $R_C = \frac{q}{6}\left(3b - \frac{a^2}{b}\right)$ Н.

Задача 3.20

Прямоугольный щит AB ирригационного канала может вращаться относительно оси O. Если уровень воды невысок, щит закрыт, но, когда вода достигает некоторого уровня H, щит поворачивается вокруг оси и открывает канал. Пренебрегая трением и весом щита, определить высоту H, при которой открывается щит.



Решение

Изобразим силы, которые действуют на щит, находящийся в закрытом (рис. 1) и открытом (рис. 2) положениях.

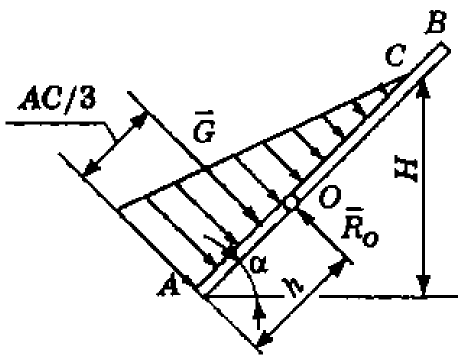


Рис. 1

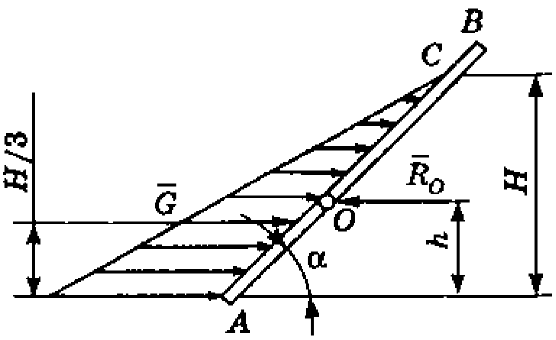


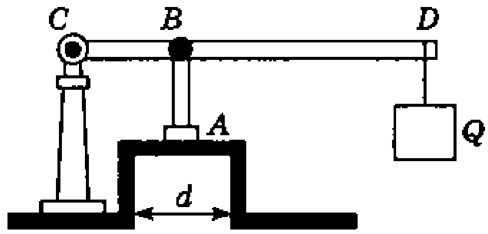
Рис. 2

Щит начнет поворачиваться относительно оси O, когда центр давления столба воды на него совпадет с точкой O, т.е. когда будет выполняться условие $\frac{1}{3}AC = \frac{1}{3}\frac{H}{\sin\alpha} \geq h \Rightarrow H \geq 3h\sin\alpha$ (для рис. 1) или $\frac{1}{3}H = h\sin\alpha$ (для рис. 2).

О т в е т: $H = 3h\sin\alpha$.

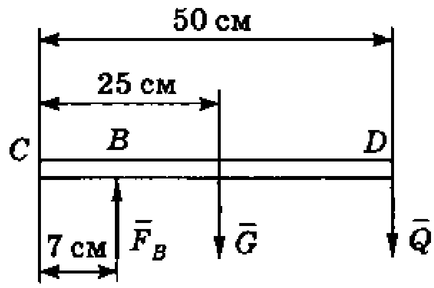
Задача 3.21

Предохранительный клапан A парового котла соединен стержнем AB с однородным рычагом CD длиной 50 см и весом 10 Н, который может вращаться вокруг неподвижной оси C; диаметр клапана $d = 6$ см, плечо $BC =$ $= 7$ см. Какой груз Q нужно подвесить к концу D рычага для того, чтобы клапан сам открывался при давлении в котле, равном 1100 кПа?



Р е ш е н и е

Покажем на рисунке силы, действующие на систему.



Вычислим действующее на рычаг CD со стороны клапана в точке B усилие, эквивалентное давлению $q = 1100$ кПа, по формуле

$$F_B = \frac{\pi d^2 q}{4}.$$

Открытие клапана соответствует повороту рычага CD в направлении против часовой стрелки. Это означает тот факт, что момент силы F_B относительно шарнира C по крайней мере равен по модулю сумме моментов сил $\overline{G}$ и $\overline{Q}$ относительно этого же шарнира. В результате приходим к уравнению

$$F_B \cdot 7 = G \cdot 25 + Q \cdot 50.$$

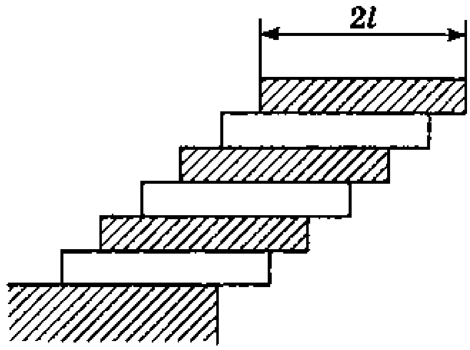
Следовательно,

$$Q = G \cdot \frac{25}{50} - \frac{\pi d^2 q}{4} \cdot \frac{7}{50} = 430 \text{ Н}.$$

Ответ: $Q = 430$ Н.

Задача 3.22

Несколько одинаковых однородных плит длиной $2l$ сложены так, что часть каждой плиты выступает над плитой нижележащей. Определить предельные длины выступающих частей, при которых плиты будут находиться в равновесии. (При решении складывается последовательно вес плит начиная с верхней.)



Решение

Покажем на рисунке силы, действующие на плиты.

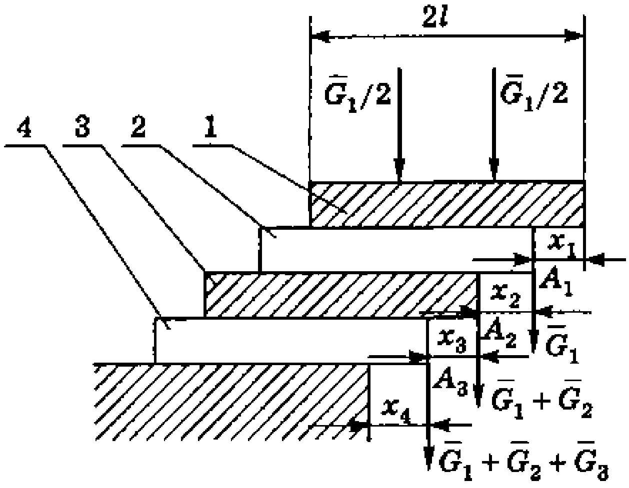
Для самой верхней плиты предельная длина выступающей части очевидно равна $x_1 = l$. При этом сила тяжести первой плиты на вторую плиту передастся в правом верхнем ребре, так как момент в этой точке A_1 от правой и левой половинок плиты 1 равен нулю. Аналогичные рассуждения для точки A_2 приводят к уравнению

$$-G_1 x_2 + G_2(l - x_2) = 0.$$

Так как $G_2 = G_1$, то $x_2 = \frac{l}{2}$.

Точка A_3:

$$-(G_1 + G_2)x_3 + G_3(l - x_3) = 0.$$



Так как $G_1=G_2=G_3$, то $x_3=\dfrac{l}{3}$.

Точка A_4:

$$-(G_1+G_2+G_3)x_4+G_4(l-x_4)=0.$$

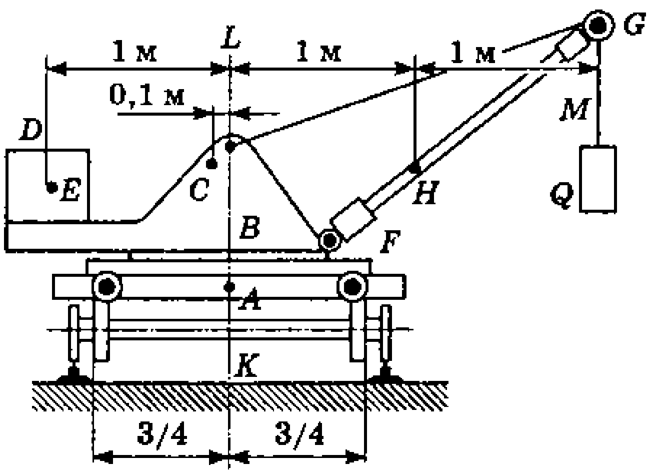
Так как $G_1=G_2=G_3=G_4$, то $x_4=\dfrac{l}{4}$.

Рассуждая аналогично далее, получим $x_n=\dfrac{l}{n}$, $n=1,2,3,4\ldots$.

Ответ: l; $\dfrac{l}{2}$; $\dfrac{l}{3}$; $\dfrac{l}{4}$ и т.д.

Задача 3.23

Железнодорожный кран опирается на рельсы, расстояние между которыми равно 1,5 м. Вес тележки крана равен 30 кН, центр тяжести ее находится в точке A, лежащей на линии KL пересечения плоскости симметрии тележки с плоскостью рисунка. Вес лебедки B крана равен 10 кН, центр тяжести ее лежит в точке C на расстоянии 0,1 м от прямой KL. Вес противовеса D равен 20 кН, центр тяжести его лежит в точке E на расстоянии 1 м от прямой KL. Вес укосины FG равен 5 кН, и центр тяжести ее находится в точке H на расстоянии 1 м от прямой KL. Вылет крана $LM=2$ м. Определить наибольший груз Q, который не опрокинет кран.

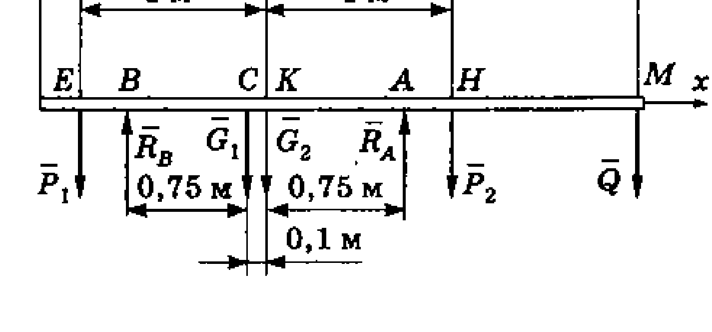


Решение

Все элементы железнодорожного крана расположены в одной плоскости — плоскости рисунка. Поэтому в этой же плоскости будут находиться и все действующие на кран силы (см. рисунок). Так как приложенные к крану, как абсолютно твердому телу, параллельные силы можно переносить вдоль их линий действия, то вертикальные размеры не имеют значения. Тогда в соответствии с условием задачи придем к более простой модели — объекту равновесия в виде балки под действием плоской параллельной системы сил (сюда включены и реакции связей).

Наличие груза Q может привести к опрокидыванию крана вокруг опоры (рельса) A. В предельном случае $R_B = 0$ и моменты сил, способствующие и удерживающие от этого опрокидывания, должны быть равны по модулю. В результате имеем уравнение

$$Q \cdot MA + P_2 \cdot HA = G_2 \cdot KA + G_1 \cdot CA + P_1 \cdot EA.$$



Из геометрических соображений найдем:

$$MA = 1{,}25 \text{ м},\ HA = 0{,}25 \text{ м},\ KA = 0{,}75 \text{ м},\ CA = 0{,}85 \text{ м},\ EA = 1{,}75 \text{ м}.$$

В результате получим

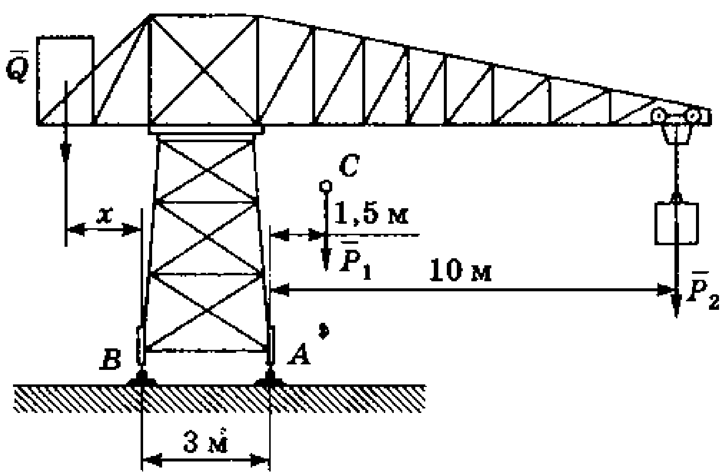
$$Q = \frac{30 \cdot 0{,}75 + 10 \cdot 0{,}85 + 20 \cdot 1{,}75 - 5 \cdot 0{,}25}{1{,}25} = 51{,}8 \text{ кН}.$$

Заметим, что полученное выше уравнение эквивалентно условию равенства нулю суммы моментов всех сил относительно точки A.

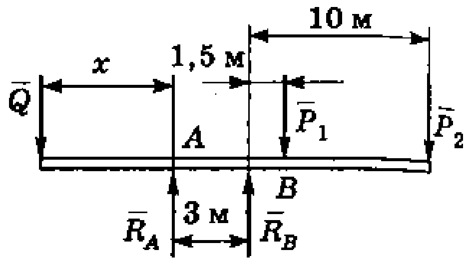
Ответ: $Q = 51{,}8$ кН.

Задача 3.24

Центр тяжести передвижного рельсового крана, вес которого (без противовеса) равен $P_1 = 500$ кН, находится в точке C, расстояние которой от вертикальной плоскости, проходящей через правый рельс, равно 1,5 м. Крановая тележка рассчитана на подъем груза $P_2 = 250$ кН; вылет ее равен 10 м. Определить наименьший вес Q и наибольшее расстояние x центра тяжести противовеса от вертикальной плоскости, проходящей через левый рельс B так, чтобы кран не опрокинулся при всех положениях тележки как нагруженной, так и ненагруженной. Собственным весом тележки пренебречь.



Решение



В данной задаче, как и в предыдущей, модель крана можно представить в виде балки, которая, как объект равновесия, нагружена параллельной плоской системой сил $\bar{Q}$, $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ (см. рисунок). После освобождения от связей к системе сил добавляются еще две неизвестные (параллельные заданным) силы реакций опор $\bar{R}_A$ и $\bar{R}_B$. Рассмотрим два случая.

Случай 1

Сила P_2 присутствует на схеме нагружения. Тогда возможно опрокидывание крана вокруг опоры B по часовой стрелке. Считая в предельном случае $R_A = 0$, имеем соотношение (для моментов сил относительно точки B)

$$Q(x+3) = P_1 \cdot 1{,}5 + P_2 \cdot 10. \qquad (1)$$

Случай 2

Кран не нагружен, т.е. $P_2 = 0$. Здесь возможно опрокидывание крана вокруг опоры A против часовой стрелки. Так как в предельном случае $R_B = 0$, то получим (уравнение равновесия для моментов сил относительно точки A)

$$Qx = P_1 \cdot 4{,}5. \qquad (2)$$

Решая уравнения (1) и (2) совместно, определим:

$$Q = \frac{500 \cdot 1{,}5 + 250 \cdot 10 + 500 \cdot 4{,}5}{3} = \frac{1000}{3} = 333 \text{ кН},$$

$$x = \frac{500 \cdot 4{,}5 \cdot 3}{1000} = 6{,}75 \text{ м}.$$

Заметим, что в первом случае

$$R_A = P_1 + P_2 + Q = 1083 \text{ кН},$$

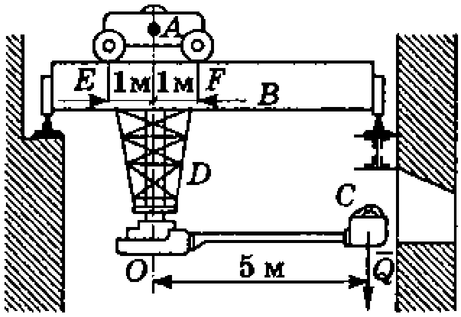
а во втором

$$R_A = P_1 + Q = 833 \text{ кН}.$$

Ответ: Q = 333 кН; x = 6,75 м.

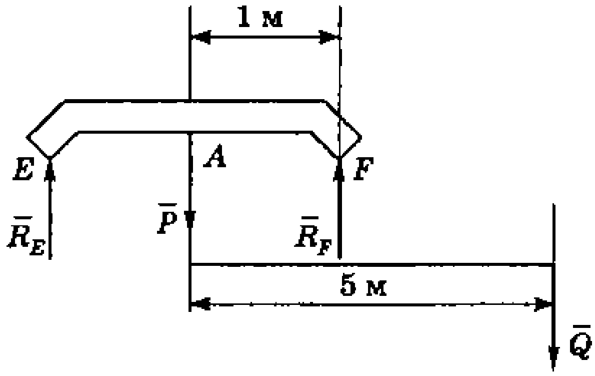
Задача 3.25

Кран для загрузки материалов в мартеновскую печь состоит из лебедки A, ходящей на колесах по рельсам, уложенным на балках передвижного моста B. К нижней части лебедки прикреплена опрокинутая колонна D, служащая для укрепления лопаты C. Какой вес P должна иметь лебедка с колонной, чтобы груз $Q = 15$ кН, помещенный на лопате на расстоянии 5 м от вертикальной оси OA лебедки, не опрокидывал ее? Центр тяжести лебедки расположен на оси OA; расстояние каждого колеса от оси OA равно 1 м.



Решение

В данном случае, в соответствии с представленной на рисунке моделью, опрокидывание возможно вокруг опоры (колеса) F. Тогда по аналогии с предыдущими задачами 3.23 и 3.24 составим соотношения:



$$R_E = 0; \quad M_F(\bar{P}) + M_F(\bar{Q}) \geq 0.$$

Следовательно,

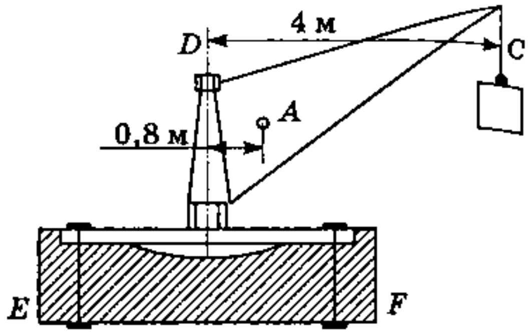
$$1 \cdot P \geq 15 \cdot (5-1),$$

$$P \geq 60 \text{ кН}.$$

Ответ: $P \geq 60$ кН.

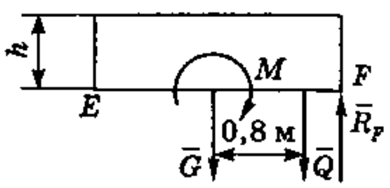
Задача 3.26

Подъемный кран установлен на каменном фундаменте. Вес крана $Q = 25$ кН и приложен в центре тяжести A на расстоянии 0,8 м от оси крана; вылет крана $CD = 4$ м. Фундамент имеет квадратное основание, сторона которого $EF = 2$ м; удельный вес кладки 20 кН/м^3. Вычислить наименьшую глубину фундамента, если кран предназначен для подъема тяжестей до 30 кН, причем фундамент должен быть рассчитан на опрокидывание вокруг ребра F.



Решение

В задаче переменной величиной является вес фундамента G, который непосредственно зависит от высоты h (см. рисунок). Причем



$$G = EF^2 \cdot h \cdot 20 \Rightarrow h = \frac{G}{4 \cdot 20}.$$

Вылет стрелы крана на расстояние 3 м от опоры F с грузом $P = 30$ кН заменим действующей на объект равновесия парой сил с моментом $M = 3 \cdot 30 = 90$ кН·м. Считая, что при опрокидывании сила реакции сосредоточена в точке F, получим (уравнение равновесия для моментов сил относительно точки F):

$$G \cdot 1 + Q \cdot 0{,}2 - M = 0.$$

Следовательно,

$$G = 90 - 25 \cdot 0{,}2 = 85 \text{ кН}.$$

Тогда

$$h = \frac{85}{80} = 1{,}06 \text{ м}.$$

Ответ: $h = 1{,}06$ м.

Задача 3.27

Магнитная стрелка подвешена на тонкой проволоке и установлена горизонтально в магнитном меридиане. Горизонтальные составляющие силы земного поля, действующие на полюсы стрелки в противоположных направлениях, равны каждая 0,02 мН, расстояние между полюсами 10 см. На какой угол нужно закрутить проволоку, чтобы стрелка составила угол 30° с магнитным меридианом, если известно, что для закручивания проволоки на угол 1° нужно приложить пару, момент которой равен 0,05 мН·см? (Момент закручивающей пары пропорционален углу закручивания.)

Решение

Представим на рисунке данные условия задачи.

Так как момент пары сил, закручивающей проволоку, пропорционален углу закручивания, т.е. изменяется по закону

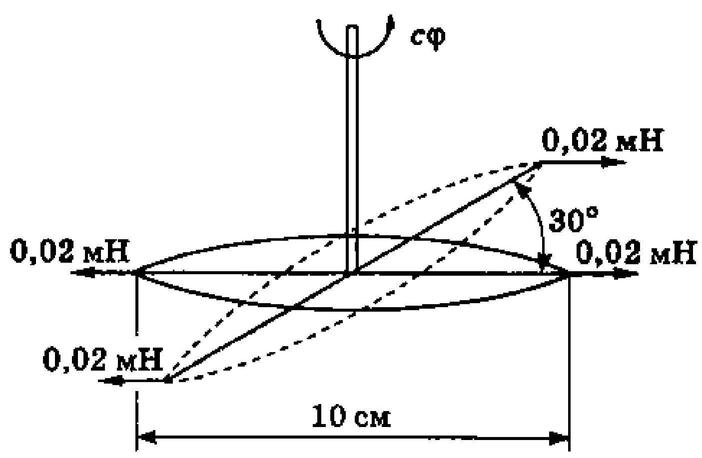
$$M = c\varphi,$$

то из условия закручивания на 1° определяем коэффициент пропорциональности:

$$c = \frac{0{,}05 \text{ мН·см}}{1^\circ} = 0{,}05 \ \frac{\text{мН·см}}{\text{град}},$$

и соотношение для вычисления величины M примет вид

$$M = 0{,}05\,\varphi.$$



Момент возникающей от поворота стрелки на 30° пары сил магнитного поля равен

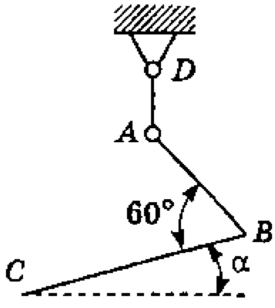
$$10 \sin 30^\circ \cdot 0{,}02 = 0{,}1 \text{ мН·см}.$$

Подставляя это значение в выражение для M, получим угол «раскручивания»: $0{,}1 = 0{,}05\varphi \Rightarrow \varphi = 2°$. В результате суммарный угол закручивания проволоки равен $30° + 2° = 32°$.

Ответ: 32°.

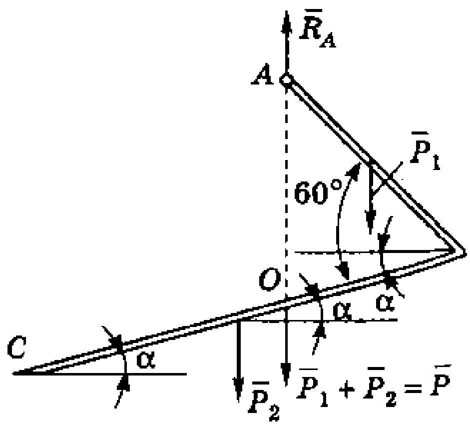
Задача 3.28

Два однородных стержня AB и BC одинакового поперечного сечения, из которых AB вдвое короче BC, соединенные своими концами под углом 60°, образуют ломаный рычаг ABC. У конца A рычаг подвешен на нити AD. Определить угол α наклона стержня BC к горизонту при равновесии рычага; поперечными размерами стержней пренебречь.



Решение

Покажем на рисунке силы, действующие на систему, и введем обозначения: $\overline{P}_1$ — сила тяжести участка AB, $\overline{P}_2$ — сила тяжести участка BC. Ввиду однородности ломаного рычага эти силы приложены в середине соответствующих участков. Если эти силы заменить одной $\overline{P} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2$, то в соответствии с аксиомой о равенстве двух сил она будет лежать на одной вертикали с силой реакции нити $\overline{R}_A$, проходящей через точку A. Следовательно, сумма моментов сил относительно точки A равна нулю:



$$-P_1 \frac{1}{2} AB\cos(60° - \alpha) + P_2\left[\frac{1}{2} BC\cos\alpha - AB\cos(60° - \alpha)\right] = 0.$$

Тогда, с учетом $BC = 2AB$ и $P_2 = 2P_1$, получим

$$4\cos\alpha - 5\cos(\alpha - 60°) = 0,$$

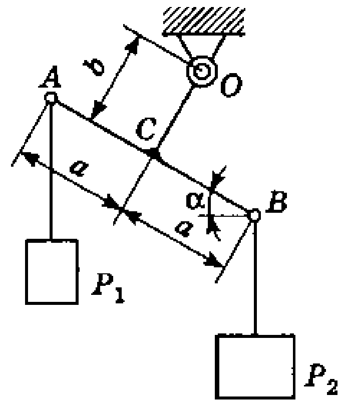
$$4\cos\alpha-\frac{5}{2}\cos\alpha-\frac{5\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=0,$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\frac{3}{2}\cos\alpha\Rightarrow \text{tg}\,\alpha=\frac{1}{5}\sqrt{3}\Rightarrow\alpha=\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)=19°5'.$$

Ответ: $\text{tg}\,\alpha=\frac{1}{5}\sqrt{3}$, $\alpha=19°5'$.

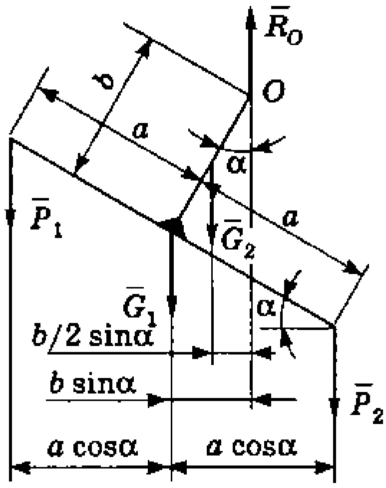
Задача 3.29

Два стержня AB и OC, вес единицы длины которых равен $2p$, скреплены под прямым углом в точке C. Стержень OC может вращаться вокруг горизонтальной оси O; $AC = CB = a$, $OC = b$.В точках A и B подвешены гири, вес которых P_1 и P_2; $P_2 > P_1$. Определить угол α наклона стержня AB к горизонту в положении равновесия.



Решение

Представим данные условия задачи на рисунке.



В этом случае $G_1=2p\cdot 2a=4pa$, $G_2=2pb$. Как и в предыдущей задаче, здесь достаточно составить одно уравнение для моментов сил относительно точки O:

$$-P_1(a\cos\alpha+b\sin\alpha)+4pab\sin\alpha+$$

$$+2pb\frac{b}{2}\sin\alpha-P_2(a\cos\alpha-b\sin\alpha)=0.$$

Разделив это равенство на $\cos\alpha$, получим

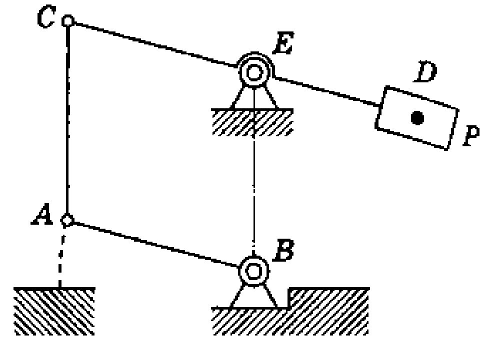
$$\text{tg}\,\alpha=\frac{a}{b}\frac{P_2-P_1}{P_1+P_2+p(4a+b)}.$$

Заметим, что при $P_1 = P_2$ имеем $\alpha = 0$.

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}\dfrac{P_2 - P_1}{P_1 + P_2 + p(4a+b)}$.

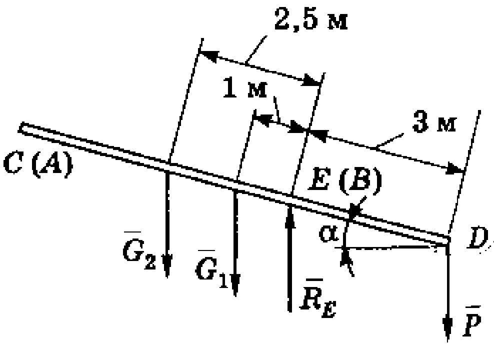
Задача 3.30

Подъемный мост AB поднимается посредством двух брусьев CD длиной 8 м, весом 4 кН, по одному с каждой стороны моста; длина моста AB = $= CE = 5$ м; длина цепи $AC = BE$; вес моста 30 кН и может считаться приложенным в середине AB. Рассчитать вес противовесов P, уравновешивающих мост.



Решение

Так как обе части моста должны быть уравновешены по отношению к опорам $B(E)$, то должно выполняться условие равновесия для моментов сил относительно точек E или B. В соответствии со схемой (см. рисунок) будем иметь



$$-2P\cdot 3\cos\alpha + G_2\cdot 2{,}5\cos\alpha + 2G_1\cdot 1\cdot\cos\alpha = 0.$$

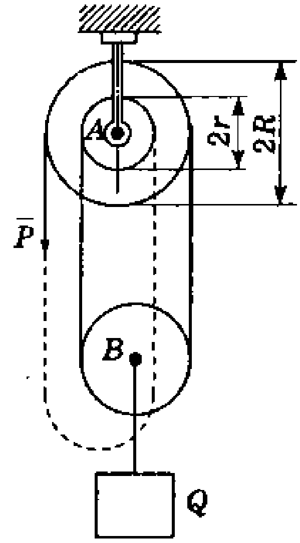
Здесь учитывалось, что имеется два бруса с противовесами. Получим

$$P = \frac{0{,}5G_2\cdot 2{,}5 + G_1}{3} = 13{,}83 \text{ кН}.$$

Ответ: $P = 13{,}83$ кН.

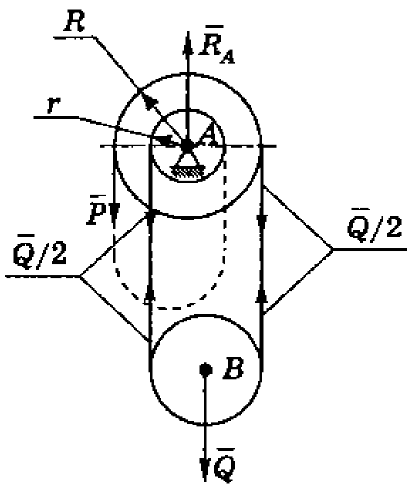
Задача 3.31

Главную часть дифференциального блока составляют два неизменно связанных между собой шкива A, ось которых подвешена к неподвижному крюку. Желоба их снабжены зубцами, захватывающими бесконечную цепь, образующую две петли, в одну из которых помещен подвижный блок *B*. К подвижному блоку подвешен поднимаемый груз *Q*, а к свисающей с большого блока ветви свободной петли приложено усилие *P*. Радиусы шкивов *A* суть *R* и *r*, причем $r < R$. Требуется найти зависимость усилия *P* от величины поднимаемого груза *Q* и определить это усилие в случае: $Q = 500$ Н, $R = 25$ см, $r = 24$ см. Трением пренебречь.



Решение

Покажем на рисунке силы, действующие на систему.



Вначале рассмотрим подвижный блок *B* с подвешенным к нему грузом $\overline{Q}$. Из условия его равновесия заключаем, что натяжения цепей равны $\overline{Q}/2$. На основании принципа равенства действия и противодействия заключаем, что на шкив *A* также действуют силы натяжения цепей, равные $\overline{Q}/2$. В результате шкив *A* находится в равновесии под действием параллельной плоской системы сил: двух сил $\overline{Q}/2$, искомой силы $\overline{P}$ и силы реакции $\overline{R}_A$. Условие равновесия этой системы сил запишем в виде

$$PR + \frac{Qr}{2} - \frac{QR}{2} = 0.$$

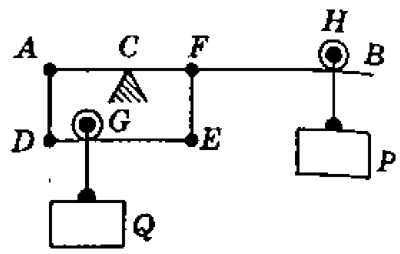
Следовательно,

$$P = \frac{1}{2}Q\left(1 - \frac{r}{R}\right) = 10 \text{ Н}.$$

Ответ: $P = \frac{1}{2}Q\left(1 - \frac{r}{R}\right) = 10$ Н.

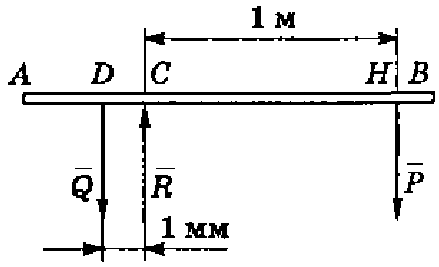
Задача 3.32

Дифференциальный рычаг состоит из стержня AB, имеющего неподвижную опорную призму в точке C, и перекладины DE, соединенной с рычагом AB посредством шарнирных серег AD и EF. Груз $Q = 1$ кН подвешен к перекладине в точке G посредством призмы. Расстояние между вертикалями, проведенными через точки C и G, равно 1 мм. Определить вес гири P, которую нужно подвесить к рычагу AB в точке H на расстоянии $CH = 1$ м для того, чтобы уравновесить груз Q. Трением пренебречь.



Решение

Силу $\overline{Q}$ перенесем вдоль линии действия и приложим к объекту равновесия — рычагу AB. Тогда полученная модель исходной задачи приобретет достаточно простой вид, показанный на рисунке.



Запишем уравнение равновесия для моментов сил относительно точки C:

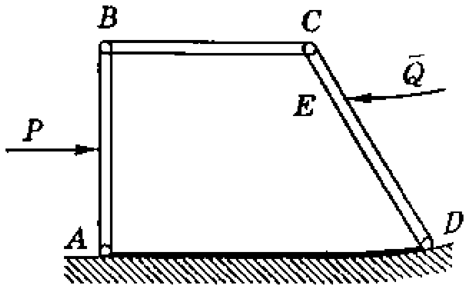
$$Q \cdot 0{,}001 - P \cdot 1 = 0.$$

Следовательно, $P = 0{,}001Q = 1$ Н.

Ответ: $P = 1$ Н.

Задача 3.33

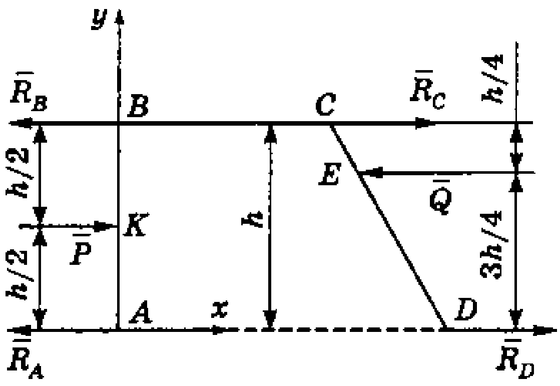
В шарнирном четырехзвенном механизме звено BC параллельно неподвижному звену AD. Звено $AB = h$ перпендикулярно AD. Посредине AB приложена горизонтальная сила $\overline{P}$. Какую горизонтальную силу $\overline{Q}$ следует приложить к звену CD в точке E,



если $CE = CD/4$, чтобы механизм был в равновесии? Найти реакцию в шарнире D. Весом звеньев пренебречь.

Решение

Представим данные условия задачи на рисунке.



Разобьем шарнирный четырехзвенник на три звена: AB, BC и CD. Рассмотрим поочередно равновесие каждого из звеньев.

Звено AB (уравнения равновесия для проекций сил на ось x и моментов сил относительно точки A):

$$\begin{cases} P - R_A - R_B = 0, \\ -P\dfrac{h}{2} + R_B h = 0 \end{cases} \Rightarrow R_A = R_B = \frac{1}{2}P.$$

Звено DC (уравнения равновесия для моментов сил относительно точек C и D):

$$\begin{cases} -Q\dfrac{h}{4} + R_D h = 0, \\ Q\dfrac{3}{4}h - R_C h = 0 \end{cases} \Rightarrow R_D = \frac{1}{4}Q; \quad R_C = \frac{3}{4}Q.$$

Звено BC (уравнение равновесия в проекциях на ось x):

$$R_B - R_C = 0 \Rightarrow R_B = R_C.$$

Заметим, что последнее соотношение очевидно в силу аксиомы о равенстве сил действия и противодействия.

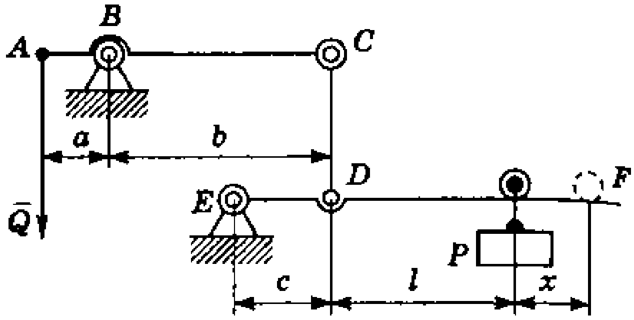
Окончательно найдем:

$$R_B = R_C \Rightarrow \frac{3}{4}Q = \frac{1}{2}P \Rightarrow Q = \frac{2}{3}P,$$

$$R_D = \frac{1}{4}Q = \frac{1}{4}\frac{2}{3}P = \frac{1}{6}P.$$

Ответ: $Q = \frac{2}{3}P$; $R_D = \frac{1}{6}P$ и направлена по AD вправо.

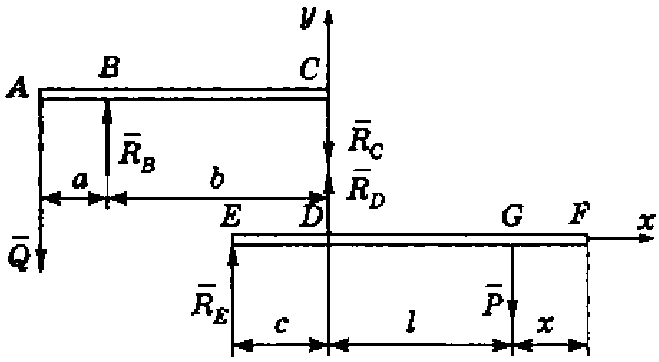
Задача 3.34



Для измерения больших усилий Q устроена система двух неравноплечных рычагов ABC и EDF, соединенных между собой тяжем CD. В точках B и E имеются неподвижные опоры. По рычагу EDF может передвигаться груз P весом 125 Н. Сила $\bar{Q}$, приложенная в точке A, уравновешивается этим грузом, помещенным на расстоянии l от точки D. На какую длину x надо передвинуть для сохранения равновесия груз P при увеличении силы Q на 10 кН, если указанные на рисунке размеры соответственно равны: a = 3,3 мм, b = 660 мм, c = 50 мм?

Решение

Покажем на рисунке силы, действующие на систему.



В данном случае исходную модель неравноплечных рычажных весов разобьем на части AC, CD, EF и запишем для каждой из них условия равновесия.

Рычаг ABC (уравнение равновесия для моментов сил относительно точки B):

$$Qa - bR_C = 0 \Rightarrow Q = \frac{b}{a} R_C. \tag{1}$$

Стержень CD (уравнение равновесия в проекциях на ось y):

$$R_D - R_C = 0 \Rightarrow R_D = R_C. \qquad (2)$$

Рычаг EDF (уравнение равновесия для моментов сил относительно точки E):

$$R_D c - P(l+c) = 0 \Rightarrow R_D = \frac{l+c}{c} P. \qquad (3)$$

Из (1), (2) и (3) найдем:

$$Q = \frac{b}{a} R_C = \frac{b}{a} R_D = \frac{b(c+l)}{ac} P.$$

Здесь считаем a, b, c — const. Пусть Q получает приращение ΔQ, а l — приращение x. Тогда на основе последнего соотношения получим уравнение

$$Q + \Delta Q = \frac{P(l + l + x)b}{ac},$$

или

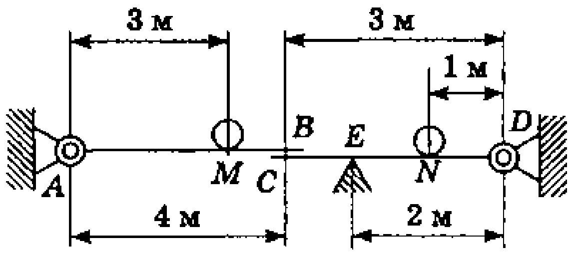
$$Q + \Delta Q = \frac{b(l+c)}{ac} P + \frac{Px}{ac} b.$$

Следовательно,

$$\Delta Q = \frac{Px}{ac} b \Rightarrow x = \frac{\Delta Q ac}{Pb}, \quad x = \frac{10000 \cdot 3{,}3 \cdot 50}{125 \cdot 660} = 20 \text{ мм} = 2 \text{ см}.$$

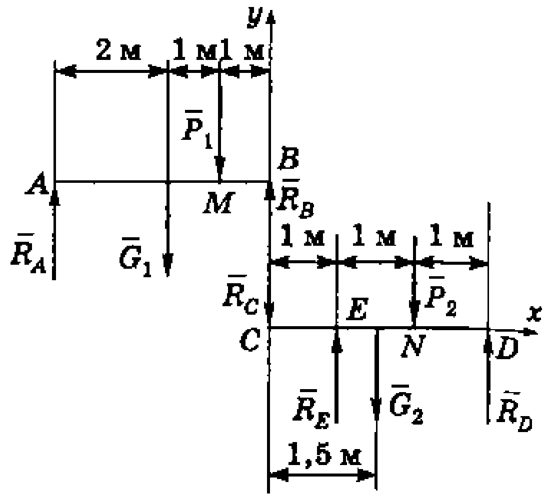
Ответ: $x = 2$ см.

Задача 3.35



Балка AB длиной 4 м, весом 2 кН может вращаться вокруг горизонтальной оси A и опирается концом B на другую балку CD длиной 3 м, весом 1,6 кН, которая подперта в точке E и соединена со стеной шарниром D. В точках M и N помещены грузы по 0,8 кН каждый. Расстояния: $AM = 3$ м, $ED = 2$ м, $ND = 1$ м. Определить опорные реакции.

Р е ш е н и е



Покажем на рисунке силы, действующие на систему.

Исходная составная конструкция AD состоит из двух частей: AB и CD. Рассмотрим равновесие балки AB и запишем соответствующие уравнения для моментов сил относительно точек A и B:

$$\begin{cases} -G_1 \cdot 2 - P_1 \cdot 3 + R_B \cdot 4 = 0, \\ -R_A \cdot 4 + G_1 \cdot 2 + P_1 \cdot 1 = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$R_B = \frac{3}{4} P_1 + \frac{1}{2} G_1 = 1{,}6 \text{ кН};$$

$$R_A = \frac{1}{4} P_1 + \frac{1}{2} G_1 = 1{,}2 \text{ кН}.$$

Рассмотрим равновесие балки CD и запишем соответствующие уравнения для моментов сил относительно точки C и проекций на ось y:

$$\begin{cases} R_E \cdot 1 - G_2 \cdot 1{,}5 - P_2 \cdot 2 + R_D \cdot 3 = 0, \\ -R_C + R_E - G_2 - P_2 + R_D = 0. \end{cases}$$

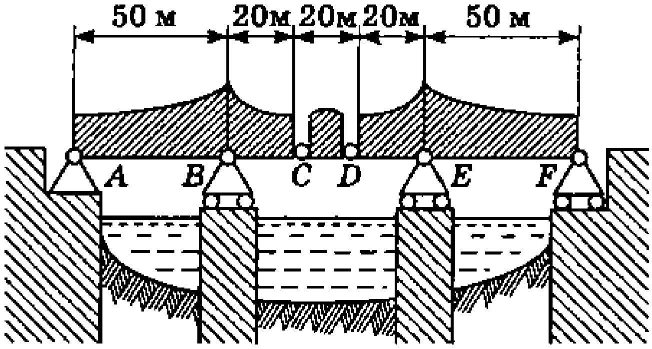
Учитывая, что $R_C = R_B = 1{,}6$ кН (сила действия равна силе противодействия), из последней системы определим

$$R_D = \frac{0{,}8 + 0{,}8 - 1{,}6}{2} = 0; \; R_E = R_C + G_2 + P_2 - R_D = 4 \text{ кН}.$$

О т в е т: $R_A = 1{,}2$ кН; $R_B = 1{,}6$ кН; $R_E = 4$ кН; $R_D = 0$.

Задача 3.36

Консольный мост состоит из трех частей: AC, CD и DF, из которых крайние опираются каждая на две опоры. Размеры соответственно равны: $AC = DF = 70$ м, $CD = 20$ м, $AB = EF = 50$ м. Погонная нагрузка на мост равна 60 кН/м. Найти давление на опоры A и B, производимые этой нагрузкой.



Решение

Исходя из условий задачи покажем на рис. 1 нагрузку на мост.

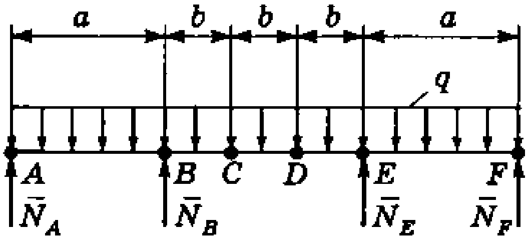


Рис. 1

Рассмотрим равновесие средней части моста — участка CD (рис. 2). В силу симметричности нагрузки легко установить, что

$$G = \frac{bq}{2}.$$

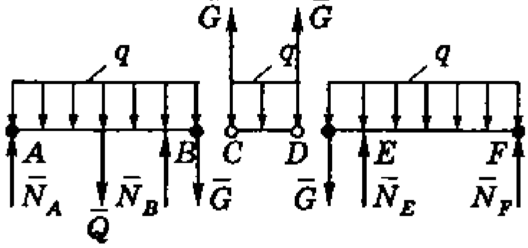


Рис. 2

Если заменить погонную нагрузку на результирующую силу $\bar{Q}$, то уравнения равновесия на участке AC имеют вид (для моментов сил относительно точек A и B):

$$\begin{cases} \dfrac{-q(a+b)^2}{2} + N_B a - G(a+b) = 0, \\ -N_A a + q\,\dfrac{(a^2 - b^2)}{4} - Gb = 0. \end{cases}$$

Здесь было учтено, что

$$M_B(\overline{Q}) = q(a+b)\frac{1}{2}(a-b) = \frac{q(a^2-b^2)}{2}.$$

Из первого уравнения системы, с учетом выражения для G, получим

$$N_B = \frac{q(a+b)^2}{2a} + \frac{bq}{2a}(a+b) = \frac{q(a+b)(a+2b)}{2a}, \quad N_B = \frac{60\cdot 70\cdot 90}{100} = 3780 \text{ кН},$$

из второго —

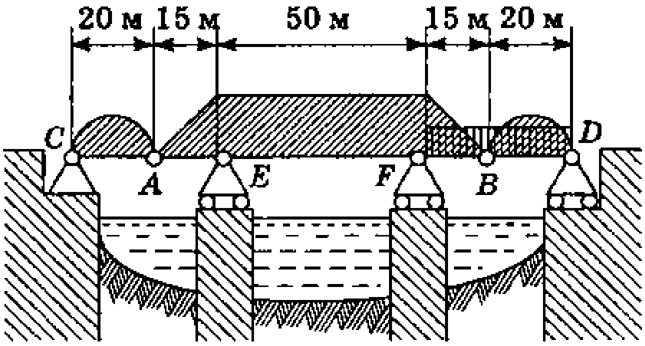
$$N_A = \frac{q(a^2-b^2)}{4a} - \frac{qb^2}{2a} = \frac{q(a^2-3b^2)}{4a} = \frac{60\cdot 1600}{100} = 1020 \text{ кН}.$$

Заметим, что в силу симметричности $N_E = N_B$ и $N_F = N_A$.

Ответ: $N_A = 1020$ кН; $N_B = 3780$ кН.

Задача 3.37

Консольный мост состоит из главной фермы AB и двух боковых ферм AC и BD. Собственный вес, приходящийся на погонный метр фермы AB, равен 15 кН, а для ферм AC и BD равен 10 кН. Определить реакции всех опор в тот момент, когда весь правый пролет FD занят поездом, вес которого можно заменить равномерно распределенной по пролету FD нагрузкой интенсивности 30 кН на погонный метр. Размеры соответственно равны: $AC = BD = 20$ м, $AE = BF = 15$ м, $EF = 50$ м.



Решение

Первоначально рассмотрим равновесие левой фермы моста — участка CA (рис. 2). В соответствии со схемой нагружения, показанной на рисунке, будем иметь:

$$R_C = R_A = \frac{Q_1}{2} = \frac{q_{AC}AC}{2} = \frac{10\cdot 20}{2} = 100 \text{ кН}.$$

Исходя из условий задачи покажем на рис. 1 задаваемую нагрузку.

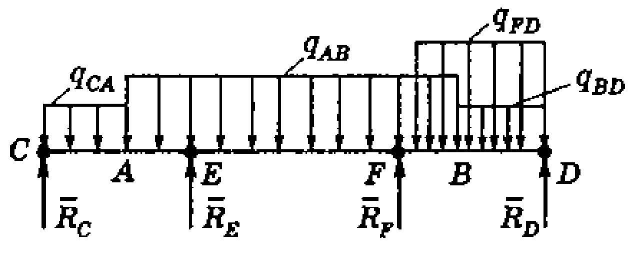


Рис. 1

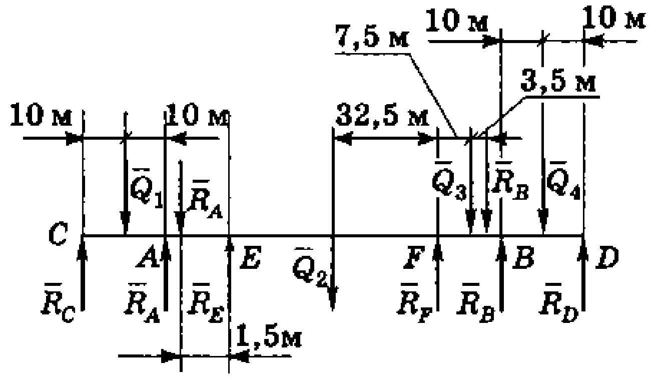


Рис. 2

Первая ферма моста — участок BD. Здесь

$$Q_4 = (q_{BD} + q_{FD})BD = 40\cdot 20 = 800 \text{ кН}.$$

$$R_B = R_D = \frac{Q_4}{2} = 400 \text{ кН}.$$

Теперь рассмотрим главную ферму моста — участок AB. На нее действуют:

1) найденные выше силы $\bar{R}_A$ и $\bar{R}_B$;

2) результирующая сила равномерно распределенной нагрузки интенсивности q_{AB}($Q_2 = q_{AB}AF = 15\cdot 65 = 975$ кн), приложенная посередине пролета AF;

3) результирующая равномерно распределенной нагрузки на участке FB — сила Q_3 ($Q_3 = (q_{AB} + q_{FD})FB = 45 \cdot 15 = 675$ кН), приложенная посередине пролета;

4) силы реакций связей $\overline{R}_E$ и $\overline{R}_F$.

Уравнения равновесия плоской параллельной системы сил на участке AB будут иметь вид (для моментов относительно точки E и в проекциях на вертикаль):

$$\begin{cases} R_A \cdot 15 - Q_2 \cdot 17{,}5 + R_F \cdot 50 - Q_3 \cdot 57{,}5 - R_B \cdot 65 = 0, \\ -R_A + R_E - Q_2 + R_F - Q_3 - R_B = 0. \end{cases}$$

Получим

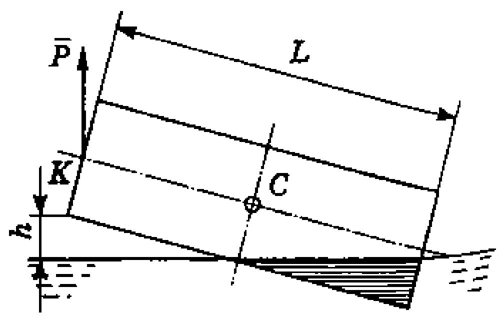
$$R_F = \frac{975 \cdot 17{,}5 + 675 \cdot 57{,}5 + 400 \cdot 65 - 100 \cdot 15}{50} = 1607{,}5 \text{ кН},$$

$$R_E = Q_2 + Q_3 + R_B + R_A - R_F =$$

$$= 975 + 675 + 400 + 100 - 1607{,}5 = 542{,}5 \text{ кН}.$$

Ответ: $R_A = R_C = 100$ кН; $R_B = R_D = 400$ кН; $R_E = 542{,}5$ кН; $R_F = 1607{,}5$ кН.

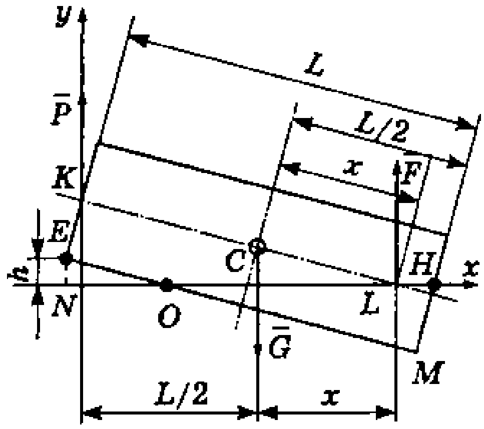
Задача 3.38



Для осмотра на плаву днища понтона водоизмещением D = 2000 кН его носовая оконечность поднимается краном грузоподъемностью P = 750 кН. Принимая удельный вес воды γ = 10 кН/м3, определить наибольший подъем днища над уровнем воды h, если понтон имеет форму прямоугольного параллелепипеда длиной L = 20 м, шириной B = 10 м. Центр тяжести понтона C лежит посередине его длины. Точка K крепления троса подъемного крана и центр тяжести C находятся на одинаковом расстоянии от днища понтона. (Водоизмещение судна численно равно его весу.)

Р е ш е н и е

В соответствии с законом Архимеда, на понтон действует выталкивающая сила $\overline{F}$ (см. рисунок). Условия равновесия действующих на понтон параллельных сил P, G, F запишем для моментов этих сил относительно точки K и в проекциях на ось y:



$$\begin{cases} -G\dfrac{L}{2}+F(x+\dfrac{L}{2})=0, \\ P-G+F=0. \end{cases}$$

Решив систему, получим

$$F=G-P=1250 \text{ кН},$$

$$x=\frac{G-F}{F}\frac{L}{2}=6 \text{ м}.$$

Так как центр тяжести вытесненной воды находится на расстоянии 1/3 от основания соответствующего треугольника, то

$$OM=3\left(\frac{L}{2}-x\right)=12 \text{ м}.$$

Из подобия треугольников EON и OMH следует соотношение

$$\frac{HM}{h}=\frac{OM}{ON} \Rightarrow HM=\frac{12h}{\sqrt{8^2-h^2}}.$$

Объем вытесненной воды равен

$$V=\frac{1}{2}OM\cdot HM\cdot B.$$

Ее вес равен F, следовательно,

$$V\gamma=F,$$

или

$$\frac{1}{2} OM \cdot HM \cdot B \cdot \gamma = F,$$

$$\frac{1}{2} \cdot 12 \frac{12h}{\sqrt{64-h^2}} 10 \cdot 10 = 1250,$$

$$144^2 h^2 = 625(64-h^2),$$

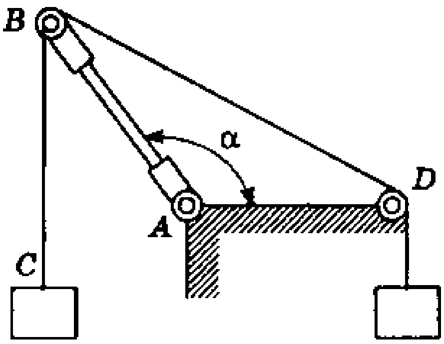
$$h^2 = \frac{40\,000}{21\,361} \Rightarrow h \approx 1{,}368 \text{ м}.$$

Ответ: $h = 1{,}368$ м.

4. Произвольная плоская система сил

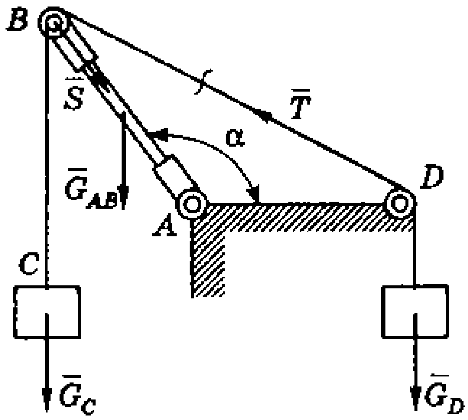
Задача 4.1

К однородному стержню AB, который может вращаться вокруг шарнира A, подвешена в точке B на веревке гиря C весом 10 Н. От конца стержня B протянут трос, перекинутый через блок D и поддерживающий гирю весом 20 Н. Найти величину угла $BAD = \alpha$, при котором стержень будет находиться в положении равновесия, зная, что $AB = AD$ и вес стержня 20 Н. Трением на блоке пренебречь.



Р е ш е н и е

Изобразим на рисунке все заданные силы. Натяжение $\bar{T}$ нити BD равно по модулю $\bar{G}_D$; $\bar{S}$ — усилие в стержне AB. Имеем произвольную плоскую систему сил. Для определения угла α достаточно составить уравнение моментов относительно точки A:



$$G_{AB}\frac{AB}{2}\cos(180^\circ-\alpha)+$$
$$+\,G_C AB\cos(180^\circ-\alpha)-$$
$$-\,G_D AB\sin\frac{180^\circ-\alpha}{2}=0.$$

Обозначим $180^\circ-\alpha=\beta$, тогда уравнение упростится до вида

$$\cos\beta+\cos\beta-2\sin\frac{\beta}{2}=0,$$

или

$$2\cos^2\beta+\cos\beta=1,\ \text{так как}\ \sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}.$$

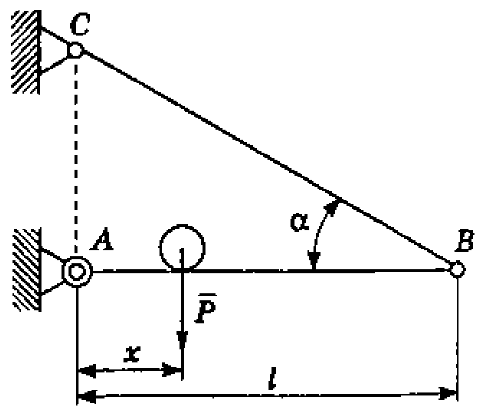
Решим квадратное уравнение

$$\cos\beta_{1,2}=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}},\quad \cos\beta_1=-1,\quad \cos\beta_2=\frac{1}{2},\quad \alpha=120^\circ.$$

Ответ: $\alpha=120^\circ$

Задача 4.2

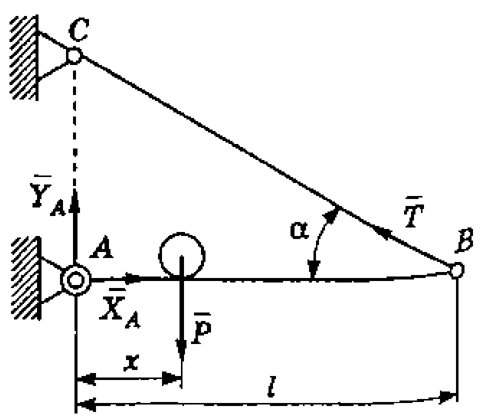
Горизонтальная балка крана, длина которой равна l, у одного конца A укреплена шарнирно, а у другого конца B подвешена к стене посредством тяги BC, угол наклона которой к горизонту равен α. По балке может перемещаться груз $\overline{P}$, положение которого определяется переменным расстоянием x до шарнира A. Определить натяжение T тяги BC в зависимости от положения груза. Весом балки пренебречь.



Решение

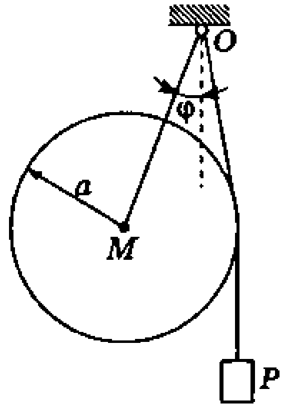
Изобразим на рисунке действующие силы, при этом отбросим связи, заменяя их действие реакциями связей ($\overline{R}_A=\overline{X}_A+\overline{Y}_A$). Составим уравнение равновесия балки AB для моментов сил относительно точки A:

$$-Px+T\sin\alpha\cdot l=0\Rightarrow T=\frac{Px}{l\sin\alpha}.$$



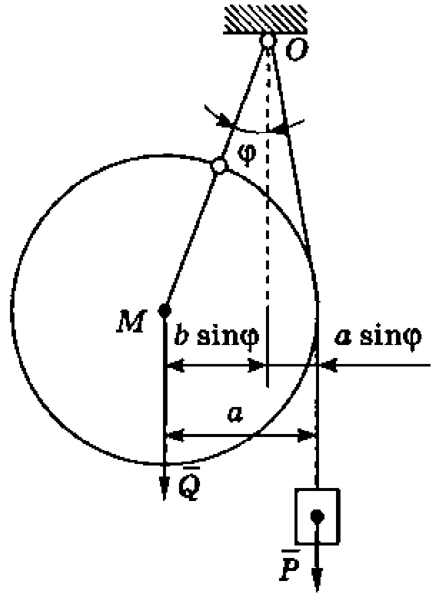
Ответ: $T=\dfrac{Px}{l\sin\alpha}$.

Задача 4.3



Однородный шар весом Q и радиусом a и гиря весом P подвешены на веревках в точке O, как показано на рисунке. Расстояние $OM = b$. Определить, какой угол φ образует прямая OM с вертикалью при равновесии.

Решение



Геометрические параметры задачи указаны на рисунке.

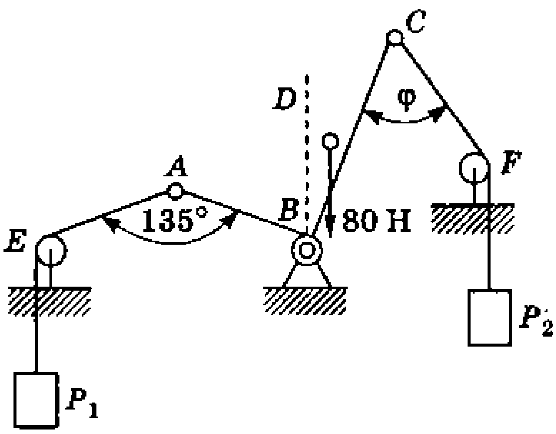
Составим уравнение равновесия для моментов сил относительно точки O:

$$Qb\sin\varphi - P(a - b\sin\varphi) = 0,$$

$$\sin\varphi = \frac{a}{b}\frac{P}{P+Q}.$$

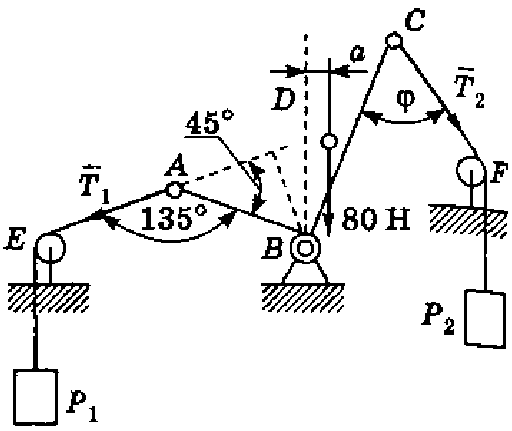
Ответ: $\sin\varphi = \dfrac{a}{b}\dfrac{P}{P+Q}$.

Задача 4.4



Ломаный рычаг ABC, имеющий неподвижную ось B, весит 80 Н; плечо $AB = 0{,}4$ м, плечо $BC = 1$ м, центр тяжести рычага находится на расстоянии 0,212 м от вертикальной прямой BD. В точках A и C привязаны веревки, перекинутые через блоки E и F и натягиваемые гирями весом $P_1 = 310$ Н и $P_2 = 100$ Н. Пренебрегая трением на блоках, определить угол $BCF = \varphi$ в положении равновесия, если угол $BAE = 135°$.

Решение



Покажем на рисунке геометрические параметры задачи.

Рассуждая аналогично предыдущей задаче, составим уравнение равновесия для моментов сил относительно точки B:

$$T_1 AB \sin 45° - 80a - T_2 BC \sin\varphi = 0,$$

$$\sin\varphi = \frac{310 \cdot 0,4 \cdot 0,707 - 80 \cdot 0,212}{100 \cdot 1} =$$

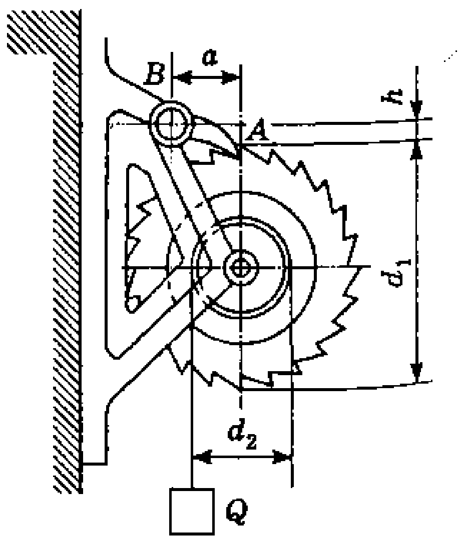
$$= \frac{87,668 - 16,96}{100} = 0,707.$$

Последнее уравнение имеет два решения:

$$\varphi_1 = 45°, \quad \varphi_2 = 135°.$$

Ответ: $\varphi_1 = 45°$; $\varphi_2 = 135°$.

Задача 4.5



Лебедка снабжена храповым колесом диаметром d_1, с собачкой A. На барабан диаметром d_2, неподвижно скрепленный с колесом, намотан трос, поддерживающий груз Q. Определить давление R на ось B собачки, если дано: Q = 50 Н, d_1 = = 420 мм, d_2 = 240 мм, h = 50 мм, a = = 120 мм. Весом собачки пренебречь.

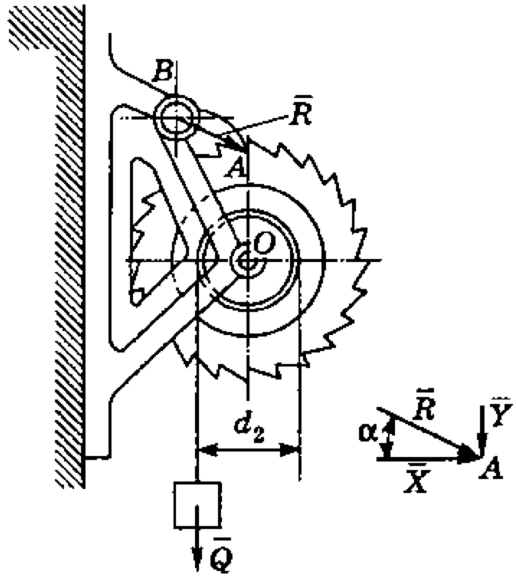
Решение

Покажем на рисунке силы, действующие на систему.

Составим уравнение равновесия для моментов сил относительно точки O:

$$Q\frac{d_2}{2} - X\frac{d_1}{2} = 0 \Rightarrow X = \frac{Qd_2}{d_1}.$$

$$R = \frac{X}{\cos\alpha}.$$



Поскольку $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}$,

то

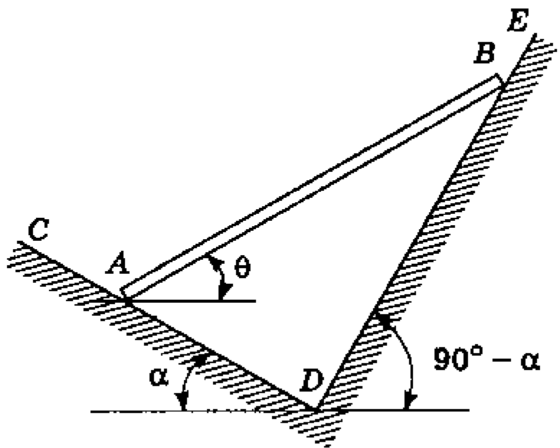
$$R = \frac{Qd_2\sqrt{a^2+h^2}}{d_1 a} =$$

$$= \frac{50 \cdot 240}{420} \frac{\sqrt{120^2+50^2}}{120} = 31\ \text{Н}.$$

Ответ: $R = Q\dfrac{d_2}{d_1}\dfrac{\sqrt{a^2+h^2}}{a} = 31$ Н.

Задача 4.6

Однородная балка AB весом P опирается на две гладкие наклонные прямые CD и DE, находящиеся в вертикальной плоскости; угол наклона первой из них к горизонту равен α, второй — $90° - \alpha$. Найти угол θ наклона балки к горизонту в положении равновесия и давления ее на опорные прямые.



Решение

Покажем на рисунке силы, действующие на балку.

Составим уравнения равновесия в проекциях на оси x и y и для моментов относительно точки A:

$$\begin{cases} N_A - P\cos\alpha = 0, \\ N_B - P\sin\alpha = 0, \\ -P\dfrac{AB}{2}\cos\theta + N_B\sin(\alpha+\theta) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} N_A = P\cos\alpha, \\ N_B = P\sin\alpha, \\ -P\dfrac{AB}{2}\cos\theta + N_B\cos\alpha \cdot AB\sin\theta + N_B\sin\alpha \cdot AB\cos\theta = 0. \end{cases}$$

Преобразовав последнее уравнение системы, получим

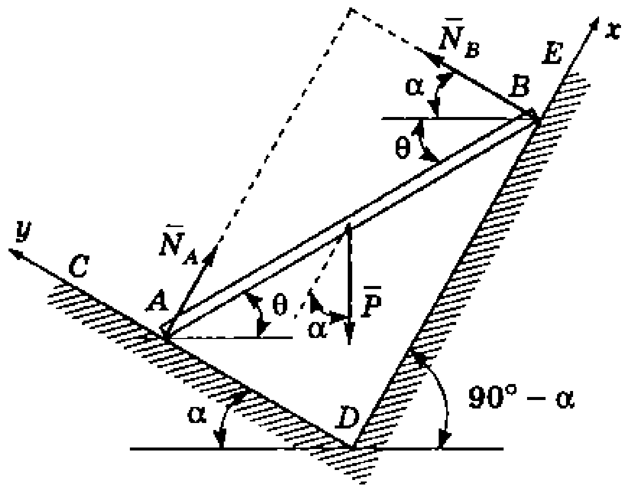
$$-\frac{P}{2}\cos\theta + P\sin\alpha \times$$

$$\times\,(\cos\alpha \cdot \sin\theta + \sin\alpha\cos\theta) = 0,$$

$$-\frac{1}{2} + \sin\alpha(\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\theta + \sin\alpha) = 0,$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\frac{1}{2} - \sin^2\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{1 - 2\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha} =$$

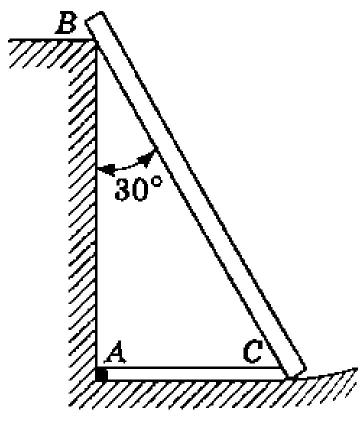
$$= \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha.$$



О т в е т: $N_A = P\cos\alpha$; $N_B = P\sin\alpha$; $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{ctg} 2\alpha$, $\theta = 90° - 2\alpha$ при $\alpha \le 45°$.

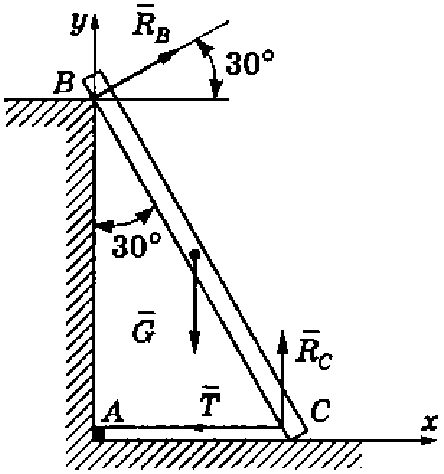
Задача 4.7

Однородная балка весом 600 Н и длиной 4 м опирается одним концом на гладкий пол, а промежуточной точкой B — на столб высотой 3 м, образуя с вертикалью угол 30°. Балка удерживается в таком положении веревкой AC, протянутой по полу. Пренебрегая трением, определить натяжение веревки T и реакции R_B столба и R_C пола.



Решение

Покажем на рисунке силы, действующие на балку, и реакции.



Заметим, что

$$BC = \frac{AB}{\cos 30^\circ}.$$

Для полученной плоской системы сил составим уравнения равновесия (в проекциях на оси x и y и для моментов относительно точки C):

$$\begin{cases} -T + R_B \cos 30^\circ = 0, \\ R_B \cos 60^\circ - G + R_C = 0, \\ -R_B \dfrac{AB}{\cos 30^\circ} + G\dfrac{BC}{2}\cos 60^\circ = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получим:

$$R_B = \frac{G \cdot BC \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 30^\circ}{2AB} = \frac{600 \cdot 4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}866}{2 \cdot 3} = 173{,}2 \text{ Н};$$

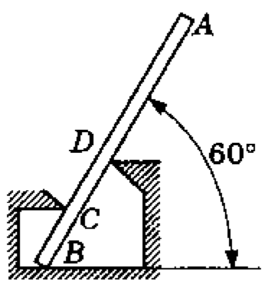
$$R_C = G - R_B \cos 60^\circ = 600 - 173{,}2 \cdot 0{,}5 = 513{,}4 \text{ Н}.$$

$$T = R_B \cos 30^\circ = 173{,}2 \cdot 0{,}866 = 149{,}99 \text{ Н}.$$

Ответ: T = 149,99 Н; R_B = 173,2 Н; R_C = 513,4 Н.

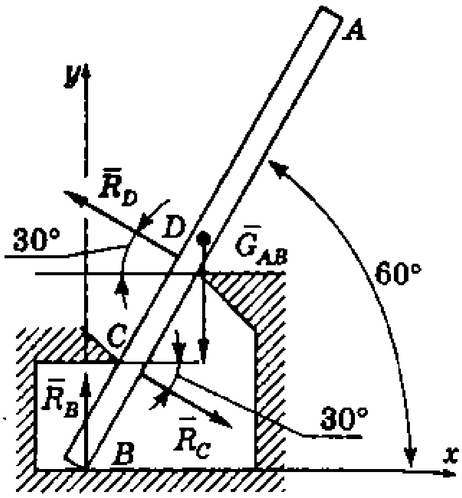
Задача 4.8

Однородная балка AB весом 200 Н опирается на гладкий горизонтальный пол в точке B под углом 60° и, кроме того, поддерживается двумя опорами C и D. Определить реакции опор в точках B, C и D, если AB = 3 м, CB = 0,5 м, BD = 1 м.



Решение

Изобразим на рисунке заданную силу и реакции связей и составим три уравнения равновесия (в проекциях на оси x и y и для моментов относительно точки B):



$$\begin{cases} R_C\cos 30^\circ - R_D\cos 30^\circ = 0, \\ R_B - G_{AB} + R_D\cos 60^\circ - R_C\cos 60^\circ = 0, \\ -R_C\cdot BC - G_{AB}\cdot\dfrac{AB}{2}\cos 60^\circ + R_D\cdot BD = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует $R_C = R_D$, поэтому из второго уравнения системы получим

$$R_B = G_{AB} = 200\text{ Н},$$

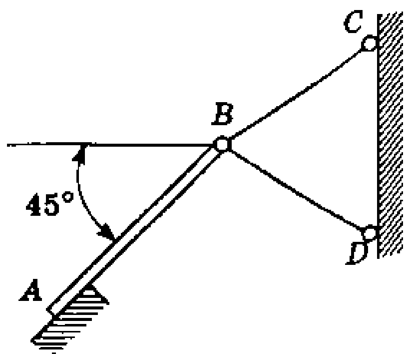
а из третьего —

$$0{,}5R_C = 200\cdot 1{,}5\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow R_C = \frac{150}{0{,}5} = 300\text{ Н}.$$

Ответ: $R_C = R_D = 300$ Н; $R_B = 200$ Н.

Задача 4.9

Однородная плита AB весом $P = 100$ Н свободно опирается в точке A и удерживается под углом 45° к горизонту двумя стержнями BC и BD. BCD — равносторонний треугольник. Точки C и D лежат на вертикальной прямой CD. Пренебрегая весом стержней и считая крепления в точках B, C и D шарнирными, определить реакцию опоры A и усилия в стержнях.

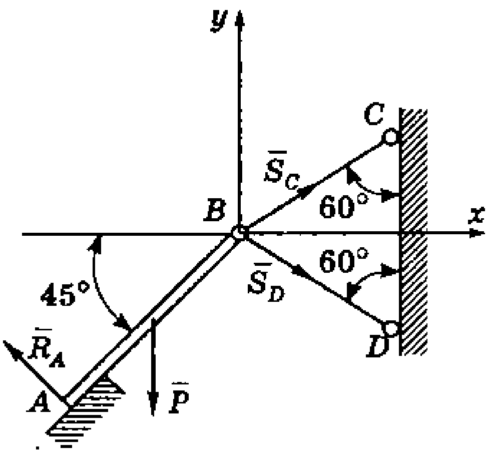


Решение

Покажем на рисунке действующие силы и реакции.

Составим уравнения равновесия (для проекций сил на оси x и y и для моментов относительно точки B):

$$\begin{cases} -R_A\cos 45° + S_C\cos 30° + S_D\cos 30° = 0, \\ -P + R_A\cos 45° + S_C\cos 60° - S_D\cos 60° = 0, \\ P\dfrac{AB}{2}\cos 45° - R_A\cdot AB = 0. \end{cases}$$



Из третьего уравнения системы вычислим

$$R_A = \frac{100\cdot 0{,}707}{2} = 35{,}4 \text{ Н}.$$

Сложив два первых уравнения системы, получим

$$-P + S_C(\cos 30° + \cos 60°) +$$
$$+S_D(\cos 30° - \cos 60°) = 0,$$

$$S_C = \frac{P - S_D(\cos 30° - \cos 60°)}{\cos 30° + \cos 60°}.$$

Подставим S_C в первое уравнение системы:

$$-R_A\cos 45° + \frac{P - S_D(\cos 30° - \cos 60°)}{\cos 30° + \cos 60°}\cos 30° + S_D\cos 30° = 0.$$

Найдем S_D:

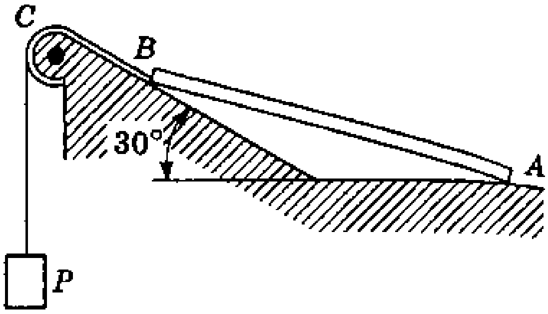
$$S_D = \frac{R_A\cos 45°(\cos 30° + \cos 60°) - P\cos 30°}{2\cos 30°\cos 60°} = -60{,}6 \text{ Н}.$$

$$S_C = \frac{100 + 60{,}6(0{,}866 - 0{,}5)}{0{,}866 + 0{,}5} = \frac{100 + 60{,}6\cdot 0{,}366}{1{,}366} = 89{,}5 \text{ Н}.$$

Ответ: R_A = 35,4 Н; S_C = 89,5 Н; S_D = −60,6 Н.

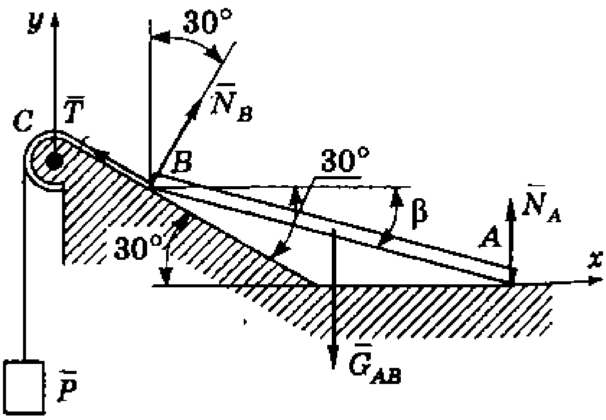
Задача 4.10

Однородный стержень AB весом 100 Н опирается одним концом на гладкий горизонтальный пол, другим — на гладкую плоскость, наклоненную под углом 30° к горизонту. У конца B стержень поддерживается веревкой, перекинутой через блок C и несущей груз P; часть веревки BC параллельна наклонной плоскости. Пренебрегая трением на блоке, определить груз P и давления N_A и N_B на пол и на наклонную плоскость.



Решение

Покажем на рисунке действующие силы и реакции.



Составим уравнения равновесия стержня (для проекций сил на оси x и y и моментов относительно точки B), учитывая, что $T = P$:

$$\begin{cases} -P\cos 30^\circ + N_B \sin 30^\circ = 0, \\ P\sin 30^\circ + N_B \cos 30^\circ - G_{AB} = 0, \\ -G_{AB}\dfrac{AB}{2}\cos\beta + N_A AB\cos\beta = 0. \end{cases}$$

Из третьего уравнения системы вычислим

$$N_A = \frac{G_{AB}}{2} = 50 \text{ Н}.$$

Решая совместно первые два уравнения системы, получим

$$N_B = \frac{P\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = P\operatorname{ctg} 30^\circ = P\sqrt{3},$$

$$P\sin 30^\circ + N_A\sqrt{3}\cos 30^\circ + N_A - G_{AB} = 0,$$

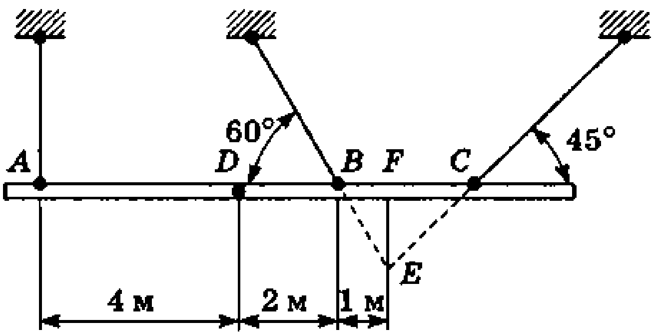
$$P = \frac{G_{AB} - N_A}{\sin 30^\circ + \sqrt{3}\cos 30^\circ} = \frac{100-50}{0{,}5+1{,}5} = \frac{50}{2} = 25 \text{ Н},$$

$$N_B = 25\cdot\sqrt{3} = 43{,}3 \text{ Н}.$$

Ответ: $P = 25$ Н; $N_A = 50$ Н; $N_B = 43{,}3$ Н.

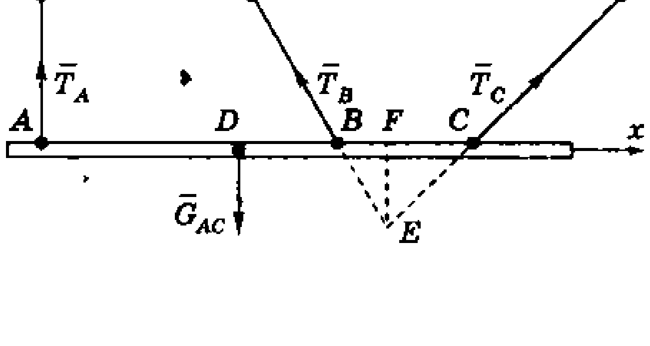
Задача 4.11

При сборке моста пришлось поднимать часть мостовой фермы ABC тремя канатами, расположенными, как указано на рисунке. Вес этой части фермы 42 кН, центр тяжести находится в точке D. Расстояния соответственно равны: $AD = 4$ м, $DB = 2$ м, $BF = 1$ м. Найти натяжения канатов, если прямая AC горизонтальна.



Решение

Покажем на рисунке действующие силы и реакции связей.



Составим уравнения равновесия балки (для проекций сил на оси x и y и для моментов относительно точки E):

$$\begin{cases} -T_B \cos 60° - T_C \cos 45° = 0, \\ T_A + T_B \cos 30° + T_C \cos 45° - G_{AB} \cdot 3 = 0, \\ -T_A \cdot 7 + G_{AB} \cdot 3 = 0. \end{cases}$$

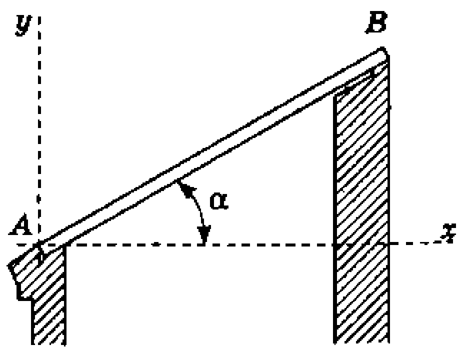
Решив систему, получим

$$T_A = 18 \text{ кН}, T_B = 17{,}57 \text{ кН}, T_C = 12{,}43 \text{ кН}.$$

О т в е т: $T_A = 18$ кН; $T_B = 17{,}57$ кН; $T_C = 12{,}43$ кН.

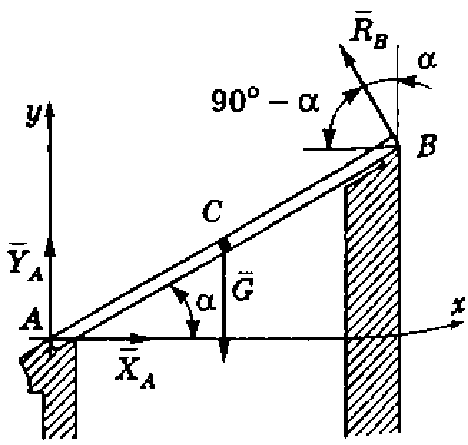
Задача 4.12

Стропила односкатной крыши состоят из бруса AB, у верхнего конца B свободно лежащего на гладкой опоре, а нижним концом A упирающегося в стену. Наклон крыши tgα = 0,5; на брус AB приходится вертикальная нагрузка 9 кН, приложенная в середине бруса. Определить реакции опор в точках A и B.



Р е ш е н и е

Покажем на рисунке действующую силу и реакции связей.



Заметим, что если

$$\operatorname{tg} \alpha = 0{,}5, \text{ то } \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+(0{,}5)^2}} = 0{,}89,$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-0{,}89^2} = 0{,}45.$$

Составим уравнения равновесия бруса (для проекций сил на оси x и y и для моментов сил относительно точки A):

$$\begin{cases} X_A - R_B \sin\alpha = 0, \\ Y_A - G + R_B \cos\alpha = 0, \\ -G\cdot\dfrac{1}{2}AB\cos\alpha + R_B AB = 0. \end{cases}$$

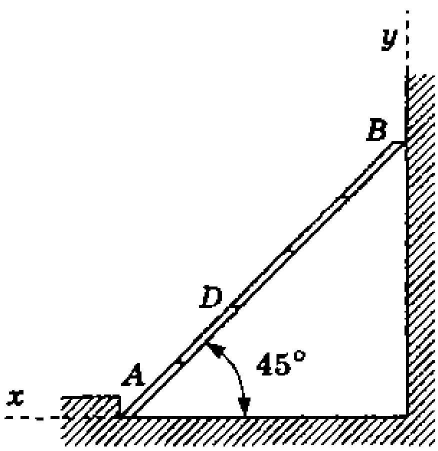
$$R_B = \frac{1}{2}G\cos\alpha = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 0{,}89 = 4{,}02 \text{ кН};$$

$$X_A = R_B \sin\alpha = 4{,}02\cdot 0{,}45 = 1{,}8 \text{ кН};$$

$$Y_A = 9 - R_B\cos\alpha = 9 - 4{,}02\cdot 0{,}89 = 5{,}4 \text{ кН}.$$

Ответ: $X_A = 1{,}8$ кН; $Y_A = 5{,}4$ кН; $R_B = 4{,}02$ кН.

Задача 4.13



К гладкой стене прислонена однородная лестница AB под углом 45° к горизонту; вес лестницы 200 Н; в точке D на расстоянии, равном 1/3 длины лестницы, от нижнего конца находится человек весом 600 Н. Найти давление лестницы на опору A и на стену.

Решение

Отбросим связи, заменяя их действия реакциями связей, и составим уравнения равновесия (для проекций на оси x и y и моментов относительно точки A):

$$\begin{cases} -X_A + X_B = 0, \\ Y_B - P - G = 0, \\ -P\cdot\dfrac{1}{3}AB\cos 45^\circ + G\cdot\dfrac{1}{2}AB\cos 45^\circ + X_B AB\cos 45^\circ = 0. \end{cases}$$

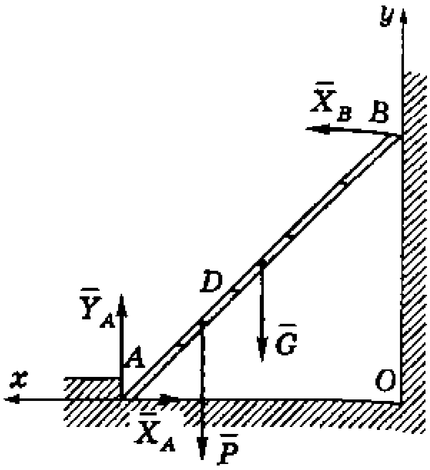
Решая систему, получим

$$Y_B = P + G = 600 + 200 = 800 \text{ Н},$$

$$X_B = \frac{1}{3}P + \frac{1}{2}G = \frac{1}{3}\cdot 600 + \frac{1}{2}\cdot 200 = 300 \text{ Н},$$

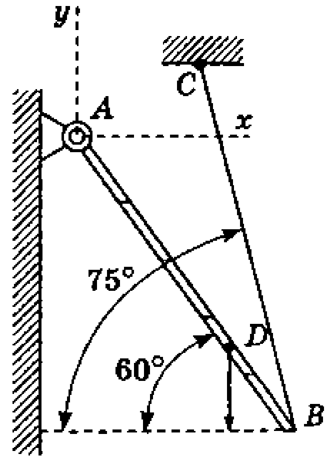
$$X_A = X_B = 300 \text{ Н}.$$

О т в е т: $X_A = X_B = 300$ Н; $Y_B = 800$ Н.



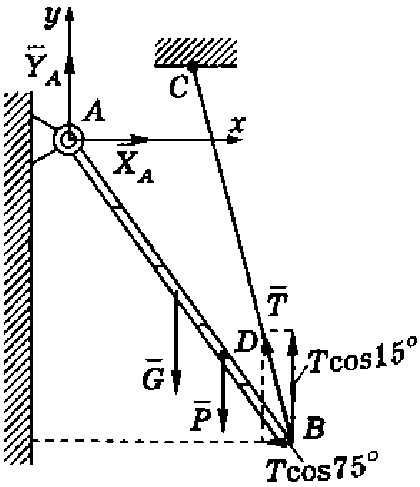
Задача 4.14

На подъемной однородной лестнице длиной 6 м и весом 2,4 кН, которая может вращаться вокруг горизонтальной оси A и наклонена под углом 60° к горизонту, в точке D стоит человек весом 0,8 кН на расстоянии 2 м от конца B. У конца B лестница поддерживается веревкой BC, наклоненной под углом 75° к горизонту. Определить натяжение T веревки и реакцию A оси.



Р е ш е н и е

Объект равновесия — лестница. Изобразим на рисунке приложенные к ней заданные силы и реакции связей и составим уравнения равновесия для плоской системы произвольно расположенных сил (в проекциях на оси x и y и для моментов относительно точки A):



$$\begin{cases} X_A - T\cos 75^\circ = 0, \\ Y_A - P - G + T\cos 15^\circ = 0, \\ -G\cdot\dfrac{AB}{2}\cos 60^\circ - P\cdot AD\cdot\cos 60^\circ + \\ +T\cos 15^\circ\cdot AB\cdot\cos 60^\circ - \\ -T\cos 75^\circ\cdot AB\sin 60^\circ = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$T = \frac{G\dfrac{AB}{2}\cos 60^\circ + P \cdot AD\cos 60^\circ}{AB(\cos 15^\circ \cos 60^\circ - \cos 75^\circ \sin 60^\circ)} = \frac{5{,}2}{1{,}55} = 3{,}35 \text{ кН}.$$

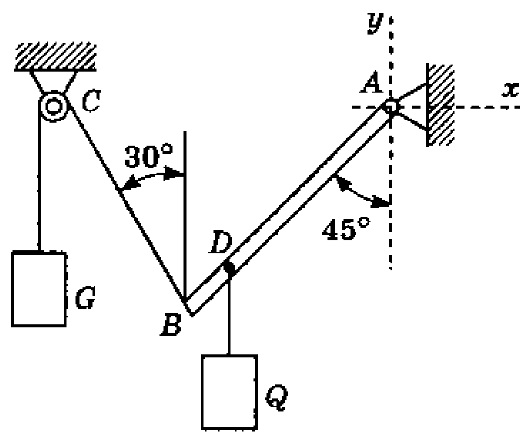
$$X_A = T\cos 75^\circ = 3{,}35 \cdot 0{,}2588 = 0{,}867 \text{ кН}.$$

$$Y_A = G + P - T\cos 15^\circ = 2{,}4 + 0{,}8 - 3{,}35 \cdot 0{,}966 = -0{,}036 \text{ кН}.$$

Ответ: $T = 3{,}35$ кН; $X_A = 0{,}867$ кН; $Y_A = -0{,}036$ кН.

Задача 4.15

Однородная балка AB весом $P = 100$ Н прикреплена к стене шарниром A и удерживается под углом 45° к вертикали при помощи троса, перекинутого через блок и несущего груз G. Ветвь BC троса образует с вертикалью угол 30°. В точке D к балке подвешен груз Q весом 200 Н. Определить вес груза G и реакцию шарнира A, пренебрегая трением на блоке, если $BD = AB/4$.

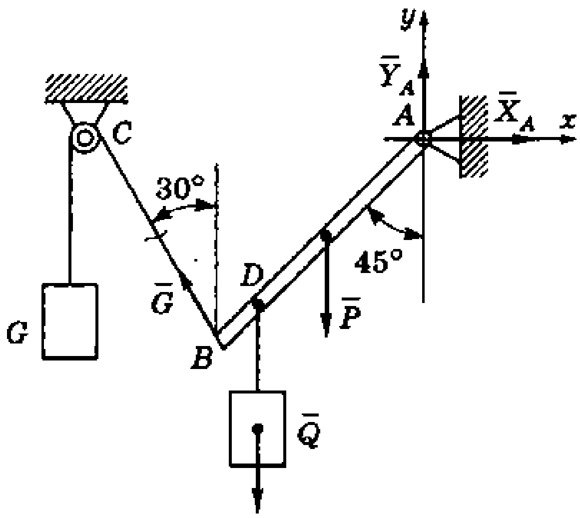


Решение

Представим на рисунке данные условия задачи.

Составим уравнения равновесия (для проекций сил на оси x и y и для моментов сил относительно точки A):

$$\begin{cases} X_A - G\cos 60^\circ = 0, \\ Y_A - Q + G\cos 30^\circ - P = 0, \\ -P \cdot \dfrac{AB}{2}\cos 45^\circ + Q \cdot AD\cos 45^\circ - \\ -G\cos 30^\circ AB\cos 45^\circ - G\cos 60^\circ \cdot AB\cos 45^\circ = 0. \end{cases}$$



Решим полученную систему:

$$G=\frac{Q\cdot AB\cos 45^\circ+P\dfrac{AB}{2}\cos 45^\circ}{AB(\cos 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\cos 45^\circ)}=\frac{Q\cdot AD+P\dfrac{AB}{2}}{AB(\cos 30^\circ+\cos 60^\circ)}=$$

$$=\frac{200\cdot\dfrac{3}{4}AB+100\dfrac{AB}{2}}{AB(0{,}866+0{,}5)}=\frac{200}{1{,}366}=146{,}7\ \text{Н}.$$

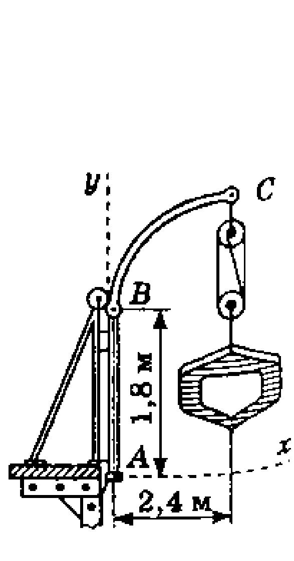
$$X_A=G\cos 60^\circ=146{,}7\cdot 0{,}5=73{,}35\ \text{Н}.$$

$$Y_A=Q+P-G\cos 30^\circ=300-146\cdot 0{,}866=173\ \text{Н}.$$

Ответ: $G=146{,}7$ Н; $X_A=73{,}35$ Н; $Y_A=173$ Н.

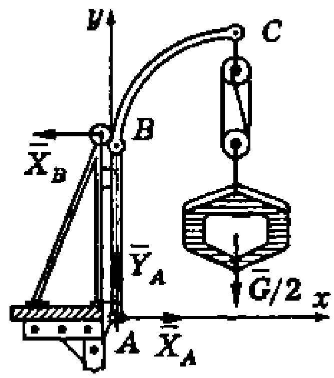
Задача 4.16

Шлюпка висит на двух шлюпбалках, причем вес ее, равный 9,6 кН, распределяется между ними поровну. Шлюпбалка *ABC* нижним полушаровым концом опирается на подпятник *A* и на высоте 1,8 м над ним свободно проходит через подшипник *B*; вылет шлюпбалки равен 2,4 м. Пренебрегая весом шлюпбалки, определить давление ее на опоры *A* и *B*.



Решение

Покажем на рисунке действующие силы и реакции.



Составим уравнения равновесия (в проекциях на оси x и y и для моментов относительно точки A):

$$\begin{cases} X_A - X_B = 0, \\ Y_A - \dfrac{G}{2} = 0, \\ X_B \cdot 1{,}8 - \dfrac{G}{2} \cdot 2{,}4 = 0. \end{cases}$$

Решим систему:

$$Y_A = 4{,}8 \text{ кН},$$

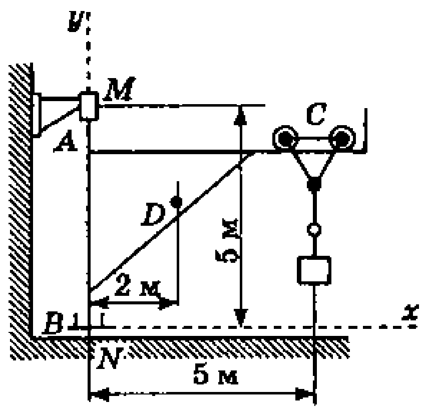
$$X_B = \frac{G \cdot 2{,}4}{2 \cdot 1{,}8} = 6{,}4 \text{ кН},$$

$$X_A = X_B = 6{,}4 \text{ кН}.$$

Ответ: $X_A = 6{,}4$ кН; $Y_A = 4{,}8$ кН; $X_B = 6{,}4$ кН.

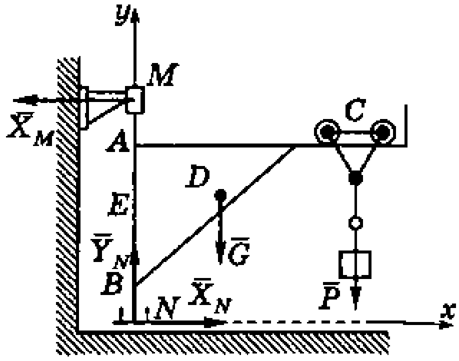
Задача 4.17

Литейный кран ABC имеет вертикальную ось вращения MN; расстояния: $MN = 5$ м, $AC = 5$ м; вес крана 20 кН, центр тяжести его D находится от оси вращения на расстоянии 2 м; вес груза, подвешенного в точке C, равен 30 кН. Найти реакции подшипника M и подпятника N.



Решение

Покажем на рисунке действующие силы и реакции.



Составим уравнения равновесия (для проекций сил на оси x и y и моментов относительно точки N):

$$\begin{cases} X_N - X_M = 0, \\ Y_N - G - P = 0, \\ -G\cdot 2 - P\cdot 5 + X_M\cdot 5 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получим

$$Y_N = G + P = 50 \text{ кН},$$

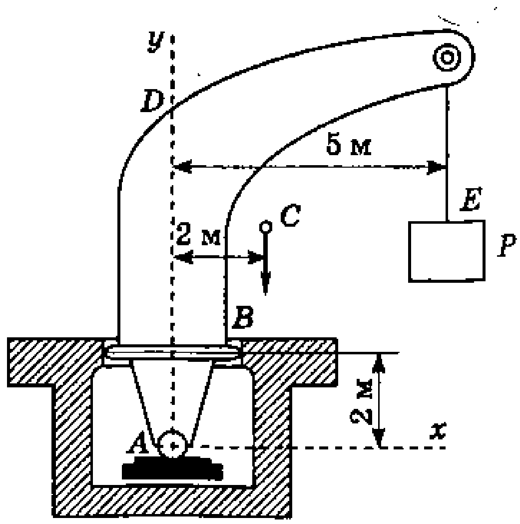
$$X_M = \frac{1}{5}(G\cdot 2 + P\cdot 5) = \frac{1}{5}(40+50) = 38 \text{ кН}.$$

$$X_N = X_M = 38 \text{ кН}.$$

Ответ: $X_M = 38$ кН; $X_N = 38$ кН; $Y_N = 50$ кН.

Задача 4.18

Кран в шахте, поднимающий груз $P = 40$ кН, имеет подпятник A и в точке B опирается на гладкую цилиндрическую поверхность, ось которой Ay вертикальна. Длина хвоста $AB = 2$ м. Вылет крана $DE = 5$ м. Вес крана равен 20 кН и приложен в точке C, расстояние которой от вертикали Ay равно 2 м. Определить реакции опор A и B.

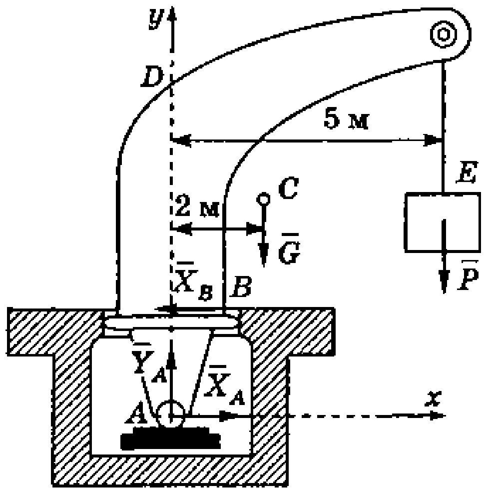


Решение

Покажем на рисунке действующие силы и реакции.

Составим уравнения равновесия крана (в проекциях на оси x и y и для моментов относительно точки A):

$$\begin{cases} X_A - X_B = 0, \\ Y_A - P - G = 0, \\ X_B \cdot 2 - G \cdot 2 - P \cdot 5 = 0. \end{cases}$$



Следовательно,

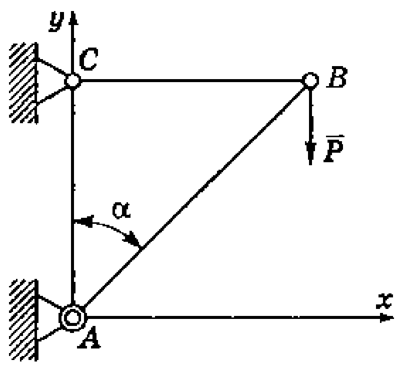
$$X_B = \frac{G \cdot 2 + P \cdot 5}{2} = \frac{40 \cdot 5 + 20 \cdot 2}{2} = 120 \text{ Н}.$$

$$Y_A = P + G = 60 \text{ Н}.$$

$$X_A = X_B = 120 \text{ Н}.$$

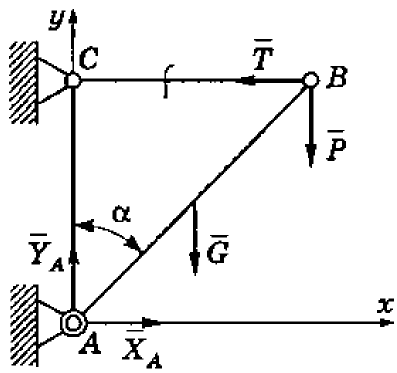
Ответ: X_A = 120 Н; X_B = 120 Н;
Y_A = 60 Н.

Задача 4.19



Кран для подъема тяжестей состоит из балки AB, нижний конец которой соединен со стеной шарниром A, а верхний удерживается горизонтальным тросом BC. Определить натяжение T троса BC и давление на опору A, если известно, что вес груза P = 2 кН, вес балки AB равен 1 кН и приложен в середине балки, угол $\alpha = 45°$.

Решение



Покажем на рисунке реакции связей.

Составим уравнения равновесия балки AB (для проекций сил на оси x и y и для моментов относительно точки A):

$$\begin{cases} X_A - T = 0, \\ Y_A - G - P = 0, \\ -P \cdot AB\cos 45° - G \cdot \dfrac{AB}{2}\cos 45° + \\ + T \cdot AB\cos 45° = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

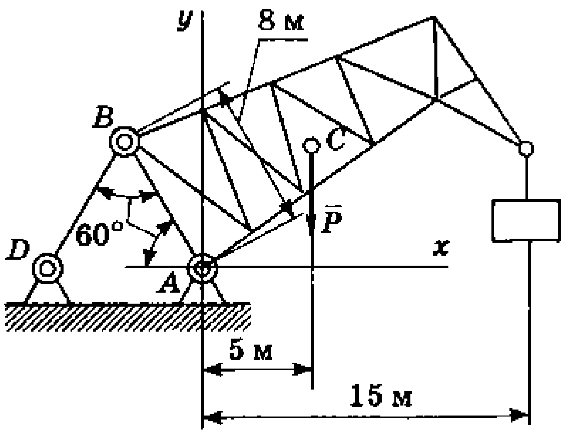
$$Y_A = P + G = 3 \text{ кН}.$$

$$T = P + \frac{G}{2} = 2 + 0{,}5 = 2{,}5 \text{ кН}.$$

$$X_A = T = 2{,}5 \text{ кН}.$$

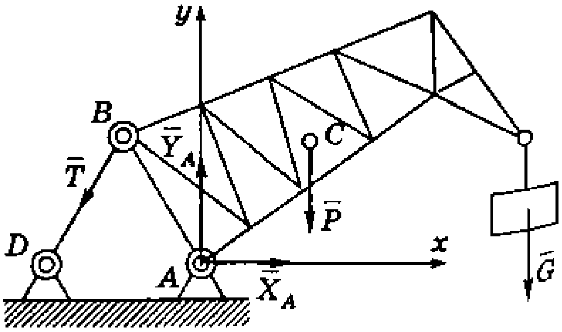
О т в е т: X_A = 2,5 кН; Y_A = 3 кН; T = 2,5 кН.

Задача 4.20



Кран имеет шарниры в точках A, B и D, причем $AB = AD = BD = 8$ м. Центр тяжести C фермы крана находится на расстоянии 5 м от вертикали, проходящей через точку A. Вылет крана, считая от точки A, при этом равен 15 м. Поднимаемый груз весит 200 кН; вес фермы P = = 120 кН. Определить опорные реакции и натяжение стержня BD для указанного положения крана.

Р е ш е н и е



Покажем на рисунке действующие силы и реакции.

Составим уравнения равновесия фермы (в проекциях на оси x и y и для моментов сил относительно точки A):

$$\begin{cases} X_A - T\cos 60° = 0, \\ Y_A - P - G - T\cos 30° = 0, \\ -P \cdot 5 - G \cdot 15 + T\cos 30° \cdot AB = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$T = \frac{P \cdot 5 + G \cdot 15}{AB \cos 30^\circ} = \frac{120 \cdot 5 + 200 \cdot 15}{8 \cdot 0{,}866} = 520 \text{ кН}.$$

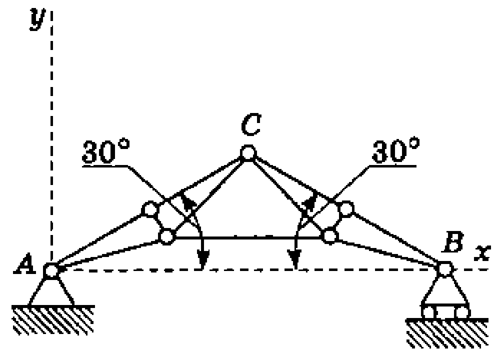
$$X_A = T \cos 60^\circ = 520 \cdot \frac{1}{2} = 260 \text{ кН},$$

$$Y_A = 320 + 520 \cdot 0{,}866 = 770 \text{ кН}.$$

Ответ: $X_A = 260$ кН; $Y_A = 770$ кН; $T = 520$ кН.

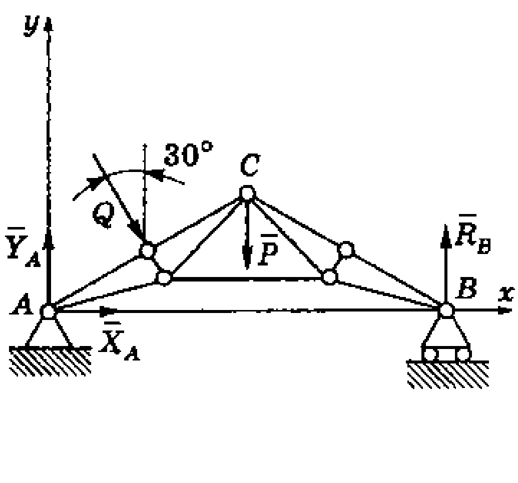
Задача 4.21

Симметричная стропильная ферма ABC у одного конца шарнирно укреплена в неподвижной точке A, а у другого конца B опирается катками на гладкую горизонтальную плоскость. Вес фермы 100 кН. Сторона AC находится под равномерно распределенным, перпендикулярным ей давлением ветра; равнодействующая сил давления ветра равна 8 кН, длина $AB = 6$ м, угол $CAB = 30°$. Определить опорные реакции.



Решение

Покажем на рисунке действующие силы и реакции.



Составим уравнения равновесия фермы (для проекций сил на оси x и y и моментов относительно точки A):

$$\begin{cases} X_A + Q \cos 60^\circ = 0, \\ Y_A + R_B - P - Q \cos 30^\circ = 0, \\ -P \dfrac{AB}{2} + R_B \cdot AB - Q \dfrac{AB}{2 \cos 30^\circ} = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

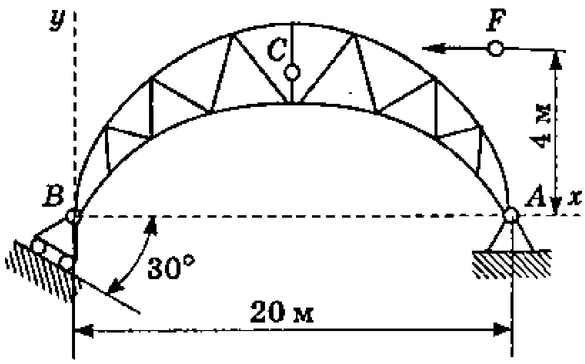
$$X_A = -Q\cos 60^\circ = -4 \text{ кН},$$

$$R_B = \frac{P}{2} + \frac{Q}{4\cos 30^\circ} = 50 + \frac{2}{0{,}886} = 52{,}3 \text{ кН},$$

$$Y_A = P + Q\cos 30^\circ - R_B = 100 + 8\cdot 0{,}886 - 52{,}3 = 54{,}6 \text{ кН}.$$

О т в е т: $X_A = -4$ кН; $Y_A = 54{,}6$ кН; $R_B = 52{,}3$ кН.

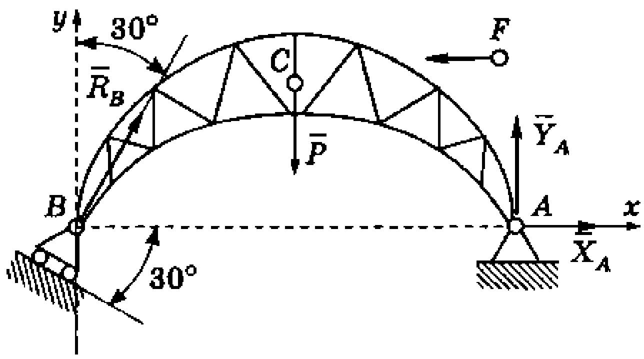
Задача 4.22



Арочная ферма имеет неподвижный опорный шарнир в точке A, в точке B — подвижную гладкую опору, плоскость которой наклонена к горизонту под углом 30°. Пролет $AB = 20$ м. Центр тяжести фермы, вес которой вместе со снеговой нагрузкой равен 100 кН, находится в точке C, расположенной над серединой пролета AB. Равнодействующая сил давления ветра F равна 20 кН и направлена параллельно AB, линия ее действия отстоит от AB на 4 м. Определить опорные реакции.

Р е ш е н и е

Покажем на рисунке действующие силы и реакции.



Составим уравнения равновесия фермы (в проекциях на оси x и y и для моментов сил относительно точки B):

$$\begin{cases} X_A + R_B \cos 60^\circ - F = 0, \\ R_B \cos 30^\circ - P + Y_A = 0, \\ -P \cdot 10 + Y_A \cdot 20 + F \cdot 4 = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$Y_A = \frac{1}{20}(P \cdot 10 - F \cdot 4) = \frac{1}{20}(1000 - 80) = 46 \text{ кН},$$

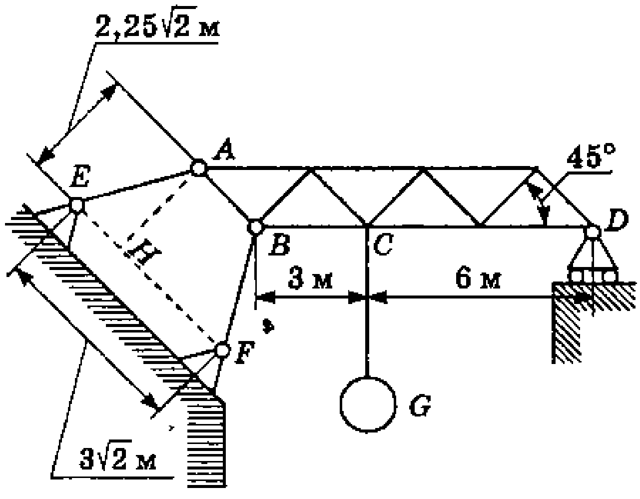
$$R_B = \frac{P - Y_A}{\cos 30^\circ} = \frac{100 - 46}{0{,}866} = 62{,}4 \text{ кН},$$

$$X_A = -R_B \cos 60^\circ + F = 20 - 62{,}4 \cdot \frac{1}{2} = -11{,}2 \text{ кН}.$$

Ответ: $X_A = -11{,}2$ кН; $R_B = 62{,}4$ кН; $Y_A = 46$ кН.

Задача 4.23

Ферма $ABCD$ в точке D опирается на катки, а в точках A и B поддерживается наклонными стержнями AE и BF, шарнирно укрепленными в точках E и F. Раскосы фермы и прямая EF наклонены к горизонту под углом 45°; длина панели $BC = 3$ м, стержни AE и BF одинаковой длины; расстояние $EF = 3\sqrt{2}$ м, $AH = 2{,}25\sqrt{2}$ м. Вес фермы и нагрузки равен 75 кН и направлен по прямой CG. Найти реакцию катков R_D.



Р е ш е н и е

Из геометрических соображений (см. рисунок) найдем:

$$AB = BL = BC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\frac{\sqrt{2}}{2};$$

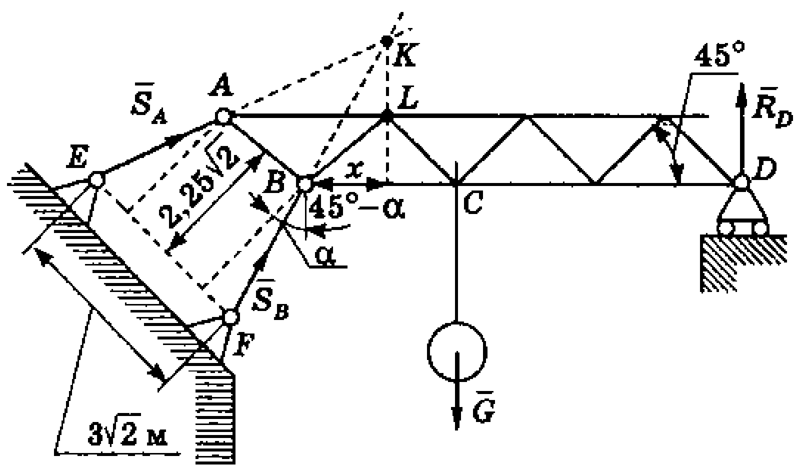
$$EH = \frac{1}{2}(EF - AB) = \frac{1}{2}\left(3\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4} = 0{,}75\sqrt{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{EH}{AH} = \frac{0{,}75\sqrt{2}}{2{,}25\sqrt{2}} = \frac{1}{3};$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{10}};$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}};$$

$$BK = \frac{AB}{2\sin\alpha} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$



Вычислим:

$$x = BK\sin(45° - \alpha) = \frac{3\sqrt{5}}{2}(\sin 45°\cos\alpha - \cos 45°\sin\alpha) =$$

$$= \frac{3\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

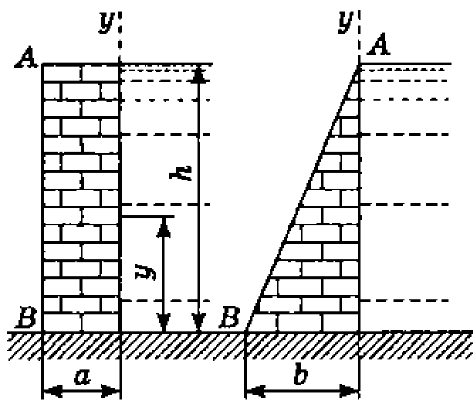
Составим уравнение равновесия для моментов сил относительно точки K:

$$-G\cdot(BC-x)+R_D(9-x)=0 \Rightarrow R_D=\frac{G\cdot 1{,}5}{7{,}5}=\frac{75\cdot 1{,}5}{7{,}5}=15\ \text{кН}.$$

Ответ: $R_D=15$ кН.

Задача 4.24

Давление воды на маленькую площадку плотины возрастает пропорционально расстоянию ее от свободной поверхности воды и равно весу столба воды, высота которого равна этому расстоянию, а площадь основания равна площади взятой площадки. Определить толщину плотины в ее основании в двух случаях:



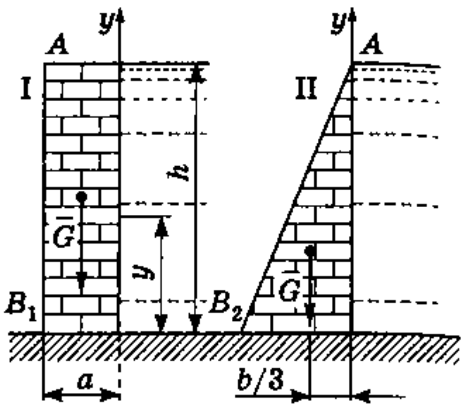
1) когда поперечное сечение плотины прямоугольное;

2) когда это сечение треугольное.

Плотина должна быть рассчитана на опрокидывание вокруг ребра B давлением воды, причем коэффициент устойчивости должен быть равен 2. (Коэффициентом устойчивости называется отношение момента веса массива к моменту опрокидывающей силы.) Высота h плотины такая же, как глубина воды, и равна 5 м. Удельный вес воды $\gamma=10$ Н/м^3, удельный вес материала плотины $\gamma_1=10$ кН/м^3. Давление воды на площадку плотины длиной 1 м и высотой dy, где y — расстояние площадки от дна в метрах, равно в килоньютонах $\gamma(h-y)dy$. Момент этого давления относительно точки B равен $\gamma(h-y)ydy$. Опрокидывающий момент равен $\int\limits_0^h \gamma(h-y)ydy$.

Р е ш е н и е

Покажем на рисунке силы, действующие на плотину.



Пусть l — ширина плотины. Тогда момент давления относительно точки B равен

$$M_B = Ml,$$

где $M = \int dM$, $dM = \gamma(h-y)y\,dy$.

Следовательно,

$$M = \int_0^h \gamma(h-y)y\,dy = \frac{\gamma h^3}{6}, \quad M_B = \frac{\gamma h^3 \cdot l}{6}.$$

Для первого случая (прямоугольное сечение) составим момент относительно точки B_1:

$$M_{B_1} = G\frac{a}{2} = \gamma_1 ahl\frac{a}{2} = \gamma_1\frac{a^2hl}{2}.$$

Для второго случая (треугольное сечение) составим момент относительно точки B_2:

$$M_{B_1} = G\cdot\frac{2}{3}b = \gamma_1\cdot\frac{1}{2}bhl\cdot\frac{2}{3}b = \gamma_1\frac{b^2hl}{3}.$$

Так как коэффициент устойчивости равен 2, то

$$\frac{M_{B_i}}{M_B} = 2, \ i = 1,\ 2.$$

Значит, можем записать для первого случая

$$\gamma_1\frac{a^2hl}{2} = 2\frac{\gamma h^3 l}{6} \Rightarrow a = h\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\gamma}{\gamma_1}} = 5\sqrt{\frac{2\cdot 10}{3\cdot 22}} = 2{,}75 \text{ м},$$

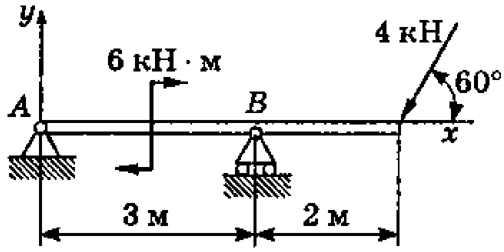
для второго случая

$$\gamma_1\frac{b^2hl}{3} = 2\frac{\gamma h^3 l}{6} \Rightarrow b = h\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}} = 5\sqrt{\frac{10}{22}} = 3{,}37 \text{ м}.$$

О т в е т: a = 2,75 м; b = 3,37 м.

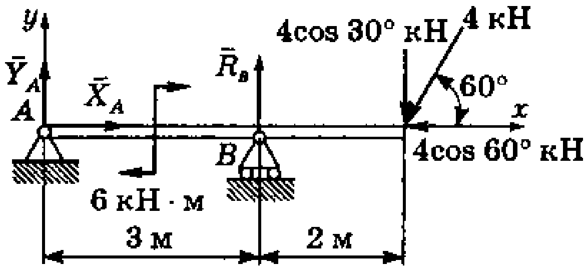
Задача 4.25

Определить реакции опор A и B балки, находящейся под действием одной сосредоточенной силы и пары сил. Нагрузка и размеры указаны на рисунке.



Решение

Составим уравнения равновесия балки (в проекциях на оси x и y и для моментов относительно точки B), при этом силу 4 кН разложим на две составляющие: 4cos60° кН, 4cos30° кН (см. рисунок).



$$\begin{cases} X_A - 4\cos 60^\circ = 0, \\ Y_A + R_B - 4\cos 30^\circ = 0, \\ -6 + R_B \cdot 3 - 4\cos 30^\circ \cdot 5 = 0. \end{cases}$$

Из первого и третьего уравнений системы найдем:

$$X_A = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \text{ кН},$$

$$R_B = \frac{1}{3}(6 + 20 \cdot 0{,}866) = 7{,}78 \text{ кН},$$

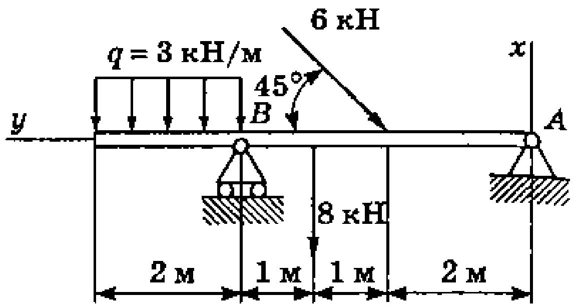
из второго —

$$Y_A = -R_B + 4\cos 30^\circ = 4 \cdot 0{,}866 - 7{,}78 = -4{,}32 \text{ кН}.$$

Ответ: $X_A = 2$ кН; $R_B = 7{,}78$ кН; $Y_A = -4{,}32$ кН.

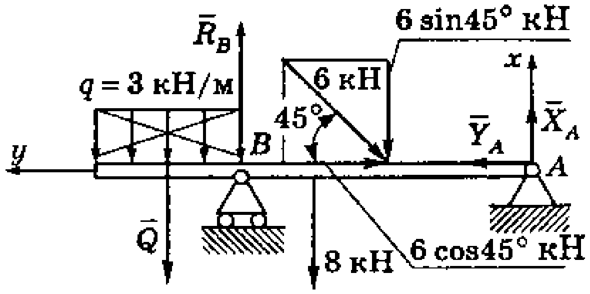
Задача 4.26

Определить реакции опор A и B балки, находящейся под действием двух сосредоточенных сил и равномерно распределенной нагрузки. Интенсивность распределенной нагрузки, величины сил и размеры указаны на рисунке.



Решение

Линейно распределенную нагрузку заменим равнодействующей, которая равна $Q = q \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6$ и приложена в центре тяжести соответствующего прямоугольника. Силу 6 кН разложим по теореме Вариньона на две составляющие: 6cos45° кН, 6sin45° кН (см. рисунок).



Составим уравнения равновесия (в проекциях на оси x и y и для моментов относительно точки A):

$$\begin{cases} R_B + X_A - Q - 8 - 6\sin 45° = 0, \\ Y_A - 6\cos 45° = 0, \\ 6\sin 45° \cdot 2 + 8 \cdot 3 + Q \cdot 5 - R_B \cdot 4 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы вычислим

$$Y_A = 6\cos 45° = 4{,}242 \text{ кН},$$

из третьего —

$$R_B = \frac{1}{4}(12 \cdot 0{,}707 + 24 + 30) = 15{,}6 \text{ кН},$$

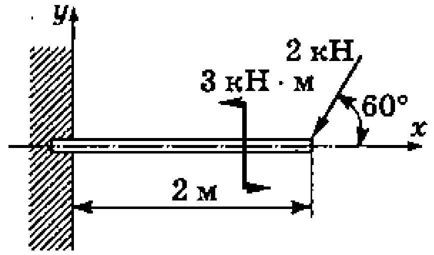
из первого —

$$X_A = -R_B + Q + 8 + 6\sin 45° = 6 + 8 + 6 \cdot 0{,}707 - 15{,}6 = 2{,}62 \text{ кН}.$$

Ответ: $X_A = 2{,}62$ кН; $Y_A = 4{,}242$ кН; $R_B = 15{,}6$ кН.

Задача 4.27

Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием сосредоточенной силы и пары сил.

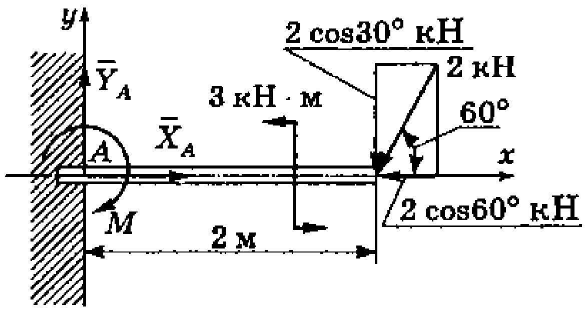


Решение

Покажем на рисунке действующие силы и нагрузку.

Балка заделана в стену, значит, в заделке A три составляющих реакции связей: X_A, Y_A, M (момент заделки, направление которого выбираем произвольно).

Составим уравнения равновесия (в проекциях на оси x и y и для моментов сил относительно точки A):



$$\begin{cases} X_A - 2\cos 60^\circ = 0, \\ Y_A - 2\cos 30^\circ = 0, \\ -M + 3 - 2\cos 30^\circ \cdot 2 = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$X_A = 2\cos 60^\circ = 1 \text{ кН},$$

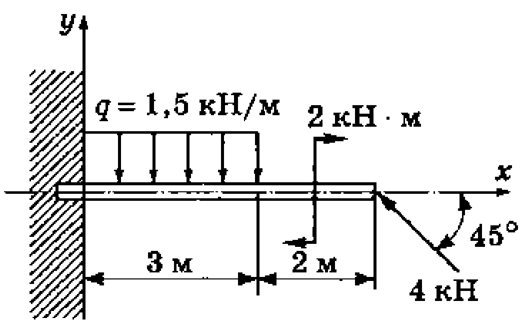
$$Y_A = 2\cos 30^\circ = 1{,}73 \text{ кН},$$

$$M = 3 - 4 \cdot 0{,}866 = 0{,}47 \text{ кНм}.$$

Ответ: $X_A = 1$ кН; $Y_A = 1{,}73$ кН; $M = 0{,}47$ кНм.

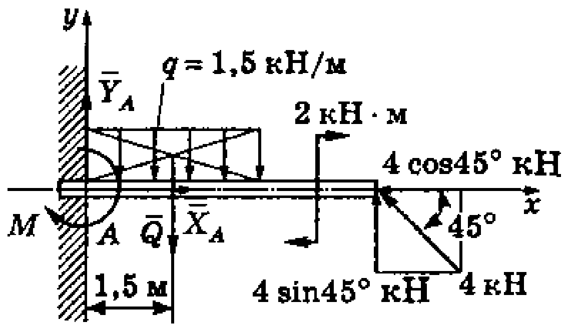
Задача 4.28

Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенной силы и пары сил.



Решение

Покажем на рисунке действующие силы и нагрузку.



Решим задачу аналогично предыдущей, заменив равномерно распределенную нагрузку на эквивалентную силу Q:

$$\begin{cases} X_A - 4\cos 45° = 0, \\ Y_A + 4\sin 45° - Q = 0, \\ -M - Q\cdot 1{,}5 - 2 + 4\cdot\sin 45°\cdot 5 = 0. \end{cases}$$

$$X_A = 4\cdot 0{,}707 = 2{,}828 \text{ кН}.$$

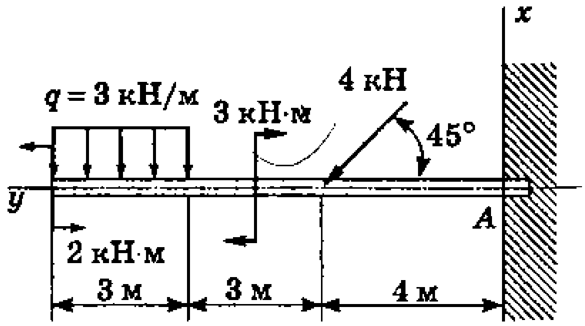
$$Y_A = Q - 4\sin 45° = 4{,}5 - 4\cdot 0{,}707 = 4{,}5 - 2{,}828 = 1{,}67 \text{ кН}.$$

$$M = 20\cdot 0{,}707 - 2 - 4{,}5\cdot 1{,}5 = 14{,}14 - 2 - 6{,}75 = -5{,}35 \text{ кН·м}.$$

Ответ: $X_A = 2{,}828$ кН; $Y_A = 1{,}67$ кН; $M = -5{,}35$ кН·м.

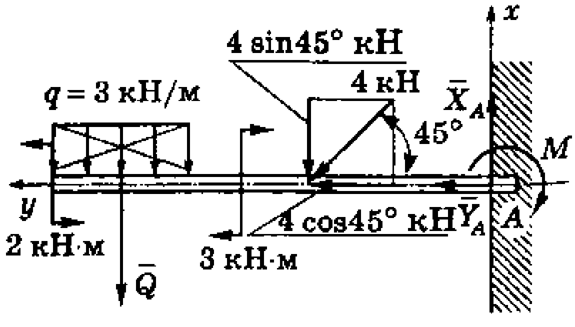
Задача 4.29

Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, одной сосредоточенной силы и двух пар сил.



Решение

Решим задачу аналогично задачам 4.27 и 4.28:



$$\begin{cases} X_A - Q - 4\sin 45° = 0, \\ Y_A + 4\cos 45° = 0, \\ -M + 4\sin 45°\cdot 4 - 3 + Q\cdot 8{,}5 + 2 = 0. \end{cases}$$

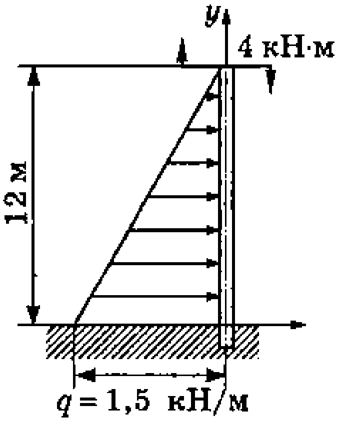
$$M = 16 \cdot 0{,}707 - 1 + 9 \cdot 8{,}5 = 11{,}312 - 1 + 76{,}5 = 87 \text{ кН·м},$$

$$X_A = 9 + 4 \cdot 0{,}707 = 11{,}8 \text{ кН},$$

$$Y_A = -4\cos 45° = -2{,}828 \text{ кН}.$$

Ответ: $X_A = 11{,}8$ кН; $Y_A = -2{,}828$ кН; $M = 87$ кН·м.

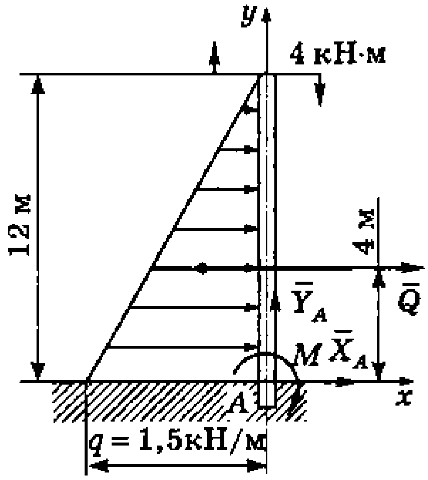
Задача 4.30



Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием пары сил и распределенной нагрузки, изменяющейся по закону треугольника.

Решение

Линейно распределенную нагрузку заменим равнодействующей, которая по величине равна площади прямоугольного треугольника (см. рисунок): $Q = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot q = 9$ кН и приложена в центре тяжести этого треугольника, т.е. по высоте расстояние до линии действия силы равно $\frac{1}{3} \cdot 12 = 4$ м.



Составим уравнения равновесия (в проекциях на оси x и y и для моментов относительно точки A):

$$\begin{cases} X_A + Q = 0, \\ Y_A = 0, \\ -M - 4 - Q \cdot 4 = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

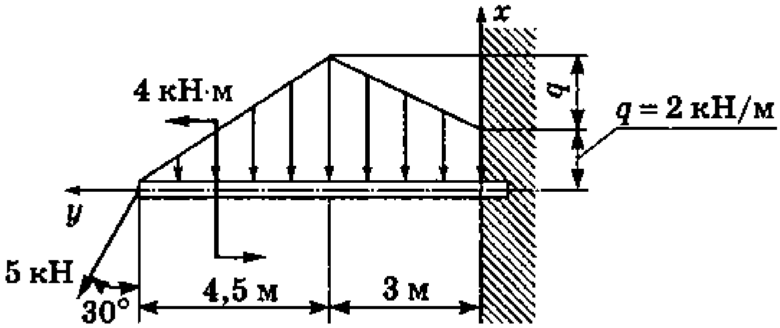
$$X_A = -Q = -9 \text{ кН},$$

$$M = -Q \cdot 4 - 4 = -36 - 4 = -40 \text{ кН·м}$$

Ответ: $X_A = -9$ кН; $Y_A = 0$; $M = -40$ кН·м.

Задача 4.31

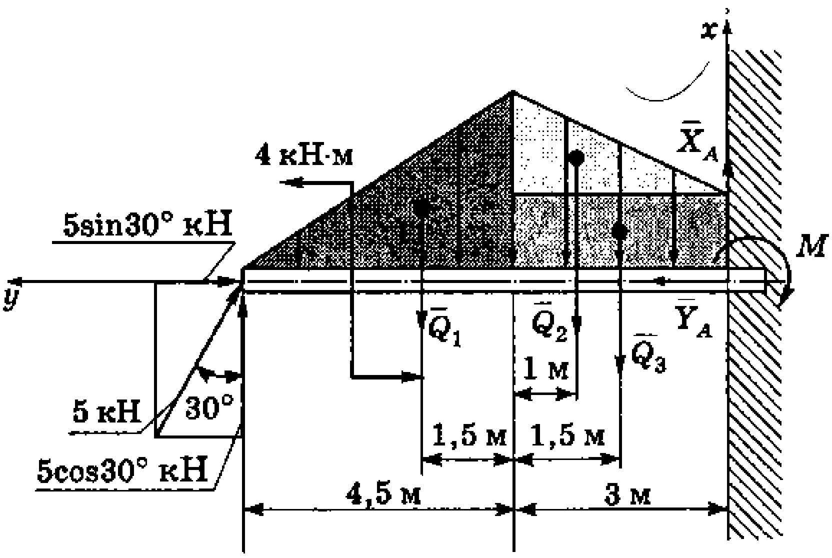
Определить реакцию заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием сосредоточенной силы, пары сил и распределенной нагрузки, изменяющейся по закону треугольника и трапеции.



Решение

Разобьем фигуру, занятую линейно распределенной нагрузкой, на два треугольника и прямоугольник (см. рисунок) и найдем:

$$Q_1 = \frac{1}{2} \cdot 2q \cdot 4{,}5 = 9 \text{ кН}, \quad Q_2 = \frac{1}{2} q \cdot 3 = 3 \text{ кН}, \quad Q_3 = q \cdot 3 = 6 \text{ кН}.$$



Составим уравнения равновесия (в проекциях на оси x и y и для моментов относительно точки A):

$$\begin{cases} X_A - Q_1 - Q_2 - Q_3 + 5\cos 30^\circ = 0, \\ Y_A - 5\sin 30^\circ = 0, \\ -M + Q_3 \cdot 1{,}5 + Q_2 \cdot 2 + Q_3 \cdot 4{,}5 + 4 - 5\cos 30^\circ \cdot 7{,}5 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы найдем:

$$X_A = Q_1 + Q_2 + Q_3 - 5 \cdot 0{,}866 = 13{,}7 \text{ кН},$$

из второго —

$$Y_A = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5 \text{ кН},$$

из третьего —

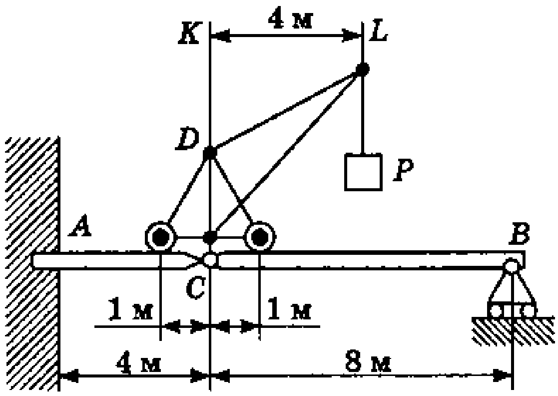
$$M = Q_3 \cdot 1{,}5 + Q_2 \cdot 2 + Q_1 \cdot 4{,}5 + 4 - 5 \cdot 7{,}5 \cdot 0{,}866 =$$

$$= 6 \cdot 1{,}5 + 3 \cdot 2 + 9 \cdot 4{,}5 + 4 - 5 \cdot 7{,}5 \cdot 0{,}866 = 9 + 6 + 40{,}5 + 4 = 27{,}0 \text{ кН·м}.$$

Ответ: X_A = 13,7 кН; Y_A = 2,5 кН; M = 27,0 кН·м.

Примечание. В ответе сборника допущена опечатка.

Задача 4.32



Горизонтальная разрезная балка ACB у конца A заделана в стену, у конца B опирается на подвижную опору; в точке C — шарнир. Балка загружена краном, несущим груз P весом 10 кН; вылет KL = 4 м, вес крана Q = 50 кН, центр тяжести крана лежит на вертикали CD. Размеры указаны на рисунке. Определить, пренебрегая весом балки, опорные реакции в точках A и B для такого положения крана, когда он находится в одной вертикальной плоскости с балкой AB.

Решение

Первый объект равновесия — кран (рис. 1). Составим уравнения равновесия для плоской системы параллельных сил:

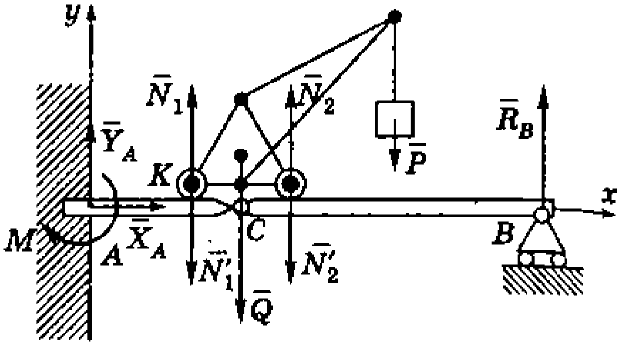


Рис. 1

в проекциях на ось y —

$$N_1+N_2-P-Q=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_1=Q+P-N_2=50+10-50=10 \text{ кН};$$

для моментов относительно точки K —

$$-Q\cdot 1+N_2\cdot 2-P\cdot 5=0\Rightarrow N_2=\frac{1}{2}(P\cdot 5+Q)=50 \text{ кН}.$$

Второй объект равновесия — балка (см. рис. 1). «Отбросим» кран, заменяя его реакциями $\overline{N_1'}$ и $\overline{N_2'}$ (они параллельны и противоположны $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$), и составим уравнения равновесия (в проекциях на оси x и y и для моментов относительно точки A):

$$\begin{cases} X_A=0, \\ Y_A-N_1'-N_2'+R_B=0, \\ -M-N_1'\cdot 3-N_2'\cdot 5+R_B\cdot 12=0. \end{cases}$$

Третий объект равновесия — часть балки BC (рис. 2). Для нее уравнения равновесия:

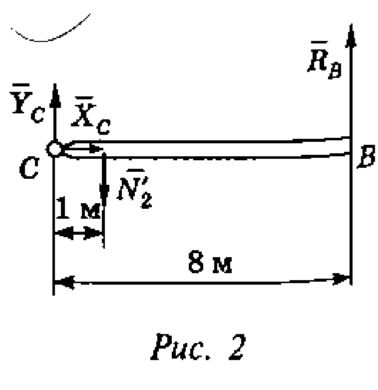


Рис. 2

в проекциях на ось x —

$$X_C=0;$$

для моментов относительно точки C —

$$-N_2'\cdot 1+R_B\cdot 8=0\Rightarrow R_B=\frac{N_2'}{8}=\frac{50}{8}=6{,}25 \text{ кН};$$

в проекциях на ось y —

$$Y_C+R_B-N_2'=0\Rightarrow Y_C=N_2'-R_B=50-6{,}25=43{,}75 \text{ кН}.$$

Зная R_B, из второго уравнения системы найдем:

$$Y_A = -R_B + N_1' + N_2' = 10 + 50 - 6{,}25 = 53{,}75 \text{ кН},$$

из третьего —

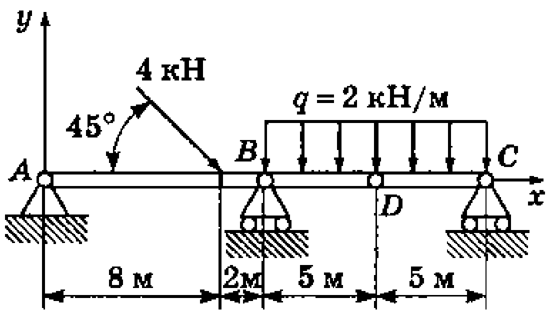
$$M = R_B \cdot 12 - N_1' \cdot 3 - N_2' \cdot 5 = 6{,}25 \cdot 12 - 50 \cdot 5 - 10 \cdot 3 = -205 \text{ кН·м}$$

(знак «–» говорит о том, что момент в заделке направлен в противоположную сторону, т.е. против часовой стрелки).

Ответ: $Y_A = 53{,}75$ кН; $R_B = 6{,}25$ кН; $M = -205$ кН·м.

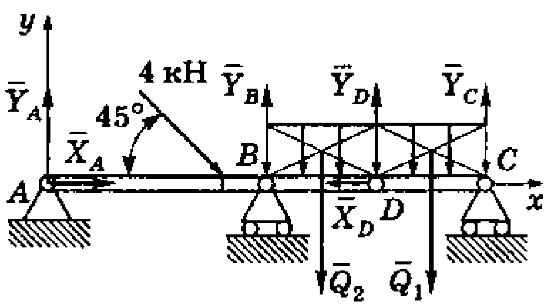
Задача 4.33

Определить реакции опор A, B, C и шарнира D составной балки, изображенной на рисунке вместе с нагрузкой.



Решение

По промежуточному шарниру расчленяем балку на две: AD и DC (см. рисунок).



Первый объект равновесия — часть балки DC:

$$Q_1 = Q_2 = 2 \cdot 5 = 10 \text{ кН}.$$

Уравнения равновесия:

в проекциях на ось x —

$$X_D = 0;$$

для моментов относительно точки D —

$$-Q_1 \cdot 2{,}5 + Y_C \cdot 5 = 0 \Rightarrow Y_C = \frac{Q \cdot 2{,}5}{5} = 5 \text{ кН};$$

в проекциях на ось y —

$$Y_D + Y_C - Q_1 = 0 \Rightarrow Y_D = -Y_C + Q_1 = -5 + 10 = 5 \text{ кН}.$$

Второй объект равновесия — часть балки ABD. Поменяв реакцию в шарнире D на противоположную: Y_D' (т.е. $\overline{Y_D'} = -\overline{Y}_D$), составим уравнения равновесия (в проекциях на оси x и y и для моментов относительно точки A):

$$\begin{cases} X_A + 4 \cdot \cos 45^\circ = 0, \\ Y_A - 4\cos 45^\circ + Y_B - Q_2 - Y_D' = 0, \\ -4\cos 45^\circ \cdot 8 + Y_B \cdot 10 - Q_2 \cdot 12{,}5 - Y_D' \cdot 15 = 0. \end{cases}$$

Из третьего уравнения системы следует

$$Y_B = \frac{1}{10}(32 \cdot 0{,}707 + 10 \cdot 12{,}5 + 5 \cdot 15) = 22{,}26 \text{ кН};$$

из второго —

$$Y_A = 4\cos 45^\circ - Y_B + Q_2 + Y_D' = 4 \cdot 0{,}707 - 22{,}26 + 10 + 5 = -4{,}43 \text{ кН};$$

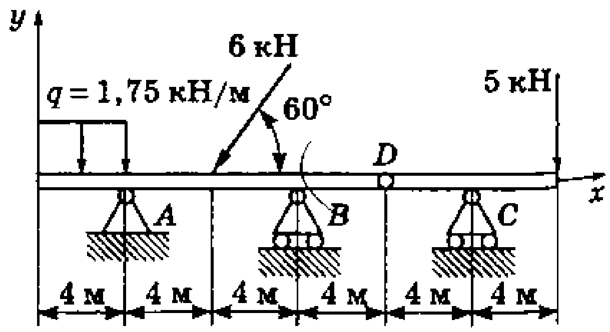
из первого —

$$X_A = -4 \cdot \cos 45^\circ = -2{,}828 \text{ кН}.$$

Ответ: $X_A = -2{,}8$ кН; $Y_A = -4{,}43$ кН; $Y_B = 22{,}26$ кН; $Y_C = 5$ кН; $X_D = 0$; $Y_D = \pm 5$ кН.

Задача 4.34

Определить реакции опор A, B, C и шарнира D составной балки, изображенной на рисунке, вместе с нагрузкой.



Решение

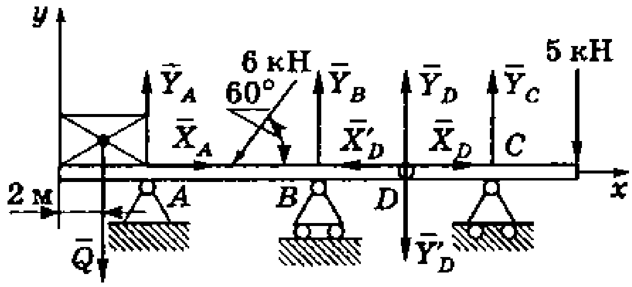
Покажем на рисунке действующие силы и реакции.

Первый объект равновесия — часть балки DC. Уравнения равновесия:

в проекциях на ось x —

$$X_D = 0;$$

для моментов относительно точки D —



$$-5 \cdot 8 + Y_C \cdot 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_C = \frac{8 \cdot 5}{4} = 10 \text{ кН};$$

в проекциях на ось y —

$$Y_D + Y_C - 5 = 0 \Rightarrow Y_D = -Y_C + 5 = -5 \text{ кН}.$$

Второй объект равновесия — часть балки ABD. Уравнения равновесия:

в проекциях на ось x —

$$X_A - 6\cos 60^\circ = 0 \Rightarrow X_A = 6\cos 60^\circ = 3 \text{ кН};$$

для моментов относительно точки A —

$$-6 \cdot 4\cos 30^\circ + Y_B \cdot 8 + Q \cdot 2 - Y'_D \cdot 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_B = 0{,}125 \cdot (24 \cdot 0{,}866 - 7 \cdot 2 - 5 \cdot 12) = -6{,}65 \text{ кН};$$

в проекциях на ось y —

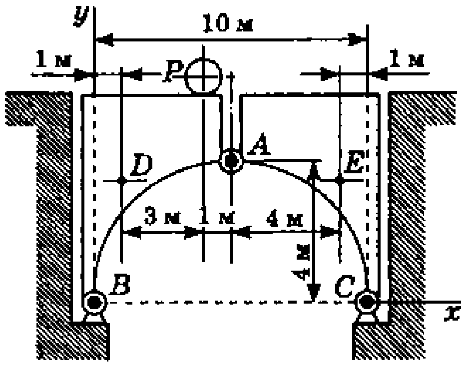
$$Y_A - 6\cos 30^\circ + Y_B - Q - Y'_D = 0 \Rightarrow Y_A = 6\cos 30^\circ - Y_B + Q + Y'_D =$$

$$= 6 \cdot 0{,}866 + 6{,}65 + 7 - 5 = 13{,}8 \text{ кН}.$$

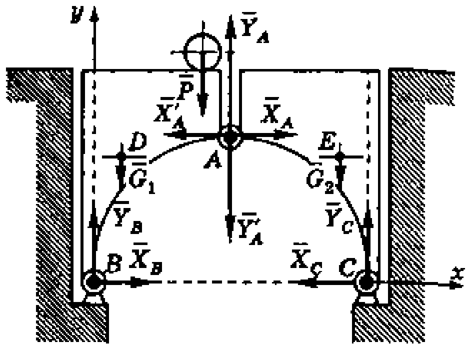
Ответ: $X_A = 3$ кН; $Y_A = 13{,}8$ кН; $Y_B = -6{,}65$ кН; $Y_C = 10$ кН; $X_D = 0$; $Y_D = \pm 5$ кН.

Задача 4.35

Мост состоит из двух частей, связанных между собой шарниром A и прикрепленных к береговым устоям шарнирами B и C. Вес каждой части моста 40 кН; их центры тяжести D и E; на мосту находится груз $P = 20$ кН; размеры указаны на рисунке. Определить давление в шарнире A и реакции в точках B и C.



Решение



Покажем на рисунке действующие силы и реакции.

Рассмотрим левую часть моста и составим уравнения равновесия (в проекциях на оси x и y и для моментов относительно точки B):

$$\begin{cases} X_B + X_A = 0, \\ Y_A + Y_B - G_1 - P = 0, \\ -G_1 \cdot 1 - P \cdot 4 + Y_A \cdot 5 - X_A \cdot 4 = 0. \end{cases}$$

Уравнения равновесия для правой части моста (в проекциях на оси и для моментов относительно точки A):

$$\begin{cases} -X_C - X'_A = 0, \\ Y_C - G_2 - Y'_A = 0, \\ Y_C \cdot 5 - G_2 \cdot 4 - X_C \cdot 4 = 0. \end{cases}$$

Решим обе системы совместно, заметив, что $X_A = X'_A, Y_A = Y'_A$, $G_1 = G_2$.

Получим

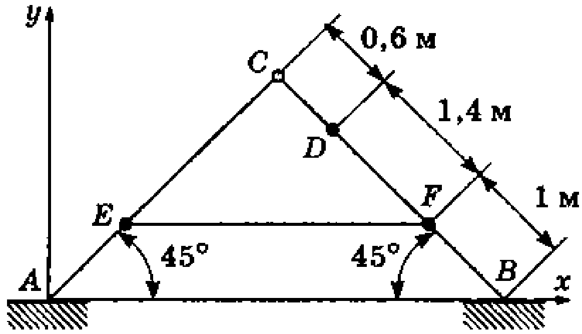
$$Y_B = \frac{1}{10}(10G_1 + 6P) = 52 \text{ кН};$$

$$Y_A = 8 \text{ кН}; \quad Y_C = 48 \text{ кН}; \quad X_B = X_C = 20 \text{ кН}; \quad X_A = \pm 20 \text{ кН}.$$

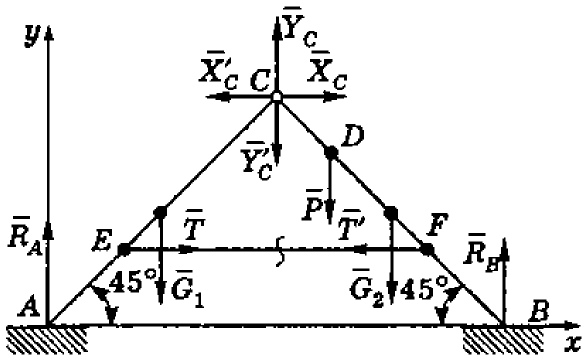
Ответ: $X_A = \pm\, 20$ кН; $Y_A = \mp\, 8$ кН; $X_B = X_C = 20$ кН; $Y_B = 52$ кН; $Y_C = 48$ кН.

Задача 4.36

На гладкой горизонтальной плоскости стоит передвижная лестница, состоящая из двух частей AC и BC, длиной 3 м, весом 120 Н каждая, соединенных шарниром C и веревкой EF; расстояние $BF = AE = 1$ м; центр тяжести каждой из частей AC и BC находится в ее середине. В точке D на расстоянии $CD = 0{,}6$ м стоит человек, весящий 720 Н. Определить реакции пола и шарнира, а также натяжение T веревки EF, если угол $BAC = ABC = 45°$.



Решение



Покажем на рисунке действующие силы и реакции.

Рассмотрим левую часть AC лестницы и составим для нее уравнения равновесия (в проекциях на оси x и y и для моментов относительно точки C):

$$\begin{cases} X_C + T = 0, \\ R_A + Y_C - G_1 = 0, \\ G_1 \cdot \dfrac{AB}{2} \cos 45° + T \cdot 2 \cos 45° - \\ - R_A \cdot AC \cos 45° = 0. \end{cases}$$

Аналогичные уравнения равновесия для правой части CB лестницы:

$$\begin{cases} - X'_C - T' = 0, \\ -Y' - P - G_2 + R_B = 0, \\ - P \cdot 0{,}6 \cos 45° - G_2 \cdot \dfrac{AB}{2} \cos 45° + R_B \cdot AC \cdot \cos 45° = 0. \end{cases}$$

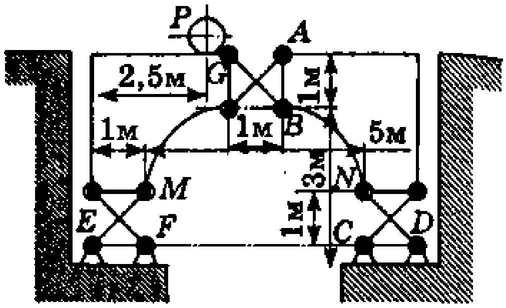
Решим обе системы совместно и получим

$R_A = 408$ Н, $R_B = 552$ Н, $X_C = \pm 522$ Н, $Y_C = \pm 288$ Н, $T = 522$ Н.

Ответ: $R_A = 408$ Н; $R_B = 552$ Н; $X_C = \pm 522$ Н; $Y_C = \pm 288$ Н; $T = 522$ Н.

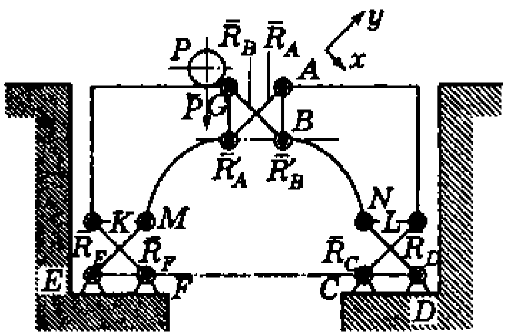
Задача 4.37

Мост состоит из двух одинаковых частей M и N, соединенных между собой и с неподвижными опорами посредством шести стержней, наклоненных к горизонту под углом 45° и снабженных на концах шарнирами. Размеры указаны на рисунке. В точке G помещен груз весом P. Определить те усилия в стержнях, которые вызваны действием этого груза.



Решение

Составим уравнения равновесия для правой части моста (в проекциях на оси x и y и для моментов относительно точки L) (см. рисунок):



$$\begin{cases} R_D - R_B = 0, \\ R_A + R_C = 0, \\ -R_A \cdot 3\sqrt{2} = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $R_D = R_B$, $R_C = R_A = 0$.

Уравнения равновесия для левой части моста (в проекциях на оси и для моментов относительно точки K):

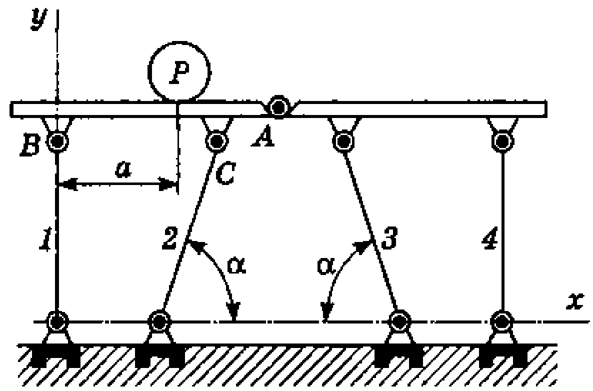
$$\begin{cases} R_E - R_A - \dfrac{P}{\sqrt{2}} = 0, \\ R_F + R_B - \dfrac{P}{\sqrt{2}} = 0, \\ R_B \cdot 3\sqrt{2} - P \cdot 2 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $R_E = \dfrac{P}{\sqrt{2}}$, $R_F = \dfrac{P}{3\sqrt{2}}$, $R_B = R_D = \dfrac{\sqrt{2}}{3} P$.

Ответ: $R_A = 0$; $R_B = \dfrac{\sqrt{2}}{3} P$; $R_C = 0$; $R_D = \dfrac{\sqrt{2}}{3} P$; $R_E = \dfrac{P}{\sqrt{2}}$; $R_F = \dfrac{P}{3\sqrt{2}}$.

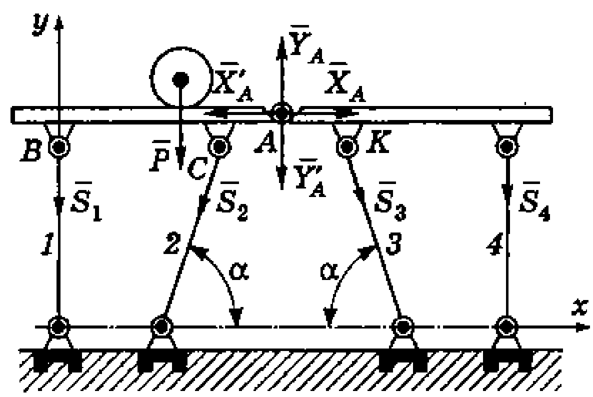
Задача 4.38

Мост состоит из двух одинаковых горизонтальных балок, соединенных шарниром A и прикрепленных шарнирно к основанию жесткими стержнями 1, 2, 3, 4, причем крайние стержни вертикальны, а средние наклонены к горизонту под углом $\alpha = 60°$. Соответствующие размеры: $BC = 6$ м, $AB = 8$ м. Определить усилия в стержнях и реакцию шарнира A, если мост несет вертикальную нагрузку $P = 15$ кН на расстоянии $a = 4$ м от точки B.



Решение

Покажем на рисунке действующие на систему силы.



Составим уравнения равновесия для левой и правой частей моста (в проекциях на оси x и y и для моментов относительно точки A):

$$\begin{cases} -S_2\cos 60° + X_A = 0, \\ -S_1 - S_2\cos 30° + Y_A = 0, \\ P(AB - a) + S_1 \cdot AB + \\ + S_2(AB - BC)\cos 30° = 0. \end{cases}$$

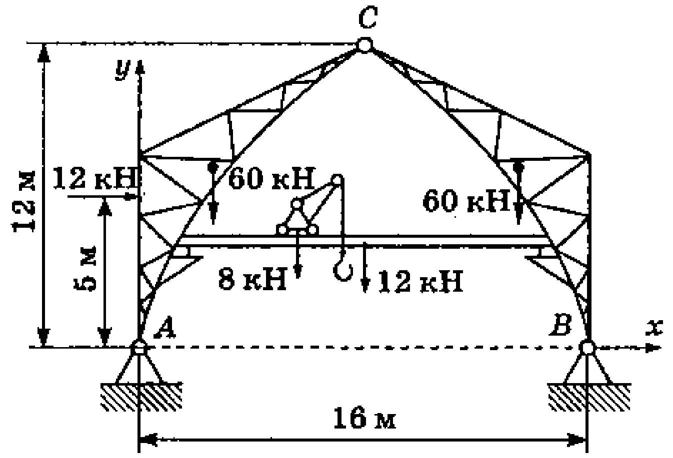
$$\begin{cases} S_3\cos 60° - X'_A = 0, \\ -S_4 - S_3\cos 30° - Y'_A = 0, \\ -S_4 \cdot AB - S_3(AB - BC)\cos 30° = 0. \end{cases}$$

Далее решим обе системы совместно, учитывая, что $X_A = X'_A$, $Y_A = Y'_A$.

Ответ: $S_1 = -6{,}25$ кН; $S_2 = S_3 = -5{,}77$ кН; $S_4 = 1{,}25$ кН; $X_A = \pm 2{,}89$ кН; $Y_A = \mp 3{,}75$ кН.

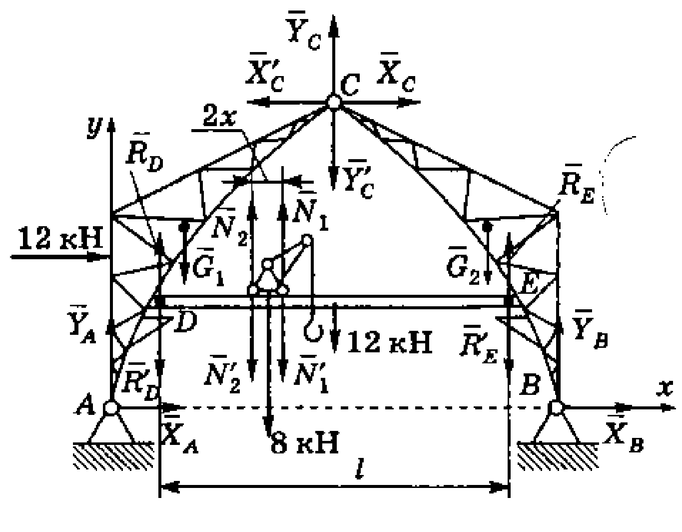
Задача 4.39

Вдоль мастерской, здание которой поддерживается трехшарнирной аркой, ходит по рельсам мостовой кран. Вес поперечной балки, передвигающейся по рельсам, 12 кН; вес крана 8 кН (кран не нагружен); линия действия веса крана отстоит от левого рельса на расстоянии 0,25 длины поперечной балки. Вес каждой половины арки равен 60 кН и приложен на расстоянии 2 м от вертикали, проходящей через соответствующую опору *A* или *B*; опорные рельсы мостового крана расположены на расстоянии 1,8 м от этих вертикалей. Высота здания 12 м, ширина пролета 16 м. Равнодействующая сил давления ветра 12 кН и направлена параллельно *AB*, линия ее действия отстоит от *AB* на 5 м. Определить реакции шарниров *A* и *B* и давление в шарнире *C*.



Решение

Покажем на рисунке действующие на систему силы.



Первый объект равновесия — кран:

$$N_1 + N_2 = 8 \Rightarrow N_1 = N_2 = 4 \text{ (в силу симметрии сил).}$$

Второй объект равновесия — балка. Составим для нее уравнения равновесия системы параллельных сил (в проекциях на ось y и для моментов относительно точки D):

$$\begin{cases} R_D + R_E - N_2' - N_1' - 12 = 0, \\ R_E \cdot l - N_2'(0{,}25l - x) - N_1'(0{,}25l + x) - 12 \cdot 0{,}5l = 0. \end{cases}$$

Следовательно, из второго уравнения системы получим

$$R_E = N_2' \cdot 0{,}5 + 12 \cdot 0{,}5 = 0{,}5 \cdot 4 + 12 \cdot 0{,}5 = 8 \text{ кН};$$

из первого —

$$R_D = -R_E + N_2' + N_1' + 12 = 8 + 12 - 8 = 12 \text{ кН}.$$

Третий объект равновесия — часть крана AC. Составим для нее уравнения (в проекциях на оси и для моментов относительно точки A):

$$\begin{cases} X_A + X_C = 12, \\ Y_A + Y_C - G_1 - R_D' = 0, \\ -12 \cdot 5 - X_C \cdot 12 + Y_C \cdot 8 - R_D' \cdot 1{,}8 - 60 \cdot 2 = 0. \end{cases}$$

Четвертый объект равновесия — часть крана CB. Запишем для нее соответствующие уравнения (в проекциях на оси и для моментов относительно точки B):

$$\begin{cases} X_B - X_C' = 0, \\ Y_B - Y_C' - G_2 - R_E' = 0, \\ Y_C' \cdot 8 + X_C' \cdot 12 + R_E' \cdot 1{,}8 + 60 \cdot 2 = 0. \end{cases}$$

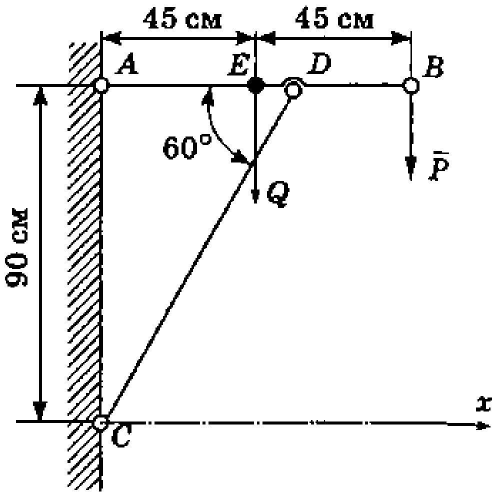
Учитывая, что $Y_C = Y_C'$, $X_C = X_C'$, $R_D = R_D'$, $R_E = R_E'$ и решая две последние системы совместно, получим

$$X_A = 2,\ Y_A = 67{,}8,\ X_B = -14,\ Y_B = 72{,}2,\ X_C = \pm 14,\ Y_C = \mp 4{,}2.$$

Ответ: $X_A = 2$ кН; $Y_A = 67{,}8$ кН; $X_B = -14$ кН; $Y_B = 72{,}2$ кН; $X_C = \pm 14$ кН; $Y_C = \mp 4{,}2$ кН.

Задача 4.40

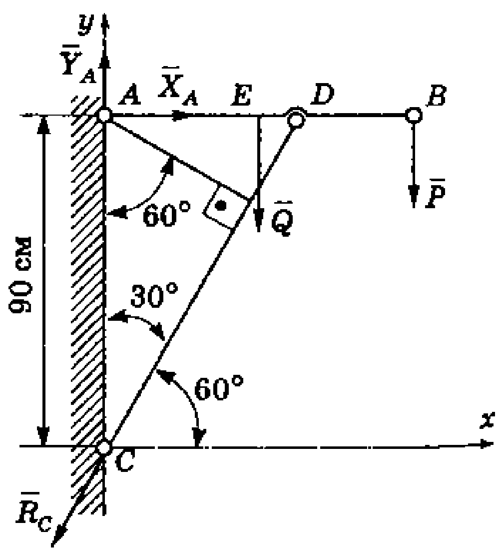
Груз $P = 25$ Н подвешен к концу горизонтального бруса AB. Вес бруса $Q = 10$ Н и приложен в точке E. Брус прикреплен к стенке посредством шарнира A и подперт стержнем CD, с которым скреплен тоже посредством шарнира. Весом стержня CD пренебрегаем. Размеры указаны на рисунке. Определить реакции шарниров A и C.



Решение

Покажем на рисунке действующие силы и реакции связей.

Уравнения равновесия (в проекциях на оси x и y и для моментов относительно точки A):



$$\begin{cases} X_A - R_C \cos 60° = 0, \\ Y_A - Q - P - R_C \cos 30° = 0, \\ -Q \cdot 45 - P \cdot 90 - R_C \cdot 90 \cdot \cos 60° = 0. \end{cases}$$

Из третьего уравнения системы получим

$$R_C = -\frac{Q \cdot 45 + P \cdot 90}{45} = -\frac{10 \cdot 45 + 25 \cdot 90}{45} = -60 \text{ Н};$$

из первого —

$$X_A = R_C \cos 60° = -30 \text{ Н};$$

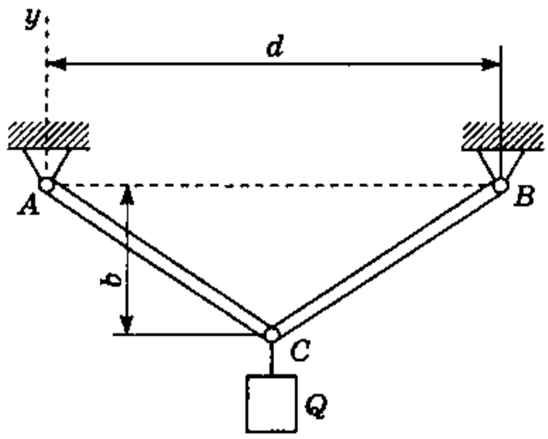
из второго —

$$Y_A = Q + P + R_C \cos 30° = 35 - 60 \cdot 0{,}866 = -16{,}96 \text{ Н}.$$

Ответ: $X_A = -30$ Н; $Y_A = -16{,}96$ Н; $R_C = -60$ Н.

Задача 4.41

Два однородных бруса одинаковой длины соединены шарнирно в точке C, а в точках A и B также шарнирно прикреплены к опорам. Вес каждого бруса равен P. В точке C подвешен груз Q. Расстояние $AB = d$. Расстояние точки C до горизонтальной прямой AB равно b. Определить реакции шарниров A и B.

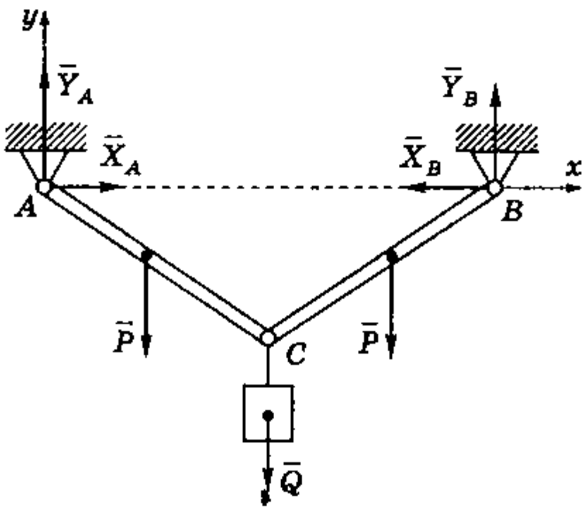


Решение

Покажем на рисунке действующие силы и реакции связей.

Составим уравнения равновесия (в проекциях на ось x и для моментов относительно точек A и B — для всей системы, для моментов относительно точки C — для бруса AC):

$$\begin{cases} X_A - X_B = 0, \\ Y_B d - Q\cdot 0{,}5d - P\cdot 0{,}75d - P\cdot 0{,}25d = 0, \\ -Y_A d + Q\cdot 0{,}5d + P\cdot 0{,}25d + P\cdot 0{,}75d = 0, \\ -X_A b - Y_A\cdot 0{,}5d + P\cdot 0{,}25d = 0. \end{cases}$$



Решая систему уравнений, найдем:

$$Y_B = Q\cdot 0{,}5 + P, \quad Y_A = Q\cdot 0{,}5 + P,$$

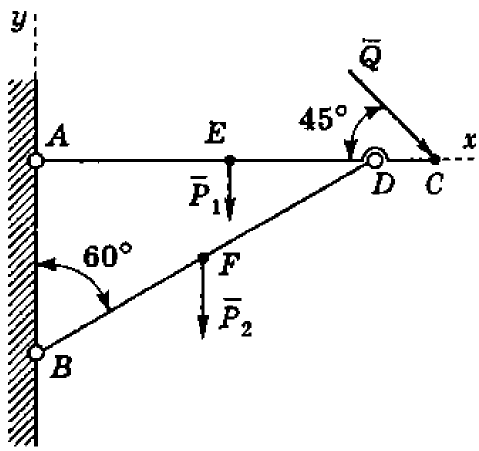
$$X_A = \frac{-Y_A \cdot 0,5d + P \cdot 0,25d}{b} = \frac{-(0,5Q + P) \cdot 0,5d + P \cdot 0,25d}{b} =$$

$$= \frac{-0,25d(P+Q)}{b},$$

$$X_B = X_A = \frac{-0,25d(P+Q)}{b}.$$

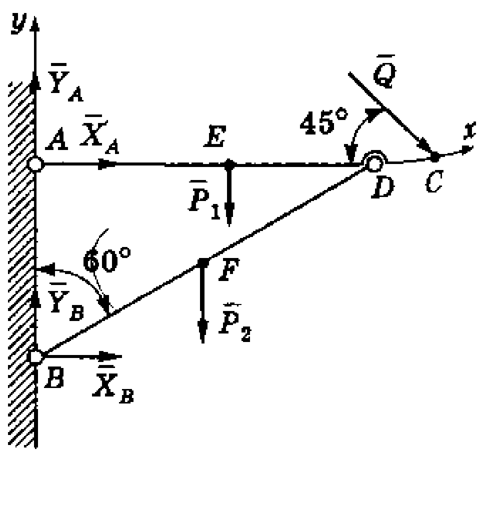
О т в е т: $X_A = X_B = \dfrac{-0,25d(P+Q)}{b}$; $Y_A = Y_B = 0,5Q + P$.

Задача 4.42



Два стержня AC и BD одинаковой длины шарнирно соединены в точке D и так же прикреплены к вертикальной стене в точках A и B. Стержень AC расположен горизонтально, стержень BD образует угол 60° с вертикальной стеной. Стержень AC в точке E нагружен вертикальной силой $P_1 =$ $= 40$ Н и в точке C силой $Q = 100$ Н, наклоненной к горизонту под углом 45°. Стержень BD в точке F нагружен вертикальной силой $P_2 = 40$ Н. Дано: $AE = EC$, $BF = FD$. Определить реакции шарниров A и B.

Р е ш е н и е



Обозначим:

$$l = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} BD.$$

Первый объект равновесия — вся система в целом (см. рисунок). Для нее уравнения равновесия следующие (в проекциях на оси x и y и для моментов относительно точки A):

$$\begin{cases} X_A + X_B + Q\cos 45^\circ = 0, \\ Y_A + Y_B - P_1 - P_2 - Q\cos 45^\circ = 0, \\ X_B \cdot 2l\cos 60^\circ - P_2 l\sin 60^\circ - P_1 l - Q\cdot\cos 45^\circ\cdot 2l = 0. \end{cases}$$

Второй объект равновесия — балка AC. Для нее составим уравнение моментов относительно точки D:

$$-Y_A\cdot 2l\sin 60^\circ + P_1(2l\sin 60^\circ - l) - Q\cos 45^\circ(2l - 2l\sin 60^\circ) = 0.$$

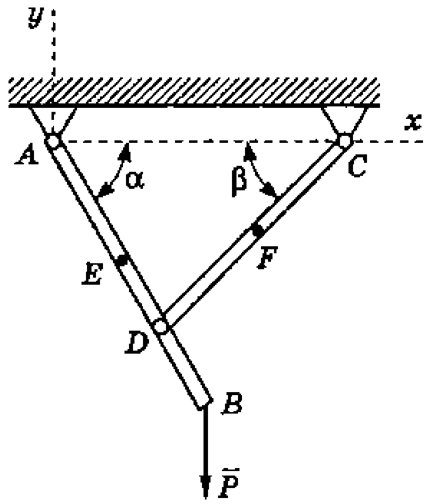
Решив последнее уравнение совместно с системой, получим

$$X_A = -287 \text{ Н},\ Y_A = 6 \text{ Н},\ X_B = 216 \text{ Н},\ Y_B = 145 \text{ Н}.$$

Ответ: $X_A = -287$ Н; $Y_A = 6$ Н; $X_B = 216$ Н; $Y_B = 145$ Н.

Задача 4.43

Подвеска состоит из двух балок AB и CD, соединенных шарнирно в точке D и прикрепленных к потолку шарнирами A и C. Вес балки AB равен 60 Н и приложен в точке E. Вес балки CD равен 50 Н и приложен в точке F. В точке B к балке AB приложена вертикальная сила P = = 200 Н. Определить реакции в шарнирах A и C, если заданы следующие размеры: AB = 1 м, CD = 0,8 м, AE = 0,4 м, CF = 0,4 м; углы наклона балок AB и CD к горизонту соответственно равны: β = = 45° и α = 60°.



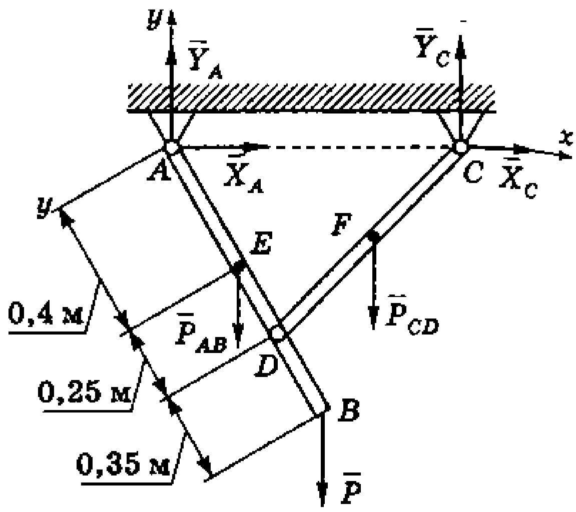
Решение

Представим данные условия задачи на рисунке.

Рассмотрим всю систему в целом и составим уравнения равновесия в проекциях на оси x и y:

$$\begin{cases} X_A + X_C = 0, \\ Y_A + Y_C - P - P_{AB} - P_{CD} = 0. \end{cases}$$

Из треугольника ADC по теореме синусов можем записать:



$$\frac{DC}{\sin 60^\circ} = \frac{AD}{\sin 45^\circ} \Rightarrow$$

$$AD = \frac{DC \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = 0{,}65 \text{ м}.$$

Составим уравнение моментов относительно точки D для балки AB:

$$-Y_A AD \cos 60^\circ - X_A AD \sin 60^\circ +$$

$$+ P_{AB} \cdot 0{,}25 \cos 60^\circ - P \cdot 0{,}35 \cos 60^\circ = 0.$$

Аналогично для балки CD:

$$Y_C \cdot 0{,}8 \cos 45^\circ - X_C \cdot 0{,}8 \cos 45^\circ - P_{CD} \cdot 0{,}4 \cos 45^\circ = 0.$$

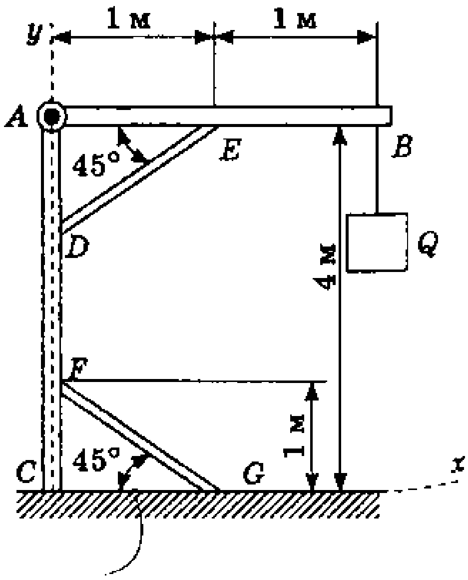
Решив все уравнения совместно, получим

$$-X_A = X_C = 135 \text{ Н}, \quad Y_A = 150 \text{ Н}, \quad Y_C = 160 \text{ Н}.$$

О т в е т: $-X_A = X_C = 135$ Н; $Y_A = 150$ Н; $Y_C = 160$ Н.

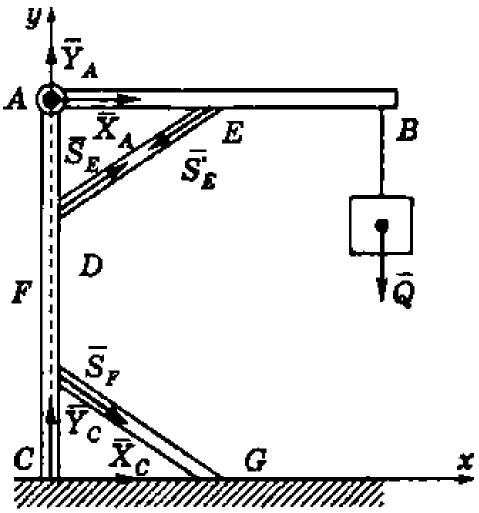
Задача 4.44

Горизонтальная балка AB длиной 2 м, прикрепленная к вертикальному столбу AC в точке A и подпертая подкосом DE, несет на конце груз Q весом 500 Н; столб AC укреплен подкосом FG, причем $AE = CG = 1$ м; подкосы DE и FG наклонены под углом 45° к горизонту. Найти усилия S_E и S_F в подкосах DE и FG и реакцию грунта в точке C, предполагая, что крепления шарнирные, и пренебрегая весом балки, столба и подкосов.



Решение

Первый объект равновесия — балка AB (см. рисунок). Составим для нее уравнения (в проекциях на оси x и y и для моментов относительно точки A):



$$\begin{cases} X_A - S'_E \cos 45° = 0, \\ Y_A - S'_E \cos 45° - Q = 0, \\ Q \cdot 2 - S'_E \cos 45° \cdot 1 = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$S'_E = -\frac{Q \cdot 2}{\cos 45°} = -\frac{500 \cdot 2}{0{,}707} = -1414{,}42 \text{ Н},$$

$$Y_A = Q + S'_E \cos 45° = 500 - 1000 = -500 \text{ Н},$$

$$X_A = S'_E \cos 45° = -1000 \text{ Н}.$$

Второй объект равновесия — вся система в целом. Аналогичные уравнения равновесия для нее:

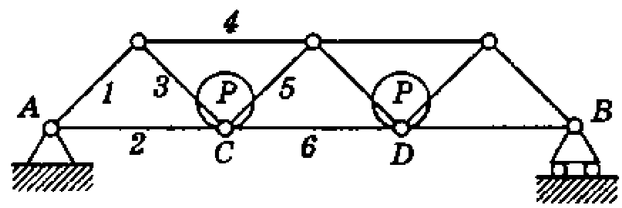
$$\begin{cases} X_A + X_C + S_E \cos 45° + S_F \cos 45° = 0, \\ Y_A + Y_C + S_E \cos 45° - S_F \cos 45° - Q = 0, \\ -Q \cdot 2 + S_E \cdot 1 \cdot \cos 45° + S_F \cdot 3 \cos 45° + X_C \cdot 4 = 0. \end{cases}$$

Решив систему (учитывая, что $S_E = S'_E$), найдем все искомые величины.

Ответ: $S_E = -1414$ Н; $S_F = -1414$ Н; $X_C = 1000$ Н; $Y_C = -500$ Н.

Задача 4.45

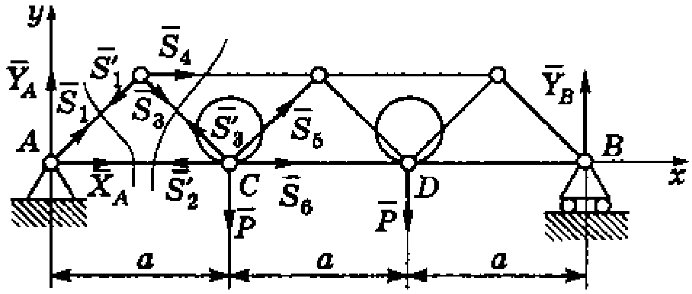
В мостовой ферме, изображенной на рисунке, на узлы C и D приходится одинаковая вертикальная нагрузка $P = 100$ кН; наклонные стержни составляют углы 45° с горизонтом. Найти усилия в стержнях *1*, *2*, *3*, *4*, *5* и *6*, вызываемые данной нагрузкой.



Решение

Рассмотрим ферму целиком (см. рисунок) и запишем для нее уравнения равновесия (в проекциях на оси x и y и для моментов относительно точки A):

$$\begin{cases} X_A = 0, \\ Y_A + Y_B - P - P = 0, \\ -P \cdot a - P \cdot 2a + Y_B \cdot 3a = 0. \end{cases}$$



Следовательно,

$$Y_B = P = 100 \text{ кН},$$

$$Y_A = 2P - Y_B = P = 100 \text{ кН}.$$

Вырежем узел A для определения усилий $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$. Запишем для него уравнения равновесия в проекциях на оси:

$$\begin{cases} S_1 \cos 45° + S_2 = 0, \\ Y_A + S_1 \cos 45°. \end{cases}$$

Следовательно,

$$S_1 = -\frac{Y_A}{\cos 45°} = -\frac{100}{0{,}707} = -141 \text{ кН},$$

$$S_2 = -S_1 \cos 45° = 100 \text{ кН}.$$

Вырежем узел K и запишем уравнения, аналогичные предыдущим:

$$\begin{cases} -S_1 \cos 45° + S_4 + S_3 \cos 45° = 0, \\ -S_1' \cos 45° - S_3 \cos 45° = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$S_1' = -S_3 = -141 \Rightarrow S_3 = 141 \text{ кН};$$

$$S_4 = (S_1' - S_3)\cos 45° = -200 \text{ кН}.$$

Вырежем узел C, запишем аналогичные уравнения и найдем усилия $\overline{S}_5$, $\overline{S}_6$:

$$\begin{cases} -S_2' + S_6 + S_5\cos 45° - S_3'\cos 45° = 0, \\ -P + S_3'\cos 45° + S_5\cos 45° = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

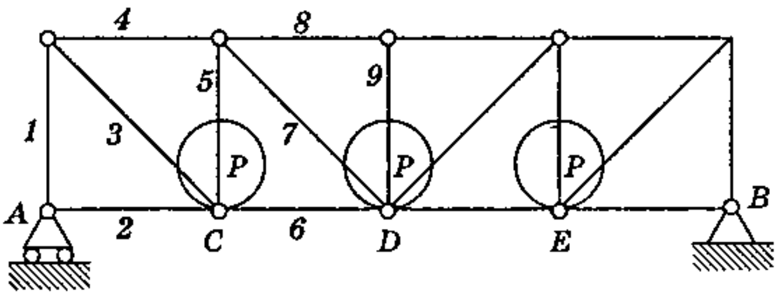
$$S_5 = P - S_3'\cos 45° = 100 - 141 \cdot 0{,}707 = 0,$$

$$S_6 = S_2' + S_5\cos 45° + S_3\cos 45° = 100 + 141 \cdot 0{,}707 = 200 \text{ кН}.$$

Ответ: $S_1 = -141$ кН; $S_2 = 100$ кН; $S_3 = 141$ кН; $S_4 = -200$ кН; $S_5 = 0$; $S_6 = 200$ кН.

Задача 4.46

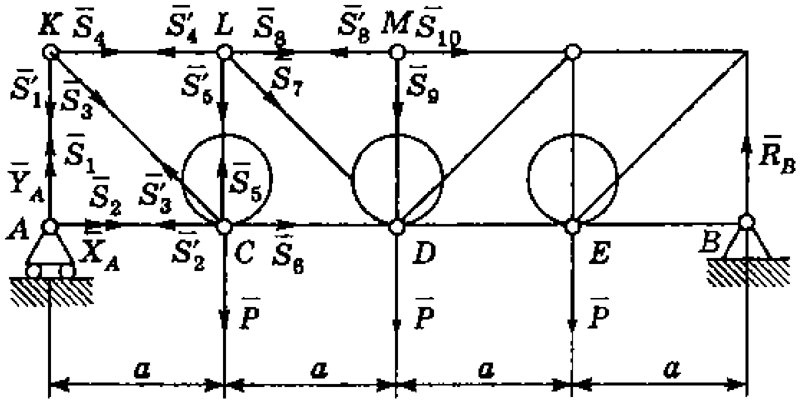
В мостовой ферме, изображенной на рисунке, узлы C, D и E загружены одинаковой вертикальной нагрузкой $P = 100$ кН; наклонные стержни составляют углы 45° с горизонтом. Найти усилия в стержнях *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*, *7*, *8* и *9*, вызываемые данной нагрузкой.



Решение

Рассмотрим ферму целиком (см. рисунок). Найдем опорные реакции, для этого составим уравнения равновесия (в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси и для моментов относительно точки A):

$$\begin{cases} X_A = 0, \\ R_B + Y_A - 3P = 0, \\ -P \cdot a - P \cdot 2a - P \cdot 3a + R_B \cdot 4a = 0. \end{cases}$$



Следовательно,

$$R_B = \frac{6P}{4} = \frac{600}{4} = 150 \text{ кН},$$

$$Y_A = 3P - R_B = 300 - 150 = 150 \text{ кН}.$$

Вырежем узел A и составим уравнения равновесия (в проекциях на оси):

$$\begin{cases} X_A + S_2 = 0 \\ Y_A + S_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_2 = -X_A \\ S_1 = -Y_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_2 = 0 \\ S_1 = -150 \text{ кН}. \end{cases}$$

Вырежем узел K и составим аналогичные уравнения равновесия:

$$\begin{cases} S_4 + S_3 \cos 45° = 0, \\ -S_1' - S_3 \cos 45° = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$S_3 = -\frac{S_1}{\cos 45°} = \frac{150}{0{,}707} = 212 \text{ кН},$$

$$S_4 = -S_3 \cos 45° = -150 \text{ кН}.$$

Вырежем узел C и найдем усилия $\bar{S}_5$ и $\bar{S}_6$, составив уравнения равновесия:

$$\begin{cases} -S_2' + S_6 - S_3 \cos 45° = 0, \\ S_3' \cos 45° - P + S_5 = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$S_6 = S_3 \cos 45° = 212 \cdot 0{,}707 = 150 \text{ кН};$$

$$S_5 = P - S_3 \cos 45° = 100 - 212 \cdot 0{,}707 = -50 \text{ кН}.$$

Вырежем узел L и найдем усилия $\overline{S}_8$ и $\overline{S}_7$, составив уравнения равновесия:

$$\begin{cases} -S_4' + S_8 + S_7 \cos 45° = 0, \\ -S_5' - S_7 \cos 45° = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$S_7 = -\frac{S_5'}{\cos 45°} = \frac{50}{0{,}707} = 71 \text{ кН};$$

$$S_8 = S_4' - S_7 \cos 45° = -150 - 50 = -200 \text{ кН}.$$

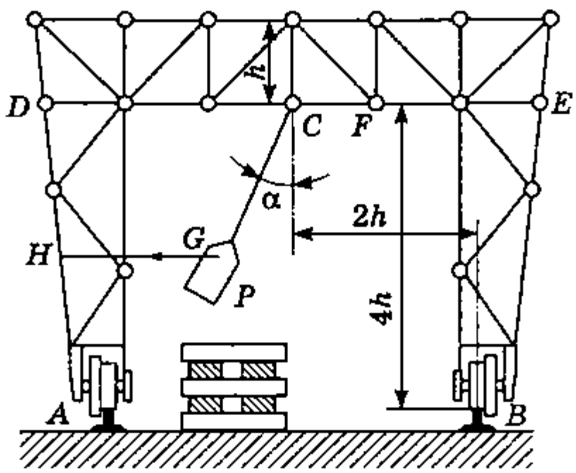
Вырежем узел M и найдем усилие $\overline{S}_9$, записав уравнение равновесия в проекциях на вертикальную ось:

$$S_9 = 0.$$

О т в е т: $S_1 = -150$ кН; $S_2 = 0$; $S_3 = 212$ кН; $S_4 = -150$ кН; $S_5 = -50$ кН; $S_6 = 150$ кН; $S_7 = 71$ кН; $S_8 = -200$ кН; $S_9 = 0$.

Задача 4.47

Для сборки моста устроен временный деревянный кран, перемещающийся по рельсам A и B на колесах. К среднему узлу C нижнего пояса DE крана прикреплен блок, служащий для поднятия тяжести с помощью цепи. Вес поднимаемого с подмостей груза $P = 50$ кН, причем в момент отделения его от подмостей направление цепи составляет с вертикалью угол $\alpha = 20°$;



во избежание колебаний груза он оттягивается горизонтальным канатом GH. Предполагая, что горизонтальная составляющая натяжения цепи воспринимается одним правым рельсом B, определить усилие S_1 в горизонтальном стержне CF в момент отделения груза от подмостей и сравнить его с тем усилием S_2, которое получилось бы при угле $\alpha = 0°$. Размеры указаны на рисунке.

Решение

Покажем на рисунке силы, действующие на блок.

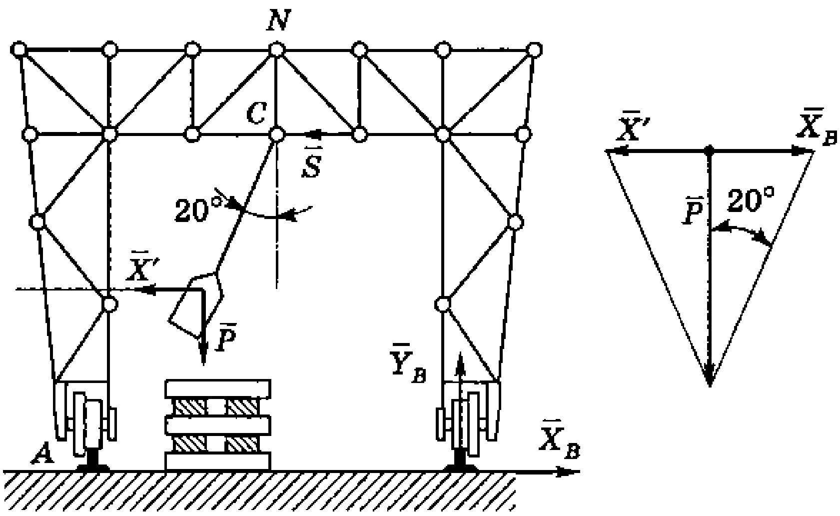
Канат GH тянет с усилием $X' = P \cdot \mathrm{tg}\, 20°$, а так как другие силы по горизонтальной оси не действуют, то

$$X_B = X' = P \cdot \mathrm{tg}\, 20° = 18{,}2 \text{ кН}.$$

Составим уравнение моментов относительно точки A:

$$Y_B \cdot 4h + X' \cdot 4h - P \cdot 2h = 0 \Rightarrow$$

$$Y_B = \frac{P}{2} - X'.$$



Сила $\overline{X'}$ в момент, когда груз будет поднят, приложена в точке C.

Составим уравнение моментов относительно точки N (за объект равновесия принята правая часть крана):

$$-S \cdot h + Y_B \cdot 2h + X_B \cdot 5h = 0 \Rightarrow S = 104{,}6 \text{ кН}.$$

Таким образом, при $\alpha = 20°$ $S = S_1 = 104{,}6$ кН.

Если бы $\alpha = 0$, то $X_B = X' = 0$, следовательно, $Y_B = \frac{P}{2}$, поэтому предыдущее уравнение моментов имело бы вид

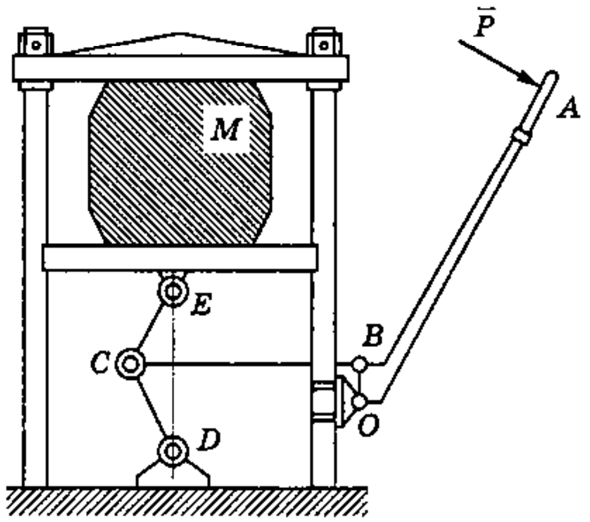
$$S \cdot h - Y_B \cdot 2h = 0 \Rightarrow S = 2Y_B = P = 50 \text{ кН}.$$

Итак, если $\alpha = 0°$, то $S = S_2 = 50$ кН.

Ответ: S_1 = 104,6 кН; S_2 = 50 кН.

Задача 4.48

Найти величину усилия, сжимающего предмет M в прессе, при следующих условиях: усилие P = 0,2 кН и направлено перпендикулярно рычагу OA, имеющему неподвижную ось O; в рассматриваемом положении пресса тяж BC перпендикулярен OB и делит $\angle ECD$ пополам, причем $\angle CED = \operatorname{arctg} 0,2 = 11°20'$; OA = 1 м; OB = 10 см.



Решение

Покажем на рис. 1 силы, действующие на систему.

Рассмотрим рычаг OA и составим уравнение моментов относительно точки O:

$$Q \cdot OB - P \cdot OA = 0 \Rightarrow Q = \frac{P \cdot OA}{OB} = 10P = 2 \text{ кН}.$$

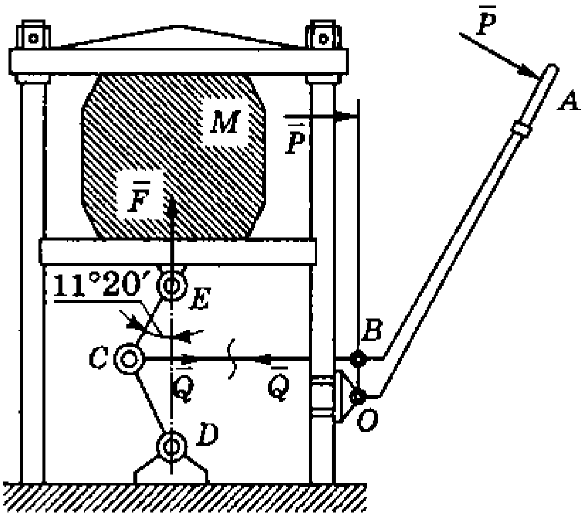


Рис. 1

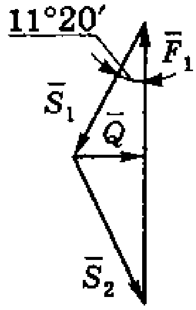


Рис. 2

В узле C будут действовать силы $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$, $\bar{Q}$ (см. силовой треугольник). Из подобия силового треугольника (рис. 2) и треугольника ECD запишем

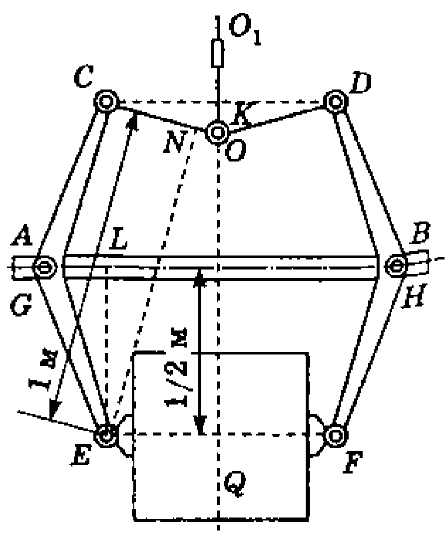
$$F_1 = 2F; \quad \operatorname{tg} 11°20' = \frac{Q}{F} \Rightarrow$$

$$F = \frac{Q}{\operatorname{tg} 11°20'} = 10 \text{ кН}.$$

Ответ: 10 кН.

Задача 4.49

Цепь OO_1 самозахватывающего грузы приспособления соединена шарниром O со стержнями $OC = OD = 60$ см. Стержни соединены шарнирами же с двумя равными ломаными рычагами CAE и DBF, которые могут вращаться вокруг точек A и B соединительного стержня GH. В шарнирах E и F особые колодки удерживают груз $Q = 10$ кН трением. Расстояние точки E от стержня GH равно $EL = 50$ см, а расстояние ее



от стержня OC равно $EN = 1$ м. Высота треугольника COD равна $OK = 10$ см. Найти силу, растягивающую соединительный стержень GH, пренебрегая весом частей механизма.

Решение

Покажем на рис. 1 силы, действующие на систему.

Силы $\bar{Q}$, $\bar{S}_{OC}$ и $\bar{S}_{OD}$ сходятся в одной точке. Построив силовой треугольник (рис. 2), найдем S_{OC}. Треугольник OCK подобен силовому треугольнику OPM, значит

$$\frac{S_{OC}}{Q/2} = \frac{60}{10} \Rightarrow S_{OC} = \frac{Q \cdot 60}{20} = 3Q = 30 \text{ кН}.$$

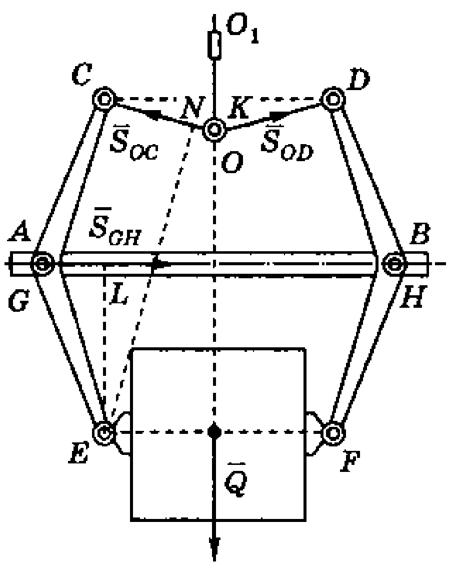


Рис. 1

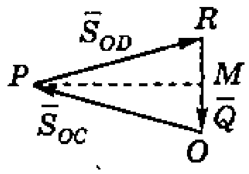


Рис. 2

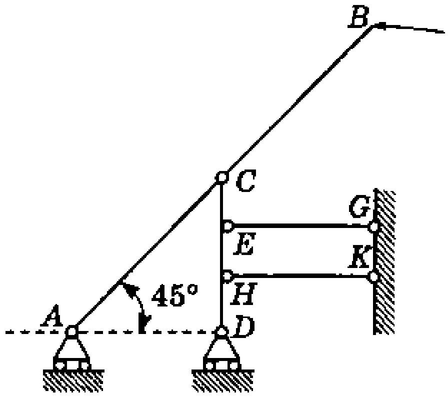
Для определения S_{GH} составим уравнение равновесия для моментов сил относительно точки E:

$$S_{OC} \cdot 1 - S_{GH} \cdot 0{,}5 = 0 \Rightarrow S_{GH} = \frac{S_{OC}}{0{,}5} = 60 \text{ кН}.$$

Ответ: 60 кН.

Задача 4.50

Определить реакции шарниров A, C, D, E и H в стержневой системе, изображенной на рисунке, если $CE = EH = HD$ и $AC = CB$.



Решение

Первый объект равновесия — вся система в целом (рис. 1). Составим уравнения равновесия (в проекциях на оси x и y и для моментов относительно точки A):

$$\begin{cases} R_E + R_H - P = 0, \\ R_D + R_A = 0, \\ R_D \cdot AD + P \cdot AB\cos 45^\circ - R_E \cdot DE - R_H \cdot DH = 0. \end{cases}$$

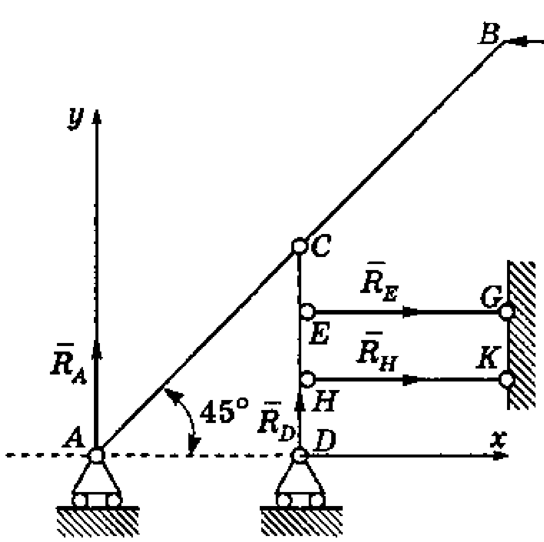


Рис. 1

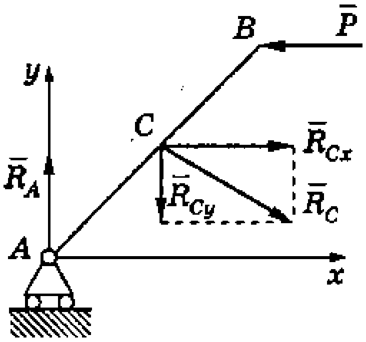


Рис. 2

Второй объект равновесия — стержень ACB (рис. 2) (аналогичные уравнения):

$$\begin{cases} R_{Cx} - P = 0, \\ R_A - R_{Cy} = 0, \\ -R_{Cy} \cdot AC\cos 45^\circ - R_{Cx} \cdot AC\cos 45^\circ + P \cdot AB\cos 45^\circ = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $R_{Cx} = P$;

$$R_{Cy} = \frac{P \cdot AB - P \cdot AC}{AC} = \frac{P(AB - AC)}{AC} = P;$$

тогда

$$R_C = \sqrt{R_{Cx}^2 + R_{Cy}^2} = \sqrt{P^2 + P^2} = \sqrt{2}P,$$

$$R_A = R_{Cy} = P.$$

Из первой системы найдем:

$$R_D = -R_A = -P,$$

$$R_H = P - R_E.$$

Тогда из третьего уравнения первой системы получим

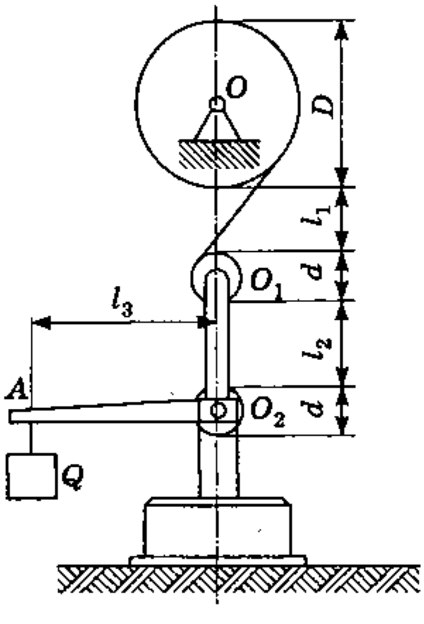
$$R_E = P\frac{AD - AB\dfrac{\sqrt{2}}{2} + DH}{DH - DE} = 2P.$$

Следовательно,

$$R_H = -P.$$

Ответ: $R_A = -R_D = -R_H = P$; $R_E = 2P$; $R_C = \sqrt{2}P$; стержень EG растянут, стержень HK сжат.

Задача 4.51



Натяжение приводного ремня, осуществляемое при помощи ломаного рычага AO_2O_1 и натяжного ролика O_1, равно по ту и другую сторону ролика P. Найти величину груза Q при равновесии системы, если дано: $\angle AO_2O_1 = 90°$, $D = 55$ см, $d = 15$ см, $l_1 = 35$ см, $l_2 = 15$ см, $l_3 = 45$ см, $P = 18$ Н.

Решение

Покажем на рисунке силы, действующие на систему.

Составим уравнение моментов относительно точки O_2:

$$Ql_3 - Px - P\frac{d}{2} = 0.$$

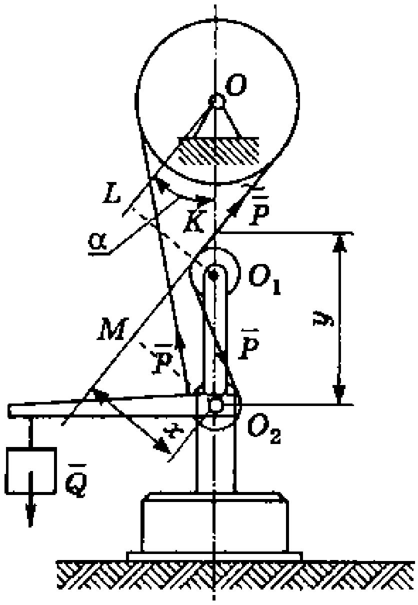
Из треугольника O_2MK получим

$$\sin\alpha = \frac{x}{y}, \text{ или } x = y\sin\alpha;$$

из треугольника O_1LO —

$$\sin\alpha = \frac{D/2 + d/2}{D/2 + d/2 + l_1} = \frac{1}{2},$$

$$O_1K = \frac{d/2}{\sin\alpha} = \frac{d}{2\sin\alpha}.$$



Тогда

$$y = \frac{d}{2} + l_2 + \frac{d}{2} + O_1K = 0{,}45;$$

$$x = 0{,}45 \cdot 0{,}5 = 0{,}225.$$

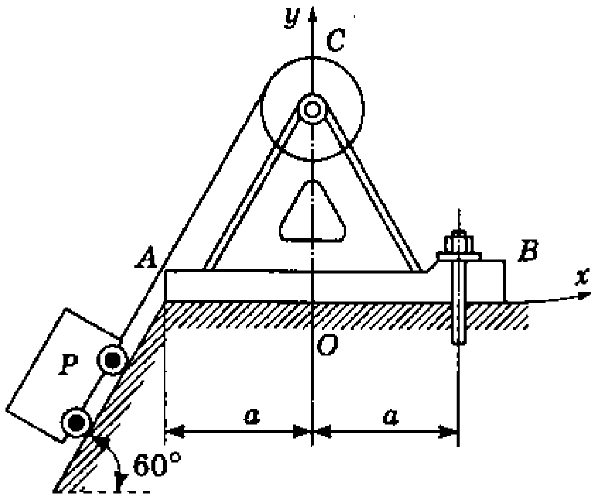
Из уравнения моментов

$$Q = \frac{P\left(x + \frac{d}{2}\right)}{l_3} = \frac{18\left(0{,}225 + \frac{0{,}15}{2}\right)}{0{,}45} = 12 \text{ Н}.$$

О т в е т: Q = 12 Н.

Задача 4.52

Груз P весом 4,8 кН удерживается на гладкой наклонной плоскости посредством веревки, параллельной плоскости и намотанной на неподвижный вал лебедки ABC. Угол наклона плоскости к горизонту 60°. Вес лебедки Q = 2,4 кН, ее центр тяжести находится на прямой CO; лебедка опирает-

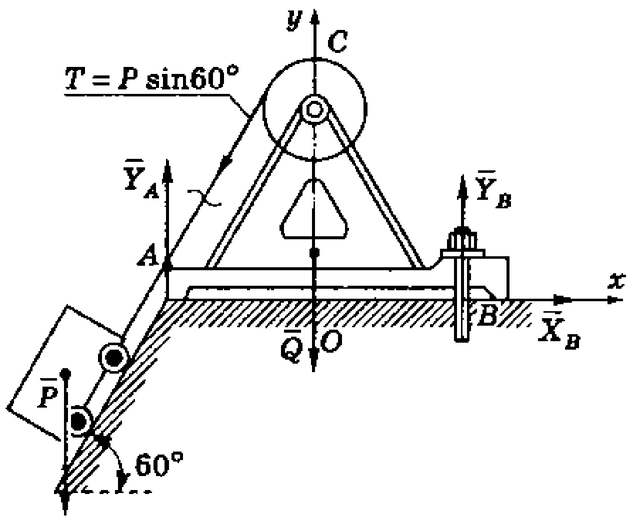


ся в точке A на гладкий пол, а в точке B прикреплена к полу болтом. Найти опорные реакции, пренебрегая расстоянием веревки от плоскости.

Решение

Изобразим на рисунке силы, действующие на систему, и составим уравнения равновесия (в проекциях на оси и для моментов относительно точки B):

$$\begin{cases} -P\sin 60^\circ \cos 60^\circ + X_B = 0, \\ -P\sin 60^\circ \sin 60^\circ - Q + Y_A + Y_B = 0, \\ P\sin 60^\circ \cos 60^\circ \cdot 2a \sin 60^\circ + P\sin^2 60^\circ \cdot a + Q\cdot a - Y_A \cdot 2a = 0. \end{cases}$$



Из третьего уравнения системы получим

$$Y_A = \frac{3}{4}P + \frac{Q}{2} = 4{,}8 \text{ кН};$$

из первого —

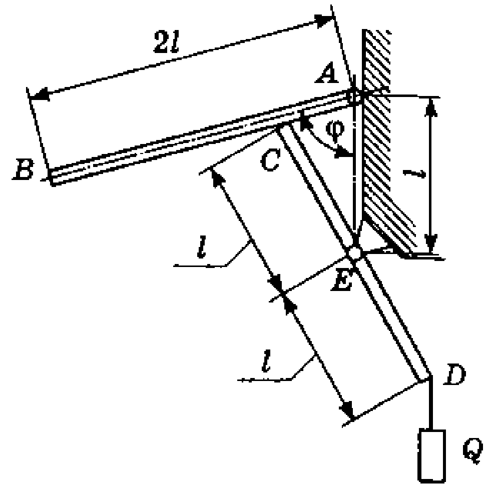
$$X_B = P\sin 60^\circ \cos 60^\circ = 4{,}8\cdot 0{,}866\cdot 0{,}5 = 2{,}08 \text{ кН};$$

из второго —

$$Y_B = P\sin^2 60^\circ + Q - Y_A = 1{,}2 \text{ кН}.$$

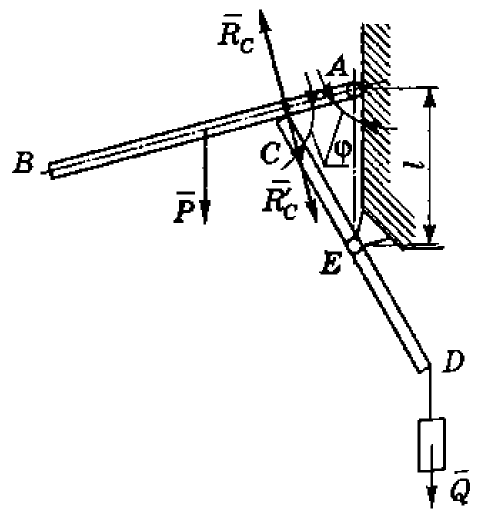
Ответ: $Y_A = 4{,}8$ кН; $X_B = 2{,}08$ кН; $Y_B = 1{,}2$ кН.

Задача 4.53



Однородный стержень AB длиной $2l$ и весом P может вращаться вокруг горизонтальной оси на конце A стержня. Он опирается на однородный стержень CD той же длины $2l$, который может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину E. Точки A и E лежат на одной вертикали на расстоянии $AE = l$. К концу D подвешен груз $Q = 2P$. Определить величину угла φ, образуемого стержнем AB с вертикалью в положении равновесия, пренебрегая трением.

Решение



Покажем на рисунке действующие на систему силы.

Заметим, что $\overline{R}_C \perp AB$.

Рассмотрим первый объект равновесия — балку CD. Составим для нее уравнение моментов относительно точки E:

$$R'_C l \sin(90^\circ - \varphi) - Ql \sin(180^\circ - 2\varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$R'_C = Q\frac{\sin 2\varphi}{\cos\varphi}.$$

Второй объект равновесия — балка AB. Запишем для нее уравнение моментов относительно точки A:

$$Pl\sin\varphi - R_C \cdot AC = 0.$$

Треугольник AEC — равнобедренный, поэтому $AC = 2l\cos\varphi$. С учетом этого и полученного выше выражения для R'_C последнее уравнение моментов перепишем в виде

$$Pl\sin\varphi = Q\frac{\sin 2\varphi}{\cos\varphi}2l\cos\varphi.$$

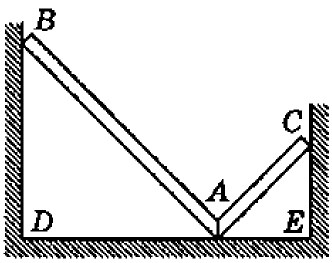
Поскольку $Q = 2P$, то

$$\cos\varphi = \frac{1}{8}, \quad \varphi = 82°50'.$$

О т в е т: $\varphi = \arccos\frac{1}{8} = 82°50'$.

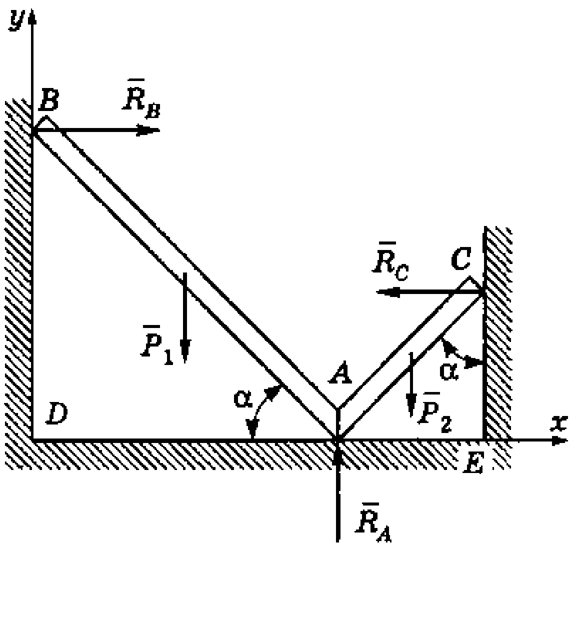
Задача 4.54

Два однородных стержня AB и AC опираются в точке A на гладкий горизонтальный пол и друг на друга по гладким вертикальным плоскостям, а в точках B и C на гладкие вертикальные стены. Определить расстояние DE между стенами, при котором стержни находятся в положении равновесия, образуя друг с другом угол в 90°, если дано: длина AB равна a, длина AC равна b, вес AB равен P_1, вес AC равен P_2.



Р е ш е н и е

Покажем на рисунке действующие на систему силы.



Составим уравнения равновесия в проекциях на оси x и y:

$$\begin{cases} R_B - R_C = 0, \\ R_A - P_1 - P_2 = 0. \end{cases}$$

Уравнение моментов относительно точки A для стержня AB:

$$-R_B \cdot a\sin\alpha + P_1\frac{a}{2}\cos\alpha = 0,$$

для стержня AC:

$$R_C b\cos\alpha - P_2\frac{b}{2}\sin\alpha = 0.$$

Из всех уравнений равновесия получим

$$R_B = R_C;$$
$$R_A = P_1 + P_2;$$
$$R_B = \frac{P_1}{2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$
$$R_C = \frac{P_2}{2}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Так как $R_B = R_C$, то можно записать

$$\frac{P_1}{2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{P_2}{2}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{P_1}{P_2}.$$

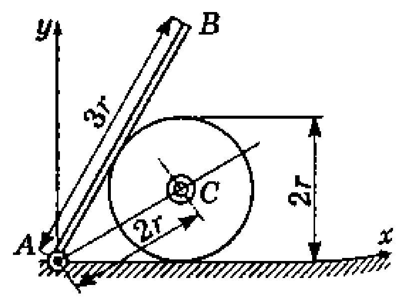
$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}; \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

$$DE = a\cos\alpha + b\sin\alpha = \frac{a\sqrt{P_2} + b\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_1+P_2}}.$$

Ответ: $DE = \dfrac{a\sqrt{P_2} + b\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_1+P_2}}$.

Задача 4.55

Однородный брусок AB, который может вращаться вокруг горизонтальной оси A, опирается на поверхность гладкого цилиндра радиусом r, лежащего на гладкой горизонтальной плоскости и удерживаемого нерастяжимой нитью AC. Вес бруска 16 Н; длина $AB = 3r$, $AC = 2r$. Определить натяжение нити T и давление бруска на шарнир A.



Решение

Из геометрических соображений (рис. 1) имеем: $\angle CAK = 30^\circ$.

Рассмотрим первый объект равновесия — цилиндр. К нему приложены три силы, которые сходятся в точке C: T', N_1', N'.

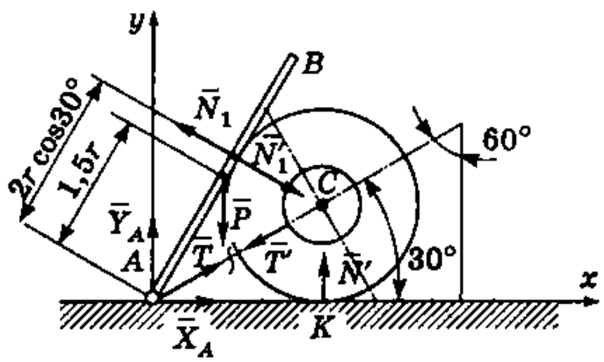


Рис. 1

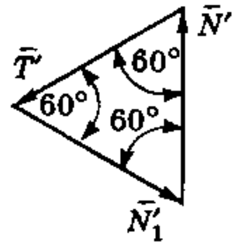


Рис. 2

Силовой треугольник для этих сил равносторонний (рис. 2), значит

$$T' = N_1' = N'.$$

Второй объект равновесия — брусок AB, на который действуют силы $\bar{P}$, $\bar{N}_1$, $\bar{T}$. Составим уравнения равновесия (в проекциях на оси x и y и для моментов относительно точки A):

$$\begin{cases} X_A - N_1 \sin 60^\circ = 0, \\ Y_A - P + N_1 \sin 30^\circ = 0, \\ -P \cdot 1{,}5r \cos 60^\circ + N_1 \cdot 2r \cos 30^\circ = 0. \end{cases}$$

Из системы получим

$$N_1 = \frac{16 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 0{,}866} = 6{,}9 \text{ Н};$$

$$Y_A = P - N_1 \sin 30^\circ = 12{,}5 \text{ Н};$$

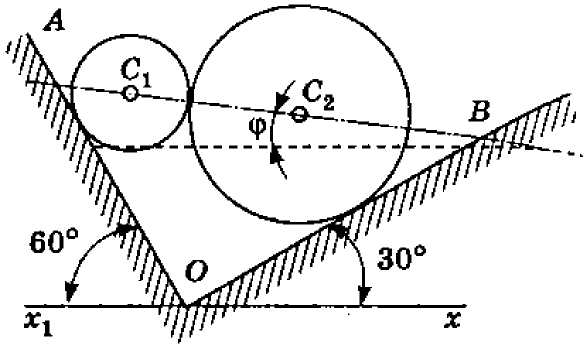
$$X_A = N \sin 60^\circ = 6{,}9 \cdot 0{,}866 = 6 \text{ Н}.$$

Поскольку $T = T'$, $N_1' = N_1$ и $T' = N_1'$, то $T = N_1 = 6{,}9$ Н.

Ответ: $T = 6{,}9$ Н; $X_A = 6$ Н; $Y_A = 12{,}5$ Н.

Задача 4.56

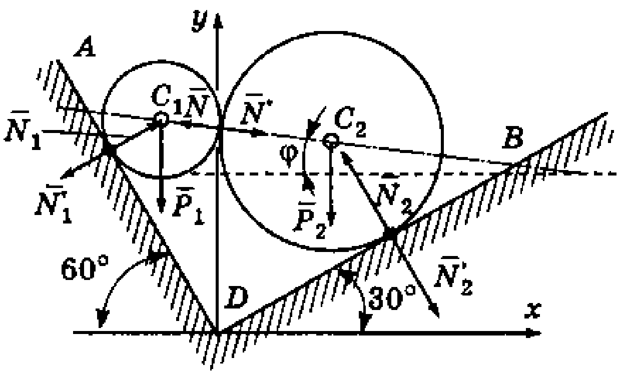
Между двумя гладкими наклонными поверхностями OA и OB положены два гладких соприкасающихся однородных цилиндра: цилиндр с центром C_1 весом $P_1 = 10$ Н и цилиндр с центром C_2 весом $P_2 = 30$ Н. Определить угол φ, составляемый прямой C_1C_2 с горизонтальной осью xOx_1, давления N_1 и N_2 цилиндров на плоскости, а также величину N взаимного давления цилиндров, если угол AOx_1 равен 60°, а угол BOx равен 30°.



Решение

Первый объект равновесия — вся система (см. рисунок). Составим для нее соответствующие уравнения (в проекциях на ось x и для моментов относительно точек C_1 и C_2):

$$\begin{cases} N_1 = \sin 60^\circ - N_2 \cos\varphi = 0, \\ -P_2(r+R)\cos\varphi - N_2 \sin 30^\circ (r+R)\sin\varphi + N_2 \cos 30^\circ (r+R)\cos\varphi = 0, \\ P_1(r+R)\cos\varphi - N_1 \cos 60^\circ (r+R)\cos\varphi + N_1 \sin 60^\circ (r+R)\sin\varphi = 0. \end{cases}$$



Из первого уравнения системы получим

$$N_2 = \sqrt{3} N_1;$$

из третьего и второго —

$$P_1 \cos\varphi = N_1\left(\frac{1}{2}\cos\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\right),$$

$$P_2 \cos\varphi = N_1\left(\frac{3}{2}\cos\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\right).$$

Найдем:

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{\frac{1}{2}\cos\varphi-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi}{\frac{3}{2}\cos\varphi-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi},$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{3P_1-P_2}{P_1-P_2}.$$

Подставив выражения для P_1 и P_2, получим

$$\operatorname{tg}\varphi=0,\quad \varphi=0.$$

Тогда из второго уравнения системы следует

$$N_2=\frac{P_2}{\cos 30^\circ}=34{,}6;\quad N_1=\frac{N_2}{\sqrt{3}}=\frac{34{,}6}{1{,}73}=20\ \text{Н}.$$

Рассмотрим цилиндр с центром C_1 и запишем для него уравнение равновесия (в проекциях на ось x):

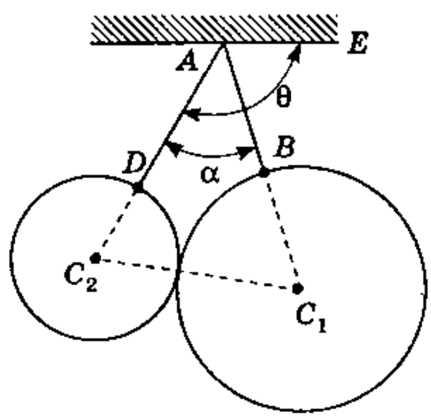
$$-N_1'\sin 60^\circ+N'\cos\varphi=0\Rightarrow N'=\frac{N_1'\sin 60^\circ}{\cos\varphi}.$$

$$N=N'=N_1\sin 60^\circ=20\cdot 0{,}866=17{,}3\ \text{Н}.$$

О т в е т: $\varphi=0$; N_1 = 20 Н; N_2 = 34,6 Н; N = 17,3 Н.

Задача 4.57

Два гладких однородных шара C_1 и C_2, радиусы которых R_1 и R_2, а вес P_1 и P_2, подвешены на веревках AB и AD в точке A; $AB = l_1$; $AD = l_2$; $l_1 + R_1 = l_2 + R_2$; угол BAD равен α. Определить угол θ, образуемый веревкой AD с горизонтальной плоскостью AE, натяжения веревок T_1, T_2 и давление одного шара на другой.



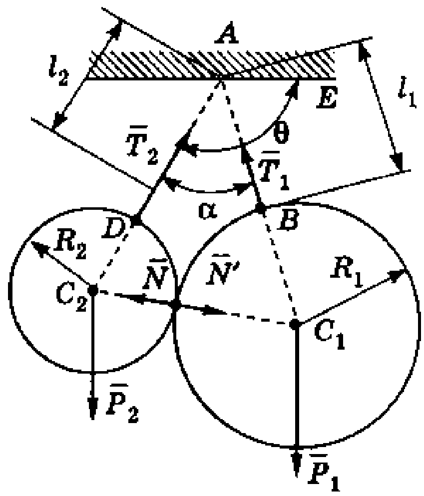
Решение

Покажем на рисунке силы, действующие на систему.

Составим уравнения суммы моментов относительно точки A для первого и второго шара:

$$\begin{cases} -P_1(l_1+R_1)\sin[90^\circ-(\theta-\alpha)]+N'(l_1+R_1)\cos(\alpha/2)=0, \\ P_2(l_2+R_2)\sin(\theta-90^\circ)-N(l_2+R_2)\cos(\alpha/2)=0. \end{cases}$$

Следовательно,



$$N=\frac{P_2\cos\theta}{\cos(\alpha/2)},$$

и тогда из первого уравнения системы получим

$$P\sin(\alpha-\theta+90^\circ)=P_2\sin(\theta-90^\circ).$$

Решим тригонометрическое уравнение относительно θ:

$$P_1\cos(\alpha-\theta)=-P_2\cos\theta,$$

$$P_1(\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta)=-P_2\cos\theta,$$

$$P_1\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\theta=-P_1\cos\alpha-P_2,\quad \mathrm{tg}\,\theta=-\frac{P_2+P_1\cos\alpha}{P_1\sin\alpha}.$$

Для определения $\bar T_1$ и $\bar T_2$ рассмотрим равновесие каждого шара, спроецировав силы на ось AE. Для первого шара:

$$T_1\cos(\alpha/2)-P_1\sin(\theta-\alpha/2)=0\Rightarrow T_1=P_1\frac{\sin(\theta-\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)},$$

для второго шара:

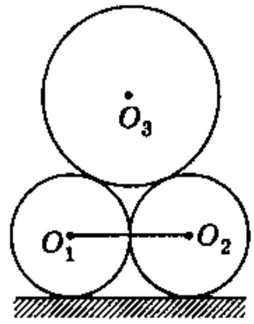
$$T_2\cos(\alpha/2)-P_2\sin(\theta-\alpha/2)=0\Rightarrow T_2=P_2\frac{\sin(\theta-\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}.$$

Ответ: $\mathrm{tg}\,\theta=-\dfrac{P_2+P_1\cos\alpha}{P_1\sin\alpha}$; $T_1=P_1\dfrac{\sin(\theta-\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}$;

$T_2=P_2\dfrac{\sin(\theta-\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}$; $N=\dfrac{P_2\cos\theta}{\cos(\alpha/2)}$.

Задача 4.58

На двух одинаковых круглых однородных цилиндрах радиусом r и весом P каждый, лежащих на горизонтальной плоскости и связанных за центры нерастяжимой нитью длиной $2r$, покоится третий однородный цилиндр радиусом R и весом Q. Определить натяжение нити, давление цилиндров на плоскость и взаимное давление цилиндров. Трением пренебречь.



Решение

Рассмотрим всю систему в целом (рис. 1) и составим уравнение равновесия в проекциях на вертикальную ось:

$$N_2 + N_2' - Q - 2P = 0.$$

В силу симметрии $N_2 = N_2'$, поэтому

$$N_2 = N_2' = P + \frac{Q}{2}.$$

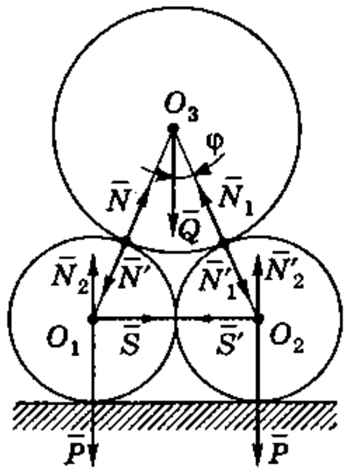


Рис. 1

Из геометрических соображений получим

$$\sin\varphi = \frac{r}{r+R}.$$

Рассмотрим равновесие большого шара — он находится под действием трех сходящихся сил $\bar{Q}$, $\bar{N}_1$ и $\bar{N}$. Для этих сил построим силовой треугольник (рис. 2), из которого следует

$$\cos\varphi = \frac{Q}{2N} \Rightarrow$$

$$N = \frac{Q}{2\cos\varphi} = \frac{Q}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{r+R}\right)^2}} = \frac{Q(R+r)}{2\sqrt{R^2+2rR}}.$$

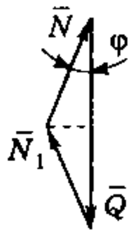


Рис. 2

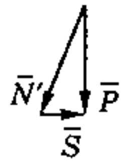


Рис. 3

Если рассмотреть равновесие любого из нижних шаров и соответствующий силовой треугольник (рис. 3), то получим следующее уравнение (в проекциях на горизонтальную ось):

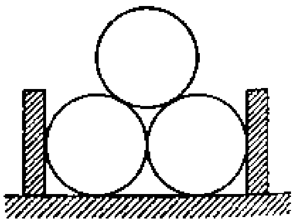
$$N' \sin \varphi - S = 0 \Rightarrow S = N' \sin \varphi = \frac{Q(R+r)\sin \varphi}{2\sqrt{R^2+2rR}} = \frac{Qr}{2\sqrt{R^2+2rR}},$$

$$S' = S.$$

Ответ: давление каждого нижнего цилиндра на плоскость равно $P + \frac{Q}{2}$. Давление между верхним и каждым из нижних цилиндров равно $\frac{Q(R+r)}{2\sqrt{R^2+2rR}}$. Натяжение нити равно $\frac{Qr}{2\sqrt{R^2+2rR}}$.

Задача 4.59

Три одинаковые трубы весом $P = 120$ Н каждая лежат, как указано на рисунке. Определить давление каждой из нижних труб на землю и на удерживающие их с боков стенки. Трением пренебречь.



Решение

Рассмотрим равновесие верхней трубы (рис. 1). Построив силовой треугольник (рис. 2), по теореме синусов можно записать

$$\frac{P}{\sin 120°} = \frac{N_1}{\sin 30°} \Rightarrow N_1 = \frac{P \sin 30°}{\cos 30°} = \frac{120 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{120}{\sqrt{3}}.$$

Рассмотрим равновесие левой трубы (рис. 3) и запишем соответствующие уравнения:
в проекциях на ось x

$$N_2 - N_1' \cos 60° = 0 \Rightarrow$$

$$N_2 = N_1' \cos 60° = 69{,}3 \cdot \frac{1}{2} = 34{,}6 \text{ Н};$$

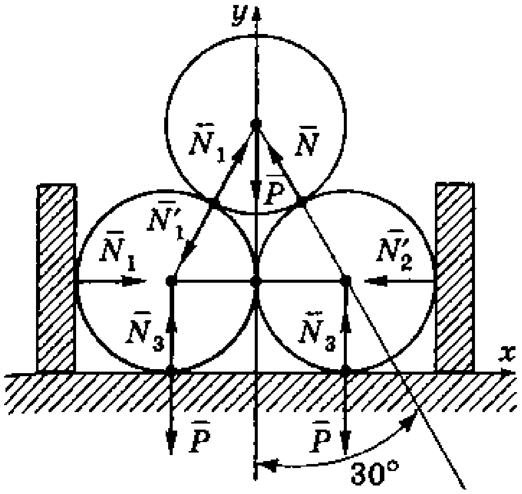


Рис. 1

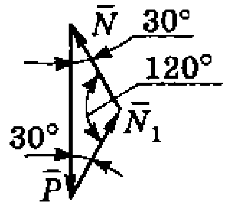


Рис. 2

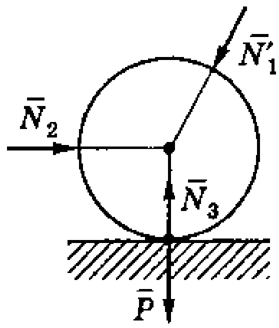


Рис. 3

в проекциях на ось y

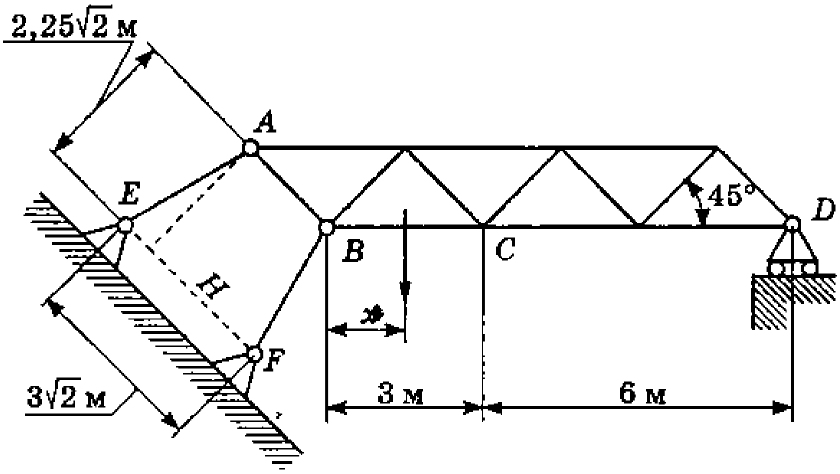
$$N_3 - P - N_1' \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$N_3 = P + N_1' \cos 30^\circ = 120 + 60 = 180 \text{ Н}.$$

О т в е т: давление на землю равно 180 Н;
давление на каждую стенку равно 34,6 Н.

Задача 4.60

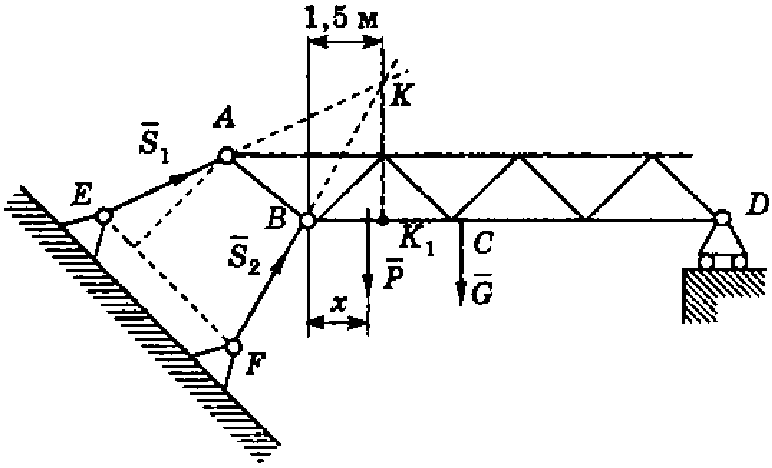
Ферма $ABCD$ в точке D опирается на катки, а в точках A и B поддерживается наклонными стержнями AE и BF, шарнирно укрепленными в точках E и F. Раскосы фермы и прямая EF наклонены к горизонту под углом 45°; длина панели BC равна 3 м; стержни AE и BF одинаковой длины; $EF = 3\sqrt{2}$ м, $AH = 2{,}25\sqrt{2}$ м.



Вес фермы равен 25 кН и направлен по вертикали, проходящей через точку C. Вес нагрузки 112,5 кН. Определить, на каком расстоянии x от точки B нужно расположить нагрузку, чтобы реакция в опоре D стала равна нулю.

Решение

Из геометрических соображений (см. рисунок) получим $BK_1 = K_1C$ (см. задачу 4.23).



Составим сумму моментов всех сил, приложенных к ферме, относительно точки K:

$$P(1{,}5 - x) - G \cdot 1{,}5 = 0 \Rightarrow$$

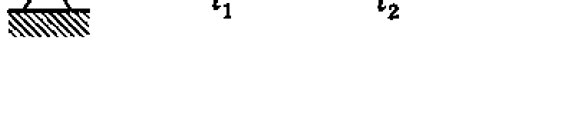
$$x = \frac{(P - G) \cdot 1{,}5}{P} = \frac{(112{,}5 - 25) \cdot 1{,}5}{112{,}5} = 1{,}16 \text{ м}.$$

Ответ: $x = 1{,}16$ м.

Примечание. В задачнике допущена опечатка в ответе.

Задача 4.61

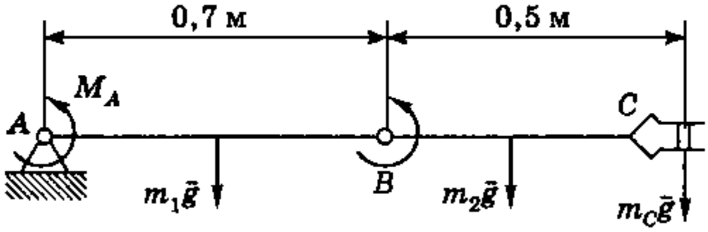
Механизм робота-манипулятора представляет собой шарнирный трехзвенник; звенья поворачиваются в вертикальной плоскости. Найти моменты сил при-



водов в шарнирах A и B механизма робота-манипулятора, необходимые для того, чтобы удерживать звенья механизма в горизонтальном положении. Масса объекта манипулирования m_C = = 15 кг. Длины звеньев: l_1 = 0,7 м, l_2 = 0,5 м. Звенья однородные и их массы соответственно равны: m_1 = 35 кг, m_2 = 25 кг.

Р е ш е н и е

Покажем на рисунке силы, действующие на систему.



Составим сумму моментов всех сил относительно точки A и приравняем к нулю:

$$M_A - (m_1 g \cdot 0{,}35 + m_2 g \cdot 0{,}95 + m_C g \cdot 1{,}2) = 0,$$

$$M_A - 9{,}8(35 \cdot 0{,}35 + 25 \cdot 0{,}95 + 15 \cdot 1{,}2) = 0 \Rightarrow$$

$$M_A = 530 \text{ Н·м}.$$

Составим сумму моментов внешних сил относительно точки B и приравняем ее к нулю:

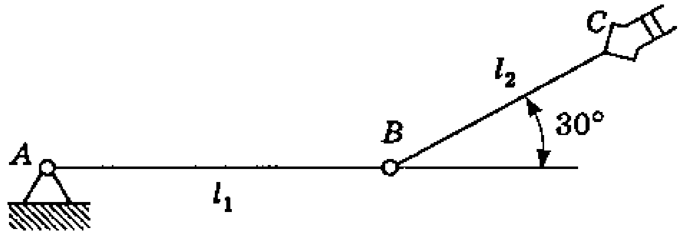
$$M_B - (m_2 g \cdot 0{,}25 + m_C g \cdot 0{,}5) = 0; \quad M_B + 9{,}8(-25 \cdot 0{,}25 - 15 \cdot 0{,}5) = 0$$

$$\Rightarrow M_B \approx 135 \text{ Н·м}.$$

О т в е т: M_A = 530 Н·м, M_B = 135 Н·м.

Задача 4.62

Найти моменты сил приводов в шарнирах механизма робота-манипулятора, находящегося в равновесии, когда второе звено поднято под углом 30° к горизонту. Масса объекта манипулирования m_C = 15 кг. Длины звеньев: l_1 = 0,7 м, l_2 = 0,5 м. Массы звеньев: m_1 = 35 кг, m_2 = 25 кг.



Решение

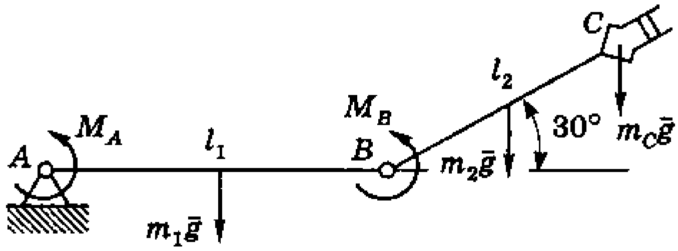
Покажем на рисунке силы, действующие на систему.

Составим сумму моментов сил относительно точки A и приравняем ее к нулю:

$$M_A - [m_1 g \cdot 0{,}35 + m_2 g(0{,}7 + 0{,}25) + m_C g(0{,}7 + 0{,}5)\cos 30^\circ] = 0;$$

$$-9{,}8 \cdot ((35 \cdot 0{,}35 + 25 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}866) + 15(0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0{,}866)) + M_A = 0 \Rightarrow$$

$$M_A \approx 511 \text{ Н·м}.$$



Составим сумму моментов внешних сил относительно точки B и приравняем ее к нулю:

$$M_B - m_2 g \frac{l_2}{2}\cos 30^\circ - m_C g l_2 \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow$$

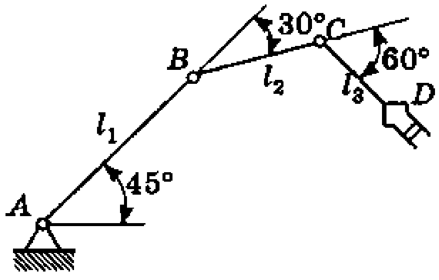
$$M_B = g l_2 \cos 30^\circ \left(\frac{m_2}{2} + m_C\right) = 9{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}866 \cdot \left(\frac{25}{2} + 15\right) =$$

$$= 9{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}866 \cdot 27{,}5 = 116{,}69 \approx 117 \text{ Н·м}.$$

Ответ: $M_A \doteq 510$ Н·м; $M_B = 117$ Н·м.

Задача 4.63

Механизм робота-манипулятора в положении равновесия расположен в вертикальной плоскости. Длины звеньев: $l_1 = 0{,}8$ м, $l_2 = 0{,}5$ м, $l_3 = 0{,}3$ м. Массы звеньев: $m_1 = 40$ кг, $m_2 = 25$ кг, $m_3 = 15$ кг. Найти моменты сил приводов в шарнирах, если рука CD манипулятора несет груз, масса которого $m_D = 15$ кг. Звенья считать однородными стержнями.



Решение

Вес каждого звена приложен в его середине (центре тяжести). Из геометрических соображений определим углы (рис. 1), а затем составим уравнения для моментов сил.

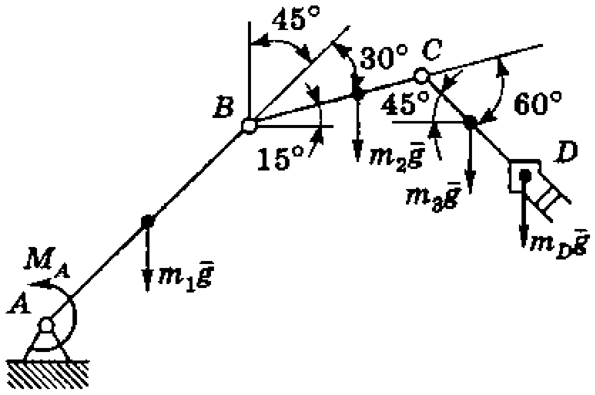


Рис. 1

Уравнение равновесия для моментов сил относительно точки A (рис. 1):

$$M_A - \left[m_1 g \frac{l_1}{2}\cos 45° + m_2 g\left(l_1 \cos 45° + \frac{l_2}{2}\cos 15°\right) + \right.$$

$$+ m_3 g\left(l_1 \cos 45° + l_2 \cos 15° + \frac{l_3}{2}\cos 45°\right) +$$

$$\left. + m_D g\left(l_1 \cos 45° + l_2 \cos 15° + l_3 \cos 45°\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow M_A = 9{,}8[40 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}707 + 25(0{,}8 \cdot 0{,}707 + 0{,}25 \cdot 0{,}97) +$$

$$+ 15(0{,}8 \cdot 0{,}707 + 0{,}5 \cdot 0{,}97 + 0{,}15 \cdot 0{,}707) +$$

$$+ 15(0{,}8 \cdot 0{,}707 + 0{,}5 \cdot 0{,}97 + 0{,}3 \cdot 0{,}707)] \approx 665 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Уравнение равновесия для моментов сил относительно точки B (рис. 2):

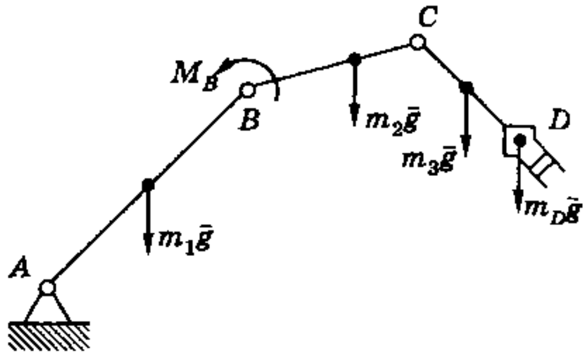


Рис. 2

$$M_B - g\left[m_2\frac{l_2}{2}\cos 15^\circ + \right.$$

$$+ m_3\left(l_2\cos 15^\circ + \frac{l_3}{2}\cos 45^\circ\right) +$$

$$\left. + m_D\left(l_2\cos 15^\circ + l_3\cos 45^\circ\right)\right] = 0 \Rightarrow$$

$$M_B = 9{,}8[25\cdot 0{,}25\cdot 0{,}97 +$$

$$+15(0{,}5\cdot 0{,}97 + 0{,}15\cdot 0{,}707) +$$

$$+15(0{,}5\cdot 0{,}97 + 0{,}3\cdot 0{,}707)] = 248\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

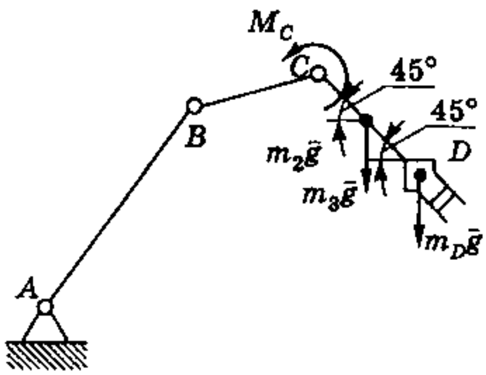


Рис. 3

Уравнение равновесия для моментов сил относительно точки C (рис. 3):

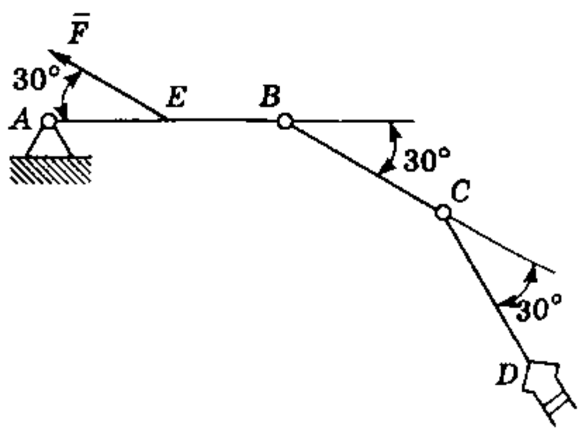
$$M_C - g\left(m_3\frac{l_3}{2}\cos 45^\circ + m_D l_3\cos 45^\circ\right) = 0 \Rightarrow$$

$$M_C = 9{,}8(15\cdot 0{,}15\cdot 0{,}707 + 15\cdot 0{,}3\cdot 0{,}707) = 46{,}7\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

Ответ: M_A = 665 Н·м; M_B = 248 Н·м; M_C = 46,7 Н·м.

Задача 4.64

Рука механизма робота-манипулятора удерживает в равновесии груз, масса которого m_D = = 15 кг. Пружина разгрузочного устройства, предназначенного для уменьшения нагрузки на привод, действует на первое звено силой F = 3000 Н, приложенной на расстоянии



$AE = 0,2$ м от шарнира A. Найти моменты сил в шарнирах. Длины звеньев: $l_1 = 0,8$ м, $l_2 = 0,5$ м, $l_3 = 0,3$ м. Массы звеньев: $m_1 = 40$ кг, $m_2 = 25$ кг, $m_3 = 15$ кг. Звенья считать однородными стержнями.

Решение

Рассуждаем аналогично задаче 4.63.

Уравнение равновесия для моментов сил относительно точки A (рис. 1):

$$M_A + F\cos 60^\circ\, AE - m_1 g\frac{l_1}{2} - m_2 g\left(l_1 + \frac{l_2}{2}\cos 30^\circ\right) -$$

$$- m_3 g\left(l_1 + l_2\cos 30^\circ + \frac{l_3}{2}\sin 30^\circ\right) - m_D g(l_1 + l_2\cos 30^\circ + l_3\sin 30^\circ) = 0 \Rightarrow$$

$$M_A = 9{,}8[40\cdot 0{,}4 + 25(0{,}8 + 0{,}25\cdot 0{,}866) + 15(0{,}8 + 0{,}5\cdot 0{,}866 + 0{,}15\cdot 0{,}5) +$$

$$+ 15(0{,}8 + 0{,}5\cdot 0{,}866 + 0{,}3\cdot 0{,}5)] - 3000\cdot 0{,}2\cdot 0{,}5 = 501{,}64\ \text{Н·м} \approx 502\ \text{Н·м}.$$

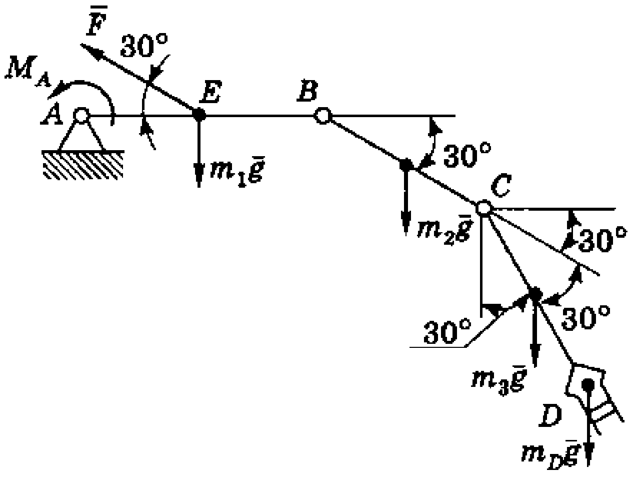


Рис. 1

Уравнение равновесия для моментов сил относительно точки B (рис. 2):

$$M_B - m_2 g\frac{l}{2}\cos 30^\circ - m_3 g\left(l_2\cos 30^\circ + \frac{l_3}{2}\cos 60^\circ\right) -$$

$$- m_D g\,(l_2\cos 30^\circ + l_3\cos 60^\circ) = 0 \Rightarrow$$

$$M_B = 9{,}8[25\cdot 0{,}25\cdot 0{,}866 + 15(0{,}5\cdot 0{,}866 + 0{,}15\cdot 0{,}5) +$$

$$+15(0{,}5\cdot 0{,}866 + 0{,}3\cdot 0{,}5)] = 214 \text{ Н·м}.$$

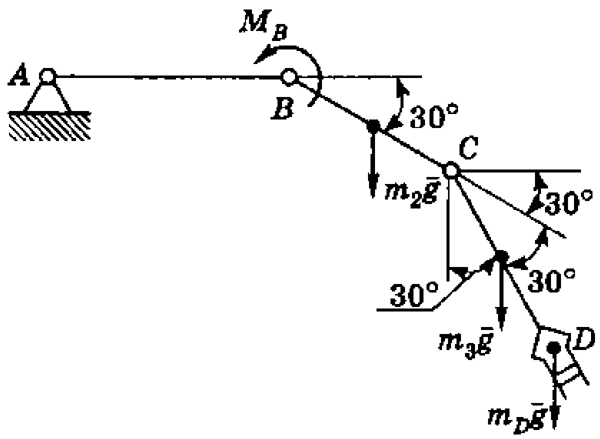


Рис. 2

Уравнение равновесия для моментов сил относительно точки C (рис. 3):

$$M_C - m_3 g\frac{l_3}{2}\cos 60° -$$

$$- m_D g l_3 \cos 60° = 0 \Rightarrow$$

$$M_C = g\left(m_3\,\frac{l_3}{2}\cos 60° + m_D l_3 \cos 60°\right) =$$

$$= 9{,}8(15\cdot 0{,}15\cdot 0{,}5 + 15\cdot 0{,}3\cdot 0{,}5) = 33 \text{ Н·м}.$$

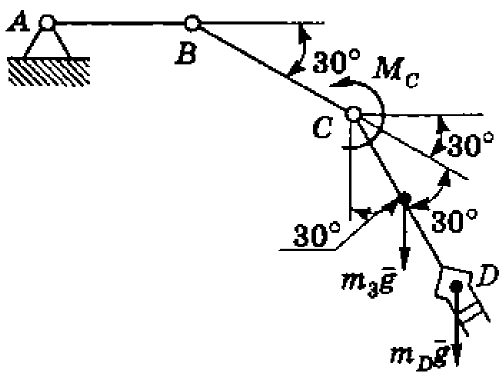
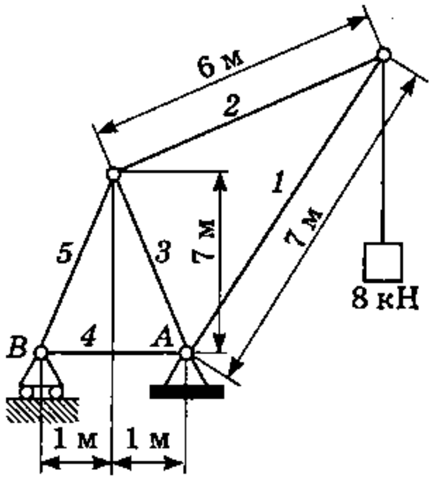


Рис. 3

О т в е т: M_A = 502 Н·м; M_B = 214 Н·м; M_C = 33 Н·м.

Задача 4.65

Определить опорные реакции и усилия в стержнях крана, изображенного на рисунке, при нагрузке в 8 кН. Весом стержня пренебречь.



Решение

За первый объект равновесия примем весь кран (рис. 1). Составим уравнения равновесия для плоской системы параллельных сил (в проекциях на ось y и для моментов относительно точки B):

$$\begin{cases} R_A + R_B - P = 0, \\ R_A \cdot 2 - P \cdot BK = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получим

$$R_A = \frac{P \cdot BK}{2}.$$

По теореме Пифагора вычислим:

$$AC = \sqrt{AL^2 + CL^2} = \sqrt{1+3^3} =$$

$$= \sqrt{10} = 3{,}1622.$$

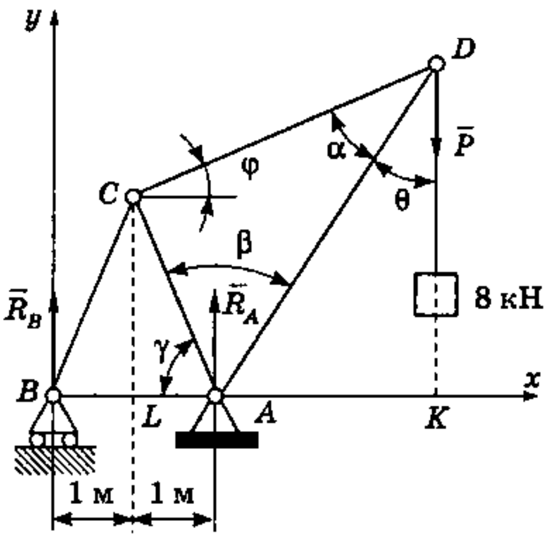


Рис. 1

По теореме косинусов найдем угол α:

$$AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2AD \cdot CD \cos\alpha \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{CD^2 + AD^2 - AC^2}{2AD \cdot CD} = \frac{36+49-10}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{75}{84} = 0{,}893;$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{0{,}203} = 0{,}4493; \quad \alpha = 26°42'.$$

По теореме синусов найдем углы β и γ:

$$\frac{AC}{\sin\alpha}=\frac{CD}{\sin\beta}\Rightarrow \sin\beta=\frac{CD\cdot\sin\alpha}{AC}=\frac{6\cdot 0{,}4493}{3{,}1622}=0{,}853;\ \beta=58°30'.$$

Из треугольника ACL:

$$\sin\gamma=\frac{CL}{AC}=\frac{3}{3{,}162}=0{,}9487;\ \gamma=71°36',$$

тогда

$$\angle DAK=180°-\beta-\gamma=180°-58°30'-71°36'\approx 50°;$$

$$\theta=\angle ADK=90°-\angle DAK=40°;$$

$$AK=AD\cdot\cos 50°=7\cdot 0{,}6428=4{,}5\text{ м};$$

$$BK=BA+AK=2+4{,}5=6{,}5\text{ м}.$$

Зная BK, найдем R_A:

$$R_A=\frac{8\cdot 6{,}5}{2}=26\text{ кН}.$$

Из первого уравнения системы найдем R_B:

$$R_B=P-R_A=8-26=-18\text{ кН (реакция направлена вниз)}.$$

Второй объект равновесия — узел D, в котором сходятся три силы: $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$, $\bar{P}$ (рис. 2). Составим уравнения равновесия (в проекциях на оси x и y):

$$\begin{cases}-S_2\sin(\alpha+\theta)-S_1\sin\theta=0,\\ -S_2\cos(\alpha+\theta)-S_1\cos\theta-P=0.\end{cases}$$

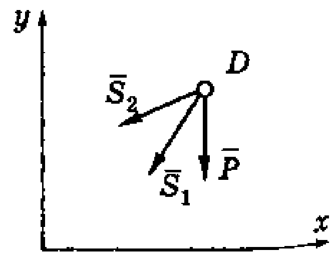


Рис. 2

Умножим первое уравнение полученной системы на $\cos(\alpha+\theta)$, второе — на $\sin(\alpha+\theta)$ и составим их разность:

$$\begin{cases}-S_2\sin(\alpha+\theta)\cos(\alpha+\theta)-S_1\sin\theta\cos(\alpha+\theta)=0,\\ -S_2\cos(\alpha+\theta)\sin(\alpha+\theta)-S_1\cos\theta\sin(\alpha+\theta)-P\sin(\alpha+\theta)=0.\end{cases}$$

Следовательно,

$$S_1[\cos\theta\sin(\alpha+\theta)-\sin\theta\cos(\alpha+\theta)]+P\sin(\alpha+\theta)=0\Rightarrow$$

$$S_1=\frac{-P\sin(\alpha+\theta)}{\cos\theta\sin(\alpha+\theta)-\sin\theta\cos(\alpha+\theta)}=\frac{-8\cdot 0{,}9178}{0{,}766\cdot 0{,}9178-0{,}6428\cdot 0{,}4}=$$

$$=-16{,}44\ \text{кН}.$$

$$S_2=\frac{-S\sin\theta}{\sin(\alpha+\theta)}=\frac{16{,}44\cdot 0{,}6428}{0{,}9178}=11{,}53\ \text{кН}.$$

Третий объект равновесия — узел C, в котором сходятся силы $\bar{S}_2'$, $\bar{S}_3$, $\bar{S}_5$ (рис. 3). Для этой системы сил составим аналогичные уравнения равновесия (в проекциях на оси):

$$\begin{cases}-S_5\cos\gamma+S_3\cos\gamma+S_2'\cos\varphi=0,\\ -S_5\sin\gamma-S_3\sin\gamma+S_2'\sin\varphi=0.\end{cases}$$

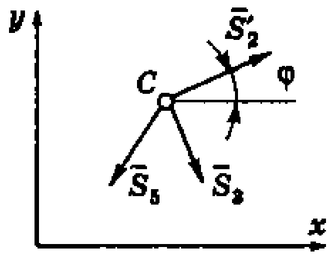


Рис. 3

$$\varphi=90^\circ-(\alpha+\theta)=90^\circ-(40^\circ+26^\circ 42')=23^\circ 18'.$$

Умножим первое уравнение последней системы на $\sin\gamma$, второе — на $\cos\gamma$, а затем сложим эти уравнения:

$$\begin{cases}-S_5\cos\gamma\sin\gamma+S_3\cos\gamma\sin\gamma+S_2'\cos\varphi\sin\gamma=0,\\ -S_5\sin\gamma\cos\gamma-S_3\sin\gamma\cos\gamma+S_2'\sin\varphi\cos\gamma=0.\end{cases}$$

Следовательно,

$$-2S_5\cos\gamma\sin\gamma+S_2'(\cos\varphi\sin\gamma+\sin\varphi\cos\gamma)=0\Rightarrow$$

$$S_5=\frac{S_2'(\cos\varphi\sin\gamma+\sin\varphi\cos\gamma)}{2\cos\gamma\sin\gamma}=$$

$$=\frac{11{,}53(0{,}9184\cdot 0{,}9487+0{,}4\cdot 0{,}36)}{2\cdot 0{,}3156\cdot 0{,}9487}=19{,}1\ \text{кН}.$$

$$S_3=\frac{S_5\cos\gamma-S_2'\cos\varphi}{\cos\gamma}=\frac{19{,}1\cdot 0{,}3156-11{,}53\cdot 0{,}9184}{0{,}3156}=-14{,}3\ \text{кН}.$$

Четвертый объект равновесия -- узел B, в котором сходятся силы $\overline{R}_B$, $\overline{S}_5'$, $\overline{S}_4$ (рис. 4). Для этой системы сил составим уравнение равновесия в проекциях на ось x:

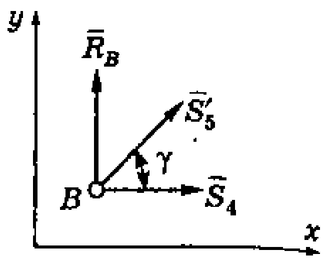


Рис. 4

$$S_5' \cos\gamma + S_4 = 0 \Rightarrow$$

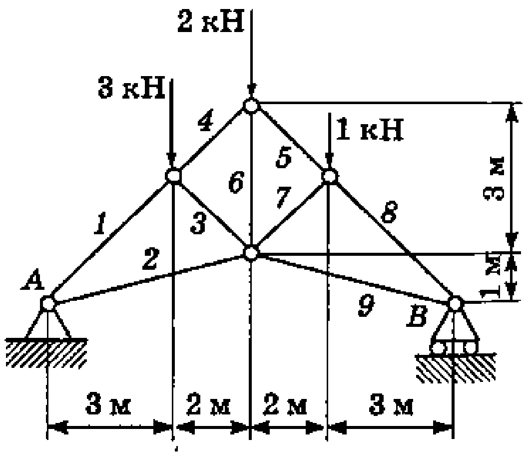
$$S_4 = -S_5' \cos\gamma = -19{,}1 \cdot 0{,}3156 = -6{,}028 \text{ кН}.$$

О т в е т: $R_A = 26$ кН; $R_B = 18$ кН — вниз.

Номер стержня	1	2	3	4	5
Усилие, кН	–16,4	11,5	–14,3	–6	19

Задача 4.66

Определить опорные реакции и усилия в стержнях стропильной фермы, изображенной вместе с приложенными к ней силами на рисунке.



Р е ш е н и е

Первый объект равновесия — вся ферма в целом (рис. 1). Составим уравнения равновесия для определения реакций в опорах A и B (уравнения в проекциях сил на ось y и для моментов сил относительно точки A):

$$\begin{cases} R_A + R_B - 3 - 2 - 1 = 0, \\ -3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 - 1 \cdot 7 + R_B \cdot 10 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получим

$$R_B = \frac{9 + 10 + 7}{10} = 2{,}6 \text{ кН};$$

$$R_A = 6 - R_B = 6 - 2{,}6 = 3{,}4 \text{ кН}.$$

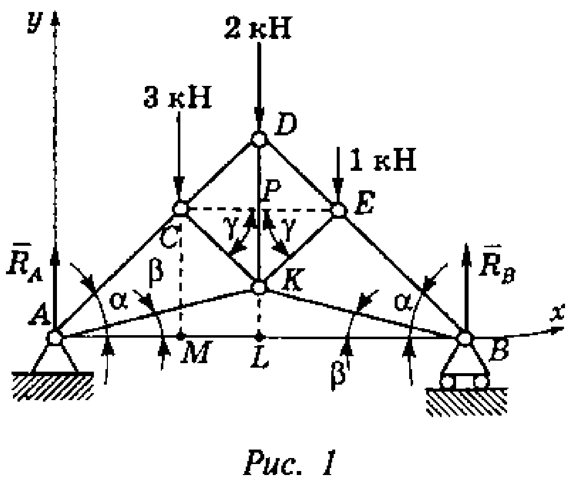


Рис. 1

Для определения усилий в стержнях найдем величины углов α, β, γ.

$$\cos\alpha = \frac{AL}{AD} = \frac{AL}{\sqrt{AL^2 + LD^2}} = \frac{5}{\sqrt{5^2 + 4^2}} = 0{,}78;$$

$$\sin\alpha = \frac{DL}{AD} = \frac{4}{\sqrt{41}} = 0{,}625;$$

$$\cos\beta = \frac{AL}{AK} = \frac{AL}{\sqrt{AL^2 + KL^2}} = \frac{5}{\sqrt{5^2 + 1}} = 0{,}98;$$

$$\sin\beta = \frac{KL}{AK} = \frac{1}{\sqrt{26}} = 0{,}196.$$

Из подобия треугольников CAM и ADL следует

$$\frac{DL}{AL} = \frac{MC}{AM} \Rightarrow MC = \frac{DL \cdot AM}{AL} = \frac{4 \cdot 3}{5} = 2{,}4.$$

$$DP = DL - MC = 4 - 2{,}4 = 1{,}6 \text{ м}, \; PK = DK - DP = 3 - 1{,}6 = 1{,}4 \text{ м};$$

$$\cos\gamma = \frac{CP}{CK} = \frac{CP}{\sqrt{CP^2 + PK^2}} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 1{,}4^2}} = \frac{2}{2{,}44} = 0{,}81;$$

$$\sin\gamma = \frac{PK}{CK} = \frac{1{,}4}{2{,}44} = 0{,}574.$$

Определять усилия в стержнях фермы будем методом вырезания узлов.

Второй объект равновесия — узел A, в котором действуют силы $\bar{R}_A$, $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ — плоская система сходящихся сил (рис. 2). Составим для этого узла уравнения равновесия (в проекциях на оси x и y):

$$\begin{cases} S_1 \cos\alpha + S_2 \cos\beta = 0, \\ R_A + S_1 \sin\alpha + S_2 \sin\beta = 0. \end{cases}$$

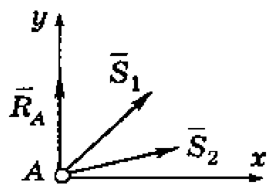


Рис. 2

Решая систему, получим

$$S_1 = -\frac{S_2 \cos\beta}{\cos\alpha} = -\frac{0{,}98 \cdot S_2}{0{,}78}.$$

$$R_A - \frac{S_2 \cos\beta \sin\alpha}{\cos\alpha} + S_2 \sin\beta = 0 \Rightarrow$$

$$S_2 = \frac{R_A}{\dfrac{\cos\beta \sin\alpha}{\cos\alpha} - \sin\beta} = \frac{3{,}4}{\dfrac{0{,}625 \cdot 0{,}98}{0{,}78} - 0{,}196} = 5{,}8 \text{ кН}.$$

$$S_1 = -\frac{0{,}98 \cdot 5{,}8}{0{,}78} = -7{,}3 \text{ кН}.$$

Третий объект равновесия — узел C, в котором сходятся 4 силы (рис. 3). Составим для узла C уравнения равновесия (в проекциях на оси):

$$\begin{cases} -S_1' \cos\alpha + S_4 \cos\alpha + S_3 \cos\gamma = 0, \\ -S_1' \sin\alpha + S_4 \sin\alpha - S_3 \sin\gamma - 3 = 0. \end{cases}$$

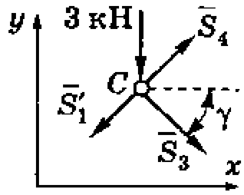


Рис. 3

Умножим первое уравнение полученной системы на $\sin\alpha$, второе — на $\cos\alpha$ и составим их разность:

$$\begin{cases} S_1' \cos\alpha \sin\alpha + S_4 \cos\alpha \sin\alpha + S_3 \cos\gamma \sin\alpha = 0, \\ -S_1' \sin\alpha \cos\alpha + S_4 \sin\alpha \cos\alpha - S_3 \sin\gamma \cos\alpha - 3\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Решим систему:

$$S_3(\cos\gamma \sin\alpha + \sin\gamma \cos\alpha) + 3\cos\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$S_3 = -\frac{3\cos\alpha}{\cos\gamma \sin\alpha + \sin\gamma \cos\alpha} = -\frac{3 \cdot 0{,}78}{0{,}81 \cdot 0{,}625 + 0{,}574 \cdot 0{,}78} = -2{,}44 \text{ кН};$$

$$S_4 = \frac{S_1' \cos\alpha - S_3 \cos\gamma}{\cos\alpha} = -\frac{7{,}3 \cdot 0{,}78 + 2{,}44 \cdot 0{,}81}{0{,}78} = -4{,}76 \text{ кН}.$$

Четвертый объект равновесия — узел D со сходящимися в нем силами (рис. 4).

Составим для узла D уравнения равновесия (в проекциях на оси):

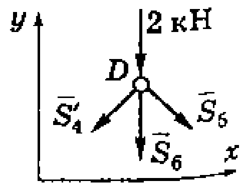


Рис. 4

$$\begin{cases} -S_4' \cos\alpha + S_5 \cos\alpha = 0, \\ -S_4' \sin\alpha - F_2 - S_6 - S_5 \sin\alpha = 0. \end{cases}$$

Решим систему:

$$S_4' = S_5 = -4{,}76 \text{ кН},$$

$$S_6 = -(S_4' \sin\alpha + F_2 + S_5 \sin\alpha) = -(-4{,}76 \cdot 0{,}625 + 2 - 4{,}76 \cdot 0{,}625) \approx 3{,}9 \text{ кН}.$$

Пятый объект равновесия — узел E, в котором сходятся 4 силы (рис. 5).

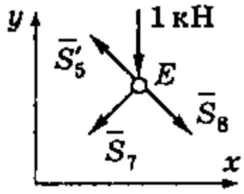


Рис. 5

Составим для узла E уравнения равновесия (в проекциях на оси):

$$\begin{cases} -S_5' \cos\alpha - S_7 \cos\gamma + S_8 \cos\alpha = 0, \\ S_5' \sin\alpha - S_7 \sin\gamma - S_8 \sin\alpha - F_3 = 0. \end{cases}$$

Решив систему, найдем:

$$S_7 \approx -0{,}82 \text{ кН},$$

$$S_8 = -5{,}59 \text{ кН}.$$

Шестой объект равновесия — узел K, в котором сходятся 5 сил (рис. 6).

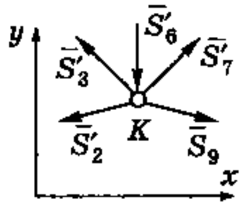


Рис. 6

Составим для этого узла уравнение равновесия в проекциях на ось x:

$$-S_2' \cos\beta + S_9 \cos\beta - S_3' \cos\gamma + S_7' \cos\gamma = 0.$$

Следовательно,

$$S_9 = \frac{S_2' \cos\beta + S_3' \cos\gamma - S_7' \cos\gamma}{\cos\beta} =$$

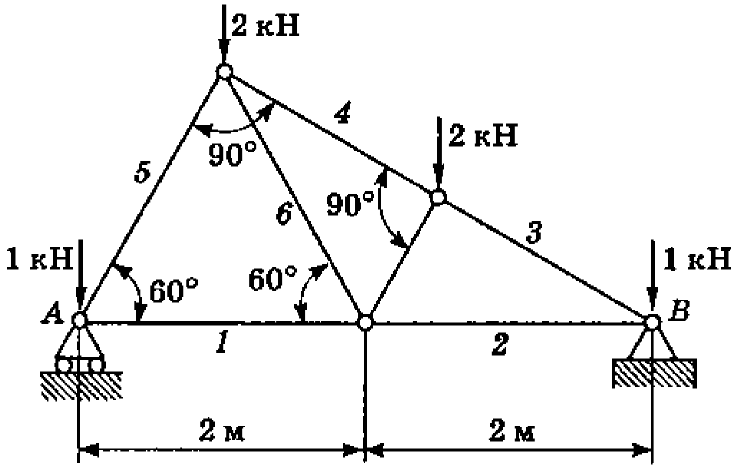
$$= \frac{5{,}8 \cdot 0{,}98 - 2{,}44 \cdot 0{,}81 + 0{,}81 \cdot 0{,}81}{0{,}98} = 4{,}45 \text{ кН}.$$

О т в е т: $R_A = 3{,}4$ кН; $R_B = 2{,}6$ кН.

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие, кН	–7,3	5,8	–2,44	–4,76	–4,76	3,9	–0,82	–5,59	4,45

Задача 4.67

Определить опорные реакции и усилия в стержнях пильчатой фермы, изображенной вместе с действующими на нее силами на рисунке.



Решение

Первый объект равновесия — вся ферма (рис. 1). Определим реакции опор R_A и R_B. Для этого составим уравнения равновесия для плоской системы параллельных сил (в проекциях на ось x и для моментов сил относительно точки A):

$$\begin{cases} R_A + R_B - 1 - 2 - 2 - 1 = 0, \\ -2 \cdot 1 - 2(2 + 1 \cdot \cos 60^\circ) - 1 \cdot 4 + R_B \cdot 4 = 0. \end{cases}$$

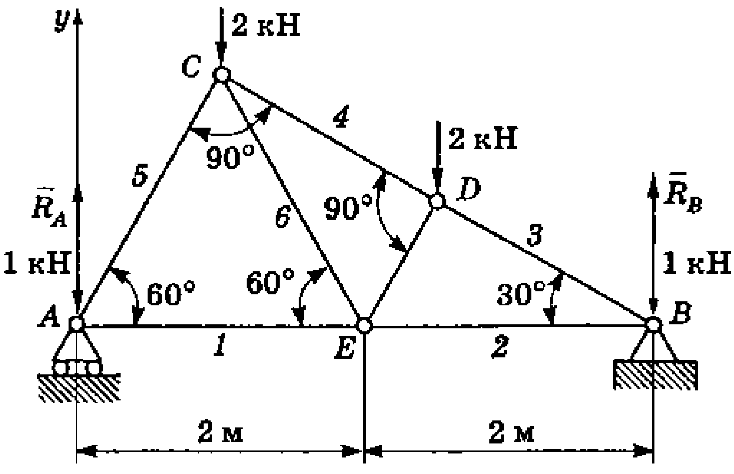


Рис. 1

Следовательно,

$$R_B = \frac{11}{4} = 2{,}75 \text{ кН};$$

$$R_A = 6 - R_B = 6 - 2{,}75 = 3{,}25 \text{ кН}.$$

Второй объект равновесия — узел A, в котором сходятся силы, изображенные на рис. 2. Составим для этого узла уравнения равновесия (в проекциях на оси x и y):

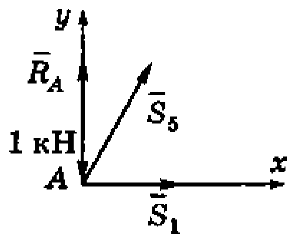


Рис. 2

$$\begin{cases} S_5 \cos 60^\circ + S_1 = 0, \\ R_A + S_5 \cos 30^\circ - 1 = 0. \end{cases}$$

Решим полученную систему:

$$S_5 = \frac{F_1 - R_A}{\cos 30^\circ} = -2{,}6 \text{ кН};$$

$$S_1 = -S_5 \cos 60^\circ = 1{,}3 \text{ кН}.$$

Третий объект равновесия — узел C, в котором сходятся силы, изображенные на рис. 3. Уравнения равновесия для этой системы сходящихся сил (в проекциях на оси x и y):

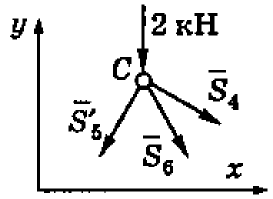


Рис. 3

$$\begin{cases} -S_5' \cos 60^\circ + S_6 \cos 60^\circ + S_4 \cos 30^\circ = 0, \\ -S_5' \cos 30^\circ - S_6 \cos 30^\circ - S_4 \cos 60^\circ - 2 = 0. \end{cases}$$

Решив систему, найдем:

$$S_4 = -2{,}5 \text{ кН};$$

$$S_6 = 1{,}73 \text{ кН}.$$

Четвертый объект равновесия — узел E, в котором сходятся силы, изображенные на рис. 4. Составим для этой системы сходящихся сил уравнения равновесия (в проекциях на оси x и y):

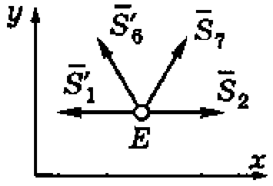


Рис. 4

$$\begin{cases} -S_1' + S_2 - S_6' \cos 60^\circ + S_7 \cos 60^\circ = 0, \\ S_6' \cos 30^\circ + S_7 \cos 30^\circ = 0. \end{cases}$$

Из системы получим

$$S_6' = -S_7;$$

$$-S_1' - S_2 - S_6' \cos 60° - S_6' \cos 60° = 0 \Rightarrow$$

$$S_2 = S_1' + 2S_6' \cos 60° = 1{,}3 + 2 \cdot 1{,}73 \cdot 0{,}5 = 3{,}03 \text{ кН},$$

$$S_7 = -S_6' = -1{,}73 \text{ кН}.$$

Пятый объект равновесия — узел B, в которм сходятся силы, изображенные на рис. 5. Для данной системы сил составим уравнения равновесия (в проекциях на ось y):

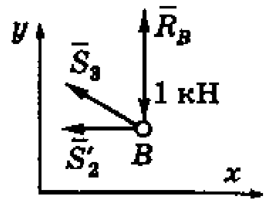


Рис. 5

$$S_3 \cos 60° - 1 + R_B = 0 \Rightarrow$$

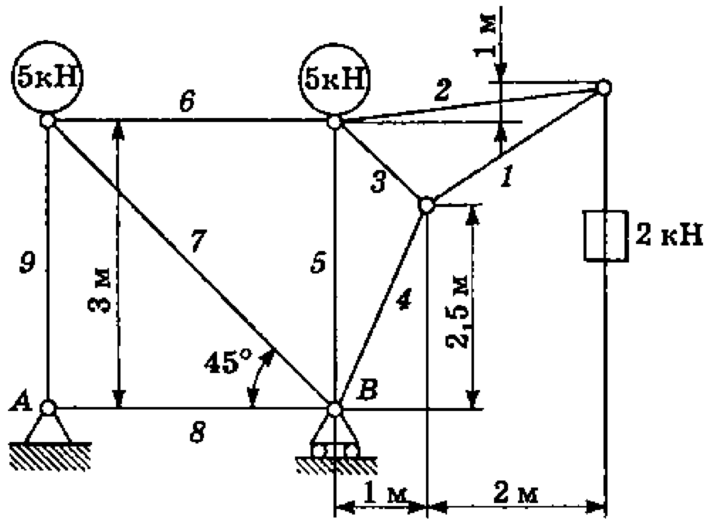
$$S_3 = \frac{1 - R_B}{\cos 60°} = \frac{1 - 2{,}75}{0{,}5} = -3{,}5 \text{ кН}.$$

Ответ: $R_A = 3{,}25$ кН; $R_B = 2{,}75$ кН.

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7
Усилие, кН	1,3	3,03	–3,5	–2,5	–2,6	1,73	–1,73

Задача 4.68

Определить опорные реакции и усилия в стержнях фермы крана, изображенного вместе с приложенными к нему силами на рисунке.



Решение

Определим опорные реакции. Для этого рассмотрим первый объект равновесия — всю ферму в целом (рис. 1) и составим соответствующие уравнения равновесия (для проекций сил на ось y и для моментов сил относительно точки A):

$$\begin{cases} R_A + R_B - F_1 - F_2 - P = 0, \\ -F_2 \cdot 3 - R_B \cdot 3 - P \cdot 6 = 0. \end{cases}$$

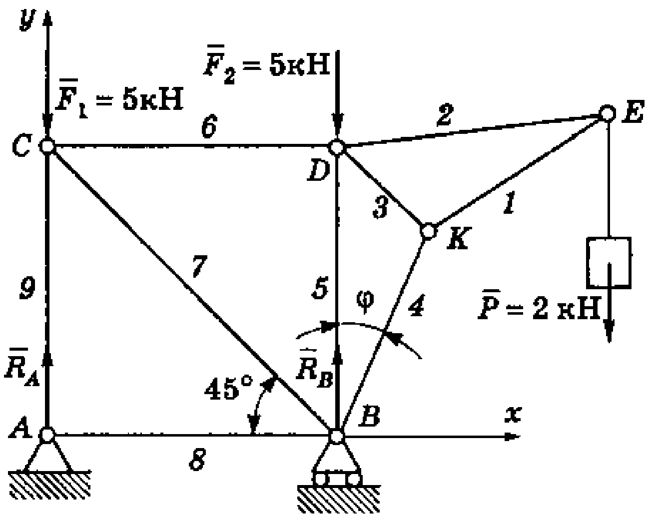


Рис. 1

Решим полученную систему:

$$R_B = \frac{P \cdot 6 + F_2 \cdot 3}{3} = 9 \text{ кН};$$

$$R_A = F_1 + F_2 + P - R_B = 5 + 5 + 2 - 9 = 3 \text{ кН}.$$

Второй объект равновесия — узел A, в котором действуют силы, изображенные на рис. 2. Уравнения равновесия для узла A (в проекциях на оси x и y):

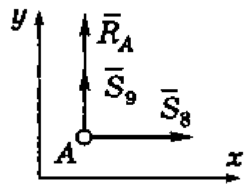


Рис. 2

$$\begin{cases} S_8 = 0, \\ S_9 + R_A = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$S_8 = 0;$$

$$S_9 = -R_A = -3 \text{ кН}.$$

Третий объект равновесия — узел C, в котором действуют силы, изображенные на рис. 3. Составим уравнения равновесия (в проекциях на оси x и y):

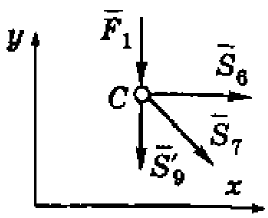


Рис. 3

$$\begin{cases} S_6 + S_7 \cos 45° = 0, \\ -S'_9 - F_1 - S_7 \cos 45° = 0. \end{cases}$$

Решим заданную систему:

$$S_7 = \frac{-(F_1 + S'_9)}{\cos 45°} = \frac{-[5 + (-3)]}{0{,}707} = -2{,}83 \text{ кН};$$

$$S_6 = -S_7 \cos 45° = 2{,}83 \cdot 0{,}707 = 2 \text{ кН}.$$

Четвертый объект равновесия — узел E, в котором действуют силы, изображенные на рис. 4. Составим для этого узла уравнения равновесия (в проекциях на обе оси):

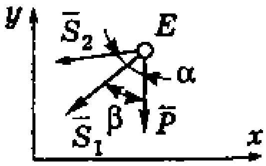


Рис. 4

$$\begin{cases} -S_2 \sin\alpha - S_1 \sin\beta = 0, \\ -S_2 \cos\alpha - S_1 \cos\beta - P = 0. \end{cases}$$

Из геометрических соображений:

$$\cos\alpha = \frac{1^2}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{1}{3{,}162} = 0{,}316; \quad \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0{,}949;$$

$$\cos\beta = \frac{3 + 1 - 2{,}5}{\sqrt{2^2 + 1{,}5^2}} = \frac{3}{5}; \quad \sin\beta = \frac{2}{2{,}5} = \frac{4}{5}.$$

Из первого уравнения последней системы следует, что

$$S_2 = -S_1 \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

поэтому из второго уравнения рассматриваемой системы получим

$$-S_1 \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cos\alpha - S_1\cos\beta - P = 0 \Rightarrow$$

$$S_1 = \frac{P}{\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cos\alpha - \cos\beta} = \frac{2}{\dfrac{0{,}8}{0{,}949}\cdot 0{,}316 - 0{,}6} = -6 \text{ кН}.$$

Тогда

$$S_2 = -\left(-5{,}99\frac{0{,}8}{0{,}949}\right) = 5{,}1 \text{ кН}.$$

Пятый объект равновесия — узел D, в котором действуют силы, изображенные на рис. 5.

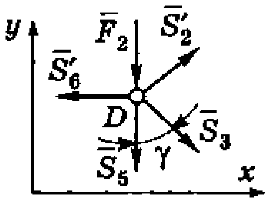


Рис. 5

Составим уравнения равновесия (в проекциях на оси x и y):

$$\begin{cases} -S'_6 + S'_2\sin\alpha + S_3\sin\gamma = 0, \\ -F_2 - S_5 - S_3\cos\gamma + S'_2\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Чтобы решить полученную систему, произведем необходимые геометрические расчеты (см. рис. 1).

$$BK = \sqrt{1 + 2{,}5^2} = \sqrt{7{,}25}.$$

По теореме косинусов для треугольника EDK имеем

$$DK^2 = DE^2 + KE^2 - 2DE\cdot KE\cos(\alpha - \beta) =$$

$$= 10 + 6{,}25 - 2\sqrt{10}\cdot 2{,}5\cdot 0{,}95 = 1{,}23 DK = 1{,}1.$$

Из треугольника BDK: $DK^2 = BD^2 + BK^2 - 2BD\cdot BK\cos\varphi$;

$$1{,}23 = 9 + 7{,}25 - 2\cdot 3\cdot 2{,}69\cos\varphi;$$

$$\cos\varphi = \frac{15{,}02}{16{,}14} = 0{,}93.$$

По теореме синусов для треугольника BDK имеем

$$\frac{DK}{\sin\varphi}=\frac{BK}{\sin\gamma}\Rightarrow\sin\gamma=\frac{BK\cdot\sin\varphi}{DK}=\frac{2{,}69\cdot 0{,}366}{1{,}1}=0{,}895.$$

Из рассматриваемой системы найдем:

$$S_3=\frac{S_6'-S_2'\sin\alpha}{\sin\gamma}=\frac{2-5{,}05\cdot 0{,}949}{0{,}895}=-3{,}13\text{ кН};$$

$$S_5=-F_2-S_3\cos\gamma+S_2\cos\alpha=-5-(-3{,}13)\cdot 0{,}45+5{,}05\cdot 0{,}316=-2\text{ кН}.$$

Шестой объект равновесия — узел B, в котором сходятся силы, изображенные на рис. 6. Для этих сил составим уравнение:

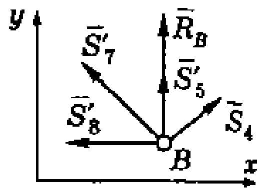


Рис. 6

$$-S_8'-S_7'\cos 45^\circ+S_4\sin\varphi=0.$$

Учитывая, что $S_8'=0$, найдем:

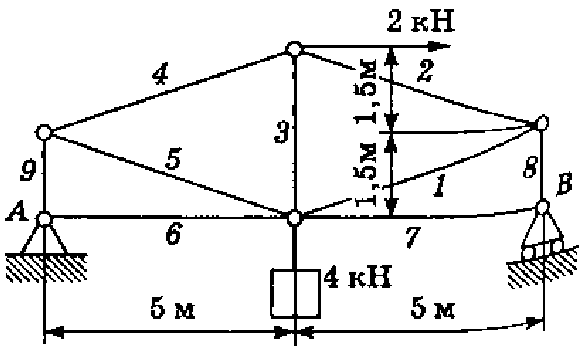
$$S_4=\frac{S_7'\cos 45^\circ}{\sin\varphi}=\frac{-2{,}83\cdot 0{,}707}{0{,}366}=-5{,}45\text{ кН}.$$

Ответ: R_A = 3 кН; R_B = 9 кН.

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие, кН	–6,0	5,1	–3,13	–5,45	–2,0	2,0	–2,83	0	–3,0

Задача 4.69

Определить опорные реакции и усилия в стержнях сооружения, изображенного вместе с действующими на него силами на рисунке.



Как в этой, так и в следующих задачах ось Ox направлена по горизонтальной прямой AB вправо, а ось Oy — по вертикали вверх.

Решение

Реакция связи в шарнирно-неподвижной опоре A имеет две составляющие, в шарнирно-подвижной опоре B — одну.

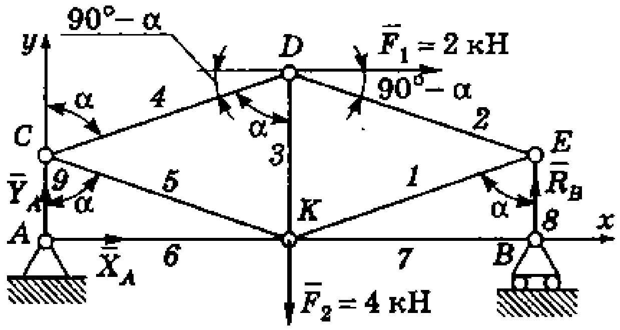


Рис. 1

Первый объект равновесия — все сооружение (рис. 1). Составим для него уравнения равновесия (в проекциях на оси x и y и для моментов сил относительно точки A):

$$\begin{cases} X_A + F_1 = 0, \\ Y_A + R_B - F_2 = 0, \\ -F_2 \cdot 5 - F_1 \cdot 3 + R_B \cdot 10 = 0. \end{cases}$$

Решим систему:

$$X_A = -F_1 = -2 \text{ кН};$$

$$R_B = \frac{1}{10}(F_1 \cdot 3 + F_2 \cdot 5) = \frac{1}{10}(2 \cdot 3 + 4 \cdot 5) = 2{,}6 \text{ кН};$$

$$Y_A = F_2 - R_B = 4 - 2{,}6 = 1{,}4 \text{ кН}.$$

Второй объект равновесия — узел A, в нем действуют силы, изображенные на рис. 2. Составим для этой системы сил соответствующие уравнения равновесия (в проекциях на обе оси):

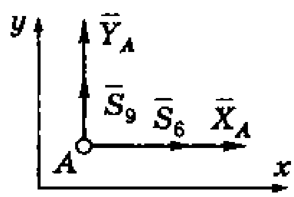


Рис. 2

$$\begin{cases} S_6 + X_A = 0, \\ Y_A + S_9 = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$S_6 = -X_A = 2 \text{ кН};$$

$$S_9 = -Y_A = -1{,}4 \text{ кН}.$$

Третий объект равновесия — узел C, в котором сходятся силы, изображенные на рис. 3. Для этой системы сил составим уравнения равновесия (в проекциях на обе оси):

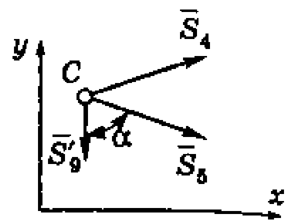


Рис. 3

$$\begin{cases} S_4 \sin\alpha + S_5 \sin\alpha = 0, \\ -S_9' - S_5 \cos\alpha + S_4 \cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Решим систему: $S_4 = -S_5$, следовательно,

$$-S_9' - S_5 \cos\alpha - S_5 \cos\alpha = 0 \Rightarrow S_5 = \frac{-S_9'}{2\cos\alpha}.$$

$$\cos\alpha = \frac{AC}{CK} = \frac{1{,}5}{\sqrt{1{,}5^2 + 5^2}} = 0{,}287 \sin\alpha = 0{,}958;$$

$$S_5 = \frac{-(-1{,}4)}{2 \cdot 0{,}287} = 2{,}44 \text{ кН};$$

$$S_4 = -2{,}44 \text{ кН}.$$

Четвертый объект равновесия — узел D, в котором действуют силы, изображенные на рис. 4. Для этой системы сил составим уравнения равновесия (в проекциях на оси):

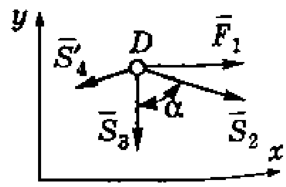


Рис. 4

$$\begin{cases} -S_4' \sin\alpha + S_2 \sin\alpha + F_1 = 0, \\ -S_4' \cos\alpha - S_3 - S_2 \cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Решая систему, найдем:

$$S_3 = -(-2{,}44 - 4{,}5) \cdot 0{,}287 = 2 \text{ кН}.$$

Пятый объект равновесия — узел E, в котором сходятся силы, изображенные на рис. 5. Для этих сил составим уравнения равновесия (в проекциях на оси):

$$\begin{cases} -S_2' \sin\alpha - S_1 \sin\alpha = 0, \\ S_2' \cos\alpha - S_8 - S_1 \cos\alpha = 0. \end{cases}$$

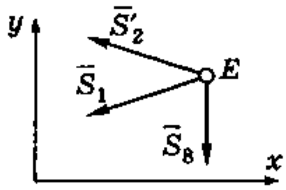


Рис. 5

Решим систему:

$$S_1 = -S_2' = 4{,}5 \text{ кН};$$

$$S_8 = S_2' \cos\alpha - S_1 \cos\alpha = (-4{,}5 - 4{,}5) \cdot 0{,}287 = -2{,}58 \text{ кН}.$$

Шестой объект равновесия — узел B, в котором сходятся силы, изображенные на рис. 6. Для определения величины S_7 составим уравнение равновесия в проекциях на ось x:

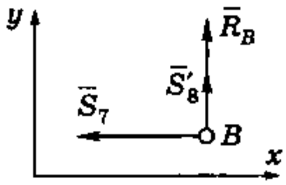


Рис. 6

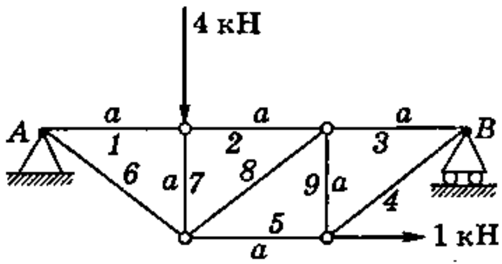
$$S_7 = 0.$$

Ответ: $X_A = -2$ кН; $Y_A = 1{,}4$ кН; $R_B = 2{,}6$ кН.

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие, кН	4,5	–4,5	2	–2,44	2,44	2	0	–2,6	–1,4

Задача 4.70

Определить опорные реакции и усилия в стержнях раскосной фермы, изображенной на рисунке вместе с нагрузкой.



Решение

Изобразим данные силы, а также реакции связей в точках A и B (рис. 1). Запишем уравнения равновесия для системы в целом (в проекциях на оси координат и для моментов сил относительно точки A):

$$\begin{cases} X_A + 1 = 0, \\ Y_A + Y_B - 4 = 0, \\ -4 \cdot a + Y_B \cdot 3a + 1 \cdot a = 0. \end{cases}$$

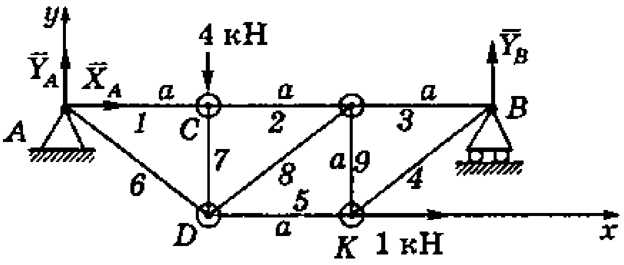


Рис. 1

Решив систему, найдем:

$$X_A = -1 \text{ кН},\ Y_A = 3 \text{ кН},\ Y_B = 1 \text{ кН}.$$

Для определения усилий в стержнях применим метод вырезания узлов. Вырежем узел A, изобразим усилия (рис. 2) и составим уравнения равновесия:

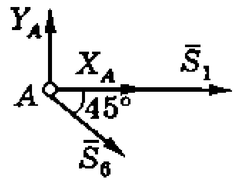


Рис. 2

$$\begin{cases} X_A + S_1 + S_6 \cos 45° = 0, \\ Y_A - S_6 \cos 45° = 0. \end{cases}$$

Решив систему, найдем:

$$S_1 = -2 \text{ кН},\ S_6 = 4{,}24 \text{ кН}.$$

Вырежем узел C и составим уравнения равновесия (рис. 3):

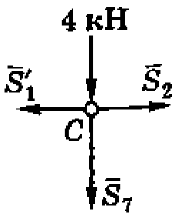


Рис. 3

$$\begin{cases} -S'_1 + S_2 = 0, \\ -4 - S_7 = 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $\bar{S}'_1$ и $\bar{S}_1$ равны по модулю, решим систему и получим:

$$S_2 = -2 \text{ кН},\ S_7 = -4 \text{ кН}.$$

Вырежем узел D и составим уравнения равновесия (рис. 4):

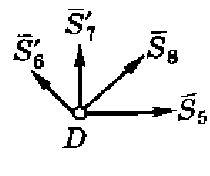


Рис. 4

$$\begin{cases} -S'_6 \cos 45° + S_8 \cos 45° + S_5 = 0, \\ S'_6 \cos 45° + S'_7 + S_8 \cos 45° = 0. \end{cases}$$

Учитывая соотношения

$$|\bar{S}_6'| = |\bar{S}_6|, \ |\bar{S}_7'| = |\bar{S}_7|,$$

решим систему и получим:

$$S_5 = 2 \text{ кН}, \ S_8 = 1{,}41 \text{ кН}.$$

Вырежем узел E и составим уравнения равновесия (рис. 5):

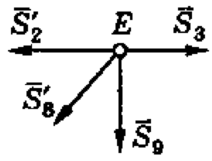


Рис. 5

$$\begin{cases} -S_2' + S_3 - S_8' \cos 45° = 0, \\ -S_8' \cos 45° - S_9 = 0. \end{cases}$$

Учитывая соотношения

$$|\bar{S}_2'| = |\bar{S}_2|, \ |\bar{S}_8'| = |\bar{S}_8|,$$

решим систему и получим:

$$S_3 = -1 \text{ кН}, \ S_9 = -1 \text{ кН}.$$

Вырежем узел B (рис. 6) и составим уравнение равновесия в проекциях на ось y:

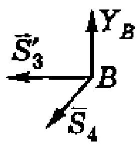


Рис. 6

$$Y_B - S_4 \cos 45° = 0.$$

Следовательно,

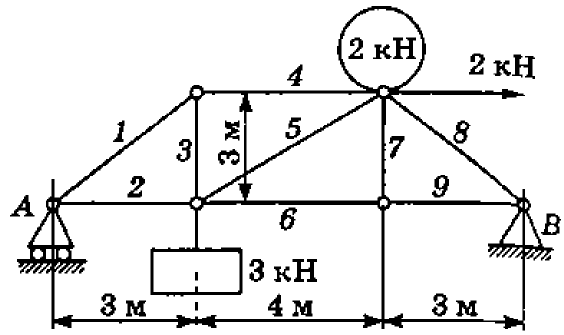
$$S_4 = \frac{Y_B}{\cos 45°}, \ S_4 = 1{,}41 \text{ кН}.$$

Ответ: $X_A = -1$ кН; $Y_A = 3$ кН; $Y_B = 1$ кН.

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие, кН	–2	–2	–1	1,41	2	4,24	–4	1,41	–1

Задача 4.71

Определить опорные реакции и усилия в стержнях мостовой фермы, которая вместе с приложенными к ней силами изображена на рисунке.



Решение

Изобразим данные силы и реакции связей (рис. 1).

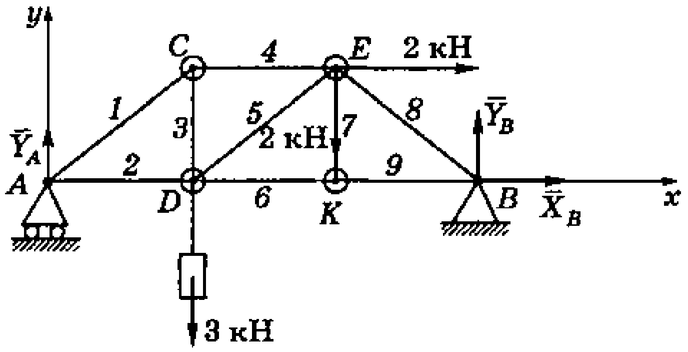


Рис. 1

Составим уравнения равновесия для системы в целом (в проекциях на оси координат и для моментов относительно точки A):

$$\begin{cases} X_B + 2 = 0, \\ Y_A - 3 - 2 + Y_B = 0, \\ -3 \cdot 3 - 2 \cdot 7 + Y_B \cdot 10 - 2 \cdot 3 = 0. \end{cases}$$

Решив систему, найдем:

$$X_B = -2 \text{ кН}, \ Y_A = 2{,}1 \text{ кН}, \ Y_B = 2{,}9 \text{ кН}.$$

Вырежем узел A, изобразим усилия в разрезанных стержнях (рис. 2) и составим уравнения равновесия:

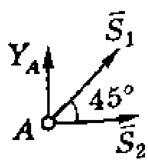


Рис. 2

$$S_1 \cos 45° + S_2 = 0,$$

$$Y_A + S_1 \cos 45° = 0.$$

Решив систему, найдем:

$$S_1 = -2{,}97 \text{ кН}, \ S_2 = 2{,}1 \text{ кН}.$$

Вырежем узел C, изобразим усилия в разрезанных стержнях (рис. 3) и составим уравнения равновесия:

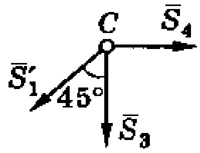


Рис. 3

$$\begin{cases} -S_1' \cos 45^\circ + S_4 = 0, \\ -S_1' \cos 45^\circ - S_3 = 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $|\bar{S}_1'| = |\bar{S}_1|$, решим систему:

$$S_3 = 2{,}1 \text{ кН}, \ S_4 = -2{,}1 \text{ кН}.$$

Вырежем узел D, изобразим усилия в разрезанных стержнях (рис. 4) и составим уравнения равновесия:

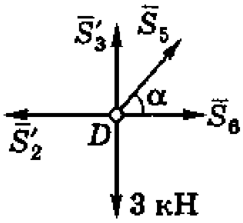


Рис. 4

$$\begin{cases} -S_2' + S_6 + S_5 \cos\alpha = 0, \\ S_3' + S_5 \sin\alpha - 3 = 0. \end{cases}$$

Определим угол α (см. рис. 1 и рис. 4):

$$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{9+16}} = \frac{3}{5}; \ \cos\alpha = \frac{4}{5}.$$

Учитывая соотношения

$$|\bar{S}_2'| = |\bar{S}_2|, \ |\bar{S}_3'| = |\bar{S}_3|,$$

решим систему:

$$S_5 = 1{,}5 \text{ кН}, \ S_6 = 0{,}9 \text{ кН}.$$

Вырежем узел E, изобразим усилия в разрезанных стержнях (рис. 5) и составим уравнения равновесия:

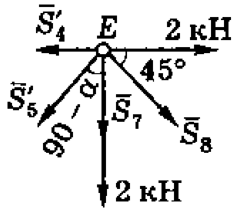


Рис. 5

$$\begin{cases} -S_4' - S_5' \cos\alpha + 2 + S_8 \cos 45^\circ = 0, \\ -S_5 \sin\alpha - S_7 - 2 - S_8 \cos 45^\circ = 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $|\bar{S}_4'| = |\bar{S}_4|$, $|\bar{S}_5'| = |\bar{S}_5|$, решим систему:

$$S_7 = 0 \text{ кН}, \ S_8 = -4{,}1 \text{ кН}.$$

Вырежем узел B, изобразим усилия в разрезанных стержнях (рис. 6) и составим уравнения равновесия в проекциях на ось x:

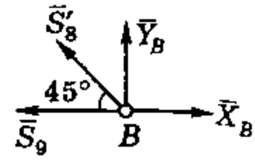


Рис. 6

$$X_B - S_9 - S_8' \cos 45° = 0 \Rightarrow$$

$$S_9 = -S_8' \cos 45° + X_B.$$

Учитывая, что $|\bar{S}_8'| = |\bar{S}_8|$, окончательно получим:

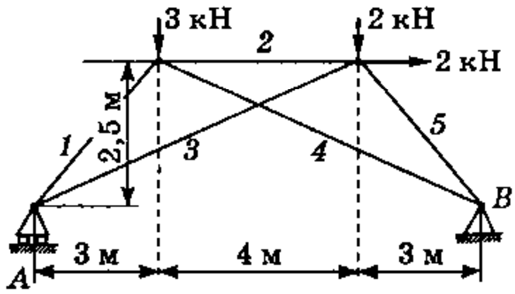
$$S_9 = 0{,}9 \text{ кН}.$$

Ответ: $Y_A = 2{,}1$ кН; $X_B = -2$ кН; $Y_B = 2{,}9$ кН.

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие, кН	–2,97	2,1	2,1	–2,1	1,5	0,9	0	–4,1	0,9

Задача 4.72

Определить опорные реакции и усилия в стержнях сооружения, изображенного вместе с приложенными к нему силами на рисунке. Стержни *3* и *4* не соединены шарниром в точке их пересечения.



Решение

Заменим грузы в точках C и D сосредоточенными силами величиной 3 кН и 2 кН соответственно (рис. 1).

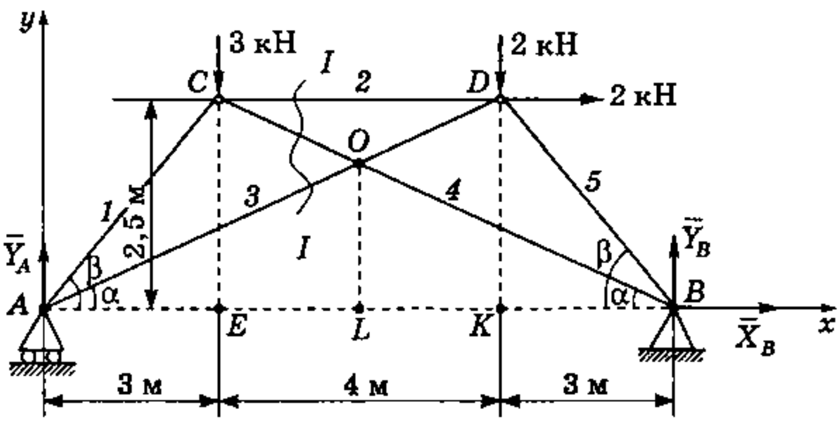


Рис. 1

Сперва определим реакции в опорах A и B. Для плоской системы сил, действующих на стержневую систему, составим уравнения равновесия (в проекциях на ось x и для моментов относительно точек A и B):

$$\begin{cases} X_B + 2 = 0, \\ -3 \cdot 3 - 2 \cdot 7 - 2 \cdot 2{,}5 + Y_B \cdot 10 = 0, \\ -Y_A \cdot 10 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2{,}5 = 0. \end{cases}$$

Решив систему, найдем:

$$X_B = -2 \text{ кН}, \; Y_A = 2{,}2 \text{ кН}, \; Y_B = 2{,}8 \text{ кН}.$$

Знак «минус» указывает на то, что сила реакции $\overline{X}_B$ направлена в сторону, противоположную изначально выбранной.

Вырежем узел A (рис. 2) и составим для него уравнения равновесия (в проекциях на оси x и y):

$$\begin{cases} S_1 \cos\beta + S_3 \cos\alpha = 0, \\ Y_A + S_1 \sin\beta + S_3 \sin\alpha = 0. \end{cases}$$

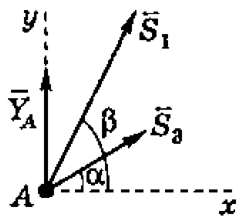


Рис. 2

Из системы получим:

$$S_1 = \frac{Y_A \cos\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}, \quad S_3 = -\frac{S_1 \cos\beta}{\cos\alpha}.$$

Определим из треугольника AKD (см. рис. 1):

$$\cos\alpha = \frac{AK}{AD} = \frac{AK}{\sqrt{AK^2 + KD^2}} = \frac{7}{\sqrt{7^2 + 2{,}5^2}} = \frac{14}{\sqrt{221}};$$

$$\sin\alpha = \frac{DK}{AD} = \frac{2{,}5}{\sqrt{7^2 + 2{,}5^2}} = \frac{5}{\sqrt{221}}.$$

Аналогично из треугольника AEC:

$$\sin\beta = \frac{EC}{AC} = \frac{2{,}5}{\sqrt{3^2 + 2{,}5^2}} = \frac{5}{\sqrt{61}};$$

$$\cos\beta = \frac{EA}{AC} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 2{,}5^2}} = \frac{6}{\sqrt{61}}.$$

Вычислим:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=-\frac{40}{\sqrt{221}\cdot\sqrt{61}}.$$

В результате подстановки численных значений найдем:

$$S_1=-6\ \text{кН},\ S_3=4{,}9\ \text{кН}.$$

Знак «минус» указывает на то, что стержень *1* сжат. Соответственно стержень *3* растянут.

Вырежем узел B (рис. 3) и составим для него уравнения равновесия:

$$\begin{cases}-S_4\cos\alpha-S_5\cos\beta+X_B=0,\\ S_4\sin\alpha+S_5\sin\beta+Y_B=0.\end{cases}$$

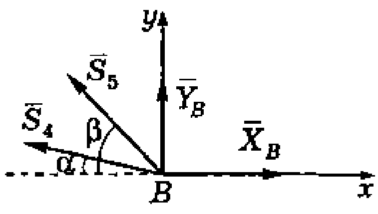


Рис. 3

Из системы найдем:

$$S_4=-\frac{X_B\sin\beta+Y_B\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)},\quad S_5=\frac{X_B\sin\alpha+Y_B\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Подставляя в последние выражения численные значения, вычислим:

$$S_4=2{,}53\ \text{кН},\ S_5=-5{,}7\ \text{кН}.$$

Соответственно стержень *4* растянут, стержень *5* сжат.

Сделаем разрез *I—I* (см. рис. 1) и составим уравнение равновесия для моментов относительно точки O (рис. 4):

$$-Y_A\cdot5-S_2\cdot HO+3\cdot EL=0,$$

откуда

$$S_2=\frac{3EL-5Y_A}{HO}.$$

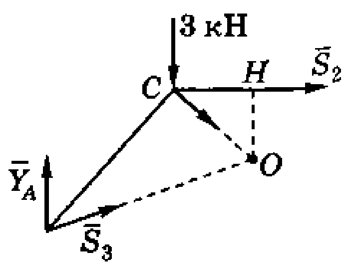


Рис. 4

Треугольники AOL и ADK подобны, следовательно

$$\frac{OL}{DK}=\frac{AL}{AK}.$$

Тогда

$$HO = DK - OL = DK\left(1 - \frac{AL}{AK}\right) = 2,5\left(1 - \frac{5}{7}\right) = \frac{5}{7}.$$

Подставляя численные значения в выражение для S_2, найдем:

$$S_2 = -7 \text{ кН}.$$

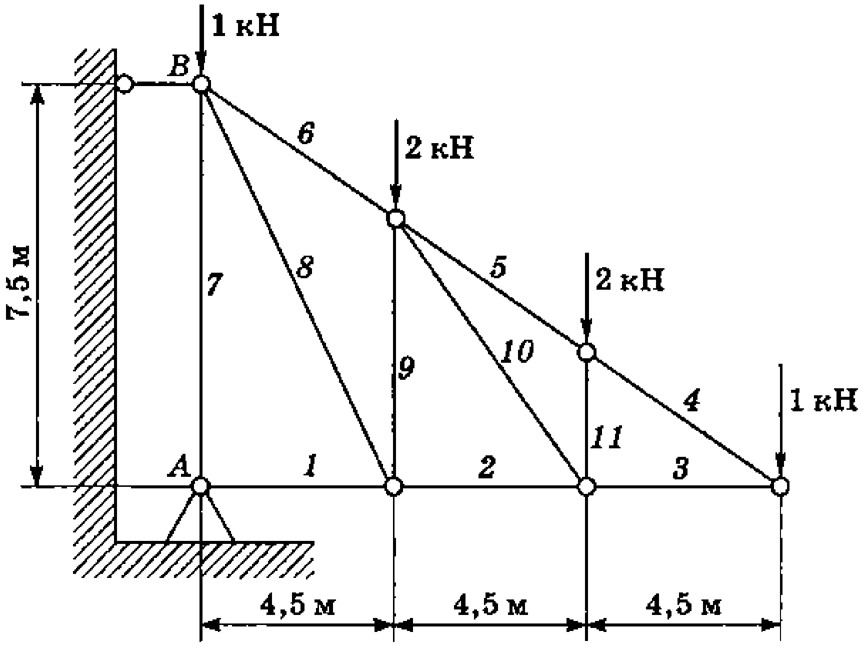
Стержень *2* сжат.

Ответ: $X_B = -2$ кН; $Y_A = 2,2$ кН; $Y_B = 2,8$ кН.

Номер стержня	1	2	3	4	5
Усилие, кН	–6	–7	4,9	2,53	–5,7

Задача 4.73

Определить опорные реакции и усилия в стержнях навесной фермы, изображенной вместе с действующими на нее силами на рисунке.



Решение

Для решения задачи применим комбинированный метод: метод Риттера (метод сечений) и метод вырезания узлов.

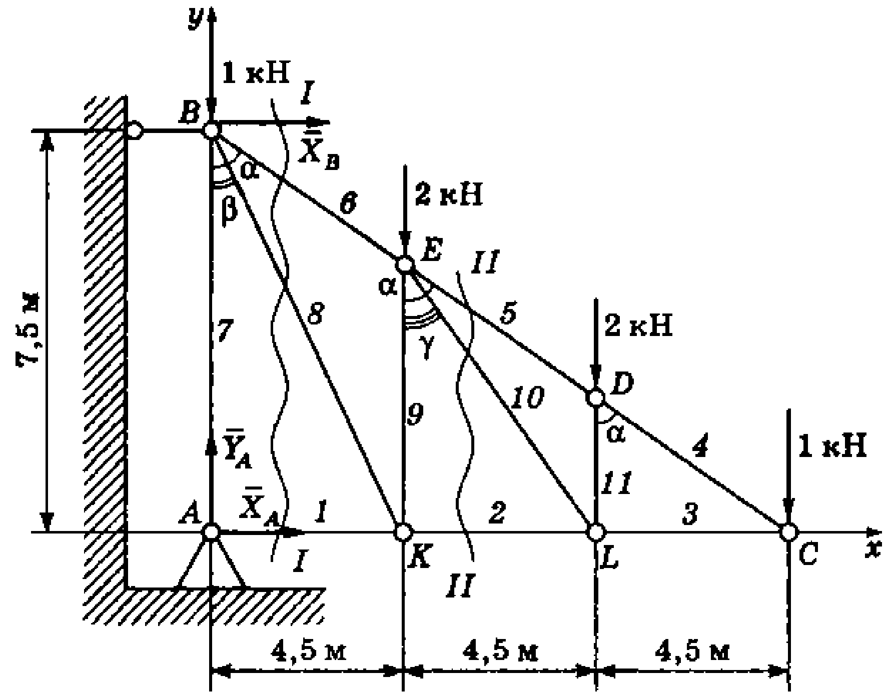


Рис. 1

Составим уравнения равновесия для всей стержневой системы (в проекциях на оси x и y и для моментов относительно точки A) (рис. 1):

$$\begin{cases} X_A + X_B = 0, \\ Y_A - 1 - 2 - 2 - 1 = 0, \\ -X_B \cdot 7{,}5 - 2 \cdot 4{,}5 - 2 \cdot 9 - 1 \cdot 13{,}5 = 0. \end{cases}$$

Решив систему, получим:

$$X_A = 5{,}4 \text{ кН}, \;\; X_B = -5{,}4 \text{ кН}, \;\; Y_A = 6 \text{ кН}.$$

Знак «минус» указывает на то, что реакция $\overline{X}_B$ направлена в сторону, противоположную изображенной на рис. 1 (т.е. влево).

Произведем предварительные расчеты необходимых тригонометрических величин. Из треугольника ABC (рис. 1) следует:

$$\cos\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{7{,}5}{\sqrt{7{,}5^2 + 13{,}5^2}} = \frac{5}{\sqrt{106}};$$

$$\sin\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{13{,}5}{\sqrt{7{,}5^2 + 13{,}5^2}} = \frac{9}{\sqrt{106}}.$$

Из треугольника ABK получим:

$$\sin\beta = \frac{AK}{BK} = \frac{4,5}{\sqrt{7,5^2+4,5^2}} = \frac{3}{\sqrt{34}};$$

$$\cos\beta = \frac{AB}{BK} = \frac{7,5}{\sqrt{7,5^2+4,5^2}} = \frac{5}{\sqrt{34}}.$$

Из треугольника KEL имеем:

$$\sin\gamma = \frac{KL}{\sqrt{KE^2+KL^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{KE}{\sqrt{KE^2+KL^2}}.$$

Поскольку треугольники EKC и BAC подобны, то

$$\frac{KE}{AB} = \frac{KC}{AC} \Rightarrow KE = \frac{AB\cdot KC}{AC} \Rightarrow KE = 5 \text{ м}.$$

Тогда

$$\sin\gamma = \frac{4,5}{\sqrt{4,5^2+5^2}} = \frac{9}{\sqrt{181}}; \quad \cos\gamma = \frac{5}{\sqrt{4,5^2+5^2}} = \frac{10}{\sqrt{181}}.$$

Рассмотрим сечение I—I (рис. 1 и 2) и составим уравнения равновесия для моментов сил относительно точек B, C и K:

$$\begin{cases} X_A\cdot 7,5 + S_1\cdot 7,5 = 0, \\ -Y_A\cdot 13,5 + 1\cdot 13,5 - X_B\cdot 7,5 - S_8\sin\beta\cdot 7,5 + S_8\cos\beta\cdot 13,5 = 0, \\ -Y_A\cdot 4,5 + 1\cdot 4,5 - X_B\cdot 7,5 - S_6\sin\alpha\cdot 7,5 + S_6\cos\alpha\cdot 4,5 = 0. \end{cases}$$

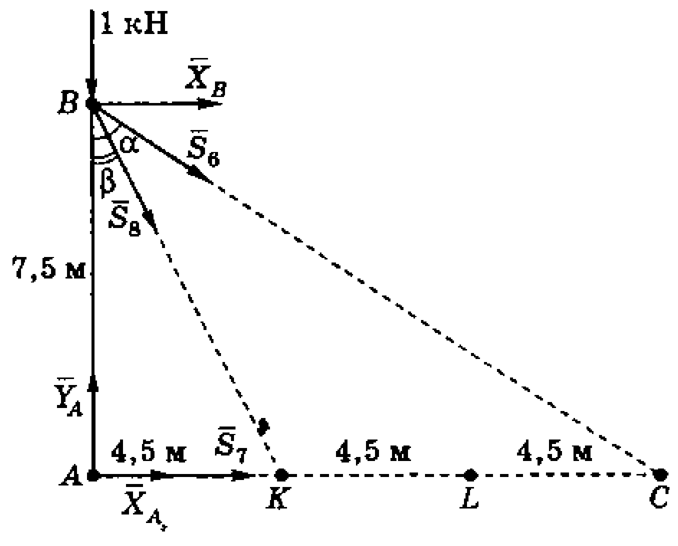


Рис. 2

Заметим, что при составлении уравнений моментов для сил $\bar{S}_6$ и $\bar{S}_8$ применялась теорема Вариньона о моменте равнодействующей. Решив систему, найдем:

$$S_1 = -5{,}4\ \text{кН},\ S_6 = 4{,}1\ \text{кН},\ S_8 = 3{,}5\ \text{кН}.$$

Стержень *1* сжат.

Рассмотрим сечение *II—II* (рис. 1 и 3) и составим уравнения равновесия для моментов сил относительно точек *C*, *E* и *L*:

$$\begin{cases} 2\cdot 4{,}5 - S_{10}\cos\gamma\cdot 4{,}5 = 0, \\ -2\cdot 4{,}5 - 1\cdot 9 - S_2\cdot 5 = 0, \\ -1\cdot 4{,}5 + S_5\sin\alpha\cdot LD = 0. \end{cases}$$

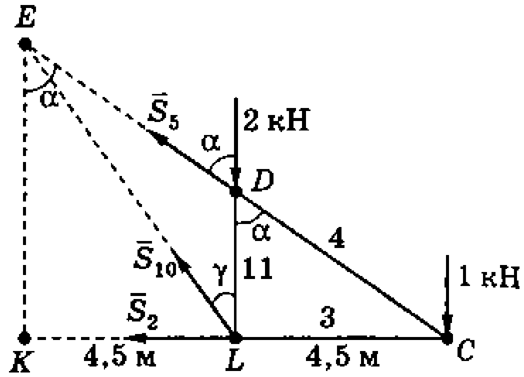


Рис. 3

Учитывая, что

$$\frac{LD}{AB} = \frac{LC}{AC} \Rightarrow LD = 2{,}5\ \text{м},$$

решим систему:

$$S_2 = -3{,}6\ \text{кН},\ S_5 = 2{,}06\ \text{кН},\ S_{10} = 2{,}7\ \text{кН}.$$

Стержень *2* сжат.

Оставшиеся усилия в стержнях найдем методом вырезания узлов.

Вырежем узел *A* (рис. 4) и составим уравнение равновесия в проекциях на ось *y*:

$$Y_A + S_7 = 0 \Rightarrow S_7 = -Y_A = -6\ \text{кН}.$$

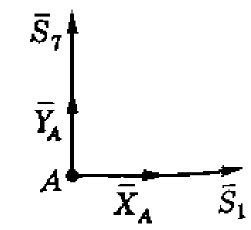


Рис. 4

Стержень *7* сжат.

Вырежем узел *K* (рис. 5) и составим уравнение равновесия в проекциях на ось *y*:

$$S_9 + S_9\cos\beta = 0 \Rightarrow S_9 = -S_8\cos\beta;$$

$$S_9 = -3\ \text{кН}.$$

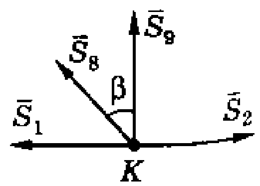


Рис. 5

Стержень *9* сжат.

Вырежем узел L (рис. 6) и составим уравнение равновесия в проекциях на ось y:

$$S_{11}+S_{10}\cos\gamma=0 \Rightarrow S_{11}=-S_{10}\cos\gamma;$$

$$S_{11}=-2 \text{ кН}.$$

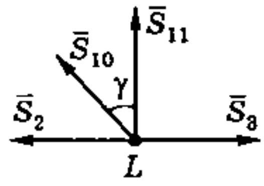


Рис. 6

Стержень *11* сжат.

Вырежем узел C (рис. 7) и составим уравнения равновесия (в проекциях на оси x и y):

$$\begin{cases}-S_3-S_4\cos(90^\circ-\alpha)=0,\\ S_4\sin(90^\circ-\alpha)-1=0.\end{cases}$$

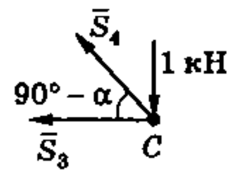


Рис. 7

Решив систему, найдем:

$$S_3=-1{,}8 \text{ кН},\ S_4=2{,}06 \text{ кН}.$$

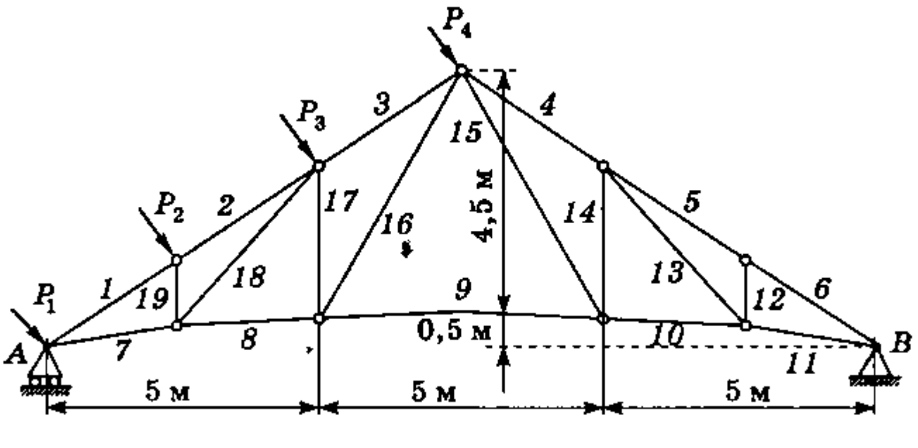
Стержень *3* сжат.

Ответ: $X_A=5{,}4$ кН; $X_B=-5{,}4$ кН; $Y_A=6$ кН.

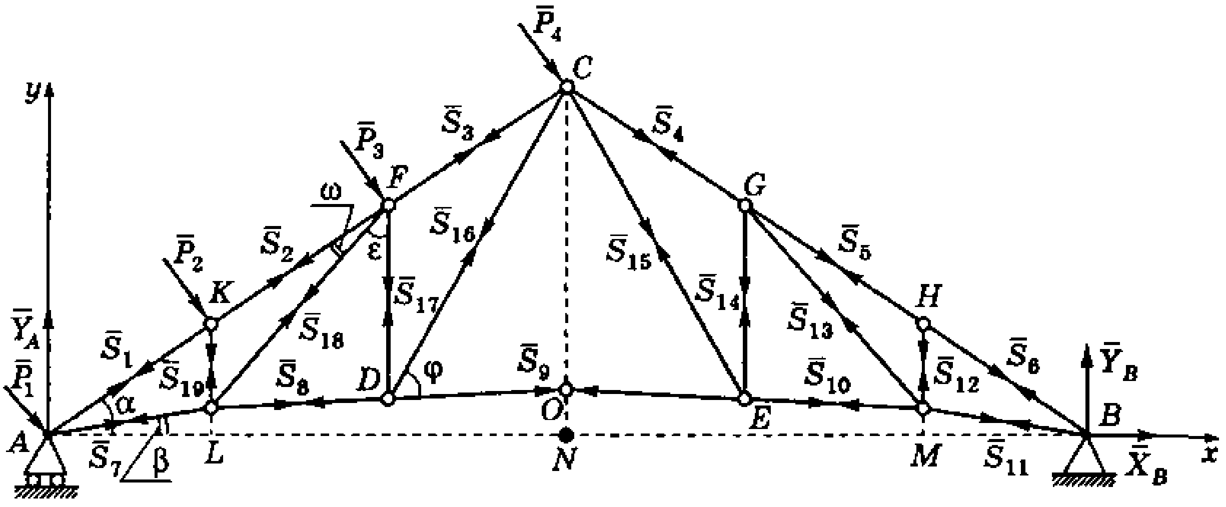
Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Усилие, кН	–5,4	–3,6	–1,8	2,06	2,06	4,1	–6	3,5	–3	2,7	–2

Задача 4.74

В узлах стропильной фермы с равными панелями вследствие давления ветра возникают силы, перпендикулярные кровле: $P_1 = P_4 = 312{,}5$ Н и $P_2 = P_3 = 625$ Н. Определить вызываемые ветром реакции опор и усилия в стержнях фермы, размеры которой указаны на рисунке.



Решение



Произведем предварительно необходимые расчеты:

$$AB = 15 \text{ м},\ CN = 5 \text{ м},\ ON = 0,5 \text{ м}.$$

$$\angle NAC = \angle NBC = \alpha;\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{7,5} \Rightarrow \alpha = 33,6901°.$$

$$\angle NAD = \angle NBE = \beta;\ \operatorname{tg}\beta = 0,1 \Rightarrow \beta = 5,7106°.$$

$$\gamma = \alpha - \beta = 27,9795°.$$

$$AL = \frac{2,5}{\cos\beta} = 2,5124 \text{ м}.\ \ AK = \frac{2,5}{\cos\alpha} = 3,0046 \text{ м}.$$

$$LK^2 = AK^2 + AL^2 - 2AK\cdot AL\cdot\cos\gamma = 2,0122 \text{ м}^2 \Rightarrow LK = 1,4185 \text{ м}.$$

$$\angle AKL = 90° - \alpha = 56,3099°;\ \angle LKF = 180° - 56,3099° = 123,6901°.$$

$$LF^2 = LK^2 + KF^2 - 2LK\cdot KF\cos 123,6901° = 15,7681 \text{ м}^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow LF = 3,9709 \text{ м}.$$

$$\angle KFL = \omega,\ \sin\omega = \frac{LK}{LF}\sin 56,3099° = 0,2972 \Rightarrow \omega = 17,2912°.$$

$$\angle LFD = \varepsilon = 90° - (\alpha + \omega) = 39,0187°.$$

$$\angle ODC = \varphi;\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{4,5}{2,5} \Rightarrow \varphi = 60,9454°.$$

$$AC = \frac{7,5}{\cos\alpha} = 9,0139 \text{ м}.$$

Для определения опорных реакций фермы составим уравнения равновесия для системы в целом (в проекциях на оси x и y и для моментов относительно точки B):

$$\begin{cases} -X_B + (P_1 + P_2 + P_3 + P_4)\sin\alpha = 0, \\ Y_A + Y_B - (P_1 + P_2 + P_3 + P_4)\cos\alpha = 0, \\ Y_A \cdot 15 - P_4 \cdot 9{,}0139 - P_3 \cdot 6{,}0092 - P_2 \cdot 3{,}0046 = 0. \end{cases}$$

Решив систему, найдем:

$$X_B = 1040\ \text{Н},\quad Y_B = 563\ \text{Н},\quad Y_A = 997\ \text{Н}.$$

Далее будем рассматривать равновесие узлов и составлять соответствующие уравнения.

Узел A:

$$\begin{cases} S_1\cos\alpha + S_7\cos\beta + P_1\sin\alpha = 0, \\ Y_A + S_1\sin\alpha + S_7\sin\beta - P_1\cos\alpha = 0; \end{cases}$$

узел K:

$$\begin{cases} -S_1\cos\alpha + S_2\cos\alpha + P_2\sin\alpha = 0, \\ -S_1\sin\alpha - S_{19} + S_2\sin\alpha - P_2\cos\alpha = 0; \end{cases}$$

узел L:

$$\begin{cases} -S_7\cos\beta + S_8\cos\beta + S_{18}\sin\varepsilon = 0, \\ -S_7\sin\beta + S_8\sin\beta + S_{18}\cos\varepsilon + S_{19} = 0; \end{cases}$$

узел F:

$$\begin{cases} -S_2\cos\alpha - S_{18}\sin\varepsilon + S_3\cos\alpha + P_3\sin\alpha = 0, \\ -S_2\sin\alpha - S_{18}\cos\varepsilon - S_{17} + S_3\sin\alpha - P_3\cos\alpha = 0; \end{cases}$$

узел D:

$$\begin{cases} -S_8\cos\beta + S_9 + S_{16}\cos\varphi = 0, \\ -S_8\sin\beta + S_{17} + S_{16}\sin\varphi = 0; \end{cases}$$

узел C:

$$\begin{cases} -S_3\cos\alpha - S_{16}\cos\varphi + S_4\cos\alpha + S_{15}\cos\varphi + P_4\sin\alpha = 0, \\ -S_3\sin\alpha - S_{16}\sin\varphi - S_4\sin\alpha - S_{15}\sin\varphi - P_4\cos\alpha = 0; \end{cases}$$

узел E:

$$\begin{cases} -S_9 + S_{19}\cos\beta - S_{15}\cos\varphi = 0, \\ -S_{10}\sin\beta + S_{15}\sin\varphi + S_{14} = 0; \end{cases}$$

узел G:

$$\begin{cases} -S_4\cos\alpha + S_5\cos\alpha + S_{13}\sin\varepsilon = 0, \\ S_4\sin\alpha - S_5\sin\alpha - S_{13}\cos\varepsilon - S_{14} = 0; \end{cases}$$

узел H:

$$\begin{cases} -S_5\cos\alpha + S_6\cos\alpha = 0, \\ S_5\sin\alpha - S_6\sin\alpha - S_{12} = 0; \end{cases}$$

узел B:

$$-S_6\cos\alpha - S_{11}\cos\beta - X_B = 0.$$

Решая последовательно полученные системы уравнений (и последнее уравнение) для узлов, найдем усилия в стержнях фермы:

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие, Н	–1525	–1940	–1560	–970	–970	–970	1100	440	–215

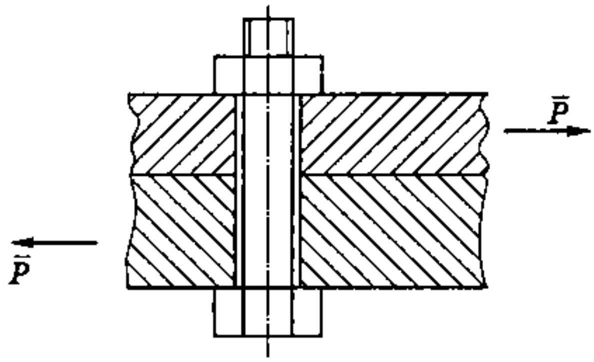
Номер стержня	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Усилие, Н	–230	–230	0	0	0	-26	1340	–1130	1050	–750

О т в е т: $Y_A = 997$ Н; $X_B = 1040$ Н; $Y_B = 563$ Н;
$S_1 = -1525$ Н; $S_2 = -1940$ Н; $S_3 = -1560$ Н;
$S_4 = S_5 = S_6 = -970$ Н; $S_7 = 1100$ Н; $S_8 = 440$ Н;
$S_9 = -215$ Н; $S_{10} = S_{11} = -230$ Н; $S_{12} = S_{13} = S_{14} = 0$;
$S_{15} = -26$ Н; $S_{16} = 1340$ Н; $S_{17} = -1130$ Н;
$S_{18} = 1050$ Н; $S_{19} = -750$ Н.

5. Силы трения

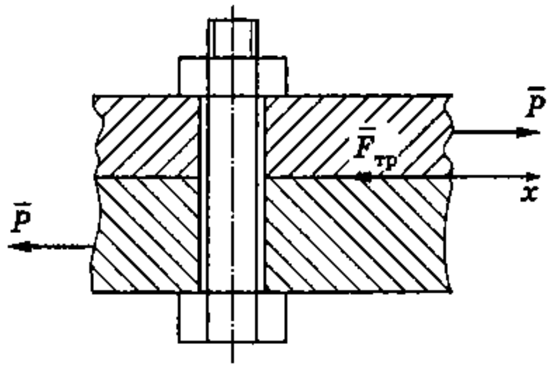
Задача 5.1

Определить необходимую затяжку болта, скрепляющего две стальные полосы, разрываемые силой $P = 2$ кН. Болт поставлен с зазором и не должен работать на срез. Коэффициент трения между листами равен 0,2. (Болт не должен работать на срез, поэтому его надо затянуть с такой силой, чтобы развивающееся между листами трение могло предотвратить скольжение листов. Сила, действующая вдоль оси болта, и является искомой затяжкой.)



Р е ш е н и е

Так как болт поставлен с зазором и не должен работать на срез, то две силы величиной P должны уравновешиваться силой трения в стыке полос и на опорной поверхности болта и гайки (см. рисунок). Составим уравнения равновесия полосы:



$$-F_{тр} + P = 0,$$

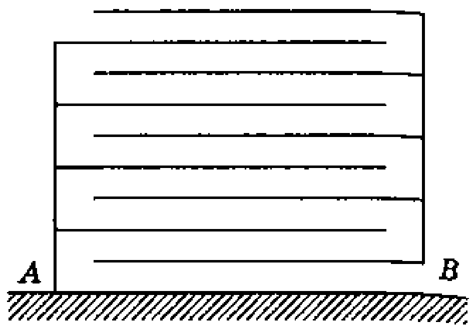
где $F_{тр} = S \cdot \mu$ — предельно возможное значение силы трения; S — затяжка болта; μ — коэффициент трения. В результате получим

$$S = \frac{P}{\mu} = \frac{2}{0{,}2} = 10 \text{ кН}.$$

О т в е т: 10 кН.

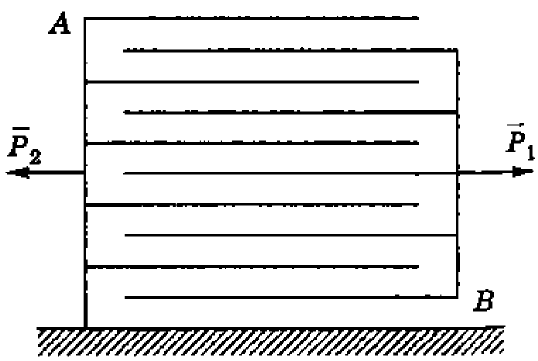
Задача 5.2

Листы бумаги, сложенные, как показано на рисунке, склеиваются свободными концами через лист таким образом, что получаются две самостоятельные кипы A и B. Вес каждого листа $G = 0{,}06$ Н, число всех листов $Z = 200$, коэффициент трения бумаги о бумагу, а также о стол, на котором бумага лежит, равен 0,2. Предполагая, что одна из кип удерживается неподвижно, определить наименьшее горизонтальное усилие P, необходимое для того, чтобы вытащить вторую кипу.



Р е ш е н и е

Покажем на рисунке действующие на кипу силы.



Пусть i — номер листа бумаги, $i = 1, 2, \ldots, 200$; P_1 — величина силы, возникающей при вытаскивании кипы A из B; P_2 — величина силы, возникающей при вытаскивании кипы B из A; μ — коэффициент трения.

Вычислим P_1:

$$P_1 = \sum_{i=1}^{199} i\,\mu G = \mu G \sum_{i=1}^{199} i.$$

Используя тождество

$$\sum_{i=1}^{k} i = 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

найдем:

$$\sum_{i=1}^{199} i = \frac{199 \cdot 200}{2} = 19\,900.$$

Тогда

$$P_1 = \mu G \cdot 19\,900 = 0{,}2 \cdot 0{,}06 \cdot 19\,900 = 238{,}8 \text{ Н}.$$

Аналогично вычислим P_2:

$$P_2 = \sum_{i=1}^{200} i\,\mu G = \mu G \sum_{i=1}^{200} i = \mu G \frac{200 \cdot 201}{2} = 0{,}2 \cdot 0{,}06 \cdot 20\,100 = 241{,}2 \text{ Н}.$$

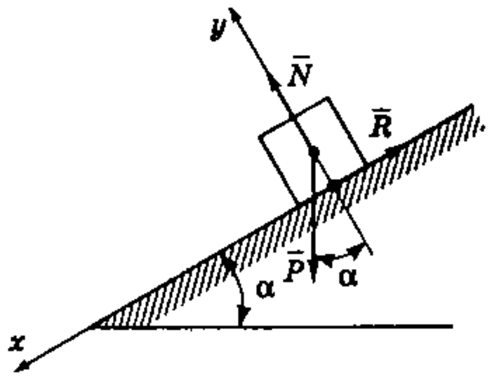
Ответ: при вытаскивании A из B сила $P = 241{,}2$ Н,
а при вытаскивании B из A сила $P = 238{,}8$ Н.

Задача 5.3

Вагон, спускающийся по уклону в 0,008, достигнув некоторой определенной скорости, движется затем равномерно. Определить сопротивление R, которое испытывает вагон при этой скорости, если вес вагона равен 500 кН. (Уклоном пути называется тангенс угла наклона пути к горизонту; вследствие малости уклона синус может быть принят равным тангенсу этого угла.)

Решение

Рассмотрим силы, действующие на вагон: $\overline{P}$ — вес вагона; $\overline{R}$ — сила сопротивления; $\overline{N}$ — нормальная реакция (см. рисунок).



Так как вагон движется равномерно, то действующие на него силы уравновешены, т.е. в проекциях на оси x и y можно записать:

$$\begin{cases} P\sin\alpha - R = 0, \\ N - P\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы найдем:

$$R = P\sin\alpha.$$

Поскольку для малых углов $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = 0{,}008$, то

$$R = 0{,}008 \cdot 500 = 4 \text{ кН}.$$

Ответ: $R = 4$ кН.

Задача 5.4

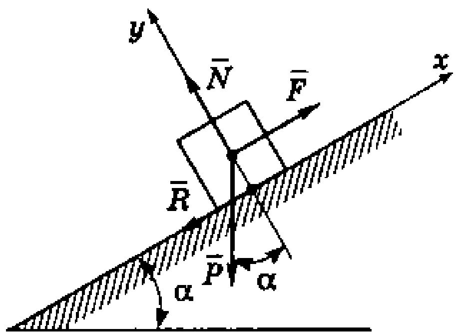
Поезд поднимается по прямолинейному пути, имеющему уклон 0,008, с постоянной скоростью; вес поезда, не считая электровоза, 12 000 кН. Какова сила тяги F электровоза, если сопротивление движению равно 0,005 давления поезда на рельсы?

Решение

Покажем на рисунке силы, действующие на поезд.

Так как поезд движется прямолинейно и равномерно, то действующие на него силы взаимно уравновешены. Запишем уравнение равновесия в проекциях на ось x:

$$F - P\sin\alpha - R = 0.$$



Тогда

$$F = P\sin\alpha + R = P\sin\alpha + 0{,}005P\cos\alpha.$$

Так как угол α мал, то $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$; $\cos\alpha \approx 1$, поэтому

$$F = P(\operatorname{tg}\alpha + 0{,}005) = 12\,000(0{,}008 + 0{,}005) = 156 \text{ кН}.$$

Ответ: F = 156 кН.

Задача 5.5

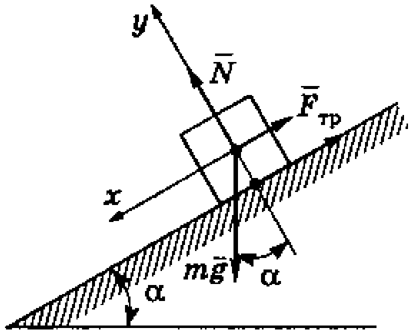
Негладкой наклонной плоскости придан такой угол α наклона к горизонту, что тяжелое тело, помещенное на эту плоскость, спускается с той постоянной скоростью, которая ему сообщена в начале движения. Определить коэффициент трения f.

Решение

Так как тело совершает прямолинейное равномерное движение, то действующие на него силы (см. рисунок) уравновешены. Уравнения равновесия в проекциях на оси x и y:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} = 0, \\ N - mg\cos\alpha = 0, \end{cases}$$

или



$$\begin{cases} F_{тр} = mg\sin\alpha, \\ N = mg\cos\alpha. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{F_{тр}}{N} = \operatorname{tg}\alpha.$$

А поскольку $F_{тр} = fN$, то $f = \operatorname{tg}\alpha$.

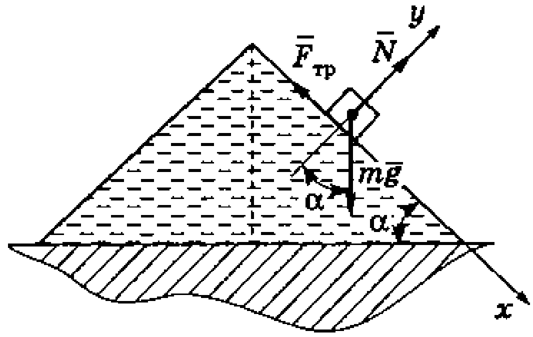
Ответ: $f = \operatorname{tg}\alpha$.

Задача 5.6

Найти угол естественного откоса земляного грунта, если коэффициент трения для этого грунта $f = 0{,}8$. (Углом естественного откоса называется тот наибольший угол наклона откоса к горизонту, при котором частица грунта, находящаяся на откосе, остается в равновесии.)

Решение

На рисунке изобразим силы, действующие на частицу, и составим уравнения равновесия (в проекциях на оси x и y):



$$\begin{cases} mg\sin\alpha - F_{тр} = 0, \\ N - mg\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Поскольку

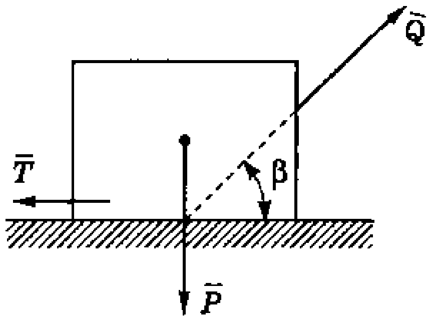
$$F_{тр} = fN,$$

то из системы можно получить соотношение $\operatorname{tg}\alpha = f$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}8, \quad \alpha = 38^\circ 40'.$$

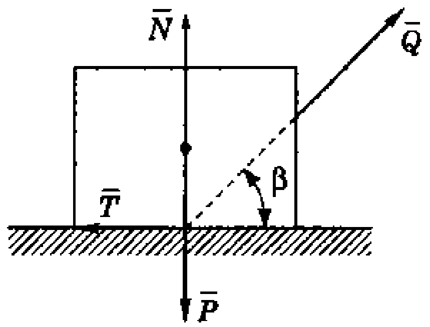
Ответ: $\alpha = 38^\circ 40'$.

Задача 5.7



Ящик весом P стоит на шероховатой горизонтальной плоскости с коэффициентом трения f. Определить, под каким углом β надо приложить силу $\bar{Q}$ и величину этой силы, при условии: сдвинуть ящик при наименьшей величине Q.

Решение



На основании рисунка составим уравнения равновесия ящика (в проекциях сил на оси x и y) и добавим к ним соотношение, связывающее силу трения с нормальной реакцией:

$$\begin{cases} Q\cos\beta - T = 0, \\ Q\sin\beta + N - P = 0, \\ T = fN. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы имеем

$$N = P - Q\sin\beta,$$

тогда из третьего:

$$T = fP - fQ\sin\beta.$$

Следовательно, с учетом первого уравнения системы

$$Q\cos\beta = fP - fQ\sin\beta \Rightarrow$$

$$Q = \frac{fP}{\cos\beta + f\sin\beta}.$$

Величина Q принимает свое минимальное значение, когда значение функции $f(\beta) = \cos\beta + f\sin\beta$ максимально.

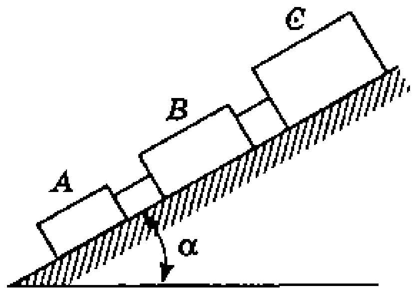
$f'(\beta) = -\sin\beta + f\cos\beta$. $f'(\beta) = 0$, когда $\operatorname{tg}\beta = f$, т.е. $\beta = \operatorname{arctg} f$.

$$Q_{\min} = \frac{fP}{\cos(\operatorname{arctg} f) + f\sin(\operatorname{arctg} f)} =$$

$$= \frac{fP}{\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} f)}} + f\dfrac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} f)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\operatorname{arctg} f)}}} = \frac{fP}{\dfrac{1+f^2}{\sqrt{1+f^2}}} = \frac{fP}{\sqrt{1+f^2}}.$$

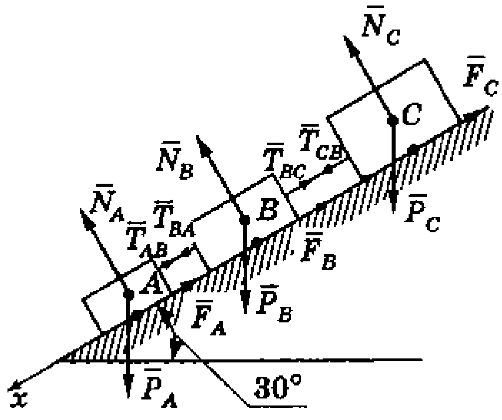
Ответ: $\beta = \operatorname{arctg} f$; $Q_{\min} = \dfrac{fP}{\sqrt{1+f^2}}$.

Задача 5.8



Три груза A, B, C весом 10 Н, 30 Н и 60 Н соответственно лежат на плоскости, наклоненной под углом α к горизонту. Грузы соединены тросами, как показано на рисунке. Коэффициенты трения между грузами и плоскостью равны $f_A = 0{,}1$, $f_B = 0{,}25$ и $f_C = 0{,}5$ соответственно. Определить угол α, при котором тела равномерно движутся вниз по плоскости. Найти также натяжения тросов T_{AB} и T_{BC}.

Решение



При равномерном прямолинейном движении действующие на тела силы взаимно уравновешиваются. Заменим силы натяжения тросов реакциями связей ($T_{AB} = T_{BA}$, $T_{BC} = T_{CB}$) (см. рисунок) и составим уравнения равновесия каждого из грузов в проекциях на ось x:

$$P_A \sin\alpha - T_{AB} - F_A = 0,$$

$$P_B \sin\alpha + T_{AB} - T_{BC} - F_B = 0,$$

$$P_C \sin\alpha + T_{BC} - F_C = 0.$$

Запишем предельно возможные значения сил трения:

$$F_A = f_A P_A \cos\alpha,$$

$$F_B = f_B P_B \cos\alpha,$$

$$F_C = f_C P_C \cos\alpha.$$

Складывая первые три уравнения с учетом последних трех, получим

$$(P_A + P_B + P_C)\sin\alpha - (f_A P_A + f_B P_B + f_C P_C)\cos\alpha = 0.$$

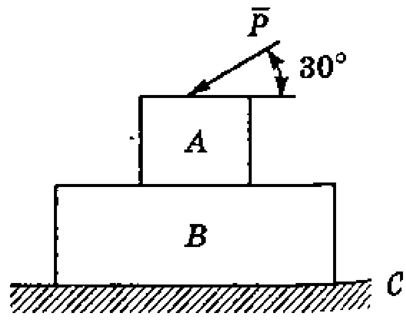
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{f_A P_A + f_B P_B + f_C P_C}{P_A + P_B + P_C} = 0{,}385 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} 0{,}385.$$

$$T_{AB} = P_A \sin\alpha - F_A = P_A(\sin\alpha - f_A\cos\alpha) = 10(\sin\alpha - 0{,}1\cos\alpha) = 2{,}7\ \text{Н}.$$

$$T_{BC} = f_C P_C \cos\alpha - P_C \sin\alpha = P_C \cos\alpha(f_C - \operatorname{tg}\alpha) =$$
$$= 60\cos\alpha(0{,}5 - 0{,}385) = 6{,}5\ \text{Н}.$$

О т в е т: $\alpha = \operatorname{arctg} 0{,}385$; $T_{AB} = 2{,}7$ Н; $T_{BC} = 6{,}5$ Н.

Задача 5.9



На верхней грани прямоугольного бруса B, вес которого $P_B = 200$ Н, находится прямоугольный брус A весом $P_A = 100$ Н. Брус B опирается своей нижней гранью на горизонтальную поверхность C, причем коэффициент трения между ними $f_2 = 0{,}2$. Коэффициент трения между брусами A и B $f_1 = 0{,}5$. На брус A действует сила $P = 60$ Н, образующая с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Будет ли брус A двигаться относительно бруса B? Будет ли брус B двигаться относительно плоскости C?

Р е ш е н и е

Составим уравнения равновесия всей системы (в проекциях на горизонталь и вертикаль) (рис. 1):

$$\begin{cases} F_{\text{тр}\,B} - P\cos 30° = 0, \\ N_B - P_A - P_B - P\sin 30° = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$N_B = P_A + P_B + P\sin 30^\circ =$$
$$= 100 + 200 + 30 = 330 \text{ Н};$$
$$F_{\text{тр}\,B} = P\cos 30^\circ = 60 \cdot 0{,}866 = 51{,}96 \text{ Н}.$$

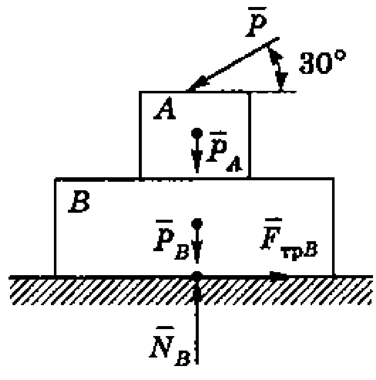


Рис. 1

Вычислим

$$F_{\text{тр}\max} = f_2 N_B = 0{,}2 \cdot 330 = 66 \text{ Н}.$$

Поскольку $F_{\text{тр}\,B} < F_{\text{тр}\max}$, то брус B покоится.

Составим аналогичные уравнения равновесия для бруса A (рис. 2):

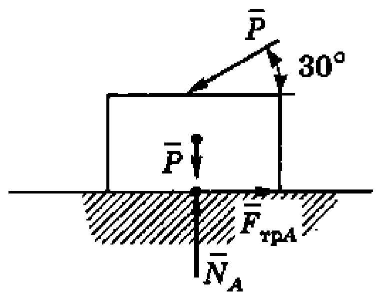


Рис. 2

$$\begin{cases} F_{\text{тр}\,A} - P\cos 30^\circ = 0, \\ N_A - P_A - P\sin 30^\circ = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$N_A = P_A + P\sin 30^\circ = 130 \text{ Н};$$
$$F_{\text{тр}\,A} = P\cos 30^\circ = 51{,}96 \text{ Н}.$$

Вычислим

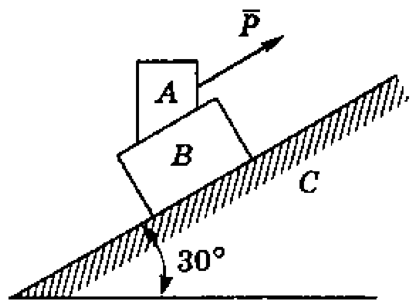
$$F_{\text{тр}\max} = f_1 N_A = 0{,}5 \cdot 130 = 65 \text{ Н}.$$

Поскольку $F_{\text{тр}\,A} < F_{\text{тр}\max}$, то брус A покоится относительно бруса B.

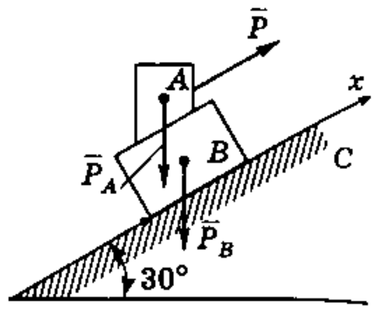
О т в е т: брусы A и B остаются в покое.

Задача 5.10

Два тела A и B расположены на наклонной плоскости C так, как показано на рисунке. Тело A весит 100 Н, тело B — 200 Н. Коэффициент трения между A и B — $f_1 = 0{,}6$, между B и C — $f_2 = 0{,}2$. Исследовать состояние системы при различных значениях силы P, приложенной к телу A параллельно наклонной плоскости.



Р е ш е н и е



Изобразим на рисунке вес тел и действующую на тело A силу P. Рассмотрим случай, когда тела A и B стремятся сдвинуться вниз как одно целое, т.е. сумма действующих сил в проекциях на ось x отрицательная:

$$P-(P_A+P_B)\sin 30^\circ+(P_A+P_B)f_2\cos 30^\circ<0 \Rightarrow$$

$$P<(P_A+P_B)(\sin 30^\circ+f_2\cos 30^\circ)=98 \text{ Н}.$$

Рассмотрим случай, когда тело A стремится сдвинуться относительно тела B вниз, т.е.

$$P-P_A\sin 30^\circ+P_Af_1\cos 30^\circ=0 \Rightarrow$$

$$P=P_A(\sin 30^\circ-f_1\cos 30^\circ)=100(0{,}5-0{,}6\cdot 0{,}866)=-1{,}96\neq 0.$$

Значит, тело A вниз по телу B двигаться не может.

Рассмотрим случай, когда тело A стремится сдвинуться относительно тела B вверх:

$$P-P_A\sin 30^\circ-P_Af_1\cos 30^\circ>0 \Rightarrow$$

$$P>P_A(\sin 30^\circ+f_1\cos 30^\circ)=102 \text{ Н}.$$

Установим, движется ли тело B вверх, при этом:

$$P_Af_1\cos\alpha<(P_A+P_B)(\sin\alpha+f_2\cos\alpha) \Rightarrow$$

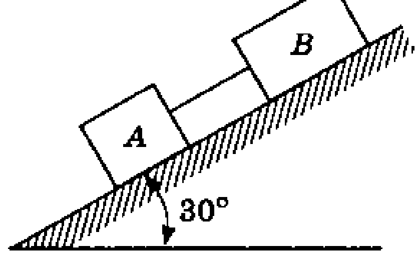
$$100\cdot 0{,}6\cdot 0{,}866<300(0{,}5+0{,}2\cdot 0{,}866).$$

Так как последнее неравенство является верным, то тело B остается в покое.

Если 98 Н < P < 102 Н, то тела находятся в покое.

О т в е т: при P < 98 Н оба тела A и B двигаются вниз, не перемещаясь друг относительно друга;
при 98 Н < P < 102 Н тела находятся в покое;
при P > 102 Н тело A скользит вверх по телу B (тело B покоится).

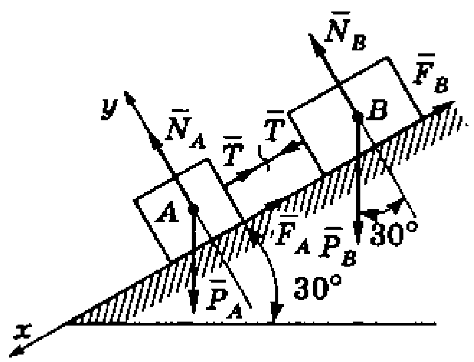
Задача 5.11



На наклонной плоскости лежит прямоугольный брус B весом 400 Н. К нему с помощью троса присоединяют прямоугольный брус A весом 200 Н, который, скользя по наклонной плоскости, натягивает трос. Коэффициенты трения с наклонной плоскостью $f_A = 0{,}5$ и $f_B = 2/3$. Будет ли система в дальнейшем находиться в покое?

Найти натяжение T троса и величины сил трения, действующих на каждое тело. Весом троса пренебречь.

Решение



Введем обозначения: $\bar{T}$ — сила натяжения троса; $\bar{P}_A$ — сила веса бруса A; $\bar{P}_B$ — сила веса бруса B; $\bar{F}_A$ — сила трения бруса A о поверхность; $\bar{F}_B$ — сила трения бруса B о поверхность (см. рисунок).

По условию задачи брус A скользит по наклонной плоскости без натяжения троса. Это означает, что

$$P_A \sin 30° - F_A > 0,\ F_A < P_A \sin 30° = 100 \text{ Н}.$$

Из условия, что $N_A = P_A \cos 30°$, получим

$$F_{A\max} = f_A N_A = 0{,}5 \cdot 200 \cdot 0{,}866 = 86{,}6 \text{ Н}.$$

Составим уравнение равновесия бруса A с учетом натяжения троса:

$$P_A \sin 30° - F_{A\max} - T = 0,$$

откуда найдем:

$$T = P_A \sin 30° - F_{A\max} = 100 - 86{,}6 = 13{,}4 \text{ Н}.$$

Составим уравнение равновесия бруса B:

$$T + P_B \sin 30^\circ - F_B = 0.$$

Следовательно,

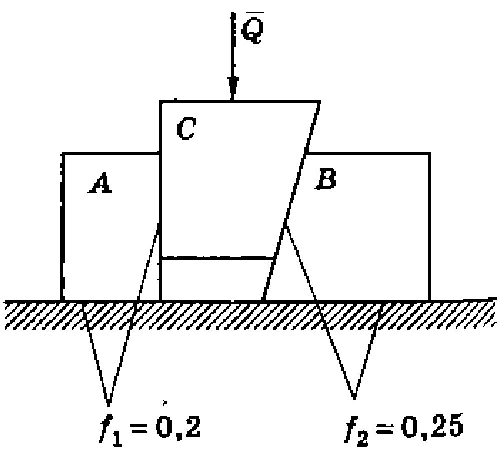
$$F_B = T + P_B \sin 30^\circ = 13{,}4 + 200 = 213{,}4 \text{ Н}.$$

$$F_{B\max} = f_B N_B = f_B P_B \cos\alpha = \frac{2}{3} \cdot 400 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 230{,}94.$$

Таким образом, система находится в равновесии, так как $F_B < F_{B\max}$.

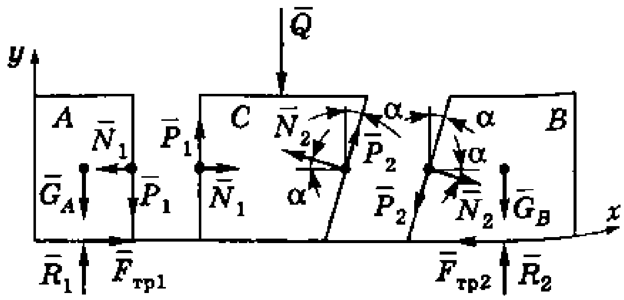
Ответ: система остается в покое; $F_A = 86{,}6$ Н; $F_B = 213{,}4$ Н; $T = 13{,}4$ Н.

Задача 5.12



Клин C вставлен между двумя телами A и B, которые лежат на шероховатой горизонтальной поверхности. Одна сторона клина вертикальна, другая образует с вертикалью угол $\alpha = \operatorname{arctg}(1/3)$. Вес тела A равен 400 Н, а вес тела B 300 Н; коэффициенты трения между поверхностями указаны на рисунке. Найти величину силы Q, под действием которой одно из тел сдвинется, а также значение силы трения F, действующей при этом со стороны горизонтальной плоскости на оставшееся неподвижное тело.

Решение



Изобразим на рисунке действующие на телá силы. Рассмотрим равновесие клина C и тел A и B по отдельности.

Тело A:

$$\begin{cases} F_{\text{тр}1} - N_1 = 0, \\ -G_A + R_1 - P_1 = 0, \\ F_{\text{тр}1} = f_1 R_1, \\ P_1 = f_1 N_1. \end{cases}$$

Клин C:

$$\begin{cases} N_1 - N_2 \cos\alpha + P_2 \sin\alpha = 0, \\ P_1 - Q + P_2 \cos\alpha + N_2 \sin\alpha = 0, \\ P_2 = f_2 N_2. \end{cases}$$

Тело B:

$$\begin{cases} N_2 \cos\alpha - P_2 \sin\alpha - F_{\text{тр}2} = 0, \\ -N_2 \sin\alpha - P_2 \cos\alpha - G_B + R_2 = 0, \\ F_{\text{тр}2} = f_2 R_2. \end{cases}$$

Из первой системы уравнений (для тела A) получим

$$R_1 = G_A + P_1;$$

$$f_1(G_A + P_1) = N_1;$$

$$P_1 = f_1 N_1;$$

следовательно,

$$N_1 = \frac{f_1 G_A}{1 - f_1^2} = \frac{0{,}2 \cdot 400}{1 - 0{,}2^2} = 83{,}33 \text{ Н}; \quad P_1 = f_1 N_1 = 16{,}67 \text{ Н}.$$

Из второй системы (клин C):

$$N_2 = \frac{N_1}{\cos\alpha - f_2 \sin\alpha} = \frac{83{,}33 \cdot \sqrt{10}}{3 - 0{,}25 \cdot 1} = 95{,}82 \text{ Н},$$

так как

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1/3}{\sqrt{1 + (1/3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}; \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{3}{\sqrt{10}};$$

$$P_2 = f_2 N_2 = 0{,}25 \cdot 95{,}82 = 24 \text{ Н};$$

$$Q = P_1 + P_2 \cos\alpha + N_2 \sin\alpha = 16{,}67 + \frac{24 \cdot 3}{\sqrt{10}} + \frac{95{,}82}{\sqrt{10}} = 69{,}74 \text{ Н} \approx 70 \text{ Н}.$$

И, наконец, из всех трех систем следует соотношение

$$F_{\text{тр}1} = F_{\text{тр}2} = N_1 = 83{,}33 \text{ Н}.$$

Так как для сдвига тела B необходимо приложить усилие

$$f_2 R_2 = f_2(G_B + N_2 \sin\alpha + P_2 \cos\alpha) = 88{,}27 \text{ Н},$$

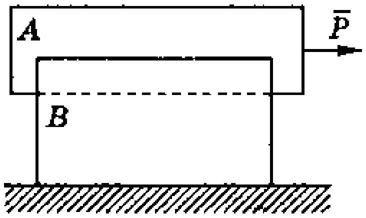
а для преодоления силы трения тела A нужно усилие

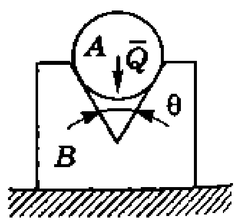
$$f_1 R_1 = f_1(G_A + P_1) = 0{,}2 \cdot (400 + 16{,}67) = 83{,}33 \text{ Н},$$

то сдвигается тело A. При этом значение F силы трения, действующей на оставшееся в неподвижности тело B, равно 83,33 Н.

Ответ: $Q = 70$ Н, причем начнет двигаться тело A; $F = 83{,}33$ Н.

Задача 5.13





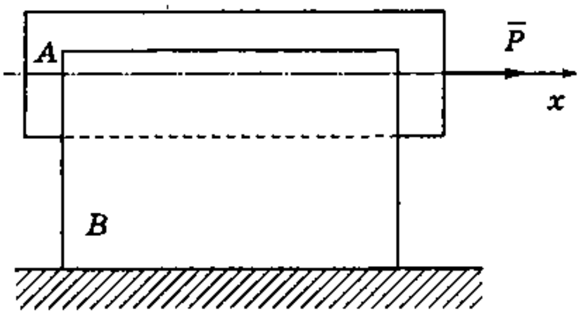
Цилиндр A лежит в направляющих B, поперечное сечение которых — симметричный клин с углом раствора θ. Коэффициент трения между цилиндром A и направляющей B равен f. Вес цилиндра равен Q. При какой величине силы P цилиндр начнет двигаться горизонтально?

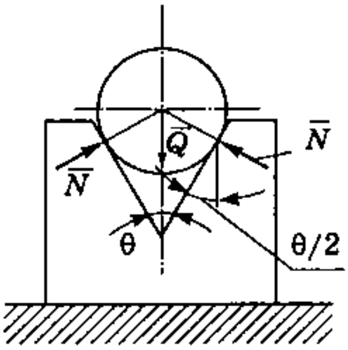
Каков должен быть угол θ, чтобы движение началось при значении силы P, равной весу цилиндра Q?

Решение

В соответствии с действующими на цилиндр силами (см. рисунок) составим его уравнения равновесия:

$$\begin{cases} P - F_{\text{тр}} = 0, \\ 2N \sin\dfrac{\theta}{2} - Q = 0. \end{cases}$$





Решая систему, получим

$$2N = \frac{Q}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Так как $F_{тр} = 2Nf$, то

$$F_{тр} = 2Nf = \frac{Qf}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Далее

$$P = F_{тр} = \frac{Qf}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

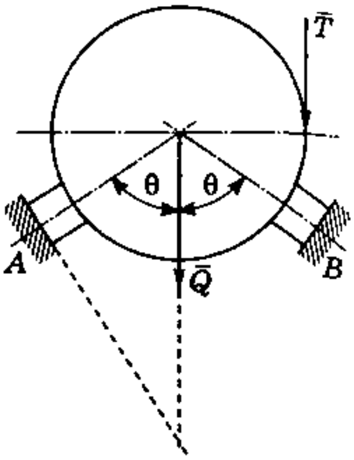
При $P = Q$ получим

$$\sin\frac{\theta}{2} = f, \quad \theta = 2\arcsin f.$$

О т в е т: $P = \dfrac{Qf}{\sin\frac{\theta}{2}}$; $\theta = 2\arcsin f$.

Задача 5.14

Цилиндр весом Q лежит на двух опорах A и B, расположенных симметрично относительно вертикали, проходящей через центр цилиндра. Коэффициент трения между цилиндром и опорами равен f. При какой величине тангенциальной силы $\overline{T}$ цилиндр начнет вращаться? При каком угле θ это устройство будет самотормозящимся?

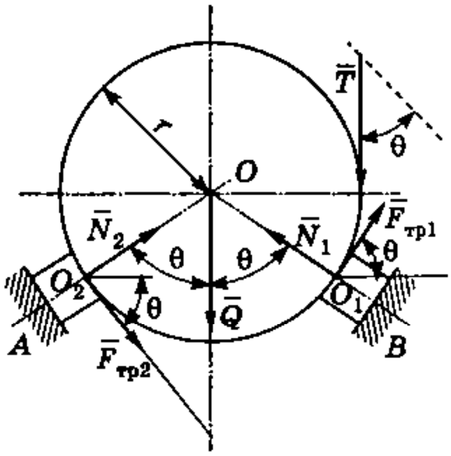


Решение

Рассмотрим равновесие цилиндра под действием сил, указанных на рисунке, и составим соответствующие уравнения для их моментов:

— относительно точки O:

$$(F_{\text{тр}1}+F_{\text{тр}2})r=Tr;$$



— относительно точки O_2:

$$2N_1 r\sin\theta\cos\theta+2F_{\text{тр}1}r\sin\theta\sin\theta=$$

$$=rQ\sin\theta+T(1+\sin\theta)r;$$

— относительно точки O_1:

$$-2N_2 r\sin\theta\cos\theta+2F_{\text{тр}2}r\sin\theta\sin\theta=$$

$$=-Qr\sin\theta+Tr(1-\sin\theta).$$

$$F_{\text{тр}1}=N_1 f\Rightarrow N_1=\frac{F_{\text{тр}1}}{f};$$

$$F_{\text{тр}2}=N_2 f\Rightarrow N_2=\frac{F_{\text{тр}2}}{f}.$$

Упростив уравнения, получим

$$F_{\text{тр}1}+F_{\text{тр}2}=T; \tag{1}$$

$$2\frac{F_{\text{тр}1}}{f}\sin\theta\cos\theta+2F_{\text{тр}2}\sin\theta\cos\theta=Q\sin\theta+T(1+\sin\theta); \tag{2}$$

$$-2\frac{F_{\text{тр}2}}{f}\sin\theta\cos\theta+2F_{\text{тр}2}\sin\theta\cos\theta=-Q\sin\theta+T(1-\sin\theta). \tag{3}$$

Из уравнения (2)

$$F_{\text{тр}1} = \frac{(Q\sin\theta + T(1+\sin\theta))f}{2\sin\theta(\cos\theta + f\sin\theta)}.$$

Из уравнения (3)

$$F_{\text{тр}2} = \frac{(Q\sin\theta + T\sin\theta - T)f}{2\sin\theta(\cos\theta - f\sin\theta)}.$$

Подставив в уравнение (1) выражения для $F_{\text{тр}1}$ и $F_{\text{тр}2}$, получим разрешающее уравнение для T:

$$\frac{(Q\sin\theta + T(1+\sin\theta))f}{2\sin\theta(\cos\theta + f\sin\theta)} + \frac{(Q\sin\theta + T\sin\theta - T)f}{2\sin\theta(\cos\theta - f\sin\theta)} = T.$$

Решая это уравнение относительно T, найдем:

$$T = \frac{fQ}{(1+f^2)\cos\theta - f}.$$

Следовательно, если

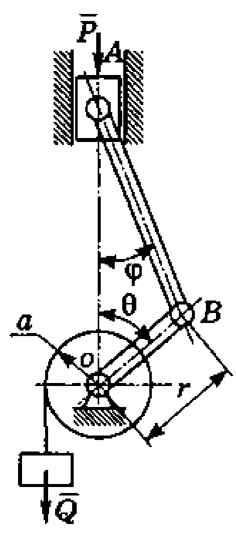
$$(1+f^2)\cos\theta - f \le 0,$$

т.е.
$$\cos\theta \le \frac{f}{1+f^2}, \quad \theta \le \arccos\frac{f}{1+f^2},$$

то это устройство будет самотормозящимся.

Ответ: $T = \dfrac{fQ}{(1+f^2)\cos\theta - f}$; $\theta \le \arccos\dfrac{f}{1+f^2}$.

Задача 5.15



Пренебрегая трением между ползуном A и направляющей, а также трением во всех шарнирах и подшипниках кривошипного механизма, определить, какова должна быть сила P, необходимая для поддерживания груза Q при указанном на рисунке положении механизма. Каковы минимальное и максимальное значения P, обеспечивающие неподвижность груза Q, если коэффициент трения между ползуном A и направляющей равен f?

Решение

Сначала рассмотрим случай, когда трением между ползуном и направляющей можно пренебречь (рис. 1). Спроектируем силу P на направление шатуна AB:

$$P = T\cos\varphi \Rightarrow T = \frac{P}{\cos\varphi}.$$

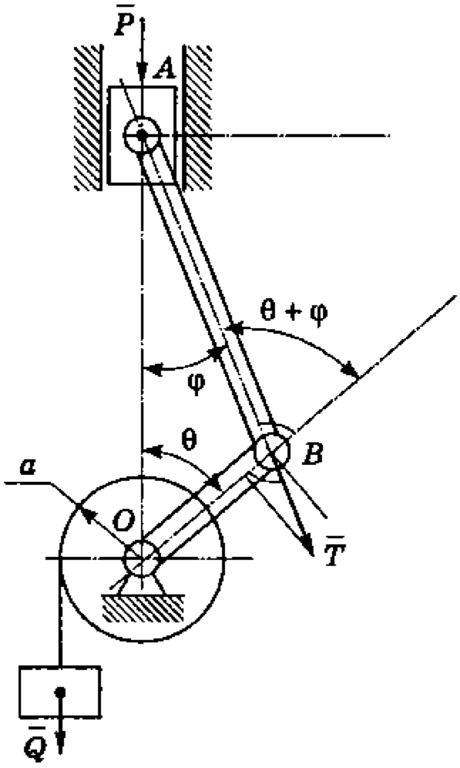


Рис. 1

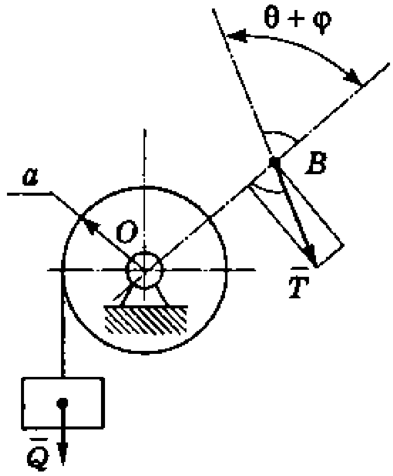


Рис. 2

Составим уравнения моментов сил $\bar{Q}, \bar{T}$ относительно точки O (рис. 2):

$$Qa = T\sin(\varphi + \theta)\,r.$$

Следовательно,

$$Qa = \frac{P}{\cos\varphi}\sin(\varphi + \theta)\,r, \quad P = \frac{Qa}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin(\varphi + \theta)}.$$

Рассмотрим теперь звено AB и случай, когда сила $\bar{F}_{тр}$ направлена вниз (рис. 3).

Составим уравнения равновесия:

$$\begin{cases} N - T\sin\varphi = 0, \\ T\cos\varphi - F_{\text{тр}} - P = 0. \end{cases}$$

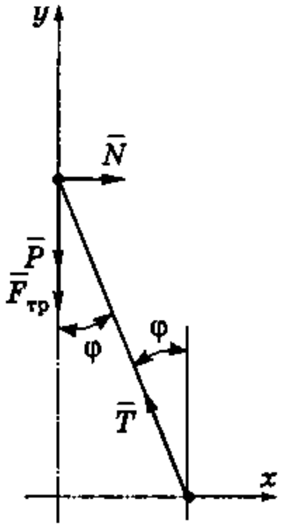


Рис. 3

Решив систему с учетом того, что

$$F_{\text{тр}} = fN,$$

найдем:

$$T = \frac{P}{\cos\varphi - f\sin\varphi}.$$

Далее рассмотрим кривошип OB. Составим уравнение моментов относительно точки O:

$$Qa - rT\sin(\varphi + \theta) = 0,$$

$$Qa = \frac{rP\sin(\varphi+\theta)}{\cos\varphi - f\sin\varphi},$$

откуда

$$P = \frac{Qa}{r}\frac{\cos\varphi - f\sin\varphi}{\sin(\varphi+\theta)}.$$

Рассмотрим звено AB в случае, когда сила $\bar{F}_{\text{тр}}$ направлена вверх (рис. 4):

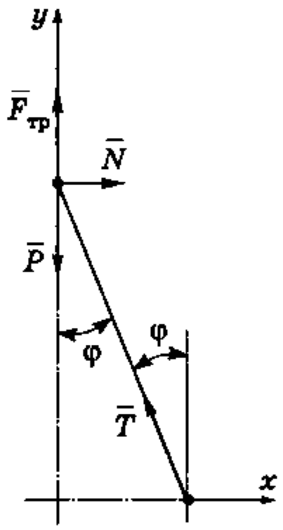


Рис. 4

$$\begin{cases} N - T\sin\varphi = 0, \\ T\cos\varphi + F_{\text{тр}} - P = 0. \end{cases}$$

Решив систему аналогично предыдущей, найдем:

$$T = \frac{P}{\cos\varphi + f\sin\varphi}.$$

Далее, рассуждая аналогично предыдущему случаю, из уравнения моментов относительно точки O (для кривошипа OB) найдем:

$$P = \frac{Qa}{r}\frac{\cos\varphi + f\sin\varphi}{\sin(\varphi+\theta)}.$$

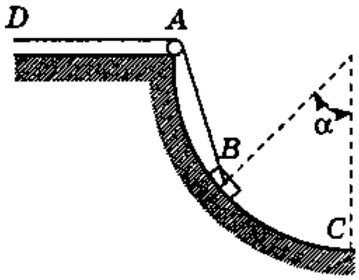
Таким образом, мы нашли два значения силы P:

$$P_{\min} = \frac{Qa}{r} \frac{\cos\varphi - f\sin\varphi}{\sin(\varphi+\theta)}, \quad P_{\max} = \frac{Qa}{r} \frac{\cos\varphi + f\sin\varphi}{\sin(\varphi+\theta)}.$$

Ответ: $P = \dfrac{Qa}{r} \dfrac{\cos\varphi}{\sin(\varphi+\theta)}$; $P_{\min} = \dfrac{Qa}{r} \dfrac{\cos\varphi - f\sin\varphi}{\sin(\varphi+\theta)}$;

$$P_{\max} = \frac{Qa}{r} \frac{\cos\varphi + f\sin\varphi}{\sin(\varphi+\theta)}.$$

Задача 5.16



Груз B весом P удерживается с помощью троса BAD в равновесии при подъеме по шероховатой поверхности, имеющей форму четверти кругового цилиндра. Коэффициент трения между поверхностью и грузом $f = \mathrm{tg}\,\varphi$, где φ — угол трения. Определить натяжение троса как функцию угла α. Найти условие, которому должен удовлетворять угол α, чтобы натяжение троса принимало экстремальное значение. Размерами груза и блока A пренебречь.

Решение

По условию задачи φ — угол трения, следовательно, при $\alpha \le \varphi$ тело находится в равновесии и без троса (рис. 1). Поэтому остается исследовать случай $\alpha > \mathrm{arctg}\, f$ (рис. 2).

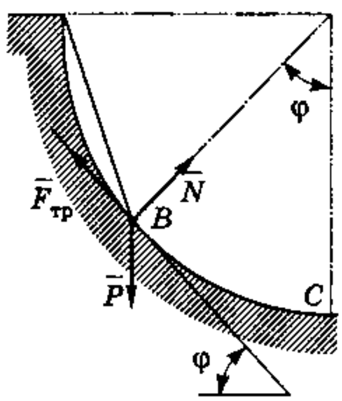


Рис. 1

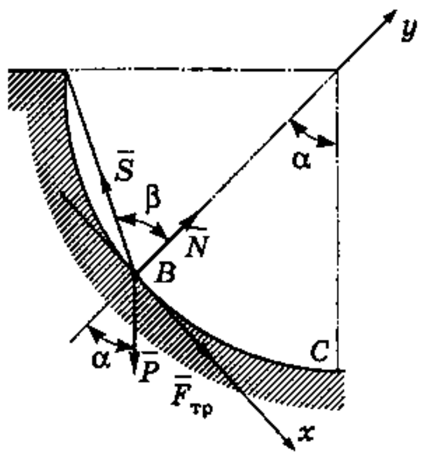


Рис. 2

Из геометрических соображений получим

$$\beta = 45° + \frac{\alpha}{2}.$$

Составим уравнения равновесия груза B:

$$\begin{cases} F_{\text{тр}} + P\sin\alpha - S\sin\beta = 0, \\ N + S\cos\beta - P\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Поскольку

$$F_{\text{тр}} = fN,$$

то систему можно записать в виде

$$\begin{cases} fN + P\sin\alpha - S\sin\beta = 0, \\ N + S\cos\beta - P\cos\alpha = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} fN = S\sin\beta - P\sin\alpha, \\ N = P\cos\alpha - S\cos\beta. \end{cases}$$

Следовательно,

$$S\sin\beta - P\sin\alpha = fP\cos\alpha - fS\cos\beta,$$

$$S\sin\beta + fS\cos\beta = P(\sin\alpha + f\cos\alpha),$$

$$S = P\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\sin\beta + f\cos\beta} = P\frac{\sin\alpha + \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos\alpha}{\sin\beta + \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos\beta} =$$

$$= P\frac{\sin\alpha\cos\varphi + \sin\varphi\cos\alpha}{\sin\beta\cos\varphi + \sin\varphi\cos\beta} = P\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\beta+\varphi)}.$$

И так как $\beta = 45° + \dfrac{\alpha}{2}$, то

$$S = P\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(45° + \dfrac{\alpha}{2} + \varphi)}.$$

Исследуем функцию

$$\Phi(\alpha)=\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(45^\circ+\frac{\alpha}{2}+\varphi)}.$$

Для этого вычислим $\Phi'(\alpha)$:

$$\Phi'(\alpha)=\frac{\cos(\alpha+\varphi)\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}+\varphi\right)-\sin(\alpha+\varphi)\cdot\frac{1}{2}\cos\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}+\varphi\right)}{\sin^2\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}+\varphi\right)}.$$

Положим $\Phi'(\alpha)=0$:

$$\cos(\alpha+\varphi)\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}+\varphi\right)-\frac{1}{2}\sin(\alpha+\varphi)\cos\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}+\varphi\right)=0\Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}+\varphi\right)-\frac{1}{2}\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)=0.$$

Окончательно имеем

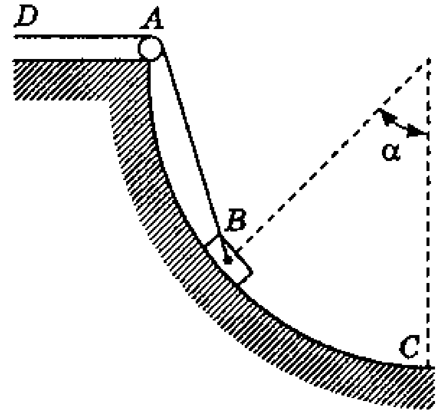
$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)}{\operatorname{tg}(45^\circ+\frac{\alpha}{2}+\varphi)}=2.$$

При таком соотношении натяжение троса принимает экстремальное значение.

О т в е т: $S=P\dfrac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(45^\circ+\frac{\alpha}{2}+\varphi)}$. Натяжение S принимает экстремальное значение при $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)}{\operatorname{tg}(45^\circ+\frac{\alpha}{2}+\varphi)}=2.$

Задача 5.17

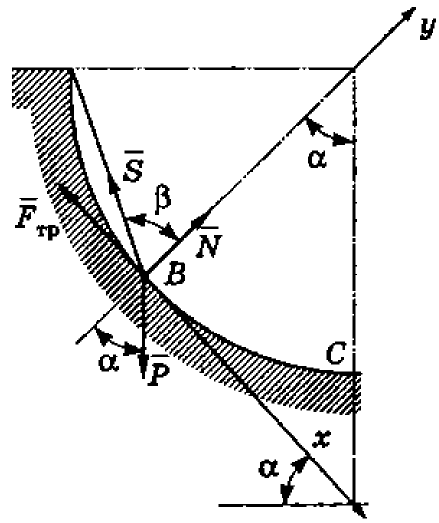
Груз B весом P удерживается в равновесии при спуске по шероховатой поверхности, имеющей форму четверти кругового цилиндра. Коэффициент трения между поверхностью и грузом $f = \operatorname{tg} \varphi$, где φ — угол трения. Определить натяжение троса S как функцию угла α. В каких пределах может меняться натяжение троса при равновесии груза B? Размерами груза и блока пренебречь.



Решение

Геометрически найдем (см. рисунок):

$$\beta = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$



По условию задачи φ — угол трения, поэтому при $\alpha \le \varphi$ тело находится в равновесии и без троса. Исследуем случай $\alpha > \operatorname{arctg} f$.

Составим уравнения равновесия для груза B:

$$\begin{cases} -F_{\text{тр}} + P\sin\alpha - S\sin\beta = 0, \\ N + S\cos\beta - P\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Поскольку $F_{\text{тр}} = fN$, то система примет вид

$$\begin{cases} -fN + P\sin\alpha - S\sin\beta = 0, \\ N + S\cos\beta - P\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Произведя аналогичные выкладки, как в задаче 5.16, найдем:

$$S = P\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\sin\beta - f\cos\beta} = P\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(45^\circ + \frac{\alpha}{2} - \varphi)}.$$

Итак, мы получили оценку снизу величины силы S. Выше (задача 5.16) была получена оценка сверху для данной величины.

Таким образом, груз будет находиться в равновесии, если натяжение троса изменяется в пределах

$$S_{\min} \le S \le S_{\max},$$

где

$$S_{\min} = P\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(45^\circ+\frac{\alpha}{2}-\varphi)}, \quad S_{\max} = P\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(45^\circ+\frac{\alpha}{2}+\varphi)}.$$

И кроме того, при $\alpha < \varphi$ груз будет в равновесии и при отсутствии троса.

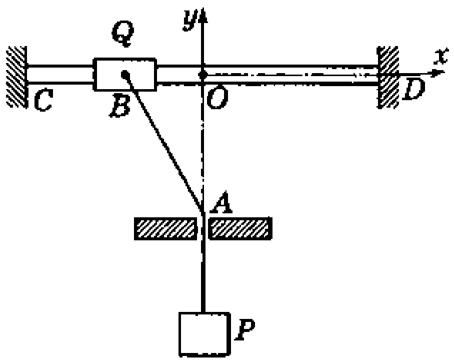
О т в е т: $S = P\dfrac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(45^\circ+\frac{\alpha}{2}-\varphi)}$. Груз будет находиться в равновесии,

если $P\dfrac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(45^\circ+\frac{\alpha}{2}-\varphi)} \le S \le P\dfrac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(45^\circ+\frac{\alpha}{2}+\varphi)}$.

При $\alpha \le \varphi$ груз будет в равновесии и при отсутствии троса.

Задача 5.18

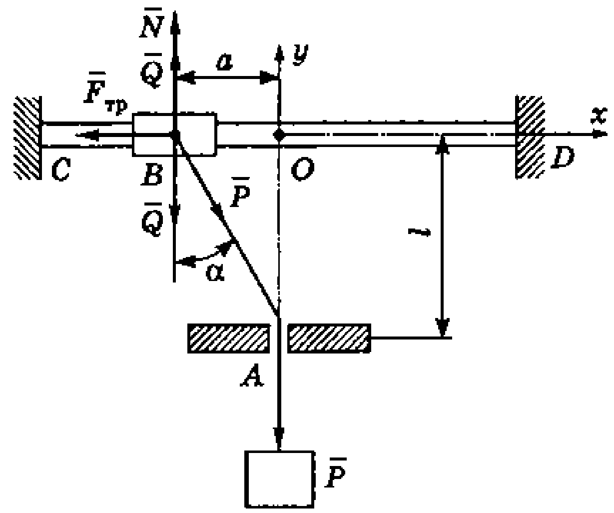
Груз Q может скользить по шероховатым горизонтальным направляющим CD. К грузу прикреплен трос, пропущенный через гладкое отверстие A и несущий груз P. Коэффициент трения груза о направляющие $f = 0{,}1$. Вес груза Q равен 100 Н, груза P — 50 Н. Расстояние от отверстия A до оси направляющих OA = 15 см. Определить границы зоны застоя (геометрического места положений равновесия груза). Размерами груза и отверстия пренебречь.



Решение

На основании изображенных на рисунке сил составим уравнения равновесия груза Q:

$$\begin{cases} P\sin\alpha - F_{\text{тр}} = 0, \\ P\cos\alpha + Q - N = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P\sin\alpha = F_{\text{тр}}, \\ N = P\cos\alpha + Q. \end{cases}$$



Поскольку $F_{\text{тр}} \le fN$, то

$$P\sin\alpha \le f(P\cos\alpha + Q),$$

$$P\sin\alpha \le fP\cos\alpha + fQ,$$

$$P(\sin\alpha - f\cos\alpha) \le Q, \ \sin\alpha - f\cos\alpha \le \frac{fQ}{P}.$$

Геометрически найдем:

$$AB = \sqrt{a^2 + l^2}, \ \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + l^2}}, \ \cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{a^2 + l^2}}.$$

Тогда

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + l^2}} - \frac{fl}{\sqrt{a^2 + l^2}} \le \frac{fQ}{P}.$$

Решая неравенство, получим

$$-4{,}64 \le a \le 4{,}64.$$

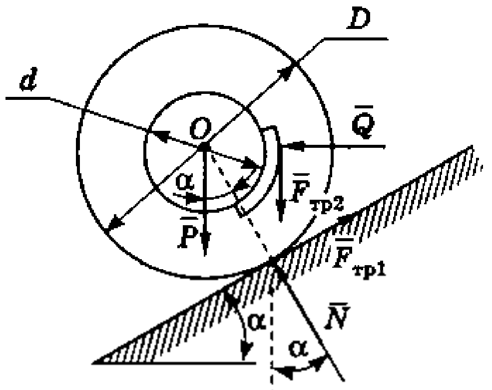
Ответ: границы имеют координаты ±4,64 см.

Задача 5.19

Автомобиль удерживается с помощью тормозов на наклонной части дороги. При перемещении тормозной педали на 2 см тормозные колодки дисковых тормозов перемещаются на 0,2 мм. Диаметр рабочей части диска 220 мм, нагруженный диаметр колеса 520 мм, вес автомобиля 14 кН. Определить, с какой силой водитель должен нажимать на педаль тормоза, если угол наклона дороги 20°. Трением качения пренебречь. Коэффициент трения скольжения между тормозными колодками и диском $f = 0,5$. Тормоза всех колес работают одинаково.

Решение

Рассмотрим равновесие колеса автомобиля на наклонной дороге (см. рисунок).



Запишем уравнение равновесия для моментов всех сил относительно центра O:

$$F_{тр1}\frac{D}{2} - F_{тр2}\frac{d}{2} = 0,$$

где $F_{тр1} = \frac{1}{4}P\sin\alpha$, $F_{тр2} = \frac{1}{4}fQ$.

Следовательно,

$$Q = \frac{DP\sin\alpha}{fd}.$$

Так как усилие, исходящее от водителя, увеличивается в соотношении

$$n = \frac{2\text{ см}}{0{,}2\text{ мм}} = 100,$$

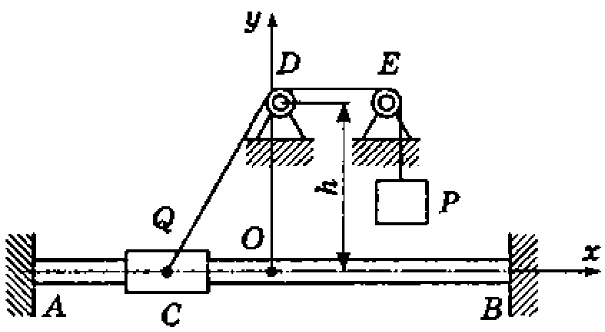
то сила нажима на педаль тормоза водителем равна

$$Q = \frac{DP\sin\alpha}{nfd} = \frac{520\cdot 14\cdot\sin 20^\circ}{100\cdot 0{,}5\cdot 220} = 0{,}226\text{ кН}.$$

Ответ: 0,226 кН.

Задача 5.20

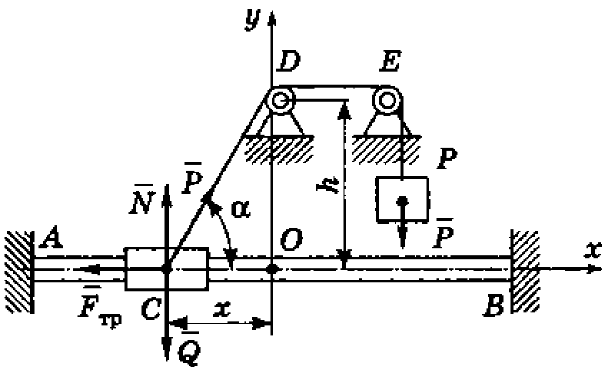
Груз Q может скользить по шероховатым горизонтальным направляющим AB. К грузу прикреплен трос, несущий груз P. Определить границы участков, где равновесие невозможно, если вес груза Q равен 100 Н, груза P — 24 Н, коэффициент трения скольжения $f = 0,5$. Расстояние от центра блока D до оси направляющих $h = 15$ см. Размерами блока D и груза Q пренебречь.



Решение

В соответствии с изображенными на рисунке силами, действующими на груз A, составим его уравнения равновесия:

$$\begin{cases} -F_{\text{тр}} + P\cos\alpha = 0, \\ P\sin\alpha - Q - N = 0. \end{cases}$$



Если выполняется условие $fN \geq F_{\text{тр}}$, то равновесие невозможно. Поэтому из системы получим

$$P\cos\alpha \geq fN;$$

$$f(Q - P\sin\alpha) - P\cos\alpha \leq 0,$$

или

$$\cos\alpha + f\sin\alpha - f\frac{Q}{p} \geq 0.$$

Последнее неравенство преобразуем к виду

$$\sin(\alpha + \varphi) \geq \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\frac{Q}{p},$$

где $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{f}$.

Тогда

$$\arcsin\left(\frac{fP}{Q\sqrt{1+f^2}}\right)-\operatorname{arctg}\frac{1}{f}\le\alpha\le\pi-\arcsin\left(\frac{fP}{Q\sqrt{1+f^2}}\right)-\operatorname{arctg}\frac{1}{f}.$$

Выполним численные расчеты:

$$\arcsin\left(\frac{fP}{Q\sqrt{1+f^2}}\right)=\arcsin 0{,}9938=83{,}62°,\ \operatorname{arctg}\frac{1}{f}=\operatorname{arctg}2=63{,}43°.$$

Имеем

$$20{,}2°\le\alpha\le 33°.$$

Переходя к координате x, определим:

$$h\operatorname{ctg}33°\le x\le h\operatorname{ctg}20{,}2°,$$

$$23{,}1\ \text{см}\le x\le 40{,}77\ \text{см}.$$

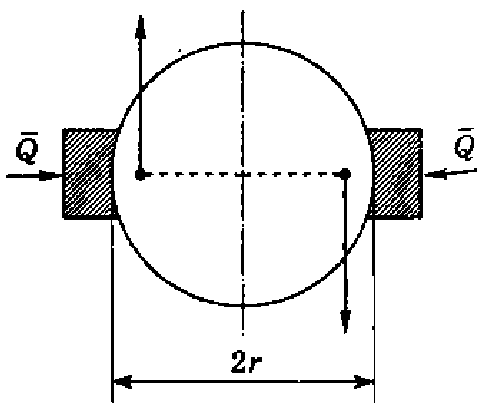
В силу симметрии из рисунка также получим

$$-40{,}77\ \text{см}\le x\le -23{,}1\ \text{см}.$$

Ответ: два участка, лежащих в границах с координатами: от –40,77 см до –23,1 см и от 23,1 см до 40,77 см.

Задача 5.21

К валу приложена пара сил с моментом M = 100 Н·м. На валу заключено тормозное колесо, радиус r которого равен 25 см. Найти, с какой силой Q надо прижимать к колесу тормозные колодки, чтобы колесо оставалось в покое, если коэффициент трения покоя f между колесом и колодками равен 0,25.



Решение

Изобразим на рисунке действующие на тормозное колесо силы. Составим уравнение равновесия вала для моментов сил относительно точки O:

$$2F_{\text{тр}}r-M=0.$$

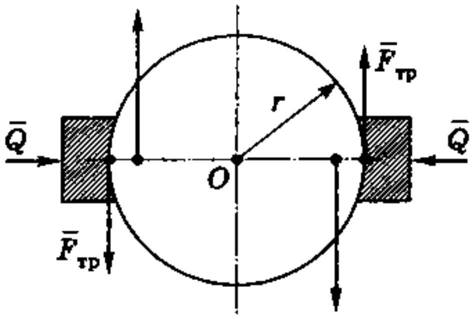
Следовательно,

$$2F_{\text{тр}}r = M.$$

Поскольку $F_{\text{тр}} = fN = fQ$, то

$$2frQ = M \Rightarrow$$

$$Q = \frac{M}{2fr} = \frac{100}{2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25} = 800 \text{ Н}.$$



О т в е т: $Q = 800$ Н.

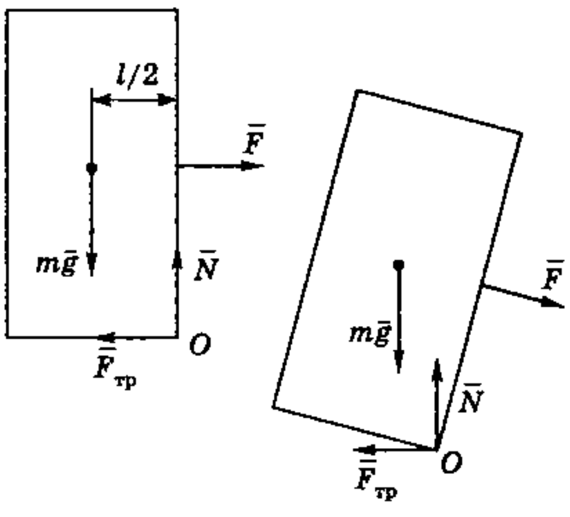
Задача 5.22

Трамвайная дверь отодвигается с трением в нижнем пазу. Коэффициент трения f не более 0,5. Определить наибольшую высоту h, на которой можно поместить ручку двери, чтобы дверь при отодвигании не опрокидывалась. Ширина двери $l = 0{,}8$ м; центр тяжести двери находится на ее вертикальной оси симметрии.

Р е ш е н и е

В соответствии с рисунком составим уравнения равновесия двери (в проекциях на горизонтальную ось и для моментов относительно точки O):

$$\begin{cases} F - F_{\text{тр}} = 0, \\ -Fh + mg\dfrac{l}{2} = 0. \end{cases}$$

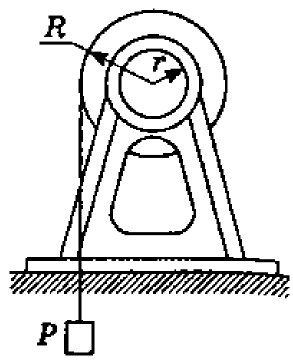


Поскольку $F_{\text{тр}} = fmg$, то, решив систему, получим

$$h = \frac{l}{2f} = 0{,}8.$$

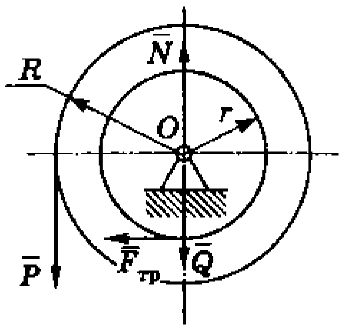
О т в е т: $h = \dfrac{l}{2f} = 0{,}8$ м.

Задача 5.23



Цилиндрический вал весом Q и радиусом R приводится во вращение грузом, подвешенным к нему на веревке; вес груза равен P. Радиус шипов вала $r = R/2$. Коэффициент трения в подшипниках равен 0,05. Определить, при каком отношении веса Q к весу P груз опускается равномерно.

Решение



Изобразим на рисунке действующие на вал силы. Условие, при котором груз опускается равномерно (уравнение моментов относительно точки O):

$$P \cdot R - F_{\text{тр}} \cdot r = 0.$$

Ввиду того что

$$F_{\text{тр}} = fN = f(P+Q),$$

уравнение моментов примет вид:

$$P \cdot R = f(P+Q)r.$$

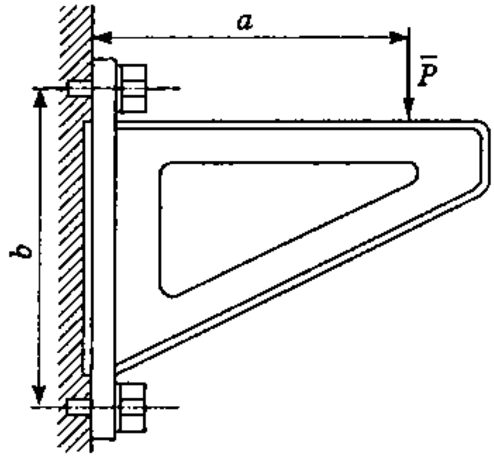
Поскольку $r = \dfrac{R}{2}$, то

$$\frac{Q}{P} = \frac{2}{f} - 1 = \frac{2}{0{,}05} - 1 = 39.$$

Ответ: $\dfrac{Q}{P} = 39$.

Задача 5.24

Кронштейн, нагруженный вертикальной силой $P = 600$ Н, прикреплен к стене двумя болтами. Определить затяжку болтов, необходимую для укрепления кронштейна на стене. Коэффициент трения между кронштейном и стеной $f = 0{,}3$. Для большей осторожности расчет произвести в предположении, что затянут только верхний болт и что болты поставлены с зазором и не должны работать на срез. Дано $b/a >> f$. (Затяжкой называется усилие, действующее вдоль оси болта. Полная затяжка верхнего болта состоит из двух частей: первая устраняет возможность отрыва кронштейна и опрокидывания его вокруг нижнего болта, вторая обеспечивает то нормальное давление верхней части кронштейна на стену, которое вызывает необходимую силу трения.)



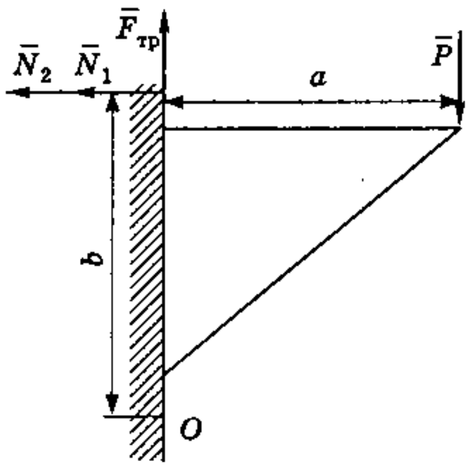
Решение

Рассмотрим равновесие кронштейна под действием плоской произвольной системы сил (см. рисунок). Уравнение равновесия в проекциях на вертикаль имеет вид:

$$F_{тр} - P = 0.$$

Поскольку $F_{тр} = fN_2$, то получим

$$N_2 = \frac{P}{f}.$$



Уравнение моментов относительно точки O (в этом уравнении участвует только первая часть затяжки: N_1):

$$N_1 b - aP = 0 \Rightarrow N_1 = P\frac{a}{b}.$$

Суммарная (полная) затяжка:

$$N = N_1 + N_2 = \frac{P}{f} + P\frac{a}{b} = \frac{P}{f} + \frac{P}{b/a}.$$

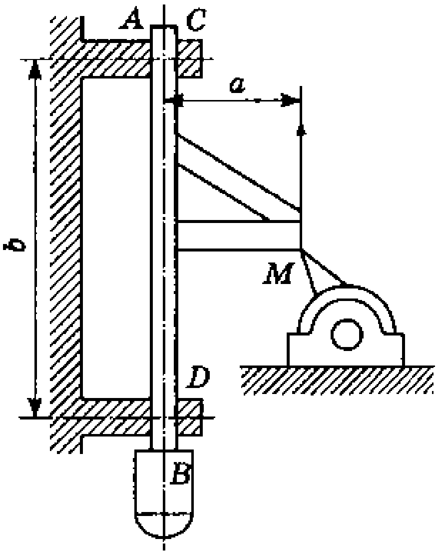
Поскольку $b/a >> f$, то вторым слагаемым в последней сумме можно пренебречь, т.е.

$$N \approx \frac{P}{f} = \frac{600}{0{,}3} = 2000 \text{ Н} = 2 \text{ кН}.$$

Ответ: 2 кН.

Задача 5.25

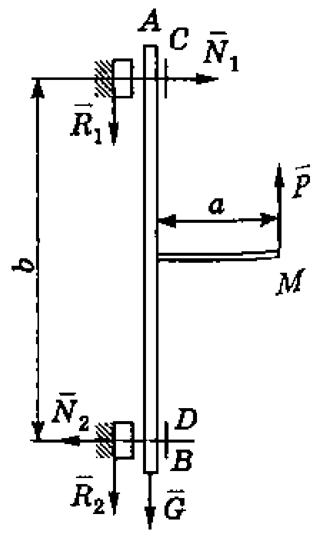
Пест AB приводится в движение пальцами M, насаженными на вал. Вес песта 180 Н. Расстояние между направляющими C и D равно $b = 1{,}5$ м. Расстояние точки прикосновения пальца к выступу от оси песта $a = 0{,}15$ м. Найти силу P, необходимую для подъема песта, если принять во внимание силу трения между направляющими C и D и пестом, равную 0,15 давления между трущимися частями.



Решение

Рассмотрим равновесие песта под действием плоской произвольной системы сил (см. рисунок) (уравнения в проекциях на вертикаль и для моментов относительно точек D и C):

$$\begin{cases} P = R_1 + R_2 + G, \\ Pa - N_1 b = 0, \\ Pa - N_2 b = 0. \end{cases}$$



Из системы получим

$$N_1 = N_2 = P\frac{a}{b},$$

поэтому

$$R_1 = 0{,}15 N_1 = 0{,}15 P\frac{a}{b}, \quad R_2 = 0{,}15 N_2 = 0{,}15 P\frac{a}{b}.$$

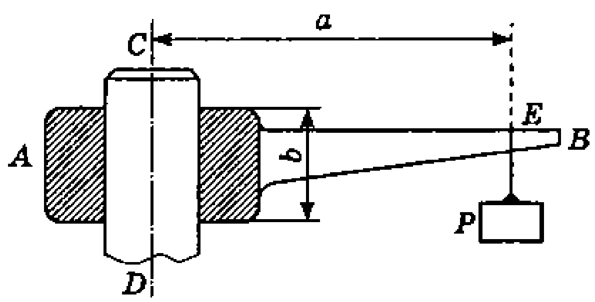
Подставив найденные выражения для R_1 и R_2 в первое уравнение системы, найдем:

$$P = G\frac{b}{b - 2 \cdot 0{,}15a} = 186 \text{ Н}.$$

Ответ: $P = 186$ Н.

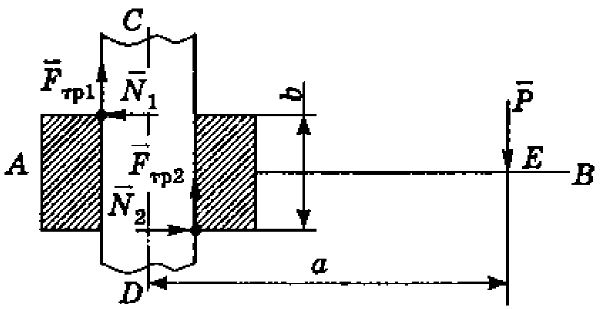
Задача 5.26

Горизонтальный стержень AB имеет на конце A отверстие, которым он надет на вертикальную круглую стойку CD; длина втулки $b = 2$ см; в точке E на расстоянии a от оси стойки к стержню подвешен груз P. Определить, пренебрегая весом стержня AB, расстояние a так, чтобы под действием груза P стержень оставался в равновесии, если коэффициент трения между стержнем и стойкой $f = 0{,}1$.



Решение

В соответствии с рисунком рассмотрим равновесие стержня AB.



Очевидно, что $N_1 = N_2 = N$, т.е. $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2 \sim \overline{N}$, $-\overline{N}$ — это пара сил.

$$Nb = Pa, \qquad (1)$$

$$F_{тр} \le 2fN. \qquad (2)$$

Кроме того

$$P = F_{тр}. \qquad (3)$$

Подставляя выражение (2) в равенство (3), получим

$$P \le 2fN.$$

С учетом данного неравенства выражение (1) примет вид

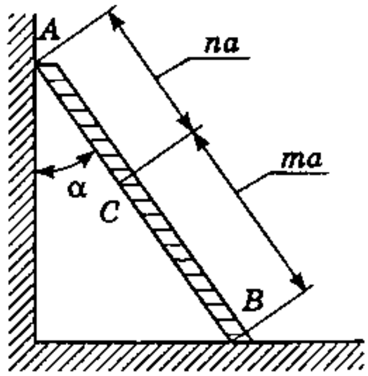
$$Nb \le 2fNa,$$

откуда

$$a \ge \frac{b}{2f} = 10 \text{ см}.$$

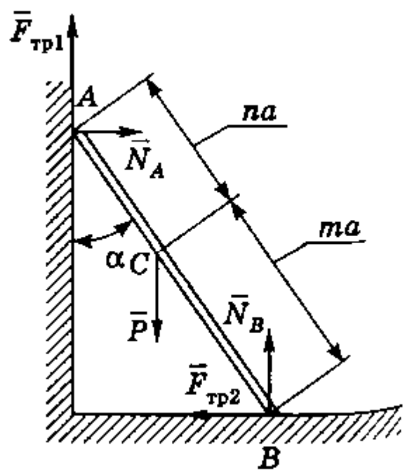
О т в е т: $a \ge 10$ см.

Задача 5.27



К вертикальной стене приставлена лестница AB, опирающаяся своим нижним концом на горизонтальный пол. Коэффициент трения лестницы о стену f_1, о пол f_2. Вес лестницы вместе с находящимся на ней человеком равен P и приложен в точке C, которая делит длину лестницы в отношении m/n. Определить наибольший угол α, составляемый лестницей со стеной в положении равновесия, а также нормальные составляющие реакций N_A стены и N_B пола для этого значения α.

Р е ш е н и е



На основании рисунка запишем три уравнения равновесия лестницы и два дополнительных условия:

$$\begin{cases} N_A - F_{тр2} = 0, \\ N_B + F_{тр1} - P = 0, \\ N_A(n+m)a\cos\alpha + \\ \quad + F_{тр1}(n+m)a\sin\alpha - Pma\sin\alpha = 0, \\ F_{тр1} = f_1 N_A, \\ F_{тр2} = f_2 N_B. \end{cases}$$

Из системы найдем:

$$N_A = \frac{f_2 P}{1+f_1 f_2}; \quad F_{\text{тр}1} = \frac{f_1 f_2 P}{1+f_1 f_2}; \quad N_B = \frac{P}{1+f_1 f_2}.$$

Тогда третье уравнение системы можно преобразовать:

$$\sin\alpha(Pm - F_{\text{тр}1}(n+m)) = N_A(n+m)\cos\alpha,$$

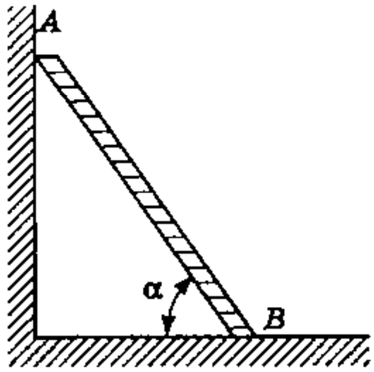
$$\sin\alpha\left(Pm - \frac{f_1 f_2 P}{1+f_1 f_2}(n+m)\right) = \frac{f_2 P}{1+f_1 f_2}(n+m)\cos\alpha,$$

$$\sin\alpha\frac{m - f_1 f_2 n}{1+f_1 f_2} = \frac{f_2(n+m)}{1+f_1 f_2}\cos\alpha, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{f_2(n+m)}{m - f_1 f_2 n}.$$

О т в е т: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{f_2(n+m)}{m - f_1 f_2 n}$; $N_A = \dfrac{f_2 P}{1+f_1 f_2}$; $N_B = \dfrac{P}{1+f_1 f_2}$.

Задача 5.28

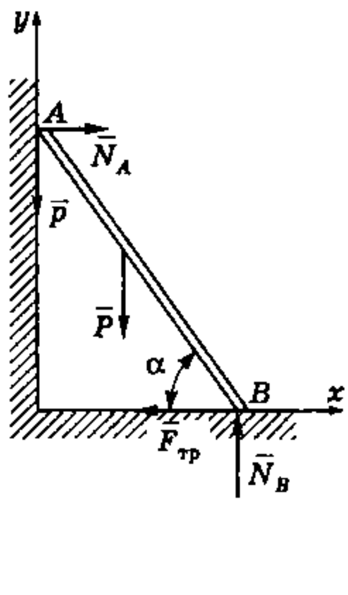
Лестница AB весом P упирается в гладкую стену и опирается на горизонтальный негладкий пол. Коэффициент трения лестницы о пол равен f. Под каким углом α к полу надо поставить лестницу, чтобы по ней мог подняться доверху человек, вес которого p?



Р е ш е н и е

На основании рисунка запишем условие, связывающее силу трения и давления в точке B:

$$F_{\text{тр}} \le f N_B.$$



Обозначим длину лестницы l и составим уравнения равновесия лестницы (в проекциях на ось y и для моментов сил относительно точки A):

$$\begin{cases} N_B - P - p = 0, \\ N_B l\cos\alpha - F_{\text{тр}} l\sin\alpha - P\dfrac{l}{2}\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы имеем

$$N_B = P + p \Rightarrow F_{\text{тр}} \le f(P+n).$$

Тогда из второго уравнения получим

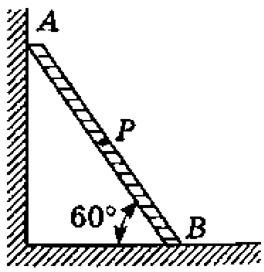
$$(P+p)l\cos\alpha - (P+p)l\sin\alpha\cdot f - P\frac{l}{2}\cos\alpha \le 0,$$

откуда найдем: $\operatorname{tg}\alpha \ge \dfrac{P+2p}{2f(P+p)}$.

О т в е т: $\operatorname{tg}\alpha \ge \dfrac{P+2p}{2f(P+p)}$.

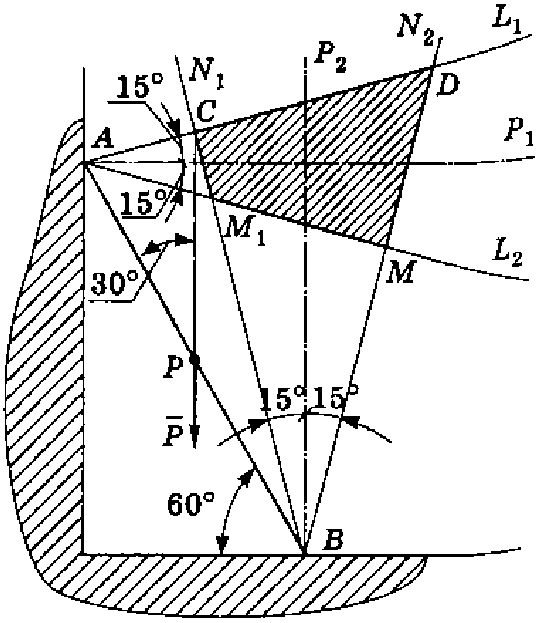
Задача 5.29

Лестница AB опирается на негладкую стену и негладкий пол, составляя с последним угол 60°. На лестнице помещается груз P. Пренебрегая весом лестницы, определить графически наибольшее расстояние BP, при котором лестница остается в покое. Угол трения для стены и пола равен 15°.



Р е ш е н и е

Изобразим на рисунке область равновесия. Для нахождения области равновесия лестницы восстановим перпендикуляры через точку A и точку B (AP_1 и BP_2). Построим углы трения: $\angle L_1AP_1$ и $\angle L_2AP_1$. Очевидно, что $\angle N_1BP_2 = \angle N_2BP_2$. Заштрихованная область — это и есть область равновесия (четырехугольник $CDMM_1$).



Геометрически BP будет наибольшим, если AP будет наименьшим. Наименьшее значение AP принимает, когда линия действия силы P проходит через точку C. Из ΔPBC

$$BP = CP, \quad (1)$$

так как $\angle PBC = \angle PCB = 15°$ (стороны $\angle PCB$ перпендикулярны сторонам $\angle MAD$).

Из ΔAPC

$$AP = PC, \quad (2)$$

так как $\angle PAC = \angle PCA = 75°$.

Из выражений (1) и (2) окончательно устанавливаем

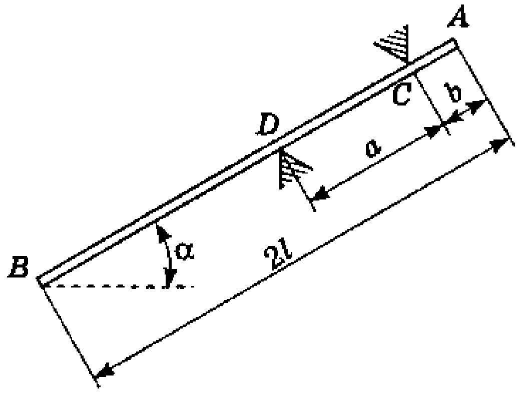
$$AP = PB = \frac{1}{2}AB,$$

т.е. $BP = 0{,}5AB$.

О т в е т: $BP = 0{,}5AB$.

Задача 5.30

Тяжелый однородный стержень AB лежит на двух опорах C и D, расстояние между которыми $CD = a$, $AC = b$. Коэффициент трения стержня об опоры равен f. Угол наклона стержня к горизонту равен α. Какому условию должна удовлетворять длина стержня $2l$ для того, чтобы стержень находился в равновесии, если толщиной его можно пренебречь?

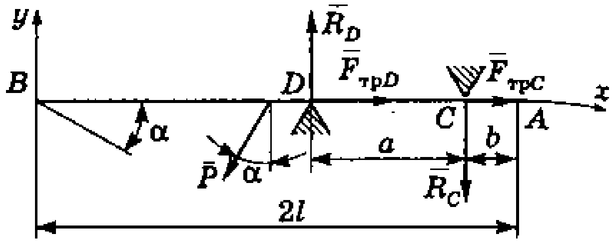


Р е ш е н и е

Для изображенных на рисунке сил, действующих на стержень, составим уравнения равновесия:

$$\begin{cases} -P\sin\alpha + F_{\text{тр}D} + F_{\text{тр}C} = 0, \\ -R_D a + P(l-a)\cos\alpha = 0, \\ P(l-a-b)\cos\alpha - R_C a = 0. \end{cases}$$

Из двух последних уравнений системы найдем реакции опор:



$$R_D = P\frac{l-a}{a}\cos\alpha,$$

$$R_C = P\frac{l-a-b}{a}\cos\alpha.$$

Рассмотрим случай, когда $R_C > 0$, т.е. $l - a - b > 0$, или $l > a + b$.

Подставив в первое уравнение системы выражения для R_D и R_C и учитывая, что $F_{\text{тр}C} \le R_C f$, получим оценку:

$$f\left(P\frac{l-a}{a}\cos\alpha + P\frac{l-a-b}{a}\cos\alpha\right) \ge P\sin\alpha, \quad \frac{2l-2a-b}{a} \ge \frac{1}{f}\,\text{tg}\,\alpha,$$

$$2l \ge 2a + b + \frac{a}{f}\,\text{tg}\,\alpha.$$

Если $R_C < 0$, то

$$R_C = P\frac{l-a-b}{a}\cos\alpha < 0,$$

следовательно,

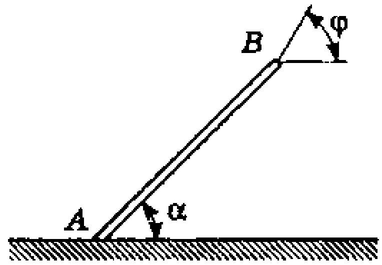
$$l - a - b < 0 \Rightarrow l < a + b.$$

Однако при выполнении последнего неравенства и при заданном в условии расположении опоры C равновесие невозможно.

О т в е т: $2l \ge 2a + b + \frac{a}{f}\,\text{tg}\,\alpha$; $l > a + b$. Первое условие включает второе при $\alpha > \varphi$, где $\varphi = \text{arctg}\, f$ — угол трения; если же $\alpha < \varphi$, то достаточно удовлетворить второму условию; при $l < a + b$ равновесие при принятом на рисунке расположении опоры C невозможно.

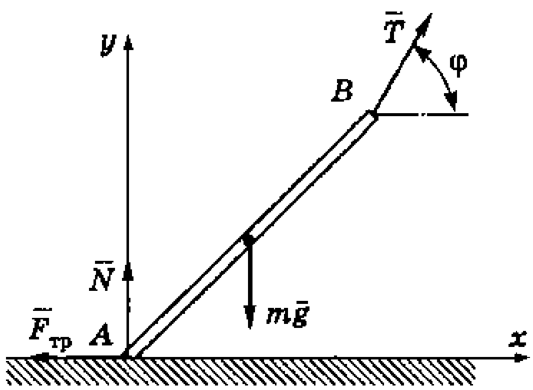
Задача 5.31

Однородный брус опирается в точке A на негладкий горизонтальный пол и удерживается в точке B веревкой. Коэффициент трения бруса о пол равен f. Угол α, образуемый брусом с полом, равен 45°. При каком угле φ наклона веревки к горизонту брус может скользить?



Решение

Обозначим длину бруса l и составим уравнения равновесия плоской произвольной системы сил, приложенных к брусу (см. рисунок), в проекциях на оси x и y и для моментов относительно точки B:



$$\begin{cases} T\cos\varphi - F_{тр} = 0, \\ T\sin\varphi + N - mg = 0, \\ -F_{тр} l\sin\alpha - Nl\cos\alpha + mg\dfrac{l}{2}\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Поскольку $F_{тр} = fN$, то из первых двух уравнений системы найдем:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{mg - N}{fN} \Rightarrow N = \frac{mg}{1 + f\operatorname{tg}\varphi}.$$

Из третьего уравнения системы выразим

$$N = \frac{mg\cos\alpha}{2(\cos\alpha + f\sin\alpha)} = \frac{mg}{2(1 + f\operatorname{tg}\alpha)}.$$

Тогда

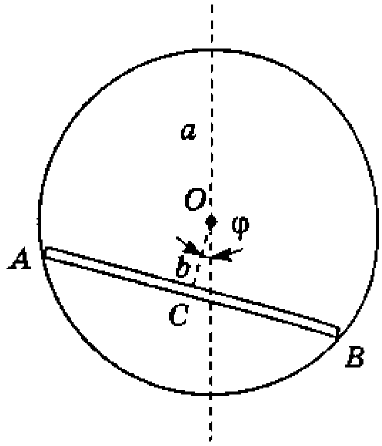
$$\frac{mg}{2(1 + f\operatorname{tg}\alpha)} = \frac{mg}{1 + f\operatorname{tg}\varphi},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1 + 2f\operatorname{tg}\alpha}{f} = \frac{1 + 2f\operatorname{tg}45°}{f} = 2 + \frac{1}{f}.$$

Ответ: $\operatorname{tg}\varphi = 2 + \dfrac{1}{f}$.

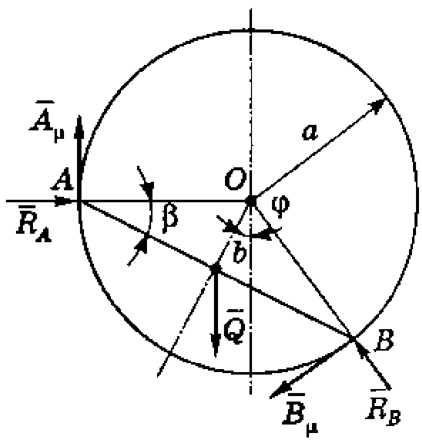
Задача 5.32

Однородный стержень своими концами A и B может скользить по негладкой окружности радиусом a. Расстояние OC стержня до центра O окружности, расположенной в вертикальной плоскости, равно b. Коэффициент трения между стержнем и окружностью равен f. Определить для положений равновесия стержня угол φ, составляемый прямой OC с вертикальным диаметром окружности.



Решение

Обозначим на рисунке: $\overline{R}_A$ — реакция со стороны окружности; $\overline{A}_\mu$ — сила трения в точке A; $\overline{R}_B$ — нормальная реакция; $\overline{B}_\mu$ — сила трения в точке B; $\overline{Q}$ — вес; l — длина стержня.



Составим уравнение равновесия для моментов сил относительно точки B:

$$Q\frac{l}{2}\cos\varphi - A_\mu l\cos\beta - Al\sin\beta = 0.$$

Следовательно, учитывая, что $A_\mu = fR_A$, получим

$$R_A = \frac{Q}{2}\frac{\cos\varphi}{\sin\beta + f\cos\beta}.$$

Составим уравнение равновесия для моментов сил относительно точки A с учетом того, что $B_\mu = fR_B$:

$$Q\frac{l}{2}\cos\varphi + R_B fl\cos\beta - R_B l\sin\beta = 0 \Rightarrow$$

$$R_B = \frac{Q}{2}\frac{\cos\varphi}{\sin\beta - f\cos\beta}.$$

Составим уравнение равновесия для моментов сил относительно точки O:

$$f(A+B)a = Qb\sin\varphi,$$

откуда найдем:

$$\frac{fa}{2}\cos\varphi\left(\frac{1}{\sin\beta + f\cos\beta} + \frac{1}{\sin\beta + f\cos\beta}\right) = b\sin\varphi,$$

где $\sin\beta = \dfrac{b}{a}$, $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta}$.

Из последнего равенства получим

$$\operatorname{ctg}\varphi = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{1+f^2}{f} - f.$$

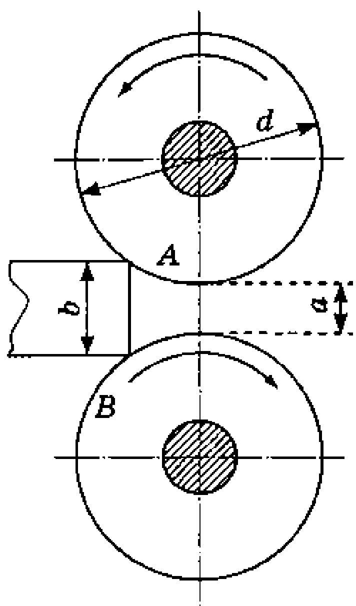
Очевидно, что положение равновесия стержня будет сохраняться и для всех меньших углов. Поэтому (в силу убывания функции котангенс) можно записать:

$$\operatorname{ctg}\varphi \ge \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{1+f^2}{f} - f.$$

Ответ: $\operatorname{ctg}\varphi \ge \left(\dfrac{b}{a}\right)^2 \dfrac{1+f^2}{f} - f$.

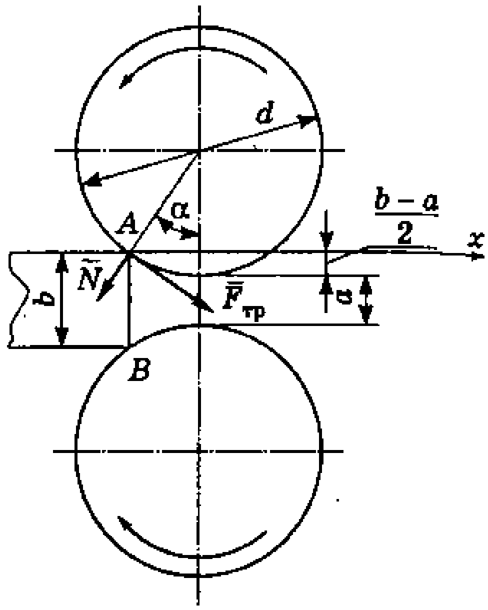
Задача 5.33

Прокатный стан состоит из двух валов диаметром d = 50 см, вращающихся в противоположные стороны, указанные стрелками на рисунке; расстояние между валами a = 0,5 см. Какой толщины b листы можно прокатывать на этом стане, если коэффициент трения для раскаленного железа и чугунных валов f = 0,1? (Для работы стана необходимо, чтобы лист захватывался вращающимися валами, т. е. чтобы равнодействующая приложенных к листу нормальных реакций и сил трения в точках A и B была направлена по горизонтали вправо.)



Решение

Для того чтобы стан работал, необходимо условие $R_x \geq 0$, где R_x — проекция на ось x главного вектора действующих на лист сил. Это условие в соответствии с рисунком имеет вид:



$$2F_{тр}\cos\alpha - 2N\sin\alpha \geq 0.$$

Поскольку $F_{тр} = fN$, то данное условие можно записать так:

$$f\cos\alpha \geq \sin\alpha.$$

Вычислим:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{d}{2} - \frac{b-a}{2}}{\frac{d}{2}} = \frac{d+a-b}{d}.$$

Положим

$$z = \frac{d+a-b}{d},$$

тогда

$$\cos\alpha = z, \quad \sin\alpha = \sqrt{1-z^2}.$$

Следовательно, последнее неравенство перепишется в виде

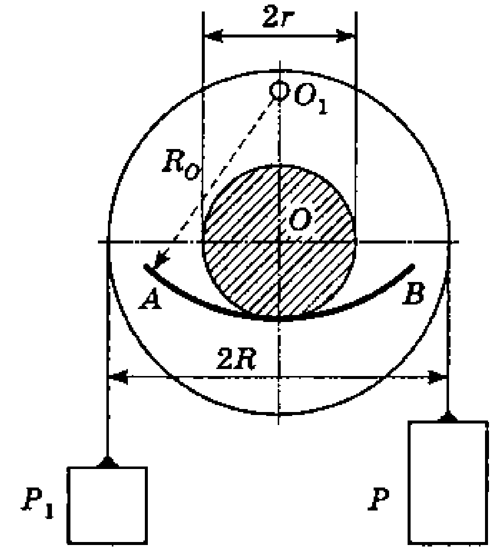
$$fz \geq \sqrt{1-z^2},$$

$$z^2 \geq \frac{1}{1+f^2}, \; z \geq \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}, \; \frac{d+a-b}{d} \geq \frac{1}{\sqrt{1+f^2}},$$

$$b \leq a + d\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}\right) = 0{,}5 + 50\cdot\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+0{,}1^2}}\right) = 0{,}75 \text{ см}.$$

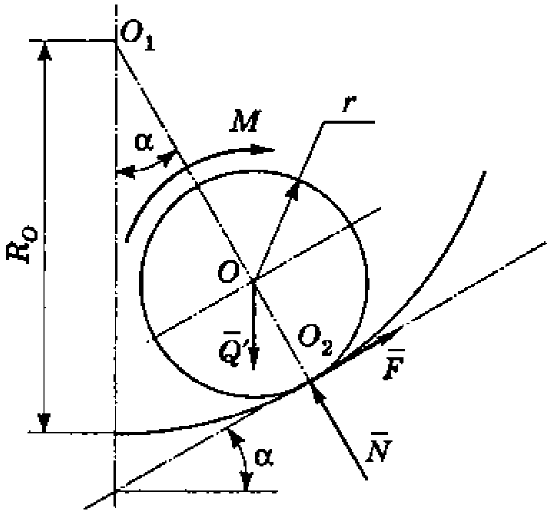
Ответ: $b \leq 0{,}75$ см.

Задача 5.34



Блок радиусом R снабжен двумя шипами радиусом r, симметрично расположенными относительно его средней плоскости. Шипы опираются на две цилиндрические поверхности AB с горизонтальными образующими. На блок намотан трос, к которому подвешены грузы P и P_1, причем $P > P_1$. Определить наименьшую величину груза P_1, при которой блок будет находиться в равновесии, предполагая, что коэффициент трения шипов о цилиндрические поверхности AB равен f, а вес блока с шипами — Q. (Указанное на рисунке положение системы не может быть положением равновесия, последнее требуется предварительно найти.)

Решение



Первая задача, которую нужно решить, — определить положение равновесия блока.

Обозначим

$$Q' = Q + P_1 + P, \quad M = R(P - P_1).$$

На основании рисунка запишем уравнения моментов относительно точек O_2 и O:

$$\begin{cases} M - Q' r \sin\alpha = 0, \\ M + Fr = 0, \end{cases}$$

где $F = Q' \cdot f \cos\alpha$.

Из системы получим

$$\operatorname{tg}\alpha = f,$$

следовательно, α — угол трения.

В положении равновесия плоскость, проходящая через оси цилиндра AB и блока, образует с вертикалью угол, равный углу трения.

Теперь составим уравнение моментов относительно точки O_1:

$$R(P - P_1) - (Q + P_1 + P)r\frac{f}{\sqrt{1+f^2}} = 0.$$

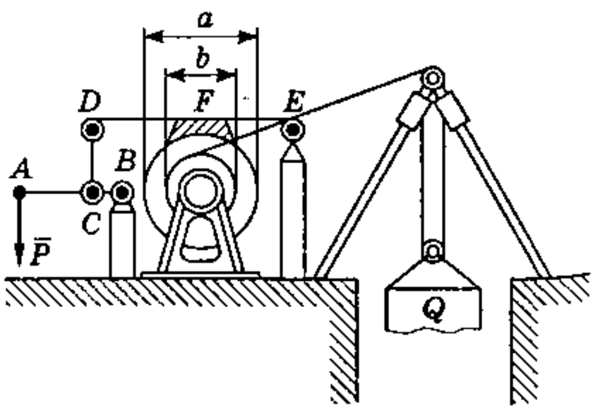
Отсюда найдем:

$$P_1 = \frac{P(R\sqrt{1+f^2} - fr) - Qrf}{R\sqrt{1+f^2} + fr}.$$

О т в е т: в положении равновесия плоскость, проходящая через оси цилиндра AB и блока, образует с вертикалью угол, равный углу трения; $P_1 = \dfrac{P(R\sqrt{1+f^2} - fr) - Qrf}{R\sqrt{1+f^2} + fr}$.

Задача 5.35

Для опускания грузов употребляется ворот с тормозом, изображенный на рисунке. С барабаном, на который намотана цепь, скреплено концентрическое деревянное колесо, которое тормозят, надавливая на конец A рычага AB, соединенного цепью CD с концом D тормозного рычага ED. Диаметр колеса a = 50 см; диаметр барабана b = 20 см; ED = 120 см; FE = 60 см; AB = 1 м; BC = 10 см. Определить силу P, уравновешивающую груз Q = 8 кН, подвешенный к подвижному блоку, если коэффициент трения дерева о сталь f = 0,4; размерами колодки F пренебречь.



Решение

Найдем силу торможения ; (рис. 1), для чего составим равнение равновесия барана (для моментов сил относительно точки O):

$$R\frac{a}{2}-\frac{Q}{2}\frac{b}{2}=0\Rightarrow R=\frac{Q}{2}\frac{b}{a}.$$

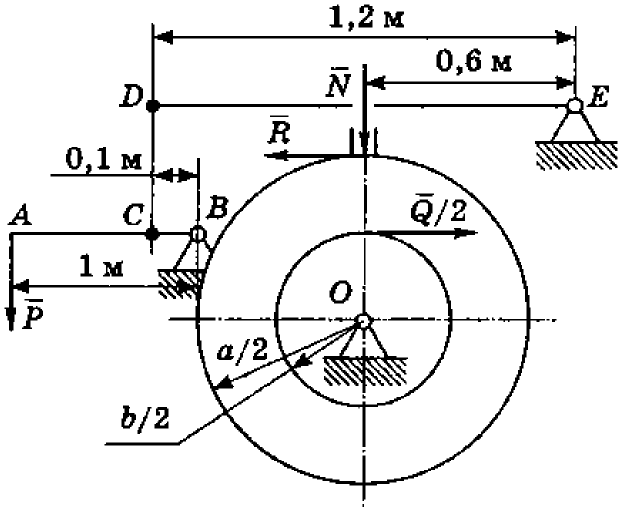


Рис. 1

С другой стороны, $R=fN$ по закону Кулона). Откуда айдем силу давления на колодку:

$$N=\frac{R}{f}=\frac{Q}{2f}\frac{b}{a}.$$

Рассмотрим равновесие рычага ED рис. 2).

Составим уравнение моментов относительно точки E:

$$N_1\cdot 1{,}2-N\cdot 0{,}6=0.$$

Эткуда

$$N_1=N\cdot\frac{0{,}6}{1{,}2}=\frac{Q}{4f}\frac{b}{a}.$$

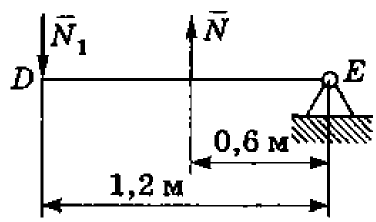


Рис. 2

Рассмотрим равновесие рычага AB (рис. 3). Составим уравнение моментов относительно точки B:

$$P\cdot 1-N_1\cdot 0{,}1=0\Rightarrow P=N_1\cdot 0{,}1=0{,}20\text{ кН}.$$

Ответ: $P=0{,}2$ кН.

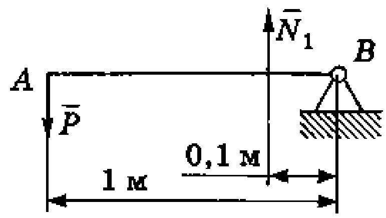
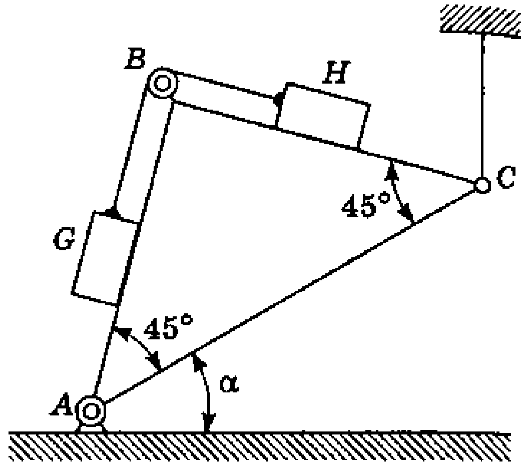


Рис. 3

Задача 5.36

На гранях AB и BC призмы ABC помещены два одинаковых тела G и H весом P, связанные нитью, перекинутой через блок в точке B. Коэффициент трения между телами и гранями призмы равен f. Углы BAC и BCA равны 45°. Определить, пренебрегая трением на блоке, величину угла α наклона грани AC к горизонту, необходимую для того, чтобы груз G начал опускаться.



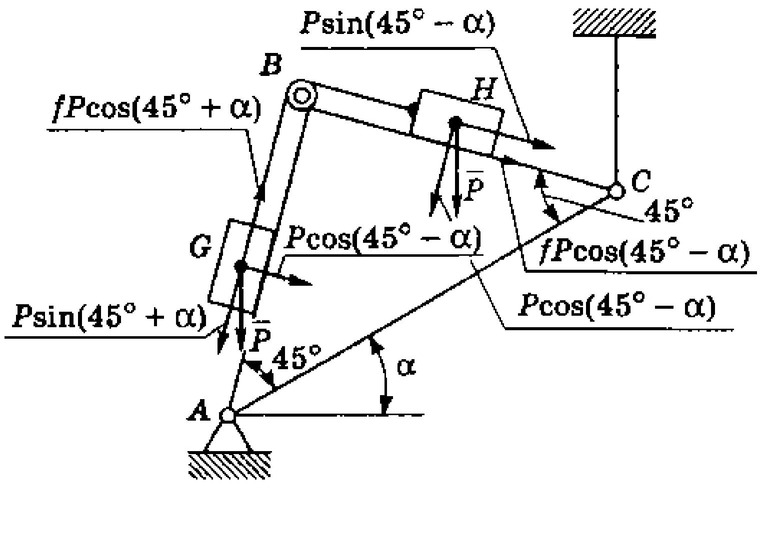
Решение

Так как блок идеальный, то натяжение нити справа и слева одно и то же. Тогда в предположении, что груз G опускается, в соответствии с рисунком получим

$$P[\sin(45° + \alpha) - f\cos(45° + \alpha)] = P[\sin(45° - \alpha) + f\cos(45° - \alpha)],$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha - f\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + f\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha + f\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + f\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha.$$



Откуда

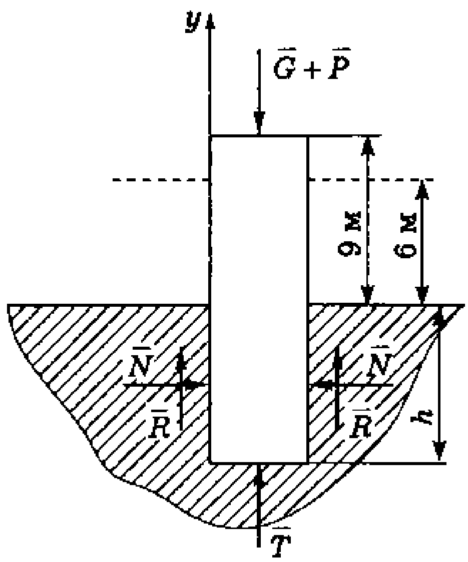
$$\sin\alpha = f\cos\alpha;\quad \operatorname{tg}\alpha = f.$$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = f$.

Задача 5.37

Глубина заложения опор железнодорожного моста, перекинутого через реку, рассчитана в том предположении, что вес опоры с приходящимся на нее грузом уравновешивается давлением грунта на дно опоры и боковым трением, причем грунт — мелкозернистый песок, насыщенный водой, — принимается за жидкое тело. Вычислить глубину h заложения этих опор, если нагрузка на опору 1500 кН, вес опоры на 1 м ее высоты 80 кН, высота опоры над дном реки 9 м, высота воды над дном 6 м, площадь основания опоры 3,5 м^2, боковая поверхность опоры на 1 м высоты 7 м^3, вес 1 м^3 песка, насыщенного водой, равен 18 кН, вес 1 м^3 воды равен 10 кН и коэффициент трения о песок стального футляра, в котором заключена каменная опора, 0,18. (При расчете трения принимаем во внимание, что среднее боковое давление на 1 м^2 равно 10(6+0,9h) кН.)

Решение



На рисунке обозначим: P — нагрузка на опору: P = 150 т; G — вес опоры: $G = (9 + h)\cdot 8$ т; T — сила реакции на дно (на опору со стороны дна):

$$T = (6+1{,}8h)\cdot 3{,}5 = 6{,}3h+21 \text{ т};$$

R — сила сопротивления грунта на опору:

$$R = Nf = (6+0{,}9h)f\cdot 7h = 1{,}134h^2+7{,}56h \text{ т}.$$

Составим уравнение равновесия опоры (в проекциях на ось y):

$$-P - G + T + R = 0.$$

Следовательно,

$$P+G=T+R.$$

Подставим числовые значения:

$$150+(9+h)\cdot 8=6,3h+21+1,134h^2+7,56h.$$

Откуда получим уравнение

$$1,134h^2+5,86h-201=0.$$

Решая уравнение, найдем:

$$h = 11 \text{ м}.$$

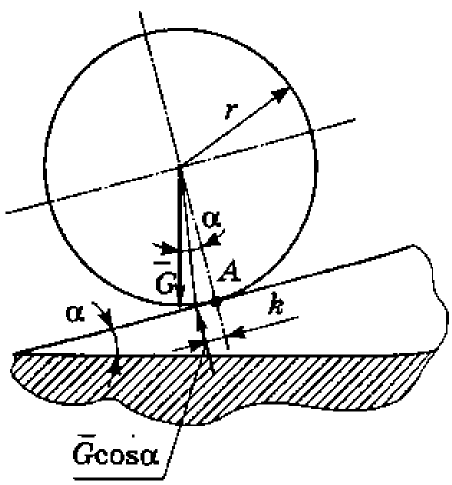
Ответ: $h = 11$ м.

Задача 5.38

Определить угол α наклона плоскости к горизонту, при котором ролик радиусом $r = 50$ мм равномерно катится по плоскости. Материал трущихся тел — сталь, коэффициент трения качения $k = 0,05$ мм. (Ввиду малости угла α можно принять $\alpha = \operatorname{tg}\alpha$.)

Решение

Представим в виде рисунка данные условия задачи.



Составим уравнение моментов относительно точки A:

$$Gr\sin\alpha-kG\cos\alpha=0,$$

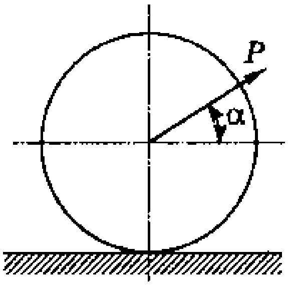
откуда найдем:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{k}{r}=0,001,\quad \alpha=3'26''.$$

Ответ: $\alpha=3'26''$.

Задача 5.39

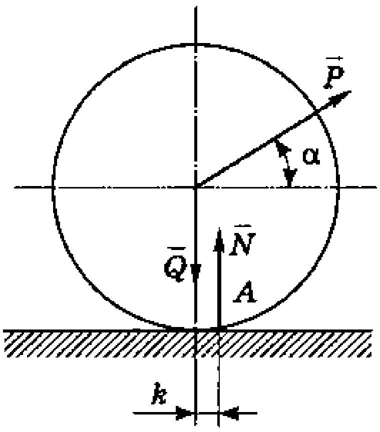
Определить силу P, необходимую для равномерного качения цилиндрического катка диаметром $r = 60$ см и весом $Q = 300$ Н по горизонтальной плоскости, если коэффициент трения качения $k = 0{,}5$ см, а угол, составляемый силой P с горизонтальной плоскостью, равен $\alpha = 30°$.



Решение

Изобразим на рисунке действующие на каток силы. Для определения искомой силы составим уравнение моментов относительно точки A:

$$(Q - P\sin\alpha)k = P r\cos\alpha.$$



Откуда найдем:

$$P = \frac{Qk}{r\cos\alpha + k\sin\alpha} = 5{,}72 \text{ Н}.$$

Ответ: $P = 5{,}72$ Н.

Задача 5.40

На горизонтальной плоскости лежит шар радиусом R и весом Q. Коэффициент трения скольжения шара о плоскость f, коэффициент трения качения k. При каких условиях горизонтальная сила P, приложенная в центре шара, сообщает ему равномерное качение?

Решение

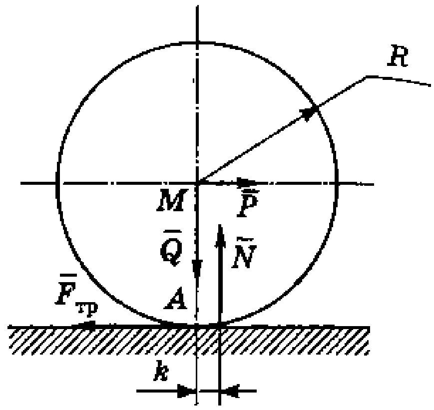
Изобразим на рисунке действующие на шар силы.

Составим уравнения равновесия шара:

$$\begin{cases} P - F_{\text{тр}} = 0, \\ N - Q = 0, \\ -P \cdot R + N \cdot k = 0. \end{cases}$$

Для того чтобы каток не скользил, необходимо соблюсти условие

$$F_{\text{тр}} < Nf.$$



Из системы найдем:

$$P = F_{\text{тр}}; \quad N = Q;$$

$$P = N\frac{k}{R} \text{ или } P = Q\frac{k}{R}.$$

Подставим найденное выражение в неравенство:

$$Q\frac{k}{R} < Qf,$$

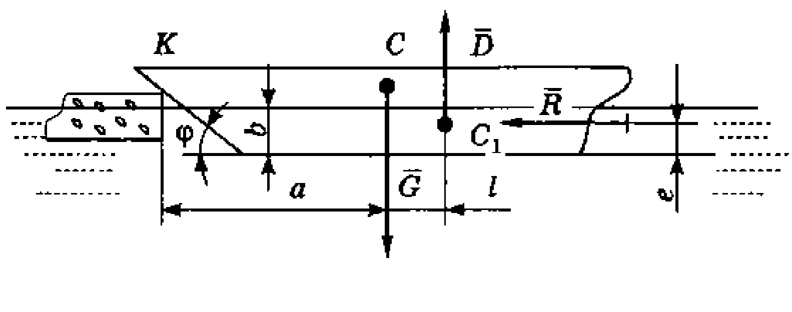
откуда

$$f > \frac{k}{R}.$$

Ответ: $f > \dfrac{k}{R}$; $P = Q\dfrac{k}{R}$.

Задача 5.41

При взаимодействии с ледяным покровом ледокол рассматривается в равновесии под действием веса судна G, силы поддерживания воды D, упора винтов R, а также сил, действующих со стороны льда в точке форштевня K: нормального давления N и максимальной силы трения F. Угол наклона форштевня $\varphi = 30°$, коэффициент трения $f = 0{,}2$. Известны значения: $G = 6000$ кН, $R =$ $= 200$ кН, $a = 20$ м, $b = 2$ м, $e = 1$ м. Пренебрегая дифферентом судна, определить вертикальное давление судна на ледяной покров P, силу поддерживания D и расстояние ее от центра тяжести судна l.



Решение

На рис. 1 изображена схема действующих на ледяной покров сил. Составим уравнения равновесия покрова:

$$\begin{cases} N\sin\varphi + F_{тр}\cos\varphi + R = 0, \\ -N\cos\varphi + F_{тр}\sin\varphi - P = 0. \end{cases}$$

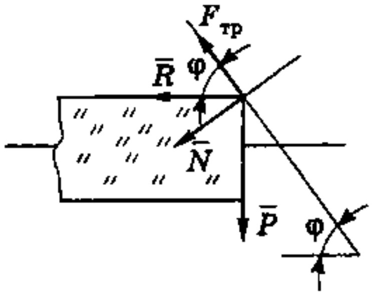


Рис. 1

Поскольку $F_{тр} = fN$, то система примет вид

$$\begin{cases} N\sin\varphi + fN\cos\varphi + R = 0, \\ -N\cos\varphi + fN\sin\varphi - P = 0. \end{cases}$$

Из системы найдем:

$$\frac{P}{R} = \frac{\cos\varphi - f\sin\varphi}{f\cos\varphi + \sin\varphi},$$

$$P = R\frac{\cos\varphi - f\sin\varphi}{f\cos\varphi + \sin\varphi}, \; P = R\frac{1-\operatorname{tg}\varphi}{f+\operatorname{tg}\varphi} = 230 \text{ кН}.$$

Составим уравнение равновесия ледокола (рис. 2):

$$P + N\cos\varphi - F_{тр}\sin\varphi - $$
$$-G + D = 0,$$

где $F_{тр} = fN$.

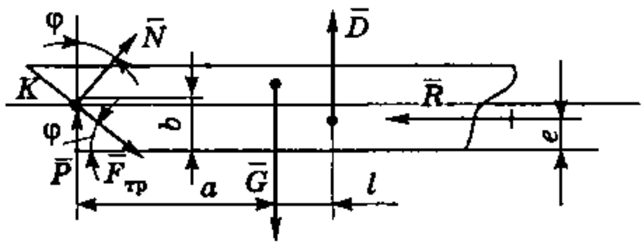


Рис. 2

Следовательно,

$$P + N\cos\varphi - fN\sin\varphi - G + D = 0,$$

$$D = G - (P + N(\cos\varphi - f\sin\varphi)) = 5770 \text{ кН}.$$

Составим уравнение моментов сил относительно точки K и найдем расстояние l:

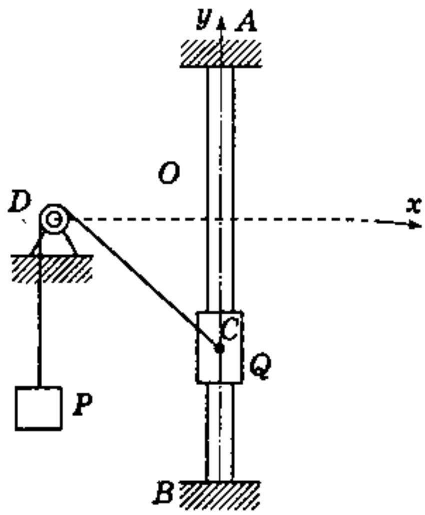
$$-Ga + D(a+l) - R(b-e) = 0 \Rightarrow$$

$$l = \frac{Ga + R(b-e)}{D} - a = 0{,}83 \text{ м}.$$

Ответ: $P = R\frac{1-\operatorname{tg}\varphi}{f+\operatorname{tg}\varphi} = 230$ кН; D = 5770 кН; l = 0,83 м.

Задача 5.42

Груз Q может скользить по шероховатой вертикальной направляющей AB. К грузу прикреплен трос, несущий груз P. Пренебрегая размером блока D, определить:



1) условие, при котором возможна зона застоя (геометрическое место возможных положений равновесия);

2) условие, при котором верхняя граница зоны застоя находится в положительной части оси y;

3) ординаты границ зоны застоя при $Q = 5$ Н, $P = 10$ Н, $f = 0{,}2$, $OD = 10$ см;

4) ординаты границ зоны застоя при $Q = 1{,}5$ Н, $P = 10$ Н, $f = 0{,}2$, $OD = 10$ см.

Решение

1) Рассмотрим равновесие груза $\overline{Q}$ в области $y < 0$. При этом возможны два случая.

а) Груз $\overline{Q}$ может сдвигаться в направлении вверх. В этом случае приложение сил к грузу показано на рис. 1.

Составим уравнения равновесия груза Q:

$$\begin{cases} N - P\cos\alpha = 0, \\ P\sin\alpha - Q - F_{\text{тр}} = 0. \end{cases}$$

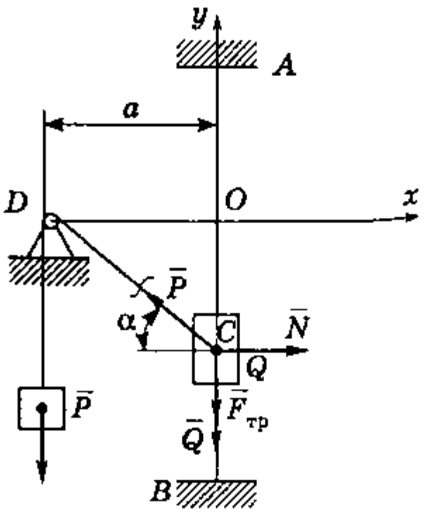


Рис. 1

Также должно выполняться неравенство

$$F_{\text{тр}} \le fN.$$

Из системы найдем:

$$N = P\cos\alpha; \quad F_{\text{тр}} = P\sin\alpha - Q.$$

Подставим эти выражения в неравенство и получим

$$P\sin\alpha - Q \le fP\cos\alpha,$$

или

$$\sin\alpha - f\cos\alpha \le \frac{Q}{P}. \qquad (1)$$

б) Груз $\overline{Q}$ может сдвигаться в направлении вниз. В этом случае приложение сил к грузу Q показано на рис. 2.

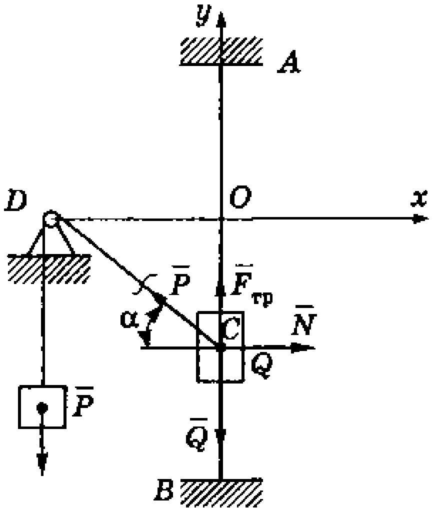


Рис. 2

Запишем уравнения равновесия груза и неравенство для $F_{тр}$:

$$\begin{cases} N - P\cos\alpha = 0, \\ P\sin\alpha - Q + F_{тр} = 0, \\ F_{тр} \le fN, \end{cases}$$

откуда найдем:

$$Q \le P(\sin\alpha + f\cos\alpha). \qquad (2)$$

Таким образом, величина силы $\overline{Q}$ находится в пределах значений, определяемых неравенствами (1) и (2):

$$P(\sin\alpha - f\cos\alpha) \le Q \le P(\sin\alpha + f\cos\alpha). \qquad (3)$$

Введем угол:

$$\sin\varphi = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}, \; \cos\varphi = \frac{f}{P\sqrt{1+f^2}}.$$

Тогда неравенство (1) примет вид

$$\sqrt{1+f^2}\sin(\alpha-\varphi) \le \frac{Q}{P}, \text{ или } \sin(\alpha-\varphi) \le \frac{Q}{P\sqrt{1+f^2}}.$$

Так как $|\sin(\alpha-\varphi)| \le 1$, то

$$\frac{Q}{P\sqrt{1+f^2}} \le 1,$$

откуда получим условие, при котором возможна зона застоя:

$$\frac{Q}{P} \le \sqrt{1+f^2}, \text{ или } \left(\frac{Q}{P}\right)^2 \le 1+f^2.$$

2) Рассмотрим равновесие груза $\overline{Q}$ в области $y \ge 0$. В этом случае приложение сил к грузу Q показано на рис. 3. Имеем

$$\begin{cases} N - P\cos\alpha = 0, \\ -P\sin\alpha - Q + F_{\text{тр}} = 0, \\ F_{\text{тр}} \le fN. \end{cases}$$

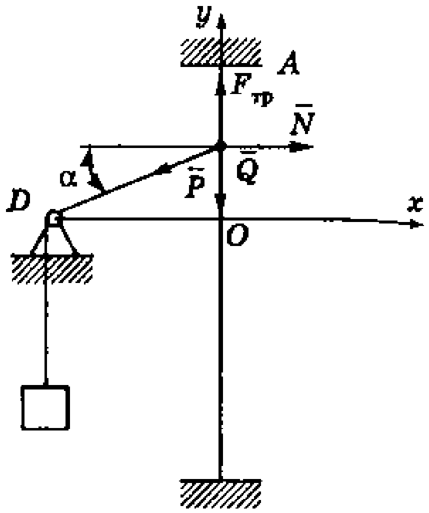


Рис. 3

Из системы найдем:

$$Q \le P(f\cos\alpha - \sin\alpha).$$

Поскольку $\alpha > 0$, то из последнего неравенства следует:

$$\frac{Q}{P} \le f\cos\alpha - \sin\alpha < f\cos\alpha < f.$$

Значит, при условии

$$\frac{Q}{P} < f$$

верхняя граница зоны застоя находится в положительной части оси y.

3) Определим границы зоны застоя при $Q = 5$ м, $P = 10$ Н, $f = 0{,}2$, $OD = a = 10$ см.

Используя соотношения (рис. 4)

$$\sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}, \ \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}},$$

приведем неравенство (3) к виду

$$\begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{a^2+y^2}} - \dfrac{fa}{\sqrt{a^2+y^2}} \le \dfrac{Q}{P}, \\ \dfrac{y}{\sqrt{a^2+y^2}} + \dfrac{fa}{\sqrt{a^2+y^2}} \ge \dfrac{Q}{P}. \end{cases} \tag{4}$$

Для определения границ зон застоя решим неравенство (4), а для этого решим уравнения

$$\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}} - \frac{fa}{\sqrt{a^2+y^2}} = \frac{Q}{P}, \qquad (5)$$

$$\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}} + \frac{fa}{\sqrt{a^2+y^2}} = \frac{Q}{P}. \qquad (6)$$

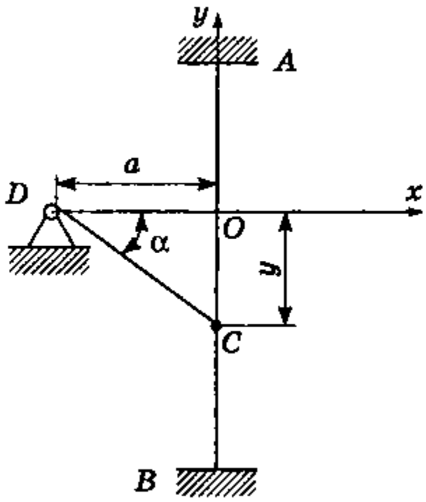


Рис. 4

Из уравнения (5) найдем:

$$y_{1,2}^A = \frac{a}{1-\left(\frac{Q}{P}\right)^2}\left[f \pm \frac{Q}{P}\sqrt{1+f^2-\left(\frac{Q}{P}\right)^2}\right];$$

из уравнения (6) —

$$y_{1,2}^B = \frac{a}{1-\left(\frac{Q}{P}\right)^2}\left[-f \pm \frac{Q}{P}\sqrt{1+f^2-\left(\frac{Q}{P}\right)^2}\right].$$

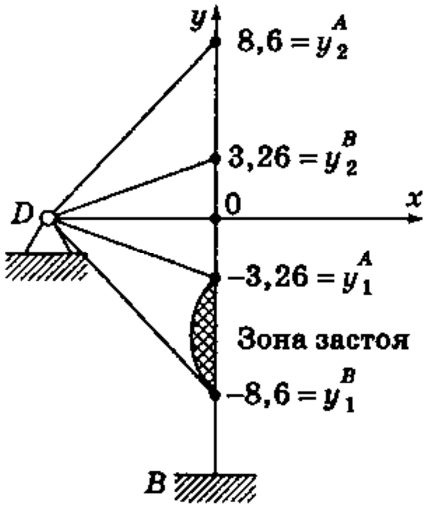


Рис. 5

Найдем численные значения:

$$y_1^A = \frac{10}{1-0{,}5^2}\left[0{,}2 - 0{,}5\sqrt{1+0{,}2^2-0{,}5^2}\right] =$$

$$= -3{,}26 \text{ см};$$

$$y_2^A = \frac{10}{1-0{,}5^2}\left[0{,}2 + 0{,}5\sqrt{1+0{,}2^2-0{,}5^2}\right] =$$

$$= 8{,}6 \text{ см};$$

$$y_1^B = \frac{10}{1-0{,}5^2}\left[-0{,}2 - 0{,}5\sqrt{1+0{,}2^2-0{,}5^2}\right] = -8{,}6 \text{ см};$$

$$y_2^B = \frac{10}{1-0{,}5^2}\left[-0{,}2 + 0{,}5\sqrt{1+0{,}2^2-0{,}5^2}\right] = 3{,}26 \text{ см}.$$

Теперь можно определить множество решений системы (4) — это отрезок $\left[y_1^B;\, y_1^A\right]$ (рис. 5). Следовательно, ординаты границ зоны застоя: $y_1 = y_1^A = -3{,}26$ см и $y_2 = y_1^B = -8{,}6$ см.

4) Определим ординаты границ зоны застоя при $Q = 1{,}5$ м, $P = 10$ Н, $f = 0{,}2$, $OD = a = 10$ см.

Повторяя процедуру пункта 3), найдем корни соответствующих уравнений:

$$y_{1,2}^{A} = \frac{10}{1-0{,}15^2}\left[0{,}2 \pm 0{,}15\sqrt{1+0{,}2^2-0{,}15^2}\right];$$

$$y_{1,2}^{B} = \frac{10}{1-0{,}15^2}\left[-0{,}2 \pm 0{,}15\sqrt{1+0{,}2^2-0{,}15^2}\right].$$

$$y_1^A = 0{,}5 \text{ см}, \ y_2^A = 3{,}59 \text{ см},$$
$$y_1^B = -3{,}59 \text{ см}, \ y_2^B = -0{,}5 \text{ см}.$$

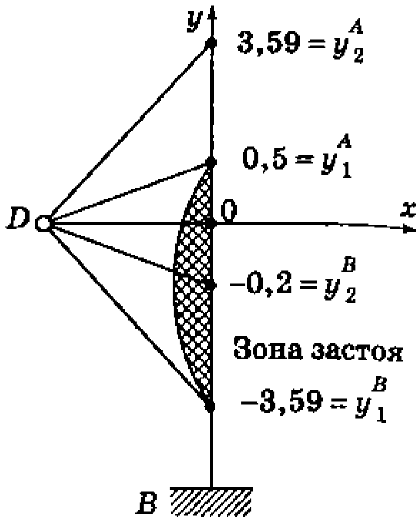


Рис. 6

Ординаты границ зоны застоя:

$$y_1 = y_1^A = 0{,}5 \text{ см}, \quad y_2 = y_1^B = -3{,}59 \text{ см}.$$

О т в е т: 1) $\left(\dfrac{Q}{P}\right)^2 \le 1 + f^2$; 2) $\dfrac{Q}{P} < f$; 3) $y_1 = -3{,}26$ см, $y_2 = -8{,}6$ см;

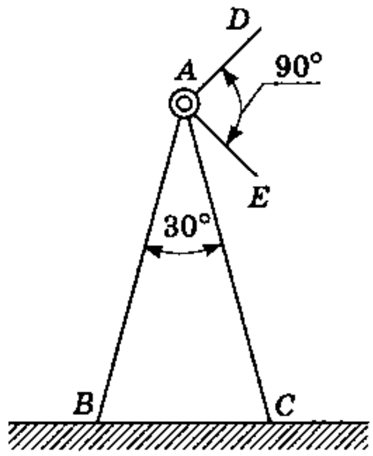
4) $y_1 = 0{,}5$ см, $y_2 = -3{,}59$ см.

II. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

6. Силы, линии действия которых пересекаются в одной точке

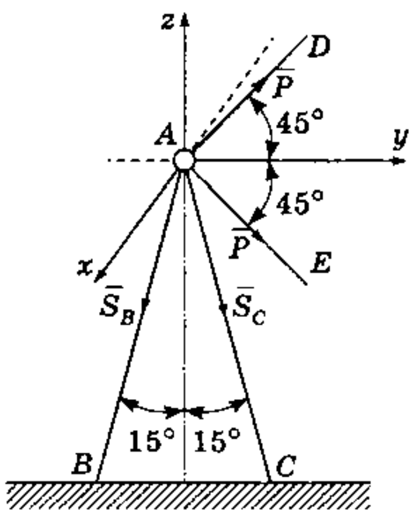
Задача 6.1

Угловой столб составлен из двух одинаково наклоненных брусьев AB и AC, скрепленных в вершине посредством шарнира. Угол $BAC = 30°$. Столб поддерживает два горизонтальных провода AD и AE, составляющих между собой прямой угол. Натяжение каждого провода равно 1 кН. Определить усилия в брусьях, предполагая, что плоскость BAC делит пополам угол DAE, пренебрегая весом брусьев.



Решение

Изобразим на рисунке действующие на точку A углового столба силы и введем систему координат xyz, считая, что плоскость zAy совпадает с плоскостью рисунка. В этой же плоскости расположены брусья AB и AC. Реакции связей $\bar{S}_B$ и $\bar{S}_C$ направим от узла A, предполагая тем самым, что брусья AB и AC работают на растяжение.



Для полученной пространственной сходящейся системы сил составим три уравнения равновесия в проекциях на оси x, y и z. Заметим, что первое уравнение (в проекциях на ось x) имеет вид

$$P\sin 45° - P\sin 45° = 0,$$

т.е. это уравнение выполняется тождественно. Для оставшихся двух уравнений получим

$$\begin{cases} P\cos 45° + P\cos 45° + S_C\cos 75° - S_B\cos 75° = 0, \\ -S_B\cos 15° - S_C\cos 15° = 0. \end{cases}$$

Решив систему, найдем

$$S_B = -S_C = \frac{P\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = 2{,}73\ \text{кН}.$$

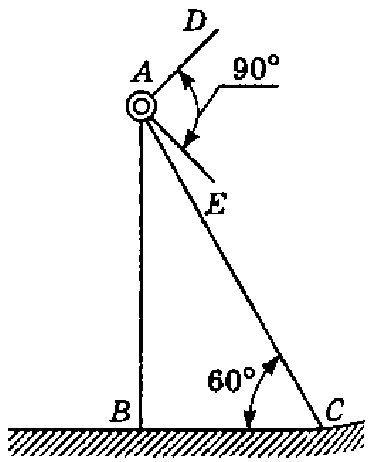
Знаки показывают, что брус AB растянут, брус AC сжат. При вычислении было учтено, что

$$\cos 75° = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1).$$

О т в е т: $S_B = -S_C = 2{,}73$ кН.

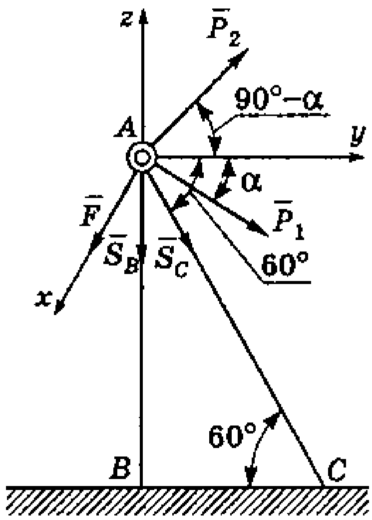
Задача 6.2

Горизонтальные провода телеграфной линии подвешены к телеграфному столбу AB с подкосом AC и составляют угол $DAE = 90°$. Натяжение проводов AD и AE соответственно равны 120 Н и 160 Н. В точке A крепление шарнирное. Найти угол α между плоскостями BAC и BAE, при котором столб не испытывает бокового изгиба, и определить усилие S в подкосе, если он поставлен под углом 60° к горизонту. Весом столба и подкоса пренебречь.



Решение

Как и в предыдущей задаче, считаем, что телеграфный столб с укосом находится в плоскости zAy, силы $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ расположены в плоскости xAy (см. рисунок). Направляя реакции связей $\overline{S}_B$ и $\overline{S}_C$ от узла A (т.е. первоначально предполагая столб AB и укос AC работающими на растяжение) и введя боковое усилие $\overline{F}$, составим уравнения равновесия пространственной сходящейся системы сил:



$$\begin{cases} F + P_1 \sin\alpha - P_2 \sin(90^\circ - \alpha) = 0, \\ P_1 \cos\alpha + P_2 \cos(90^\circ - \alpha) + S_C \cos 60^\circ = 0, \\ -S_B - S_C \sin 60^\circ = 0. \end{cases}$$

Так как по условию задачи боковой изгиб, а значит, и усилие F равно 0, то из первого уравнения системы получим

$$160 \sin\alpha = 120 \cos\alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}.$$

Зная $\operatorname{tg}\alpha$, можно предварительно найти:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3^2}{4^2}}} = \frac{4}{5};\ \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{3^2}{4^2}}} = \frac{3}{5}.$$

Тогда из двух последних уравнений системы можно найти:

$$\frac{1}{2} S_C = -P_1 \cdot \frac{4}{5} - P_2 \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow S_C = -\frac{2}{5}(4 \cdot 160 + 3 \cdot 120) =$$

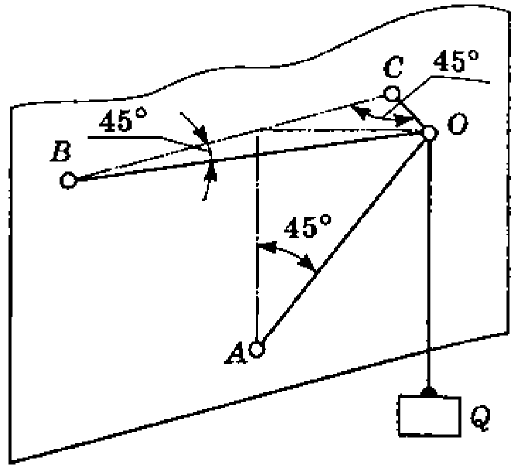
$$= -400 \text{ Н (подкос сжат)};$$

$$S_B = -\frac{1}{2} S_C = 200 \text{ Н (столб растянут)}.$$

Ответ: $S = -400$ Н; $\alpha = \arcsin\frac{3}{5}$.

Задача 6.3

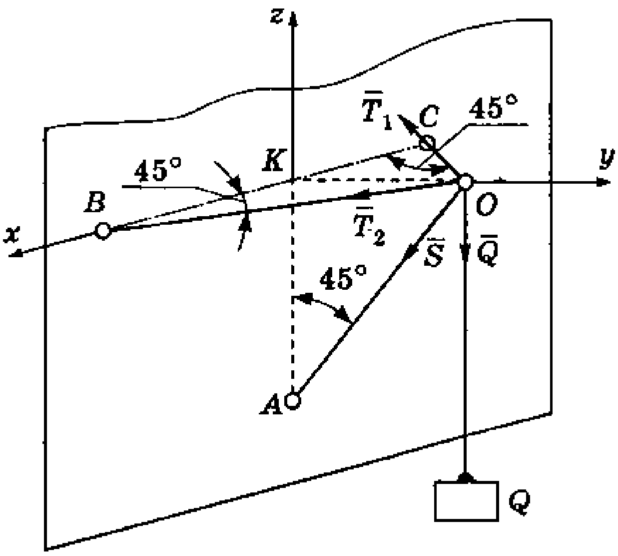
Груз $Q = 100$ Н поддерживается брусом AO, шарнирно закрепленным в точке A и наклоненным под углом 45° к горизонту, и двумя горизонтальными цепями BO и CO одинаковой длины; $\angle CBO = \angle BCO = 45°$. Найти усилие S в брусе и натяжение T цепей.



Решение

Введем систему координат xyz и изобразим заданную силу $\overline{Q}$, реакции цепей $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$ и реакцию стержня $\overline{S}$ (см. рисунок). В итоге получим сходящуюся в точке O пространственную систему сил. Составим уравнения равновесия для этой системы сил:

$$\begin{cases} T_2 \cos 45° - T_1 \cos 45° = 0, \\ -T_1 \sin 45° - T_2 \sin 45° - S \cos 45° = 0, \\ -Q - S \cos 45° = 0. \end{cases}$$



Решим систему:

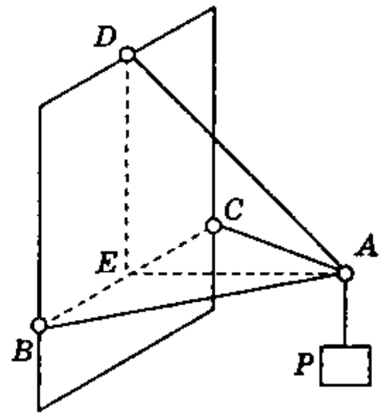
$$S = -\sqrt{2}Q = -141{,}4 \text{ Н};$$

$$T_1 = T_2 = \frac{S}{2} = 70{,}7 \text{ Н}.$$

Ответ: $S = -141{,}4$ Н; $T_1 = T_2 = 70{,}7$ Н.

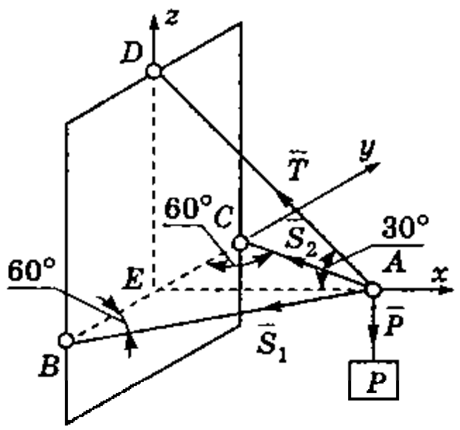
Задача 6.4

Найти усилия S_1 и S_2 в стержнях AB и AC и усилие T в тросе AD, если дано, что $\angle CBA = \angle BCA = 60°$, $\angle EAD = 30°$. Вес груза P равен 300 Н. Плоскость ABC горизонтальная. Крепления стержней в точках A, B и C шарнирные.



Решение

Система координат и пространственная, сходящаяся в точке A система сил, в соответствии с исходными данными, изображены на рисунке. Для определения искомых сил реакций составим уравнения равновесия:



$$\begin{cases} -S_1 \sin 60° - S_2 \sin 60° - T\cos 30° = 0, \\ -S_1 \cos 60° + S_2 \cos 60° = 0, \\ T \sin 30° - P = 0. \end{cases}$$

Решим систему:

$$T = 2P = 600 \text{ Н};$$

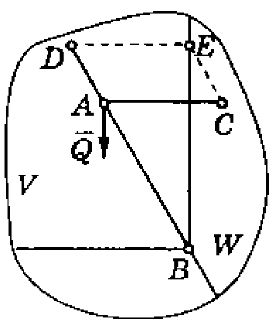
$$S_1 = S_2 = -T/2 = -300 \text{ Н}.$$

Можно сделать вывод, что стержни AB и AC сжаты. Трос растянут.

Ответ: $T = 600$ Н; $S_1 = S_2 = -300$ Н.

Задача 6.5

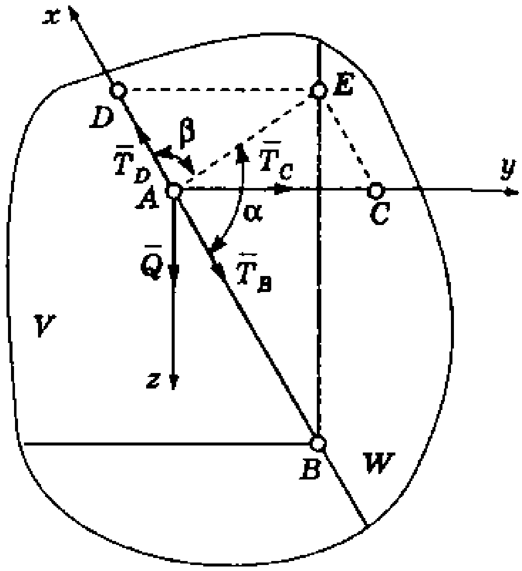
Найти усилия в стержне AB и цепях AC и AD, поддерживающих груз Q весом 420 Н, если $AB =$ = 145 см, $AC = 80$ см, $AD = 60$ см, плоскость прямоугольника $CADE$ горизонтальна, а плоскости V и W вертикальны. Крепление в точке B шарнирное.



Р е ш е н и е

Изобразив активную силу $\overline{Q}$, силы реакций $\overline{T}_B$, $\overline{T}_C$, $\overline{T}_D$, получим пространственную, сходящуюся в точке A систему сил (см. рисунок). Введем систему координат xyz, обозначим $\angle BAE = \alpha$, $\angle DAE = \beta$ и составим уравнения равновесия:

$$\begin{cases} T_D + T_B \cos\alpha \cos\beta = 0, \\ T_C + T_B \cos\alpha \sin\beta = 0, \\ Q + T_B \sin\alpha = 0. \end{cases}$$



В прямоугольнике $ACED$ найдем длину диагонали AE:

$$AE = \sqrt{AD^2 + AC^2} = 100 \text{ см}.$$

Следовательно,

$$\sin\beta = \frac{DE}{AE} = \frac{AC}{AE} = 0{,}8;$$

$$\cos\beta = \frac{AD}{AE} = 0{,}6.$$

Из прямоугольного треугольника $BAE(\angle E = 90°)$ найдем:

$$\cos\alpha = \frac{AE}{AB} = \frac{100}{145} = \frac{20}{29}; \ \sin\alpha = \frac{BE}{AB} = \frac{\sqrt{AB^2 - AE^2}}{AB} = \frac{105}{145} = \frac{21}{29}.$$

После этого из системы получим

$$T_B = -\frac{420 \cdot 29}{21} = -580 \text{ Н};$$

$$T_C = 580 \cdot \frac{20}{29} \cdot \frac{8}{10} = 320 \text{ Н};$$

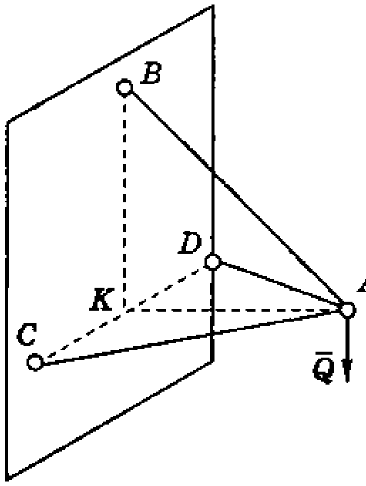
$$T_D = 580 \cdot \frac{20}{29} \cdot \frac{6}{10} = 240 \text{ Н}.$$

Стержень AB сжат; цепи AC и AD растянуты.

О т в е т: $T_B = -580$ Н; $T_C = 320$ Н; $T_D = 240$ Н.

Задача 6.6

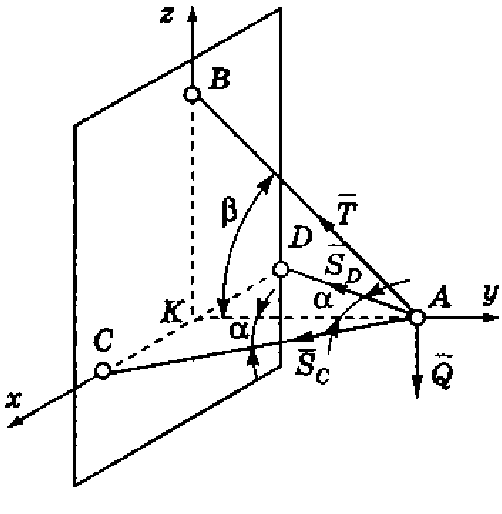
Определить усилия в тросе AB и в стержнях AC и AD, поддерживающих груз Q весом 180 Н, если $AB = 170$ см, $AC = AD = 100$ см, $CD = 120$ см, $CK = KD$ и плоскость треугольника CDA горизонтальна. Крепления стержней в точках A, C и D шарнирные.



Решение

Изобразим на рисунке действующие на шарнир A силы. Введем обозначения: $\angle BAK = \beta$; $\angle CAK = \angle DAK = \alpha$ (углы равны, так как $AC = AD$, $CK = KD$ по условию, а значит, равны треугольники ACK и ADK и в них соответствующие углы).

Введем систему координат xyz и составим уравнения равновесия:



$$\begin{cases} S_C \sin\alpha - S_D \sin\alpha = 0, \\ -S_C \cos\alpha - S_D \cos\alpha - T\cos\beta = 0, \\ T\sin\beta - Q = 0. \end{cases}$$

Из треугольника CAK найдем:

$$AK = \sqrt{AC^2 - \frac{CD^2}{2^2}} = 80 \text{ см}.$$

Вычислим:

$$\cos\alpha = \frac{AK}{AC} = 0{,}8;\ \sin\beta = \frac{KB}{AB} = \frac{15}{17};\ \cos\beta = \frac{AK}{AB} = \frac{8}{17}.$$

Теперь решим систему:

$$T = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{180 \cdot 17}{15} = 204 \text{ Н};$$

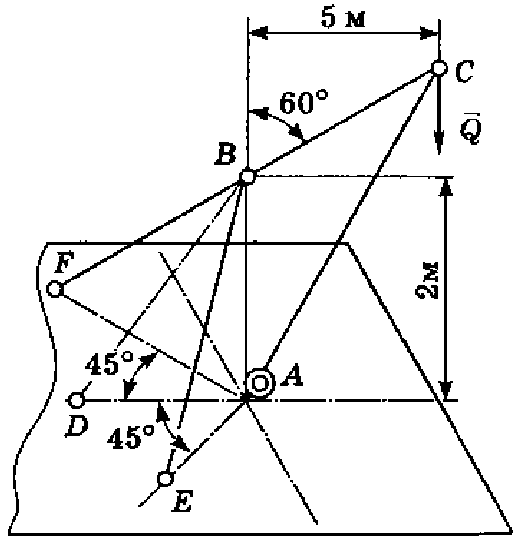
$$S_C = S_D = -\frac{1}{2} \cdot T \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = -\frac{204}{2} \cdot \frac{8}{17} \cdot \frac{10}{8} = -60 \text{ Н}.$$

Таким образом, трос AB растянут; стержни AC и AD сжаты.

Ответ: $T = 204$ Н; $S_C = S_D = -60$ Н.

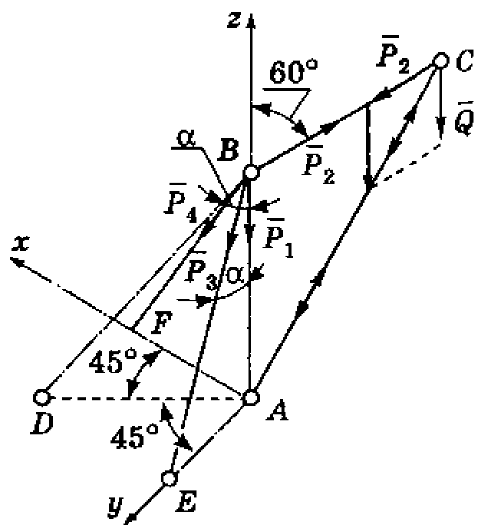
Задача 6.7

Переносный кран, поднимающий груз Q весом 20 кН, устроен так, как указано на рисунке; $AB = AE = AF = 2$ м; угол EAF составляет 90°, плоскость крана ABC делит прямой двугранный угол $EABF$ пополам. Определить силу P_1, сжимающую вертикальную стойку AB, а также силы P_2, P_3 и P_4, растягивающие струну BC и тросы BE и BF, пренебрегая весом частей крана.



Решение

Первоначально рассмотрим равновесие узла C. Из подобия силового и геометрического треугольников (см. рисунок) определим P_2:



$$\frac{P_2}{Q} = \frac{BC}{AB},$$

отсюда

$$P_2 = Q\frac{BC}{AB} = 20\frac{5}{2\sin 60^\circ} =$$

$$= 100\frac{\sqrt{3}}{3} = 58 \text{ кН}.$$

Затем рассмотрим равновесие узла B:

$$\begin{cases} P_4 \sin\alpha - P_2 \sin 60^\circ \sin 45^\circ = 0, \\ P_3 \sin\alpha - P_2 \sin 60^\circ \sin 45^\circ = 0, \\ -P_1 \cos\alpha - P_4 \cos\alpha - P_1 + P_2 \cos 60^\circ = 0. \end{cases}$$

Так как в прямоугольных треугольниках ABE и ABF по условию $AB = AE$ и углы $BAE = BAF = 90°$, то $\alpha = 45°$.

Решим систему:

$$P_3 = P_4 = P_2 \sin 60^\circ \Rightarrow P_3 = P_4 = 100\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 50 \text{ кН}.$$

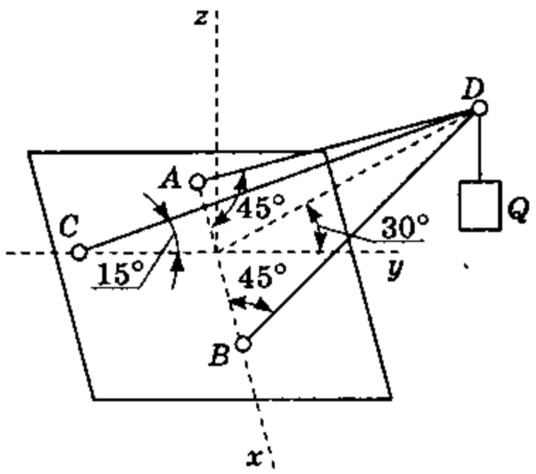
$$P_1 = P_2 \cos 60^\circ - 2P_3 \cos 45^\circ = 25 - 50\sqrt{2} \approx -42 \text{ кН}.$$

Знак «—» показывает, что стержень сжат.

Ответ: $P_1 = -42$ кН; $P_2 = 58$ кН; $P_3 = P_4 = 50$ кН.

Задача 6.8

Груз Q весом 1 кН подвешен в точке D, как указано на рисунке. Крепления стержней в точках A, B и D шарнирные, определить реакции опор A, B и C.



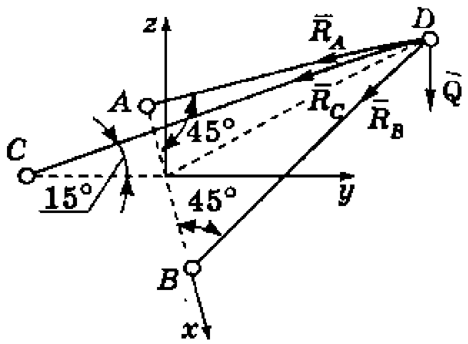
Решение

Пространственная, сходящаяся в точке D система сил состоит из заданной активной силы $\overline{Q}$ и реакций связей $\overline{R}_A$, $\overline{R}_B$, $\overline{R}_C$ (см. рисунок). Составим уравнения равновесия (в проекциях на оси координат):

$$\begin{cases} R_B \cos 45^\circ - R_A \cos 45^\circ = 0, \\ -R_B \sin 45^\circ \cos 30^\circ - R_A \sin 45^\circ \cos 30^\circ - R_C \cos 15^\circ = 0, \\ -R_A \sin 45^\circ \sin 30^\circ - R_B \sin 45^\circ \sin 30^\circ - R_C \sin 15^\circ - Q = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует

$$R_A = R_B.$$



Из второго уравнения системы вычтем третье, умноженное на $\sqrt{3}$, и получим

$$-R_C\cos 15^\circ + R_C\sqrt{3}\sin 15^\circ + \sqrt{3}Q = 0.$$

С учетом соотношений

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1),\ \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$$

найдем:

$$R_C = \frac{\sqrt{3}Q}{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1-3+1\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}\cdot 1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1} = 3{,}35 \text{ кН}.$$

$$R_A = R_B = -\frac{\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2(\sqrt{3}-1)} = -2{,}64 \text{ кН}.$$

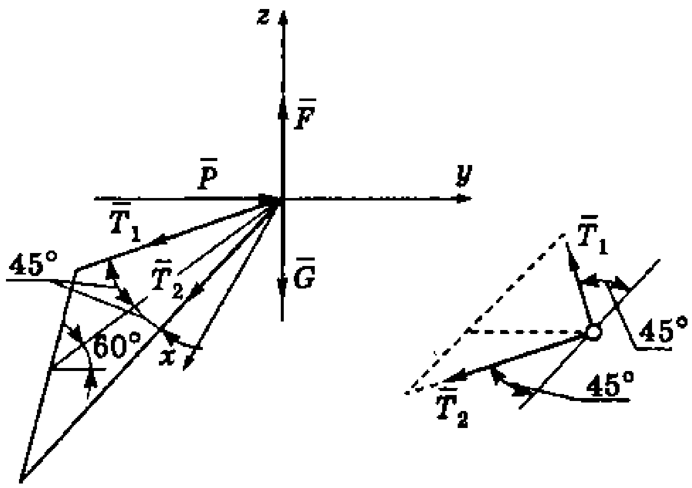
Знак «–» показывает, что стержни AD и BD сжаты.

Ответ: $R_A = R_B = 2{,}64$ кН; $R_C = 3{,}35$ кН.

Задача 6.9

Воздушный шар, удерживаемый двумя тросами, находится под действием ветра. Тросы образуют между собой прямой угол; плоскость, в которой они находятся, составляет с плоскостью горизонта угол 60°. Направление ветра перпендикулярно линии пересечения этих плоскостей и параллельно поверхности земли. Вес шара и заключенного в нем газа 2,5 кН, объем шара 215,4 м^3, вес 1 м^3 воздуха 13 Н. Определить натяжения тросов T_1 и T_2 и равнодействующую P сил давления ветра на шар, считая, что линий действия всех сил, приложенных к шару, пересекаются в центре шара.

Решение



На шар, кроме силы тяжести $\bar G$, натяжений тросов $\bar T_1$, $\bar T_2$, силы ветра $\bar P$, действует подъемная сила $F = 215{,}4 \cdot 13 = 2800{,}2$ Н (см. рисунок). Составим уравнения равновесия пространственной сходящейся системы сил (в проекциях на оси координат):

$$\begin{cases} -T_1 \sin 45^\circ + T_2 \sin 45^\circ = 0, & (1) \\ -T_1 \cos 45^\circ \cos 60^\circ - T_2 \cos 45^\circ \cos 60^\circ + P = 0, & (2) \\ F - G - T_1 \cos 45^\circ \sin 60^\circ - T_2 \cos 45^\circ \sin 60^\circ = 0. & (3) \end{cases}$$

Решим систему.

Из уравнения (1)

$$T_1 = T_2;$$

из уравнения (3)

$$T_1 = T_2 = \frac{F - G}{2 \cos 45^\circ \sin 60^\circ} = \frac{2800{,}2 - 2500}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 245 \text{ Н};$$

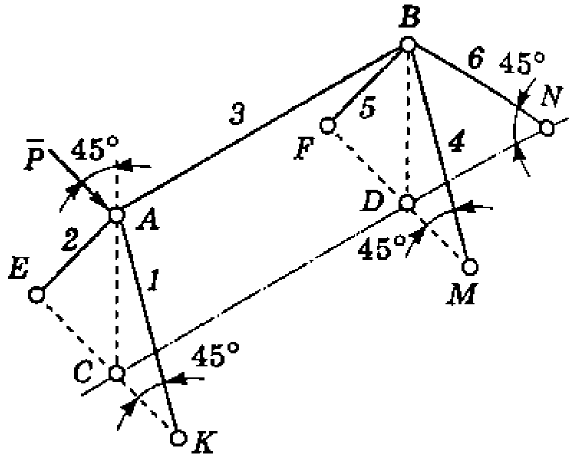
из уравнения (2)

$$P = 2T_1 \cos 45^\circ \cos 60^\circ = 245 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 173 \text{ Н}.$$

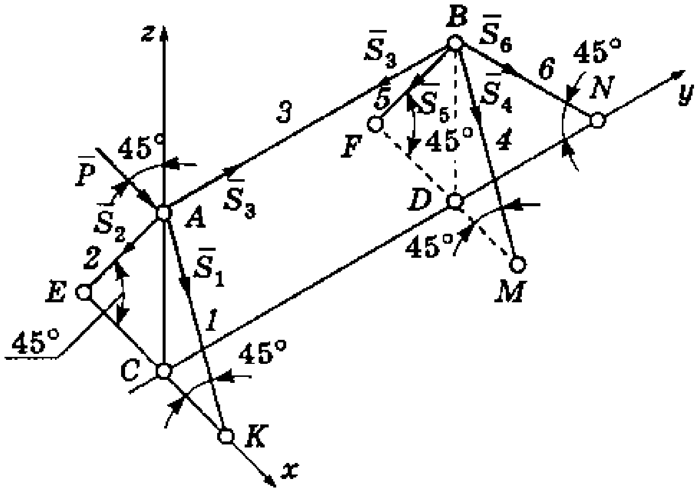
Ответ: $T_1 = T_2 = 245$ Н; $P = 173$ Н.

Задача 6.10

На рисунке изображена пространственная ферма, составленная из шести стержней 1, 2, 3, 4, 5, 6. Сила $\overline{P}$ действует на узел A в плоскости прямоугольника $ABDC$; при этом ее линия действия составляет с вертикалью CA угол 45°. $\Delta EAK = \Delta FBM$. Углы равнобедренных треугольников EAK, FBM и NDB при вершинах A, B и D прямые. Определить усилия в стержнях, если $P = 1$ кН.



Решение



Сначала рассмотрим равновесие узла A (см. рисунок) и запишем уравнения равновесия (в проекциях на оси координат Ox, Oy и Oz соответственно):

$$\begin{cases} S_1 \cos 45° - S_2 \cos 45° = 0, & (1) \\ P \sin 45° + S_3 = 0, & (2) \\ -P \cos 45° - S_1 \sin 45° - S_2 \sin 45° = 0. & (3) \end{cases}$$

Решим полученную систему.

Из уравнения (1)

$$S_1 = S_2;$$

из выражения (3)

$$S_1 = S_2 = -\frac{P}{2} = -0{,}5 \text{ кН};$$

из уравнения (2)

$$S_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} P = -0{,}707 \text{ кН}.$$

Теперь рассмотрим равновесие узла B:

$$\begin{cases} -S_5 \cos 45^\circ + S_4 \cos 45^\circ = 0, & (4) \\ -S_3 + S_6 \cos 45^\circ = 0, & (5) \\ -S_5 \sin 45^\circ - S_4 \sin 45^\circ - S_6 \sin 45^\circ = 0. & (6) \end{cases}$$

Решим последнюю систему:

из уравнения (5)

$$S_6 = \sqrt{2} S_3 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} P\right) = -P = -1 \text{ кН};$$

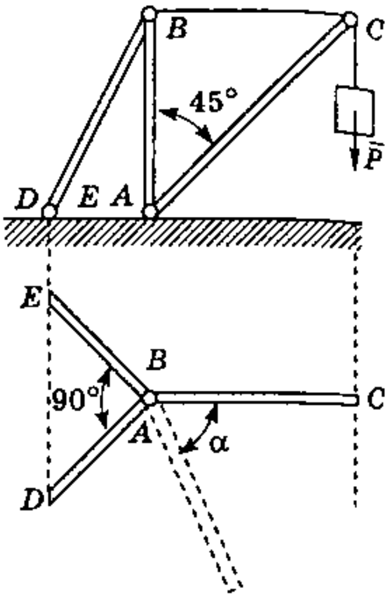
из уравнений (4) и (6)

$$S_4 = S_5 = -\frac{S_6}{2} = 0{,}5 \text{ кН}.$$

Знак «+» указывает на то, что стержни растянуты, знак «–» — сжаты.

О т в е т: $S_1 = -0{,}5$ кН; $S_2 = -0{,}5$ кН; $S_3 = -0{,}707$ кН; $S_4 = 0{,}5$ кН; $S_5 = 0{,}5$ кН; $S_6 = -1$ кН.

Задача 6.11



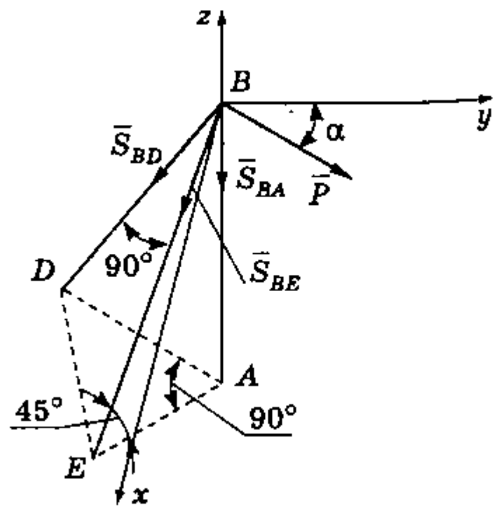
Определить усилия в вертикальной стойке и в ногах крана, изображенного на рисунке, в зависимости от угла α, если дано: $AB = BC = AD = AE$. Крепления в точках A, B, E и D шарнирные.

Решение

Проведем ось z по AB, ось y — вдоль BC, а ось x — перпендикулярно BC (см. рисунок).

Составим уравнения равновесия для системы сходящихся в точке B сил: сил реакции S_{BD}, S_{BE}, S_{BA} и заданной силы P.

$$\begin{cases} -S_{BD}\cos 45^\circ \sin 45^\circ + S_{BE}\cos 45^\circ \sin 45^\circ + P\sin\alpha = 0, \\ -S_{BD}\cos 45^\circ \cos 45^\circ - S_{BE}\cos 45^\circ \cos 45^\circ + P\cos\alpha = 0, \\ -S_{BD}\sin 45^\circ - S_{BE}\sin 45^\circ - S_{AB} = 0. \end{cases}$$



Складывая два первых уравнения системы, получим

$$S_{BD} = P(\cos\alpha - \sin\alpha).$$

Вычитая из первого уравнения системы второе, получим

$$S_{BE} = P(\sin\alpha + \cos\alpha).$$

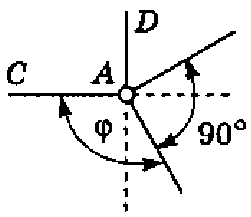
Из последнего уравнения системы следует

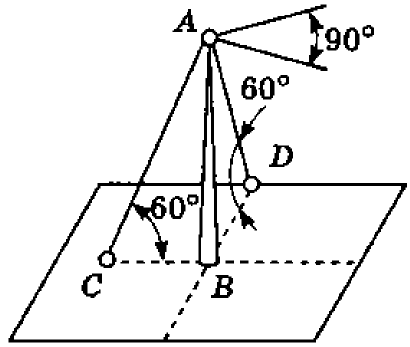
$$S_{AB} = -P\sqrt{2}\cos\alpha.$$

Ответ: $S_{AB} = -P\sqrt{2}\cos\alpha$; $S_{BD} = P(\cos\alpha - \sin\alpha)$;
$S_{BE} = P(\sin\alpha + \cos\alpha)$.

Задача 6.12

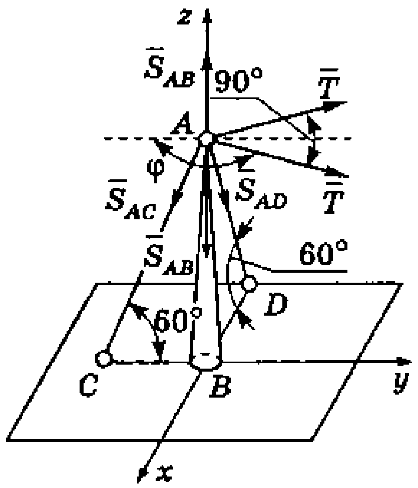
Угловой столб AB, поддерживающий воздушный кабель, удерживается двумя оттяжками AC и AD, причем $\angle CBD = 90°$. Определить усилия в столбе и оттяжках в зависимости от угла φ, образованного одной из двух ветвей кабеля с плоскостью CBA. Ветви кабеля горизонтальны и взаимно перпендикулярны, натяжения в них одинаковы и равны T.





Решение

Изобразив на рисунке усилия в столбе $\bar{S}_{AB}$, оттяжках $\bar{S}_{AC}$, $\bar{S}_{AD}$, заданное натяжение кабеля $\bar{T}$, получим пространственную сходящуюся в точке A систему сил. Составим уравнения равновесия:



$$\begin{cases} T\sin\varphi + T\cos\varphi - S_{AD}\cos 60° = 0, \\ -T\cos\varphi + T\sin\varphi - S_{AC}\cos 60° = 0, \\ -S_{AB} - S_{AC}\sin 60° - S_{AD}\sin 60° = 0. \end{cases}$$

Решив систему, найдем:

$$S_{AD} = 2T(\sin\varphi + \cos\varphi);$$

$$S_{AC} = 2T(\sin\varphi - \cos\varphi);$$

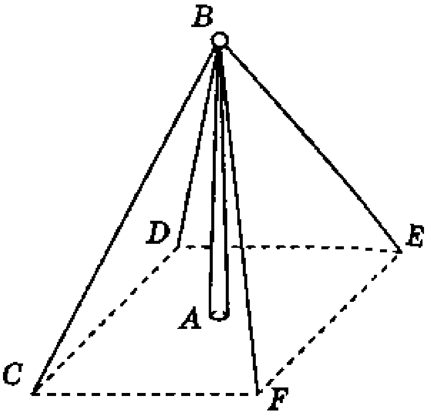
$$S_{AB} = -2\sqrt{3}T\sin\varphi.$$

Знаки указывают на то, что оттяжки AC и AD растянуты, столб AB сжат.

Ответ: $S_{AB} = -2\sqrt{3}T\sin\varphi$; $S_{AC} = 2T(\sin\varphi - \cos\varphi)$; $S_{AD} = 2T(\sin\varphi + \cos\varphi)$. Оттяжки будут натянуты обе одновременно при условии $\pi/4 < \varphi < 3\pi/4$. При $\varphi < \pi/4$ или $\varphi > 3\pi/4$ одна из оттяжек должна быть заменена брусом.

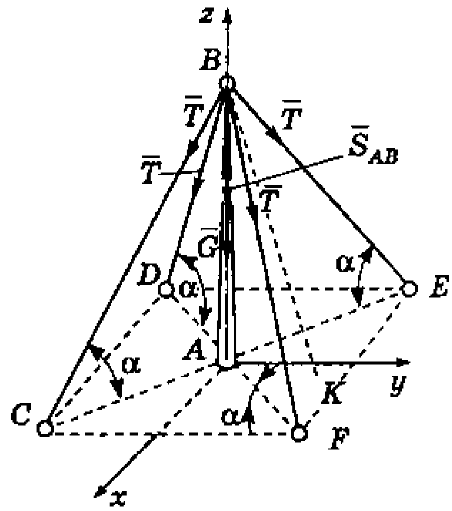
Задача 6.13

Мачта AB удерживается в вертикальном положении посредством четырех симметрично расположенных оттяжек. Угол между каждыми двумя смежными оттяжками равен 60°. Определить давление мачты на землю, если натяжение каждой из оттяжек равно 1 кН, а вес мачты 2 кН.



Решение

Так как оттяжки расположены симметрично относительно друг друга, то образованная точками крепления фигура является квадратом (см. рисунок). Пусть $BE = a$, тогда



$$KE = BE\sin 30^\circ = \frac{a}{2} \Rightarrow AE = \frac{\sqrt{2}}{2}a \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{AE}{BE} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Приравнивая к нулю сумму проекций всех сил на ось z, получим

$$-S_{AB} - G - 4\cdot T\sin\alpha = 0.$$

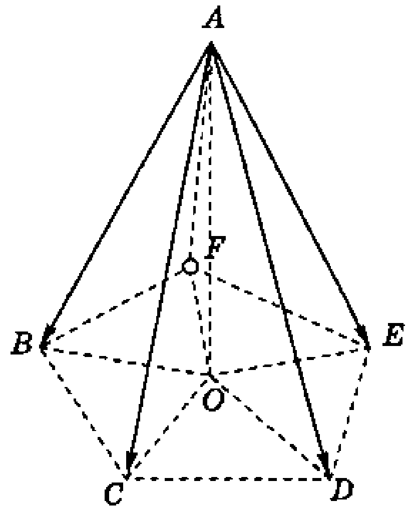
Следовательно,

$$S_{AB} = -G - 2\sqrt{2}T = -4{,}83 \text{ кН}.$$

$P = |S_{AB}| = 4{,}83$ кН — давление мачты на землю.

Ответ: 4,83 кН.

Задача 6.14



Четыре ребра AB, AC, AD и AE правильной пятиугольной пирамиды изображают по величине и направлению четыре силы в масштабе 1 Н в 1 м. Зная высоту пирамиды $AO = 10$ м и радиус круга, описанного около основания, $OC = 4{,}5$ м, найти равнодействующую R и расстояние x от точки O до точки пересечения равнодействующей с основанием.

Решение

В соответствии с рис. 1 запишем:

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}; \qquad \overline{AC} = \overline{AO} + \overline{OC};$$

$$\overline{AD} = \overline{AO} + \overline{OD}; \qquad \overline{AE} = \overline{AO} + \overline{OE}.$$

Тогда

$$\overline{R} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{AE} = 4\overline{AO} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} + \overline{OE}.$$

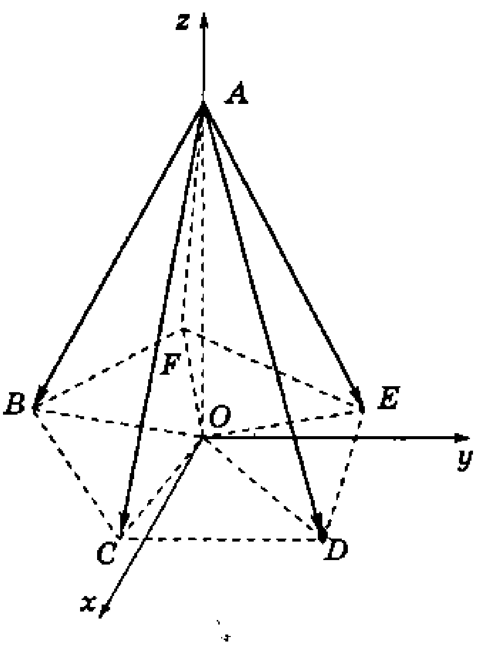


Рис. 1

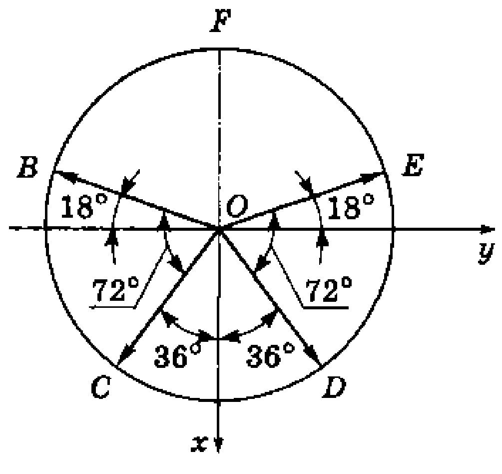


Рис. 2

Пусть R_x, R_y, R_z — проекции силы R соответственно на оси x, y, z. Из рис. 1 определим:

$$R_z = 4AO = 40 \text{ Н}.$$

Из рис. 2 найдем:

$$R_x = 2(4{,}5\cos 36^\circ - 4{,}5\sin 18^\circ) = 9(0{,}809 - 0{,}309) = 4{,}5 \text{ Н};$$

$$R_y = 4{,}5(\cos 18^\circ - \cos 18^\circ) + 4{,}5(\cos 54^\circ - \cos 54^\circ) = 0.$$

Таким образом, равнодействующая расположена в плоскости zOx. Найдем:

$$R = \sqrt{R_z^2 + R_x^2} = \sqrt{1620{,}5} = 40{,}25 \text{ Н}.$$

Изобразим схематично векторы $\bar{R}_x$, $\bar{R}_z$, а также отрезки AO и $OM = x$, где M — точка пересечения равнодействующей $\bar{R}$ с плоскостью xOy (рис. 3). Из подобия треугольников (силового и геометрического) получим

$$\frac{40}{4{,}5} = \frac{10}{x} \Rightarrow x = \frac{4{,}5}{4} = 1{,}125 \text{ м}.$$

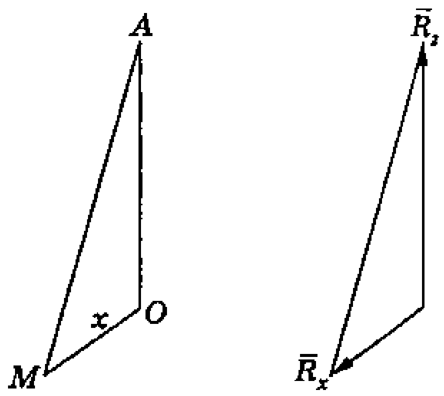
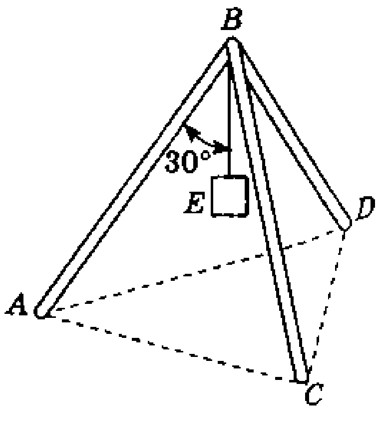


Рис. 3

Ответ: $R = 40{,}25$ Н; $x = 1{,}125$ м.

Задача 6.15

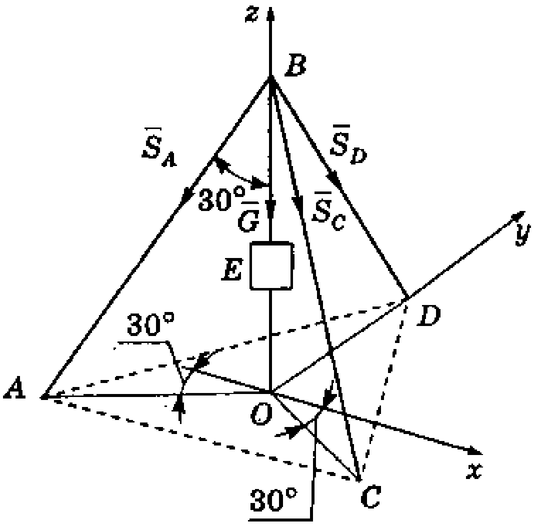
К вершине B треножника $ABCD$ подвешен груз E, вес которого 100 Н. Ножки имеют равную длину, укреплены на горизонтальном полу и образуют между собой равные углы. Определить усилие в каждой из ножек, если известно, что они образуют с вертикалью BE углы в 30°.



Р е ш е н и е

Изобразив силу $\overline{G}$ и реакции ножек треножника (см. рисунок), получим сходящуюся в точке B пространственную систему сил. Составим уравнения равновесия:

$$\begin{cases} -S_A \sin 30° \cos 30° + S_C \sin 30° \cos 30° = 0, \\ S_D \cos 60° - S_A \sin 30° \sin 30° - S_C \sin 30° \sin 30° = 0, \\ -G - S_A \cos 30° - S_C \cos 30° - S_D \cos 30° = 0. \end{cases}$$



Решив систему, получим

$$S_A = S_C = S_D = -\frac{G}{3\cos 30°} =$$

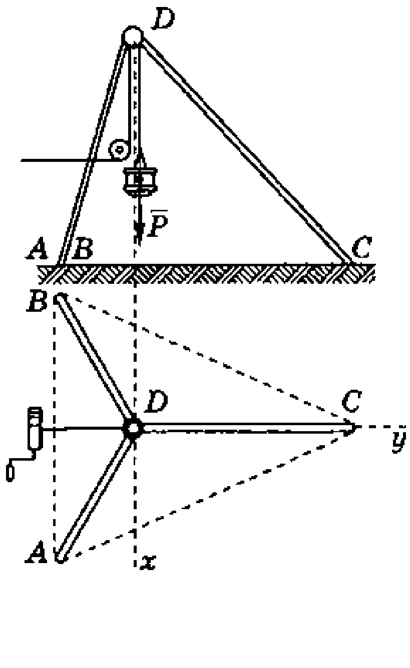
$$= -\frac{100}{3 \cdot 0{,}866} = -38{,}5 \text{ Н}.$$

Знак «–» указывает на то, что ножки сжаты.

О т в е т: –3,85 Н.

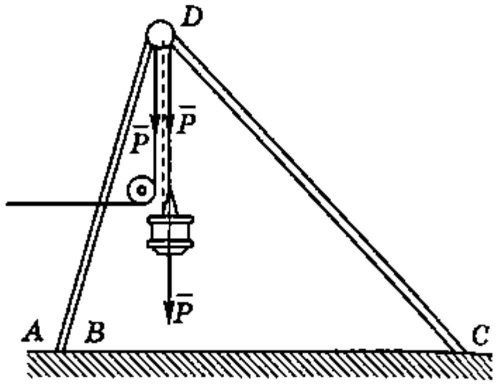
Задача 6.16

Найти усилия S в ногах AD, BD и CD треноги, образующих углы в 60° с горизонтальной плоскостью, если вес P равномерно поднимаемого груза равен 3 кН. При этом $AB = BC = AC$.



Р е ш е н и е

Задача полностью идентична задаче 6.15, так как углы в 60°, образованные ножками треножника с плоскостью, соответствуют углам в 30° с вертикалью (см. рисунок). Следует обратить внимание на то, что в точке D действуют две силы P, так как через блок D перекинут трос, усилие в котором тоже будет P. Решив задачу по аналогии с задачей 6.15, запишем окончательный ответ:



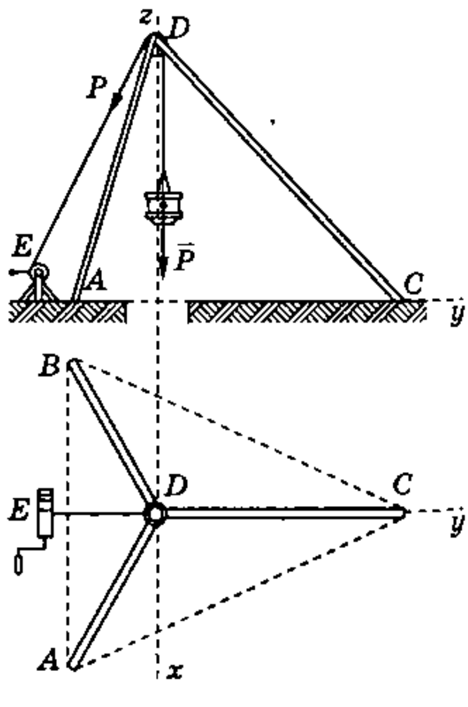
$$S_A = S_B = S_C = \frac{-2P}{3\cos 30^\circ} =$$

$$= -\frac{6}{3 \cdot 0{,}866} = -2{,}3 \text{ кН}.$$

Ответ: $S = -2{,}3$ кН.

Задача 6.17

Для подъема из шахты груза P весом 30 кН установлены тренога $ABCD$ и лебедка E. Определить усилия в ногах треноги при равномерном поднятии груза, если треугольник ABC равносторонний и углы, образованные ногами и тросом DE с горизонтальной плоскостью, равны 60°. Расположение лебедки по отношению к треноге видно из рисунка.



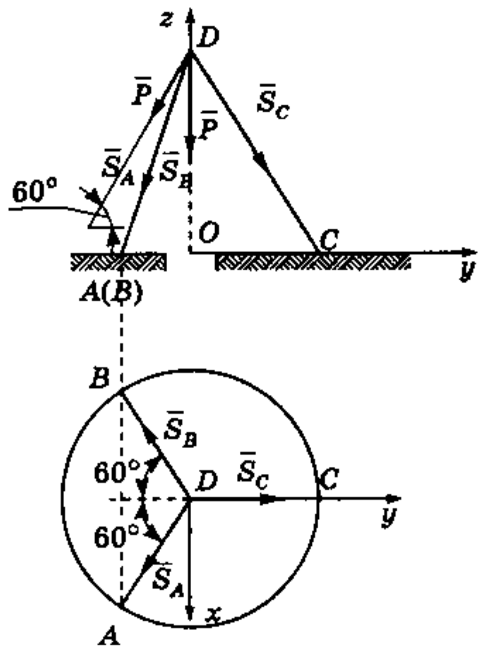
Решение

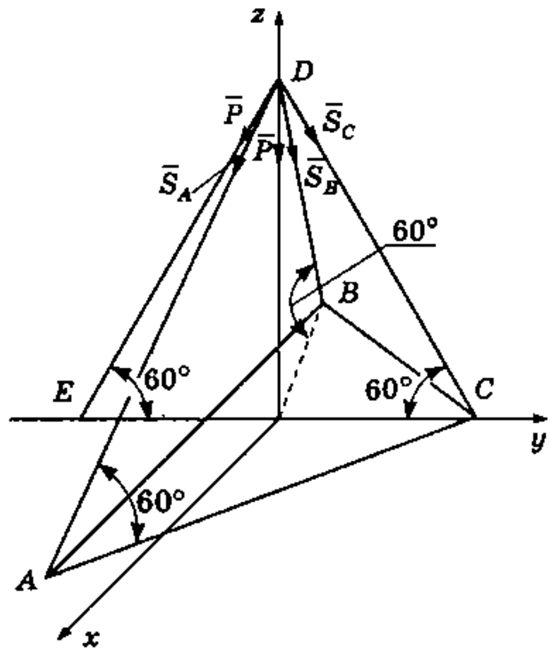
Составим уравнения равновесия по аналогии с задачей 6.15. В соответствии с рисунком уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{cases} S_A \cos 60^\circ \cos 30^\circ - S_B \cos 60^\circ \cos 30^\circ = 0, \\ S_C \cos 60^\circ - S_A \cos 60^\circ \cos 60^\circ - S_B \cos 60^\circ \cos 60^\circ - P \cos 60^\circ = 0, \\ -S_A \sin 60^\circ - S_B \sin 60^\circ - S_C \sin 60^\circ - P - P \sin 60^\circ = 0. \end{cases}$$

Решив систему, получим

$$S_A = S_B = -31{,}55 \text{ кН}; \quad S_C = -1{,}55 \text{ кН}.$$





О т в е т: $S_A = S_B = -31{,}5$ кН; $S_C = -1{,}55$ кН. Знак «–» показывает, что ножки треножника сжаты.

Задача 6.18

На гладком полу стоит трехногий штатив; нижние концы его ножек связаны шнурами так, что ножки и шнуры штатива образуют правильный тетраэдр. К верхней точке штатива подвешен груз весом P. Определить реакцию пола R в точках опоры и натяжение шнуров T, выразив искомые величины через P.

Р е ш е н и е

Для правильного тетраэдра, изображенного на рисунке, выполняются соотношения:

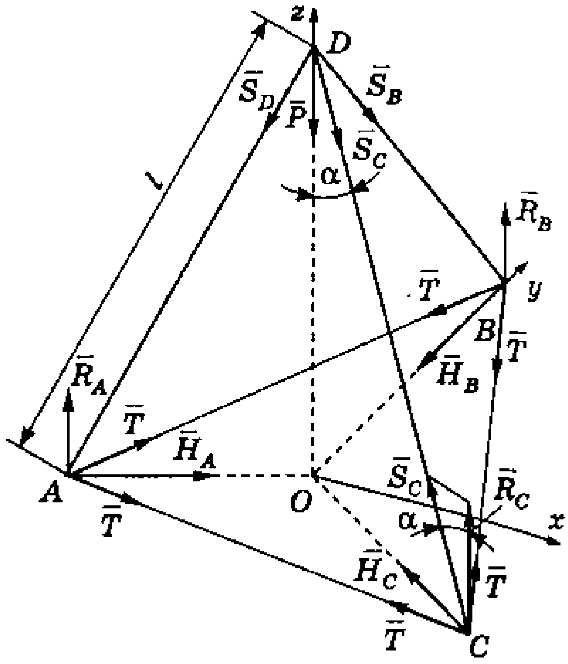
$$AB = BC = CA = AD = DC = DB = l;$$

$$\angle ADO = \angle CDO = \angle BDO = \alpha.$$

Следовательно,

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3};\ \cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Из условия равновесия сил, сходящихся в точке D, по аналогии с задачей 6.15 получим



$$S_A = S_B = S_C = -\frac{P}{3\cos\alpha} = -\frac{P}{\sqrt{6}}.$$

Тогда для ножки DC:

$$\sum F_{kz} = 0 \Rightarrow R_C + S_C\cos\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$R_C = -S_C\cos\alpha = \frac{P}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{P}{3};$$

для ножки DA

$$\sum F_{kz} = 0 \Rightarrow R_A + S_A\cos\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_A = -S_A\cos\alpha = \frac{P}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{P}{3};$$

для ножки DB

$$\sum F_{kz} = 0 \Rightarrow R_B + S_B\cos\alpha = 0 \Rightarrow R_B = -S_B\cos\alpha = \frac{P}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{P}{3}.$$

Таким образом, искомая реакция пола R:

$$R = R_A = R_B = R_C = \frac{1}{3}P.$$

Для горизонтальной составляющей H_C имеем

$$H_C = S_C\sin\alpha = \frac{P}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{P}{3\sqrt{2}}.$$

Аналогично

$$H_B = H_A = \frac{P}{3\sqrt{2}}.$$

С другой стороны,

$$H_A = H_B = H_C = 2T\cos 30°,$$

следовательно,

$$2T\cos 30^\circ = \frac{P}{3\sqrt{2}} \Rightarrow T = \frac{P\cdot 2}{6\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} = \frac{P}{3\sqrt{6}}.$$

Ответ: $R = \frac{1}{3}P$; $T = \frac{P}{3\sqrt{6}}$.

Задача 6.19

Решить предыдущую задачу в том случае, когда ножки штатива связаны шнурами не в концах, а в серединах, принимая при этом во внимание, что вес каждой ножки равен p и приложен к ее середине.

Решение

Рассуждая по аналогии с задачей 6.18, имеем

$$S_A = S_B = S_C = -\frac{P+3p}{3\cos\alpha} = -\frac{P+3p}{\sqrt{6}};$$

$$R_A = R_B = R_C = -\frac{P+3p}{\sqrt{6}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}P + p.$$

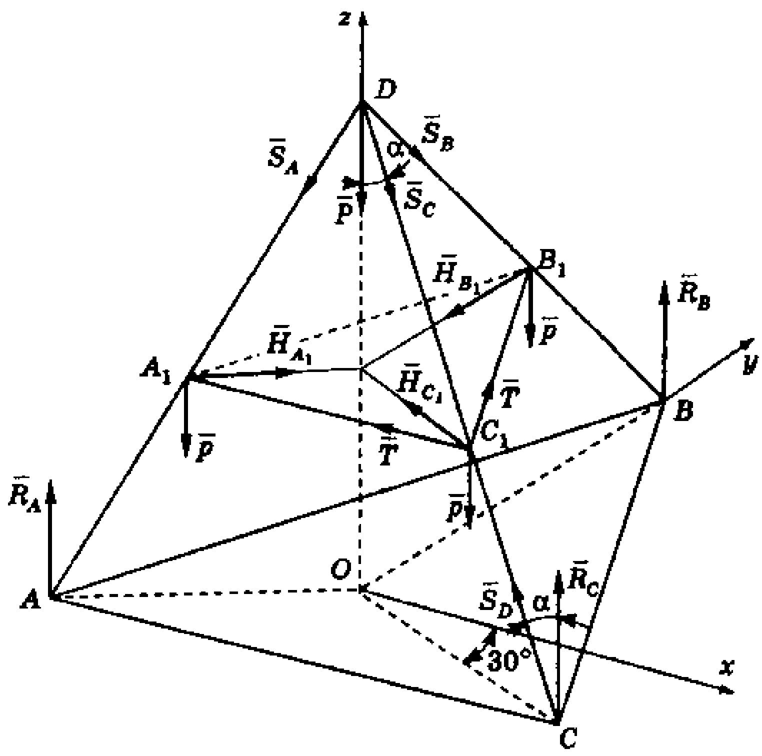
Как и в задаче 6.18, вертикальные составляющие остаются в точках A, B, C, а горизонтальные будут направлены по нити в среднем сечении тетраэдра $A_1B_1C_1$. Поэтому для их определения составим дополнительное уравнение $\sum\limits_k M_D(F_k) = 0$, которое с учетом рисунка запишем в виде:

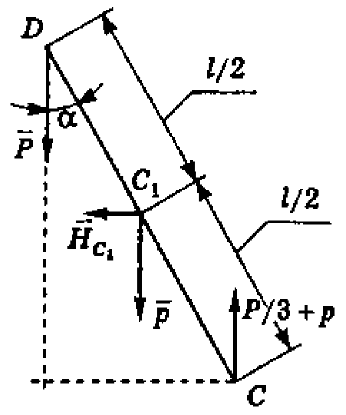
$$-H_{C_1}\frac{l}{2}\cos\alpha - p\frac{l}{2}\sin\alpha + \left(\frac{P}{3}+p\right)l\sin\alpha = 0.$$

Отсюда найдем:

$$H_{C_1} = 2\left(\frac{P}{3}+p\right)\operatorname{tg}\alpha - p\operatorname{tg}\alpha = \frac{P}{3}\sqrt{2} + \frac{p}{2}\sqrt{2},$$

так как $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$





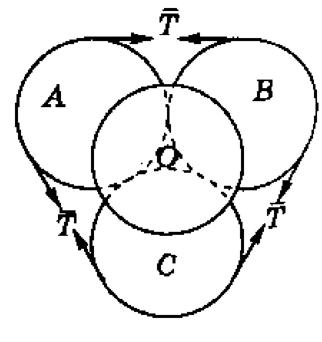
$$2T\cos 30^\circ = H_{C_1} \Rightarrow T = \frac{H_{C_1}}{2\cos 30^\circ} = \frac{\dfrac{P\sqrt{2}}{3} + \dfrac{p}{2}\sqrt{2}}{2\dfrac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{(2P+3p)\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} = \frac{2P+3p}{18}\sqrt{6}.$$

О т в е т: $R = \frac{1}{3}P + p$; $T = \frac{2P+3p}{18}\sqrt{6}.$

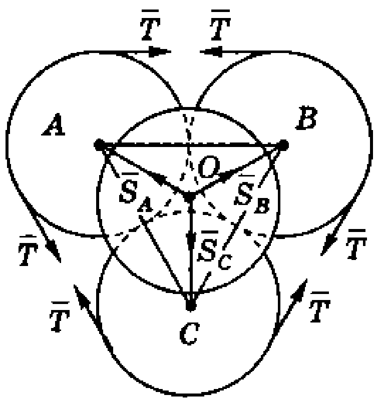
Задача 6.20

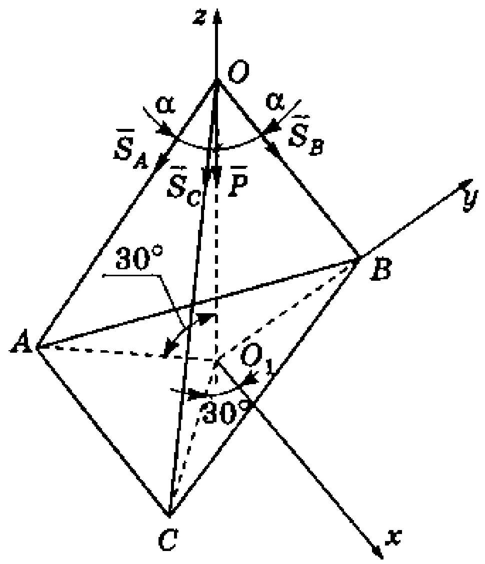
Три однородных шара A, B и C одинаковых радиусов положены на горизонтальную плоскость, взаимно прикасаются и обвязаны шнуром, огибающим их в экваториальной плоскости, а четвертый шар O того же радиуса и также однородный, весом 10 Н, лежит на трех



нижних. Определить натяжение шнура T, вызываемое давлением верхнего шара. Трением шаров между собою и горизонтальной плоскостью пренебречь.

Решение





Центры шаров A, B, C, O образуют правильный тетраэдр со стороной $2R$, где R — радиус шара. На три нижних шара со стороны верхнего действуют усилия $\bar{S}_A$, $\bar{S}_B$, $\bar{S}_C$ от силы тяжести $\bar{P}$ (см. рисунок).

Запишем уравнения равновесия в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} -S_A \sin\alpha\cos 30° + S_C \sin\alpha\cos 30° = 0, \\ -S_A \sin\alpha\sin 30° - S_C \sin\alpha\sin 30° + S_C \sin\alpha = 0, \\ -S_A \cos\alpha - S_B \cos\alpha - S_C \cos\alpha + P = 0. \end{cases}$$

Из системы получим

$$S_A = S_B = S_C = \frac{P}{3\cos\alpha} = \frac{P}{\sqrt{6}}.$$

Так как

$$2T\cos 30° = S_A \sin\alpha \text{ (см. задачу 6.18) и } \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

то

$$2T\cos 30^\circ = \frac{P\cdot\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{6}} = \frac{P}{3\sqrt{2}},$$

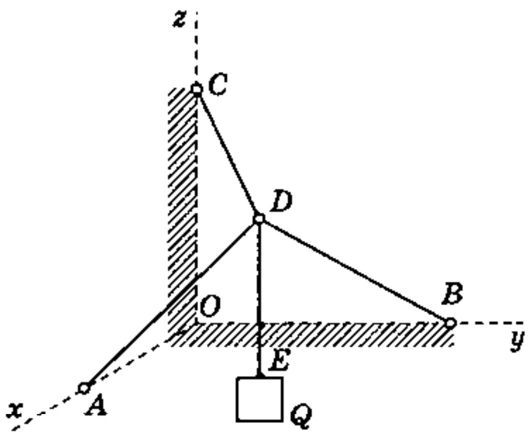
$$T = \frac{P}{3\sqrt{6}} = \frac{10}{3\sqrt{6}} = 1{,}36\ \text{Н}.$$

Ответ: $T = 1{,}36$ Н.

Задача 6.21

В точках A, B, C, лежащих на прямоугольных координатных осях на одинаковом расстоянии l от начала координат O, закреплены нити: $AD = BD = CD = L$, связанные в точке D, координаты которой

$$x = y = z = \frac{1}{3}(l - \sqrt{3L^2 - 2l^2}).$$



В этой точке подвешен груз Q. Определить натяжение нитей T_A, T_B и T_C, предполагая, что $\sqrt{\frac{2}{3}}\,l < L < l$.

Решение

В соответствии с рисунком введем векторы натяжения нитей:

$$\bar{T}_A = T_A\frac{\overline{AD}}{AD} = T_A[-(l - x_0)\bar{i} + x_0\bar{j} + x_0\bar{k}]\frac{l}{L}; \tag{1}$$

$$\bar{T}_B = T_B\frac{\overline{BD}}{BD} = T_B[x_0\bar{i} - (l - x_0)\bar{j} + x_0\bar{k}]\frac{l}{L}; \tag{2}$$

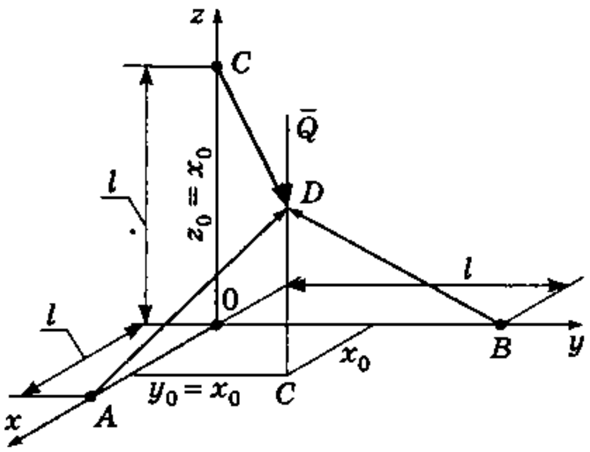
$$\bar{T}_C = T_C\frac{\overline{CD}}{CD} = T_C[x_0\bar{i} + x_0\bar{j} - (l - x_0)\bar{k}]\frac{l}{L}, \tag{3}$$

где $|AD| = |BD| = |CD| = \sqrt{2x_0^2 + (l - x_0)^2} = L.$

Запишем векторное равенство

$$\bar{T}_A + \bar{T}_B + \bar{T}_C + \bar{Q} = 0. \tag{4}$$

На основании выражний (1)–(4) придем к системе линейных алгебраических уравнений:



$$\begin{cases} T_A(x_0 - l) + T_B x_0 + T_C x_0 = 0, \\ T_A x_0 + T_B(x_0 - l) + T_C x_0 = 0, \\ T_A x_0 + T_B x_0 + T_C(x_0 - l) = QL. \end{cases}$$

Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0 - l & x_0 & x_0 \\ x_0 & x_0 - l & x_0 \\ x_0 & x_0 & x_0 - l \end{vmatrix} = l^2(3x_0 - l).$$

По правилу Крамера найдем:

$$T_A = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_0 & x_0 \\ 0 & x_0 - l & x_0 \\ QL & x_0 & x_0 - l \end{vmatrix}}{\Delta} = Q\frac{Lx_0}{(3x_0 - l)l};$$

$$T_B = \frac{\begin{vmatrix} x_0 - l & 0 & x_0 \\ x_0 & 0 & x_0 \\ x_0 & QL & x_0 - l \end{vmatrix}}{\Delta} = Q\frac{Lx_0}{(3x_0 - l)l};$$

$$T_C = \frac{\begin{vmatrix} x_0 - l & x_0 & 0 \\ x_0 & x_0 - l & 0 \\ x_0 & x_0 & QL \end{vmatrix}}{\Delta} = Q\frac{L(l - 2x_0)}{(3x_0 - l)l}.$$

В результате модули сил равны:

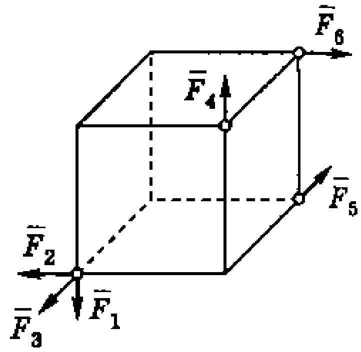
$$T_A = T_B = \frac{l - \sqrt{3L^2 - 2l^2}}{3l\sqrt{3L^2 - 2l^2}}LQ; \quad T_C = \frac{l + 2\sqrt{3L^2 - 2l^2}}{3l\sqrt{3L^2 - 2l^2}}LQ.$$

О т в е т: $T_A = T_B = \dfrac{l - \sqrt{3L^2 - 2l^2}}{3l\sqrt{3L^2 - 2l^2}}LQ$; $T_C = \dfrac{l + 2\sqrt{3L^2 - 2l^2}}{3l\sqrt{3L^2 - 2l^2}}LQ$.

7. Приведение системы сил к простейшему виду

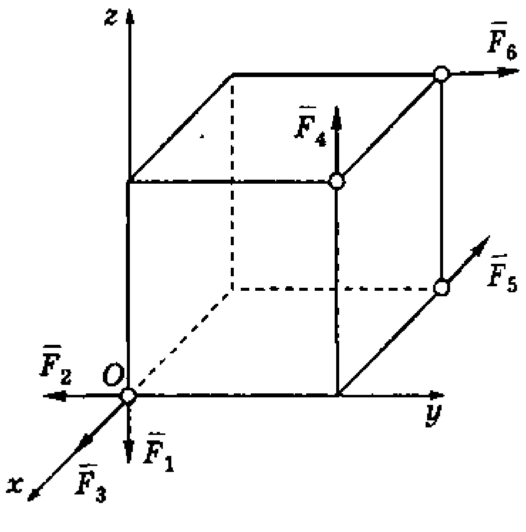
Задача 7.1

К вершинам куба приложены по направлениям ребер силы, как указано на рисунке. Каким условиям должны удовлетворять модули сил F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 и F_6, чтобы они находились в равновесии?



Решение

Определим для главного вектора $\bar{V}$ и главного момента $\bar{M}$ заданной системы сил их проекции на оси выбранной системы координат с центром в точке O (см. рисунок). Чтобы система сил находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент были равны нулю. Таким образом, получим систему уравнений вида



$$\begin{cases} V_x = \sum\limits_{k=1}^{6} F_{kx} = F_3 - F_5 = 0, \\ V_y = \sum\limits_{k=1}^{6} F_{ky} = F_6 - F_2 = 0, \\ V_z = \sum\limits_{k=1}^{6} F_{kz} = F_4 - F_1 = 0, \\ M_x = \sum\limits_{k=1}^{6} M_x(\overline{F}_k) = F_4 \cdot a - F_6 \cdot a = 0, \\ M_y = \sum\limits_{k=1}^{6} M_y(\overline{F}_k) = 0 = 0 \text{ (выполняется тождественно)}, \\ M_z = \sum\limits_{k=1}^{6} M_z(\overline{F}_k) = F_5 \cdot a - F_6 \cdot a. \end{cases}$$

Здесь a — сторона куба.

Получим

$$\begin{cases} F_3 = F_5, \\ F_6 = F_2, \\ F_4 = F_1, \\ F_4 = F_6, \\ F_5 = F_6. \end{cases}$$

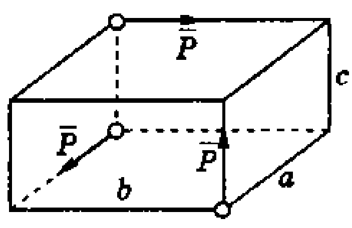
Следовательно,

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6.$$

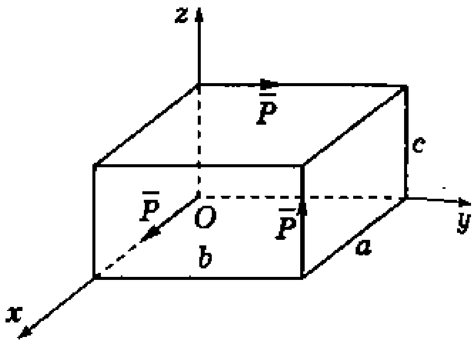
О т в е т: $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6$.

Задача 7.2

По трем непересекающимся и непараллельным ребрам прямоугольного параллелепипеда действуют три равные по модулю силы P. Какое соотношение должно существовать между ребрами a, b и c, чтобы эта система приводилась к одной равнодействующей?



Решение



Система сил, у которой главный вектор $\overline{R} \neq 0$ и главный момент $\overline{M}_O \neq 0$, приводится к равнодействующей в том случае, когда скалярное произведение главного вектора и главного момента равно нулю, т.е. $\overline{R} \cdot \overline{M}_O = 0$.

В качестве центра приведения выберем точку O и определим проекции главного вектора и главного момента на оси прямоугольной системы координат, проходящие через точку O (см. рисунок):

$$R_x = P;$$
$$R_y = P;$$
$$R_z = P;$$
$$M_x = Pb - Pc = 0;$$
$$M_y = -Pa;$$
$$M_z = 0.$$

Тогда

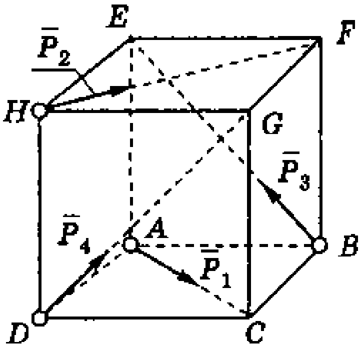
$$\overline{R} \cdot \overline{M} = R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = 0,$$

или

$$P^2(b-c) - P^2 a = 0 \Rightarrow a = b - c.$$

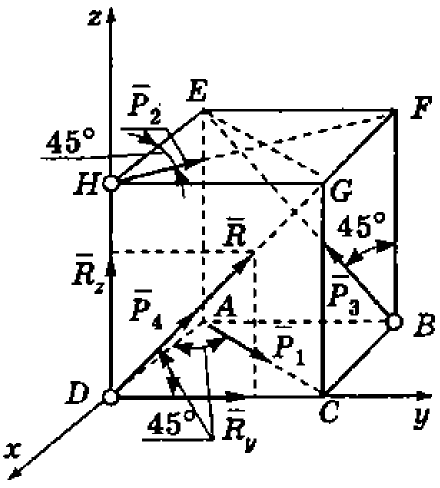
Ответ: $a = b - c$.

Задача 7.3



К четырем вершинам A, H, B и D куба приложены четыре равные по модулю силы: $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P$, причем сила P_1 направлена по AC, P_2 — по HF, P_3 — по BE и P_4 — по DG. Привести эту систему к простейшему виду.

Решение



В соответствии с рисунком найдем проекции главного вектора $\bar{R}$ и главного момента $\bar{M}$ на оси координат:

$$R_x = P_1 \cos 45° - P_2 \cos 45° = 0;$$

$$R_y = P_1 \sin 45° + P_2 \sin 45° -$$

$$- P_3 \sin 45° + P_4 \cos 45° = \sqrt{2} \cdot P;$$

$$R_z = P_4 \sin 45° + P_3 \cos 45° = \sqrt{2} \cdot P;$$

$$M_x = P_3 \cos 45° \cdot a - P_2 \sin 45° \cdot a = 0;$$

$$M_y = P_3 \cos 45° \cdot a - P_2 \cos 45° \cdot a = 0;$$

$$M_z = -P_3 \sin 45° \cdot a + P_1 \sin 45° \cdot a = 0.$$

Здесь a — длина стороны куба.

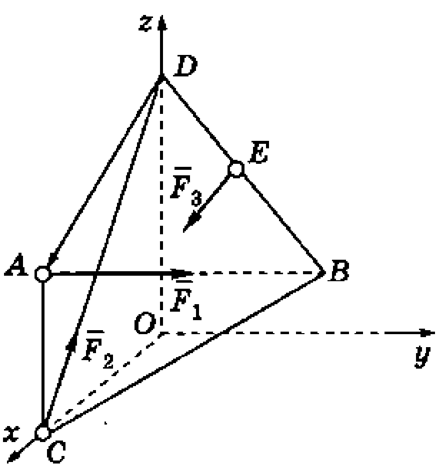
Так как главный момент оказался нулевым, то система привелась к равнодействующей

$$R = \sqrt{R_y^2 + R_z^2} = 2P,$$

направленной по диагонали DG.

Ответ: равнодействующая равна $2P$ и направлена по диагонали DG.

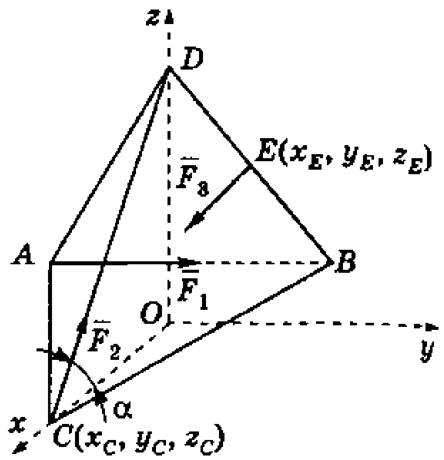
Задача 7.4



К правильному тетраэдру $ABCD$, ребра которого равны a, приложены силы: F_1 по ребру AB, F_2 по ребру CD, F_3 в точке E — середине ребра BD. Величины сил F_1 и F_2 какие угодно, а проекции силы F_3 на оси x, y и z равны $F_2 \cdot 5\sqrt{3}/6$, $-F_2/2$, $-F_2 \cdot \sqrt{2/3}$. Приводится ли эта система сил к одной равнодействующей? Если приводится, то найти координаты x и z точки пересечения линии действия равнодействующей с плоскостью Oxz.

Решение

Исходя из рисунка найдем проекции главного вектора $\overline{V}$ и главного момента $\overline{M}$ на координатные оси. Предварительно определим:



$$\sin\alpha = \frac{OD}{CD} = \frac{\sqrt{CD^2 - OC^2}}{CD} = \frac{\sqrt{a^2 - (a/\sqrt{3})^2}}{a} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\cos\alpha = \frac{OC}{CD} = \frac{a\sqrt{3}/3}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Тогда имеем:

$$V_x = F_2 \cdot 5\frac{\sqrt{3}}{6} - F_2\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}F_2;$$

$$V_y = F_1 - 0{,}5F_2;$$

$$V_z = F_2\sin\alpha - F_2\sqrt{\frac{2}{3}} = 0.$$

$$M_x = M_x(\overline{F}_3) = y_E F_{3z} - z_E F_{3y} = \frac{a}{4}\left(-F_2\sqrt{\frac{2}{3}}\right) - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}a\left(\frac{-F_2}{2}\right) = 0;$$

$$M_y = M_y(\overline{F}_2) + M_y(\overline{F}_3) = z_C F_{2x} - x_C F_{2z} + z_E F_{3x} - x_E F_{3z} =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}F_2 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}a\cdot\frac{5\sqrt{3}}{6}F_2 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}F_2\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{3}aF_2 + \frac{5}{12}\sqrt{2}aF_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}aF_2 = 0;$$

$$M_z = M_z(\overline{F}_1) + M_z(\overline{F}_3) = -F_1\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}a + x_E F_{3y} - y_E F_{3x} =$$

$$= -F_1\frac{\sqrt{3}}{6}a + \left(-\frac{\sqrt{3}}{12}a\right)\left(-\frac{1}{2}F_2\right) - \frac{a}{4}\frac{5\sqrt{3}}{6}\cdot F_2 =$$

$$= -F_1\frac{\sqrt{3}}{6}a - F_2\frac{\sqrt{3}}{6}a = -\frac{\sqrt{3}}{6}a(F_1 + F_2).$$

Так как $\bar{V} \cdot \bar{M} = V_x M_x + V_y M_y + V_z M_z = 0$, то система приводится к равнодействующей.

Поскольку $M_z = V_y \cdot x - V_x \cdot y$, то при $y = 0$ (плоскость Oxz) получим

$$x = \frac{M_z}{V_y} = -\frac{a\sqrt{3}(F_1 + F_2)}{6F_1 - 3F_2};\ z = 0,\ \text{так как } V_z = 0,$$

т.е. равнодействующая расположена в плоскости xOy.

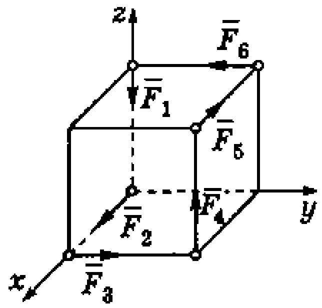
Ответ: приводится, так как проекции главного вектора и главного момента на координатные оси имеют значения $V_x = \frac{\sqrt{3}}{2} F_2$,

$V_y = F_1 - 0{,}5F_2,\ V_z = 0,\ M_x = 0,\ M_y = 0,\ M_z = -\frac{\sqrt{3}}{6} a(F_1 + F_2).$

Координаты: $x = \frac{M_z}{V_y} = -\frac{a\sqrt{3}(F_1 + F_2)}{6F_1 - 3F_2},\ z = 0.$

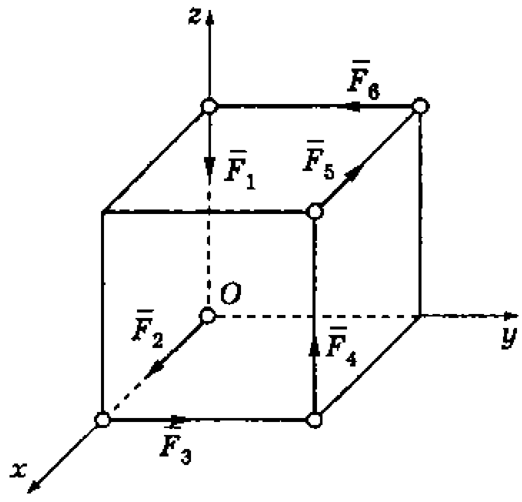
Задача 7.5

К вершинам куба, ребра которого имеют длину 5 см, приложены, как указано на рисунке, шесть равных по модулю сил, по 2 Н каждая. Привести эту систему к простейшему виду.



Решение

Исходя из рисунка найдем проекции главного вектора $\bar{R}$ и главного момента $\bar{M}$ на координатные оси:



$$R_x = F_2 - F_5 = 0;$$

$$R_y = F_3 - F_6 = 0;$$

$$R_z = F_4 - F_1 = 0;$$

$M_x = F_4 \cdot a + F_6 \cdot a = 2Fa = 20$ Н·см;

$$M_y = -F_4 \cdot a - F_5 \cdot a = -2Fa = -20 \text{ Н·см};$$

$$M_z = F_3 \cdot a + F_5 \cdot a = 2Fa = 20 \text{ Н·см}.$$

Следовательно,

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0;$$

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 20\sqrt{3} \text{ Н·см}.$$

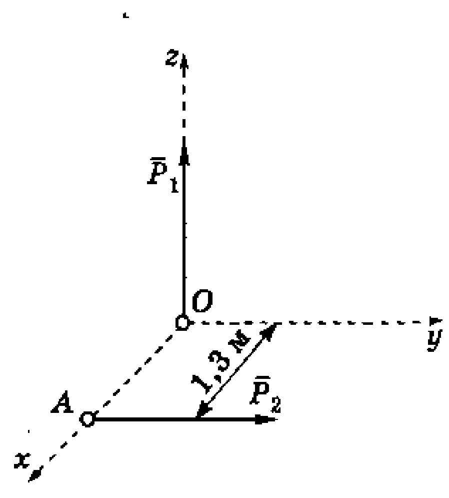
$$\cos\alpha = \frac{M_x}{M} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cos\beta = \frac{M_y}{M} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \cos\gamma = \frac{M_z}{M} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Здесь α, β, γ — углы вектора $\overline{M}_O$ с осями Ox, Oy и Oz соответственно.

Ответ: система приводится к паре, момент которой равен $20\sqrt{3}$ Н·см и составляет с координатными осями углы: $\cos\alpha = -\cos\beta = \cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

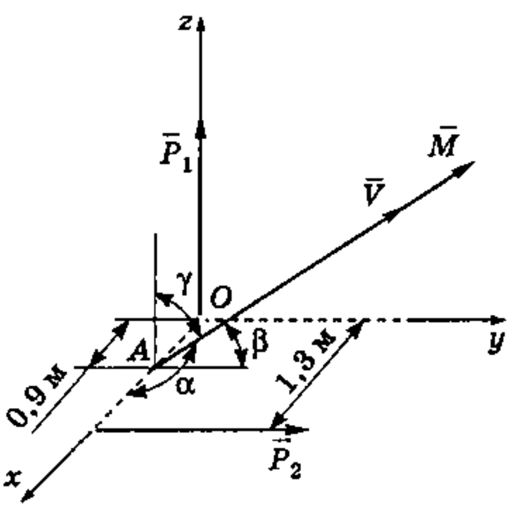
Задача 7.6

Систему сил $P_1 = 8$ Н, направленную по Oz, и $P_2 = 12$ Н, направленную параллельно Oy, как указано на рисунке, где $OA = 1{,}3$ м, привести к каноническому виду. Определить величину главного вектора V всех этих сил и величину их главного момента M относительно произвольной точки, взятой на центральной винтовой оси. Найти углы α, β и γ, составляемые центральной винтовой осью с координатными осями, а также координаты x и y точки встречи ее с плоскостью Oxy.



Решение

В соответствии с рисунком определим проекции на координатные оси главного вектора $\overline{V}$ системы сил и главного момента $\overline{M}$ относительно произвольной точки, взятой на центральной винтовой оси.



$$V_x = 0;$$

$$V_y = P_2 = 12 \text{ Н};$$

$$V_z = P_1 = 8 \text{ Н}.$$

$$M_x = 0;$$

$$M_y = 0;$$

$$M_z = P_2 \cdot OA = 15{,}6 \text{ Н}.$$

Вычислим модули этих векторов:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{12^2 + 8^2} = 14{,}4 \text{ Н};$$

$$M = \frac{\overline{V} \cdot \overline{M}}{V} = \frac{V_z M_z}{V} = \frac{8 \cdot 15{,}6}{14{,}4} = 8{,}65 \text{ Н}.$$

Углы α, β и γ, составляемые центральной винтовой осью с координатными осями, равны углам между главным вектором и осями. Так как

$$\cos\alpha = \frac{V_x}{V} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ,$$

то главный вектор находится в плоскости, параллельной zOy.

Найдем:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{V_x}{V_y} = \frac{2}{3} \Rightarrow \beta = \operatorname{arctg}\frac{2}{3},$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{V_y}{V_z} = \frac{2}{3} \Rightarrow \gamma = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}.$$

Уравнение центральной винтовой оси:

$$\frac{M_x-(yV_z-zV_y)}{V_x}=\frac{M_y-(zV_x-xV_z)}{V_y}=\frac{M_z-(xV_y-yV_x)}{V_z}=p,$$

где $p=\dfrac{M}{V}$.

В нашем случае уравнение примет вид

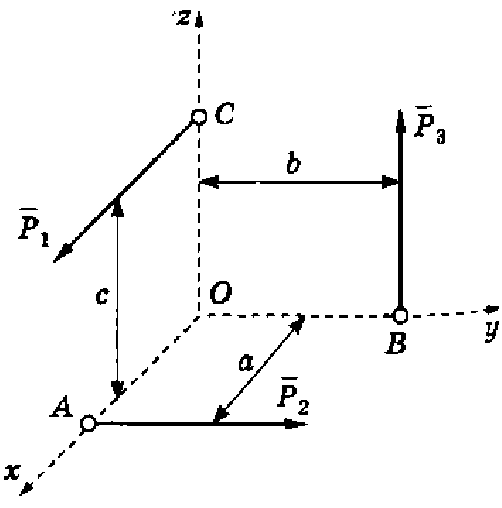
$$\begin{cases}-yV_z=V_x\cdot\dfrac{M}{V}\\ xV_z=V_y\cdot\dfrac{M}{V}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-y\cdot 8=0\\ x\cdot 8=12\cdot\dfrac{8{,}66}{14{,}4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0,\\ x=0{,}9.\end{cases}$$

Таким образом, искомые координаты: $x = 0{,}9$ м, $y = 0$ (точка A на рисунке).

Ответ: $V = 14{,}4$ Н; $M = 8{,}65$ Н; $\alpha=90°$; $\beta=\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}$; $\gamma=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}$;

$x = 0{,}9$ м; $y = 0$.

Задача 7.7



Три силы $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ и $\overline{P}_3$ лежат в координатных плоскостях и параллельны осям координат, но могут быть направлены как в ту, так и в другую сторону. Точки их приложения A, B и C находятся на заданных расстояниях a, b и c от начала координат. Какому условию должны удовлетворять величины этих сил, чтобы они приводились к одной равнодействующей? Какому условию должны удовлетворять величины этих сил, чтобы существовала центральная винтовая ось, проходящая через начало координат?

Р е ш е н и е

На основании рисунка найдем проекции главного вектора $\overline{V}$ и главного момента $\overline{M}$ заданной системы сил на координатные оси:

$$V_x = P_1,\ V_y = P_2,\ V_z = P_3;$$

$$M_x = P_3 b,\ M_y = P_1 c,\ M_z = P_2 a.$$

Чтобы система сил приводилась к равнодействующей, должно выполняться условие

$$\overline{V} \cdot \overline{M} = V_x M_x + V_y M_y + V_z M_z = 0.$$

Получим

$$P_1 \cdot P_3 b + P_2 \cdot P_1 c + P_3 \cdot P_2 a = 0,$$

или

$$\frac{a}{P_1} + \frac{b}{P_2} + \frac{c}{P_3} = 0.$$

Чтобы центральная винтовая ось проходила через начало координат, следует в уравнении этой оси положить $x = y = z = 0$. Получим

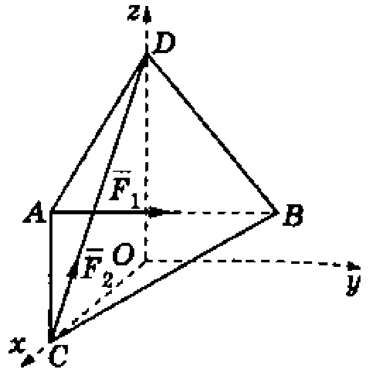
$$\frac{V_x}{M_x} = \frac{V_y}{M_y} = \frac{V_z}{M_z},$$

или

$$\frac{P_1}{bP_3} = \frac{P_2}{cP_1} = \frac{P_3}{aP_2}.$$

О т в е т: $\frac{a}{P_1} + \frac{b}{P_2} + \frac{c}{P_3} = 0$; $\frac{P_1}{bP_3} = \frac{P_2}{cP_1} = \frac{P_3}{aP_2}$, где P_1, P_2 и P_3 — величины проекций сил.

Задача 7.8



К правильному тетраэдру $ABCD$ с ребрами, равными a, приложена сила F_1 по ребру AB и сила F_2 по ребру CD. Найти координаты x и y точки пересечения центральной винтовой оси с плоскостью Oxy.

Решение

Уравнение центральной винтовой оси имеет вид

$$\frac{M_x-(yV_z-zV_y)}{V_x}=\frac{M_y-(zV_x-xV_z)}{V_y}=\frac{M_z-(xV_y-yV_x)}{V_z}=p, \qquad (1)$$

где $V_x, V_y, V_z, M_x, M_y, M_z$ — проекции главного вектора $\bar V$ и главного момента $\bar M$ на координатные оси; p — параметр винтовой оси.

Обозначим: $\alpha=\angle DCO$. В соответствии с рисунком вычислим:

$$\cos\alpha=\frac{OC}{CD}=\frac{\frac{2}{3}a\cos 30^\circ}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}; \qquad (2)$$

$$\sin\alpha=\frac{OD}{CD}=\frac{\sqrt{CD^2-OC^2}}{CD}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Тогда

$$V_x=-F_2\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}F_2, \quad V_y=F_1;$$

$$V_z=F_2\sin\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot F_2.$$

$$M_x=0,$$

$$M_y=-F_2\sin\alpha\cdot OC=-F_2\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{2}{3}\cdot a\frac{\sqrt{3}}{2}=-F_2\frac{\sqrt{2}}{3}a;$$

$$M_z = -F_1 \cdot \frac{1}{3} a \cos 30^\circ = -F_1 \frac{\sqrt{3}}{6} a.$$

$$p = \frac{\overline{V} \cdot \overline{M}}{V^2} = \frac{V_x M_x + N_y M_y + N_z M_z}{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = -\frac{F_1 F_2 a}{\sqrt{2}(F_1^2 + F_2^2)}. \qquad (3)$$

Из уравнения (1) с учетом выражений (2) и (3) при $z = 0$ получим

$$\begin{cases} -yV_z = pV_x \\ M_y + xV_z = pV_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{3} F_2}{\sqrt{\dfrac{2}{3}} \cdot F_2} \dfrac{F_1 F_2 a}{\sqrt{2}(F_1^2 + F_2^2)} \\ x \cdot \sqrt{\dfrac{2}{3}} F_2 = \dfrac{2}{3} F_2 a - \dfrac{F_1 F_2 a}{\sqrt{2}(F_1^2 + F_2^2)}. \end{cases}$$

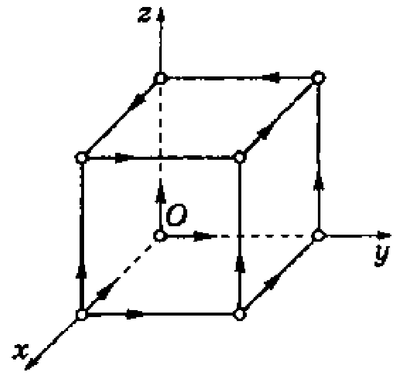
$$y = -\frac{a}{2} \frac{F_1 F_2}{F_1^2 + F_2^2};$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} a - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{F_1^2}{F_1^2 + F_2^2} a = \frac{a\sqrt{3}}{6} \left(2 - \frac{3F_1^2}{F_1^2 + F_2^2} \right) = \frac{a\sqrt{3}}{6} \frac{2F_2^2 - F_1^2}{F_1^2 + F_2^2}.$$

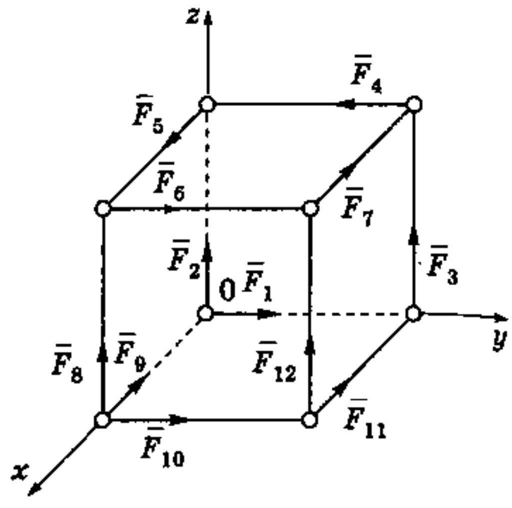
Ответ: $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \dfrac{2F_2^2 - F_1^2}{F_1^2 + F_2^2}$; $y = -\dfrac{a}{2} \dfrac{F_1 F_2}{F_1^2 + F_2^2}$.

Задача 7.9

По ребрам куба, равным a, действуют двенадцать равных по модулю сил P, как указано на рисунке. Привести эту систему сил к каноническому виду и определить координаты x и y точки пересечения центральной винтовой оси с плоскостью Oxy.



Р е ш е н и е



На основании рисунка определим проекции главного вектора $\overline{V}$ и главного момента $\overline{M}$ на координатные оси:

$$V_x = F_5 - F_7 - F_9 - F_{11} = -2P;$$

$$V_y = F_1 - F_4 + F_6 + F_{10} = 2P;$$

$$V_z = F_2 + F_3 + F_8 + F_{12} = 4P.$$

$$M_x = F_3 \cdot a + F_4 \cdot a - F_6 \cdot a + F_{12} \cdot a = 2Pa;$$

$$M_y = F_5 \cdot a - F_7 \cdot a - F_8 \cdot a - F_{12} \cdot a = -2Pa;$$

$$M_z = F_6 \cdot a + F_7 \cdot a + F_{10} \cdot a + F_{11} \cdot a = 4Pa.$$

Тогда

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{(-2P)^2 + (2P)^2 + (4P)^2} = 2P\sqrt{6}.$$

$$M = \frac{\overline{V} \cdot \overline{M}}{V} = \frac{-2P \cdot 2Pa - 2P \cdot 2Pa + 4P \cdot 4Pa}{2P\sqrt{6}} = \frac{8P^3 a}{2P\sqrt{6}} = \frac{2}{3} Pa\sqrt{6}.$$

Так как главный вектор является инвариантом, то направляющие косинусы винтовой оси равны направляющим косинусам главного вектора. Найдем эти направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{V_x}{V} = -\frac{2P}{2P\sqrt{6}} = -\frac{1}{6}\sqrt{6};$$

$$\cos\beta = \frac{V_y}{V} = \frac{2P}{2P\sqrt{6}} = \frac{1}{6}\sqrt{6};$$

$$\cos\gamma = \frac{V_z}{V} = \frac{4P}{2P\sqrt{6}} = \frac{1}{3}\sqrt{6},$$

или

$$\cos\alpha = -\cos\beta = -\frac{1}{2}\cos\gamma = -\frac{1}{6}\sqrt{6}.$$

Координаты пересечения центральной винтовой оси с плоскостью xOy ($z = 0$) найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} M_x - yV_z = V_x p, \\ M_y + xV_z = V_y p, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2Pa - y \cdot 4P = -2P\frac{1}{3}a, \\ -2Pa + x \cdot 4P = 2P\frac{1}{3}a. \end{cases}$$

Следовательно,

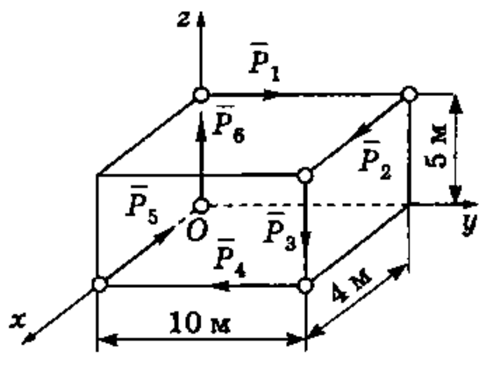
$$x = y = \frac{2}{3}a.$$

О т в е т: $V = 2P\sqrt{6}$; $M = \frac{2}{3}Pa\sqrt{6}$; $\cos\alpha = -\cos\beta = -\frac{1}{2}\cos\gamma = -\frac{1}{6}\sqrt{6}$;

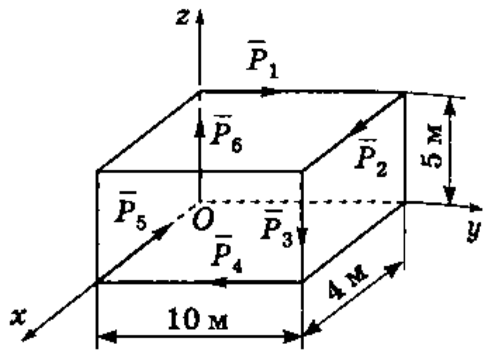
$$x = y = \frac{2}{3}a.$$

Задача 7.10

По ребрам прямоугольного параллелепипеда, соответственно равным 10 м, 4 м и 5 м, действуют шесть сил, указанных на рисунке: $P_1 = 4$ Н, $P_2 = 6$ Н, $P_3 = 3$ Н, $P_4 = 2$ Н, $P_5 = 6$ Н, $P_6 = 8$ Н. Привести эту систему сил к каноническому виду и определить координаты x и y точки пересечения центральной винтовой оси с плоскостью Oxy.



Р е ш е н и е



Исходя из рисунка найдем проекции главного вектора $\overline{V}$ и главного момента $\overline{M}$ на координатные оси:

$$V_x = P_2 - P_5 = 0;$$

$$V_y = P_1 - P_4 = 2 \text{ Н};$$

$$V_z = P_6 - P_3 = 5 \text{ Н};$$

$$M_x = -P_1 \cdot 5 - P_3 \cdot 10 = -50 \text{ Н·м};$$

$$M_y = P_2 \cdot 5 + P_3 \cdot 4 = 42 \text{ Н·м};$$

$$M_z = -P_2 \cdot 10 - P_4 \cdot 4 = -68 \text{ Н·м}.$$

Определим канонические параметры:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \approx 5{,}4 \text{ Н};$$

$$M = \frac{\overline{V} \cdot \overline{M}}{V} = \frac{0 \cdot (-50) + 2 \cdot 42 + 5 \cdot (-68)}{\sqrt{29}} \approx -47{,}5 \text{ Н·м}.$$

Так как главный вектор является инвариантом, то направляющие косинусы винтовой оси равны направляющим косинусам главного вектора:

$$\cos\alpha = \frac{V_x}{V} = 0; \quad \cos\beta = \frac{V_y}{V} = \frac{2}{5{,}4} = 0{,}37; \quad \cos\gamma = \frac{V_z}{V} = \frac{5}{5{,}4} = 0{,}93.$$

Координаты пересечения центральной винтовой оси с плоскостью Oxy ($z = 0$) найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} M_x - yV_z = V_x p, \\ M_y + xV_z = V_y p. \end{cases}$$

Здесь $p = \dfrac{M}{V} = -\dfrac{47{,}5}{5{,}4} = -8{,}8$ м — параметр винта.

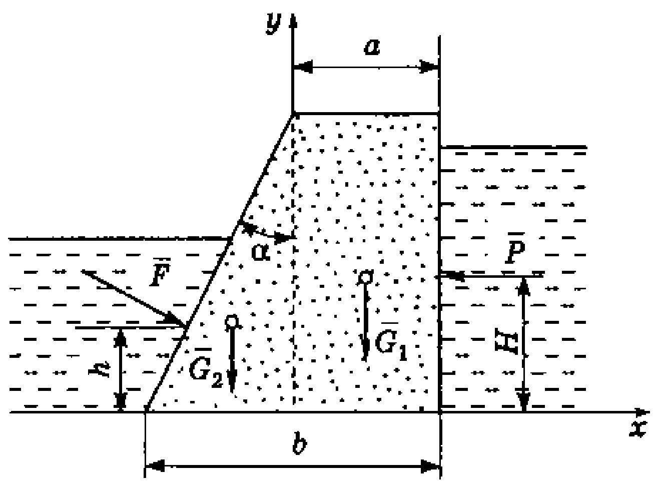
Подставляя числовые значения, получим

$$\begin{cases} -50 - y \cdot 5 = 0, \\ 42 + x \cdot 5 = 2 \cdot (8,8) \end{cases} \Rightarrow x = -11,9 \text{ м}, \ y = -10 \text{ м}.$$

Ответ: $V = 5,4$ Н; $M = -47,5$ Н·м; $\cos\alpha = 0$; $\cos\beta = 0,37$; $\cos\gamma = 0,93$; $x = -11,9$ м; $y = -10$ м.

Задача 7.11

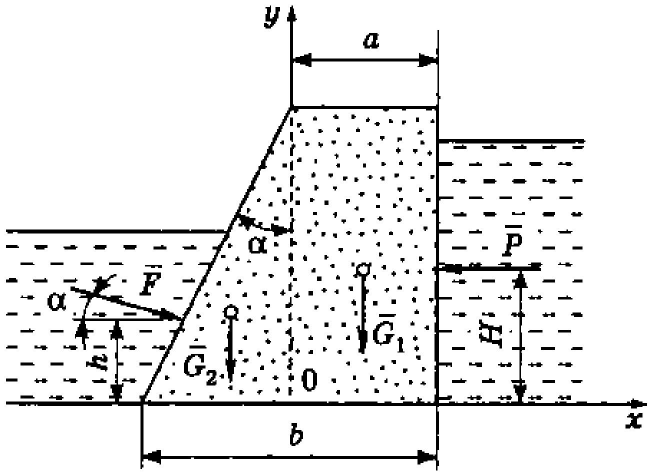
Равнодействующие $P = 8\ 000$ кН и $F = 5\ 200$ кН сил давления воды на плотину приложены в средней вертикальной плоскости перпендикулярно соответствующим граням на расстоянии $H = 4$ м и $h = 2,4$ м от основания. Сила веса $G_1 = 12\ 000$ кН прямоугольной части плотины приложена в ее центре, а сила веса $G_2 = 6\ 000$ кН треугольной части — на расстоянии одной трети нижнего основания треугольного сечения от вертикальной грани этого сечения. Ширина плотины в основании $b = 10$ м, в верхней части $a = 5$ м; $\text{tg}\alpha = 5/12$. Определить равнодействующую распределенных сил реакции грунта, на котором установлена плотина.



Решение

Покажем на рисунке действующие на плотину силы. Равнодействующая $\overline{R}$ распределенных сил реакции грунта, на котором установлена плотина, лежит в плоскости xy, численно равна и противоположна по направлению изображенной системе сил. На основании этого получим

$$R_x = -(-P + F\cos\alpha) = P - F\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = 8000 - 5200\cdot\frac{12}{13} = 3200 \text{ кН}.$$



Здесь было учтено, что

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{5^2}{12^2}}} = \frac{12}{\sqrt{12^2+5^2}} = \frac{12}{13}.$$

Так как

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\dfrac{5}{12}}{\sqrt{1+\dfrac{5^2}{12^2}}} = \frac{5}{13},$$

то

$$R_y = -(-G_1 - G_2 - F\sin\alpha) = 12\,000 + 6000 + 5200\cdot\frac{5}{13} = 20\,000 \text{ кН}.$$

Уравнение линии действия равнодействующей определим по формуле

$$xR_y - yR_x = M.$$

В нашем случае

$$M = G_1 \cdot \frac{a}{2} - P \cdot H - G_2 \cdot \frac{b-a}{3} +$$

$$+ F\cos\alpha \cdot h - F\sin\alpha(b - a - h\,\mathrm{tg}\,\alpha) =$$

$$= 12\,000 \cdot \frac{5}{2} - 8000 \cdot 4 - 6000 \cdot \frac{5}{3} + 5200 \cdot \frac{12}{13} \cdot 2{,}4 - 5200 \cdot \frac{5}{13}\left(10 - 5 - 2{,}4\frac{5}{12}\right) =$$

$$= 30\,000 - 32\,000 - 10\,000 + 11\,520 - 8\,000 = -8480 \text{ кН·м}.$$

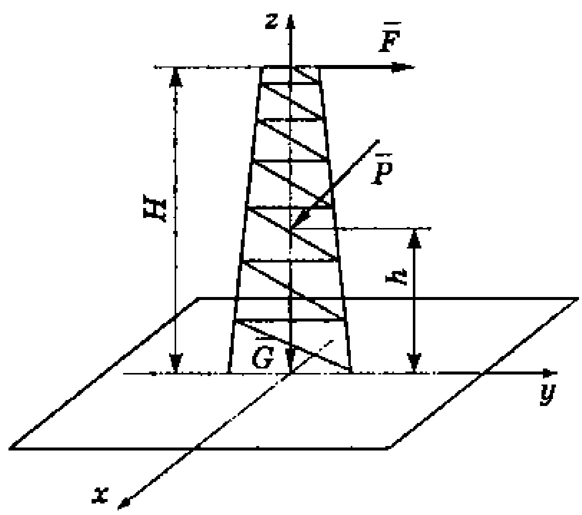
В результате получим уравнение линии

$$20\,000x - 3200y + 8480 = 0, \text{ или } 125x - 20y + 53 = 0.$$

О т в е т: $R_x = 3200$ кН, $R_y = 20000$ кН; уравнение линии действия равнодействующей: $125x - 20y + 53 = 0$.

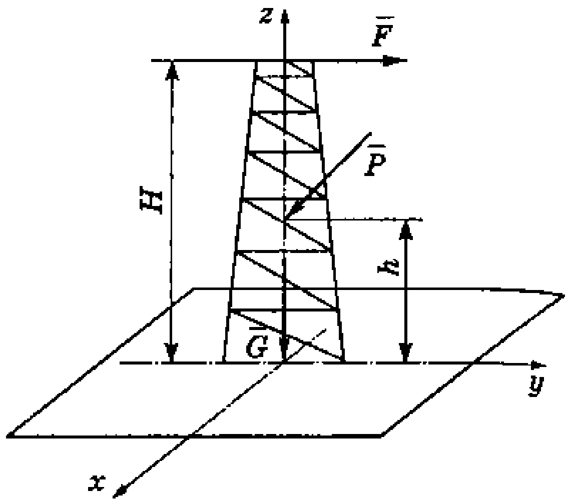
Задача 7.12

Вес радиомачты с бетонным основанием G = 140 Н. К мачте приложены сила натяжения антенны F = 20 кН и равнодействующая сил давления ветра P = = 50 кН; обе силы горизонтальны и расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях; H = 15 м, h = 6 м. Определить результирующую реакцию грунта, в котором уложено основание мачты.



Р е ш е н и е

Результирующая реакция грунта, в котором уложено основание мачты, должна уравновешивать главный вектор и главный момент действующей на мачту активной системы сил, изображенной на рисунке. Следовательно, если $\bar{V}'$ и $\bar{M}'$ — главный вектор и главный момент действующих на мачту сил, $\bar{V}$ и $\bar{M}$ — главный вектор и главный момент результирующей реакции грунта, то справедливо:



$$\bar{V} = -\bar{V}', \ \bar{M} = -\bar{M}'.$$

Определим проекции на оси координат векторов $\bar{V}$ и $\bar{M}$:

$$V_x = -V_x' = -P = -50 \text{ кН};$$

$$V_y = -V_y' = -F = -20 \text{ кН};$$

$$V_z = -V_z' = G = 140 \text{ кН};$$

$$M_x = -M_x' = FH = 300 \text{ кН·м};$$

$$M_y = -M_y' = -Ph = -300 \text{ кН·м};$$

$$M_z = -M_z' = 0.$$

Следовательно,

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{(-50)^2 + (-20)^2 + 140^2} = 150 \text{ кН};$$

$$M = \frac{V_x M_x + V_y M_y + V_z M_z}{V} = \frac{(-50)\cdot 300 + (-20)(-300)}{150} = -60 \text{ кН·м}.$$

Так как значение M получилось отрицательным, то динама будет левосторонней.

Уравнение центральной винтовой оси:

$$\frac{M_x - (yV_z - zV_y)}{V_x} = \frac{M_y - (zV_x - xV_z)}{V_y} = \frac{M_z - (xV_y - yV_x)}{V_z}.$$

Подставляя в него числовые значения, получим

$$\frac{300 - y\cdot 140 - 20z}{-50} = \frac{-300 + 50z + 140x}{-20} = \frac{20x - 50y}{140},$$

или

$$\frac{-30+14y+2z}{5}=\frac{30-5z-14x}{2}=\frac{-2x+5y}{-14}.$$

Найдем точку пересечения винтовой оси с плоскостью xy, т.е. с плоскостью основания мачты. Для этого в последнем уравнении положим $z=0$ и получим

$$\frac{-30+14y}{5}=\frac{30-14x}{2}=\frac{-2x+5y}{-14}.$$

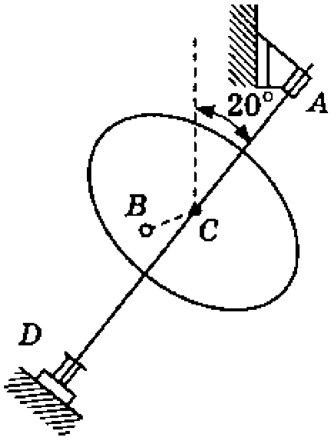
Решив данное уравнение, найдем: $x = 2{,}2$ м, $y = 2$ м.

Ответ: силы реакции грунта приводятся к левосторонней динаме, состоящей из силы $V = 150$ кН, направленной по центральной оси $\frac{-30+14y+2z}{5}=\frac{30-5z-14x}{2}=\frac{-2x+5y}{-14}$ вверх, и пары сил с моментом $M = -60$ кН·м. Ось динамы пересекает плоскость основания в точке $x = 2{,}2$ м, $y = 2$ м, $z = 0$.

8. Равновесие произвольной системы сил

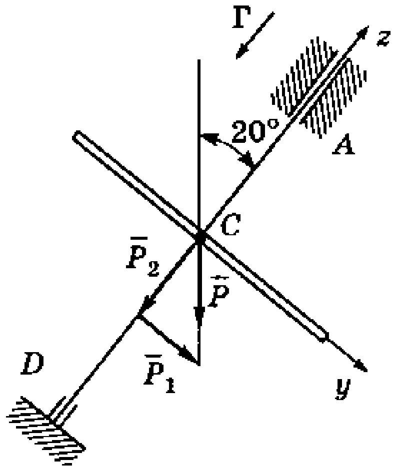
Задача 8.1

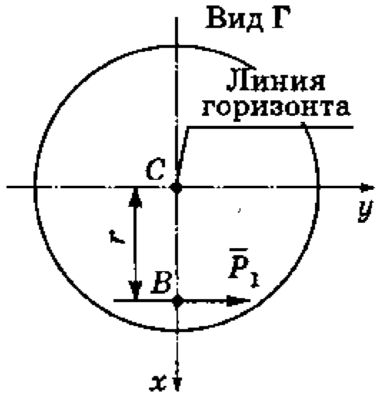
На круглой наклонной площадке, ось которой ACD наклонена к вертикали под углом 20°, укреплено в точке B тело весом 400 Н. Определить момент относительно оси AD, создаваемый силой тяжести тела, если радиус CB = 3 м горизонтален.



Решение

Для того чтобы определить величину момента относительно оси AD (см. рисунок), воспользуемся правилом двойного проектирования.





Разложив силу $\overline{P}$, получим

$$P_1 = P\sin 20°.$$

Так как радиус CB горизонтален, то момент относительно оси AD равен:

$$M_z = P_1 r = Pr\sin 20° = 400\cdot 3\cdot \sin 20° = 410 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Ответ: 410 Н·м.

Задача 8.2

Ветряной двигатель имеет четыре крыла, наклоненных под углом $\alpha = 15° = \arcsin 0{,}259$ к плоскости, перпендикулярной оси вращения; равнодействующая сил давления ветра на каждое крыло равна 1 кН, направлена по перпендикуляру к плоскости крыла и приложена в точке, отстоящей на 3 м от оси вращения. Найти вращающий момент.

Решение

Покажем данные условия задачи на рисунке.

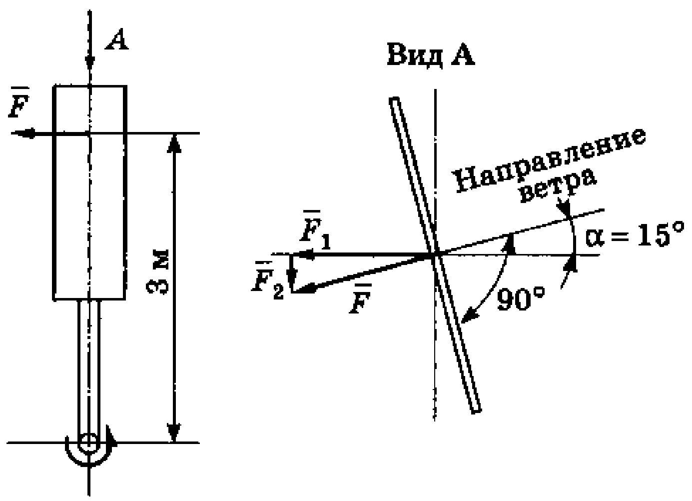
Разложим равнодействующую $\overline{F}$ сил давления ветра на крыло:

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2,$$

$$F_2 = F \sin 15°.$$

Вращающий момент одного крыла равен:

$$M = F_2 \cdot 3 = 3F \sin 15°.$$



Результирующий момент двигателя

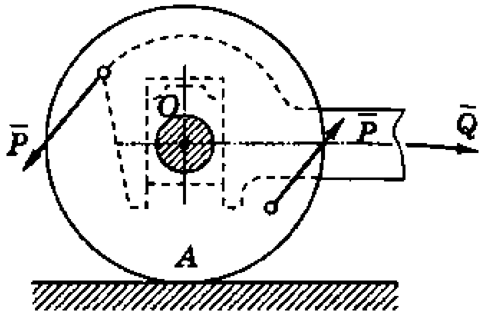
$$M_{вр} = 4M = 4 \cdot 3F \sin 15° = 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 0{,}259 = 3{,}11 \text{ кН·м}.$$

Ответ: 3,11 кН·м.

Примечание. В задачнике допущена опечатка в ответе.

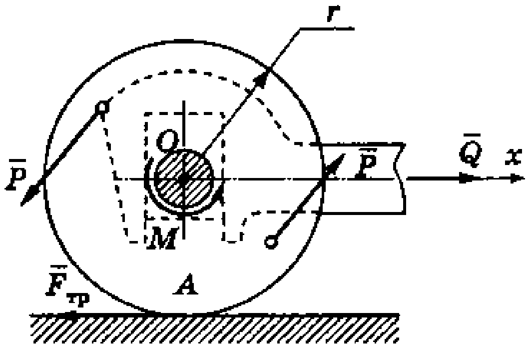
Задача 8.3

Электродвигатель, помещенный на оси O колесного ската трамвайного вагона, стремится повернуть ось против часовой стрелки, причем величина момента вращающей пары сил $(\bar{P}, \bar{P})$ равна 6 кН·м, а радиус колес 60 см. Определить силу тяги Q колесного ската, предполагая, что он стоит на горизонтальных рельсах. Трением качения пренебречь.



Решение

Сначала найдем силу трения между колесами и рельсами, взяв моменты сил относительно оси O (см. рисунок):



$$M - F_{тр} \cdot r = 0 \Rightarrow$$

$$F_{тр} = \frac{M}{r} = \frac{6}{0{,}6} = 10 \text{ кН}.$$

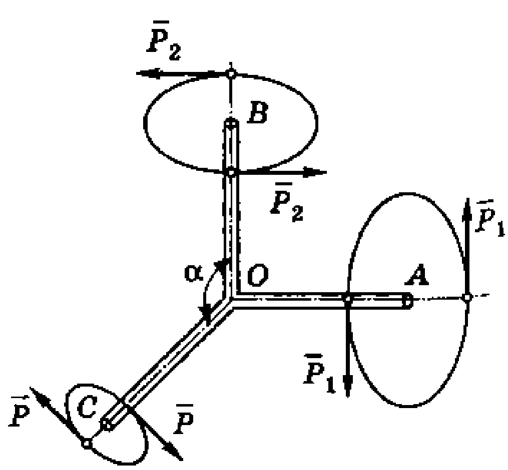
Затем спроецируем все силы, приложенные к колесному скату, на горизонтальное направление:

$$-F_{тр} + Q = 0 \Rightarrow Q = F_{тр} = 10 \text{ кН}.$$

Ответ: $Q = 10$ кН.

Задача 8.4

К окружностям трех дисков: A радиусом 15 см, B радиусом 10 см и C радиусом 5 см — приложены пары сил; величины сил, составляющих пары, соответственно равны $P_1 = 10$ Н, $P_2 = 20$ Н и P. Оси OA, OB и OC лежат в одной плоскости. Определить величину силы P и угол



$BOC = \alpha$ так, чтобы система трех дисков, будучи совершенно свободной, оставалась в равновесии.

Решение

Представим данные условия задачи на рисунке. Тогда

$$d_A = 2r_A = 30 \text{ см}; \ M_1 = P_1 d_A = 10 \cdot 30 = 300 \text{ Н·см};$$

$$d_B = 2r_B = 40 \text{ см}; \ M_2 = P_2 d_B = 20 \cdot 20 = 400 \text{ Н·см};$$

$$d_C = 2r_C = 10 \text{ см}; \ M_3 = P_3 d_C = P \cdot 10.$$

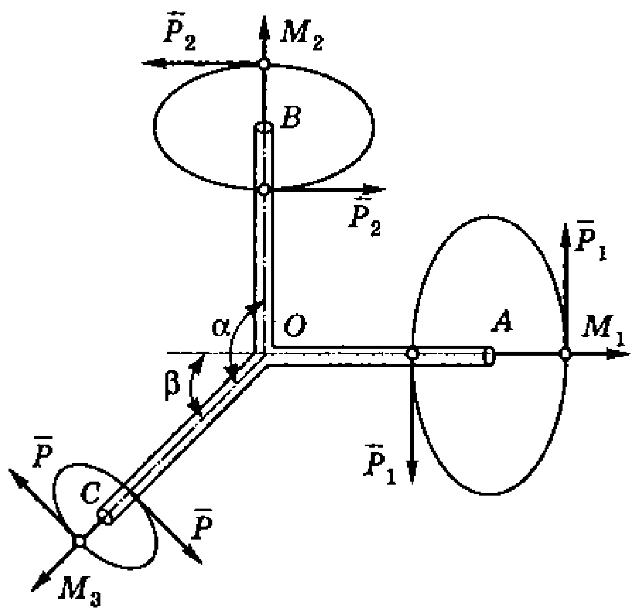
Система находится в равновесии, значит $\overline{M_1} + \overline{M_2} + \overline{M_3} = 0$. Так как эти три момента лежат в одной плоскости, то

$$\sqrt{M_1^2 + M_2^2} = \sqrt{M_3^2} \Rightarrow$$

$$M_3 = \sqrt{9 \cdot 10^4 + 16 \cdot 10^4} = 5 \cdot 10^2 = 500 \text{ Н·см},$$

следовательно,

$$P = \frac{M_3}{10} = 50 \text{ Н}.$$



Вычислим:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{M_2}{M_1} = \frac{400}{300} = \frac{4}{3}.$$

$$\beta = \alpha - 90 = -(90 - \alpha) \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}[-(90-\alpha)] = -\operatorname{ctg}\alpha; \text{ т.е. } \operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{ctg}\beta = -\frac{1}{\operatorname{tg}\beta} = -0{,}75.$$

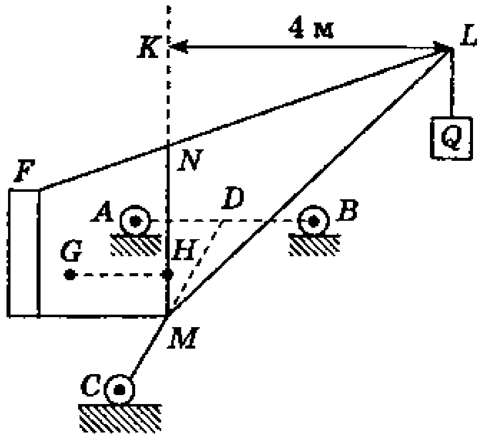
Тогда

$$\alpha = \operatorname{arctg}(-0{,}75) = 143°10'.$$

Ответ: P = 50 Н; $\alpha = \operatorname{arctg}(-0{,}75) = 143°10'$.

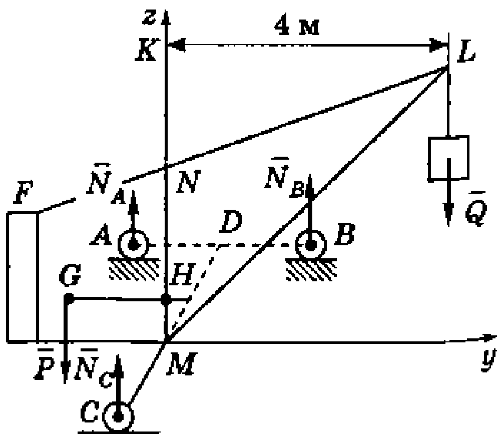
Задача 8.5

Подъемный кран установлен на трехколесной тележке ABC. Известны размеры крана: $AD = DB = 1$ м, $CD = 1{,}5$ м, $CM = 1$ м, $KL = 4$ м. Кран уравновешивается противовесом F. Вес крана с противовесом равен $P = 100$ кН и приложен в точке G, лежащей в плоскости $LMNF$ на расстоянии $GH = 0{,}5$ м от оси крана MN; поднимаемый груз Q весит 30 кН. Найти давление колес на рельсы для такого положения крана, когда плоскость его LMN параллельна AB.



Решение

Имеем пространственную систему параллельных сил, изображенную на рисунке, для которой составим три уравнения равновесия (в проекциях на ось z и для моментов относительно осей x и y):



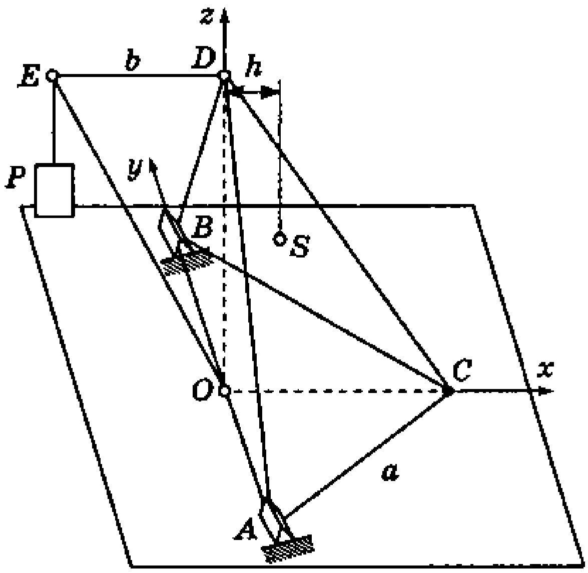
$$\begin{cases} N_A + N_B + N_C - P - Q = 0, \\ -N_A \cdot AD + N_B \cdot DB - \\ -Q \cdot KL + P \cdot GH = 0, \\ -N_C \cdot CM + (N_A + N_B)MD = 0. \end{cases}$$

Решив систему, получим

$$N_A = 8{,}33\text{ кН};\quad N_B = 78{,}33\text{ кН};\quad N_C = 43{,}33\text{ кН}.$$

Ответ: $N_A = 8{,}33$ кН; $N_B = 78{,}33$ кН; $N_C = 43{,}33$ кН.

Задача 8.6



Временный подъемный кран состоит из пирамиды с горизонтальным основанием в виде равностороннего треугольника ABC и с вертикальной гранью в виде равнобедренного треугольника ADB; в точках O и D шарнирно закреплена вертикальная ось крана, вокруг которой может вращаться стрела OE, несущая груз P. Основание ABC прикреплено к фундаменту подшипниками A и B и вертикальным болтом C. Определить реакции опор при расположении стрелы в плоскости симметрии крана, если вес груза $P = 12$ кН, вес крана $Q = 6$ кН, причем расстояние его центра тяжести S от оси OD равно $h = 1$ м, $a = 4$ м, $b = 4$ м.

Решение

Для системы заданных сил и реакций связей (см. рисунок) составим уравнения равновесия (в проекциях на оси x и z и для моментов относительно x, y, z):

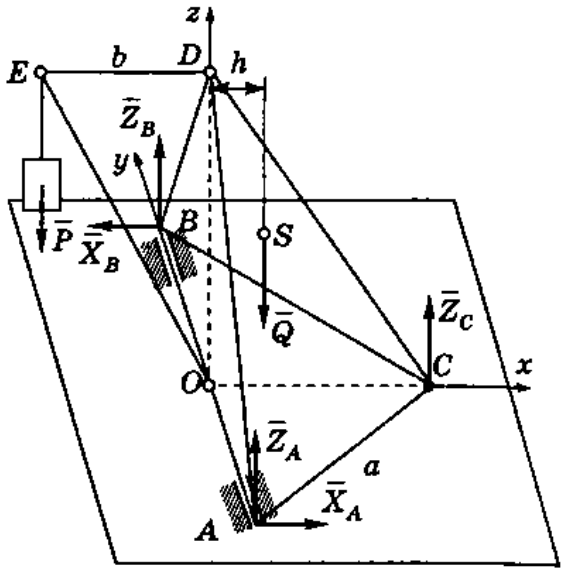
$$\begin{cases} X_A - X_B = 0, \\ Z_A + Z_B + Z_C - P - Q = 0, \\ Z_B \cdot \dfrac{a}{2} - Z_A \cdot \dfrac{a}{2} = 0, \\ Z_C \cdot a\cos 30^\circ - Q \cdot h + P \cdot b = 0, \\ X_A \cdot \dfrac{a}{2} + X_B \cdot \dfrac{a}{2} = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получим

$$X_A = X_B = 0;$$

$$Z_C = \frac{2(Qh - Pb)}{a\sqrt{3}} = -12{,}12 \text{ кН};$$

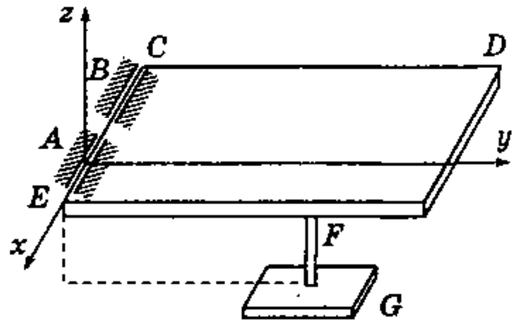
$$Z_B = Z_A = \frac{P + Q - Z_C}{2} = 15{,}06 \text{ кН}.$$



О т в е т: $Z_A = Z_B = 15{,}06$ кН;
$Z_C = -12{,}12$ кН;
$X_A = X_B = 0.$

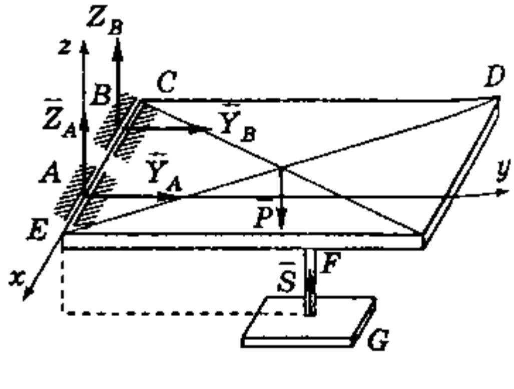
Задача 8.7

Крышка светового машинного люка удерживается в горизонтальном положении стойкой FG, упирающейся в крышку в точке F на расстоянии $EF = 1{,}5$ м от оси крышки. Вес крышки $P = 180$ Н; длина ее $CD = 2{,}3$ м; ширина $CE = 0{,}75$ м, а расстояния шарниров A и B от краев крышки $AE = BC = 0{,}15$ м. Найти реакции шарниров A и B и усилие S в стойке FG.



Р е ш е н и е

Изобразим на рисунке действующие на систему активные силы. Освободимся от связей, заменяя действие связей их реакциями, и для данной системы сил составим уравнения равновесия (для проекций на оси координат и для моментов относительно осей координат):



$$\begin{cases} 0=0 \ \text{(выполняется тождественно)}, \\ Y_A+Y_B=0, \\ Z_A+Z_B+S-P=0, \\ -P\cdot\dfrac{CD}{2}+S\cdot EF=0, \\ -S\cdot AE+Z_B\cdot AB-P\cdot\dfrac{AB}{2}=0, \\ Y_B\cdot AB=0. \end{cases}$$

Решая систему, найдем

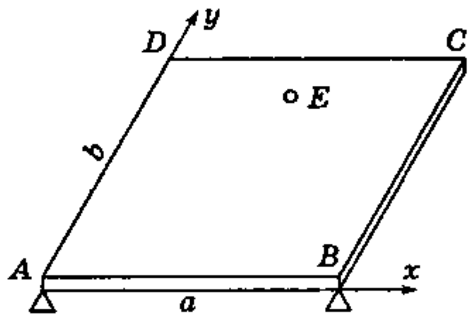
$$S=\frac{P\cdot CD}{2\cdot EF}=138 \text{ Н};$$

$$Z_B=\frac{1}{AB}\left(S\cdot AE+P\cdot\frac{AB}{2}\right)=136 \text{ Н};$$

$$Z_A=P-S-Z_B=-94 \text{ Н}; \quad Y_A=Y_B=0.$$

Ответ: $Z_A=-94$ Н; $Z_B=136$ Н; $Y_A=Y_B=0$; $S=138$ Н.

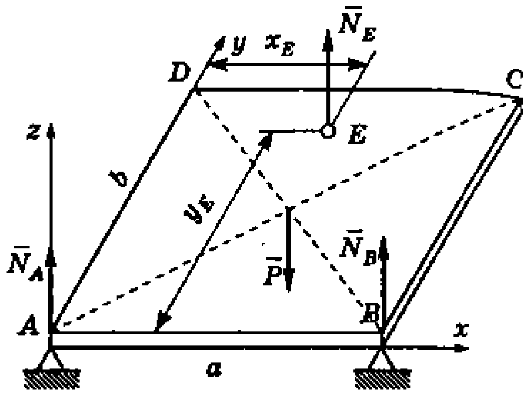
Задача 8.8



Однородная прямоугольная пластинка $ABCD$, опираясь на три точечные опоры, две из которых расположены в вершинах прямоугольника A и B, а третья — в некоторой точке E, удерживается в горизонтальном положении. Вес пластинки равен P. Давление на опоры в точках A и B соответственно равно $\dfrac{P}{4}$ и $\dfrac{P}{5}$. Найти давление N_E на опору в точке E и координаты этой точки, если длины сторон пластинки равны a и b.

Решение

Изобразим на рисунке действующие на плиту активные силы и реакции связей и для полученной системы параллельных сил составим уравнения равновесия (для проекций на ось z и для моментов относительно осей x и y):



$$\sum_k F_{kz} = 0;$$

$$N_A + N_B + N_E - P = 0, \qquad (1)$$

$$\sum_k M_x(F_k) = 0;$$

$$N_E \cdot y_E - P\frac{b}{2} = 0, \qquad (2)$$

$$\sum_k M_y(\bar{F}_k) = 0;$$

$$P\frac{a}{2} - N_E \cdot x_E - N_B \cdot a = 0. \qquad (3)$$

Из уравнения (1)

$$N_E = P - N_A - N_B = P - \frac{P}{4} - \frac{P}{5} = \frac{11}{20}P;$$

из уравнения (2)

$$y_E = \frac{Pb}{2} : \frac{11}{20}P = \frac{10}{11}b;$$

из уравнения (3)

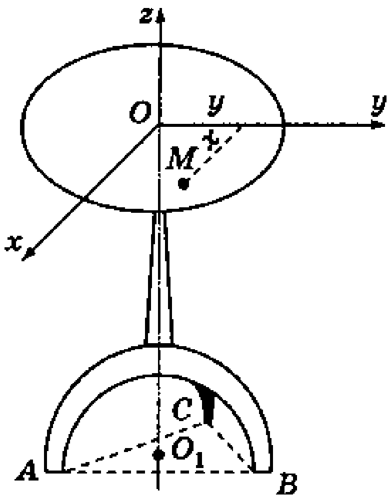
$$N_E x_E = \frac{a}{2}\left(P - \frac{2}{5}P\right)$$

или

$$N_E x_E = \frac{a}{2} \cdot \frac{3}{5}P \Rightarrow x_E = \frac{3}{10}Pa : \frac{11}{20}P = \frac{6}{11}a.$$

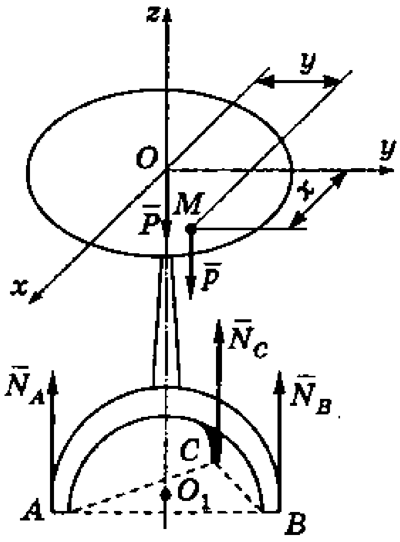
О т в е т: $N_E = \frac{11}{20}P$; $x_E = \frac{6}{11}a$; $y_E = \frac{10}{11}b$.

Задача 8.9



Стол стоит на трех ножках, концы которых A, B и C образуют равносторонний треугольник со стороной a. Вес стола равен P, причем центр тяжести его расположен на вертикали zOO_1, проходящей через центр O_1 треугольника ABC. На столе помещен груз p в точке M, координаты которой x и y; ось Oy параллельна AB. Определить давление каждой ножки на пол.

Решение



Для данной пространственной системы параллельно расположенных сил (см. рисунок) составим уравнения равновесия (для проекций на ось z и для моментов относительно x и y):

$$\begin{cases} N_A + N_B + N_C - P - p = 0, \\ N_B \dfrac{a}{2} - N_A \dfrac{a}{2} - py = 0, \\ -N_A \dfrac{a\sqrt{3}}{3} - N_B \dfrac{a\sqrt{3}}{6} + N_C \dfrac{a\sqrt{3}}{3} + px = 0. \end{cases}$$

Решив совместно полученную систему уравнений, найдем:

$$N_A = \frac{P+p}{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x - y\right)\frac{p}{a},$$

$$N_B = \frac{P+p}{3} + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{3}x\right)\frac{p}{a},$$

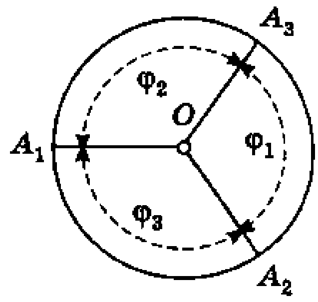
$$N_C = \frac{P+p}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{x}{a}p.$$

Ответ: $N_A = \dfrac{P+p}{3} + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}x - y\right)\dfrac{p}{a}$; $N_B = \dfrac{P+p}{3} + \left(y + \dfrac{\sqrt{3}}{3}x\right)\dfrac{p}{a}$;

$N_C = \dfrac{P+p}{3} - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\dfrac{x}{a}p.$

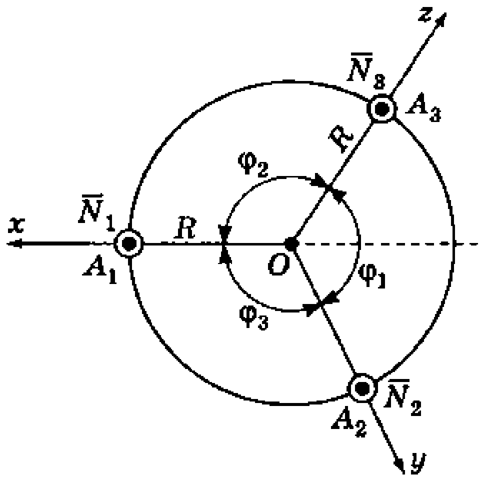
Задача 8.10

Круглый стол стоит на трех ножках A_1, A_2 и A_3; в центре O помещен груз. Какому условию должны удовлетворять центральные углы φ_1, φ_2 и φ_3 для того, чтобы давления на ножки A_1, A_2 и A_3 относились как $1 : 2 : \sqrt{3}$? (При решении задачи берутся моменты сил относительно двух из радиусов OA_1, OA_2 и OA_3.)



Решение

Изобразим на рисунке оси Ox, Oy и Oz и реакции ножек стола $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$ и $\overline{N}_3$.



Примечание. Условный знак ⦿ на рисунке обозначает, что силы $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$ и $\overline{N}_3$ перпендикулярны плоскости рисунка и направлены к нам.

Полагая $OA_1 = OA_2 = OA_3 = R$, составим уравнения моментов относительно осей Ox, Oy и Oz:

$$\begin{cases} N_2 R \sin(180^\circ - \varphi_3) - N_3 R \sin(180^\circ - \varphi_2) = 0, \\ -N_1 \cdot R \sin(180^\circ - \varphi_3) + N_3 \cdot R \sin(180^\circ - \varphi_1) = 0, \\ -N_2 \cdot R \sin(180^\circ - \varphi_1) + N_1 \cdot R \sin(180^\circ - \varphi_2) = 0. \end{cases}$$

Сокращая на R и учитывая, что $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} N_2 \sin\varphi_3 = N_3 \sin\varphi_2, \\ N_1 \sin\varphi_3 = N_3 \sin\varphi_1, \\ N_2 \sin\varphi_1 = N_1 \sin\varphi_2. \end{cases}$$

По условию задачи:

$$N_1 : N_2 : N_3 = 1 : 2 : \sqrt{3}.$$

Учитывая это соотношение, в последней системе разделим последовательно: второе уравнение — на первое, третье — на первое, третье — на второе. Получим:

$$\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}=\frac{N_1}{N_2}=\frac{1}{2};\quad \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_3}=\frac{N_1}{N_3}=\frac{1}{\sqrt{3}};\quad \frac{N_2\sin\varphi_1}{N_1\sin\varphi_3}=\frac{N_1\sin\varphi_2}{N_3\sin\varphi_1}.$$

Покажем, что последнее соотношение является следствием двух предыдущих. Действительно, подставляя в него $\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_3}=\frac{N_1}{N_3}$ и $\frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1}=\frac{N_2}{N_1}$, получим тождество

$$\frac{N_2}{N_1}\frac{N_1}{N_3}=\frac{N_1}{N_3}\frac{N_2}{N_1}$$

или

$$\frac{N_2}{N_3}=\frac{N_2}{N_3}.$$

Заменив третье уравнение системы на соотношение

$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=360^\circ,$$

окончательно запишем:

$$\begin{cases} 2\sin\varphi_1=\sin\varphi_2, & (1)\\ \sqrt{3}\sin\varphi_1=\sin\varphi_3, & (2)\\ \varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=360^\circ. & (3) \end{cases}$$

Решим данную систему. Для этого умножим правую и левую части уравнения (1) на $\cos\varphi_3$, а правую и левую части уравнения (2) — на $\cos\varphi_2$ и сложим их. Получим:

$$\sin\varphi_1(2\cos\varphi_3+\sqrt{3}\cos\varphi_2)=\sin\varphi_2\cos\varphi_3+\sin\varphi_3\cos\varphi_2,$$

или

$$\sin\varphi_1(2\cos\varphi_3+\sqrt{3}\cos\varphi_2)=\sin(\varphi_2+\varphi_3).$$

Учитывая (3), имеем

$$\sin(\varphi_2+\varphi_3)=\sin(360^\circ-\varphi_1)=-\sin\varphi_1.$$

Поэтому получим уравнение

$$\sin\varphi_1(2\cos\varphi_3+\sqrt{3}\cos\varphi_2)=-\sin\varphi_1,$$

$$\sin\varphi_1\neq 0\Rightarrow 2\cos\varphi_3+\sqrt{3}\cos\varphi_2=-1. \qquad (4)$$

Разделив (2) на (1), получим

$$\frac{\sin\varphi_3}{\sin\varphi_2}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

или

$$\sqrt{3}\sin\varphi_3-2\sin\varphi_2=0. \qquad (5)$$

Сведем соотношения (4) и (5) в систему

$$\begin{cases}\sqrt{3}\cos\varphi_2+2\cos\varphi_3=-1,\\ \sqrt{3}\sin\varphi_2-2\sin\varphi_3=0.\end{cases}$$

Возведя оба уравнения последней системы в квадрат и складывая, получим

$$3(\sin^2\varphi_2+\cos^2\varphi_2)+4\sqrt{3}\cos\varphi_2\cos\varphi_3-$$

$$-4\sqrt{3}\sin\varphi_2\sin\varphi_3+4(\sin^2\varphi_3+\cos^2\varphi_3)=1,$$

или

$$3+4\sqrt{3}(\cos\varphi_2\cos\varphi_3-\sin\varphi_2\sin\varphi_3)+4=1,$$

или

$$\cos(\varphi_2+\varphi_3)=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Существует два варианта решения:

1) $\varphi_2+\varphi_3=150^\circ$;

2) $\varphi_2+\varphi_3=210^\circ$.

В первом варианте $\varphi_1 = 210$, т.е. все три ножки стола расположены по одну сторону оси y, чего в действительности не может быть. Следовательно $\varphi_2 + \varphi_3 = 210 \Rightarrow$

$$\varphi_1 = 150°.$$

Тогда из (1) получим $\sin\varphi_2 = 1$, т.е.

$$\varphi_2 = 90°.$$

Из (2) $\Rightarrow \sin\varphi_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е.

$$\varphi_3 = 60°$$

или

$$\varphi_3 = 120°.$$

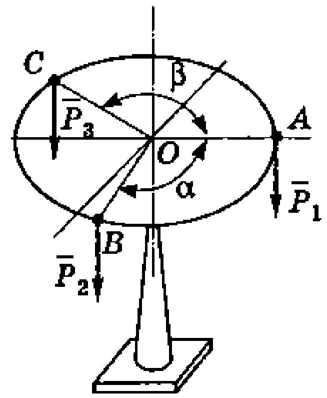
Выбираем $\varphi_3 = 120°$, так как

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 150° + 90° + 120° = 360°.$$

О т в е т: $\varphi_1 = 150°$; $\varphi_2 = 90°$; $\varphi_3 = 120°$.

Задача 8.11

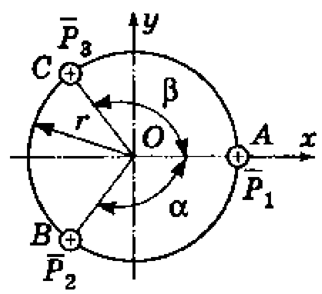
Круглая пластинка, весом которой пренебрегаем, покоится в горизонтальном положении, опираясь центром на острие O. Не нарушая равновесия, по окружности пластинки разместили грузы: P_1 весом 1,5 Н, P_2 весом 1 Н и P_3 весом 2 Н. Определить углы α и β.



Р е ш е н и е

Для определения углов α и β (см. рисунок) достаточно составить два уравнения равновесия (для моментов сил относительно осей x и y):

$$\begin{cases} -P_3 r\cos(\beta - 90°) + P_2 r\cos(\alpha - 90°) = 0, \\ P_1 r - P_3 r\sin(\beta - 90°) - P_2 r\sin(\alpha - 90°) = 0. \end{cases}$$



П р и м е ч а н и е. Условный знак $\oplus$ обозначает, что силы $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ и $\bar{P}_3$ перпендикулярны плоскости рисунка и направлены от нас.

Подставим в систему значения P_1, P_2, P_3 и после упрощения получим

$$\begin{cases} -2\sin\beta + \sin\alpha = 0, \\ 4\cos\beta + 2\cos\alpha = -3. \end{cases}$$

Из первого уравнения последней системы имеем

$$\sin^2\alpha = 4\sin^2\beta;$$

из второго —

$$\cos^2\alpha = \frac{(3+4\cos\beta)^2}{4}.$$

Сложим эти два уравнения. Так как $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то

$$4\sin^2\beta + \frac{9+24\cos\beta+15\cos^2\beta}{4} = 1,$$

$$4 = 16\sin^2\beta + 9 + 24\cos\beta + 16\cos^2\beta.$$

Приведя подобные и учитывая, что $16\sin^2\beta + 16\cos^2\beta = 16$, получим

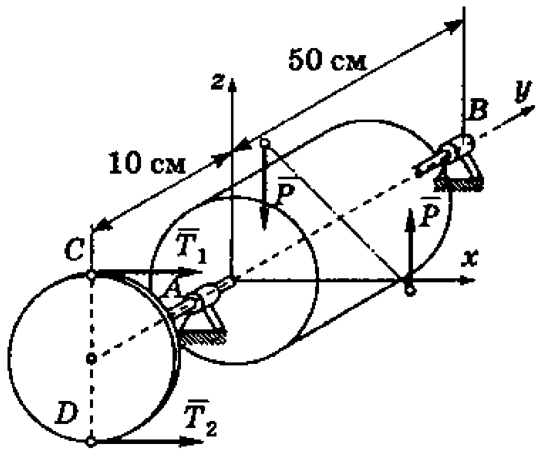
$$0 = 21 + 24\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = -\frac{7}{8}, \quad \beta = 151°;$$

$$\cos\alpha = \frac{-3-4\cos\beta}{2} = \frac{1}{4}, \; \alpha = 75°30'.$$

О т в е т: $\alpha = 75°30'$; $\beta = 151°$.

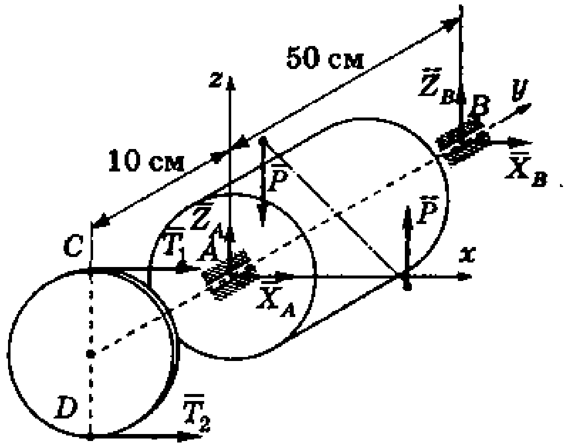
Задача 8.12

Ременный шкив CD динамо-машины имеет радиус 10 см; размеры вала AB указаны на рисунке. Натяжение верхней ведущей ветви ремня $T_1 = 100$ Н, нижней ведомой $T_2 = 50$ Н. Определить вращающий момент M и реакции подшипников A и B при равновесии системы, пренебрегая весом частей машины; $(\overline{P}, \overline{P})$ — пара, образуемая силами сопротивления.



Решение

Изобразим на рисунке действующие на систему активные силы. Освободимся от связей, заменяя действие связей их реакциями, а затем для данной системы сил составим уравнения равновесия (для проекций сил на оси координат и моментов сил относительно осей координат):



$$\begin{cases} X_A + X_B + T_1 + T_2 = 0, \\ 0 = 0 \text{ (выполняется тождественно)}, \\ Z_A + Z_B = 0, \\ Z_B \cdot 0,5 = 0, \\ T_1 \cdot 0,1 - T_2 \cdot 0,1 - M = 0, \\ -X_B \cdot 0,5 + T_1 \cdot 0,1 + T_2 \cdot 0,1 = 0. \end{cases}$$

Решив систему, найдем:

$$Z_A = Z_B = 0;$$

$$M = (T_1 - T_2) \cdot 0{,}1 = (100 - 50) \cdot 0{,}1 = 5 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

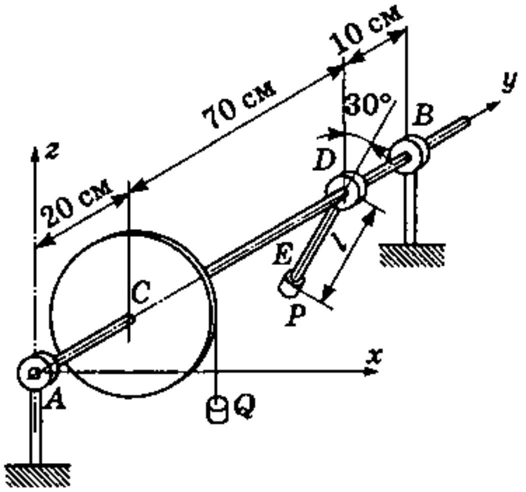
$$X_B = \frac{(T_1 + T_2) \cdot 0{,}1}{0{,}5} = \frac{150}{5} = 30 \text{ Н};$$

$$X_A = -(T_1 + T_2 + X_B) = -180 \text{ Н}.$$

О т в е т: $M = 5$ Н·м; $X_A = -180$ Н; $X_B = 30$ Н; $Z_A = Z_B = 0$.

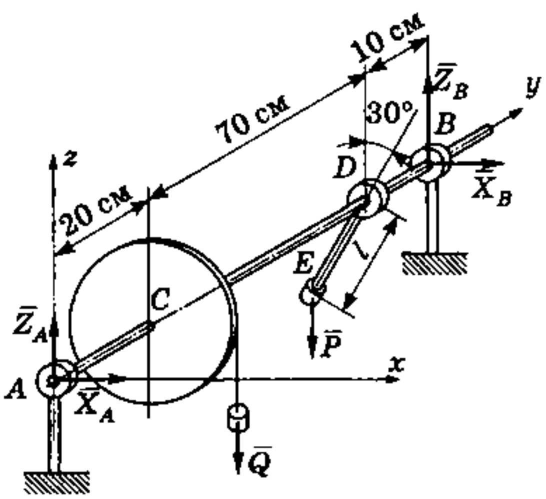
Задача 8.13

На горизонтальный вал, лежащий в подшипниках A и B, действуют: с одной стороны вес тела Q = = 250 Н, привязанного к шкиву C радиусом 20 см посредством троса, а с другой стороны вес тела P = = 1 кН, надетого на стержень DE, неизменно скрепленный с валом AB под прямым углом. Даны расстояния: AC = 20 см, CD = 70 см, BD = 10 см. В положении равновесия стержень DE отклонен от вертикали на угол 30°. Определить расстояние l центра тяжести тела P от оси вала AB и реакции подшипников A и B.



Р е ш е н и е

Изобразим на рисунке действующие на систему активные силы. Освободимся от связей, заменяя действие связей их реакциями. Для данной системы сил составим уравнения равновесия вала (в проекциях на оси координат и для моментов относительно осей координат):



$$\begin{cases} X_A + X_B = 0, \\ 0 = 0 \text{ (выполняется тождественно)}, \\ Z_A + Z_B - Q - P = 0, \\ -Q \cdot 20 - P \cdot 90 + Z_B \cdot 100 = 0, \\ Q \cdot r - P \cdot l \sin 30^\circ = 0, \\ -X_B \cdot 80 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, найдем:

$$Z_B = \frac{1}{100}(Q \cdot 20 + P \cdot 90) = \frac{1}{100}(250 \cdot 20 + 1000 \cdot 90) = 50 + 900 = 950 \text{ Н};$$

$$Z_A = Q + P - Z_B = 250 + 1000 - 950 = 300 \text{ Н};$$

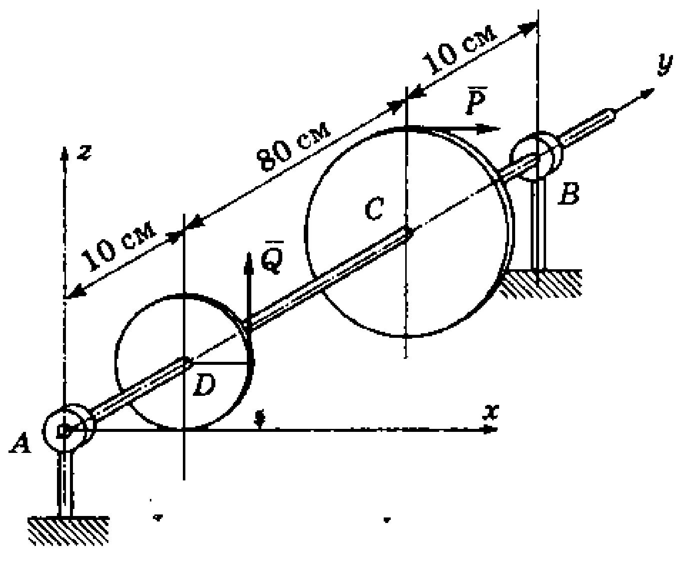
$$l = \frac{Q \cdot r}{P \sin 30^\circ} = \frac{250 \cdot 200}{1000 \cdot 0{,}5} = 10 \text{ см};$$

$$X_A = X_B = 0.$$

Ответ: $l = 10$ см; $Z_A = 300$ Н; $Z_B = 950$ Н; $X_A = X_B = 0$.

Задача 8.14

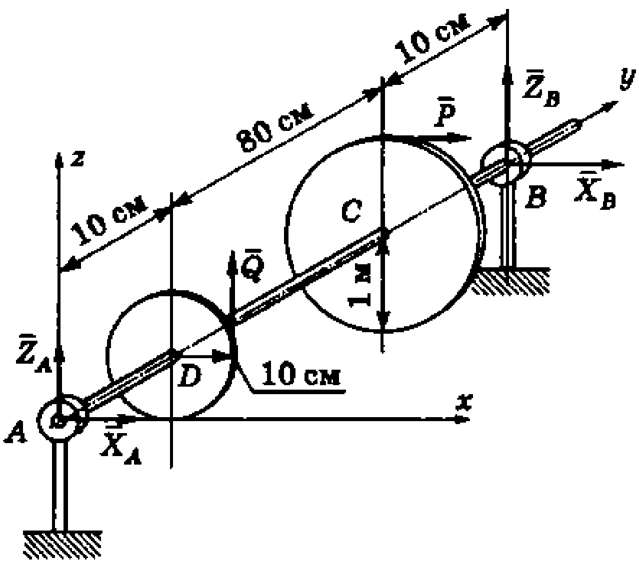
На горизонтальный вал AB насажены зубчатое колесо C радиусом 1 м и шестерня D радиусом 10 см. Другие размеры указаны на рисунке. К колесу C по направлению касательной приложена горизонтальная сила $P = 100$ Н, а к шестерне D, также по касательной, приложена вертикальная сила Q. Определить силу Q и реакции подшипников A и B в положении равновесия.



Решение

Изобразим на рисунке действующие на систему активные силы. Освободимся от связей, заменяя действие связей их реакциями. Для данной системы сил составим уравнения равновесия (в проекциях на оси координат и для моментов относительно осей x, y, z):

$$\begin{cases} X_A + X_B + P = 0, \\ 0 = 0 \text{ (выполняется тождественно)}, \\ Z_A + Z_B + Q = 0, \\ Q \cdot AD + Z_B \cdot AB = 0, \\ -Q \cdot 0{,}1 + P \cdot 1 = 0, \\ -X_B \cdot AB - P \cdot AC = 0. \end{cases}$$



Решая систему, получим

$$Q = \frac{100 \cdot 1}{0{,}1} = 1000 \text{ Н} = 1 \text{ кН},$$

$$Z_B = -\frac{Q \cdot AD}{AB} = -\frac{1000 \cdot 0{,}1}{1} = -100 \text{ Н},$$

$$X_B = -\frac{P \cdot AC}{AB} = -\frac{100 \cdot 0{,}9}{1} = -90 \text{ Н},$$

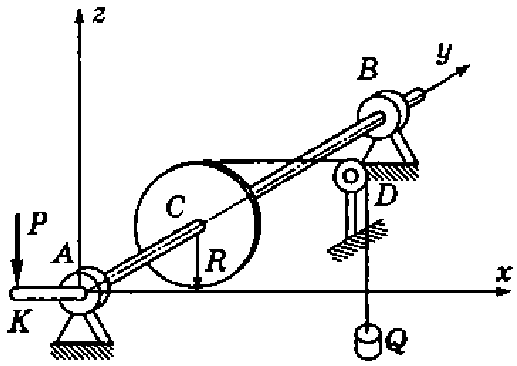
$$X_A = -P - X_B = -100 + 90 = -10 \text{ Н},$$

$$Z_A = -Q - Z_B = -1000 + 100 = -900 \text{ Н}.$$

Ответ: $Q = 1$ кН; $X_A = -10$ Н; $X_B = -90$ Н; $Z_A = -900$ Н; $Z_B = -100$ Н.

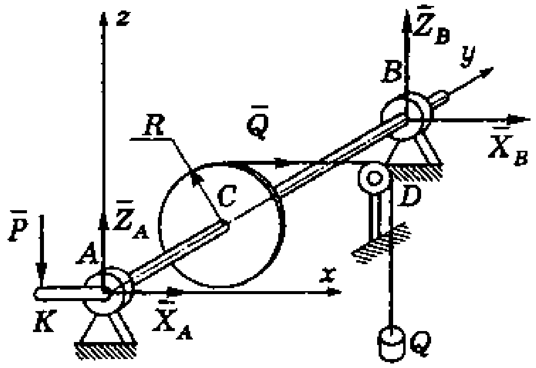
Задача 8.15

Рабочий удерживает груз $Q = 800$ Н с помощью ворота, схематически изображенного на рисунке; радиус барабана $R = 5$ см; длина рукоятки AK равна 40 см, $AC = CB = 50$ см. Определить давление P на рукоятку и давления оси ворота на опоры A и B при том положении ворота, когда рукоятка AK горизонтальна; сила P вертикальна.



Решение

Изобразим на рисунке действующие на систему активные силы. Освободимся от связей, заменяя действие связей их реакциями. Для данной системы сил составим уравнения равновесия (в проекциях на оси x и z и для моментов относительно осей x, y, z):



$$\begin{cases} X_A + X_B + Q = 0, \\ Z_A + Z_B - P = 0, \\ -Z_B \cdot AB = 0, \\ -P \cdot AK + Q \cdot R = 0, \\ -Q \cdot AC - X_B \cdot AB = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$Z_B = 0;$$

$$P = \frac{Q \cdot R}{AK} = \frac{800 \cdot 0{,}05}{0{,}4} = 100\ \text{Н};$$

$$X_B = -\frac{Q \cdot AC}{AB} = -\frac{800 \cdot 0{,}5}{1} = -400\ \text{Н};$$

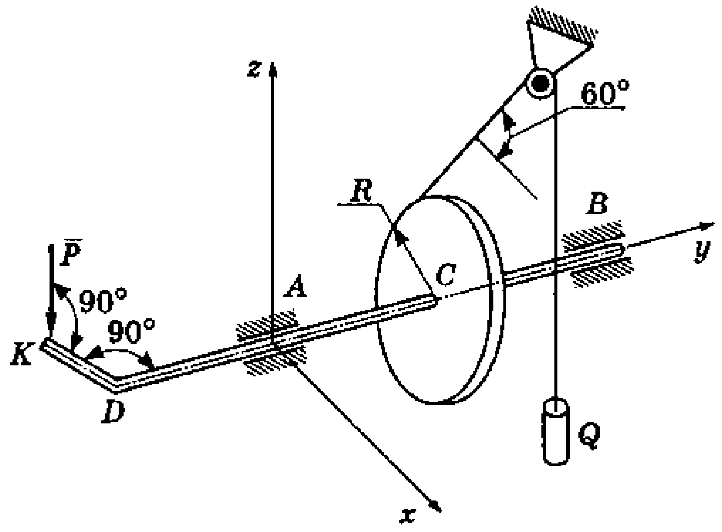
$$X_A = -Q - X_B = -800 + 400 = -400\ \text{Н};$$

$$Z_A = P - Z_B = -100\ \text{Н}.$$

Ответ: $P = 100$ Н; $X_A = -400$ Н; $Z_A = -100$ Н; $X_B = -400$ Н; $Z_B = 0$.

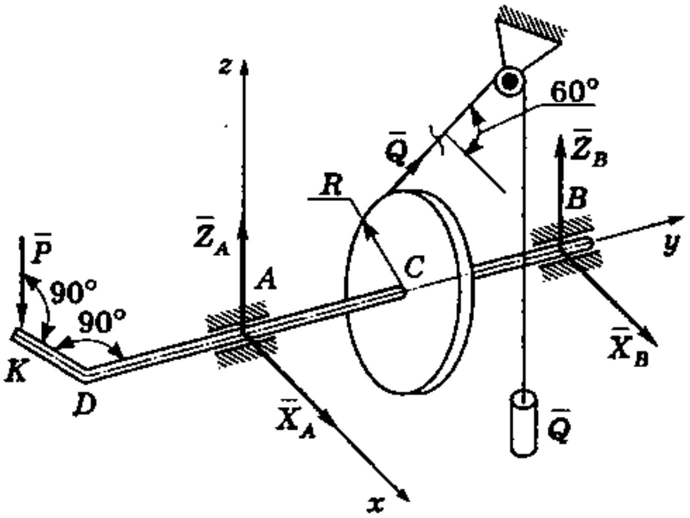
Задача 8.16

С помощью ворота, схематически изображенного на рисунке, удерживается груз $Q = 1$ кН. Радиус барабана $R = 5$ см. Длина рукоятки KD равна 40 см; $AD = 30$ см; $AC = 40$ см; $CB = 60$ см. Веревка сходит с барабана по касательной, наклоненной к горизонту под углом 60°. Определить давление P на рукоятку и реакции опор A и B при том положении ворота, когда рукоятка KD горизонтальна.



Решение

Изобразим на рисунке действующие на систему активные силы. Освободимся от связей, заменяя действие связей их реакциями.



Для данной системы сил составим уравнения равновесия (в проекциях на оси x, z и для моментов относительно осей x, y, z):

$$\begin{cases} X_A + X_B + Q\cos 60° = 0, \\ Z_A + Z_B - P + Q\cos 30° = 0, \\ P \cdot AD + Z_B \cdot AB + Q \cdot \cos 30° \cdot AC = 0, \\ -P \cdot KD + Q \cdot R = 0, \\ -X_B \cdot AB - Q\cos 60° \cdot AC = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получим

$$P = \frac{Q \cdot R}{KD} = \frac{1000 \cdot 0{,}05}{0{,}4} = 125 \text{ Н};$$

$$X_B = -\frac{Q\cos 60° \cdot AC}{AB} = -\frac{1000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4}{1} = -200 \text{ Н};$$

$$X_A = -Q\cos 60° - X_B = -1000 \cdot 0{,}5 + 200 = -300 \text{ Н};$$

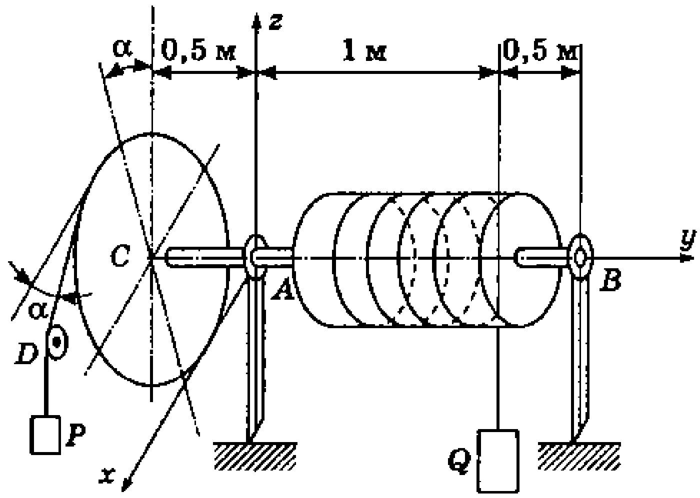
$$Z_B = -\frac{P \cdot AD + Q\cos 30° \cdot AC}{AB} = -\frac{125 \cdot 0{,}3 + 1000 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}4}{1} = -384 \text{ Н};$$

$$Z_A = P - Z_B - Q\cos 30° = 125 + 384 - 866 = -357 \text{ Н}.$$

Ответ: $P = 125$ Н; $X_A = -300$ Н; $Z_A = -357$ Н; $X_B = -200$ Н; $Z_B = -384$ Н.

Задача 8.17

На вал AB ворота намотана веревка, поддерживающая груз Q. Радиус колеса C, насаженного на вал, в шесть раз больше радиуса вала; другие размеры указаны на рисунке. Веревка, намотанная на окружность колеса и натягиваемая грузом P весом 60 Н, сходит с колеса по касательной, наклоненной к горизонту под углом $\alpha = 30°$. Определить вес груза Q, при котором ворот остается в равновесии, а также реакции подшипников A и B, пренебрегая весом вала и трением на блоке D.

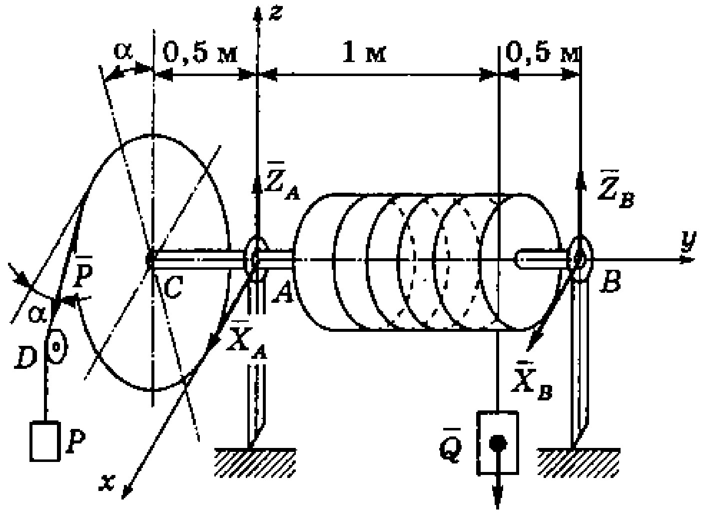


Решение

Изобразим на рисунке действующие на систему активные силы, при этом освободимся от связей, заменяя действие связей их реакциями. Для данной системы сил составим уравнения равновесия (в проекциях на оси x, z и для моментов относительно x, y, z):

$$\begin{cases} X_A + X_B + P\cos 30° = 0, \\ Z_A + Z_B - Q - P\sin 30° = 0, \\ -Q\cdot 1 + Z_B\cdot 1{,}5 + P\cdot\sin 30°\cdot 0{,}5 = 0, \\ P\cdot 6r - Q\cdot r = 0, \\ -X_B\cdot 1{,}5 + P\cos 30°\cdot 0{,}5 = 0, \end{cases}$$

здесь r — радиус вала.



Решая систему, получим

$$Q = \frac{P \cdot 6r}{r} = 60 \cdot 6 = 360 \text{ Н};$$

$$X_B = \frac{P \cdot \cos 30° \cdot 0,5}{1,5} \approx \frac{60 \cdot 0,866 \cdot 0,5}{1,5} = 17,3 \text{ Н};$$

$$X_A = -X_B - P\cos 30° = 17,3 - 60 \cdot 0,866 = -69,3 \text{ Н};$$

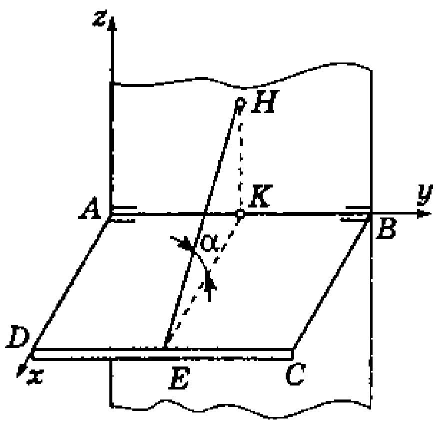
$$Z_B = \frac{Q \cdot 1 - P\sin 30° \cdot 0,5}{1,5} = \frac{360 - 60 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5}{1,5} = 230 \text{ Н};$$

$$Z_A = Q + P\sin 30° - Z_B = 360 + 60 \cdot 0,5 - 230 = 160 \text{ Н}.$$

О т в е т: $Q = 360$ Н; $X_A = -69,3$ Н; $Z_A = 160$ Н; $X_B = 17,3$ Н; $Z_B = 230$ Н.

Задача 8.18

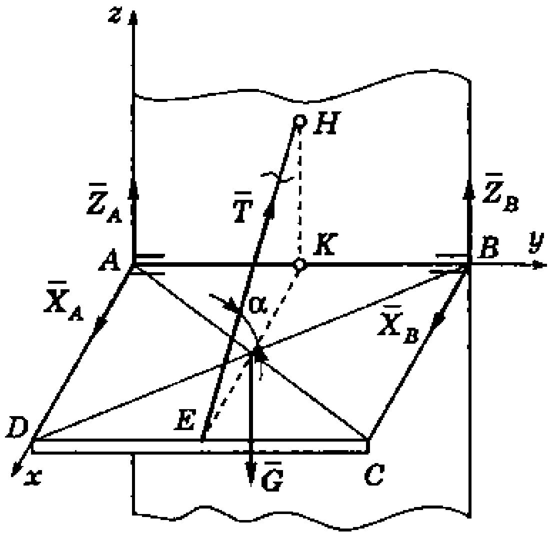
Прямоугольная однородная полка $ABCD$ весом G удерживается в горизонтальном положении тросом EH, составляющим с плоскостью полки угол α. Определить натяжение T троса (весом его пренебречь) и реакции петель A и B, если $AK = KB = DE = EC$ и HK перпендикулярно AB.



Решение

Изобразим на рисунке действующие на систему активные силы, при этом освободимся от связей, заменяя действие связей их реакциями. Для данной системы сил составим уравнения равновесия (в проекциях на оси x, z и для моментов относительно осей x, y, z):

$$\begin{cases} X_A + X_B - T\cos\alpha = 0, \\ Z_A + Z_B - G + T\sin\alpha = 0, \\ -G\cdot\dfrac{AB}{2} + T\sin\alpha\cdot\dfrac{AB}{2} + Z_B AB = 0, \\ G\cdot\dfrac{CB}{2} - T\sin\alpha\cdot CB = 0, \\ -X_B\cdot AB + T\cos\alpha\cdot\dfrac{AB}{2} = 0. \end{cases}$$



Решая систему, получим

$$T = \frac{G}{2\sin\alpha};$$

$$X_B = \frac{T\cos\alpha}{2} = \frac{G\cos\alpha}{4\sin\alpha} = \frac{G\operatorname{ctg}\alpha}{4};$$

$$Z_B = \frac{G}{2} - \frac{T\sin\alpha}{2} = \frac{G}{2} - \frac{G\sin\alpha}{2\cdot 2\sin\alpha} = \frac{G}{4};$$

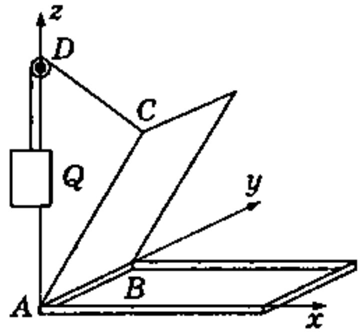
$$X_A = T\cos\alpha - X_B = \frac{G\cos\alpha}{2\sin\alpha} - \frac{G\operatorname{ctg}\alpha}{4} = \frac{G\operatorname{ctg}\alpha}{4}.$$

$$Z_A = G - Z_B - T\sin\alpha = G - \frac{G}{4} - \frac{G\sin\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{G}{4}.$$

Ответ: $T = \dfrac{G}{2\sin\alpha}$; $X_A = X_B = \dfrac{G}{4}\operatorname{ctg}\alpha$; $Z_A = Z_B = \dfrac{G}{4}$.

Задача 8.19

Однородная прямоугольная крышка весом $P = 400$ Н удерживается приоткрытой на 60° над горизонтом противовесом Q. Определить, пренебрегая трением на блоке D, вес Q и реакции шарниров A и B, если блок D укреплен на одной вертикали с A и $AD = AC$.



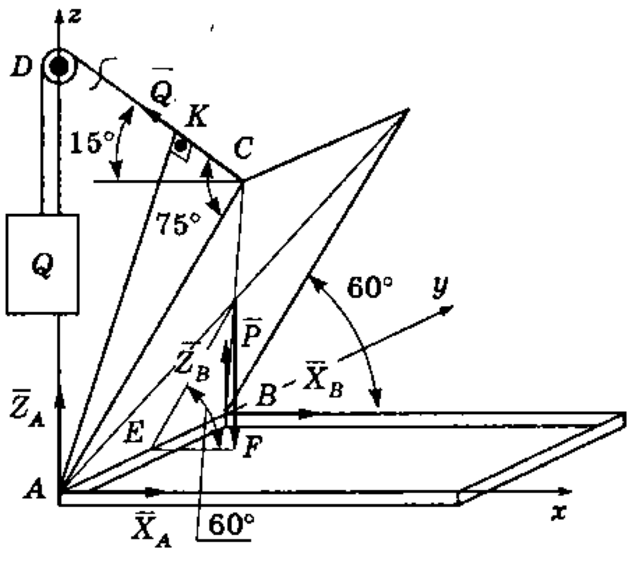
Решение

Из геометрических соображений: треугольник ADC — равнобедренный, $\angle DAC = 90° - 60° = 30°$, следовательно, углы при основании DC равны 75°.

$$EF = \frac{AC}{2}\cos 60°,\ AK = AC \cdot \sin 75°.$$

Изобразим на рисунке действующие на систему активные силы, при этом освободимся от связей, заменяя действие связей их реакциями. Для данной системы сил составим уравнения равновесия (в проекциях на оси x, z и для моментов относительно осей x, y, z):

$$\begin{cases} X_A + X_B - Q\cos 15° = 0, \\ Z_A + Z_B - P + Q\cos 75° = 0, \\ -P \cdot \dfrac{AB}{2} + Z_B \cdot AB = 0, \\ -Q \cdot AK + P \cdot EF = 0, \\ -X_B \cdot AB = 0. \end{cases}$$



Решая систему, получим

$$Z_B = \frac{P}{2} = 200 \text{ Н};$$

$$Q = \frac{P \cdot EF}{AK} = \frac{400 \cdot \dfrac{1}{4}}{\sin 75°} = \frac{100}{\sin 75°} = \frac{100}{0{,}98} = 104 \text{ Н};$$

$$X_B = 0;$$

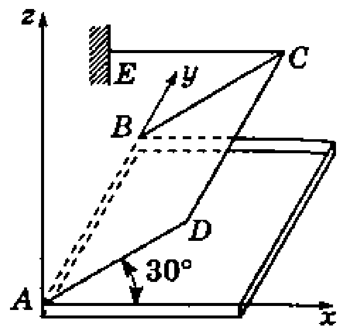
$$X_A = Q\cos 15^\circ - X_B = 104 \cdot 0{,}98 = 100\ \text{Н};$$

$$Z_A = P - Q\cos 75^\circ - Z_B = 400 - 104 \cdot 0{,}15 - 200 = 173\ \text{Н}.$$

О т в е т: $Q = 104$ Н; $X_A = 100$ Н; $Z_A = 173$ Н; $X_B = 0$; $Z_B = 200$ Н.

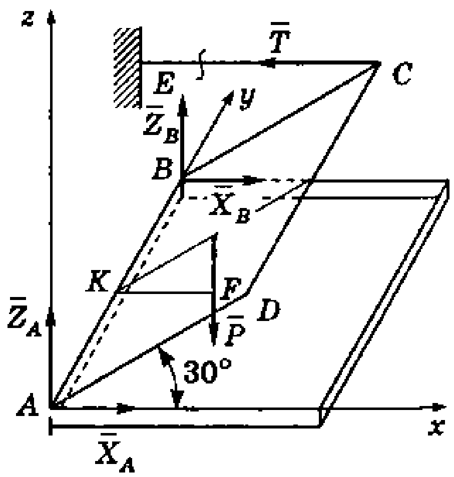
Задача 8.20

Однородная прямоугольная крышка $ABCD$ ящика может вращаться вокруг горизонтальной оси AB на петлях в точках A и B. Горизонтальная веревка CE, параллельная Ax, удерживает крышку под углом $DAx = 30°$. Определить реакции в петлях, если вес крышки 20 Н.



Р е ш е н и е

Изобразим на рисунке действующие на систему активные силы, при этом освободимся от связей, заменяя действие связей их реакциями. Для данной системы сил составим уравнения равновесия (в проекциях на оси x, z и для моментов относительно осей x, y, z):



$$\begin{cases} X_A + X_B - T = 0, \\ Z_A + Z_B - P = 0, \\ -P \cdot \dfrac{AB}{2} + Z_B \cdot AB = 0, \\ P \cdot KF - T \cdot BC \cdot \sin 30^\circ = 0, \\ -X_B \cdot AB + T \cdot AB = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получим

$$Z_B = \frac{P}{2} = 10\ \text{Н}:$$

$$T = \frac{P \cdot KF}{BC \sin 30^\circ} = \frac{20 \cdot BC \cdot 0{,}5 \cdot \cos 30^\circ}{BC \sin 30^\circ} = \frac{10 \cdot 0{,}866}{0{,}5} = 17{,}3\ \text{Н};$$

$$X_B = T = 17{,}3 \text{ Н};$$

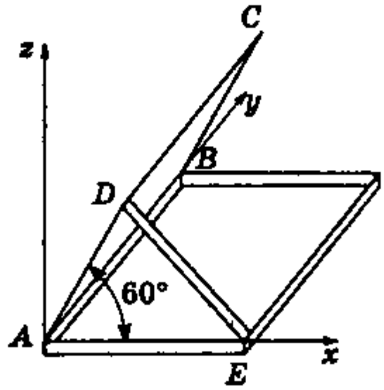
$$X_A = T - X_B = 0;$$

$$Z_A = P - Z_B = 20 - 10 = 10 \text{ Н}.$$

Ответ: $X_A = 0$; $Z_A = 10$ Н; $X_B = 17{,}3$ Н; $Z_B = 10$ Н.

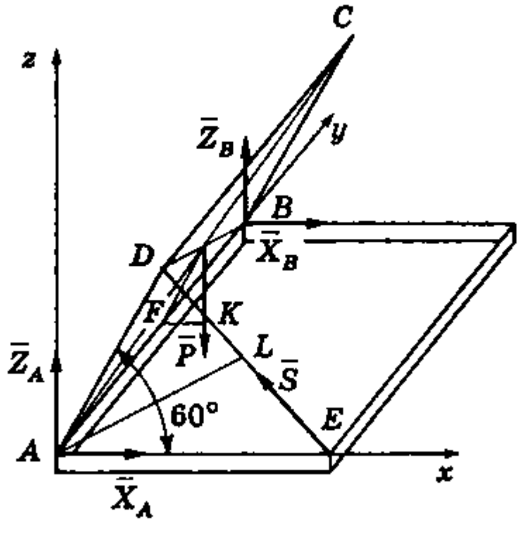
Задача 8.21

Крышка прямоугольного ящика $ABCD$ подперта с одной стороны палочкой DE. Вес крышки 120 Н; $AD = AE$; $\angle DAE = 60°$. Определить реакции шарниров A и B, а также усилие S в палочке, пренебрегая ее весом.



Решение

Изобразим на рисунке действующие на систему активные силы, при этом освободимся от связей, заменяя действие связей их реакциями. Для данной системы сил составим уравнения равновесия (в проекциях на оси x, z и для моментов относительно x, y, z):



$$\begin{cases} X_A + X_B - S\cos 60° = 0, \\ Z_A + Z_B - P + S\sin 60° = 0, \\ Z_B AB - P\cdot\dfrac{AB}{2} = 0, \\ P\cdot KF - S\cdot AL = 0, \\ -X_B\cdot AB = 0. \end{cases}$$

Из геометрических соображений найдем:

$$KF = \frac{AD}{2}\cos 60°; \quad AL = AD\cdot\cos 30°.$$

Решая систему, получим

$$Z_B = \frac{P}{2} = 60 \text{ Н};$$

$$S = \frac{P \cdot KF}{AL} = \frac{P\cos 60^\circ}{2\cos 30^\circ} = \frac{120 \cdot 0,5}{2 \cdot 0,866} = 34,5 \text{ Н};$$

$$X_B = 0;$$

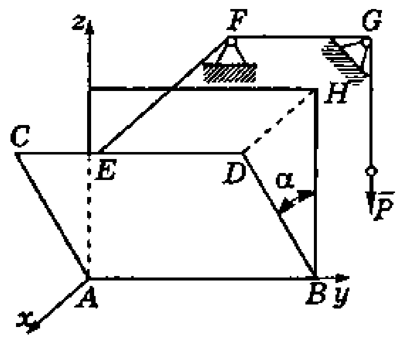
$$X_A = S\cos 60^\circ = 17,3 \text{ Н};$$

$$Z_A = P - S\sin 60^\circ - Z_B = 120 - 34,5 \cdot 0,866 - 60 = 30 \text{ Н}.$$

Ответ: X_A = 17,3 Н; Z_A = 30 Н; X_B = 0; Z_B = 60 Н; S = 34,5 Н.

Задача 8.22

Фрамуга *ABDC* весом Q = 100 Н открыта на угол α = 60°. Дано $BD = BH$; $CE = ED$; веревка *EF* параллельна прямой *DH*. Определить усилие *P*, необходимое для удержания фрамуги в равновесии, и реакции петель *A* и *B*.

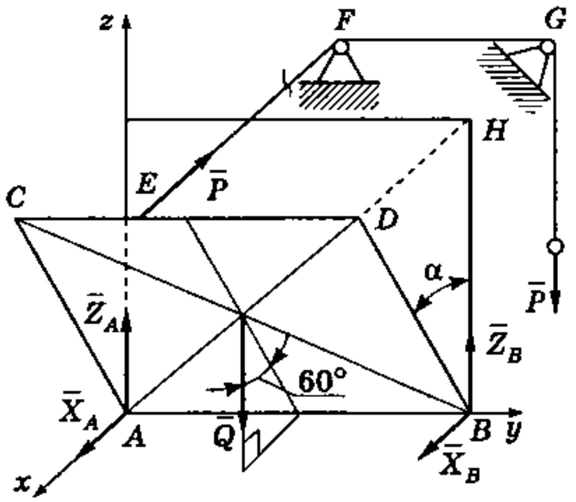


Решение

Изобразим на рисунке действующие на систему активные силы, при этом освободимся от связей, заменяя действие связей их реакциями. Для данной системы сил составим уравнения равновесия в выбранной системе координат:

$$\begin{cases} X_A + X_B - P\cos 30^\circ = 0, \\ 0 = 0 \text{ (выполняется тождественно)}, \\ Z_A + Z_B - Q + P\sin 30^\circ = 0, \\ -Q\dfrac{CD}{2} + Z_B \cdot CD + P\sin 30^\circ \cdot \dfrac{CD}{2} = 0, \\ Q \cdot \dfrac{DB}{2}\cos 30^\circ - P \cdot DB\cos 30^\circ = 0, \\ P\cos 30^\circ CE - X_B \cdot AB = 0. \end{cases}$$

Решим систему, заметив, что $CE = \frac{1}{2} AB$.



$$P = \frac{Q}{2} = 50 \text{ Н};$$

$$X_B = \frac{P\cos 30^\circ}{2} = \frac{50 \cdot 0,866}{2} \approx 21,7 \text{ Н};$$

$$X_A = P\cos 30^\circ - X_B =$$

$$= 50 \cdot 0,866 - 21,7 \approx 21,7 \text{ Н};$$

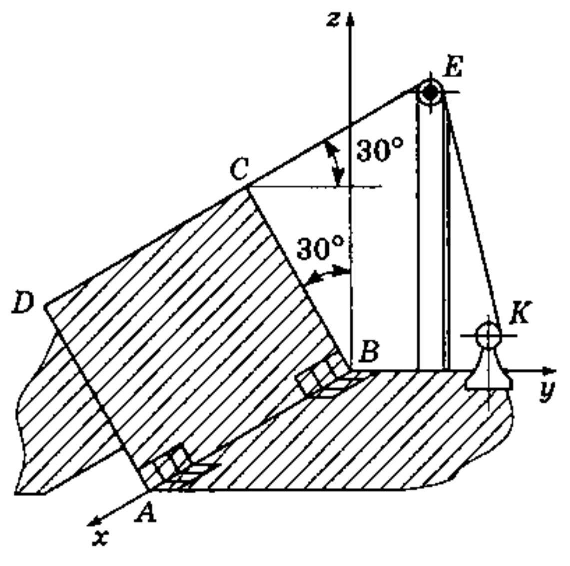
$$Z_B = \frac{Q}{2} + \frac{P}{2}\sin 30^\circ = \frac{100}{2} - \frac{50}{4} = 37,5 \text{ Н};$$

$$Z_A = Q - P\sin 30^\circ - Z_B = 37,5.$$

О т в е т: $P = 50$ Н; $X_A = X_B \approx 21,7$ Н; $Z_A = Z_B = 37,5$ Н.

Задача 8.23

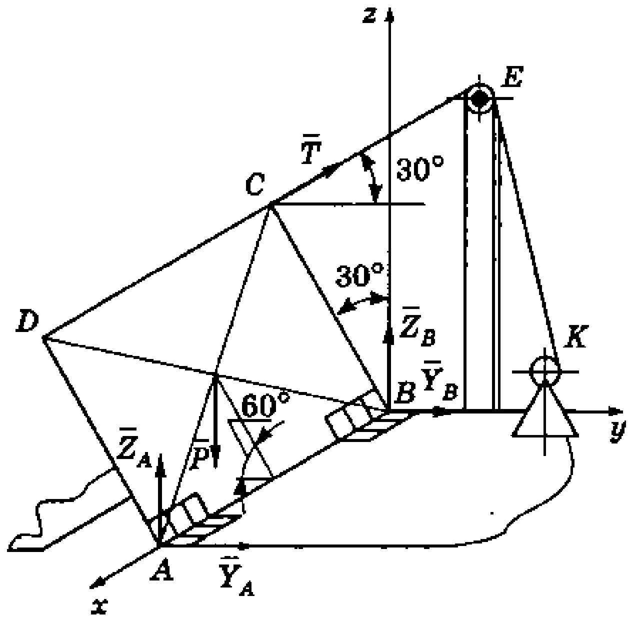
Разводная часть $ABCD$ моста весом 15 кН поднята цепью CE, перекинутой через блок E на лебедку K. Точка E находится в вертикальной плоскости CBy. Определить для изображенного на рисунке положения натяжение цепи CE и реакции в точках A и B. Центр тяжести разводной части совпадает с центром прямоугольника $ABCD$.



Р е ш е н и е

Изобразим на рисунке действующие на систему активные силы, при этом освободимся от связей, заменяя действие связей их реакциями. Для данной системы сил составим уравнения равновесия в выбранной системе координат:

$$\begin{cases} 0=0 \ \text{(выполняется тождественно)}, \\ Y_A+Y_B+T\cos 30^\circ=0, \\ Z_A+Z_B-P+T\sin 30^\circ=0, \\ P\cdot\dfrac{AD}{2}\cos 60^\circ-T\cos 30^\circ\cdot AD\cos 30^\circ-T\cos 60^\circ\cdot AD\sin 30^\circ=0, \\ -Z_A\cdot AB+P\cdot\dfrac{AB}{2}=0, \\ Y_A\cdot AB=0. \end{cases}$$



Решая систему, получим

$$T=\frac{\frac{P}{2}\cos 60^\circ}{\cos^2 30^\circ-\cos^2 60^\circ}=\frac{15}{4\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)}=\frac{15}{4}=3{,}75 \text{ кН};$$

$$Z_A=\frac{P}{2}=\frac{15}{2}=7{,}5 \text{ кН};$$

$$Y_A=0;$$

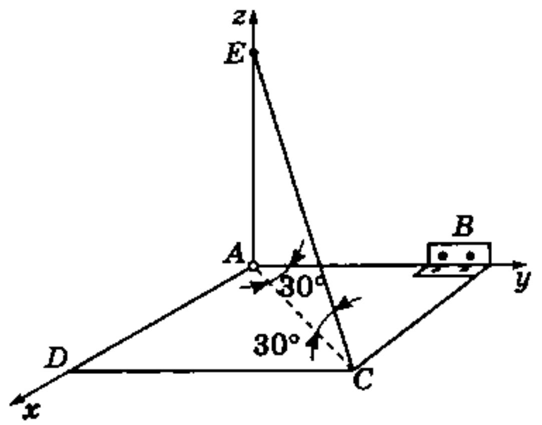
$$Y_B = -T\cos 30^\circ - Y_A = -3{,}75\cdot 0{,}866 - 0 = -3{,}25 \text{ кН};$$

$$Z_B = P - T\sin 30^\circ - Z_A = 15 - 3{,}75\cdot 0{,}5 - 7{,}5 = 5{,}625 \text{ кН}.$$

Ответ: $T = 3{,}75$ кН; $Y_A = 0$; $Z_A = 7{,}5$ кН; $Y_B = -3{,}25$ кН; $Z_B = 5{,}625$ кН.

Задача 8.24

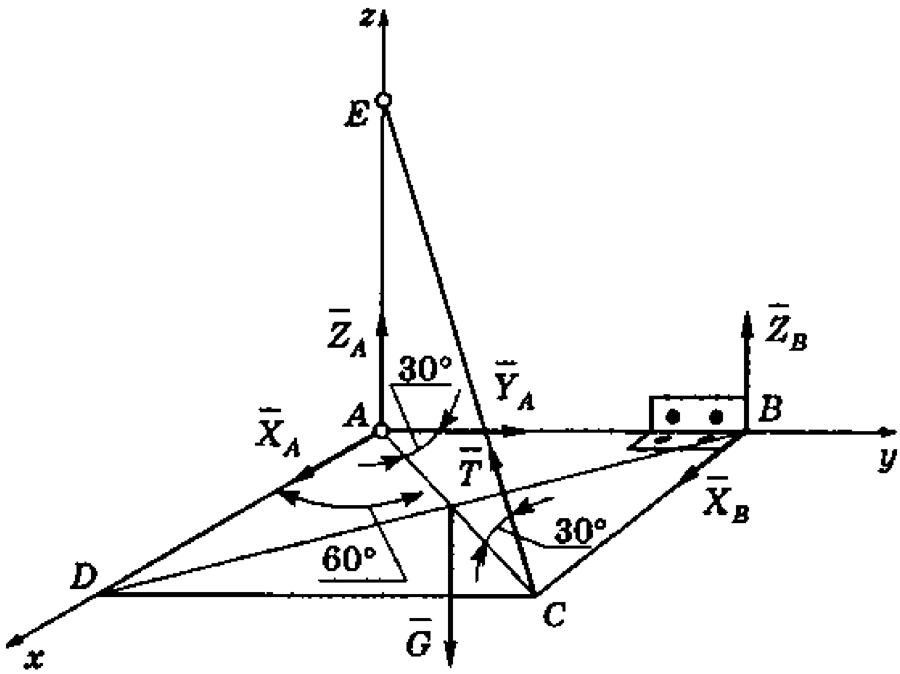
Однородная прямоугольная рама весом 200 Н прикреплена к стене при помощи шарового шарнира A и петли B и удерживается в горизонтальном положении веревкой CE, привязанной в точке C рамы и к гвоздю E, вбитому в стену на одной вертикали с A, причем $\angle ECA = \angle BAC = 30^\circ$. Определить натяжение веревки и опорные реакции.



Решение

Изобразим на рисунке действующие на раму активные силы, при этом освободимся от связей, заменяя действие связей их реакциями. Для данной системы сил составим уравнения равновесия в выбранной системе координат:

$$\begin{cases} X_A + X_B - T\cos 30^\circ \cos 60^\circ = 0, \\ Y_A - T\cos 30^\circ \cos 30^\circ = 0, \\ Z_A + Z_B - G + T\sin 60^\circ = 0, \\ -G\dfrac{DC}{2} + Z_B\cdot DC + T\cos 60^\circ\cdot DC = 0, \\ G\cdot\dfrac{AD}{2} - T\cos 60^\circ\cdot AD = 0, \\ X_B\cdot AB = 0. \end{cases}$$



Решая систему, получим

$$X_B = 0;$$

$$T = \frac{G}{2\cos 60°} = \frac{200}{2\cdot 0,5} = 200\ \text{Н};$$

$$X_A = T\cos 60°\cos 30° - X_B = 200\cdot\frac{1}{2}\cdot 0,866 - 0 = 86,6\ \text{Н};$$

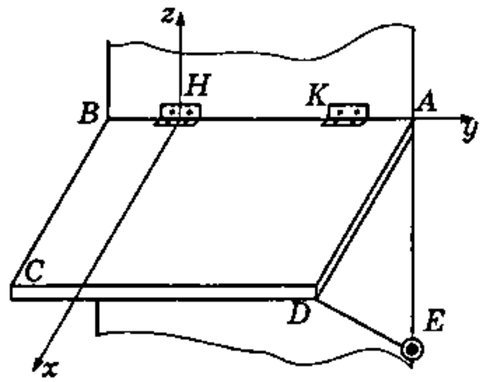
$$Y_A = T\cos^2 30° = 200\cdot\frac{3}{4} = 150\ \text{Н};$$

$$Z_B = -T\cos 60° + \frac{G}{2} = -200\cdot\frac{1}{2} + \frac{200}{2} = 0;$$

$$Z_A = G - T\sin 60° = 200 - \frac{200}{2} = 100\ \text{Н}.$$

О т в е т: $T = 200$ Н; $X_A = 86,6$ Н; $Y_A = 150$ Н; $Z_A = 100$ кН;
$X_B = Z_B = 0.$

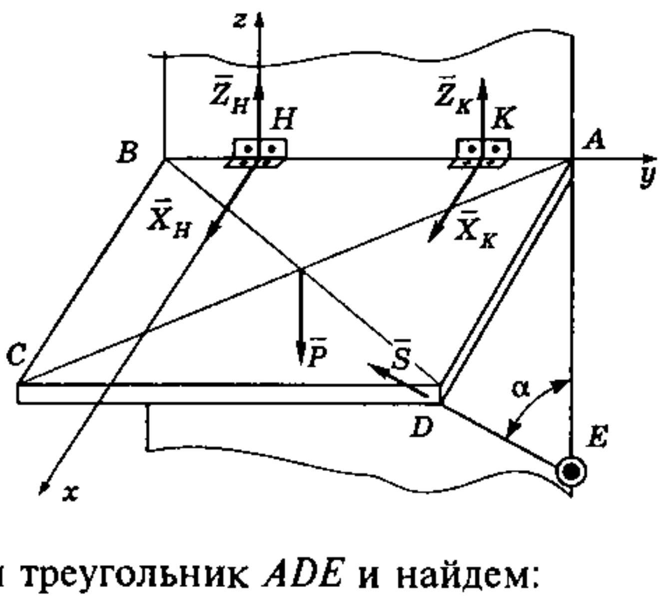
Задача 8.25



Полка $ABCD$ вагона, которая может вращаться вокруг оси AB, удерживается в горизонтальном положении стержнем ED, прикрепленным при помощи шарнира E к вертикальной стене BAE. Вес полки и лежащего на ней груза P равен 800 Н и приложен в точке пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. Даны размеры: $AB = 150$ см, $AD = 60$ см, $AK = BH = 25$ см. Длина стержня $ED = 75$ см. Определить усилие S в стержне ED, пренебрегая его весом, и реакции петель K и H.

Решение

Изобразим на рисунке действующие на систему активные силы, при этом освободимся от связей, заменяя действие связей их реакциями



Рассмотрим треугольник ADE и найдем:

$$\cos\alpha = \frac{AE}{DE} = \frac{\sqrt{DE^2 - AD^2}}{DE} = \frac{3}{5};$$

$$\sin\alpha = \frac{DA}{DE} = \frac{60}{75} = \frac{4}{5}.$$

Для данной системы сил составим уравнения равновесия (в проекциях на оси x, z и для моментов относительно x, y, z):

$$\begin{cases} X_H + X_K + S\sin\alpha = 0, \\ Z_H + Z_K - P + S\cos\alpha = 0, \\ -P\left(\dfrac{AB-2BH}{2}\right) + Z_K(AB-2AK) + S\cos\alpha(AB-AK) = 0, \\ P\cdot\dfrac{AD}{2} - S\cdot\cos\alpha\cdot AD = 0, \\ -X_K(AB-2AK) - S\sin\alpha(AB-AK) = 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему, найдем:

$$S = \frac{P}{2\cos\alpha} = \frac{8000}{2\cdot 0{,}6} = 666{,}7 \text{ Н};$$

$$X_K = -\frac{S(AB-AK)\sin\alpha}{AB-2AK} = \frac{666{,}7\cdot 1{,}25\cdot 4}{5} = -666{,}7 \text{ Н};$$

$$Z_K = \frac{P\left(\dfrac{AB-2BH}{2}\right) - S\cos\alpha(AB-AK)}{AB-2AK} =$$

$$= \frac{800\cdot 0{,}5 - 666{,}7\cdot 0{,}6\cdot 1{,}25}{1} = -100 \text{ Н};$$

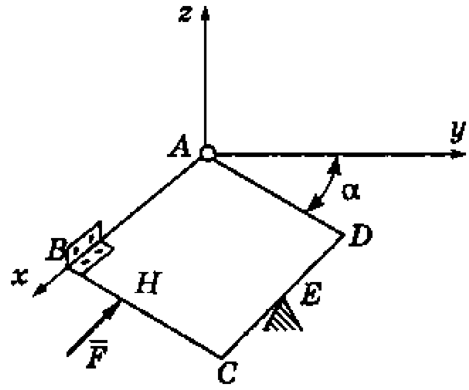
$$Z_H = P - Z_K - S\cos\alpha = 800 + 100 - 666{,}7\cdot 0{,}6 = 500 \text{ Н};$$

$$X_H = -X_K - S\sin\alpha = 666{,}7 - 666{,}7\cdot\frac{4}{5} = 133{,}3 \text{ Н}.$$

Ответ: $S = 666{,}7$ Н; $X_K = -666{,}7$ Н; $Z_K = -100$ Н; $X_H = 133{,}3$ Н; $Z_H = 500$ Н.

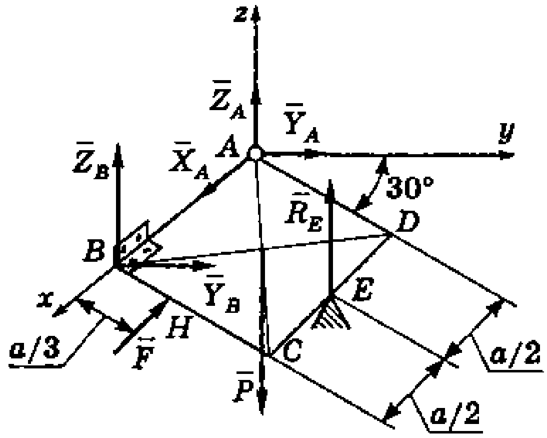
Задача 8.26

Квадратная однородная пластинка $ABCD$ со стороной a = 30 см и весом P = 5 Н закреплена в точке A при помощи шарового шарнира, а в точке B при помощи цилиндрического шарнира. Сторона AB горизонтальна. В точке E пластинка опирается на острие. В точке H на пластинку действует сила $\overline{F}$ параллельно стороне AB. Найти реакции в точках A, B и E, если $CE = ED$, BH = 10 см, F = 10 Н и пластинка образует с горизонтальной плоскостью угол $\alpha = 30°$.



Решение

Изобразим на рисунке действующие на пластину активные силы, при этом освободимся от связей, заменяя действие связей их реакциями. Для данной системы сил составим уравнения равновесия в выбранной системе координат:



$$\begin{cases} X_A - F = 0, \\ Y_A + Y_B + R_E \sin 30° = 0, \\ Z_A + Z_B - P + R_E \cos 30° = 0, \\ R_E \cdot a - P \cdot 0{,}5 \cdot a \cos 30° = 0, \\ -Z_B \cdot a + F \cdot \dfrac{a}{3} \sin 30° + P \cdot \dfrac{a}{2} \cos 30° - R_E \cdot \dfrac{a}{2} \cos 30° = 0, \\ Y_B \cdot a + F \cdot \dfrac{a}{3} \cos 30° + R_E \sin 30° \cdot \dfrac{a}{2} = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получим

$$X_A = F = 10 \text{ Н};$$

$$R_E = P\cos 30° \cdot 0,5 = 5 \cdot 0,866 \cdot 0,5 = 2,17 \text{ Н};$$

$$Z_B = \frac{1}{3} F \sin 30° + \frac{1}{2} P\cos 30° - \frac{1}{2} R_E \cos 30° =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 5 \cdot 0,5 - 0,5 \cdot 2,17 \cdot 0,866 = 3,23 \text{ Н};$$

$$Y_B = -\frac{1}{3} F \cos 30° - \frac{1}{2} R_E \sin 30° =$$

$$= -\left(\frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 0,866 + 0,5 \cdot 2,17 \cdot 0,5\right) = -3,43 \text{ Н};$$

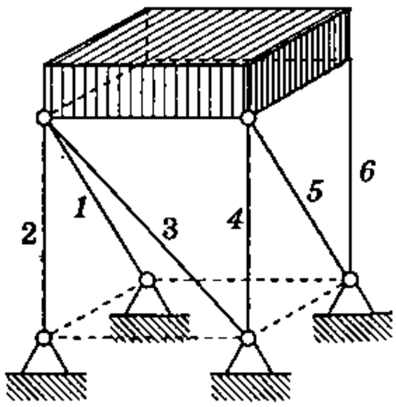
$$Y_A = -Y_B - R_E \sin 30° = 3,43 - 2,17 \cdot 0,5 = 2,35 \text{ Н};$$

$$Z_A = P - R_E \cos 30° - Z_B = 5 - 2,17 \cdot 0,866 - 3,23 = -0,11 \text{ Н}.$$

О т в е т: $X_A = 10$ Н; $Y_A = 2,35$ Н; $Z_A = -0,11$ Н;
$Y_B = -3,43$ Н; $Z_B = 3,23$ Н; $R_E = 2,17$ Н.

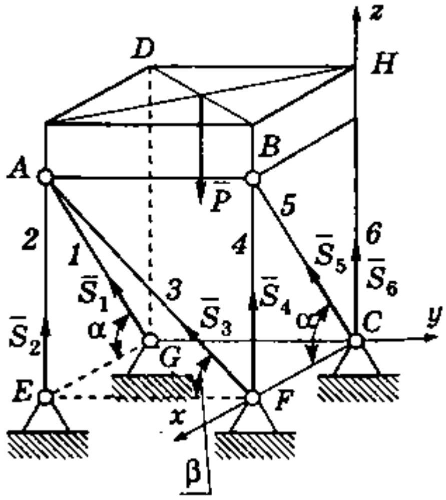
Задача 8.27

Однородная горизонтальная плита весом P, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда, прикреплена неподвижно к земле шестью прямолинейными стержнями. Определить усилия в опорных стержнях, обусловленные весом плиты, если концы стержней прикреплены к плите и неподвижным устоям шаровыми шарнирами.



Р е ш е н и е

Усилия в стержнях направлены вдоль стержней. Изобразим на рисунке действующие на систему активные силы, при этом освободимся от связей, заменяя действие связей их реакциями. Для данной системы сил составим уравнения равновесия в выбранной системе координат:



$$\begin{cases} -S_1\cos\alpha + S_5\cos\alpha = 0, \\ -S_3\cos\beta = 0, \\ S_2 + S_4 + S_6 + S_1\sin\alpha + S_5\sin\alpha + S_3\sin\beta - P = 0, \\ -S_2\cdot EF - S_1\sin\alpha EF + P\dfrac{AB}{2} = 0, \\ -S_2\cdot GE - S_3\sin\beta\cdot CF + P\dfrac{BH}{2} = 0, \\ S_1\cos\alpha\cdot GC - S_3\cos\beta\cdot CF = 0. \end{cases}$$

Решив систему, получим

$$S_1 = S_3 = S_5 = 0; \quad S_2 = \frac{P}{2};$$

$$S_6 = \frac{P}{2} - S_4.$$

Запишем еще одно уравнение равновесия — для моментов сил относительно оси AC:

$$S_4 = 0.$$

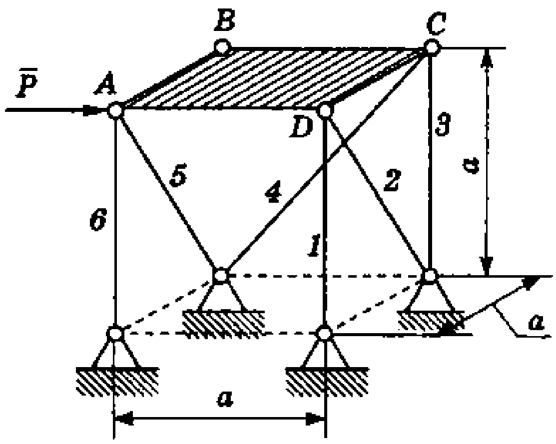
Следовательно,

$$S_6 = \frac{P}{2}.$$

Ответ: $S_1 = S_3 = S_4 = S_5 = 0$; $S_2 = S_6 = \dfrac{P}{2}$.

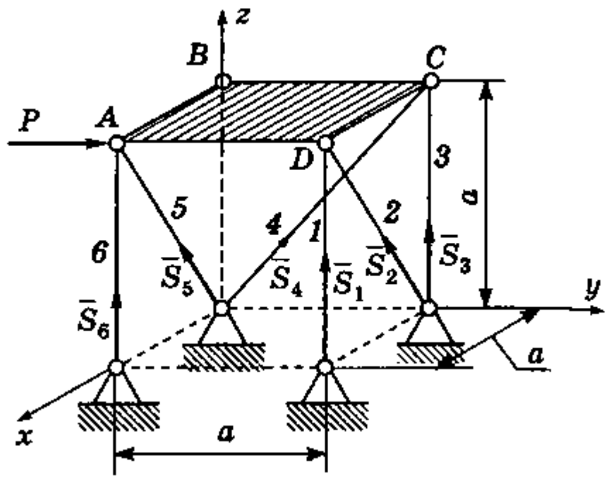
Задача 8.28

Определить усилия в шести опорных стержнях, поддерживающих квадратную плиту $ABCD$, при действии горизонтальной силы $\overline{P}$ вдоль стороны AD. Размеры указаны на рисунке.



Решение

Объект равновесия — плита. Изобразим на рисунке усилия в стержнях направленными вдоль стержней и составим для пространственной системы произвольно расположенных сил шесть уравнений равновесия в выбранной системе координат:



$$\begin{cases} S_5 \cos 45° + S_2 \cos 45° = 0, \\ P + S_4 \cos 45° = 0, \\ S_6 + S_1 + S_3 + S_5 \cos 45° + S_4 \cos 45° + S_2 \cos 45° = 0, \\ Pa + S_1 a + S_3 a + S_2 \cos 45° \, a = 0, \\ -S_1 a - S_6 a = 0, \\ Pa + S_2 a \cos 45° = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получим

$$S_2 = -\frac{P}{\cos 45°} = -\sqrt{2} \cdot P; \quad S_5 = \sqrt{2} \cdot P;$$

$$S_4 = -\frac{P}{\cos 45°} = -\sqrt{2} \cdot P;$$

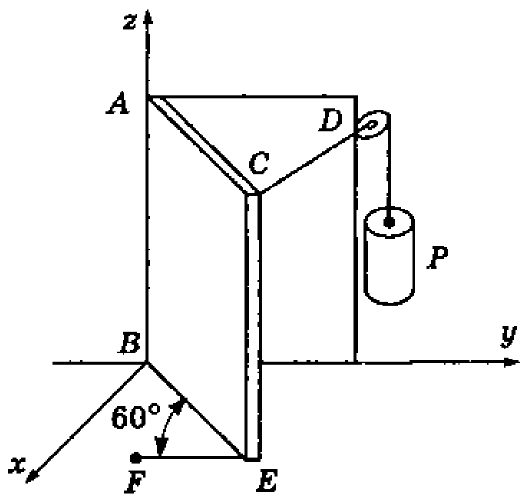
$$S_3 = -S_4 \cos 45° = P;$$

$$S_1 = P - S_3 - S_2 \cos 45° = P - P + P = P; \; S_6 = -P.$$

Ответ: $S_1 = P$; $S_2 = -\sqrt{2} \cdot P$; $S_3 = P$; $S_4 = -\sqrt{2} \cdot P$; $S_5 = \sqrt{2} \cdot P$; $S_6 = -P$.

Задача 8.29

Прямоугольная дверь, имеющая вертикальную ось вращения AB, открыта на угол $CAD = 60°$ и удерживается в этом положении двумя веревками, из которых одна, CD, перекинута через блок и натягивается грузом $P = 320$ Н, другая, EF, привязана к точке F пола. Вес двери 640 Н; ее ширина $AC = AD = 1{,}8$ м; высота $AB = 2{,}4$ м. Пренебрегая трением на блоке, определить натяжение T веревки EF, а также реакции цилиндрического шарнира в точке A и подпятника в точке B.



Решение

Освободимся от связей, заменяя их реакциями связей, и составим шесть уравнений равновесия в выбранной системе координат, учитывая, что треугольник ADC равносторонний (см. рисунок):

$$\begin{cases} X_A + X_B - P\cos 30° = 0, \\ Y_A + Y_B - T + P\cos 60° = 0, \\ Z_B - G = 0, \\ -G \cdot AC \cdot 0{,}5 \cdot \cos 60° - P\cos 60° \cdot AB - Y_A \cdot AB = 0, \\ X_A \cdot AB - P\cos 30° \cdot AB + G \cdot \dfrac{AC}{2}\cos 30° = 0, \\ -T \cdot AC \cdot \sin 60° + P\cos 30° \cdot AD = 0. \end{cases}$$

Решая систему, найдем:

$$Z_B = G = 640 \text{ Н};$$

$$Y_A = -P\cos 60° - \frac{G \cdot 0{,}5 \cdot AC\cos 60°}{AB} = -320 \cdot 0{,}5 - \frac{640 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}8 \cdot 0{,}5}{2{,}4} =$$

$$= -160 - 120 = -280 \text{ Н};$$

$$X_A = P\cos 30^\circ - G\frac{AC}{2AB}\cos 30^\circ =$$

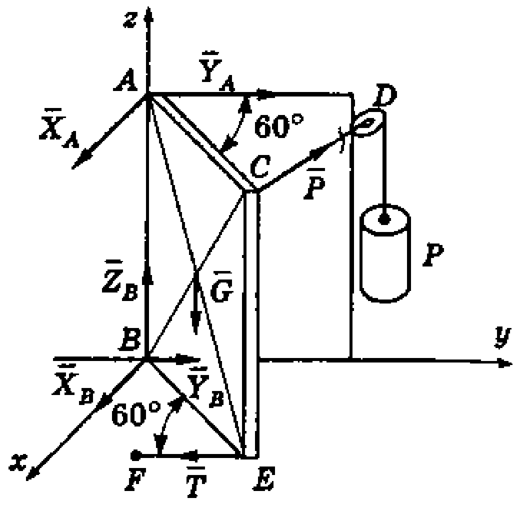
$$= 320\cdot 0{,}866 - 640\cdot\frac{1{,}8\cdot 0{,}866}{2\cdot 2{,}4} =$$

$$= (320-240)\cdot 0{,}866 = 69 \text{ Н};$$

$$T = P\frac{\cos 30^\circ}{\sin 60^\circ} = 320\cdot\frac{0{,}866}{0{,}866} = 320 \text{ Н};$$

$$Y_B = T - P\cos 60^\circ - Y_A =$$

$$= 320 - 320\cdot\frac{1}{2} + 230 = 440 \text{ Н};$$

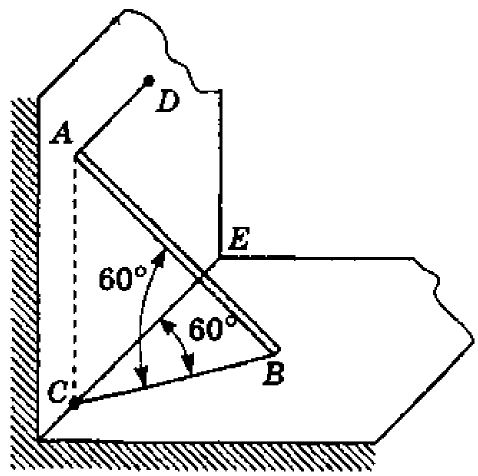


$$X_B = P\cos 30^\circ - X_A = 320\cdot 0{,}866 - 69 = 208 \text{ Н}.$$

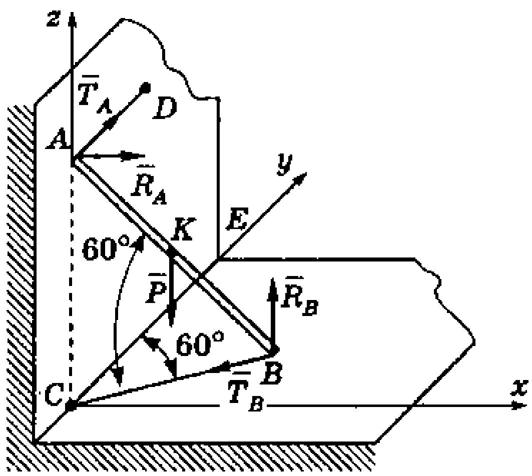
Ответ: $T = 320$ Н; $X_A = 69$ Н; $Y_A = -280$ Н; $X_B = 208$ Н; $Y_B = 440$ Н; $Z_B = 640$ Н.

Задача 8.30

Стержень AB удерживается в наклонном положении двумя горизонтальными веревками AD и BC. При этом в точке A стержень опирается на вертикальную стену, на которой находится и точка D, а в точке B — на горизонтальный пол. Точки A и C лежат на одной вертикали. Вес стержня 8 Н. Трением в точках A и B пренебрегаем. Проверить, может ли стержень оставаться в равновесии, и определить натяжения T_A и T_B веревок и реакции опорных плоскостей, если $\angle ABC = \angle BCE = 60^\circ$.



Решение



Изобразим на рисунке действующие на систему активные силы, при этом освободимся от связей, заменяя действие связей их реакциями. Для данной системы сил составим уравнения равновесия (в проекциях на оси x, y, z и для моментов относительно оси y):

$$\begin{cases} R_A - T_B \cos 30^\circ = 0, \\ T_A - T_B \cos 60^\circ = 0, \\ R_B - P = 0, \\ P \cdot \dfrac{AB}{2} \cos^2 60^\circ - R_B AB \cos^2 60^\circ + R_A \cdot AB \cos 60^\circ = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получим

$$R_B = P = 8 \text{ Н};$$

$$R_A = \left(R_B - \frac{P}{2}\right) \cos 60^\circ = 2 \text{ Н};$$

$$T_B = \frac{X_A}{\cos 30^\circ} = 2{,}3 \text{ Н};$$

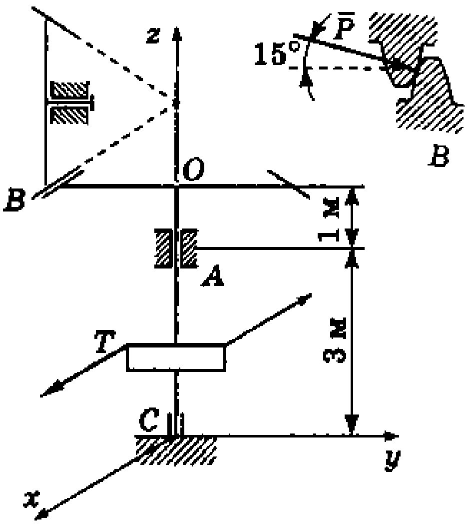
$$T_A = T_B \cos 60^\circ = 1{,}15 \text{ Н}.$$

Ответ: $T_A = 1{,}15$ Н; $T_B = 2{,}3$ Н; $R_A = 2$ Н; $R_B = 8$ Н.

Задача 8.31

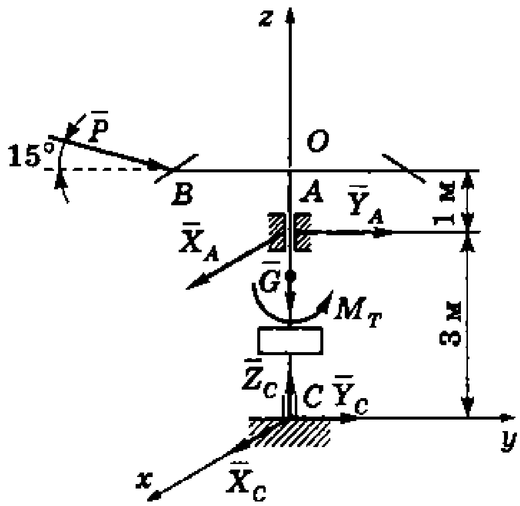
Пара сил, вращающая водяную турбину T и имеющая момент 1,2 кН·м, уравновешивается давлением на зубец B конического зубчатого колеса OB и реакциями опор. Давление на зубец перпендикулярно радиусу $OB = 0{,}6$ м и составляет с горизонтом угол

$\alpha = 15° = \text{arctg}\, 0{,}268$. Определить реакции подпятника C и подшипника A, если вес турбины с валом и колесом равен 12 кН и направлен вдоль оси OC, а расстояния $AC = 3$ м, $AO = 1$ м.



Решение

Изобразим на рисунке действующие на водяную турбину активные силы и силы реакций связей. Введем систему координат и составим для полученной пространственной системы сил шесть уравнений равновесия:



$$\begin{cases} X_A + X_C - P\cos 15° = 0, \\ Y_A + Y_C = 0, \\ Z_C - G - P\sin 15° = 0, \\ -Y_A \cdot AC + P\sin 15° \cdot OB = 0, \\ X_A \cdot AC - P\cos 15° \cdot OC = 0, \\ M_T - P\cos 15° \cdot OB = 0. \end{cases}$$

Решая систему, найдем:

$$P\cos 15° = \frac{M_T}{OB} = \frac{1{,}2}{0{,}6} = 2 \text{ кН},$$

тогда

$$P\sin 15° = P\cos 15° \,\text{tg}\, 15° = 2 \cdot 0{,}268 = 0{,}536 \text{ кН};$$

$$Z_C = G + P\sin 15° = 12{,}536 \text{ кН};$$

$$X_A = \frac{P\cos 15° \cdot OC}{AC} = \frac{2 \cdot 4}{3} = 2{,}667 \text{ кН};$$

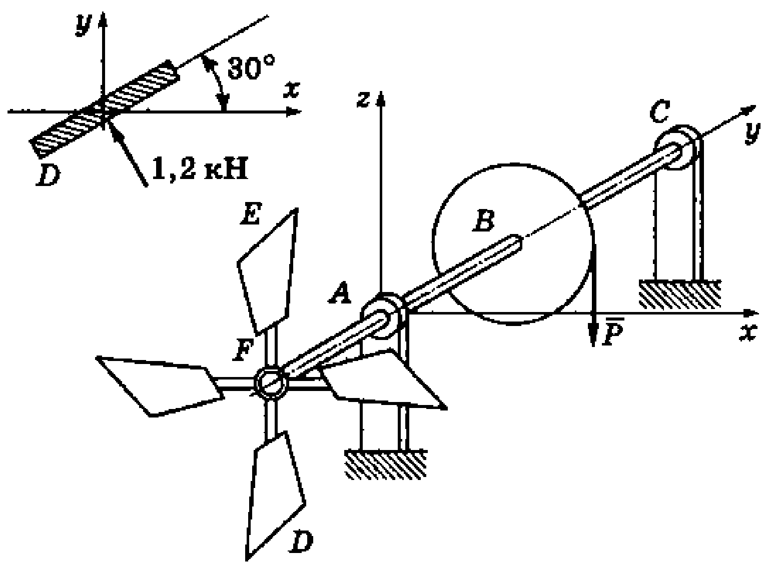
$$X_C = P\cos 15° - X_A = -0{,}667 \text{ кН};$$

$$Y_C = -Y_A = -0{,}107 \text{ кН}.$$

Ответ: $X_A = 2{,}667$ кН; $X_C = -0{,}667$ кН;
$Y_A = -Y_C = 0{,}107$ кН; $Z_C = 12{,}536$ кН.

Задача 8.32

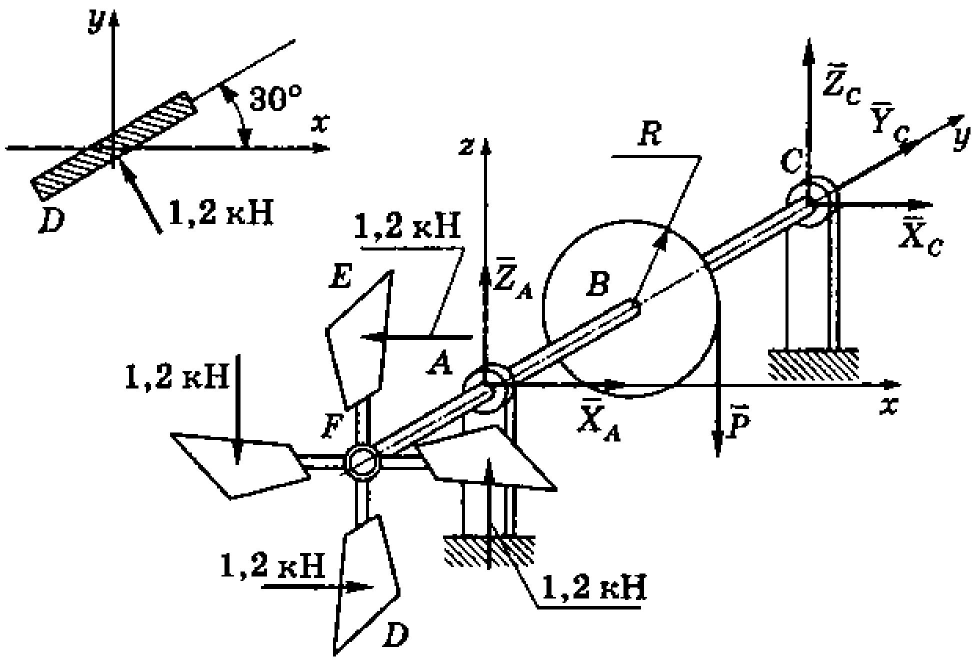
Ветряной двигатель с горизонтальной осью AC имеет четыре симметрично расположенных крыла, плоскости которых составляют с вертикальной плоскостью, перпендикулярной оси AC, равные углы 30°. На расстоянии 2 м от оси к каждому крылу приложена нормально к его плоскости равнодействующая сил давления ветра, равная 1,2 кН (крыло D в проекции на плоскость xy изображено отдельно). Ось двигателя опирается в точке A на подшипник, в точке C — на подпятник и удерживается в покое вертикальным давлением P на зубец колеса B, производимым не показанной на рисунке шестерней. Радиус колеса B равен 1,2 м; расстояния: $BC = 0{,}5$ м, $AB = 1$ м, $AF = 0{,}5$ м. Определить давление P и реакции опор.



Решение

Изобразим на рисунке действующие на ветряной двигатель активные силы. Освободимся от связей, заменив их соответствующими силами реакций. Запишем в выбранной системе координат уравнения равновесия пространственной произвольной системы сил:

$$\begin{cases} X_A + X_C = 0, \\ Y_C + 4 \cdot 1,2 \cdot \cos 30^\circ = 0, \\ Z_A + Z_C - P = 0, \\ Z_C \cdot AC - P \cdot AB = 0, \\ P \cdot 1,2 - 4 \cdot 1,2 \cdot \sin 30^\circ \cdot 2 = 0, \\ -X_C \cdot AC = 0. \end{cases}$$



Решая систему, найдем:

$$P = 4 \text{ кН}; \quad Z_C = \frac{P \cdot AB}{AC} = \frac{4 \cdot 1}{1,5} = 2,667 \text{ кН};$$

$$Z_A = P - Z_C = 1,333 \text{ кН}; \quad Y_C = -4 \cdot 1,2 \cdot 0,866 = -4,16 \text{ кН};$$

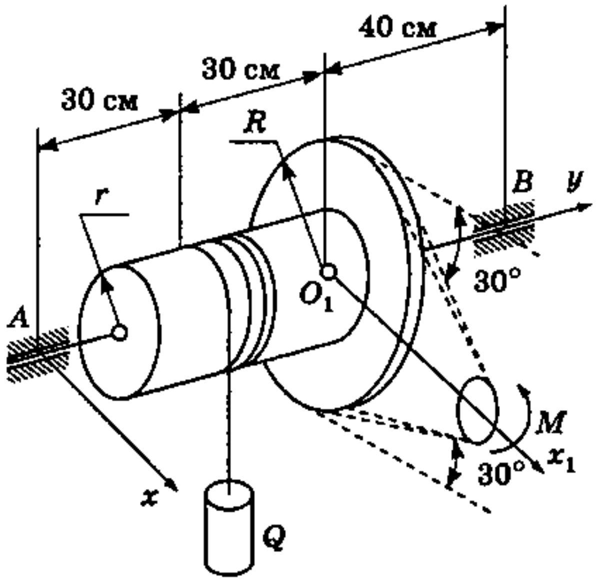
$$X_C = 0; \quad X_A = 0.$$

О т в е т: $P = 4$ кН; $Z_A = 1,333$ кН;

$Y_C = -4,16$ кН; $Z_C = 2,667$ кН; $X_A = X_C = 0$.

Задача 8.33

Груз Q равномерно поднимается мотором M посредством бесконечной цепи. Определить реакции опор A и B и натяжения в цепи, если ветви цепи наклонены к горизонту под углами 30° (ось O_1x_1 параллельна оси Ax). Известно, что $r = 10$ см, $R = 20$ см, $Q = 10$ кН, натяжение ведущей части цепи вдвое больше натяжения ведомой части, т.е. $T_1 = 2T_2$.



Решение

При равномерном и прямолинейном подъеме груза Q изображенная на рисунке система активных сил и сил реакций будет находиться в равновесии. Уравнения равновесия в данном случае будут иметь вид (в проекциях на оси x, z и для моментов относительно x, y, z):

$$\begin{cases} X_A + X_B + T_1 \cos 30° + T_2 \cos 30° = 0, \\ Z_A + Z_B + T_1 \sin 30° - T_2 \sin 30° - Q = 0, \\ -Q \cdot 30 + T_1 \sin 30° \cdot 60 - T_2 \sin 30° \cdot 60 + Z_B \cdot 100 = 0, \\ Q \cdot r - T_1 \cdot R + T_2 \cdot R = 0, \\ -T_1 \cos 30° \cdot 60 - T_2 \cos 30° \cdot 60 - X_B \cdot 100 = 0. \end{cases}$$

Учитывая, что

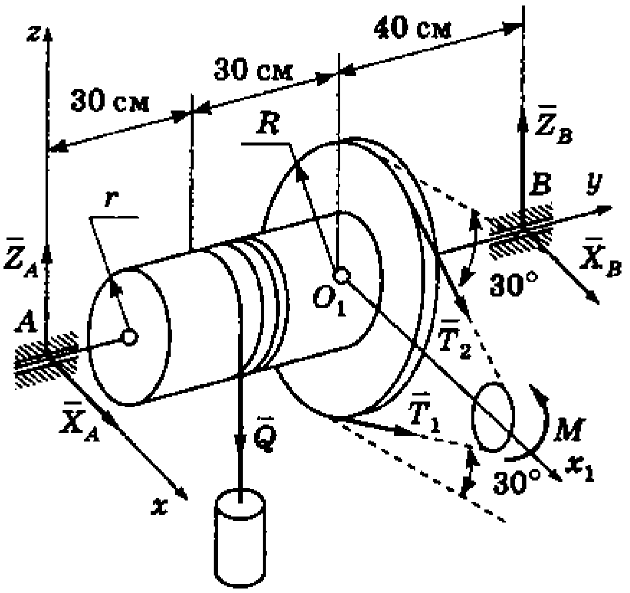
$$T_1 = 2T_2,$$

решим систему:

$$T_1 = \frac{2Qr}{R} = 10 \text{ кН}; \quad T_2 = 5 \text{ кН};$$

$$X_B = -(T_1 + T_2) \cdot 0{,}6 \cdot \cos 30° = -9 \cdot 0{,}866 = -7{,}8 \text{ кН};$$

$$X_A = -X_B - (T_1 + T_2)\cos 30° = 7{,}8 - 15 \cdot 0{,}866 = -5{,}2 \text{ кН};$$



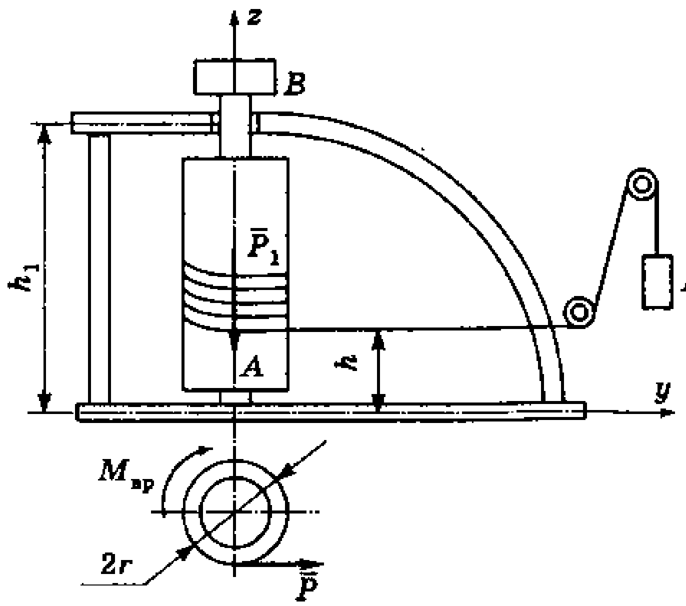
$$Z_B = 0,3 \cdot Q + (T_2 - T_1)\sin 30^\circ \cdot 0,6 = 3 - 5 \cdot 0,3 = 1,5 \text{ кН};$$

$$Z_A = Q + (T_2 - T_1)\sin 30^\circ - Z_B = 10 - 2,5 - 1,5 = 6 \text{ кН}.$$

Ответ: $T_1 = 10$ кН; $T_2 = 5$ кН; $X_A = -5,2$ кН; $Z_A = 6$ кН; $X_B = -7,8$ кН; $Z_B = 1,5$ кН.

Задача 8.34

Для подъема копровой бабы весом $P = 3$ кН служит вертикальный ворот, вал которого радиусом $r = 20$ см опирается нижним концом на подпятник A, а верхним концом удерживается в под-

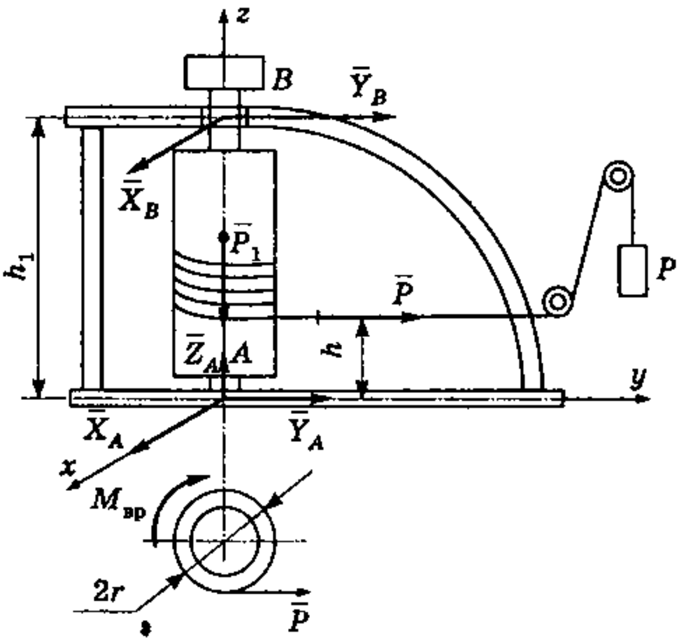


шипнике B. Вал приводится во вращение мотором. Найти необходимый для равномерного подъема копровой бабы вращающий момент мотора, а также реакции в подпятнике A и подшипнике B. При этом дано: $h_1 = 1$ м, $h = 30$ см и вес вращающихся частей ворота $P_1 = 1$ кН.

Решение

Изобразим на рисунке действующие на объект равновесия (ворот) активные силы $\overline{P_1}$ и $\overline{P}$. Освобождаясь от связей в подшипниках B и A, заменим их соответствующими силами реакций. Введем систему координат и составим для полученной пространственной произвольной системы сил уравнения равновесия:

$$\begin{cases} X_A + X_B = 0, \\ Y_A + Y_B + P = 0, \\ Z_A - P_1 = 0, \\ -P \cdot h - Y_B \cdot h_1 = 0, \\ X_B \cdot h_1 = 0, \\ P \cdot r - M_{\text{вр}} = 0. \end{cases}$$



Решая систему, найдем:

$$M_{\text{вр}} = P \cdot r = 3 \cdot 0{,}2 = 0{,}6 \text{ кН·м}; \quad X_B = 0.$$

$$Y_B = -\frac{h}{h_1}P = -0{,}3 \cdot 3 = -0{,}9 \text{ кН};$$

$$Z_A = P_1 = 1 \text{ кН};$$

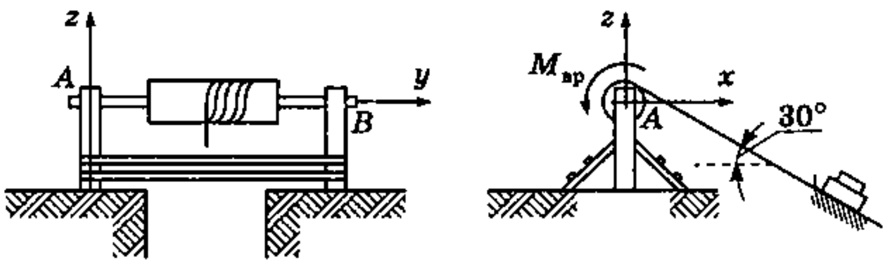
$$Y_A = -P - Y_B = -3 + 0{,}9 = -2{,}1 \text{ кН};$$

$$X_A = -X_B = 0.$$

Ответ: $M_{\text{вр}} = 0{,}6$ кН·м; $X_A = 0$; $Y_A = -2{,}1$ кН;
$Z_A = 1$ кН; $X_B = 0$; $Y_B = -0{,}9$ кН.

Задача 8.35

Ворот, служащий для подъема породы из наклонного шурфа, состоит из вала радиусом 0,25 м и длиной 1,5 м. Вал приводится во вращение при помощи мотора (на рисунке не показан). Определить реакции опор и вращающий момент $M_{\text{вр}}$ мотора, если вес вала равен 0,8 кН, вес груза 4 кН, коэффициент трения между грузом и поверхностью шурфа равен 0,5, угол наклона шурфа к горизонту равен 30° и место схода троса с вала находится на расстоянии 50 см от подшипника B. Вращение вала считать равномерным.



Решение

Проведем вдоль наклонного шурфа ось ξ (см. рисунок). Так как груз движется прямолинейно и равномерно, то действующие на него силы взаимно уравновешены. В частности, выполняется соотношение (уравнение равновесия в проекциях на ось ξ):

$$-T + G_2 \sin 30° + F_{\text{тр}} = 0,$$

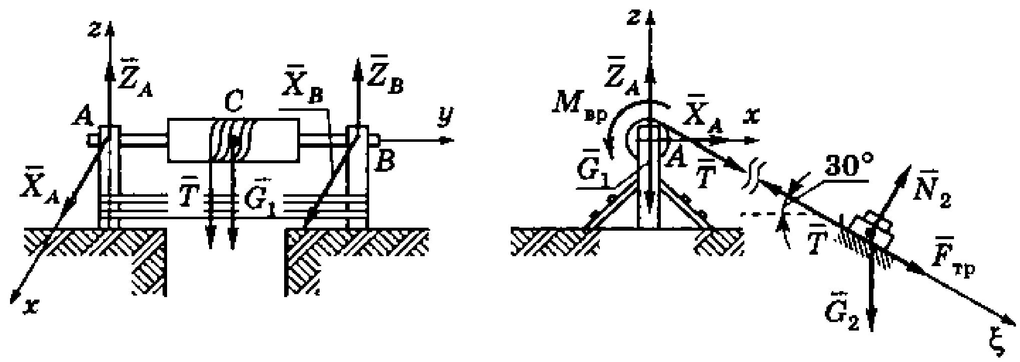
из которого с учетом

$$F_{тр} = fN_2 = fG_2 \cos 30°$$

получим

$$-T + G_2(\sin 30° + f \cos 30°) = 0 \Rightarrow$$

$$T = G_2(\sin 30° + f \cos 30°) = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3{,}73 \text{ кН}.$$



Теперь в качестве объекта равновесия рассмотрим ворот AB. Так как он вращается равномерно, то действующие на него силы также взаимно уравновешены, и мы получим (уравнения равновесия в проекциях на оси x, z и для моментов относительно x, y, z):

$$\begin{cases} X_A + X_B + T\cos 30° = 0, \\ Z_A + Z_B - G_1 - T\sin 30° = 0, \\ Z_B \cdot AB - G_1 \cdot \dfrac{AB}{2} - T\sin 30° \cdot AC = 0, \\ T \cdot 0{,}25 - M_{вр} = 0, \\ -X_B \cdot AB - T\cos 30° \cdot AC = 0. \end{cases}$$

Решим полученную систему уравнений, учитывая, что $AC = 1$ м.

$$M_{вр} = TR = 3{,}73 \cdot 0{,}25 = 0{,}93 \text{ кН};$$

$$X_B = -\frac{T\cos 30° \cdot AC}{AB} = -\frac{3{,}73 \cdot 0{,}5}{1{,}5} = -2{,}15 \text{ кН};$$

$$Z_B = \frac{1}{2}G_1 + \frac{T\sin 30^\circ \cdot AC}{AB} = \frac{1}{2}\cdot 0,8 + \frac{3,73\cdot 0,5}{1,5} = 1,64 \text{ кН};$$

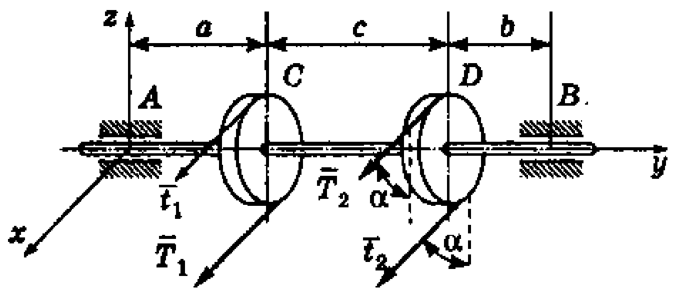
$$Z_A = G_1 + T\sin 30^\circ - Z_B = 0,8 + 3,73\cdot 0,5 - 1,64 = 1,02 \text{ кН};$$

$$X_A = -T\cos 30^\circ - X_B = -3,73\cdot 0,866 - (-2,15) = -1,08 \text{ кН}.$$

Ответ: $M_{вр} = 0,93$ кН·м; $X_A = -1,08$ кН; $Z_A = 1,02$ кН; $X_B = -2,15$; $Z_B = 1,64$ кН.

Задача 8.36

Горизонтальный вал трансмиссии, несущий два шкива C и D ременной передачи, может вращаться в подшипниках A и B. Радиусы шкивов: $r_C = 20$ см, $r_D = 20$ см; расстояния шкивов от подшипников: $a = b = 50$ см; расстояние между шкивами $c = 100$ см. Натяжения ветвей ремня, надетого на шкив C, горизонтальны и имеют величины T_1 и t_1 причем $T_1 = 2t_1 = 5$ кН, натяжения ветвей ремня, надетого на шкив D, образуют с вертикалью угол $\alpha = 30°$ и имеют величины T_2 и t_2, причем $T_2 = 2t_2$. Определить натяжения T_2 и t_2 в условиях равновесия и реакции подшипников, вызванные натяжениями ремней.



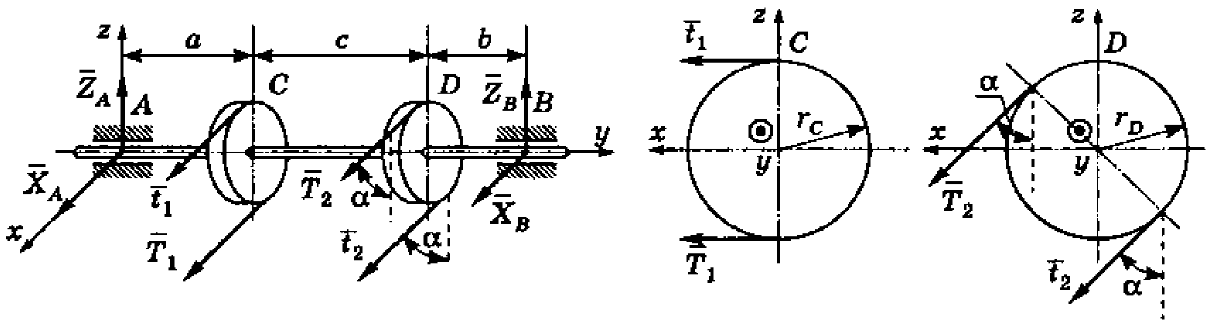
Решение

Исходя из рисунка найдем силы натяжения T_2 и t_2, для чего составим уравнение моментов сил относительно оси y:

$$t_1 r_C - T_1 r_C + T_2 r_D - t_2 r_D = 0,$$

откуда после преобразований получим

$$t_2 = \frac{r_C}{r_D}t_1 = \frac{20}{25}\cdot\frac{5}{2} = 2 \text{ кН}; \; T_2 = 2t_2 = 2\cdot 2 = 4 \text{ кН}.$$



Запишем уравнение моментов сил относительно оси z:

$$-t_1 a - aT_1 - (a+c)T_2 \sin 30^\circ - (a+c)t_2 \sin 30^\circ - X_B(a+c+b) = 0.$$

Найдем реакцию X_B:

$$X_B = -\frac{a(t_1 + T_1) + (T_2 + t_2)(a+c)\sin 30^\circ}{a+c+b} = -4{,}125 \text{ кН}.$$

Запишем уравнение равновесия сил в проекциях на ось x:

$$X_A + t_1 + T_1 + (T_2 + t_2)\sin 30^\circ + X_B = 0.$$

Следовательно,

$$X_A = -[X_B + (t_1 + T_1) + (T_2 + t_2)\sin 30^\circ] = -6{,}375 \text{ кН}.$$

Запишем уравнение моментов сил относительно оси x:

$$(a+c+b)Z_B - (T_2 + t_2)\cos 30^\circ (a+c) = 0.$$

Найдем:

$$Z_B = \frac{(a+c)(T_2 + t_2)\cos 30^\circ}{a+c+b} = 3{,}9 \text{ кН}.$$

Запишем уравнение равновесия в проекциях на ось z:

$$Z_A - (T_2 + t_2)\cos 30^\circ + Z_B = 0.$$

Следовательно,

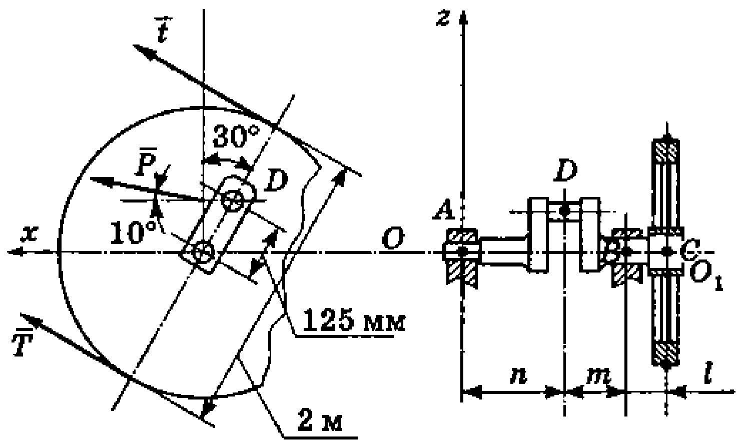
$$Z_A = (T_2 + t_2)\cos 30^\circ - Z_B = 1{,}3 \text{ кН}.$$

О т в е т: $T_2 = 4$ кН; $t_2 = 2$ кН; $X_A = -6{,}375$ кН; $Z_A = 1{,}3$ кН;
$X_B = -4{,}125$ кН; $Z_B = 3{,}9$ кН.

П р и м е ч а н и е. В задачнике допущена опечатка в ответе для величины Z_A.

Задача 8.37

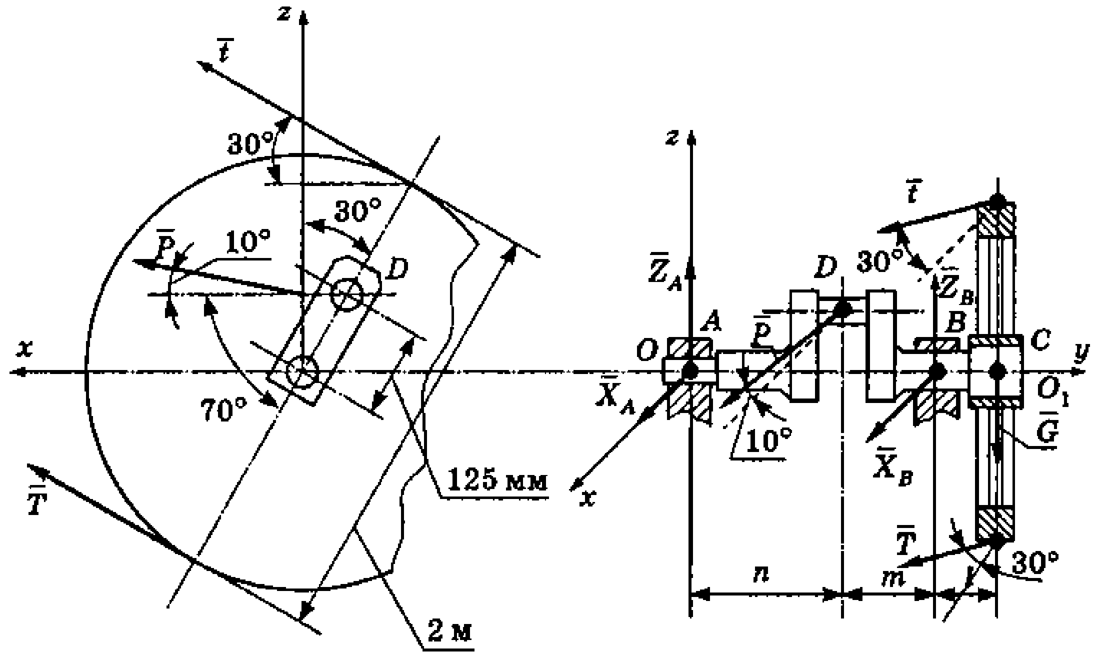
Давление шатуна двигателя, сосредоточенное в середине D шейки коленчатого вала, равно $P = 20$ кН и направлено под углом 10° к горизонту, причем плоскость ODO_1, проходящая через оси вала OO_1 и шейки D, образует с вертикалью угол 30°. От маховика усилие передается на завод канатом, ветви которого параллельны и наклонены к горизонту под углом 30°. Действие силы P уравновешивается натяжениями T и t ветвей каната и реакциями подшипников A и B. Вес маховика 13 кН, диаметр его $d = 2$ м, сумма натяжений ветвей каната $T + t = 7{,}5$ кН, а указанные на рисунке расстояния равны: точки D от оси OO_1 $r = 125$ мм, $l = 250$ мм, $m =$ $= 300$ мм, $n = 450$ мм. Определить реакции подшипников A и B и натяжения t и T.



Решение

Изобразив на рисунке действующие силы и силы реакций связей, составим уравнения равновесия полученной пространственной системы сил (в проекциях на оси x, z и для моментов относительно x, y, z):

$$\begin{cases} X_A + X_B + P\cos 10^\circ + (T+t)\cos 30^\circ = 0, \\ Z_A + Z_B - G + P\sin 10^\circ + (T+t)\sin 30^\circ = 0, \\ Z_B(n+m) - G(n+m+l) - P\sin 10^\circ \cdot n + (T+t)\sin 30^\circ (n+m+l) = 0, \\ P\sin 70^\circ \cdot 125 + (t-T)\cdot 1000 = 0, \\ -X_B(n+m) - (T+t)\cos 30^\circ (n+m+l) - P\cos 10^\circ \cdot n = 0. \end{cases}$$



Решая систему, найдем:

$$T - t = 0{,}125 P \sin 70^\circ = 2{,}34 \text{ кН},$$

и, поскольку

$$T + t = 7{,}5 \text{ кН},$$

$$T = 4{,}92 \text{ кН}; \; t = 2{,}58 \text{ кН};$$

$$Z_B = \frac{G(n+m+l) - P\sin 10^\circ \cdot n - (T+t)\sin 30^\circ (n+m+l)}{n+m} = 10{,}25 \text{ кН};$$

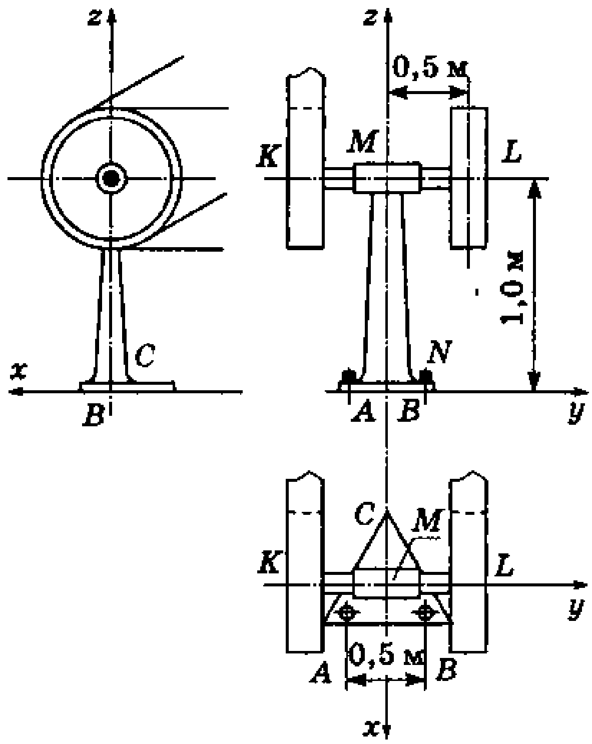
$$X_B = -\frac{P\cos 10^\circ \, n + (T+t)\cos 30^\circ (n+m+l)}{n+m} = -20{,}48 \text{ кН};$$

$$X_A = -X_B - P\cos 10^\circ - (T+t)\cos 30^\circ = -5{,}7 \text{ кН};$$

$$Z_A = G - Z_B - P\sin 10^\circ - (T+t)\sin 30^\circ = -4{,}47 \text{ кН}.$$

О т в е т: $X_A = -5{,}7$ кН; $Z_A = -4{,}47$ кН; $X_B = -20{,}48$ кН; $Z_B = 10{,}25$ кН, $t = 2{,}58$ кН; $T = 4{,}92$ кН.

Задача 8.38



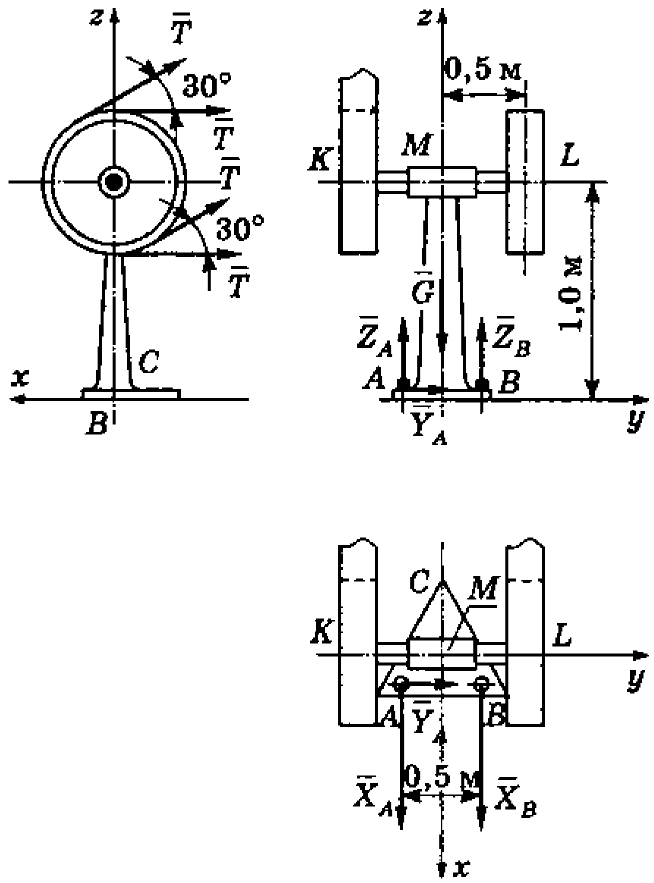
Для передачи вращения с одного вала на другой, ему параллельный, установлены два одинаковых вспомогательных шкива, заклиненных на горизонтальной оси KL. Ось может вращаться в подшипнике M, укрепленном на колонке MN. Треугольное основание этой колонки притянуто к полу двумя болтами A и B и свободно опирается точкой C. Болт A проходит через круглое отверстие в основании, болт B — через продолговатое отверстие, имеющее направление линии AB. Ось колонки проходит через центр треугольника ABC.

Определить реакции в точках A, B и C, если расстояние оси KL от пола равно 1 м, расстояния середин шкивов от оси колонки равны 0,5 м и натяжения всех четырех ветвей ремней принимаются одинаковыми и равными 600 Н. Ветви правого ремня горизонтальны, а ветви левого наклонены к горизонту под углом 30°. Вес всей установки равен 3 кН и приложен к точке, лежащей на оси колонки; даны размеры: $AB = BC = CA = 50$ см.

Решение

Изобразив на рисунке действующие активные силы и силы реакций связей, в выбранной системе координат составим уравнения равновесия полученной пространственной системы сил:

$$\begin{cases} X_A + X_B - 2T - 2T\cos 30^\circ = 0, \\ Y_A = 0, \\ -G + 2T\sin 30^\circ + Z_A + Z_B + Z_C = 0, \\ -Z_A \cdot 0{,}25 + Z_B \cdot 0{,}25 - 2T\sin 30^\circ \cdot 0{,}5 = 0, \\ -Z_A \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}5\sin 60^\circ - Z_B \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}5\sin 60^\circ + \\ + Z_C \cdot \frac{2}{3} \cdot 0{,}5\sin 60^\circ - (2T + 2T\cos 30^\circ) \cdot 1 = 0, \\ 2T \cdot 0{,}5 - 2T \cdot 0{,}5\cos 30^\circ - X_B \cdot 0{,}25 + X_A \cdot 0{,}25 + Y_A \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}5\sin 60^\circ = 0. \end{cases}$$



Решив систему, получим

$$X_A = 1{,}04 \text{ кН}; \quad X_B = 2T = 1{,}2 \text{ кН}; \quad Y_A = 0;$$

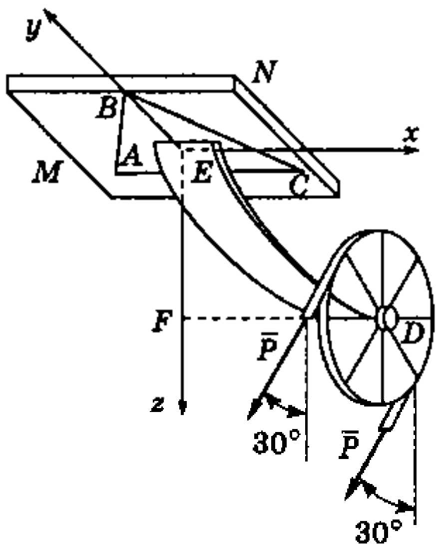
$$Z_A = -2{,}39 \text{ кН}; \quad Z_B = -1{,}19 \text{ кН}; \quad Z_C = 5{,}97 \text{ кН}.$$

О т в е т: $X_A = 1{,}04$ кН; $Y_A = 0$; $Z_A = -2{,}39$ кН;
$X_B = 1{,}2$ кН; $Z_B = -1{,}19$ кН; $Z_C = 5{,}97$ кН.

П р и м е ч а н и е. Ответ в задачнике неверный в силу возможных ошибок в вычислениях.

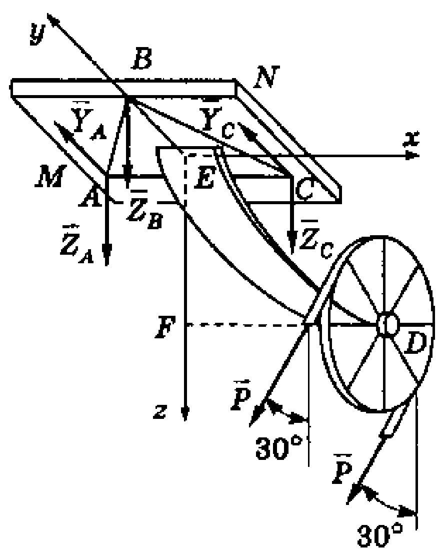
Задача 8.39

Подвеска ременного шкива D прикреплена к гладкому горизонтальному потолку MN подшипника в точках A и C и упирается в него точкой B. Эти точки лежат в вершинах равностороннего треугольника ABC со стороной 30 см. Положение центра ременного шкива D определяется вертикалью $EF = 40$ см, опущенной из центра E треугольника ABC, и горизонталью $FD = 50$ см, параллельной стороне AC. Плоскость шкива перпендикулярна прямой FD. Натяжение P каждой ветви ремня равно 1200 Н и наклонено к вертикали под углом 30°. Определить реакции в опорах A, B и C, пренебрегая весом частей.



Р е ш е н и е

Изобразим на рисунке действующие силы, силы реакций связей и введем систему координат $Exyz$. Учитывая, что усилия со стороны колеса передаются на подшипники шкива D, составим уравнения равновесия действующей на шкив полученной пространственной системы сил (в проекциях на оси y, z и для моментов относительно x, y, z):



$$\begin{cases} Y_A + Y_C + 2P\sin 30^\circ = 0, \\ Z_A + Z_B + Z_C + 2P\cos 30^\circ = 0, \\ -Z_A \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 30\sin 60^\circ - Z_C \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 30\sin 60^\circ + \\ + Z_B \cdot \dfrac{2}{3} \cdot 30\sin 60^\circ - 2P\sin 30^\circ \cdot EF = 0, \\ Z_A \cdot 15 - Z_C \cdot 15 - 2P\cos 30^\circ \cdot FD = 0, \\ Y_C \cdot 15 - Y_A \cdot 15 + 2P\sin 30^\circ \cdot FD = 0. \end{cases}$$

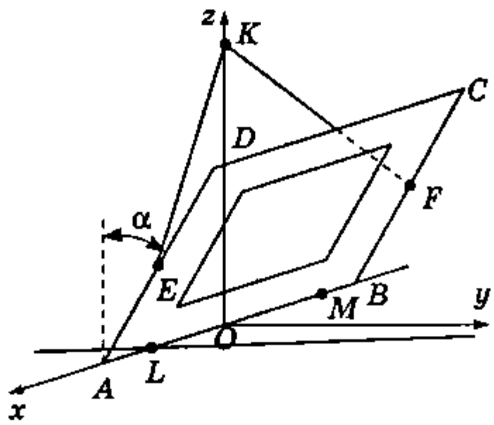
Решив систему, получим

$$Y_A = 1{,}4 \text{ кН}; \quad Y_C = -2{,}6 \text{ кН};$$

$$Z_A = 1{,}85 \text{ кН}; \quad Z_B = 1{,}15 \text{ кН}; \quad Z_C = -5{,}08 \text{ кН}.$$

О т в е т: $Y_A = 1{,}4$ кН; $Z_A = 1{,}85$ кН; $Z_B = 1{,}15$ кН;
$Y_C = -2{,}6$ кН; $Z_C = -5{,}08$ кН.

Задача 8.40



Картина в раме, имеющей форму прямоугольника $ABCD$, подвешена на вертикальной стене при помощи шнура EKF, надетого на крюк K так, что край AB горизонтален; точки E, F — середины сторон AD и BC. Картина наклонена к стене под углом $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$ и опирается на два гвоздя L и M, вбитых в стену, причем $AL = MB$. Размеры картины: $AB = 60$ см, $AD = 75$ см; вес картины 200 Н и приложен в центре прямоугольника $ABCD$; длина шнура 85 см. Определить натяжение T шнура и давления на гвозди L и M.

Р е ш е н и е

Изобразим действующие на картину силы (рис. 1). Сперва определим направление сил $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ при помощи векторов $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$.

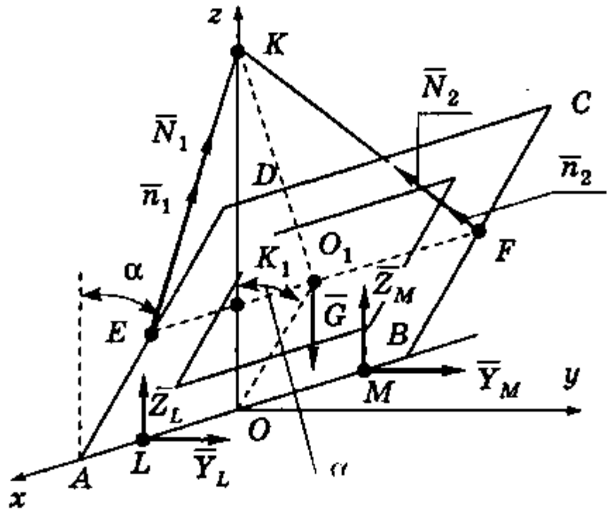


Рис. 1

Вычислим:

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{3/4}{\sqrt{1+3^2/4^2}} = \frac{3}{5} = 0{,}6;$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+3^2/4^2}} = \frac{4}{5} = 0{,}8;$$

$$K_1O_1 = OO_1\sin\alpha = \frac{75}{2}\cdot 0{,}6 = \frac{45}{2}\ \text{см};$$

$$KO_1 = \sqrt{KF^2 - O_1F^2} = \sqrt{\left(\frac{82}{2}\right)^2 - \left(\frac{60}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{17^2-12^2} = \frac{5}{2}\sqrt{(12+5)^2-12^2} = \frac{5}{2}\sqrt{145}\ \text{см};$$

$$K_1K = \sqrt{KO_1^2 - K_1O_1^2} = \sqrt{\frac{25}{4}\cdot 145 - \frac{45^2}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{25\cdot 145 - 45\cdot 45} = \frac{5}{2}\sqrt{5\cdot 29 - 9\cdot 9} = \frac{5}{2}\sqrt{145-81} = \frac{5}{2}\cdot 8 = 20\ \text{см};$$

$$OK = OK_1 + K_1K = OO_1\cos\alpha + K_1K = \frac{75}{2}\cdot 0{,}8 + 20 = 30 + 20 = 50\ \text{см}.$$

Пусть (x_K, y_K, z_K) и (x_E, y_E, z_E) — координаты точек K и E соответственно. Тогда

$$n_{1x} = x_K - x_E = 0 - 30 = -30;$$

$$n_{1y} = y_K - y_E = O_1K_1 = -\frac{45}{2};$$

$$n_{1z} = z_K - z_E = K_1K = 20.$$

После сокращений получим $\bar{n}_1 = \bar{n}_1(-12; -9; 8)$. Аналогично найдем $\bar{n}_2 = \bar{n}_2(12; -9; 8)$.

Пусть $\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1$ — направляющие косинусы вектора $\bar{n}_1$, $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$, $\cos\gamma_2$ — направляющие косинусы вектора $\bar{n}_2$. Поскольку

$$n_1 = n_2 = n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \sqrt{12^2 + (-9)^2 + 8^2} = 17,$$

то

$$\cos\alpha_1 = \frac{n_{1x}}{n} = -\frac{12}{17}; \ \cos\alpha_2 = \frac{n_{2x}}{n} = \frac{12}{17};$$

$$\cos\beta_1 = \cos\beta_2 = -\frac{9}{17}; \ \cos\gamma_1 = \cos\gamma_2 = \frac{8}{17}.$$

Заметим, что направляющие косинусы можно установить в системе координат $x_1y_1z_1$, а затем перейти к системе координат xyz поворотом $x_1y_1z_1$ вокруг оси $x = x_1$ на угол α по часовой стрелке (рис. 2, 3).

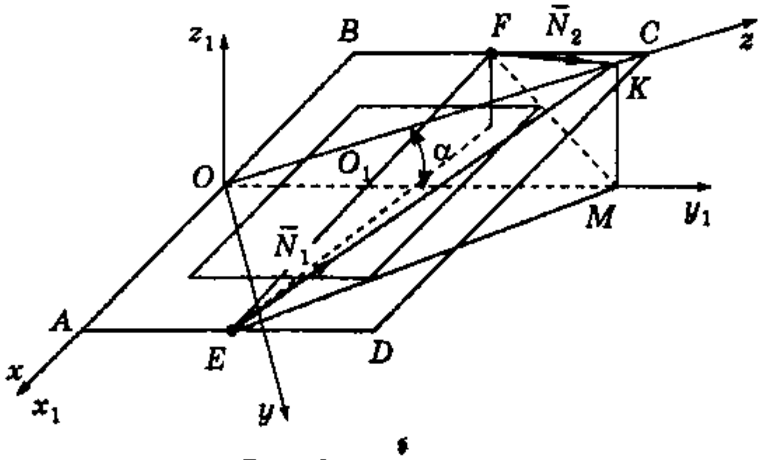


Рис. 2

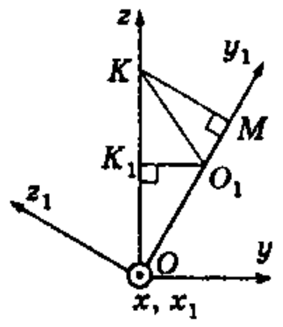


Рис. 3

Примечание. На рис. 3 условный знак ⊙ означает, что оси x и x_1 перпендикулярны плоскости рисунка и направлены к нам.

Теперь составим уравнения равновесия в системе координат xyz:

$$\begin{cases} N_1 \cos\alpha_1 + N_2 \cos\alpha_2 = 0, \\ N_1 \cos\beta_1 + N_2 \cos\beta_2 + Y_L + Y_M = 0, \\ N_1 \cos\gamma_1 + N_2 \cos\gamma_2 + Z_L + Z_M - G = 0, \\ -G \cdot K_1O_1 + (y_E N_1 \cos\gamma_1 - z_E N_1 \cos\beta_1) + (y_F N_2 \cos\gamma_2 - z_F N_2 \cos\beta_2) = 0, \\ Z_M \cdot OM - Z_L \cdot OL + (z_E N_1 \cos\alpha_1 - x_E N_1 \cos\gamma_1) + \\ + (z_F N_2 \cos\alpha_2 - x_F N_2 \cos\gamma_2) = 0, \\ Y_L \cdot OL - Y_M \cdot OM = 0, \end{cases}$$

здесь $(x_E,\ y_E,\ z_E)$ и $(x_F,\ y_F,\ z_F)$ — соответственно координаты точек E и F.

Из первого уравнения системы найдем:

$$-\frac{12}{17} N_1 + \frac{12}{17} N_2 = 0 \Rightarrow N_1 = N_2;$$

из шестого —

$$Y_L = Y_M,$$

так как $OL = OM$.

Из пятого уравнения системы, при условии $N_1 = N_2$, $z_E = z_F$, $x_E = -x_F$, $\cos\gamma_1 = \cos\gamma_2$, $\cos\alpha_1 = -\cos\alpha_2$, $OM = OL$, получим

$$Z_M = Z_L.$$

Так как

$$y_E = y_F = \frac{45}{2}\ \text{см},\ z_E = z_F = 30\ \text{см},\ x_E = -x_F = 30\ \text{см},$$

то из четвертого уравнения системы найдем:

$$N_1 = N_2 = \frac{G \cdot K_1O_1}{2(y_E \cos\gamma_1 - z_E \cos\beta_1)} =$$

$$= \frac{200 \cdot \frac{45}{2}}{2\left(\frac{45}{2} \cdot \frac{8}{17} + 30 \cdot \frac{9}{17}\right)} = \frac{50 \cdot 45 \cdot 17}{450} = 85\ \text{Н},$$

а из второго и третьего —

$$Y_L = Y_M = \frac{9}{17} \cdot N_1 = \frac{9}{17} \cdot 85 = 45 \text{ Н};$$

$$Z_L = Z_M = \frac{G}{2} - \frac{8}{17} \cdot N_1 = 100 - \frac{8}{17} \cdot 85 = 60 \text{ Н}.$$

Давление на гвозди:

$$Y'_L = Y'_M = -Y_L = -45 \text{ Н}; \; Z'_L = Z'_M = -Z_L = -60 \text{ Н}.$$

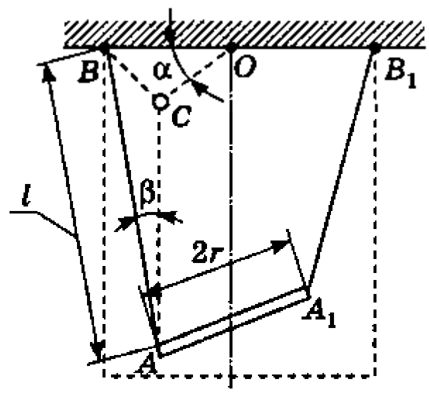
Натяжение шнура:

$$T = N_1 = N_2 = 85 \text{ Н}.$$

Ответ: $T = 85$ Н; $Y'_L = Y'_M = -45$ Н; $Z'_L = Z'_M = -60$ Н.

Задача 8.41

Бифиляр состоит из однородного стержня AA_1, подвешенного на двух нерастяжимых нитях длиной l, которые укреплены в точках B и B_1. Длина стержня равна $AA_1 = BB_1 = 2r$, а вес равен P. Стержень повернут вокруг вертикальной оси на угол α. Определить момент M пары, которую нужно приложить к стержню, чтобы удержать его в равновесии, а также натяжение T нитей.



Решение

Исходя из условия

$$\bar{T} = \bar{T}' + \bar{T}'',$$

где

$$\bar{T}' = T \sin\beta, \; \bar{T}'' = T \cos\beta,$$

и из уравнения равновесия для проекций сил на ось z и уравнения моментов относительно точки O_1, при условии $T' \cdot 2r = M$, получим

$$T'' = \frac{P}{2}.$$

Тогда

$$T = \frac{T''}{\cos\beta} = \frac{P}{2\cos\beta}.$$

Из рис. 1 определим:

$$BC = l\sin\beta.$$

С другой стороны (рис. 2),

$$BC = 2r\sin\frac{\alpha}{2}.$$

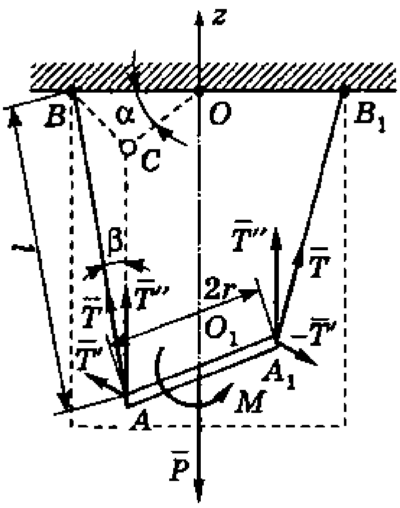


Рис. 1

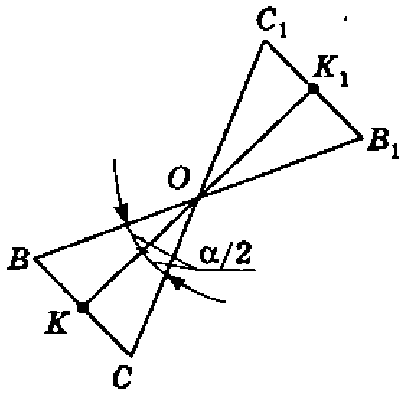


Рис. 2

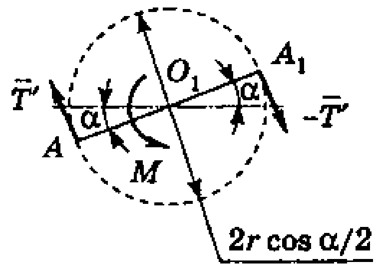


Рис. 3

Следовательно,

$$\sin\beta = \frac{2r}{l}\sin\frac{\alpha}{2},\ \cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{\frac{l^2 - 4r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{l}}.$$

Тогда

$$T = \frac{lP}{2\sqrt{l^2 - 4r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

На основании рис. 1, 3 получим

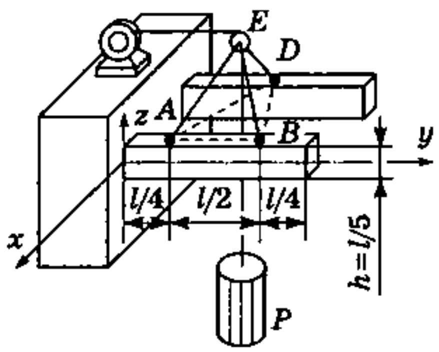
$$M = T'\cdot KK_1 = T'\cdot 2r\cos\frac{\alpha}{2} = T\sin\beta\cdot 2r\cos\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{2Pr^2 \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{l^2 - 4r^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{Pr^2 \sin\alpha}{\sqrt{l^2 - 4r^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

Ответ: $M = \dfrac{Pr^2 \sin\alpha}{\sqrt{l^2 - 4r^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}}$; $T = \dfrac{lP}{2\sqrt{l^2 - 4r^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}}$.

Задача 8.42

Тренога $ABDE$, имеющая форму правильной пирамиды, укреплена шарнирно на двух консольных балках. Через блок, укрепленный в вершине E треноги, перекинут трос, равномерно поднимающий с помощью лебедки груз весом P. От блока к лебедке трос тянется параллельно консоли. Определить реакции заделки первой консоли, пренебрегая ее весом и весом треноги. Высота треноги равна $l/2$.



Решение

Изобразим силы, действующие на треногу, а также возникающие в жесткой заделке первой консоли (рис. 1).

Используя свойства правильной пирамиды, предварительно рассчитаем (рис. 1, 2):

$$AO_1 = \frac{l}{4\sin 60^\circ} = \frac{l}{2\sqrt{3}};$$

$$\frac{l/2}{AO_1} = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{l}{2AO_1} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ;$$

$$O_1K = AO_1 \cos 60^\circ = \frac{l}{4\sqrt{3}}; \quad KD = 3O_1K = \frac{\sqrt{3}l}{4}.$$

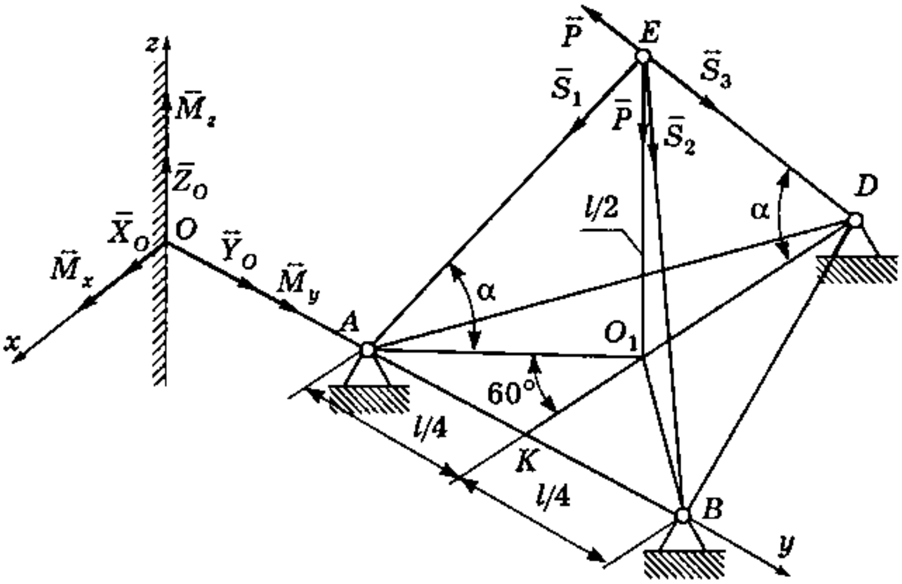


Рис. 1

Найдем теперь силу $\bar{S}_3$, для чего составим уравнение моментов относительно оси y:

$$S_3 \cdot KD \sin 60^\circ - P \cdot O_1K = 0,$$

или

$$\frac{3l}{8} S_3 - P \frac{l}{4\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow S_3 = \frac{2\sqrt{3}}{9} P;$$

$$S_3' = S_3 \sin 60^\circ;\ S_3'' = S_3 \cos 60^\circ.$$

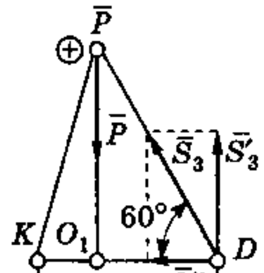


Рис. 2

Составим уравнения равновесия консоли:

— в проекциях на ось x:

$$X_O + S_3 \cos 60^\circ = 0 \Rightarrow X_O = -\frac{\sqrt{3}}{9} P;$$

— в проекциях на ось y:

$$Y_O - P = 0 \Rightarrow Y_O = P;$$

— в проекциях на ось z:

$$Z_O - P + S_3 \sin 60^\circ = 0 \Rightarrow Z_O = \frac{2P}{3}.$$

Определим реактивные моменты в заделке, для чего составим уравнения моментов относительно осей x, y, z:

$$M_x + P\left(\frac{l}{2}+\frac{l}{10}\right) - P\left(\frac{l}{4}+\frac{l}{4}\right) + S_3'\left(\frac{l}{4}+\frac{l}{4}\right) = 0;$$

$$M_y - P\cdot KO_1 + S_3'\cdot KD + S_3''\cdot\frac{l}{10} = 0;$$

$$M_z + P\cdot O_1K - S_3''\left(\frac{l}{4}+\frac{l}{4}\right) = 0.$$

Из этих уравнений найдем:

$$M_x = -\frac{9}{15}Pl;$$

$$M_y = P\cdot KO_1 - \left(S_3'\cdot KD + S_3''\cdot\frac{1}{10}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{90}Pl;$$

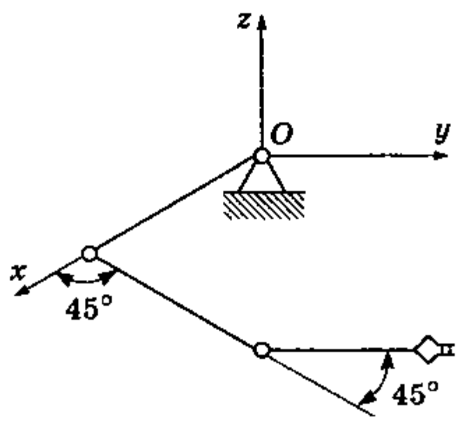
$$M_z = -P\cdot O_1K + S_3''\frac{l}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{36}Pl.$$

О т в е т: $X_O = -\frac{\sqrt{3}}{9}P$; $Y_O = P$, $Z_O = \frac{2}{3}P$;

$M_x = -\frac{9}{15}Pl$; $M_y = -\frac{\sqrt{3}}{90}Pl$; $M_z = -\frac{\sqrt{3}}{36}Pl$.

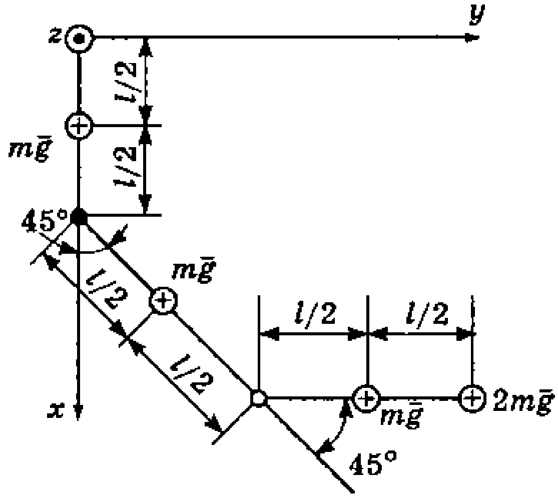
Задача 8.43

Четырехзвенный механизм робота-манипулятора расположен в горизонтальной плоскости Oxy. Длины всех звеньев одинаковы и равны l, масса каждого звена m. Масса объекта манипулирования $2m$. Найти моменты сил тяжести относительно координатных осей. Звенья считать однородными стержнями.



Р е ш е н и е

Так как все силы параллельны оси z, то момент силы тяжести относительно оси z равен



$$M_z = 0.$$

П р и м е ч а н и е. На рисунке ось z и все силы тяжести перпендикулярны плоскости рисунка, причем знак ⊕ обозначает, что силы направлены от нас, знак ⊙ — ось z направлена к нам.

На основании рисунка найдем моменты сил тяжести:
относительно оси x:

$$M_x = -\left[mg\frac{l}{2}\sin 45° + mg\left(l\sin 45° + \frac{l}{2}\right) + 2mg(l\sin 45° + l)\right] = -4{,}98mgl;$$

относительно оси y:

$$M_y = mg\frac{l}{2} + mg\left(l + \frac{l}{2}\cos 45°\right) + mg(l + l\cos 45°) + 2mg(l + l\cos 45°) =$$

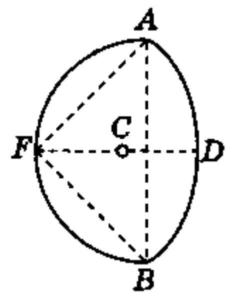
$$= 6{,}98mgl.$$

О т в е т: $M_x = -4{,}98mgl$; $M_y = 6{,}98mgl$; $M_z = 0$.

9. Центр тяжести

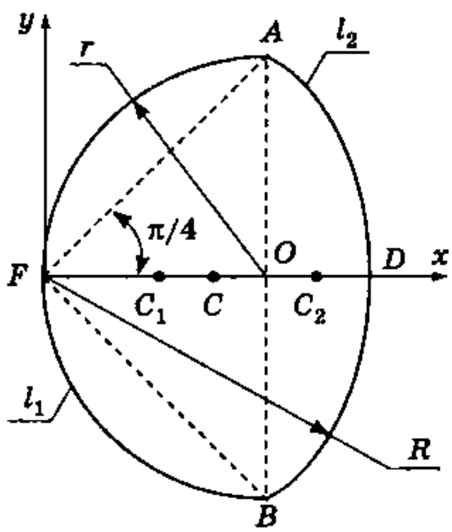
Задача 9.1

Определить положение центра тяжести C стержневого контура $AFBD$, состоящего из дуги ADB четверти окружности радиусом $FD = R$ и из дуги полуокружности AFB, построенной на хорде AB как на диаметре. Линейные плотности стержней одинаковы.



Решение

Так как проведенная на рисунке ось x является осью симметрии, то центр тяжести C стержневого контура будет лежать на этой оси. Если обозначить через l_1 и l_2 длины контуров AFB и ADB соответственно, то получим



$$x_C = FC = \frac{x_{C1} l_1 + x_{C2} l_2}{l_1 + l_2}, \qquad (1)$$

где x_{C1}, x_{C2} — абсциссы центров тяжести C_1 и C_2 дуг AFB и ADB.

$$x_{C1} = FC_1 = FO - OC_1 = r - r\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = r - \frac{2r}{\pi} = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}R,$$

где $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}R$.

$$x_{C2} = FC_2 = R\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}R.$$

Подставляя выражения для x_{C1} и x_{C2} в (1) и учитывая, что

$$l_1 = \pi r = \frac{\sqrt{2}\cdot\pi R}{2},\ l_2 = \frac{\pi R}{2},$$

найдем:

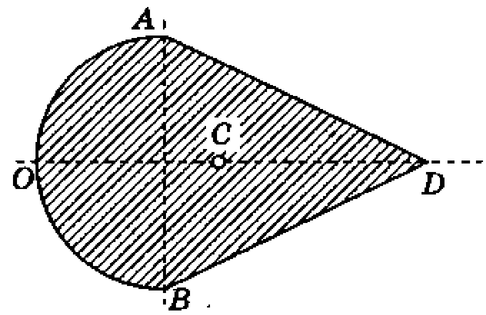
$$FC = \frac{\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}R\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\pi R + \frac{2\sqrt{2}}{\pi}R\cdot\frac{\pi R}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi R + \frac{\pi R}{2}} = \frac{1-\frac{2}{\pi}+2\frac{\sqrt{2}}{\pi}}{\sqrt{2}+1}R =$$

$$= R(\sqrt{2}-1) + \frac{2R}{\pi}(\sqrt{2}-1)^2 = R(\sqrt{2}-1) + \frac{2R}{\pi}(3-2\sqrt{2}) = 0{,}5235R.$$

О т в е т: $FC = R(\sqrt{2}-1) + \frac{2R}{\pi}(3-2\sqrt{2}) = 0{,}5235R.$

Задача 9.2

Определить положение центра тяжести C площади, ограниченной полуокружностью AOB радиусом R и двумя прямыми равной длины AD и DB, причем $OD = 3R$.



Р е ш е н и е

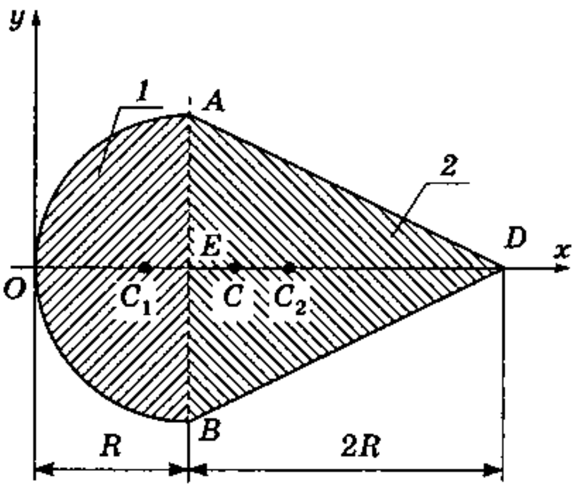
Проведем ось симметрии x с началом в точке O. Представленная на рисунке фигура состоит из двух: *1* — полукруг AOB с центром тяжести C_1; *2* — треугольник ABD с центром тяжести C_2.

Пусть x_C, x_{C1}, x_{C2} — абсциссы точек C, C_1, C_2 соответственно; S_1, S_2 — площади фигур *1* и *2*. Найдем:

$$x_{C1} = OC_1 = R - \frac{2}{3}R\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = R\left(1-\frac{4}{3\pi}\right);$$

$$x_{C2} = OC_2 = OE + EC_2 = OE + \frac{1}{3}ED = R + \frac{2}{3}R = \frac{5}{3}R;$$

$$S_1 = S_{AOB} = \frac{1}{2}\pi R^2;$$



$$S_2 = S_{ADB} = \frac{1}{2} AB \cdot FD =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot 2R = 2R^2.$$

Подставляя найденные соотношения в формулу

$$x_C = OC = \frac{S_1 x_{C1} + S_2 x_{C2}}{S_1 + S_2},$$

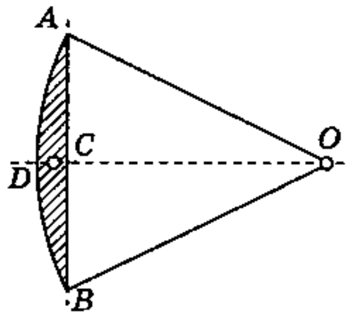
получим

$$OC = \frac{\frac{1}{2}\pi R^2 \cdot R\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) + 2R^2 \cdot \frac{5}{3}R}{\frac{1}{2}\pi R^2 + 2R^2} = \frac{\pi - \frac{4}{2} + \frac{20}{3}}{\pi + 4} R = \frac{3\pi + 16}{3\pi + 12} R = 1{,}19R.$$

О т в е т: $OC = \dfrac{3\pi + 16}{3\pi + 12} R = 1{,}19R.$

Задача 9.3

Найти центр тяжести C площади кругового сегмента ADB радиусом $AO = 30$ см, если угол AOB равен 60°.

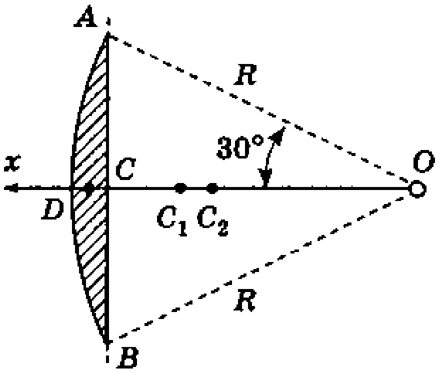


Р е ш е н и е

Представим площадь кругового сегмента как разность площадей сектора OAB (фигура 1 площадью S_1) и треугольника OAB (фигура 2 площадью S_2). Тогда центр тяжести сегмента определяется по формуле

$$x_C = OC = \frac{S_1 x_{C1} - S_2 x_{C2}}{S_1 - S_2}.$$

С помощью рисунка найдем:



$$S_1 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{3}R^2,$$

$$x_{C1} = OC_1 = \frac{2}{3}R\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{2R}{\pi},$$

$$S_2 = \frac{1}{2}R^2\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2,$$

$$x_{C2} = OC_2 = \frac{2}{3}R\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}R.$$

Тогда

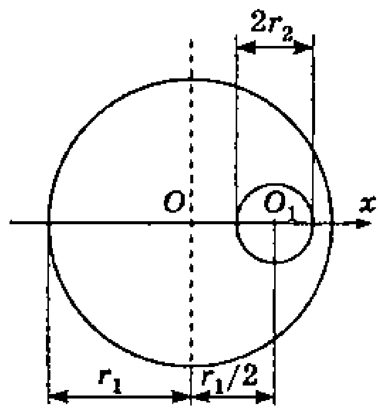
$$OC = \frac{\frac{\pi}{6}R^2\cdot\frac{2R}{\pi} - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}R}{\frac{\pi}{6}R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2} = \frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2\pi - 3\sqrt{3}}OA =$$

$$= \frac{30}{2\pi - 3\sqrt{3}} \approx 27{,}7 \text{ см}.$$

Ответ: $OC = 27{,}7$ см.

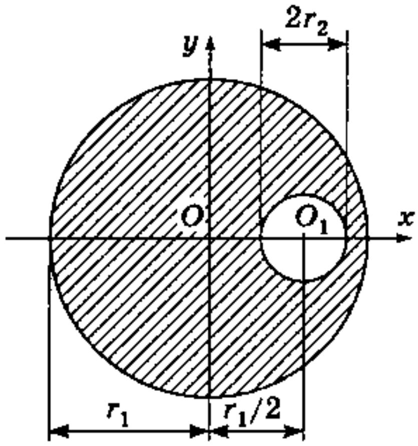
Задача 9.4

Определить положение центра тяжести однородного диска с круглым отверстием, предполагая радиус диска равным r_1, радиус отверстия равным r_2 и центр этого отверстия находящимся на расстоянии $r_1/2$ от центра диска.



Решение

Введем систему координат с началом, совпадающим с центром диска O (см. рисунок). Так как ось Ox проходит и через центр отверстия, то она является осью симметрии и, следовательно, центр тяжести будет располагаться на этой оси. Обозначим диск без выреза фигурой 1 площадью S_1 и с центром тяжести $C_1 = O$, отверстие — фигурой 2 площадью S_2 и с центром тяжести $C_2 = O_1$. Тогда получим



$$S_1 = \pi r_1^2, \;\; x_{C1} = OO = 0,$$

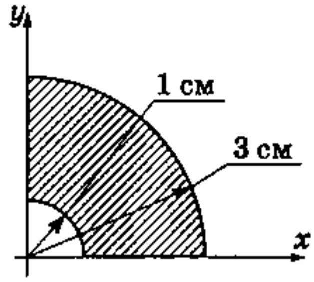
$$S_2 = \pi r_2^2, \;\; x_{C2} = OO_1 = \frac{r_1}{2}.$$

$$x_C = \frac{S_1 x_{C1} - S_2 x_{C2}}{S_1 - S_2} =$$

$$= -\frac{\pi r_2^2 \cdot \frac{r_1}{2}}{\pi r_1^2 - \pi r_2^2} = -\frac{r_1 r_2^2}{2(r_1^2 - r_2^2)}.$$

Ответ: $x_C = -\dfrac{r_1 r_2^2}{2(r_1^2 - r_2^2)}$.

Задача 9.5

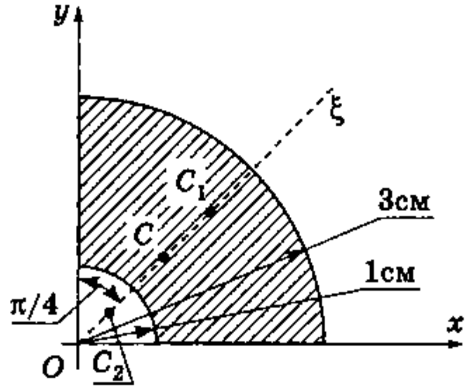


Определить координаты центра тяжести четверти кольца, показанного на рисунке.

Решение

Центр тяжести C четверти кольца лежит на оси симметрии $O\xi$ (см. рисунок) и определяется по формуле

$$OC = \frac{S_1 \cdot OC_1 - S_2 \cdot OC_2}{S_1 - S_2},$$



где индексом 1 помечены величины, относящиеся ко всей четверти круга радиусом $R_1 = 3$ см, индексом 2 — к вырезу радиусом $R_2 = 1$ см. Имеем

$$S_1 = \frac{1}{4}\pi R_1^2, \; OC_1 = \frac{2}{3} R_1 \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} R_1;$$

$$S_2 = \frac{1}{4}\pi R_2^2,\ OC_2 = \frac{2}{3} R_2 \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} R_2.$$

Тогда

$$OC = \frac{\frac{1}{4}\pi R_1^2 \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} R_1 - \frac{1}{4}\pi R_2^2 \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} R_2}{\frac{1}{4}\pi R_1^2 - \frac{1}{4}\pi R_2^2} =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1^2 - R_2^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \frac{R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2}{R_1 + R_2},$$

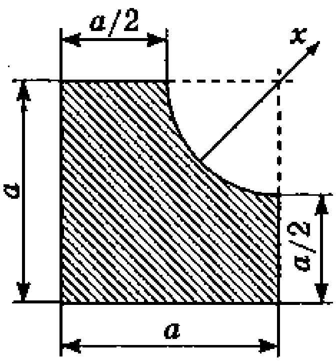
$$x_C = y_C = OC \sin\frac{\pi}{4} = \frac{4}{3\pi} \frac{R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2}{R_1 + R_2} =$$

$$= \frac{4}{3\pi} \frac{3^2 + 3\cdot 1 + 1^2}{3 + 1} = \frac{13}{3\pi} = 1{,}38 \text{ см}.$$

О т в е т: $x_C = y_C = 1{,}38$ см.

Задача 9.6

Найти координаты центра тяжести фигуры, изображенной на рисунке.



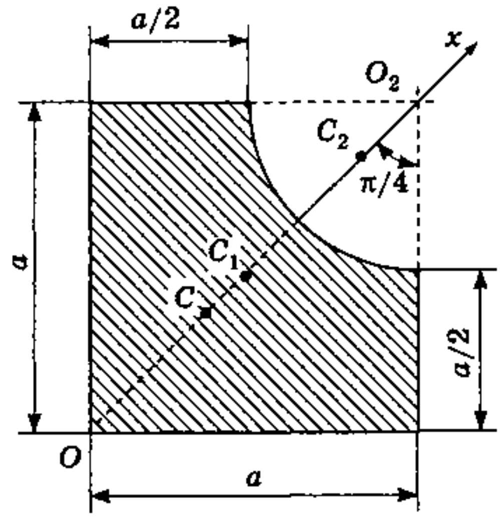
Р е ш е н и е

Пусть фигура 1 — весь квадрат; фигура 2 — вырез в четверть круга; а S_1, C_1, x_{C1} — соответственно площадь, центр тяжести и координата центра тяжести фигуры 1; S_2, C_2, x_{C2} — аналогичные параметры фигуры 2, а центр тяжести C данной фигуры имеет координату x_C (см. рисунок). Тогда

$$S_1 = a^2,\ x_{C1} = a\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{4}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{16},$$

$$x_{C2} = OC_2 = OO_2 - C_2O_2 =$$



$$= \sqrt{2}a - \frac{2}{3}\frac{a}{2}\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \sqrt{2}a - \frac{4}{3}\frac{\sqrt{2}}{\pi}a = \left(1 - \frac{2}{3\pi}\right)\sqrt{2}a.$$

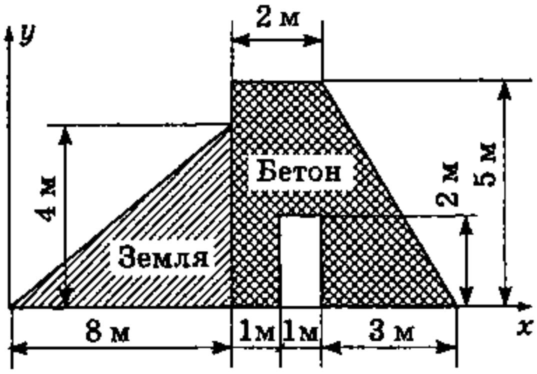
$$x_C = OC = \frac{S_1x_{C1} - S_2x_{C2}}{S_1 - S_2} =$$

$$= \frac{a^2\frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{\pi\alpha^2}{16}\left(1 - \frac{2}{3\pi}\right)\sqrt{2a}}{a^2 - \frac{\pi\alpha^2}{16}} = \frac{8 - \pi + \frac{2}{3}}{16 - \pi}\sqrt{2}a = \frac{26 - 3\pi}{48 - 3\pi}\sqrt{2}a = 0{,}61a.$$

О т в е т: $x_C = 0{,}61a$.

Задача 9.7

Найти центр тяжести поперечного сечения плотины, показанного на рисунке, принимая, что удельный вес бетона равен 24 кН/м^3, а земляного грунта 16 кН/м^3.



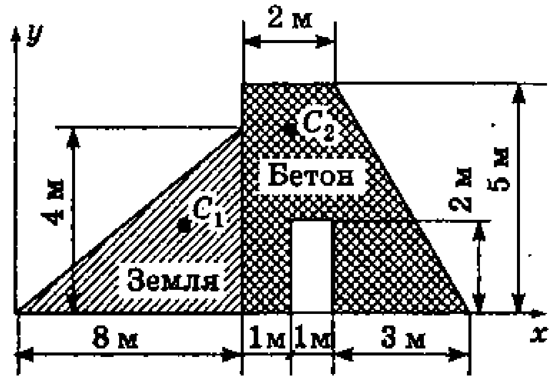
Р е ш е н и е

Центр тяжести плотности на один погонный метр определим по формулам

$$x_C = \frac{\gamma_1 S_1 x_1 + \gamma_2 S_2 x_2}{\gamma_1 S_1 + \gamma_2 S_2},$$

$$y_C = \frac{\gamma_1 S_1 y_1 + \gamma_2 S_2 y_2}{\gamma_1 S_1 + \gamma_2 S_2}.$$

Здесь γ_1, S_1, x_1, y_1 — соответственно плотность, площадь поперечного сечения, координаты центра тяжести земляной насыпи; γ_2, S_2, x_2, y_2 — плотность, площадь поперечного сечения, координаты центра тяжести бетона.



Из рисунка определим

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 4 = 16 \text{ м}^2,\ x_1 = \frac{2}{3}\cdot 8 = \frac{16}{3} \text{ м},$$

$$y_1 = \frac{1}{3}\cdot 4 = \frac{4}{3} \text{ м}.$$

Конструкцию из бетона представим состоящей из трапеции с прямоугольным вырезом, а трапецию, в свою очередь, в виде прямоугольника и треугольника с основанием 3 м и высотой 5 м. На основании этого получим

$$S_2 = \frac{5+2}{2}\cdot 5 - 1\cdot 2 = 15{,}5 \text{ м}^2,$$

$$x_2 = 8 + \frac{2\cdot 5\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\left(2 + \frac{1}{3}\cdot 3\right) - 1\cdot 2\cdot 1{,}5}{2\cdot 5 + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5 - 1\cdot 2} = 8 + \frac{29{,}5}{15{,}5} = 9{,}9 \text{ м}.$$

$$y_2 = \frac{2\cdot 5\cdot 2{,}5 + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot \frac{5}{3} - 1\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 5 + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5 - 1\cdot 2} = \frac{35{,}5}{15{,}5} = 2{,}29 \text{ м}.$$

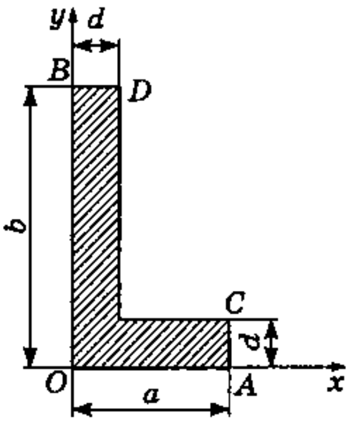
Окончательно получим

$$x_C = \frac{16\cdot 16\cdot \frac{16}{3} + 24\cdot 15{,}5\cdot 9{,}9}{16\cdot 16 + 24\cdot 15{,}5} = 8{,}04 \text{ м},$$

$$y_C = \frac{16\cdot 16\cdot \frac{4}{3} + 24\cdot 15{,}5\cdot 2{,}29}{16\cdot 16 + 24\cdot 15{,}5} = 1{,}9 \text{ м}.$$

О т в е т: $x_C = 8{,}04$ м; $y_C = 1{,}9$ м.

Задача 9.8



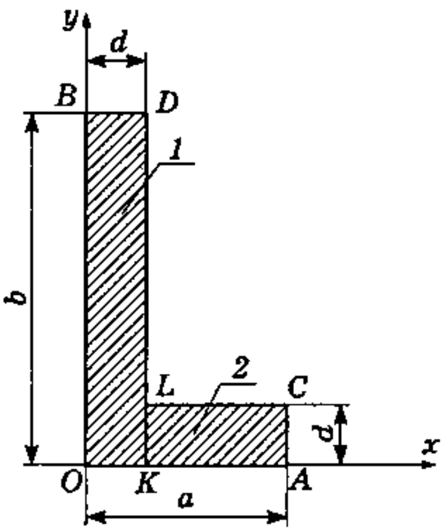
Найти координаты центра тяжести поперечного сечения неравнобокого уголка, полки которого имеют ширину $OA = a$, $OB = b$ и толщину $AC = BD = d$.

Р е ш е н и е

Представим уголок состоящим из прямоугольника $OBDK$ — тело *1* и прямоугольника $LKAC$ — тело *2*. Тогда координаты центра тяжести уголка будут рассчитываться по формулам

$$x = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2}{S_1 + S_2}, \quad y = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2}{S_1 + S_2},$$

где S_i — площадь тела i; x_i, y_i — координаты центра тяжести тела i, $i = 1, 2$.



Из рисунка определим

$$S_1 = db,\ x_1 = \frac{d}{2},\ y_1 = \frac{b}{2},$$

$$S_2 = (a-d)d,$$

$$x_2 = d + \frac{a-d}{2} = \frac{a+d}{2},\ y_2 = \frac{d}{2}.$$

Тогда окончательно найдем:

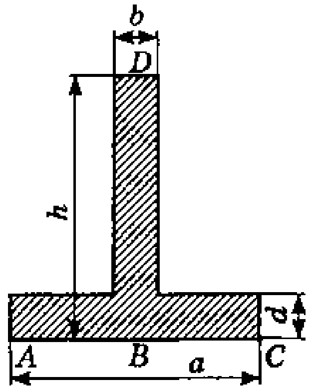
$$x = \frac{db\dfrac{d}{2} + (a-d)d\dfrac{a+d}{2}}{ab + (a-d)d} = \frac{a^2 + bd - d^2}{2(a+b-d)},$$

$$y = \frac{db\dfrac{b}{2} + (a-d)d\dfrac{d}{2}}{db + (a-d)d} = \frac{b^2 + ad - d^2}{2(a+b-d)}.$$

О т в е т: $x = \dfrac{a^2 + bd - d^2}{2(a+b-d)}$; $y = \dfrac{b^2 + ad - d^2}{2(a+b-d)}$.

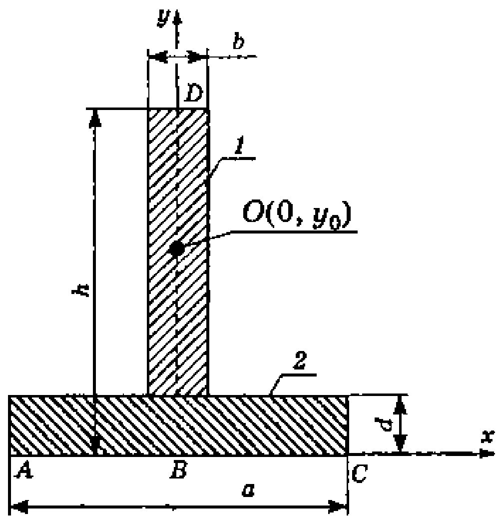
Задача 9.9

Найти расстояние центра тяжести таврового сечения $ABCD$ от стороны его AC, если высота тавра $BD = h$, ширина полки $AC = a$, толщина полки равна d и толщина стенки равна b.



Р е ш е н и е

Так как тавровое сечение $ABCD$ имеет ось симметрии, то выберем систему координат таким образом, чтобы ось y была расположена на оси симметрии, а ось x проходила через нижнее основание. Тогда центр тяжести $O(x_O, y_O)$ лежит на оси y, т.е. $x_O = 0$. Искомое расстояние BO равно величине y_O.



Из рисунка определим S_1, S_2 — площади фигур *1* и *2*, y_1, y_2 — соответственно ординаты центров тяжести этих фигур и получим

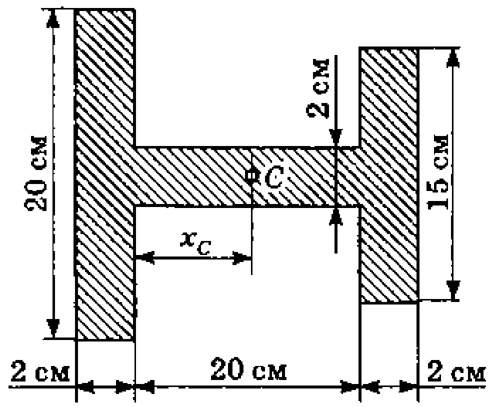
$$BO = y_O = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2}{S_1 + S_2} =$$

$$= \frac{(h-d)\,b\,\dfrac{h+d}{2} + ad\,\dfrac{d}{2}}{(h-d)\,b + ad} = \frac{ad^2 + bh^2 - bd^2}{2(ad + bh - bd)}.$$

О т в е т: $\dfrac{ad^2 + bh^2 - bd^2}{2(ad + bh - bd)}$.

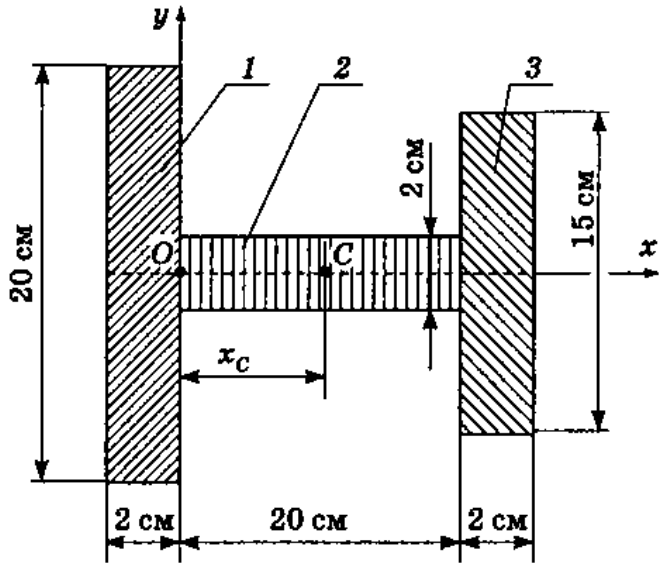
Задача 9.10

Найти центр тяжести двутаврового профиля, размеры которого указаны на рисунке.



Р е ш е н и е

Введем систему координат, расположив ось x на оси симметрии, как показано на рисунке.



Представим двутавровую балку состоящей из левого вертикального прямоугольника — тело *1*, центрального горизонтального прямоугольника — тело *2* и вертикального левого прямоугольника — тело *3*.

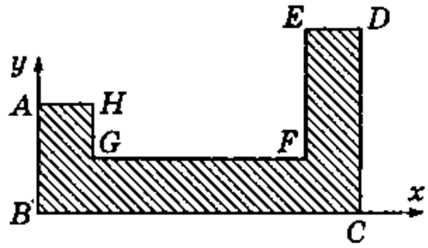
Тогда получим

$$x_C = \frac{S_1x_1 + S_2x_2 + S_3x_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{20\cdot2(-1) + 20\cdot2\cdot10 + 15\cdot2\cdot21}{20\cdot2 + 20\cdot2 + 15\cdot2} = \frac{990}{110} = 9 \text{ см}.$$

О т в е т: $x_C = 9$ см.

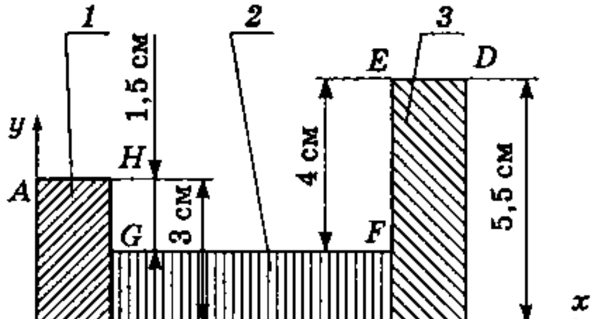
Задача 9.11

Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, изображенной на рисунке, зная, что $AH = 2$ см, $HG = 1{,}5$ см, $AB = 3$ см, $BC = 10$ см, $EF = 4$ см, $ED = 2$ см.



Р е ш е н и е

Разобьем пластинку на три прямоугольника, как показано на рисунке.



Обозначим: x, y — координаты центра тяжести пластинки; S_i, x_i, y_i — соответственно площадь и координаты центра тяжести прямоугольника i, $i = \overline{1, 3}$. Тогда

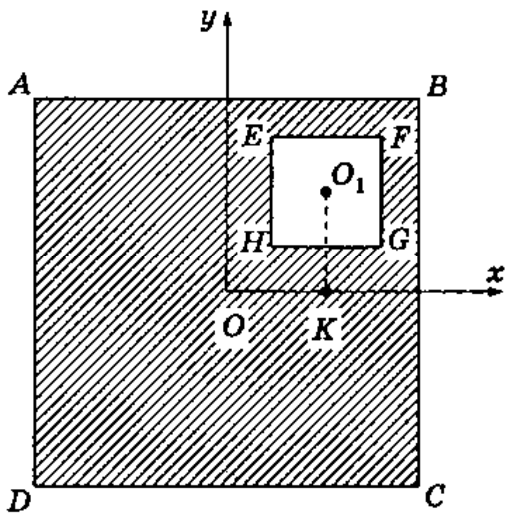
$$x = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{6 \cdot 1 + 9 \cdot 5 + 11 \cdot 9}{26} = \frac{150}{26} = 5\frac{10}{13} \text{ см},$$

$$y = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{6 \cdot 1{,}5 + 9 \cdot 0{,}75 + 11 \cdot 2{,}75}{26} = \frac{23}{13} = 1\frac{10}{13} \text{ см},$$

Ответ: $x = 5\frac{10}{13}$ см; $y = 1\frac{10}{13}$ см.

Задача 9.12

В однородной квадратной доске $ABCD$ со стороной $AB = 2$ м вырезано квадратное отверстие $EFGH$, стороны которого соответственно параллельны сторонам $ABCD$ и равны 0,7 м каждая. Определить координаты x и y центра тяжести оставшейся части доски, зная, что $OK = O_1K = 0{,}5$ м, где O и O_1 — центры квадратов, OK и O_1K соответственно параллельны сторонам квадратов.

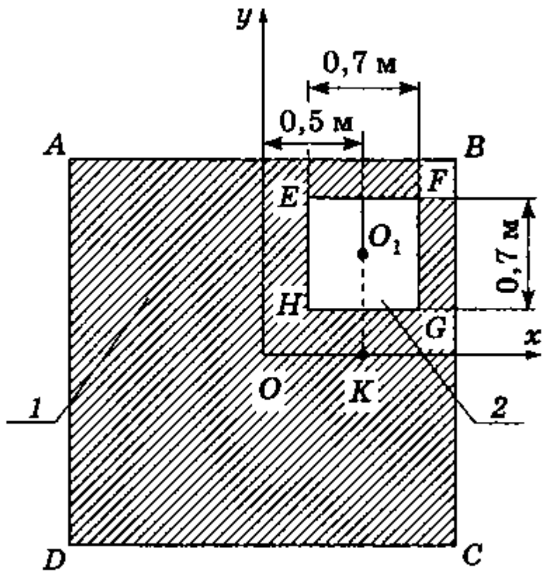


Решение

Пусть фигура *1* — квадрат $ABCD$, фигура *2* — квадрат $EFGH$, S_i, x_i, y_i — соответственно площадь и координаты центра тяжести фигуры i, $i = 1, 2$ (см. рисунок).

Искомые координаты центра тяжести вычислим по формулам

$$x = \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2}{S_1 - S_2},$$



$$y = \frac{S_1 \cdot y_1 - S_2 \cdot y_2}{S_1 - S_2}.$$

Поскольку

$$x_1 = y_1 = 0,\ S_1 = 4\ \text{м}^2,\ S_2 = 0{,}49\ \text{м}^2,$$

$$x_2 = OK = 0{,}5\ \text{м};\ y_2 = O_1K = 0{,}5\ \text{м},$$

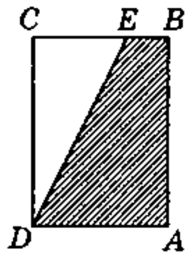
то получим

$$x = y = -0{,}07\ \text{м}.$$

Ответ: $x = y = -0{,}07$ м.

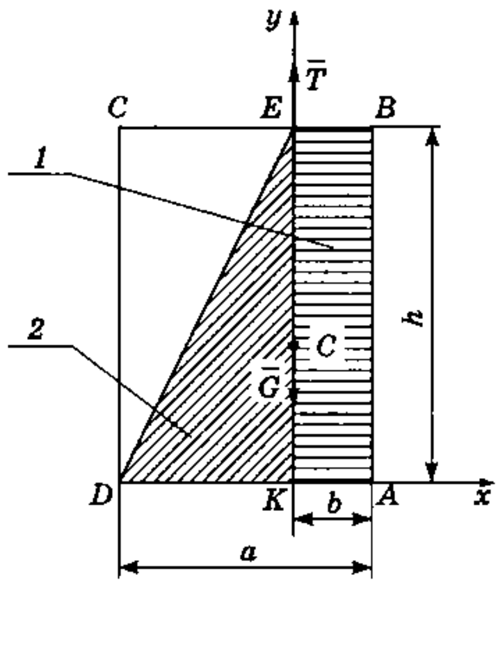
Задача 9.13

Провести через вершину D однородного прямоугольника $ABCD$ прямую DE так, чтобы при подвешивании отрезанной по этой прямой трапеции $ABED$ за вершину E сторона AD, равная a, была горизонтальна.



Решение

Чтобы при подвешивании трапеции $ABED$ за вершину E сторона AD была горизонтальна, необходимо, чтобы сила натяжения нити $\overline{T}$ и сила тяжести $\overline{G}$ лежали на одной прямой. Если ввести систему координат, как показано на рисунке, то должно выполняться условие $x_C = 0$, где x_C — абсцисса центра тяжести трапеции. Обозначим: фигура *1* прямоугольник $ABEK$, фигура *2* — треугольник EKD; S_i, x_i — соответственно площадь и абсцисса центра тяжести фигуры i, $i = 1, 2$. Тогда



$$x_C = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2}{S_1 + S_2} = 0.$$

Вычислим:

$$S_1 = bh,\ S_2 = \frac{a-b}{2}h,$$

$$x_1 = \frac{b}{2},\ x_2 = -\frac{1}{3}(a-b).$$

В результате получим

$$b\cdot h\cdot\frac{b}{2} - \frac{a-b}{2}\cdot h\cdot\frac{1}{3}(a-b) = 0,$$

или

$$b^2 + ab - \frac{a^2}{2} = 0.$$

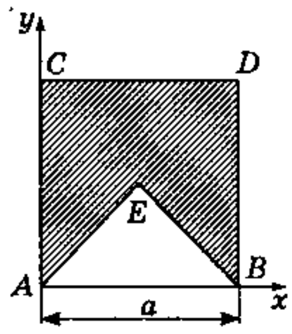
Поскольку b — величина неотрицательная, то найдем неотрицательный корень последнего квадратного уравнения:

$$b = \frac{-a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}} = \frac{a}{2}(\sqrt{3}-1) = 0{,}366a.$$

О т в е т: $BE = 0{,}366a$.

Задача 9.14

Дан квадрат $ABDC$, сторона которого равна a. Найти внутри него такую точку E, чтобы она была центром тяжести площади, которая получится, если из квадрата вырезать равнобедренный треугольник AEB.



Р е ш е н и е

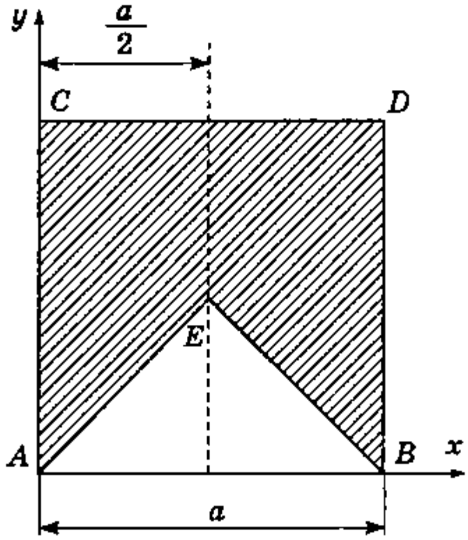
Так как из квадрата вырезан равнобедренный треугольник AEB, то прямая $x = \frac{a}{2}$ является осью симметрии, и тогда центр тяжести $E(x_E, y_E)$ лежит на этой прямой, т.е.

$$x_E = \frac{a}{2}.$$

Остается найти вторую его координату y_E. Для этого используем формулу

$$y_E = \frac{S_1 y_1 - S_2 y_2}{S_1 - S_2},$$

где S_1 — площадь квадрата $ABDC$; S_2 — площадь треугольника AEB; y_1, y_2 — соответственно ординаты центров тяжести указанных квадрата и треугольника.



Из рисунка определим

$$S_1 = a^2,\ y_1 = \frac{a}{2},\ S_2 = \frac{1}{2} a y_E,\ y_2 = \frac{1}{3} y_E.$$

В результате получим

$$y_E = \frac{a^2 \cdot \frac{a}{2} - \frac{1}{2} a y_E \cdot \frac{1}{3} y_E}{a^2 - \frac{1}{2} a y_E},$$

или

$$2y_E^2 - 6a y_E + 3a^2 = 0.$$

Следовательно,

$$y_E = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} a.$$

Поскольку величина y_E не может превышать величину a, то

$$y_E = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} a = 0{,}634a.$$

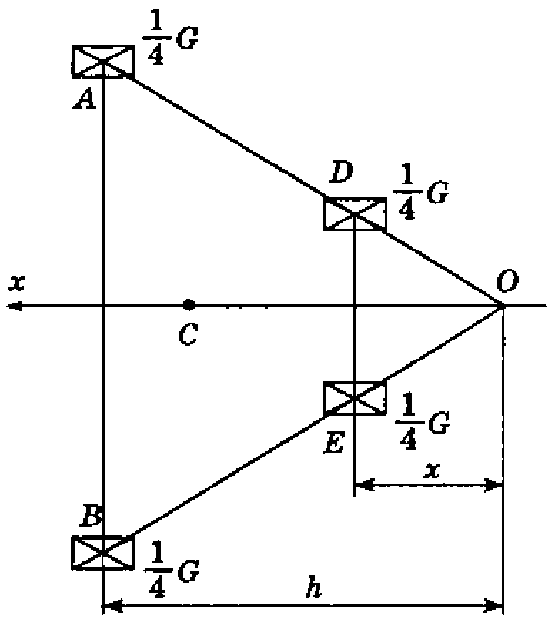
О т в е т: $x_E = \frac{a}{2}$; $y_E = 0{,}634$.

Задача 9.15

Четыре человека несут однородную треугольную пластину. Двое взялись за две вершины, остальные — за стороны, примыкающие к третьей вершине. На каком расстоянии от третьей вершины они должны поместиться, чтобы каждый из четырех поддерживал четверть полного веса пластины?

Решение

Учитывая, что центр тяжести пластины расположен в точке C (см. рисунок), составим уравнение



$$OC = \frac{m_A x_A + m_B x_B + m_D x_D + m_E x_E}{m_A + m_B + m_D + m_E},$$

где $m_A = m_B = m_D = m_E = \frac{1}{4}G$, G — вес пластины.

Так как

$$x_A = x_B = h,\ x_D = x_E = x,\ OC = \frac{2}{3}h,$$

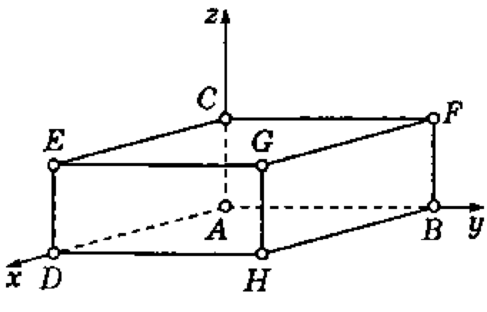
то из уравнения получим

$$2x = \frac{8}{3}h - 2h, \text{ или } x = \frac{1}{3}h.$$

Ответ: на расстоянии, равном 1/3 длины соответствующей стороны.

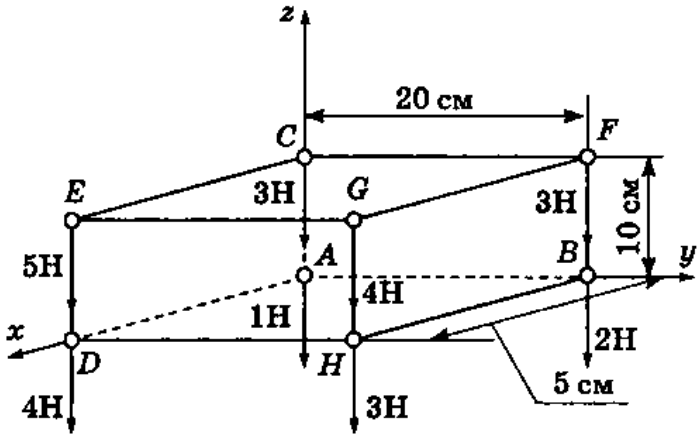
Задача 9.16

Определить координаты центра тяжести системы грузов, расположенных в вершинах прямоугольного параллелепипеда, ребра которого: $AB = 20$ см, $AC = 10$ см, $AD = 5$ см. Веса грузов в вершинах A, B, C, D, E, F, G, H соответственно равны 1 Н, 2 Н, 3 Н, 4 Н, 5 Н, 3 Н, 4 Н, 3 Н.



Решение

Обозначим: (x, y, z) — координаты искомого центра тяжести, (x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B), ..., (x_H, y_H, z_H) — соответственно координаты точек A, B, ..., H.



Тогда на основании рисунка получим

$$x = \frac{1 \cdot x_A + 2 \cdot x_B + 3 \cdot x_C + 4 \cdot x_D + 5 \cdot x_E + 3 \cdot x_F + 4 \cdot x_G + 3 \cdot x_H}{1+2+3+4+5+3+4+3} =$$

$$= \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 5}{25} = 3{,}2 \text{ см.}$$

Аналогично

$$y = \frac{1 \cdot y_A + 2 \cdot y_B + 3 \cdot y_C + 4 \cdot y_D + 5 \cdot y_E + 3 \cdot y_F + 4 \cdot y_G + 3 \cdot y_H}{1+2+3+4+5+3+4+3} =$$

$$= \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 20 + 4 \cdot 20 + 3 \cdot 20}{25} = 9{,}6 \text{ см.}$$

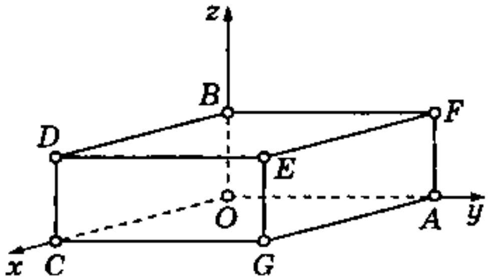
$$z = \frac{1 \cdot z_A + 2 \cdot z_B + 3 \cdot z_C + 4 \cdot z_D + 5 \cdot z_E + 3 \cdot z_F + 4 \cdot z_G + 3 \cdot z_H}{1+2+3+4+5+3+4+3} =$$

$$= \frac{(3+5+3+4) \cdot 10}{25} = 6 \text{ см.}$$

О т в е т: $x = 3{,}2$ см; $y = 9{,}6$ см; $z = 6$ см.

Задача 9.17

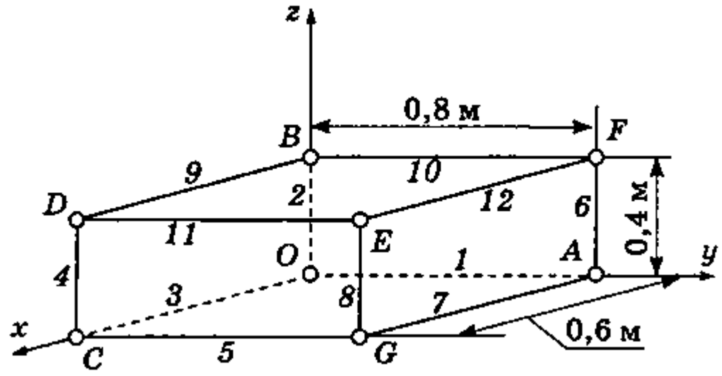
Определить координаты центра тяжести контура прямоугольного параллелепипеда, ребра которого суть однородные бруски длиной: OA = = 0,8 м, OB = 0,4 м, OC = 0,6 м. Вес



брусков равен соответственно: $OA = 250$ Н; OB, OC и CD по 75 Н; CG — 200 Н; AF — 125 Н; AG и GE по 50 Н; BD, BF, DE и EF по 25 Н.

Решение

Пронумеруем бруски: OA — 1; OB — 2; OC — 3; CD — 4; CG — 5; AF — 6; AG — 7; GE — 8; BD — 9; BF — 10; DE — 11; EF — 12 (см. рисунок).



Тогда координаты центра тяжести (x, y, z) будут рассчитываться по формулам

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{12} m_i x_i}{M}, \quad y = \frac{\sum_{i=1}^{12} m_i y_i}{M}, \quad z = \frac{\sum_{i=1}^{12} m_i z_i}{M},$$

где m_i — вес i-го бруска; x_i, y_i, z_i — соответствующая координата центра тяжести i-го бруска, $i = \overline{1, 12}$; $M = \sum_{i=1}^{12} m_i$.

Вычислим:

$$M = 250 + 3 \cdot 75 + 200 + 125 + 2 \cdot 50 + 4 \cdot 25 = 1000 \text{ Н}.$$

Учитывая, что силы тяжести брусков расположены в их центре, получим

$$x = \frac{(25 + 75 + 50 + 25) \cdot 0,3 + (200 + 75 + 50 + 25) \cdot 0,6}{1000} =$$

$$= 0,175 \cdot 0,3 + 0,35 \cdot 0,6 = 0,2625 \text{ м};$$

$$y=\frac{(200+250+25+25)\cdot 0{,}4+(50+50+125+25)\cdot 0{,}8}{1000}=$$

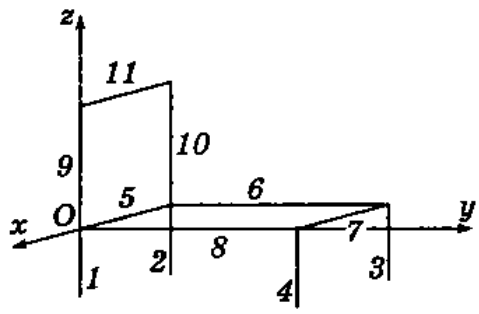
$$=0{,}5\cdot 0{,}4+0{,}25\cdot 0{,}8=0{,}4 \text{ м};$$

$$z=\frac{(75+75+50+125)\cdot 0{,}2+4\cdot 25\cdot 0{,}4}{1000}=0{,}325\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}4=0{,}105 \text{ м}.$$

Ответ: $x=0{,}2625$ м; $y=0{,}4$ м; $z=0{,}105$ м.

Задача 9.18

Найти координаты центра тяжести тела, имеющего вид стула, состоящего из стержней одинаковой длины и веса. Длина стержня равна 44 см.



Решение

Координаты центра тяжести (x, y, z) определим по формулам

$$x=\frac{\sum_{i=1}^{11} lx_i}{\sum_{i=1}^{11} l}=\frac{\sum x_i}{11},\quad y=\frac{\sum_{i=1}^{11} ly_i}{\sum_{i=1}^{11} l}=\frac{\sum_{i=1}^{11} y_i}{11},\quad z=\frac{\sum_{i=1}^{11} lz_i}{\sum_{i=1}^{11} l}=\frac{\sum_{i=1}^{11} z_i}{11},$$

где $l = 44$ — длина одного стержня; x_i, y_i, z_i — соответствующие координаты центра тяжести i-го стержня, $i=\overline{1, 11}$.

Учитывая, что центры тяжестей однородных стержней находятся в середине их сторон, представим данные в таблице:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\sum_{i=1}^{11}$
x_i	0	$-l$	$-l$	0	$-l/2$	$-l$	$-l/2$	0	0	$-l$	$-l/2$	$-5{,}5l$
y_i	0	0	l	l	0	$l/2$	l	$l/2$	0	0	0	$4l$
z_i	$-l/2$	$-l/2$	$-l/2$	$-l/2$	0	0	0	0	$l/2$	$l/2$	l	0

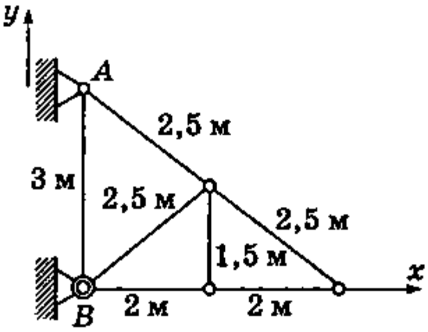
В результате получим

$$x=\frac{-5{,}5l}{11}=\frac{-5{,}5\cdot 44}{11}=-22\text{ см};\ y=\frac{4l}{11}=\frac{4\cdot 44}{11}=16\text{ см};\ z=\frac{0}{11}=0\text{ см}.$$

Ответ: $x=-22$ см; $y=16$ см; $z=0$ см.

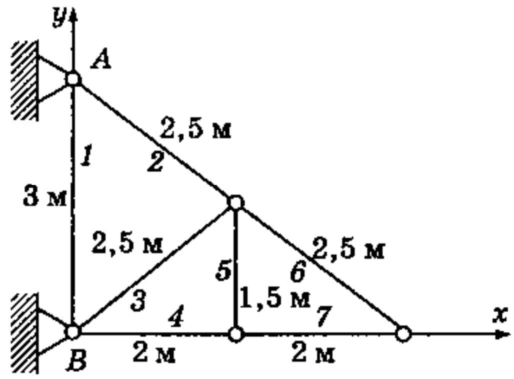
Задача 9.19

Найти координаты центра тяжести плоской фермы, состоящей из семи стержней, длины которых указаны на рисунке, если вес 1 м для всех стержней один и тот же.



Решение

Пронумеруем стержни (см. рисунок) и запишем формулы для вычисления координат (x, y) центра тяжести фермы в виде



$$x=\frac{\sum_{i=1}^{7} l_i x_i}{L},\ y=\frac{\sum_{i=1}^{7} l_i y_i}{L},$$

где l_i — длина i-го стержня; x_i, y_i — соответствующие координаты центра тяжести i-го стержня, $i=\overline{1,\ 7}$;

$$L=\sum_{i=1}^{7} l_i=3+3\cdot 2{,}5+2\cdot 2+1{,}5=16\text{ м}.$$

Учитывая, что центры тяжести находятся в серединах стержней, определим координаты центров тяжести и запишем данные в виде таблицы:

i	1	2	3	4	5	6	7
l_i	3	2,5	2,5	2	1,5	2,5	2
x_i	0	1	1	1	2	3	3
y_i	1,5	2,25	0,75	0	0,75	0,75	0

Тогда

$$x = \frac{(2{,}5+2{,}5+2)\cdot 1+1{,}5\cdot 2+(2{,}5+2)\cdot 3}{16} = \frac{23{,}5}{16} = 1{,}47 \text{ м},$$

$$y = \frac{3\cdot 1{,}5+2{,}5\cdot(2{,}25+0{,}75)+(1{,}5+2{,}5)\cdot 0{,}75}{16} = \frac{15}{16} = 0{,}94 \text{ м}.$$

О т в е т: $x = 1{,}47$ м; $y = 0{,}94$ м.

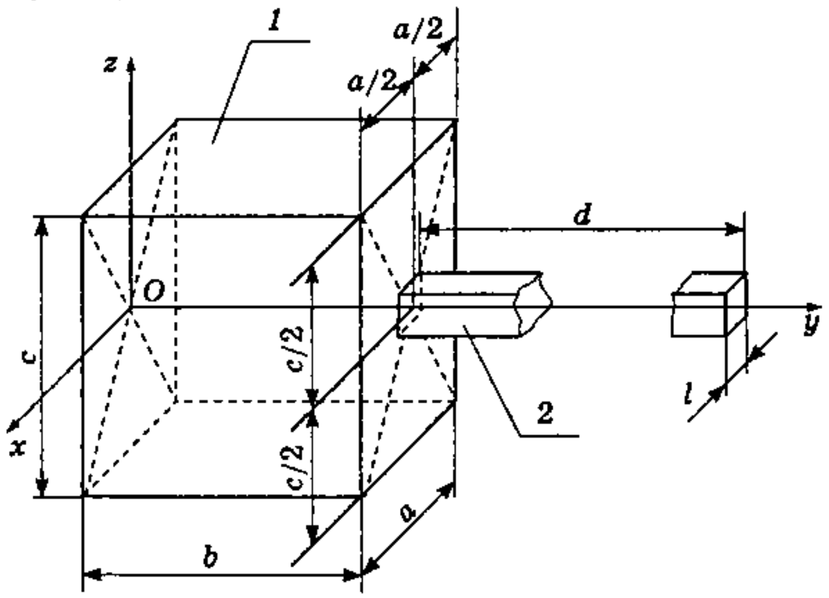
Задача 9.20

Найти координаты центра тяжести деревянного молотка, состоящего из прямоугольного параллелепипеда и ручки с квадратным сечением.

Дано: a = 10 см, b = 8 см, c = 18 см, d = 40 см, l = 3 см.

Р е ш е н и е

Представим молоток состоящим из двух тел: *1* — прямоугольного параллелепипеда и *2* — ручки с квадратным сечением (см. рисунок).



Тогда на основе исходных данных определим объемы V_1 и V_2 этих тел и координаты их центров тяжести (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2):

$$V_1 = abc = 10\cdot 8\cdot 18 = 1440 \text{ см}^3,$$

$$x_1 = 0,\ y_1 = \frac{b}{2} = 4 \text{ см},\ z_1 = 0;$$

$$V_2 = l^2 \cdot d = 3^2 \cdot 40 = 360 \text{ см}^3,$$

$$x_2 = 0,\ y_1 = b + \frac{d}{2} = 28 \text{ см},\ z_2 = 0.$$

Найдем искомые координаты:

$$x = \frac{V_1 x_1 + V_2 x_2}{V_1 + V_2} = 0,$$

$$z = \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2}{V_1 + V_2} = 0,$$

$$y = \frac{V_1 y_1 + V_2 y_2}{V_1 + V_2} = \frac{1440 \cdot 4 + 360 \cdot 28}{1440 + 360} = \frac{15840}{1800} = 8{,}8 \text{ см}.$$

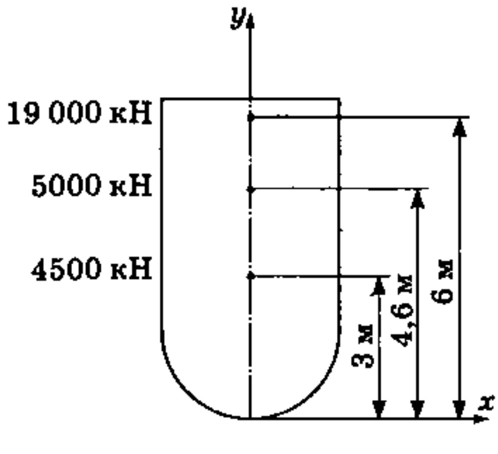
Ответ: $x = 0$; $y = 8{,}8$ см; $z = 0$.

Задача 9.21

Корпус легкого крейсера весит 19 000 кН. Центр тяжести корпуса находится по вертикали над килем на высоте $y_1 = 6$ м. После спуска на воду внутри корпуса установлены главные машины и котлы. Главные машины весят 4500 кН, и ордината центра тяжести их $y_2 = 3$ м. Вес котлов равен 5000 кН и ордината центра тяжести их $y_3 = 4{,}6$ м. Определить ординату y_C общего центра тяжести корпуса, машин и котлов.

Решение

Ордината y_C общего центра тяжести корпуса машин и котлов (см. рисунок) численно равна



$$y_C = \frac{4500 \cdot 3 + 5000 \cdot 4{,}6 + 19\,000 \cdot 6}{4500 + 5000 + 19000} =$$

$$= \frac{150\,500}{28\,500} = 5{,}28 \text{ м}.$$

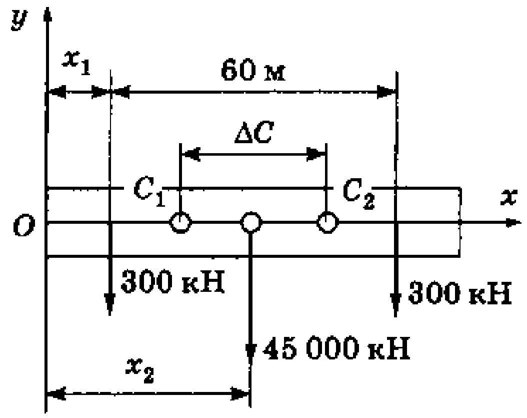
Ответ: $y_C = 5{,}28$ м.

Задача 9.22

На корабле водоизмещением в 45 000 кН груз весом в 300 кН перемещен из носового отсека в кормовой на расстояние 60 м. На сколько переместился общий центр тяжести корабля и груза?

Решение

Введем систему координат, как показано на рисунке, и вычислим положение старого C_1 и нового C_2 центров тяжести:



$$OC_1 = \frac{300x_1 + 45\,000 \cdot x_2}{300 + 45\,000},$$

$$OC_2 = \frac{300(x_1 + 60) + 45\,000x_2}{300 + 45\,000}.$$

Тогда

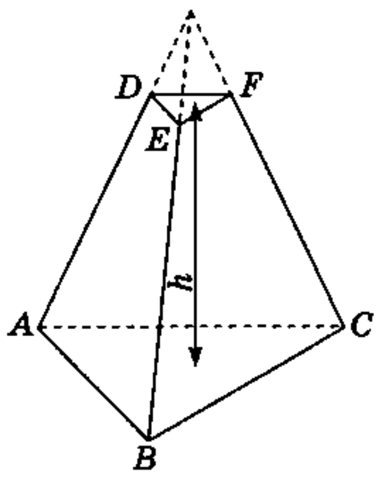
$$\Delta C = C_1C_2 = OC_2 - OC_1 =$$

$$= \frac{300(x_1 + 60) + 45\,000x_2 - 300x_1 - 45\,000x_2}{45\,300} = \frac{300 \cdot 60}{45\,300} = 0{,}4 \text{ м.}$$

Ответ: на 0,4 м.

Задача 9.23

Для однородного, усеченного параллельно основанию тетраэдра $ABCDEF$ даны: площадь ABC равна a, площадь DEF равна b, расстояние между ними h. Найти расстояние z центра тяжести данного усеченного тетраэдра от основания ABC.



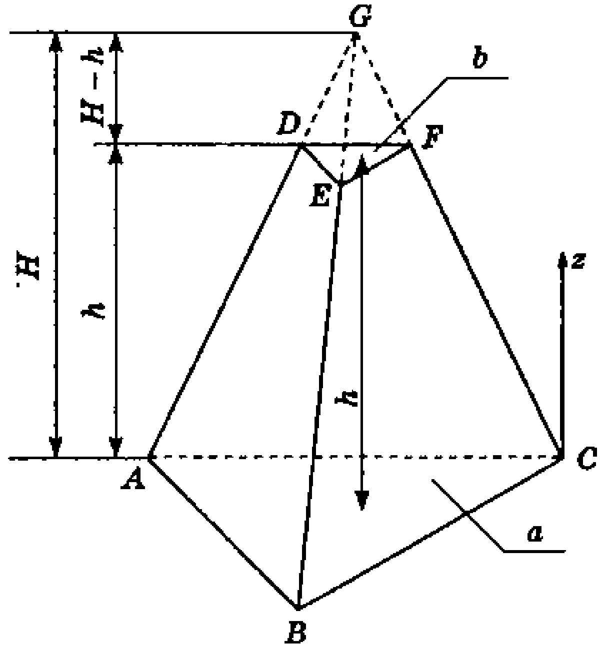
Решение

Из курса элементарной математики известно:

$$\frac{a}{b} = \frac{H^2}{(H-h)^2} \Rightarrow$$

$$H = \frac{h}{1-\sqrt{\dfrac{b}{a}}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\,h;$$

$$H - h = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\,h.$$



Обозначим: тело 1 — весь тетраэдр $ABCG$, тело 2 — его отсеченная часть $DEFG$ (см. рисунок). Искомое расстояние вычисляется по формуле

$$z = \frac{V_1 z_1 - V_2 z_2}{V_1 - V_2},$$

здесь V_i — объем тела i; z_i — аппликата центра тяжести тела i, $i = \overline{1, 2}$.

Вычислим:

$$V_1 = \frac{1}{3}aH, \quad z_1 = \frac{1}{4}H,$$

$$V_2 = \frac{1}{3}b(H-h), \quad z_2 = \frac{1}{4}(H-h) + h = \frac{H+3h}{4}.$$

Получим

$$z = \frac{1}{4}\,\frac{aH^2 - b(H-h)(H+3h)}{aH - b(H-h)} = \frac{h}{4}\,\frac{(a^2 - 4b\sqrt{ab} + 3b^2)}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a\sqrt{a} - b\sqrt{b})} =$$

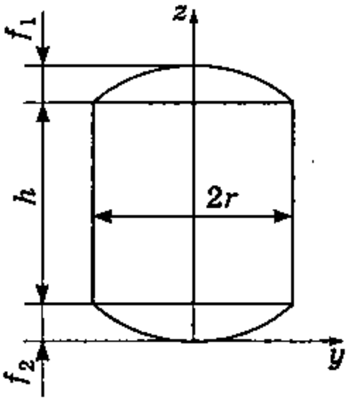
$$= \frac{a\sqrt{a} - 3b\sqrt{b} + b\sqrt{a} + a\sqrt{b}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} = \frac{h}{4}\,\frac{(a + 2\sqrt{ab} + 3b)}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\,\frac{(a + 2\sqrt{ab} + 3b)}{(a + \sqrt{ab} + b)} =$$

$$= \frac{h}{4}\,\frac{a + 2\sqrt{ab} + 3b}{a + \sqrt{ab} + b}.$$

Ответ: $z = \dfrac{h}{4}\,\dfrac{a + 2\sqrt{ab} + 3b}{a + \sqrt{ab} + b}.$

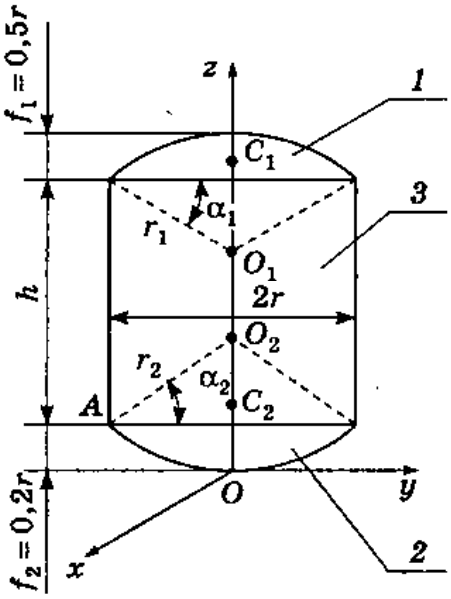
Задача 9.24

Корпус якорной подводной мины имеет форму цилиндра с выпуклыми сферическими днищами. Радиус цилиндрического пояса $r = 0{,}4$ м, высота цилиндрического пояса $h = 2r$, высоты сферических сегментов соответственно равны: $f_1 = 0{,}5r$ и $f_2 = 0{,}2r$. Найти центр тяжести поверхности корпуса мины.



Решение

Так как ось z является осью симметрии, то для искомого центра тяжести $C(x_C, y_C, z_C)$ справедливо $x_C = y_C = 0$. Кроме того, центр тяжести поверхности совпадает с центром тяжести контура, изображенного на рисунке. В результате получим



$$z_C = \frac{\alpha_2 r_2 (r_2 - O_2C_2) + 2h\left(f_2 + \dfrac{h}{2}\right)}{\alpha_2 r_2 + 2h + \alpha_1 r_1} +$$

$$+ \frac{\alpha_1 r_1 (f_2 + h - r_1 + O_1C_1)}{\alpha_2 r_2 + 2h + \alpha_1 r_1}.$$

Из рисунка определим

$$r_1 = \frac{5}{4} r, \ \sin\alpha_1 = 0{,}8, \ \alpha_1 = 0{,}927 \text{ рад};$$

$$r_2 = 2{,}6r, \ \sin\alpha_2 = \frac{5}{13}, \ \alpha_2 = 0{,}395 \text{ рад}.$$

$$O_2C_2 = r_2 \frac{\sin\alpha_2}{\alpha_2} = 2{,}5r, \quad O_1C_1 = r_1 \frac{\sin\alpha_1}{\alpha_1} = 1{,}08r.$$

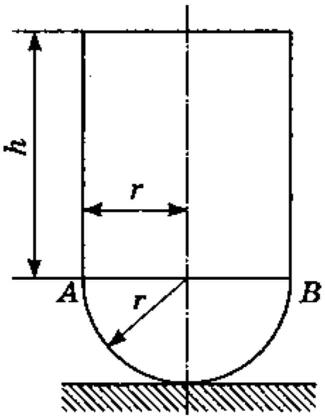
Тогда окончательно найдем:

$$z_C = \frac{0,395 \cdot 2,6 \cdot 0,1 + 2 \cdot 2 \cdot 1,2 + 0,927 \cdot 1,25 \cdot 2,53}{0,395 \cdot 2,6 + 2 \cdot 2 + 0,927 \cdot 1,025} r = 1,2665r = 0,507 \text{ м}.$$

О т в е т: $x_C = y_C = 0$; $z_C = 0,507$ м.

Задача 9.25

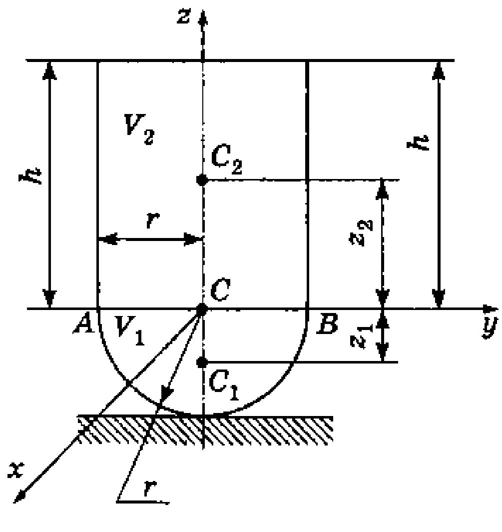
Найти предельную высоту h цилиндра, при которой тело, состоящее из цилиндра и полушара одинаковой плотности и одинакового радиуса r, теряет устойчивость в положении равновесия, когда оно опирается поверхностью полушара на гладкую горизонтальную плоскость.



(Центр тяжести всего тела должен совпадать с центром полушара. Расстояние центра тяжести однородного полушара от его основания равно $\frac{3}{8}r$.)

Р е ш е н и е

Потеря устойчивости произойдет в том случае, если центр тяжести тела C окажется выше прямой AB (см. рисунок). В предельном случае центр тяжести совпадает с центром полушара. На основании этого запишем соотношение для аппликаты центра тяжести тела:



$$z_C = \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2}{V_1 + V_2}.$$

С учетом

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi r^3,\ z_1 = -\frac{3}{8}r,\ V_2 = \pi r^2 h,\ z_2 = \frac{h}{2},$$

$$z_C = 0$$

получим

$$\frac{\frac{2}{3}\pi r^3\left(-\frac{3}{8}r\right)+\pi r^2 h\frac{h}{2}}{\frac{2}{3}\pi r^3+\pi r^2 h}=0,$$

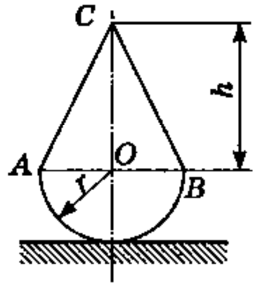
или

$$\frac{-r^2}{4}+\frac{h^2}{2}=0 \Rightarrow h=\frac{r}{\sqrt{2}}.$$

О т в е т: $h=\frac{r}{\sqrt{2}}$.

Задача 9.26

Найти предельную высоту h конуса, при которой тело, состоящее из конуса и полушара одинаковой плотности и радиуса r, теряет устойчивость в положении равновесия при условии предыдущей задачи.

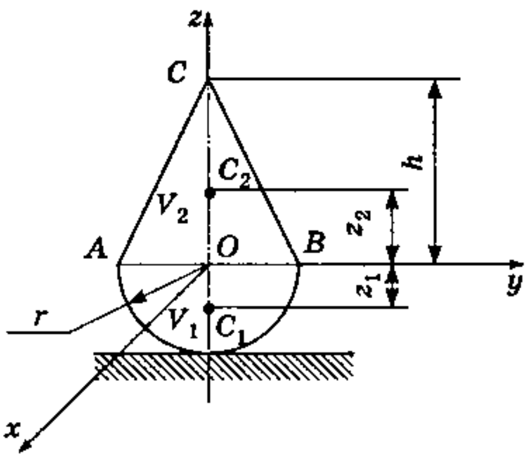


Р е ш е н и е

По аналогии с предыдущей задачей имеем

$$z=\frac{V_1 z_1+V_2 z_2}{V_1+V_2},$$

где z — аппликата центра тяжести всего тела (см. рисунок),



$$V_1=\frac{2}{3}\pi r^3,$$

$$z_1=-\frac{3}{8}r,$$

$$V_2=\frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

$$z_2 = \frac{h}{4},$$

$$z_C = 0.$$

В результате получим

$$\frac{\frac{2}{3}\pi r^3\left(\frac{-3}{8}r\right) + \pi r^2 h\frac{h}{4}}{\frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h\frac{1}{3}} = 0,$$

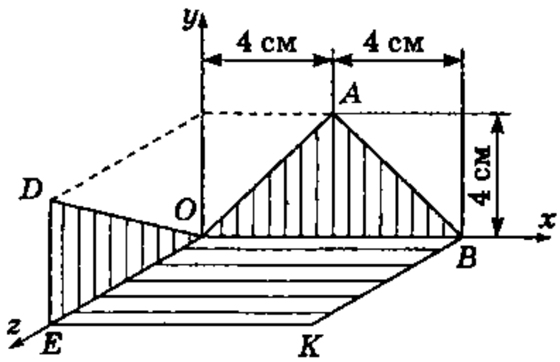
или

$$h^2 = 3r^2 \Rightarrow h = r\sqrt{3}.$$

О т в е т: $h = r\sqrt{3}$.

Задача 9.27

Тонкий однородный лист изогнут в виде двух треугольников и квадрата, как показано на рисунке: равнобедренный треугольник OAB лежит в плоскости xy, прямоугольный треугольник ODE — в плоскости yz (вершина прямого угла — точка E), квадрат $OBKE$ — в горизонтальной плоскости. Определить координаты центра тяжести изогнутого листа.



Р е ш е н и е

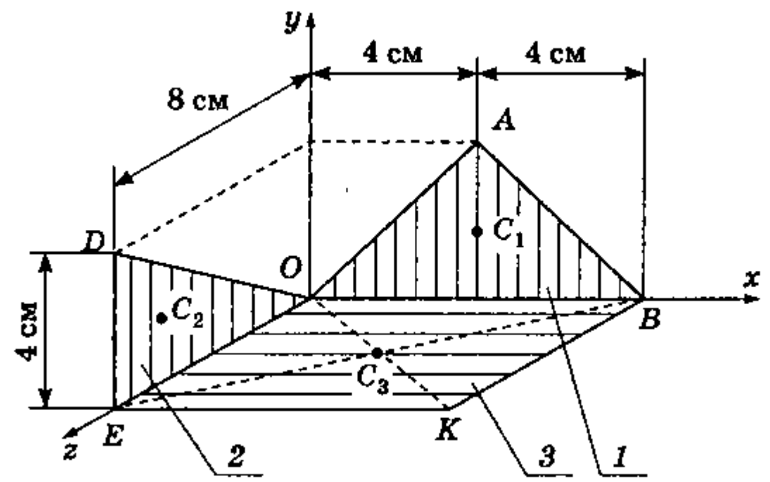
Обозначим: фигура *1* — треугольник OAB, фигура *2* — треугольник ODE, фигура *3* — квадрат $OBKE$; S_i, $C_i(x_i, y_i, z_i)$ — соответственно площадь и центр тяжести фигуры i, $i = \overline{1, 3}$; $C(x_C, y_C, z_C)$ — центр тяжести изогнутого листа (см. рисунок). Имеем:

$$x_C = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S},$$

$$y_C = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3}{S},$$

$$z_C = \frac{S_1 z_1 + S_2 z_2 + S_3 z_3}{S},$$

где $S = S_1 + S_2 + S_3$.



Занесем необходимые расчетные данные в таблицу:

i	1	2	3
S_i	16	16	64
x_i	4	0	4
y_i	4/3	4/3	0
z_i	0	16/3	4

Подставляя эти данные в формулы координат центра изогнутого листа, получим

$$x_C = \frac{320}{96} = 3{,}33 \text{ см}; \; y_C = \frac{128}{288} = 0{,}444 \text{ см}; \; z_C = \frac{1024}{288} = 3{,}55 \text{ см}.$$

О т в е т: $x_C = 3{,}33$ см; $y_C = 0{,}444$ см; $z_C = 3{,}55$ см.

Список использованных источников

Аркуша А.И. Руководство к решению задач по теоретической механике / А.И. Аркуша. М. : Высшая школа, 2004. 336 с.

Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 2. Динамика / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. М. : Наука, 1991. 638 с.

Бутенин Н.В. Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. СПб. : Лань, 2002. 729 с.

Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. М. : Астраль, 2002. 991 с.

Добронравов В.В. Курс теоретической механики / В.В. Добронравов, Н.Н. Никитин. М. : Высшая школа, 1983. 575 с.

Лойцянский К.Г. Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика / К.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. М. : Наука, 1983. 640 с.

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. М. : Наука, 1986. 448 с.

Никитин Н.Н. Курс теоретической механики / Н.Н. Никитин. М. : Высшая школа, 2003. 719 с.

Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. М. : Высшая школа, 2006. 416 с.

Федута А.А. Теоретическая механика и математические методы / А.А. Федута, А.В. Чигарев, Ю.В. Чигарев. Минск : Технопринт, 2000. 500 с.

Яблонский А.А. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. М. : Интеграл-пресс, 2006. 603 с.

Оглавление