ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
МЕХАНИКА
Методические указания к решению задач

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Важным этапом решения задач *кинематики* является выбор *системы отсчета*. Удачный выбор системы отсчета позволяет значительно сократить решение задач, что иллюстрируется следующим примером.

Пример 1. Из корзины аэростата, поднимающегося равномерно вверх, в момент времени $t = 0$ выпал шарик, ударившийся о землю через время T. На какой высоте находился аэростат в момент удара шарика о землю?

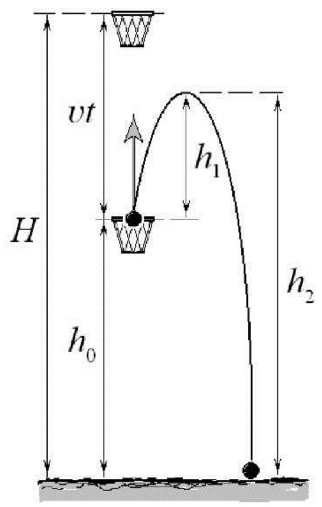


Рис. 1

I способ. В системе отсчета, *связанной с Землей*, движение аэростата равномерное, прямолинейное с некоторой скоростью v. Шарик, отделившись от аэростата на высоте h_0 (рис. 1), начинает равнозамедленное движение вверх с начальной скоростью v и за время t_1 проходит путь:

$$h_1 = vt_1 - \frac{gt_1^2}{2}. \qquad (1)$$

В верхней точке траектории скорость шарика равна нулю:

$$v - gt_1 = 0. \qquad (2)$$

Затем шарик свободно падает вниз без начальной скорости и за время t_2 проходит путь h_2:

$$h_2 = \frac{gt_2^2}{2}. \qquad (3)$$

Кроме того, с помощью рис. 1 легко установить соотношения:

$$h_2 = h_1 + h_0, \qquad (4)$$

$$T = t_1 + t_2. \tag{5}$$

За время T падения шарика аэростат поднимется на высоту H:

$$H = h_0 + vt\ . \tag{6}$$

Решая систему уравнений (1) – (6), окончательно найдем – $H = \dfrac{gT^2}{2}$.

II способ. В системе отсчета, *связанной с аэростатом*, шарик свободно падает с нулевой начальной скоростью. Расстояние l между аэростатом и шариком в любой момент времени t равно: $$l = \frac{gt^2}{2}. \tag{7}$$

В момент времени $t = T$ шарик ударяется о землю. Поэтому расстояние между шариком и аэростатом, вычисленное по формуле (7), в момент удара шарика о землю и есть искомая высота (H) аэростата над землей:

$$H = \frac{gT^2}{2}\ .$$

Несомненно, второе решение рациональнее, чем первое.

Задачи *динамики*, как правило, решают в *инерциальной системе отсчета*, в которой абсолютно все тела обладают *инерцией*. Инерция – свойство тела не изменять свою скорость, если на него не действуют другие тела. Количественная характеристика инерции тела – *масса*. Массы тел указываются в сравнении с эталонным телом. Единица измерения в СИ – один килограмм [кг], и эталоном тела с массой 1 кг с хорошей точностью может быть принята чистая вода объемом один литр.

Количественной характеристикой физического взаимодействия двух тел является *сила*.

Свойства сил получают в результате измерений ускорений ($\vec{a}_A$), полученных телом A с известной массой m_A под действием другого тела B. Силу определяют из соотношения:

$$\vec{F}_{AB} = m_A \cdot \vec{a}_A. \tag{8}$$

При характеристике физического взаимодействия указывают следующие *свойства* силы:

1. Природа физического взаимодействия, которое характеризует сила.
2. Тело *B*, действие со стороны которого на тело *A* характеризует сила.

Из определения силы (8) следуют еще четыре свойства:

3. Линия действия силы.
4. Направление силы.
5. Точка приложения силы в теле *A*.
6. Величина силы ($F = ma$).

Кроме этого все физические взаимодействия обладают двумя общими свойствами:

7. Два *любых* тела *всегда* взаимодействуют с равными и противоположно направленными (*вдоль одной прямой*) силами (*третий з-н Ньютона*):
$$-\vec{F}_{A,B} = \vec{F}_{B,A}. \tag{9}$$
8. Взаимодействие двух тел не зависит от присутствия других тел (*принцип независимости действия*):

Это свойство является одной из формулировок *второго закона Ньютона.*

Так как ускорения тела *A* вызванные несколькими силами ($\vec{a}_{Ai} = \vec{F}_{Ai} / m_A$) являются независимыми, то полное ускорение тела равно:

$$a_A = \frac{\sum_i \vec{F}_{Ai}}{m_A}. \tag{10}$$

Свойства сил:

- *Гравитационное взаимодействие*

Два любых тела притягиваются друг к другу с равными противоположными силами, действующими вдоль одной прямой. Это свойство тел характеризуется гравитационной массой ($m^г$).

Два *точечных* тела (*A* и *B*) притягиваются с силой, прямо пропорциональной произведению гравитационных масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Опыт показал, что отношение массы гравитационной и массы инерциальной одинаково для любых тел:

$$m^{г} / m^{и} = \sqrt{G},$$

где $G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2) – гравитационная постоянная.

Отсюда следует:

$$F_{AB} = \frac{m_A^{г} m_B^{г}}{R_{A,B}^2} = G\frac{m_A^{и} m_B^{и}}{R_{A,B}^2}. \qquad (11)$$

Если расстояние между двумя телами (m_A и m_B), находящимися на расстоянии R, увеличить до бесконечности, то энергия гравитационного поля возрастет на величину:

$$\Delta W = G\frac{m_A m_B}{R}.$$

- *Сила притяжения к Земле* (сила, действующая на тело со стороны гравитационного поля, созданного и телом A и Землей):

1 и 2. Характеризует гравитационное взаимодействие тела A с Землей.
3 и 4. Направлена сила вдоль радиуса Земли к ее центру.
5. Точкой приложения силы принято выбирать центр масс (инерции) тела A ($\sum_i m_i \vec{r}_i = 0$).

Так как эта сила является векторной суммой элементарных сил притяжения ($\vec{f}_i$), то из-за того, что силы $\vec{f}_i$ не параллельны и для тела больших размеров их значения в (11) различны, то нахождение точного положения точки приложения силы тяжести является очень громоздкой задачей (следует еще учесть зависимость точки приложения от ориентации тела по отношению к Земле).

6. Величина силы равна $F = G\frac{M_З}{(R_З + h)^2} \cdot m$ и для относительно небольших высот ($h << R_З$) тела над поверхностью Земли $F = mg$, где

напряженность гравитационного поля Земли (или гравитационное ускорение):

$$g = G\frac{M_З}{R_З^2}.$$

Так как тело планеты Земля не является идеальным шаром (*геоид*), то гравитационное ускорение g зависит от положения тела на планете. На полюсах ускорение больше (9,832 м/с^2), а на экваторе меньше (9,780 м/с^2).

- *Сила натяжения нити* ($\vec{T}$).

Когда нить натянута, то в ней есть деформация растяжения. Расстояние между атомами вдоль нити увеличивается, между атомами возникают результирующие силы притяжения, и сила натяжения нити T характеризует результирующую силу притяжения атомов, находящихся по разные стороны сечения нити, рис. 2.

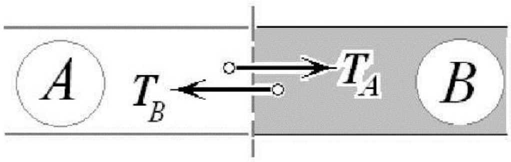


Рис. 2

1. Сила $\vec{T}$ характеризует деформацию растяжения.
2. Сила T_B характеризует действие тела A на B.
3. Сила направлена вдоль нити.
4. Сила $\vec{T}$ пересекает границу раздела.
5. Приложена сила к границе раздела.
6. Величина силы определяется законом Гука.

Если имеется кусок нити площадью сечения S, модулем Юнга E и длиной L_0 в недеформированном состоянии, то сила натяжения T после удлинения нити до длины L равна:

$$T = SE\frac{L - L_0}{L_0} = k(L - L_0).$$

Силы $\vec{T}_A$ и $\vec{T}_B$ *всегда* находятся на одной прямой, но для наглядного обозначения точек их приложения на рис. 2 силы $\vec{T}_A$ и $\vec{T}_B$ показаны не вдоль одной прямой.

- *Полная реакция опоры.*

Если два тела прижаты друг к другу плоскими поверхностями, то в телах возникнет деформация сжатия. Расстояние между атомами соприкасающихся тел уменьшено, и между телами возникают результирующие силы отталкивания. Деформация сжатия характеризуется двумя силами: реакцией опоры ($\vec{N}$) и трением покоя ($\vec{F}_{TP}^{П} = \vec{F}_{TP}$).

Векторы сил $\vec{R}_{AB}$ и $\vec{R}_{BA}$, а также $\vec{F}_{TP}^{B}$ и $\vec{F}_{TP}^{A}$ изображены рис. 3 не вдоль одной прямой для того, чтобы чётко были видны точки приложения сил.

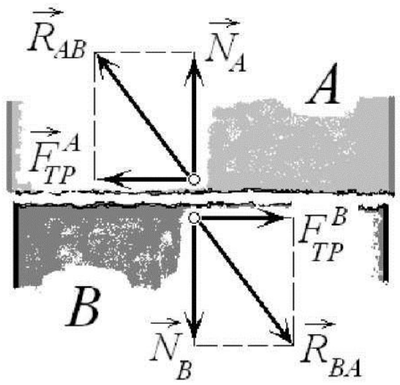


Рис. 3

- *Реакция опоры* ($\vec{N}$).

1. Сила $\vec{N}$ характеризует деформацию сжатия.
2. Сила $\vec{N}_A$ (рис. 4) характеризует действие тела B на тело A.
3. Силы $\vec{N}$ действуют перпендикулярно границе раздела (линию действия силы $\vec{N}$ при больших площадях контакта, как правило, надо искать).
4. Силы $\vec{N}$ не пересекают границу раздела.
5. Приложена сила к границе раздела.
6. Величина силы определяется законом Гука, но на практике её часто определяют через другие силы, действующие на тело.

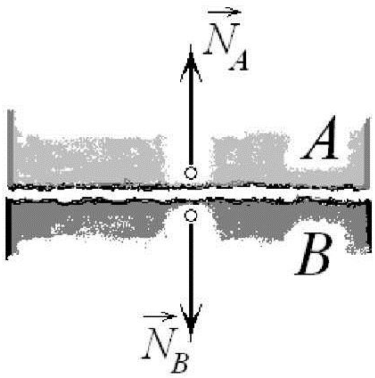


Рис. 4

- *Трение покоя* ($F_{TP}^{П}$).

1. Трение покоя характеризует деформации сжатия и сдвига.
2. Сила $\vec{F}_{TP}^{A}$ (рис. 5) характеризует действие тела B на тело A.
3. Сила действует параллельно границе раздела и лежит в плоскости контакта.

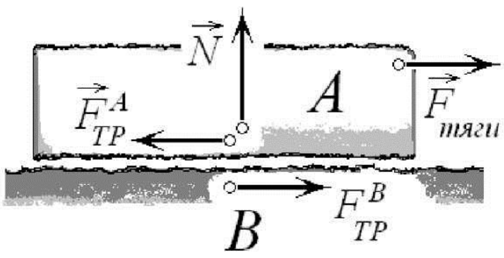


Рис. 5

4. Направлена $\vec{F}^A_{TP}$ сила против силы тяги, стремящейся сдвинуть тело A относительно тела B и уравновешивает эту силу тяги: $-\vec{F}^A_{TP} = \vec{F}_{тяги}$.
5. Приложена к границе раздела.
6. Величина силы характеризуется коэффициентом трения зацепления (k^3), который позволяет определить наибольшее значение трение покоя $F^n_{тр} \leq k^3 N$.

Большое трение покоя: гусеницы трактора, зубчатая передача, подковы, лента транспортера, диски сцепления, сцепление между протектором ведущих колес автомобиля и дорогой, папиллярные линии пальцев и т.д.

- *Трение скольжения* (F^C_{TP}).

Пусть тело A скользит вдоль поверхности неподвижного тела B. Тогда на поверхности контакта возникает сила трения скольжения, рис 6.

1. Трение скольжения возникает вследствие неупругих деформаций тел A и B. При скольжении тела A по поверхности тела B происходит крошение выступов (неровностей) на поверхностях обоих тел, неупругие деформации внутри обоих тел и колебания несломавшихся выступов.
2. Сила характеризует действие поверхности одного тела на поверхность второго.

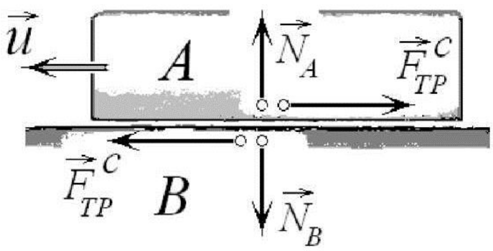


Рис. 6

3. Точка приложения все время движется по телу B и может изменять свое положение на теле A.
4. Линия действия силы – вдоль границы раздела.
5. Направление – против скорости движения: $\vec{F}^C_{TP} = -\alpha \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$.
6. Величина силы $F^C_{TP} = k^C_{TP} N$.

Для уменьшения трения скольжения поверхности делают гладкими и из максимально твердых материалов (поверхности поршней и цилиндров в двигателях автомобилей).

Большие силы трения скольжения у пил всех видов, напильников, щеток.

Для решения динамических задач используется второй закон Ньютона в виде $\vec{F} = m\vec{a}$ или $\vec{a} = \vec{F}/m$ в зависимости от того ускорение или силу требуется определить. В силу *принципа суперпозиции* сил (независимости действия сил) могут быть два способа решения.

Пусть известны все силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_i, \ldots, \vec{F}_N$, действующие на тело массой m. Найдем его ускорение.

I способ:

а) Найдем ускорение, вызываемое каждой силой

$$\vec{a}_i = \vec{F}_i / m$$

б) Находим векторную сумму ускорений

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} \vec{a}_i$$

II способ:

а) Найдем векторную сумму сил

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

б) Находим ускорение, вызываемое результирующей силой:

$$\vec{a} = \vec{F}/m$$

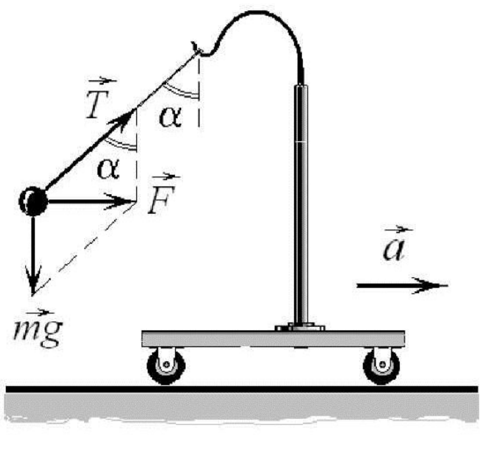


Рис. 7

Пример 2. Определить угол α отклонения нити от вертикали при движении тележки с ускорением $\vec{a}$ (Рис. 7.).

Чтобы груз двигался с тем же ускорением $\vec{a}$, что и тележка, необходимо, чтобы сила $\vec{F}$, равная сумме сил тяжести $m\vec{g}$ и натяжения нити $\vec{T}$, была направлена горизонтально и

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{12}$$

Из параллелограмма (Рис. 7), соответствующего сложению сил:

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T}, \tag{13}$$

очевидны соотношения: $$F = T\sin\alpha, \tag{14}$$

$$mg = T\cos\alpha. \tag{15}$$

Разделив (14) на (15), получим с учетом (12): $a/g = tg\alpha$;

откуда окончательно: $\alpha = arctg(a/g)$.

Пример 3. Клин с острым углом α тянут горизонтально с ускорением $\vec{a}_0$. Чему равно ускорение тела, положенного на клин, относительно земли? В момент времени $t = 0$ скорость тела и клина равна нулю. Трением пренебречь.

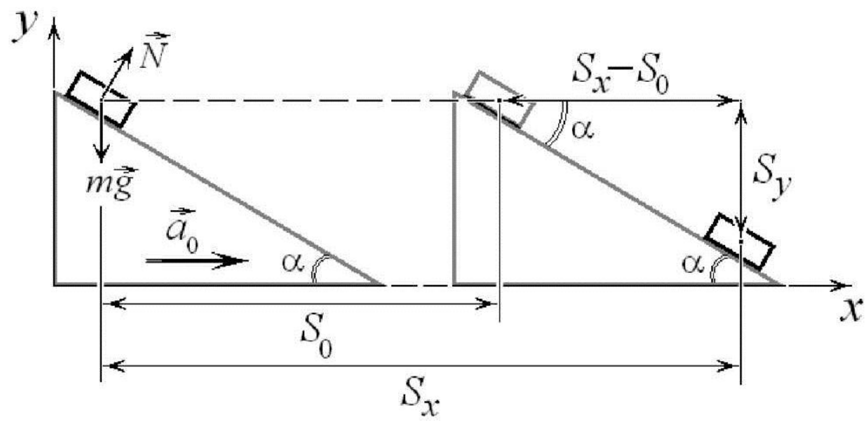


Рис. 8

На тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и реакция клина $\vec{N}$ (Рис. 8). Выберем оси x и y, как указано на рисунке. Относительно этих осей ускорение тела равно

$$a_x = \frac{N\sin\alpha}{m}, \quad (16); \qquad a_y = \frac{mg - N\cos\alpha}{m}. \tag{17}$$

На Рис. 8 показаны положения клина и тела в моменты времени 0 и t после начала движения из состояния покоя. Из рисунка ясно, что поскольку тело все время остается на клине, то

$$\frac{S_y}{S_x - S_0} = tg\alpha. \tag{18}$$

Из законов равноускоренного движения следует:

$$S_0 = \frac{a_0 t^2}{2}; \qquad S_x = \frac{a_x t^2}{2}; \qquad S_y = \frac{a_y t^2}{2}.$$

Подстановка этих формул в (18) приводит к равенству:

$$\frac{a_y}{a_x - a_0} = tg\alpha. \tag{19}$$

Решая уравнения (16), (17), (19), находим

$$a_x = g\sin\alpha\cdot\cos\alpha + a_0\sin^2\alpha; \quad a_y = g\sin^2\alpha - a_0\sin\alpha\cdot\cos\alpha, \tag{20}$$

Полное ускорение $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$ и величина его определяются равенством:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sin\alpha\sqrt{g^2 + a_0^2}.$$

Так же, как и в кинематических задачах, в динамике важным является выбор системы отсчета, причем иногда решение в *неинерциальной* (движущейся ускорено) системе отсчета упрощается.

При переходе в неинерциальную систему отсчета кроме реальных сил ($m\vec{g}, \vec{T}, \vec{N}$ и др.) к телу необходимо приложить еще и фиктивную силу – *силу инерции*. Она всегда направлена против ускорения системы отсчета и приложена к *центру масс тела*.

Пример 4. Решим задачу *примера 2* в системе отсчета, связанной с тележкой.

Кроме реальных сил $m\vec{g}$ и $\vec{T}$ в этом случае надо учесть силу инерции $\vec{F}_u = -m\vec{a}$ (Рис. 9). Относительно тележки грузик находится в покое, значит ускорения вдоль

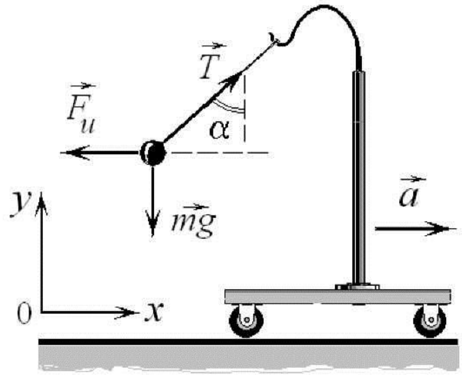


Рис. 9

горизонтали (a_x) и вертикали (a_y) равны нулю:

$$a_x = \frac{\vec{T}_x + \vec{F}_u}{m} = 0; \quad a_x = \frac{T\sin\alpha - ma}{m} = 0.$$

$$a_y = \frac{\vec{T}_y + m\vec{g}}{m} = 0; \quad a_y = \frac{T\cos\alpha - mg}{m} = 0.$$

Откуда приходим к ответу:

$$\begin{cases} T\sin\alpha = ma, \\ T\cos\alpha = mg, \end{cases} \qquad tg\alpha = \frac{a}{g}, \qquad \alpha = arctg\left(\frac{a}{g}\right).$$

Пример 5. Решим задачу *примера* 3 с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с клином.

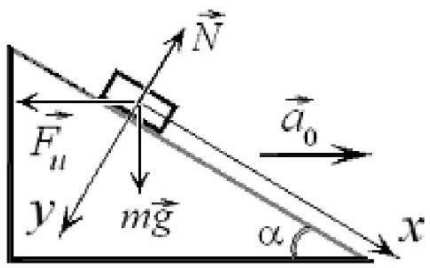


Рис. 10

Добавим к реальным силам $m\vec{g}$ и $\vec{N}$ силу инерции

$$\vec{F}_u = -m\vec{a}_0. \tag{21}$$

Выберем оси x и y, как указано на Рис. 10. В этой системе отсчета ускорение тела направлено вдоль клина (вдоль оси x), а его составляющая в направлении, перпендикулярном клину (вдоль оси y), равна нулю:

$$a_x = \frac{mg\sin\alpha - ma_0\cos\alpha}{m}; \qquad a_y = \frac{ma_0\sin\alpha + mg\cos\alpha - N}{m} = 0$$

Решение этой системы уравнений позволяет найти

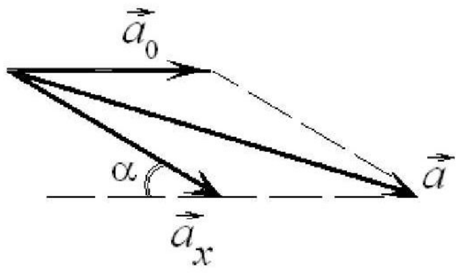


Рис. 11

$$a_x = g\sin\alpha - a_0\cos\alpha. \tag{22}$$

Для нахождения ускорения тела ($\vec{a}$) относительно земли необходимо к найденному ускорению тела относительно клина ($\vec{a}_x$) (направлено вдоль клина) прибавить векторно ускорение клина ($\vec{a}_0$) (направлено горизонтально). Применяя теорему косинусов (Рис. 11), получим:

$$a^2 = a_0^2 + a_x^2 - 2a_0 a_x \cos(\pi - \alpha) =$$
$$= a_0^2 + a_x^2 + 2a_0 a_x \cos\alpha.$$

Учитывая (22), находим:

$$a = \sin\alpha\sqrt{g^2 + a_0^2}.$$

Пример 6. Куб массы m с длиной ребра l находится в ящике, движущемся с горизонтальным ускорением $\vec{a}$, опирается на три опоры, как показано на Рис. 12. Расстояние верхней опоры от основания куба равно h. Найти реакции опор.

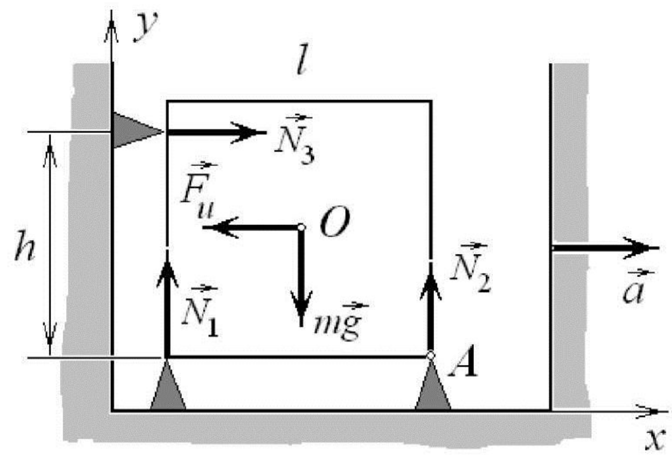


Рис. 12

Решим задачу в системе отсчета, *связанную с ящиком*. Кроме реальных сил $m\vec{g}$, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, $\vec{N}_3$, введем силу инерции $\vec{F}_u = -m\vec{a}$. В этой системе отсчета куб покоится, поэтому:

$$a_x = \frac{N_3 - ma}{m} = 0, \qquad (23)$$

$$a_y = \frac{N_1 + N_2 - mg}{m} = 0. \qquad (24)$$

Кроме (23) и (24) надо записать еще условие отсутствия вращения куба, заключающееся в равенстве нулю суммы моментов всех сил (включая и силу инерции) относительно оси вращения, проходящей через любую точку куба.

Например, для оси, проходящей через точку A, это условие имеет вид:

$$N_1 l + N_3 h - ma\frac{l}{2} - mg\frac{l}{2} = 0. \qquad (3)$$

Система трех уравнений (23) – (25) содержит три неизвестные силы $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ и $\vec{N}_3$. Ее решение:

$$N_1 = \frac{1}{2}mg + ma\frac{h}{l};\quad N_2 = \frac{1}{2}mg - ma\frac{h}{l};\quad N_3 = ma.$$

Следует отметить, что решение задач такого типа в инерциальной системе отсчета будет существенно сложнее.

Если тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения или равномерно вращается, то говорят о *статическом* положении тела. Имеется три эквивалентных условия статики:

1. $\sum\limits_i \vec{F}_i = 0$ – векторная сумма сил равна нулю;
2. $\sum\limits_i \vec{M}_i = 0$ – нет угловых ускорений относительно любых осей;
3. $\Delta W = 0$ – нет изменения энергии.

Проиллюстрируем применение всех трех условий примерами.

Пример 7. В углу комнаты стоит лестница под углом α к полу (Рис. 13). Стена абсолютно гладкая, а пол шероховатый. Определить коэффициент трения лестницы о пол.

Способ I. Расставим силы $m\vec{g}$, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, $\vec{F}_{тр}$. Используя условие $\sum\limits_i \vec{F}_i = 0$, сложим силы.

Равнодействующая сил $\vec{N}_2$ и $m\vec{g}$ приложена в точке A:

$$\vec{F}_A = m\vec{g} + \vec{N}_2.$$

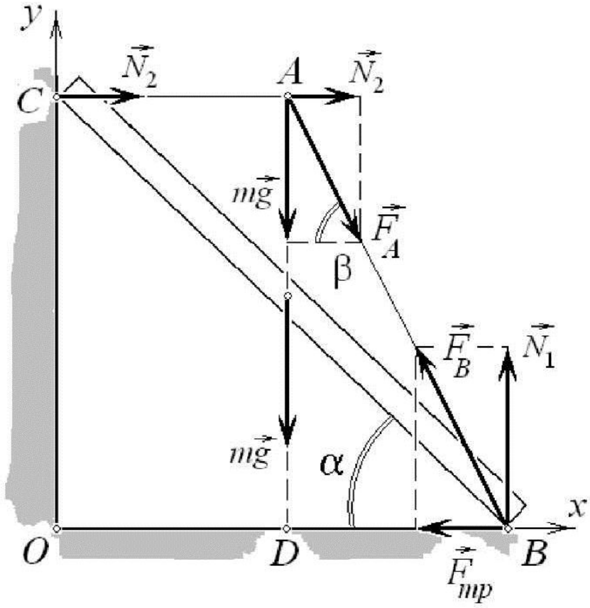


Рис. 13

Равнодействующая сил $\vec{N}_1$ и $\vec{F}_{mp}$ – в точке B равна:

$$\vec{F}_B = \vec{N}_1 + \vec{F}_{mp}.$$

Очевидно, что условие статики $\sum_i \vec{F}_i = 0$ в данном случае сводится к равенству:

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = 0. \qquad (26)$$

Условие (26) выполняется только в том случае, если $\vec{F}_A$ и $\vec{F}_B$ направлены навстречу друг другу вдоль прямой AB и $\vec{F}_A = \vec{F}_B$.

Рассмотрим геометрические соотношения между углами α и β:

$$tg\alpha = \frac{OC}{OB} = \frac{AD}{2DB} = \frac{1}{2}tg\beta. \qquad (27)$$

С другой стороны:

$$tg\beta = \frac{N_1}{F_{mp}}, \qquad (28); \qquad F_{mp} \le \mu N_1. \qquad (29)$$

Объединяя (28), (29) и (27), получим:

$$2tg\alpha \ge \frac{N_1}{\mu N_1}, \text{ откуда } \mu \ge \frac{1}{2}ctg\alpha.$$

Способ II. Задача та же, но для решения используем условие статики $\sum_i \vec{M}_i = 0$. Запишем уравнения моментов относительно трех произвольных осей. Оси следует выбирать так, чтобы уравнения имели наиболее простой вид. Для осей, проходящих перпендикулярно чертежу через точки A, B и O, имеем соответственно:

$$mg\frac{l}{2}\cos\alpha + F_{mp}l\sin\alpha - N_1 l\cos\alpha = 0, \qquad (30)$$

$$N_2 l\sin\alpha - mg\frac{l}{2}\cos\alpha = 0, \qquad (31)$$

$$N_2 l \sin\alpha + mg\frac{l}{2}\cos\alpha - N_1 l \cos\alpha = 0. \qquad (32)$$

Здесь l – длина лестницы. Момент силы, вращающий тело против часовой стрелки отрицателен, по часовой стрелке – положителен.

Так как система уравнений (30) – (32) содержит три неизвестных силы $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ и $\vec{F}_{mp}$, то трех уравнений моментов достаточно для их определения. Решение этой системы с учетом соотношения $F_{mp} \le \mu N_1$ приводит к ответу:

$$\mu \ge \frac{1}{2} ctg\alpha.$$

Однако, наиболее рационально решать задачи такого типа, используя оба условия статики. Условие $\sum_i \vec{F}_i = 0$ записывается для проекций сил на две взаимно перпендикулярные оси x и y в виде: $\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0.$

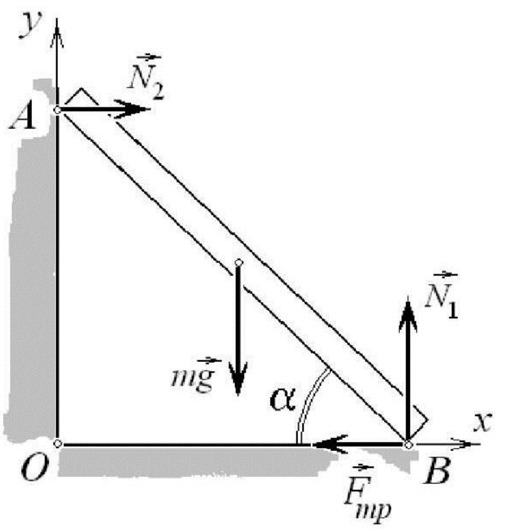


Рис. 14

К этим уравнениям добавляется одно уравнение относительно произвольной оси вращения:

$$\sum_j \vec{M}_j = 0.$$

Оси координат и ось вращения следует выбирать так, чтобы уравнения имели наиболее простой вид.

Для нашей задачи (Рис. 14) уравнения, соответствующие такому методу решения, имеют вид (ось вращения проходит через точку O):

$$N_1 - mg = 0,$$
$$N_2 - F_{mp} = 0,$$

$$N_2 l \sin\alpha + mg\frac{l}{2}\cos\alpha - N_1 l\cos\alpha = 0.$$

Решение этой системы с учетом соотношения $F_{тр} \le \mu N_1$ приводит к уже знакомому результату:

$$\mu \ge \frac{1}{2}ctg\alpha.$$

Пример 8. Какую силу $\vec{F}$ надо приложить к нижнему концу шарнира, чтобы невесомый стержень оставался в горизонтальном положении. Система изображена на рисунке 15.

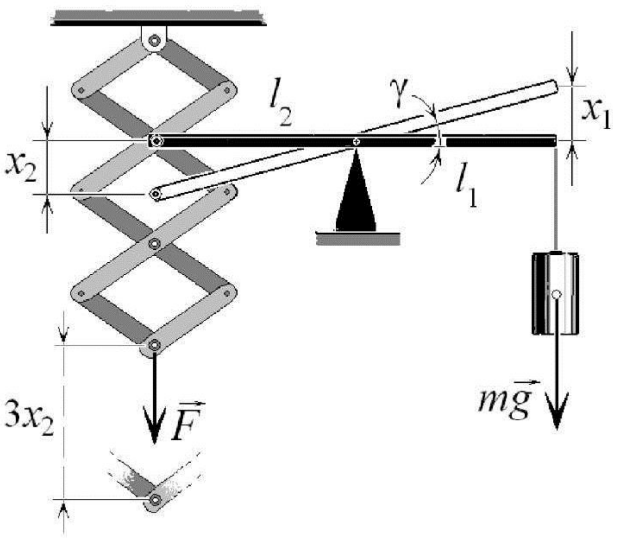


Рис. 15

Предположим, что под действием силы $\vec{F}$ стержень повернулся на малый угол γ. При этом его правый конец поднимется на высоту $x_1 = \gamma l_1$, а левый опустится на $x_2 = \gamma l_2$. Так как на величину x_2 удлинится каждое звено шарнира, то сила $\vec{F}$ совершит работу:

$$\Delta A_2 = F \cdot 3x_2 = 3F\gamma l_2.$$

При этом над грузом, подвешенном на стержне, будет совершена работа:

$$\Delta A_1 = -mgx_1 = -mg\gamma l_1.$$

По условию равновесия суммарная работа внешних сил при таком малом повороте должна быть равна нулю, следовательно:

$$\Delta A_1 + \Delta A_2 = -mg\gamma l_1 + 3F\gamma l_2 = 0,$$

отсюда окончательно получаем:

$$F = \frac{mgl_1}{3l_2}.$$

С помощью уравнения (8) и свойств сил в инерциальной системе отсчета может быть решена любая задача. Однако в кинематической части решения задачи нахождение скоростей $\vec{v}(\vec{R},t)$ и положений $\vec{R}(t)$ тел в разных точках траектории часто является громоздкой математической задачей. Тем не менее, развиты дополнительные способы упрощения многих типов задач, связывающие характеристики начального и конечного состояния системы взаимодействующих тел без детального анализа действующих между телами сил. При этом вводятся новые физические величины: *импульс, кинетическая энергия, момент импульса.*

1. Импульс (количество движения) тела:

$$\vec{p} = m\vec{v}\,. \tag{33}$$

Импульс тела – векторная величина, равная произведению массы тела на его скорость.

2. Импульс силы:

$$\vec{F}\Delta t = m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \Delta\vec{p}\,. \tag{34}$$

Импульс силы равен изменению импульса тела. Если сила изменяется со временем, то

$$\Delta\vec{p} = m\,\Delta\vec{v} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}(t)\cdot dt\,. \tag{35}$$

Полный импульс *изолированной* системы (на которую не действуют внешние силы) не изменяется – *закон сохранения импульса.*

3. Механическая работа силы:

$$\Delta A = (\vec{F}\cdot\Delta\vec{s}) = F\Delta s\cos(\vec{v}\vec{F}). \tag{36}$$

Работой постоянной силы $\vec{F}$ на перемещении $\Delta\vec{s}$ ее точки приложения называют скалярное произведение этих векторов. Если сила не постоянна, а является функцией перемещения, то работа есть интеграл от силы по перемещению:

$$\Delta A = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} . \qquad (37)$$

4. В случае поступательного движения тела массой m со скоростью v, его кинетическая энергия равна

$$W_K = \frac{mv^2}{2} . \qquad (38)$$

Изменение кинетической энергии тела равно работе вектора внешней силы:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \left(\vec{F} \cdot \Delta\vec{s}\right) . \qquad (39)$$

5. Центром масс тела (системы тел) называется точка, относительно которой векторная сумма моментов масс равна нулю:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i = 0 . \qquad (40)$$

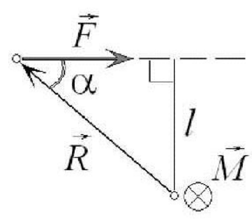
6. Ускорение центра масс:

$$\vec{a}_{ЦМ} = \sum_i \vec{F}_i / m . \qquad (41)$$

Для нахождения векторной суммы $\sum\limits_i \vec{F}_i$ в (41) все силы, приложенные к телу, переносятся параллельно самим себе в центр масс.

7. Момент силы:

$$\vec{M} = \left[\vec{R} \times \vec{F}\right] = F \cdot R \sin(\widehat{\vec{R}\vec{F}}) . \qquad (42)$$



Момент силы $\vec{M}$ равен векторному произведению вектора положения $\vec{R}$ точки приложения силы и силы $\vec{F}$. Момент силы – *аксиальный вектор*, направленный вдоль оси вращения. Направление вектора определяется *правилом правого винта*, а его величина рана произведению модуля силы на *плечо силы* l: $M = F \cdot l$.

8. Основной закон динамики вращательного движения: $\vec{\varepsilon} = \dfrac{\sum_i \vec{M}_i}{I}$. (43)

Угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ твердого тела, вращающегося около неподвижной оси, пропорционально сумме моментов внешних сил и обратно пропорционально его моменту инерции относительно той же оси.

9. Момент инерции тела:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad \text{или} \quad I = \int_0^{m_{ПОЛН}} r^2 dm. \tag{44}$$

10. Теорема Гюйгенса-Штейнера:

$$I_C = I_O + md^2. \tag{45}$$

Параллельное смещение оси вращения, проходящей через центр масс O, приводит к увеличению момента инерции данного тела. Здесь d – расстояние между параллельными осями, проходящими через точку C и через центр масс O (Рис. 16).

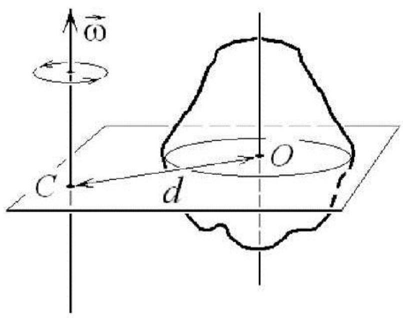


Рис. 16.

11. Кинетическая энергия вращающегося тела:

$$W = \frac{I\omega^2}{2}. \tag{46}$$

Входящий в формулу (46) момент инерции тела – это момент инерции относительно оси вращения, а именно I_O, если тело вращается вокруг оси , проходящей через центр масс O (Рис. 16), и I_C, если тело вращается вокруг другой оси C.

12. Собственный момент импульса:

$$\vec{S} = I_O \vec{\omega}. \tag{47}$$

Собственный момент импульса одинаков относительно всех параллельных осей. Скорость изменения собственного момента импульса равна:

$$\frac{\Delta\vec{S}}{\Delta t} = \sum_i \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right]. \qquad (48)$$

13. Орбитальный момент импульса:

$$\vec{L} = \left[\vec{R}_O \times m\vec{v}_O\right]. \qquad (49)$$

Скорость изменения орбитального момента импульса равна:

$$\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \left[\vec{R}_O \times \sum_i \vec{F}_i\right]. \qquad (50)$$

Здесь $\sum_i \vec{F}_i$ – равнодействующая всех внешних сил, приложенная к центру масс.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

КИНЕМАТИКА.

1. Два корабля движутся равномерно по прямым, угол между которыми α. Определить их относительную скорость, если скорость кораблей $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$.

2. С катера, плывущего против течения, упал мяч. Через время t после падения мяча катер повернул и догнал мяч на расстоянии S от места падения мяча. Определить скорость течения реки. Решить задачу графически в системе отсчета, связанной с водой.

3. Скорость реки u, скорость катера в озере v. Катер переплывает реку под углом α к скорости воды. Определить скорость катера относительно берега и относительно мяча, лежащего в воде.

4. Камень брошен с вышки в горизонтальном направлении со скоростью v_0=30 м/с. Определить скорость, тангенциальное и нормальное ускорение камня через две секунды.

5. Из корзины аэростата, поднимающегося равномерно вверх, в момент времени T=0 выпал шарик, ударившийся о землю через 5 с. На какой высоте находился аэростат в момент удара шарика о землю?

6. Дан график зависимости скорости тела от времени (Рис. 17). Построить соответствующие зависимости ускорения и перемещения от времени.

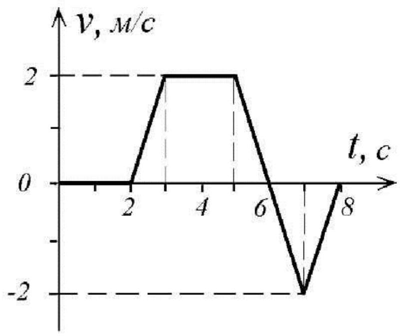


Рис. 17

7. Стержень длиной l вращается с угловым ускорением ε относительно оси проходящей через конец стержня, перпендикулярно ему. Начальная угловая скорость ω_0. Найти к моменту времени t для точки, расположенной на другом конце стержня: *а*) угловую скорость ω; *б*) линейную скорость v; *в*) угол поворота стержня φ; *г*) полное ускорение a; *д*) пройденный с начала вращения путь S;

8. Жесткий стержень AB скользит по полу и вдоль стены (Рис. 18). Скорость точки A – v_A. Найти скорость точки B при известном угле наклона α.

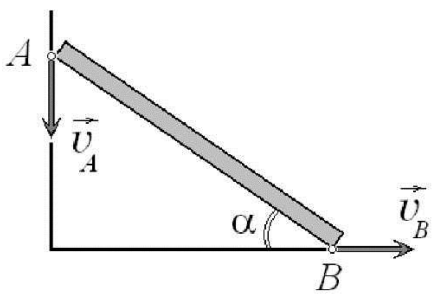


Рис. 18

9. На тело M движущееся с постоянной скоростью u налетает тело массой m, много меньшей массы M, движущееся со скоростью v (Рис. 19). Найти скорость тела m после упругого столкновения с телом M относительно неподвижной системы. Рассмотреть оба случая, показанных на рисунке.

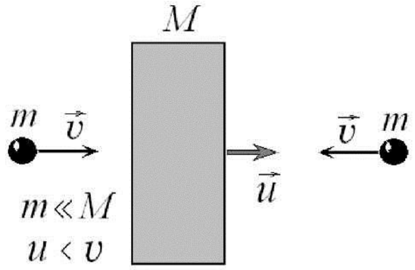


Рис. 19

ДИНАМИКА.

10. К концам однородного стержня длиной l приложены силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Определить натяжение стержня в точке x и его полное удлинение. Коэффициент упругости стержня равен k (Рис. 20).

11. Один конец доски поднимают так, что угол её наклона к горизонту изменяется от нуля до 90^0. Построить график зависимости силы трения, действующей на тело, положенное на доску, от угла наклона доски.

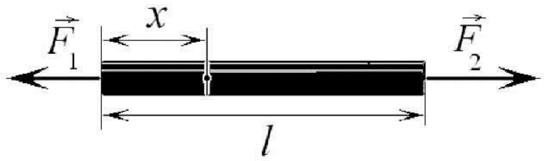


Рис. 20

12. Тело брошено под углом α к горизонту со скоростью v_0. Определить радиус кривизны траектории через время t. Сопротивлением воздуха пренебречь.

13. На невесомом стержне длиной $3R$ закреплены три тела массами m, $2m$ и $3m$ (Рис. 21). Стержень вращается в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω. Ось вращения проходит через конец стержня. Определить силы натяжения стержней между телами.

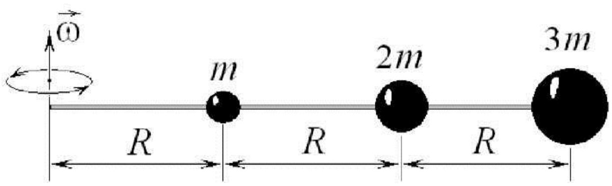


Рис. 21

14. Конус с углом раствора α вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. В конусе находится шарик массой m, прикрепленный с помощью нити (Рис. 22). Радиус вращения шарика равен R. Найти натяжение нити и силу давления шарика на поверхность конуса. Трения нет.

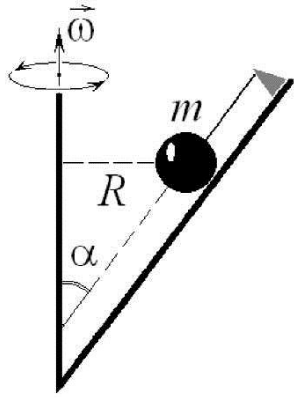


Рис. 22

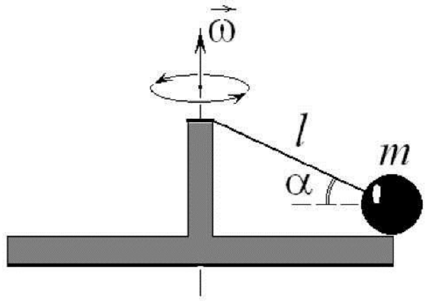


Рис. 23

15. Круглая платформа вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. На платформе находится шарик массой m, прикрепленный к оси платформы нитью (Рис. 23). Угол наклона нити α. Длина нити равна l. Найти силу натяжения нити и силу давления шарика на платформу. Трения нет.

16. В однородной жидкости с плотностью ρ_0 на расстоянии R находятся два тела массами m_1 и m_2, с плотностями ρ_1 и ρ_2 и объемами V_1 и V_2, соответственно. Показать, что тела взаимодействуют с силой $F = \gamma \dfrac{(\rho_1 - \rho_0)(\rho_2 - \rho_0) \cdot V_1 V_2}{R^2}$.

КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ. РАБОТА. ЭНЕРГИЯ.

17. Тележка массы M движется без трения по горизонтальным рельсам со скоростью v. На передний край тележки кладут тело массой m. Его начальная скорость равна нулю. При какой минимальной длине тележки тело не соскользнет с неё? Коэффициент трения между телом и тележкой равен μ. Сколько тепла при этом выделится?

18. По гладкому столу движется тело массы m_1 со скоростью v_1. Пуля массы m_2, летевшая перпендикулярно со скоростью v_1, застревает в теле.

Определить скорость тела после столкновения. На сколько уменьшилась кинетическая энергия тел?

19. Тело массы $2m$, двигавшееся со скоростью v, разлетелось на две равные части, одна из которых движется со скоростью v в направлении, перпендикулярном к первоначальному. Определить скорость движения второй части. Сколько энергии при этом выделится?

20. Тела массами m и M движутся во взаимно перпендикулярных направлениях со скоростями v и u соответственно (Рис. 24). После столкновения тело m движется со скоростью v_1 под углом α к прежнему направлению. Найти скорость тела M после столкновения.

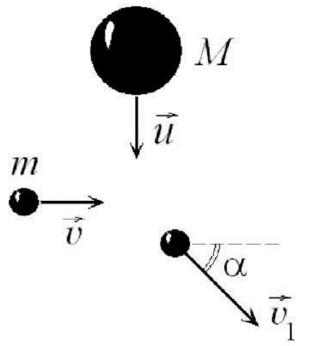


Рис. 24

21. На покоящийся шарик массы M со скоростью v налетает шарик массы m. Найти скорости шариков после столкновения, если удар: а) абсолютно упругий; б) абсолютно неупругий.

22. По доске массы M и длины l, лежащей на абсолютно гладкой горизонтальной поверхности, с одного конца на другой переместился человек массой m. На какое расстояние переместится доска?

23. В вершинах квадрата со стороной R находятся тела с массами m, $2m$, $3m$ и $4m$ (Рис. 25). Какую работу надо совершить, чтобы удалить одно тело на бесконечность?

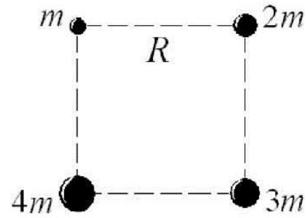


Рис. 25

24. Два шарика массами m и M подвешены на нитях длиной l (Рис. 26). Меньший шарик отклоняют от положения равновесия на угол 90^0 и отпускают. На какую высоту поднимется больший шарик после упругого столкновения? Сопротивлением воздуха пренебречь.

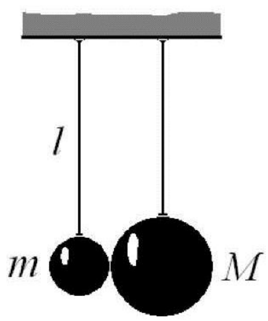


Рис. 26

25. Шар массой m и радиусом R стоит перед ступенькой высотой h (Рис. 27). Какую горизонтальную силу F надо приложить к центру шара O, чтобы он мог перекатиться через ступеньку? Какая наименьшая сила вкатит шар на ступеньку? Шар не соскальзывает в точке A.

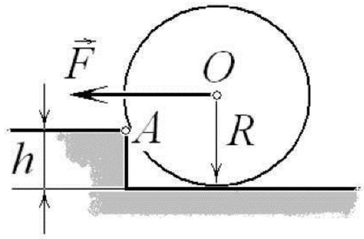


Рис. 27

26. На покоящийся куб массой m и длиной ребра L действует сила F (Рис. 28). Найти линию действия силы реакции опоры N.
27. Куб массой m и длиной ребра L скользит под действием силы F с ускорением a (Рис. 29). Найти линию действия силы реакции опоры N

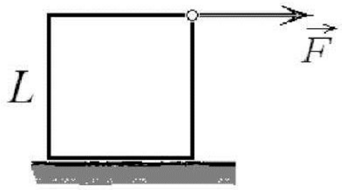


Рис. 28

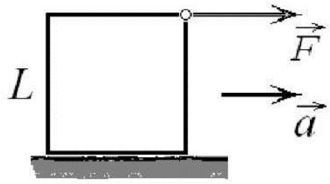


Рис. 29

29. Из однородного диска радиуса R вырезан диск вдвое меньшего радиуса $R/2$ (Рис. 30). Найти центр масс полученного тела.
30. В углу стоит стержень AB (Рис. 31). Написать уравнения суммы моментов сил $\sum_i M_i = 0$ относительно точек A, B, O, D.

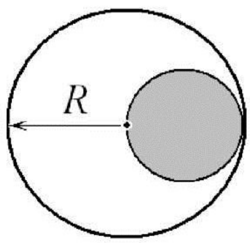


Рис. 30

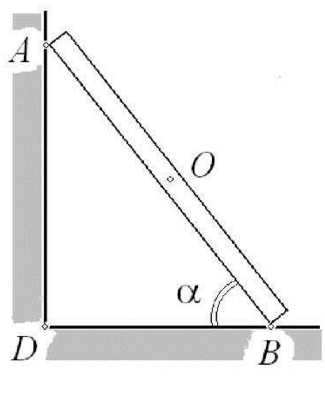


Рис. 31

28. К вертикальной стене на веревке длиной l подвешен шар массой m (Рис. 32). Каковы сила натяжения веревки и сила давления шара на стену, если его радиус равен R? Трением о стену пренебречь.

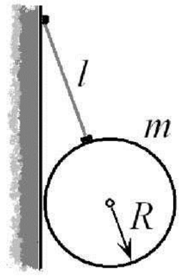


Рис. 32

СИЛЫ ИНЕРЦИИ.

31. Клин с острым углом α тянут горизонтально с ускорением $\vec{a}_0$. Чему равно ускорение тела, положенного на клин: а) относительно клина? б) относительно земли? В момент времени $t = 0$ скорость тела и клина равна нулю. Трения нет.

32. Внутри ящика находится куб массой m с длиной ребра l, который опирается на три опоры, (Рис. 33). Определить силы, действующие на куб со стороны опор, если ящик движется с горизонтальным ускорением $\vec{a}$. Расстояние верхней опоры от основания нижней грани куба равно h.

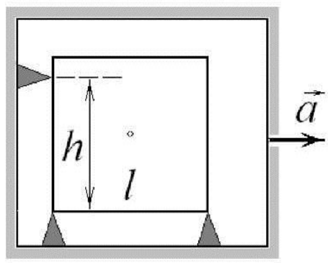


Рис. 33

33. Конькобежец, движущийся со скоростью v, делает поворот радиуса R. Почему и на какой угол он должен отклониться?

34. По горизонтальным рельсам, уложенным по кругу радиуса R, катится вагон. Чему равна наибольшая скорость движения вагона, если его центр тяжести находится на высоте h, а расстояние между рельсами равно l. Указание: учесть, что колеса вагона имеют реборды.

35. Сферическая полость радиуса R наполнена водой и плотно закрыта. Определить давление в центре полости и в крайних горизонтальных и вертикальных точках, если сферу тянут горизонтально с ускорением $\vec{a}$.

36. Цилиндр, наполненный водой, закрыт со всех сторон. В нем находится пробка, кусочек свинца и некоторое тело, плотность которого равна плотности воды. Цилиндр приводится во вращение вокруг вертикальной оси (Рис. 34). Как расположатся тела?

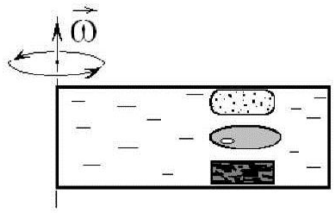


Рис. 34

37. Вычислить ускорения грузов, изображенных на рисунках 35*а* и 35*б*. Блоки считать однородными дисками массы m. Трения нет.

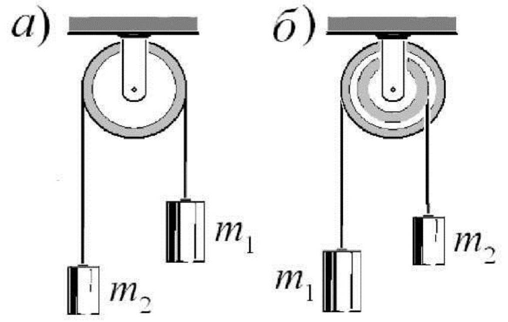


Рис. 35

38. Найти момент инерции квадрата со стороной l, сделанного из проволоки с линейной плотностью γ. Ось проходит через центр квадрата: а) перпендикулярно плоскости квадрата; б) параллельно одной из сторон квадрата.

39. Найти моменты инерции систем, изображенных на рисунке 36:

а) два диска б) диск и шар в) стержень и шар

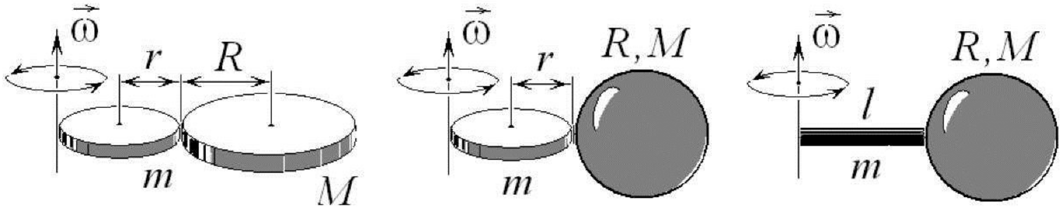


Рис. 36

40. Найти ускорение цилиндра массой m, катящегося без проскальзывания по горизонтальным направляющим под действием вертикальной силы $\vec{F}$, равной половине силы тяжести, действующей на цилиндр (Рис. 37). Радиус цилиндра R. При каком минимальном коэффициенте трения такое движение возможно?

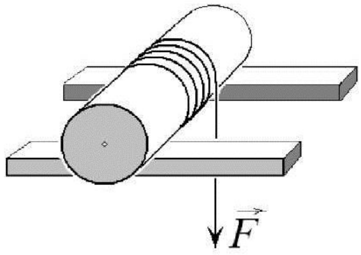


Рис. 37

41. Найти момент инерции однородного стержня относительно оси CC, если его момент инерции относительно оси OO $I_{OO} = \dfrac{1}{3}ml^2$ (Рис. 38).

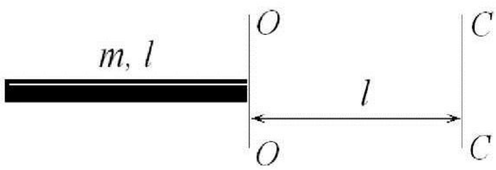


Рис. 38

42. Каким участком сабли следует рубить лозу, чтобы рука не чувствовала удара? Саблю считать однородной пластиной длиной l.

43. Однородный стержень, подвешенный за конец, отклонен от вертикали на угол 90^0 и начинает движение без начальной скорости. Какой будет его угловая скорость в момент прохождения положения равновесия? Трения нет.

МОМЕНТ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ.

44. Определить момент количества движения катящихся со скоростью $\vec{v}$ диска и шара радиусами R около оси, перпендикулярной скорости их движения и проходящей через мгновенный центр вращения.

45. На гладком столе лежит диск массы M и радиуса R. Из него вырезали с краю очень маленький кусочек массы m. Этот кусочек толкнули со скоростью $\vec{v}$ так, что он попал на свое место и прилип (Рис. 39). Сколько при этом выделилось тепла, если: *а*) диск может вращаться относительно оси, закрепленной в точке O; *б*) диск не закреплен.

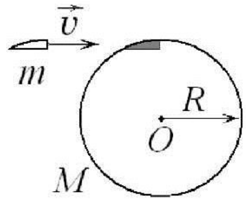


Рис. 39

46. Горизонтальная платформа массы M и радиуса R вращается с угловой скоростью ω. На краю платформы стоит человек массы m. С какой скоростью станет вращаться платформа, если человек перейдет от края к центру платформы?

47. На вращающемся столике стоит человек, держащий на вытянутых руках две гири на расстоянии l = 1,5 м друг от друга. Столик совершает один оборот в секунду. Определить работу, совершаемую человеком при перемещении гирь в центр столика. Масса каждой гири m = 16 кг. Моменты инерции столика и человека считать неизменными и равными 1,84 кг·м^2 и 0,98 кг·м^2 соответственно.

48. Вычислить момент количества движения планеты Земля: *а*) собственный; *б*) орбитальный; *в*) полный. Землю считать правильным шаром радиусом $R_З$ = 6,38·10^6 м и плотностью ρ =5,52·10^3 кг/м^3. Радиус орбиты принять равным R_O = 1,50·10^{11} м. Угол α наклона оси вращения Земли к плоскости орбиты (Рис. 40): $\sin 66^0 33'$ = 0,9174.

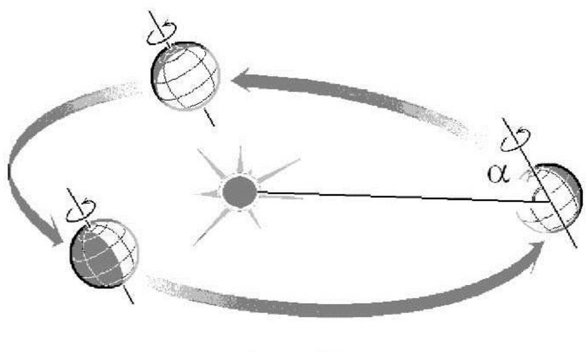


Рис. 40

КОЛЕБАНИЯ.

49. Подставка совершает гармонические колебания в горизонтальной плоскости с периодом T. Находящееся на подставке тело начинает проскальзывать при амплитуде колебаний A. Найти коэффициент трения между телом и подставкой.

50. Подставка совершает гармонические колебания в вертикальной плоскости с амплитудой A. Каким должен быть наибольший период её колебаний, чтобы предмет, лежащий на подставке, отделился от неё?

51. Диск радиуса R совершает колебания вокруг оси, проходящей через середину его радиуса, перпендикулярно плоскости диска. Определить частоту колебаний диска.

52. Шарик массой m и радиусом r катается без проскальзывания по дну сферической чашки радиусом R (Рис. 41). Полагая колебания шарика гармоническими, определить их период. Момент инерции шарика равен $I = \frac{2}{5}mr^2$.

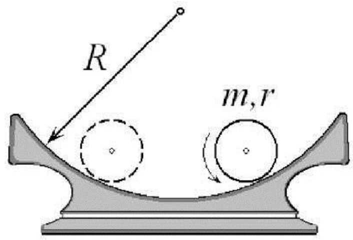


Рис. 41.

53. Определить частоту колебаний пружинных маятников, изображенных на рисунке 42. k_1 и k_2 – соответствующие коэффициенты упругости пружин.

54. Найти период колебаний стержня, шарнирно закрепленного в точке O, под действием двух пружин упругостью k_1 и k_2 (Рис. 43). Длина стержня l, масса m. Массы пружин не учитывать.

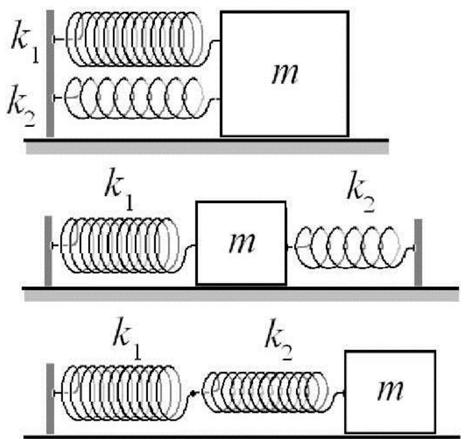


Рис. 42

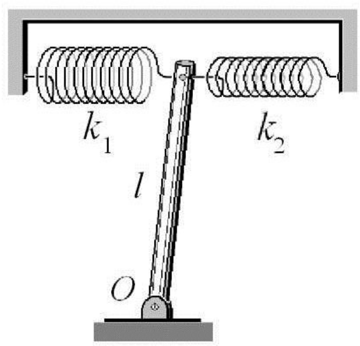


Рис. 43