ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Учебное пособие

Учебное пособие рассчитано на студентов второго курса физического факультета, изучающих теоретическую механику. Цель пособия – помочь студентам в изучении основ теоретической механики и в приобретении навыков решения задач. Приводятся основные теоретические положения по каждому разделу, рекомендуемые для решения задач. Предложено более 130 задач по основным разделам курса. Часть задач снабжена ответами, решениями или указаниями по их решению.

Пособие состоит из пятнадцати глав. В первых шести главах рассматриваются задачи, которые могут быть решены без привлечения аналитической механики. Эти задачи охватывают следующие разделы механики: кинематика и динамика материальной точки, одномерное движение, движение в центральном поле, упругое рассеяние, движение систем со связями. Главы с седьмой по двенадцатую посвящены задачам аналитической механики. Здесь рассмотрены методы Лагранжа, Гамильтона и Гамильтона-Якоби, линейные колебания систем с одной и многими степенями свободы, скобки Пуассона, канонические преобразования, метод разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби. Тринадцатая и четырнадцатая главы посвящены механике абсолютно твердого тела и движению в неинерциальных системах отсчета, соответственно. В последней, пятнадцатой, главе рассмотрены задачи механики сплошных сред. Здесь преимущество отдано задачам, связанным с законами сохранения и волновым движениям.

Учебное пособие предназначено как для аудиторных, так и для самостоятельных занятий студентов. Оно может использоваться совместно с другими пособиями, рекомендованными преподавателем для изучения курса теоретической механики. При решении задач следует обращать внимание на постановку задачи, метод ее решения и анализ результата. Теоретическая часть пособия не только содержит положения и формулы, необходимые для решения задач, но и может оказать помощь при изучении лекционного курса, подготовке к экзаменам, а также служить справочником по основам теоретической механики.

1. Кинематика материальной точки

1. Положение материальной точки в декартовых координатах задается посредством радиус-вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. В процессе движения радиус-вектор $\vec{r}$ изменяется со временем. Зависимость $\vec{r} = \vec{r}(t)$ называется ***законом движения***, а линия, которую описывает в пространстве конец радиус-вектора задает ***траекторию*** частицы. Скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{w}$ определяются выражениями: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$, $\vec{w} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}}$.

Во многих случаях вместо декартовых координат x,y,z удобнее использовать криволинейные координаты q_1, q_2, q_3. В криволинейных координатах $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$, откуда $q_\alpha = q_\alpha(x, y, z)$, $\alpha = 1,2,3$. ***Координатными поверхностями*** называются поверхности в трехмерном пространстве, на которых координаты q_α принимают постоянные значения: $q_\alpha = q_\alpha(x, y, z) = c_a$. ***Координатные линии*** – линии, вдоль которых изменяется каждая из координат q_α. Каждая координатная линия получается пересечением двух координатных поверхностей. Вектор $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}$ направлен по касательной к координатной линии, вдоль которой изменяется q_α, силу чего $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha} = H_\alpha \vec{e}_\alpha$, где

$$H_\alpha = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_\alpha}\right)^2}$$

– коэффициенты Ламе, а $\vec{e}_\alpha$ – единичный вектор касательной к указанной координатной линии (орты криволинейной системы координат). Условия ортогональности координатных линий $\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = 0,\ \alpha \neq \beta$ записывается в виде

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\alpha}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\beta} = \frac{\partial x}{\partial q_\alpha}\frac{\partial x}{\partial q_\beta} + \frac{\partial y}{\partial q_\alpha}\frac{\partial y}{\partial q_\beta} + \frac{\partial z}{\partial q_\alpha}\frac{\partial z}{\partial q_\beta} = 0.$$

Скорость $\vec{v}$ в криволинейной системе координат вычисляется по формуле $\vec{v} = \sum\limits_\alpha v_\alpha \vec{e}_\alpha$, где $v_\alpha = H_\alpha \dot{q}_\alpha$ – компоненты скорости в криволинейных координатах (проекции $\vec{v}$ на орты $\vec{e}_\alpha$). В ортогональных координатах $v^2 = \sum\limits_\alpha H_\alpha^2 \dot{q}_\alpha^2$. Проекции ускорения $\vec{w}$ на орты $\vec{e}_\alpha$ равны

$$w_\alpha = \frac{1}{H_\alpha}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right\}.$$

2. Секторной скоростью материальной точки называется величина

$$\vec{\sigma} = \tfrac{1}{2}\left[\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right] = \frac{d\vec{s}}{dt},$$

где $d\vec{s} = \frac{1}{2}\left[\vec{r} \times d\vec{r}\right]$. Модуль вектора $d\vec{s}$ равен площади, описанной радиус-вектором $\vec{r}$ при перемещении точки на $d\vec{r}$. Поэтому $|\vec{\sigma}|$ характеризует площадь, очерчиваемую радиус-вектором в единицу времени.

Задачи.

1.1. Определить координатные поверхности и координатные линии, показать ортогональность координатных линий, найти компоненты скорости и ускорения

а) в цилиндрической системе координат

$(r, \varphi, z): x = r\cos\varphi; y = r\sin\varphi; z = z;$

б) в сферической системе координат

$(r, \theta, \varphi): x = r\sin\theta\cos\varphi\ ; y = r\sin\theta\sin\varphi; z = r\cos\theta;$

в) в параболической системе координат на плоскости

$(\alpha, \beta):\ x = \frac{1}{2}(\alpha - \beta); y = \sqrt{\alpha\beta}$.

г) в полярной системе координат

$(r, \varphi): x = r\cos\varphi;\ y = r\sin\varphi;$

Ответы:

а) $v_r = \dot{r}, v_\varphi = r\dot{\varphi}, v_z = \dot{z};$

$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, w_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right), w_z = \ddot{z};$

б) $v_r = \dot{r}, v_\theta = r\dot{\theta}, v_\varphi = r\sin\theta\,\dot{\varphi};$

$w_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2$, $w_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2$;
$w_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}\right)$.

1.2. Частица движется по эллипсу в плоскости (x,y). Проекция секторной скорости σ_z постоянна. Найти $x(t)$, $y(t)$.

Решение. Из условий задачи следует, что $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, $x\dot{y} - y\dot{x} = 2\sigma_z = const$. Вводя параметрическое представление эллипса: $x = a\cos\gamma$, $y = b\sin\gamma$ из второго уравнения получаем $\gamma = \frac{2\sigma_z}{ab}t + \gamma_0$. Следовательно, $x = a\cos\left(\frac{2\sigma_z}{ab}t + \gamma_0\right)$, $y = b\sin\left(\frac{2\sigma_z}{ab}t + \gamma_0\right)$.

1.3. Частица движется в плоскости (x,y). Получить выражение для секторной скорости в полярных координатах (r,φ).

Ответ: $\sigma = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$.

1.4. Частица движется в плоскости z=0 по логарифмической спирали $r = ae^{k\varphi}$ с равной нулю радиальной составляющей ускорения: $w_r = 0$. Найти $r(t)$, если в начальный момент времени $\varphi(0) = 0; \dot{\varphi}(0) = \omega$.

Ответ: $r(t) = a\left(\frac{k^2-1}{k}\omega t + 1\right)^{\frac{k^2}{k^2-1}}$.

1.5. Точка движется по поверхности сферы радиуса R так, что угол α между её скоростью и меридианом остается постоянным. Найти траекторию в сферических координатах.

1.6. Частица движется в плоскости $z = 0$, так, что отрезок касательной, заключенный между точкой касания к траектории A и точкой пересечения с осью x B имеет постоянную длину p: $|AB| = p$. Найти уравнение траектории.

1.7. Закон движения частицы в цилиндрических координатах имеет вид $r = v_r t + r_0, \varphi = v_\varphi t + \varphi_0, z = v_z t + z_0$, где $v_r, r_0, v_\varphi, \varphi_0, v_z, z_0$ — постоянные. Найти траекторию, скорость, ускорение и секторную скорость точки в следующих частных случаях: а) $v_r = 0$; б) $v_\varphi = 0$; в) $r_0 = 0,\ \varphi_0 = 0, v_z = 0, z_0 = 0$.

2. Динамика материальной точки

В основе динамики материальной точки лежит второй закон Ньютона:

$$m\vec{w} = \vec{F}, \tag{2.1}$$

где m –масса, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ – сила, действующая на частицу, $\vec{w} = \ddot{\vec{r}}$ – ускорение. При заданных величинах $m, \vec{F}$ и начальных условиях $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \dot{\vec{r}}(t_0) = \dot{\vec{r}}_0$ уравнение (2.1) позволяет найти закон движения материальной точки $\vec{r} = \vec{r}(t_0, \vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0; t)$. Силы, действующие на свободную материальную точку, удобно разделить на два класса:

1) **потенциальные силы**, зависят лишь от координат $\vec{r}$ и времени t и могут быть записаны в виде

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} U(\vec{r}, t), \tag{2.2}$$

где $U(\vec{r}, t)$ – потенциал силы, или потенциальная энергия. Если сила явно не зависит от времени, то она называется стационарной. Стационарными потенциальными силами, в частности, являются:

- квазиупругая сила, имеющая потенциал

$$U(\vec{r}) = \frac{k}{2}\left(\vec{r} - \vec{r}_0\right)^2, \tag{2.3}$$

где $к$ – коэффициент упругости, $\vec{r}_0$ – радиус-вектор положения равновесия частицы;

- сила тяжести, имеющая потенциал

$$U(\vec{r}) = -m\vec{g}\vec{r}, \tag{2.4}$$

где $\vec{g}$ – ускорение свободного падения;

– кулоновская сила с потенциалом

$$U = -\frac{\alpha}{r} \qquad (2.5)$$

Силы, величина которых зависит только от расстояния между материальными точками и направленные вдоль прямой, соединяющей эти точки, называются центральными силами.

2) **непотенциальные силы**, которые зависят от скорости частицы $\vec{v}$ и не могут быть представлены в виде (2.2). Примеры непотенциальных сил:

– сила Лоренца

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \tfrac{1}{c}\left[\vec{v}\times\vec{H}\right]) \ , \qquad (2.6)$$

$\vec{E}$ – напряженность электрического поля, $\vec{H}$ – напряженность магнитного поля , e – заряд частицы;

– сила вязкого сопротивления среды

$$\vec{F} = -\alpha\vec{v} \ , \qquad (2.7)$$

α – коэффициент вязкости. Эта сила принадлежит к классу ***диссипативных сил***, которые приводит к убыли механической энергии системы.

Интегралами движения (первыми интегралами движения) называются такие функции координат, скоростей и времени, которые не изменяются в процессе движения: $f(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = const$. В частных случаях интегралами движения могут быть: механический импульс $\vec{p} = m\vec{v}$, момент импульса $\vec{L} = [\vec{r}\times\vec{p}]$, кинетическая энергия $T = \dfrac{mv^2}{2}$, полная механическая энергия $E = T + U$.

Задачи.

2.1. Получить выражения для сил, потенциал которых задается формулами (2.3) − (2.5).

2.2. Частица движется под действием совокупности внешних сил. При каких условиях механический импульс $\vec{p}$, момент импульса $\vec{L}$, кинетическая энергия T, полная механическая энергия E будут интегралами движения?

2.3. Запишите второй закон Ньютона для частицы, движущейся под действием силы $\vec{F}$ в произвольной ортогональной системе координат. В качестве частных случаев рассмотрите а) цилиндрические координаты и б) сферические координаты. Пусть в силе $\vec{F}$ отлична от нуля только ее радиальная компонента, то есть $\vec{F}(F_r, 0, 0)$. Найдите первые интегралы движения.

2.4. Покажите, что при движении заряженной частицы в стационарном электромагнитном поле будет сохраняться ее полная энергия: $E=\frac{m\vec{v}^2}{2}+e\varphi=const$, где $\varphi(\vec{r})$ – скалярный потенциал.

2.5. Найти закон движения и траекторию заряженной частицы, движущейся в однородном магнитном поле с напряженностью $\vec{H}$. Начальные условия $\vec{r}(0)=\vec{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $\dot{\vec{r}}(0)=\dot{\vec{r}}_0=(\dot{x}_0,\dot{y}_0,\dot{z}_0)$.

Решение: В декартовой системе координат уравнения движения имеют вид: $m\ddot{\vec{r}}=\frac{e}{c}\left[\vec{v}\times\vec{H}\right]$. Направим ось z вдоль вектора напряженности магнитного поля. Тогда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x}-\omega_H\ \dot{y}=0; \\ \ddot{y}+\omega_H\ \dot{x}=0; \\ \quad \ddot{z}=0; \end{cases} \tag{2.8}$$

где $\omega_H=\frac{eH}{mc}$ – циклотронная частота. Из последнего уравнения получаем

$$z=\dot{z}_0t+z_0 \tag{2.9}$$

Вдоль оси z движение является равномерным прямолинейным.

Оставшуюся систему двух уравнений удобно проинтегрировать путем введения комплексной переменной, что позволяет свести эту систему к одному уравнению для комплексной переменной $\xi = x + iy$. Умножая второе уравнение в системе (2.8) на i и складывая его с первым, получаем: $\ddot{\xi} + i\omega\xi = 0$. Отсюда $\xi = c_1 + c_2 e^{-i\omega t}$, где c_1 и c_2 – комплексные постоянные. Представим их в виде $c_1 = a_1 + ia_2$, $c_2 = ae^{-i\delta}$. Тогда

$$\begin{cases} x = \operatorname{Re}\xi = a_1 + a\cos(\omega_H t + \delta) \\ y = \operatorname{Im}\xi = a_2 - a\sin(\omega_H t + \delta) \end{cases} \tag{2.10}$$

Пользуясь начальными условиями, находим

$$a = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_H}\right)^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega_H}\right)^2}, \quad \delta = arctg\frac{\dot{x}_0}{\dot{y}_0},$$
$$a_1 = x_0 - a\cos\delta, a_2 = y_0 + a\sin\delta.$$

Из (2.10) находим, что проекция траектории на плоскость (x,y) есть окружность $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = a^2$. Траектория представляет собой винтовую линию с постоянным шагом.

2.6. Найти закон движения и траекторию заряженной частицы, движущейся в однородном магнитном поле напряженности $\vec{H}$, если

а) частица движется в вязкой среде с коэффициентом вязкости α;

б) на частицу действует дополнительная квазиупругая сила (коэффициент упругости κ).

2.7. Заряженная частица массы m с зарядом e движется в однородном магнитном поле напряженности $\vec{H}$, параллельном ему однородном поле силы тяжести и перпендикулярном им однородном электрическом поле напряженности $\vec{E}$. Найти закон движения частицы.

2.8. Электрон движется в магнитном поле напряженности $\vec{H} = (0,0,H\cos ay)$. Найти закон движения, если $\vec{r}(0) = 0; \dot{\vec{r}}(0) = (0, \dfrac{\omega}{a}, 0); \quad \omega = \omega_H = \dfrac{eH}{mc}$.

Ответ: $x = -\dfrac{1}{a}\ln ch\omega t, y = \dfrac{1}{a}\arcsin th\omega t, z = 0.$

2.9.Точка массы m падает вертикально вниз без начальной скорости под действием силы тяжести, испытывая силу сопротивления воздуха $\vec{F}_c$, величина которой пропорциональна квадрату скорости, то есть $F_c = -kv^2$ ($k = const$). Найдите закон движения точки.

2.10. Частица массы m и заряда e движется в переменном электрическом поле со скалярным потенциалом $\varphi(\vec{r},t) = \vec{r}\vec{E}_0\cos(\omega t + \delta)$, где $\vec{E}_0, \omega, \delta$ - постоянные величины.

В начальный момент времени радиус-вектор частицы равен $\vec{r}_0$, а её скорость – $\vec{v}_0$. Найдите закон движения частицы.

2.11. Протон движется в неоднородном постоянном магнитном поле с напряженностью $\vec{H}(0,0,\dfrac{H_0}{ch^2 ky})$, образующем магнитную стенку параллельную оси x. Начальные условия $\vec{r}(0)=(0,-\infty,0), \dot{\vec{r}}(0)=(0,v_0,0)$. Найдите первые интегралы движения. При каких условиях протон походит сквозь магнитную стенку?

2.12. Электрон движется в постоянном однородном магнитном поле $\vec{H}=(0,H_0,0)$ и электрическом поле квадрупольного конденсатора, потенциал которого $\varphi=\dfrac{U_0}{2a^2}(x^2-y^2)$. Начальные условия $\vec{r}(0)=(0,y_0,0)$, $\dot{\vec{r}}(0)=(0,0,v_0)$. Найти закон движения электрона.

2.13.. Доказать, что при движении заряженной частицы в постоянном однородном электрическом поле с напряженностью $\vec{E}$ величины $I_1=\vec{E}\vec{L}$ и $I_2=\vec{E}[\vec{v}\times\vec{L}]+\frac{e}{2}[\vec{r}\times\vec{E}]^2$ являются интегралами движения. Здесь $\vec{r},\vec{v},\vec{L}$ и e – соответственно радиус-вектор, скорость, момент импульса и заряд частицы.

2.14. Частица с массой m и зарядом e движется в постоянном однородном магнитном поле с напряженностью $\vec{H}$. Показать, что величины $I_1 = (m\vec{v} + \frac{e}{c}[\vec{H} \times \vec{r}])^2$ и $I_2 = m\vec{H}[\vec{v} \times \vec{r}] + \frac{e}{2c}[\vec{r} \times \vec{H}]^2$ являются интегралами движения.

3. Одномерное движение

Одномерным называется движение, для описания которого достаточно задания только одной координаты. В простейшем случае одномерное движение осуществляется вдоль прямой линии, которую можно выбрать в качестве оси x декартовой системы координат.

Задачи.

3.1. Частица массы m совершает одномерное движение вдоль оси x с потенциальной энергией $U(x)$. Показать, что сохраняется полная энергия частицы

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x), \tag{3.1}$$

а закон движения $x(t)$ может быть получен из выражения

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + const \qquad (3.2)$$

3.2. Потенциальная энергия $U(x)$ имеет вид потенциальной ямы (рис.3.1). Точки x_1 и x_2, в которых потенциальная энергия равна полной $U(x) = E$, называются ***точками остановки***, поскольку в них кинетическая энергия T, а следовательно, и скорость $\dot{x}$, обращаются в нуль. Эти точки задают границы движения: в них направление движения меняется на обратное, движение финитно и осуществляется области пространства, ограниченной точками x_1 и x_2.

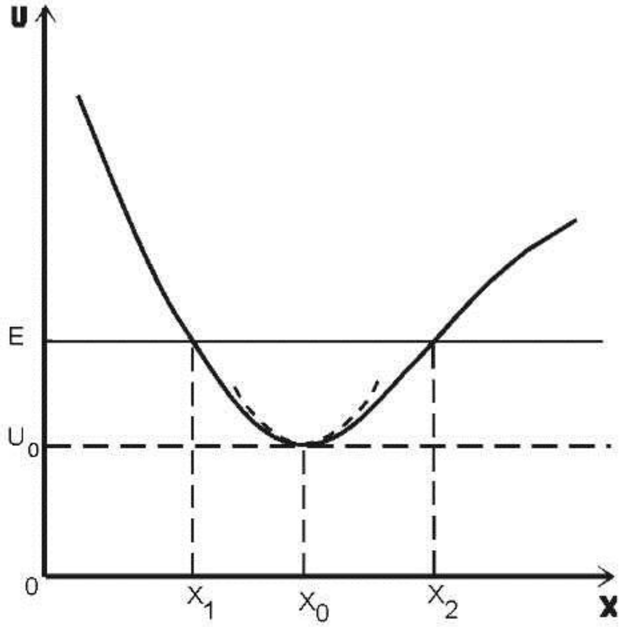

Рис. 3.1.

Потенциальная энергия.

Одномерное движение между точками остановки является колебательным – частица совершает периодическое движение между точками x_1 и x_2.

Показать, что период колебаний определяется формулой

$$T(E)=\sqrt{2m}\left|\int\limits_{x_1(E)}^{x_2(E)}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}\right| \qquad (3.3)$$

и определить закон движения и период колебаний частицы вблизи минимума потенциальной энергии (дна потенциальной ямы).

Указание. Для определения закона движения и периода колебаний разложить потенциальную энергию в ряд вблизи точки минимума x_0, ограничиваясь первым неисчезающим членом, содержащим (x-x_0):

$$U(x)\approx U_0+\tfrac{1}{2}k(x-x_0)^2.$$

Это соответствует замене потенциала $U(x)$ вблизи минимума на параболический (пунктирная кривая на рис.3.1).

Ответ: $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. Период определяется параметрами системы (m и k) и не зависит от амплитуды колебаний.

3.3. Точка движется в поле с потенциальной энергией

$$U(x)=\begin{cases}-k_1x, x<0\\ \tfrac{1}{2}k_2x^2, x>0\end{cases}$$

Найти период колебаний частицы.

3.4. Найти частоту малых колебаний частицы массы m в одномерном потенциальном поле $U=U(x)$, которое задано как функция декартовой координаты x в следующем виде:

а) $U = \frac{a}{x^2} + bx^2$; б) $U = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}$;

в) $U = U_0(ch\,ax - bx)$; г) $U = U_0(e^{ax^2} - bx^2)$, $a < b$.

Здесь постоянные a, b и U_0 положительны.

3.5. Частица движется в поле $U(x) = -U_0\cos(x/l)$, $U_0 > 0$. Найти $x(t)$, если $x(0)=0$; $\dot{x}(0) = \sqrt{\frac{4U_0}{m}} = v_0$.

Решение: воспользуемся формулой (3.2) и учтем начальные условия. Получаем $t = \frac{\sqrt{2}}{v_0}\int\frac{dx}{\sqrt{1+\cos\frac{x}{l}}} + const$. Вычисляя интеграл и пользуясь начальными условиями, находим $t = \frac{l}{v_0}\ln\frac{1+\sin\frac{x}{2l}}{1-\sin\frac{x}{2l}}$, откуда $x(t) = 2l\arcsin th\frac{t}{\tau}$, $\tau = \frac{2l}{v_0}$. В начальный момент времени t=0 частица находится в точке x_0, что соответствует одному из минимумов потенциальной энергии. При $t \to \infty$ координата $x \to \pi l$, а потенциальная энергия частицы приближается к максимальному значению. Такие решения соответствуют нелинейным волнам, которые называются *солитонами*.

3.6. Найти закон движения частицы в потенциальном поле $U(x)$:

а) $U(x) = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{3!}ax^3, x(0) = \dfrac{3k}{a}$, $\dot{x}(0) = 0$.

Ответ: $x(t) = \dfrac{3k}{a}ch^{-2}\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right)$.

б) $U(x) = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}\lambda\, x^4, x(0) = \sqrt{\dfrac{2k}{\lambda}}$, $\dot{x}(0) = 0$.

Ответ: $x(t) = \sqrt{\dfrac{2k}{\lambda}}ch^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right)$.

3.7. Определить приближенно закон движения $x(t)$ частицы в поле $U(x)$ вблизи точки остановки $x=a$. Рассмотреть различные случаи.

Решение: вблизи точки остановки

$$U(x) = E + \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=a}(x-a) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=a}(x-a)^2 + \ldots$$

Рассмотрим два случая:

а) $\left.\dfrac{dU}{dx}\right|_{x=a} = -F(a) \neq 0$. Уравнение движения: $m\ddot{x} = F(a)$, а начальные условия при t=0: $x(0)$=a (частица в момент t=0 находится в точке остановки), $\dot{x}(0) = 0$ (скорость частицы в точке остановки обращается в нуль). Тогда $x(t) = \dfrac{F(a)}{2m}t^2 + a$.

б) $\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=a} = 0$, $U(x) = E - \frac{k}{2}(x-a)^2, k = -\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=a} > 0$.

Этот случай соответствует потенциалу $U(x)$, имеющему в точке $x=a$ максимум. Уравнение движения $m\ddot{x} = k(x-a)$. Общее решение $x = a + c_1 e^{-\lambda t} + c_2 e^{\lambda t}$. Из этого выражения видно, что точка остановки $x=a$ не может быть достигнута за конечное время. При движении к точке остановки в момент $t = \infty$ мы должны получить $x=a$. Поэтому $c_2 = 0, x = a + c_1 e^{-\lambda t}$. При движении от точки остановки, начинающегося в момент $t = -\infty$, получаем $c_1 = 0, x = a + c_2 e^{\lambda t}$.

4. Движение в центральном поле

Поле, в котором потенциальная энергия частицы $U(r)$ зависит только от расстояния r от некоторой неподвижной точки, называемой ***силовым центром***, называется ***центральным.*** Движение в центральном поле плоское: радиус-вектор скорости частицы в процессе движения лежит в плоскости, перпендикулярной вектору момента импульса $\vec{L}$. Если направить $\vec{L}$ вдоль оси z: $\vec{L}(0,0,l)$, а в плоскости движения (x, y) перейти к полярным координатам (r, φ), то из законов сохранения полной энергии и момента импульса получаем:

$$
\begin{cases} E = m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r), \\ l = mr^2\dot{\varphi}, \end{cases} \tag{4.1}
$$

В случае радиального движения (φ=*const*) момент импульса обращается в ноль: l=0. В общем случае задача о движении в центральном поле полностью интегрируется, в результате чего получаем:

$$
t = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dr}{\sqrt{E - U_{eff}(r)}} + t_0\ , \tag{4.2}
$$

$$
\varphi = \pm\frac{l}{\sqrt{2m}}\int\frac{dr}{r^2\sqrt{E - U_{eff}(r)}} + \varphi_0\ , \tag{4.3}
$$

$$
U_{eff} = \frac{l^2}{2mr^2} + U(r) \tag{4.4}
$$

– ***эффективный потенциал.*** Величина

$$
U_c = \frac{l^2}{2mr^2} \tag{4.5}
$$

называется ***центробежной энергией***. При заданной потенциальной энергии частицы $U(r)$ выражение (4.2) позволяет определить траекторию частицы $\varphi = \varphi(r)$, а выражение (4.1) – зависимость $r = r(t)$. Вместе эти два выражения дают закон движения $\varphi = \varphi(t)$, $r = r(t)$. Точки, в которых $U_{eff}(r) = E$, называются ***точками поворота траектории***. В этих точках радиальная скорость $\dot{r} = 0$, а функция $r = r(t)$ переходит от увеличения к уменьшению или наоборот.

Задачи.

4.1. Покажите, что при движении в центральном поле сохраняются полная энергия и момент импульса частицы.

4.2. Определить наименьшее и наибольшее расстояние до начала координат в случае движения материальной точки массы m в сферически-симметричном потенциальном поле:

а) $U = \dfrac{a}{r^2}$;

б) $U = \dfrac{a}{r^2} - \dfrac{b}{r}, \quad a > 0, b > 0$;

в) $U = \dfrac{a}{r^2} + br^2, \quad a > 0$;

г) $U = \dfrac{a}{r^2} + \dfrac{b}{r^4}, \quad a > 0$.

4.3. Частица массы m движется в сферически-симметричном потенциальном поле притяжения $U = U(r)$. В начальный момент времени $t = 0$ она покоилась на расстоянии R от центра поля. Определить время τ падения частицы в центр поля, если:

а) $U = -\dfrac{a}{r}$; б) $U = -\dfrac{a}{r^2}$; в) $U = ar^2$.

4.4. Определить закон падения $r = r(t)$ частицы массы m в центр сферически-симметричного потенциального поля притяжения $U(r)$. В начальный момент времени $t = 0$ частица имела энергию E и покоилась. Найти также время τ падения, если

$$\text{а) } U = -\frac{U_0}{\sin^2\frac{r}{a}}; \qquad \text{б) } U = -\frac{U_0}{sh^2\frac{r}{a}}.$$

4.5. Частица с массой m, энергией E и моментом $\vec{L}$ движется в сферически-симметричном потенциальном поле притяжения $U = ar^2$. Определить закон изменения радиальной координаты $r = r(t)$ частицы, если в начальный момент времени $t = 0$ она находилась в экстремальной точке траектории.

4.6. Найти период T радиальных колебаний материальной точки массы m, движущейся с энергией E и моментом $\vec{L}$ в сферически-симметричном потенциальном поле ($a > 0, b > 0$):

$$\text{а) } U = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r}; \qquad \text{б) } U = \frac{a}{r^2} + br^2.$$

4.7. Провести качественный анализ и определить возможные траектории частицы, движущейся в потенциальном поле сферической "потенциальной ямы" радиуса a и глубины U_0:

$$U(r) = \begin{cases} -U_0, r \le a \\ 0, r > a \end{cases}$$

4.8. Частица движется в центральном поле с потенциальной энергией

а) $U(r) = -U_0 \left(\dfrac{r_0}{r}\right)^2 \ln\dfrac{r}{r_0}; U_0 > 0$.

б) $U(r) = -\dfrac{\alpha}{r^2} + \dfrac{\beta}{r^4}; \alpha > 0; \beta > 0$.

Найти точки поворота и уравнение траектории $r(\varphi)$, если полная энергия частицы равна нулю: E=0.

Ответ: а) $r = r_{\min} \exp\left(\dfrac{\varphi^2}{4a^2}\right)$, где $r_{\min} = r_0 \exp a^2$,

$$a^2 = \frac{l^2}{2mr_0^{\ 2}U_0}.$$

4.9. Частица движется в центральном поле $U(r)$. Получить уравнение, описывающее ее траекторию (уравнение Бине).

Решение. Воспользуемся вторым законом Ньютона: $m\vec{w} = \vec{F}$. Сила $\vec{F} = -\dfrac{dU}{dr}\dfrac{\partial r}{\partial \vec{r}} = -\dfrac{dU}{dr}\dfrac{\vec{r}}{r}$ направлена вдоль радиус-вектора $\bar{r}$, который лежит в плоскости (x,y). В полярных координатах получаем:

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -\dfrac{dU}{dr}, \\ m\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = 0, \end{cases} \tag{4.5}$$

Из второго уравнения:

$$r^2\dot{\varphi} = c = const\,. \tag{4.6}$$

С учетом этого первое уравнение приводится к виду

$$m\left(\ddot{r} - \frac{c}{r^3}\right) = -\frac{dU}{dr}\,, \tag{4.7}$$

из которого, при известном $U(r)$, можно найти $r = r(t)$. Траектория определяется выражением $r = r(\varphi)$, поэтому на основании (4.6) получаем:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -c\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}\frac{d\dot{r}}{d\varphi} = -\frac{c^2}{r^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Подставляя последнее выражение в (4.7) получаем уравнение Бине:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{r^2}{mc^2}\frac{dU}{dr} \tag{4.8}$$

Для уравнения Бине можно сформулировать прямую и обратную задачи:

- *прямая задача*: по заданным m и $U(r)$ найти $r = r(\varphi)$;
- *обратная задача*: по заданным m и $r = r(\varphi)$ найти $U(r)$.

4.10. Используя уравнение Бине получить выражение для траектории частицы, если:

а) $U(r) = -\dfrac{\alpha}{r}$ (кулоновский потенциал);

б) $U(r) = -\dfrac{\alpha}{r} + \dfrac{\beta}{r^2}$.

Ответ: а) $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\varphi}, p = \dfrac{mc^2}{\alpha}, e = const \cdot p$;

4.11. Частица движется по траектории $r = \dfrac{1}{1 + e\cos\varphi}$. Найти потенциал $U(r)$.

4.12. Показать, что при движении частицы в кулоновском поле $U(r) = -\dfrac{\alpha}{r}$ вектор Лапласа

$$\vec{\Lambda} = \frac{1}{\alpha}\left[\dot{\vec{r}} \times \vec{L}\right] - \frac{\vec{r}}{r} \tag{4.9}$$

является интегралом движения.

Решение: Второй закон Ньютона для частицы, движущейся в кулоновском поле, имеет вид:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\alpha \frac{\vec{r}}{r^3}. \qquad (4.10)$$

Отсюда $m\left[\ddot{\vec{r}} \times \vec{L}\right] = -\frac{\alpha}{r^3}\left[\vec{r} \times \vec{L}\right]$. В силу закона сохранения момента импульса $\left[\ddot{\vec{r}} \times \vec{L}\right] = \frac{d}{dt}\left[\dot{\vec{r}} \times \vec{L}\right]$. Раскрывая двойное векторное произведение и пользуясь формулой дифференцирования произведения, имеем: $\frac{\left[\vec{r} \times \vec{L}\right]}{r^3} = m\frac{\left[\vec{r} \times \left[\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right]\right]}{r^3} = -m\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$. Подставляя все в уравнение (4.10), получаем $\frac{d}{dt}\left(\left[\dot{\vec{r}} \times \vec{L}\right] - \frac{\alpha\vec{r}}{r}\right) = 0$, откуда и следует сохранение вектора Лапласа $\vec{\Lambda}$.

4.13. Используя вектор Лапласа, получить уравнение траектории частицы.

Указание. Рассмотреть $\vec{r}\vec{\Lambda}$.

5. Упругое рассеяние

В рамках задачи двух тел задача рассеяния формулируется следующим образом:

1) рассматривается инфинитное движение хотя бы одной из частиц;

2) в момент времени $t = -\infty$ частицы удалены друг от друга на бесконечное расстояние, а взаимодействие между ними отсутствует: $U_{12}(\infty) = 0$;

3) движение частиц в момент времени $t = -\infty$ задано, то есть, определены их координаты и скорости.

Процесс рассеяния состоит в том, что по мере движения частиц изменяется начальная траектория за счет их взаимодействия друг с другом. В процессе рассеяния сначала происходит взаимное сближение частиц, а затем их удаление. Задача рассеяния состоит в том, чтобы по известному движению в момент времени $t = -\infty$ определить, как будут двигаться частицы в момент $t = +\infty$. Рассеяние называется ***упругим***, если в этом процессе не происходит изменения внутреннего состояния взаимодействующих частиц.

Рассмотрим простейший случай рассеяния – рассеяние на неподвижном силовом центре или теле. Движение частицы времени $t = -\infty$ осуществляется вдоль прямой и может быть описано с помощью двух параметров: v_∞ – ***начальной скорости*** рассеиваемой частицы, и ρ – ***прицельного расстояния*** (расстояния, на котором рассеиваемая частица пролетела бы мимо силового центра, если бы рассеяние, т.е. взаимодействие, отсутствовало). Движение рассеянной частицы в момент времени

$t = +\infty$ также будет осуществляться по прямой, наклоненной под углом θ к первоначальной. Первоначальная и конечная прямые являются асимптотами к траектории движения частицы (рис.5.1), а угол θ – угол между асимптотами – называется ***углом рассеяния***. Угол рассеяния определяется по формуле:

$$\theta = \pi - 2\left|\int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{d\left(-\frac{\rho}{r}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - \frac{2U(r)}{mv_\infty^2}}}\right|, \qquad (5.1)$$

где $r_{\min}$ – точка поворота траектории, один из положительных корней (обычно наименьший) трехчлена подкоренного выражения в (5.1). Важной характеристической процесса рассеяния является ***дифференциальное эффективное сечение рассеяния***. Оно определяется следующим образом. На опыте обычно не измеряют рассеяние индивидуальной частицы, а рассматривают пучок частиц, налетающих на силовой центр. Число частиц dN, рассеянных в единицу времени на углы, лежащие в интервале $[\theta, \theta + d\theta]$, равно числу частиц налетающего пучка, проходящих через кольцо площадью $2\pi\rho d\rho$.

Если n – плотность потока падающих частиц (число частиц, проходящих в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направ-

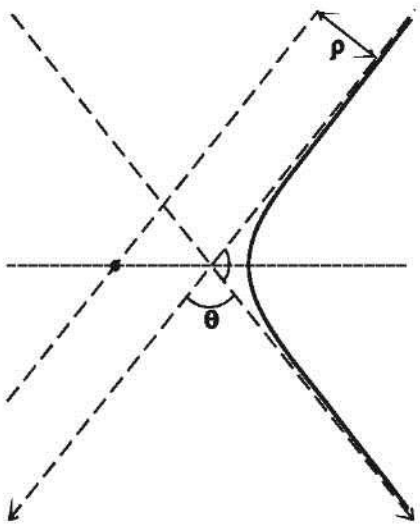

Рис. 5.1 Рассеяние на неподвижном силовом центре

лению движения частиц налетающего пучка), то $dN = 2n\pi\rho\, d\rho$, а дифференциальное эффективное сечение рассеяния определяется по формуле:

$$d\sigma = \frac{dN}{n}.$$

Отсюда

$$d\sigma = 2\pi\rho\, d\rho = \pi\left|\frac{d\rho^2}{d\theta}\right|d\theta = \frac{1}{2}\left|\frac{d\rho^2}{d\theta}\right|\frac{d\Omega}{\sin\theta}\ , \tag{5.2}$$

где $d\Omega = 2\pi\sin\theta d\theta$ – элементарный телесный угол. Полное сечение рассеяния определяется как интеграл по всем углам:

$$\sigma = \int\limits_{(\theta)} d\sigma(\theta) = \int\limits_{(\Omega)} d\sigma(\Omega)\ . \tag{5.3}$$

Задачи.

5.1. Найти дифференциальное и полное эффективные сечения упругого рассеяния на абсолютно твердом шаре радиуса a.

Ответ: $d\sigma = \dfrac{a^2}{4} d\Omega, \ \sigma = \pi a^2$.

5.2. Найти угол рассеяния в зависимости от прицельного расстояния при рассеянии частицы на поверхности абсолютно твердой сферы радиуса a.

Решение. Уравнение поверхности рассеяния $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$. Угол отклонения частицы равен удвоенному углу наклона касательной к поверхности в точке падения. На основании геометрического смысла производной имеем $tg\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{df}{dx} = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. Выразим координату x_c в точке соударения через прицельное расстояние ρ: $x_c = \sqrt{a^2 - \rho^2}$. Подставляя полученное значение в формулу для $tg\dfrac{\theta}{2}$, получаем

$$\theta = 2arctg\left(-\frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho}\right).$$

5.3. Частица сталкивается с абсолютно твердой поверхностью вращения $z = F(x^2 + y^2)$, где F - монотонная функция своего аргумента и $0 < z < \infty$. До столкновения скорость частицы была параллельна оси симметрии поверхности. Найти связь между углом рассеяния θ и прицельным расстоянием ρ .

5.4. Найти дифференциальное эффективное сечение рассеяния частиц, скорости которых до рассеяния параллельны оси х, на гладкой упругой поверхности вращения $y(x)$:

а) $y(x) = b\sin\frac{x}{a}, 0 \le x \le \pi a$;

б) $y(x) = Ax^n, 0 < n < 1, x \ge 0$;

в) $y(x) = b - \frac{a^2}{x}, \frac{a^2}{b} \le x < \infty$.

Ответ: а) $d\sigma = \frac{a^2}{4}\frac{d\Omega}{\cos^4\frac{\theta}{2}}$;

б) $d\sigma = A^{\frac{2}{1-n}}\left(n\,ctg\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1+n}{1-n}}\frac{d\Omega}{(1-n)\sin\theta\cos^2\frac{\theta}{2}}$;

Указание: в задаче 5.4 воспользоваться геометрическим смыслом производной.

5.5. Однородный поток частиц падает на выпуклую сторону абсолютно твердого параболоида вращения $az = x^2 + y^2$ параллельно его оси симметрии. Найти дифференциальное сечение рассеяния.

5.6. Ось симметрии абсолютно твердого эллипсоида вращения $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ расположена параллельно однородному потоку частиц. Определить дифференциальное и полное сечения рассеяния.

5.7. Найти поверхность вращения $y(x)$, сечение рассеяния на которой равно $d\sigma=\dfrac{a^2}{4}\dfrac{d\Omega}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$.

5.8. Найти эффективное сечение рассеяния в центральном поле: а) $U(r)=-\dfrac{\alpha}{r}$; б) $U(r)=\dfrac{\alpha}{r^2}$, $\alpha>0$.

Ответ: а) $d\sigma=\left(\dfrac{\alpha}{2mv_\infty^2}\right)^2\dfrac{d\Omega}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$;

б) $d\sigma=\dfrac{2\pi^2\alpha(\pi-\theta)d\Omega}{mv_\infty^2\theta^2(2\pi-\theta)^2\sin\theta}$.

5.9. Найти эффективное сечение рассеяния в потенциальном поле сферической "потенциальной ямы" радиуса a и "глубины" U_0:

$$U(r)=\begin{cases}-U_0, r\le a\\ 0, r>a\end{cases}$$

Ответ:

$$d\sigma = \frac{an^2}{4\cos\frac{\theta}{2}} \frac{(n\cos\frac{\theta}{2}-1)(n-\cos\frac{\theta}{2})}{(1+n^2-2n\cos\frac{\theta}{2})^2} d\Omega,\ n = \sqrt{1+\frac{2U_0}{mv_\infty^2}}\ .$$

6. Движение при наложенных связях

Связями называются ограничения на координаты $\vec{r}_i$, скорости $\dot{\vec{r}}_i$ и ускорения $\ddot{\vec{r}}_i$ частиц системы, которые не следуют из уравнений движения. Связи реализуются посредством стержней, нитей, стенок и т.д. Аналитически связи задаются с помощью неравенств или уравнений на величины $\vec{r}_i$, $\dot{\vec{r}}_i$, $\ddot{\vec{r}}_i$. Если связь задается с помощью неравенства, то она называется неудерживающей, а если посредством уравнений – удерживающей. Простейшим типом удерживающих связей являются ***голономные*** связи, которые могут быть записаны в виде

$$f_l(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N,t)=0, \quad l=1,\ldots k<3N\ , \tag{6.1}$$

где N – число частиц в системе. Наличие связей приводит к действию на частицы системы дополнительных сил $\vec{R}_i\ (i=1\cdots N)$, которые называются силами реакции связей. При наличии сил $\vec{R}_i$ уравнения движения записываются в виде:

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i\ , \tag{6.2}$$

где $\vec{F}_i$ – ***активные силы***, которые действуют на частицы со стороны других частиц системы и внешних полей. Силы $\vec{R}_i$, вообще говоря, не известны, и должны быть определены из системы (6.1)–(6.2). Однако, эта система не может быть разрешена однозначно, поскольку содержит $3N+k$ уравнений для $6N$ неизвестных ($3N$ компонент $\vec{r}_i$ и $3N$ компонент $\vec{R}_i$). Для того, чтобы сделать эту систему определенной, необходимы дополнительные условия на силы реакции связей. Такими условиями являются условия идеальности связей. Связи называются идеальными, если полная виртуальная работа сил реакции связей равна нулю: $\delta' A = \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \delta\vec{r}_i = 0$, где $\delta\vec{r}_i$ – виртуальные перемещения, т.е. бесконечно малые перемещения, допускаемые связями в фиксированный момент времени. $3N$ компонент виртуальных перемещений δr_α удовлетворяют k условиям $\sum_{\alpha=1}^{3N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial r_\alpha} \delta r_\alpha = 0$. В результате силы реакции идеальных связей выражаются через функции f_l, определяющие уравнения связей (6.1), следующим образом:

$$\vec{R}_i = \sum_{l=1}^{N} \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial \vec{r}_i}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{6.3}$$

где λ_l – неопределенные множители Лагранжа. Выражения (6.3) позволяют выразить $3N$ компонент $\vec{R}_i$ через k величин λ_l. Вместе выражения (6.1)–(6.3) образуют систему из $3N+k$ уравнений относительно $3N+k$ неизвестных ($3N$ компонент $\vec{r}_i$ и k величин λ_l), которая, таким образом, может быть разрешена однозначно. Эти уравнения называются уравнениями Лагранжа I рода.

Задачи.

6.1. Материальная точка движется в однородном поле тяжести по гладкой неподвижной прямой, образующей угол α с горизонтом. Найти закон движения точки и силу реакции связи.

6.2 Материальная точка движется в однородном поле тяжести по гладкой неподвижной параболе $y^2 = ax$, расположенной в вертикальной плоскости. Найти силу реакции связи как функцию координаты y.

6.3. Частица массы m движется в однородном поле тяжести по внутренней поверхности вертикального цилиндра. Предполагая поверхность цилиндра абсолютно гладкой найти закон движения частицы и силу реакции поверхности цилиндра, если радиус цилиндра изменяется по закону: а) $r = r_0 + v_0 t$; б) $r = r_0 e^{\alpha t}$.

Решение: Рассмотрим случай а). Запишем уравнения (6.1) и (6.2) в цилиндрической системе координат. Т.к. сила реакции $\vec{R}$

направлена по нормали к цилиндрической поверхности, то только радиальная компонента этой силы $\vec{R}_r$ будет отлична от нуля. В результате имеем:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = R_r, m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = 0,$$

$$m\ddot{z} = -mg, r = r_0 + v_0 t\,. \tag{6.4}$$

Из второго уравнения находим интеграл движения $r^2\dot{\varphi} = r_0^2\dot{\varphi}_0$, где $\dot{\varphi}_0 = const$. Отсюда:

$$\dot{\varphi} = \frac{r_0^2\dot{\varphi}_0}{(r_0 + v_0 t)^2}\;.$$

Интегрируя это уравнение, находим $\varphi(t)$. Закон движения имеет вид:

$$r = r_0 + v_0 t, \varphi = \varphi_0 + \frac{r_0\dot{\varphi}_0 t}{r_0 + v_0 t}, z = z_0 + \dot{z}_0 t - \frac{gt^2}{2}\,.$$

Подставляя функции $r(t)$ и $\varphi(t)$ в первое уравнение (6.5), получаем:

$$R_r = -m\frac{(r_0{}^2\dot{\varphi}_0)^2}{(r_0 + v_0 t)^3}.$$

6.4. Записать выражение для силы реакции связи в произвольной ортогональной системе координат.

Решение: Пусть $q_{\alpha i}(\alpha = 1,2,3; i = 1,\dots,N)$ – криволинейные координаты i-ой частицы. Тогда

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_{1i}, q_{2i}, q_{3i}),\ \ q_{\alpha i} = q_{\alpha i}(\vec{r}_i),$$

$$f_l = f_l(q_{11}, q_{21}, q_{31}, \dots q_{1N}, q_{2N}, q_{3N}, t),\ \frac{\partial f_l}{\partial \vec{r}_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_l}{\partial q_{\alpha i}} \frac{\partial q_{\alpha i}}{\partial \vec{r}_i}.$$

Разложим вектор $\dfrac{\partial q_{\alpha i}}{\partial \vec{r}_i}$ по ортам криволинейной системы координат $\vec{e}_k$: $\dfrac{\partial q_{\alpha i}}{\partial \vec{r}_i} = \sum\limits_k a_{\alpha k}^{(i)} \vec{e}_k$, $k = 1,2,3$. Найдем коэффициенты разложения $a_{\alpha k}^{(i)}$. Умножая полученное выражение для $\dfrac{\partial q_{\alpha i}}{\partial \vec{r}_i}$ на $\vec{e}_\beta$ и учитывая, что $\vec{e}_k \vec{e}_\beta = \delta_{k\beta}$, находим $a_{\alpha\beta}^{(i)} = \dfrac{\partial q_{\alpha i}}{\partial \vec{r}_i} \vec{e}_\beta$. Воспользуемся тем, что $\dfrac{\partial q_{\alpha i}}{\partial \vec{r}_i} \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\beta i}} = \delta_{\alpha\beta}$, $\dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\beta i}} = H_\beta^{(i)} \vec{e}_\beta$, $H_\beta^{(i)}$ – соответствующий коэффициент Ламе. Отсюда получаем $a_{\alpha\beta}^{(i)} = \dfrac{1}{H_\beta^{(i)}} \delta_{\alpha\beta}$. Тогда $\dfrac{\partial q_{\alpha i}}{\partial \vec{r}_i} = \dfrac{1}{H_\alpha^{(i)}} \vec{e}_\alpha$;

$$\frac{\partial f_l}{\partial \vec{r}_i} = \sum_\alpha \frac{1}{H_\alpha^{(i)}} \frac{\partial f_l}{\partial q_{\alpha i}} \vec{e}_\alpha.$$

$$\vec{R}_i = \sum_l \lambda_l \sum_\alpha \frac{1}{H_\alpha^{(i)}} \frac{\partial f_l}{\partial q_{\alpha i}} \vec{e}_\alpha.$$

6.5. Найти силу реакции связи и записать уравнения Лагранжа первого рада для сферического маятника (точки, движущейся по гладкой сфере радиуса a в однородном поле тяжести) а) в декартовой системе координат; б) в сферической системе координат.

6.6. Материальная точка движется в однородном поле силы тяжести по внутренней поверхности горизонтально расположенного цилиндра радиуса a. Найти неопределенные множители Лагранжа и силы реакции связей как функции положения точки.

Ответ: $R_r = 2a\lambda = -3mg\cos\varphi + const$.

6.7. Точка движется в однородном поле силы тяжести по гладкому цилиндру радиуса a, ось которого образует угол α с вертикалью. Найти силу реакции связей как функцию положения точки.

Ответ: $R_r = -3mg\sin\alpha\cos\varphi + const$.

6.8. Материальная точка движется в однородном поле тяжести по пересечению неподвижной гладкой сферы радиуса a и гладкой горизонтальной плоскости, движущейся в вертикальном направлении по закону $z = ae^{-\gamma t}$. Найти закон движения и силы реакции связей как функции времени.

7. Метод Лагранжа

Рассмотрим систему, состоящую из N материальных точек, на движение которой наложено k штук голономных связей. Для однозначного описания положения частиц системы в пространстве необходимо задать $n = 3N - k$ независимых переменных $q_1, \ldots q_n$. Число n называется ***числом степеней свободы*** механической системы. Потребуем, чтобы координаты $q_\alpha (\alpha = 1, \ldots n)$ удовлетворяли следующим условиям:

1) радиус-векторы частиц системы $\vec{r}_i$ должны однозначным образом выражаться через q_α:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \ldots q_n, t)\,; \tag{7.1}$$

2) координаты q_α должны тождественно удовлетворять уравнениям связей, т.е. при подстановке (7.1) в (6.1) должно получаться тождество.

Переменные q_α, удовлетворяющие этим условиям, называются ***обобщенными координатами***.

В обобщенных координатах движение системы описывается с помощью ***уравнений Лагранжа***:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha^d, \tag{7.2}$$

где $L = L(q, \dot{q}, t) -$ ***функция Лагранжа*** системы, $\dot{q}_\alpha = \dfrac{dq_\alpha}{dt} -$ обобщенные скорости, $Q_\alpha^d = \sum\limits_i \vec{F}_i^d \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} -$ обобщенные диссипативные силы ($\vec{F}_i^d$ – «обычные» диссипативные силы). В случае, когда $\vec{F}^\alpha = -\alpha_i \vec{v}_i$, обобщенная диссипативная сила Q_α^d может быть выражена через диссипативную функцию Релея $D: Q_\alpha^d = -\dfrac{\partial D}{\partial \dot{q}_\alpha}, D = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{\alpha_i \dot{\vec{r}}_i}{2}$, где $\dot{\vec{r}}_i$ как функция $\dot{q}_\alpha$ получается путем дифференцирования по времени выражения (7.1). Отметим, что уравнение (7.2) ***ковариантно***, т.е. его вид не зависит от конкретного выбора обобщенных координат.

Функция Лагранжа L строится исходя из физических особенностей системы (например, условий инвариантности тех или иных величин, характеризующих систему и т.п.). Для обобщенно-натуральных механических систем функция Лагранжа имеет вид:

$$L = T - U - V\,, \tag{7.3}$$

где T – кинетическая энергия системы, U – потенциальная энергия, $V = V(q, \dot{q}, t)$ – обобщенный потенциал, задающий так называемые обобщенно-потенциальные силы:

$$\tilde{Q}_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\,. \tag{7.4}$$

Примером обобщенно-потенциальных сил является сила Лоренца $\vec{F}_L$, обобщенный потенциал которой в декартовых координатах равен $V = e\varphi - \dfrac{e}{c}\vec{v}\vec{A}$, $\vec{F}_L = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial V}{\partial \vec{v}} - \dfrac{\partial V}{\partial \vec{r}}$. Если обобщенно-потенциальные силы отсутствуют, а функция Лагранжа системы равна $L = T - U$, то такая система называется натуральной.

Функция Лагранжа определена не однозначно, а с точностью до полной производной по времени от произвольной функции координат и времени $f(q,t): L \leftrightarrow L + \dfrac{df}{dt}$; когда диссипативные силы отсутствуют (Q_α^d =0), L определена еще и с точностью до постоянного множителя: $L \leftrightarrow cL + \dfrac{df}{dt}$, *c=const.*

Уравнения Лагранжа (7.2) могут быть получены из ***принципа Гамильтона***, согласно которому для действительного движения механической системы

$$\delta S + \int_{t_1}^{t_2} \delta' A^d dt = 0, \tag{7.5}$$

где δS – вариация действия $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$, а $\delta' A^d$ – элементарная виртуальная работа диссипативных сил. Если диссипативные силы отсутствуют, то действительное движение механической системы удовлетворяет принципу наименьшего действия: $\delta S = 0$.

Обобщенные импульсы p_α и обобщенная энергия H системы определены следующим образом:

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}, \; H = \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - L. \tag{7.6}$$

Если связи, наложенные на систему, стационарны, либо отсутствуют вовсе (система свободна), то обобщенная энергия равна полной энергии системы

$$H = T + U = E.$$

Скорость изменения H со временем равна (закон изменения обобщенной энергии)

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i Q_i^d \dot{q}_i. \tag{7.7}$$

Переменная называется ***циклической***, если функция Лагранжа не зависит явно от этой переменной. Если (при $Q_\alpha^d = 0$) циклической переменной в L является координата q_α, то сопряженный ей обобщенный импульс p_α будет интегралом движения: $p_\alpha = const$; если циклической переменной в L является время t, то интегралом движения будет обобщенная энергия H: $H = const$.

Задачи.

7.1. Шарик массы m движется без трения в однородном поле тяжести вдоль гладкого прямого стержня, находящегося в вязкой жидкости (коэффициент вязкости равен α). Составить и проинтегрировать уравнения Лагранжа системы, если стержень вращается с постоянной угловой скоростью ω

а) вокруг горизонтальной оси;

б) вокруг вертикальной оси, составляя с ней неизменный угол β.

Решение. (а). Начало декартовой системы координат выберем в точке, вокруг которой происходит вращение; оси x и y направим в вертикальной плоскости, причем ось y против поля тяжести. Уравнения связей: z=0; $y - xtg\omega t = 0$. Система имеет одну степень свободы: n=1. В качестве обобщенной координаты ρ возьмем расстояние от начала координат до положения частицы в текущий момент времени. Тогда $x = \rho\cos\omega t$, $y = \rho\sin\omega t$ (легко проверить, что такой выбор обобщенной координаты тождественно удовлетворяет уравнениям связей). Находим: $\dot{x} = \dot{\rho}\cos\omega t - \rho\,\omega\sin\omega t$, $\dot{y} = \dot{\rho}\sin\omega t + \rho\,\omega\cos\omega t$. Кинетическая энергия:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\omega^2) \qquad (7.6)$$

Потенциальная энергия:

$$U = -m\vec{g}\vec{r} = mgy = mg\rho\sin\omega t$$

Функция Лагранжа зависит явно от времени, т.к. связи нестационарные, то

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\omega^2) - mg\rho\sin\omega t\,.$$

Диссипативная функция Релея $D = \frac{\alpha}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ может быть записана путем замены m на α в (7.6):

$$D = \frac{\alpha}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\omega^2).$$

Уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial L}{\partial \rho} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\rho}} \Rightarrow \ddot{\rho} + 2\mu\dot{\rho} - \omega^2\rho = -g\sin\omega t, \qquad (7.7)$$

где $\mu = \frac{\alpha}{2m}$. Уравнение (7.7) – неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение складывается из общего решения однородного уравнения ρ_0 и частного решения неоднородного уравнения ρ_1:

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \quad \rho_0 = e^{-\mu t}(c_1 e^{-\gamma t} + c_2 e^{\gamma t}), \quad \gamma = \sqrt{\mu^2 + \omega^2} > \mu.$$

Частное решение ρ_1 можно найти, если воспользоваться тем, что $\sin\omega t = \operatorname{Im} e^{i\omega t}$ и перейти к комплексной переменной $z, \rho = \operatorname{Im} z$. Тогда уравнение (7.7) запишется в виде:

$$\ddot{z} + 2\mu\dot{z} - \omega^2 z = -g e^{i\omega t} \qquad (7.8)$$

Частное решение этого уравнения ищем в виде $z = Ae^{i\omega t}$. Подставляя это выражение в (7.8) получаем:

$$A=\frac{1}{2}\frac{g}{\omega^2+\mu^2}\left(1+i\frac{\mu}{\omega}\right)=ae^{i\phi},$$

$$a=\frac{g}{2\omega\sqrt{\omega^2+\mu^2}};\phi=arctg\frac{\mu}{\omega}.$$

Тогда $\rho_1=\operatorname{Im}ae^{i(\omega t+\phi)}=a\sin(\omega t+\phi)$.

$$\rho(t)=e^{-\mu t}(c_1e^{-\gamma t}+c_2e^{\gamma t})+a\sin(\omega t+\phi). \qquad (7.9)$$

Особенность полученного решения состоит в том, что при $t\to\infty$ частица удаляется от оси вращения под действием центробежной силы вращения: $\rho\approx c_2e^{(\gamma-\mu)t}$. Если вязкость в системе отсутствует (μ=0), то решение (7.9) переходит в

$$\rho(t)=c_1e^{-\omega t}+c_2e^{\omega t}+a\sin(\omega t+\phi).$$

7.2. Покажите, что уравнения Лагранжа с функцией Лагранжа

$$L=e^{\frac{\alpha t}{m}}\left(\frac{m\dot{\vec{r}}^{\,2}}{2}-U(\vec{r},t)\right)$$

приводят к уравнению $m\ddot{\vec{r}}=-\alpha\dot{\vec{r}}+\vec{F}$, описывающему движение материальной точки при наличии диссипативной силы $\vec{F}^{\,d}=-\alpha\dot{\vec{r}}$ и потенциальной силы $\vec{F}=-\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}$.

7.3. Точка массы m движется в однородном поле тяжести по гладкой кривой $y=ax^2+bx+c$, расположенной в вертикальной плоскости в вязкой среде с коэффициентом вязкости α. Составить и проинтегрировать уравнения Лагранжа.

7.4. Найти функцию Лагранжа и записать уравнения Лагранжа для плоского маятника массы m и длины l, точка подвеса которого с координатами x_0 и y_0 движется в вертикальной плоскости xy по кривой, описываемой уравнениями $x_0 = x_0(t)$ и $y_0 = y_0(t)$. Ось x параллельна силе тяжести.

7.5. Электрон с массой m и зарядом e движется вокруг покоящегося ядра с зарядом Q. Определить функцию Лагранжа и первые интегралы движения электрона в сферических координатах, предполагая, что система находится в постоянном однородном внешнем электрическом поле с напряженностью $\vec{E}$.

7.6. Найти функцию Лагранжа и первые интегралы движения для сферического маятника, т.е. для точки, движущейся по гладкой сфере радиуса a в однородном поле тяжести.

7.7. Используя наиболее подходящие обобщенные координаты написать функцию Лагранжа, уравнения Лагранжа и первые интегралы движения в силовом поле с потенциалом:

а) $U = U(\sqrt{x^2 + y^2})$; б) $U = U(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$;

в) $U = U(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$.

7.8. Записать функцию Лагранжа, уравнения Лагранжа и найти первые интегралы движения для системы двух материальных точек (задача двух тел).

Решение. Свободная (k=0) система двух частиц (N=2) имеет $n = 3N - k = 6$ степеней свободы. В качестве обобщенных координат выберем радиус-вектор центра масс $\vec{R}$ и относительный радиус-вектор частиц

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \tag{7.10}$$

где $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ – радиус-векторы частиц относительно центра масс (изобразите рисунок). В силу определения центра масс и векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ имеем (объясните, почему):

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0. \tag{7.11}$$

Решая совместно (7.10) и (7.11) находим:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}, \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}. \tag{7.12}$$

Положение частиц относительно начала координат определяется векторами $\vec{R} + \vec{r}_1, \vec{R} + \vec{r}_2$. Взаимодействие между частицами центральное, поэтому

$$U = U(|r_1 - \vec{r}_2|) = U(r), r = |\vec{r}|.$$

Функция Лагранжа:

$$L=\frac{m_1}{2}\left(\dot{\vec{R}}+\dot{\vec{r}}_1\right)^2+\frac{m_2}{2}\left(\dot{\vec{R}}+\dot{\vec{r}}_2\right)^2-U(r).$$

Учитывая, что согласно (7.11) $m_1\dot{\vec{r}}_1+m_2\dot{\vec{r}}_2=0$, и выражая $\dot{\vec{r}}_1,\dot{\vec{r}}_2$ с помощью (7.12) через $\dot{\vec{r}}$, получаем:

$$L=\frac{m_1+m_2}{2}\dot{\vec{R}}^2+\frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2-U(r), \tag{7.13}$$

где $\mu=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ – приведенная масса (проделайте пропущенные выкладки). Функция (7.13) разбивается на два независимых слагаемых, первое их которых описывает движение центра масс, второе – движение частиц относительно центра масс:

$$L=L(\dot{\vec{R}})+L(\vec{r},\dot{\vec{r}}).$$

Координата $\vec{R}$ является циклической, следовательно, сохраняется импульс центра масс:

$$\vec{p}_{\vec{R}}=\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{R}}}=(m_1+m_2)\dot{\vec{R}}=const. \tag{7.14}$$

Центр масс движется равномерно и прямолинейно, или покоится.

Движение относительно центра масс описывается функцией

$$L=\frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2-U(r)=\frac{\mu}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-U(r). \tag{7.15}$$

Здесь мы перешли в полярную систему координат (т.к. движение в центральном поле плоское (объясните, почему)). Координата φ в (7.15) циклическая, поэтому сохраняется соответствующий обобщенный импульс

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = const\ . \qquad (7.16)$$

Это выражение представляет собой закон сохранения момента импульса (объясните, почему). Время также представляет собой циклическую переменную в L, поэтому сохраняется обобщенная энергия системы, которая для свободной системы совпадает с ее полной энергией:

$$H = p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} - L = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = const \qquad (7.17)$$

Из уравнений (7.16) и (7.17) следуют выражения (4.1), (4.2) (получите), которые позволяют определить закон движения и траекторию системы.

Уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow \mu(\ddot{r} - 2r\dot{\varphi}^2) = -\frac{\partial U}{\partial r};$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \mu\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0,$$

совпадают с уравнениями (4.5), полученными ранее из второго закона Ньютона.

7.9. Запишите функцию Лагранжа следующих систем, находящихся в однородном поле тяжести:

а) двойной плоский маятник (рис.7.1,а).

Ответ:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) +$$
$$+ (m_1 + m_2) g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2 .$$

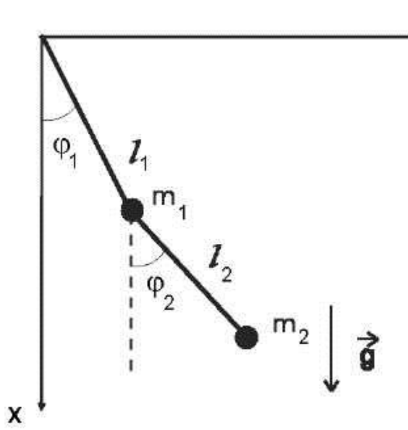

Рис.7.1,а

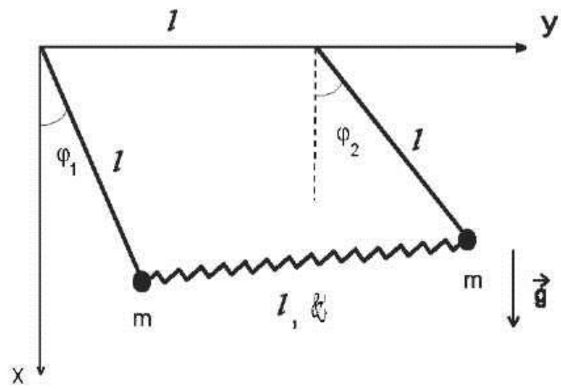

Рис.7.1,б

б) два маятника, связанных пружинкой, жесткость которой равна k; а длина в нерастянутом состоянии l (рис.7.1,б).

Ответ:

$$L = \tfrac{1}{2} m l^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) + mgl(\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1) -$$
$$- \tfrac{1}{2} k l^2 \left(\sqrt{(1 + \sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)^2 + (\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1)^2} - 1 \right)^2$$

7.10. Записать функцию и уравнения Лагранжа для заряженной частицы, движущейся в однородных стационарных электрическом и магнитном полях с напряженностями $\vec{E}$ и $\vec{H}$ соответственно.

Указание. Скалярный φ и векторный $\vec{A}$ потенциалы полей равны:

$$\varphi = -\vec{E}\vec{r},\ \vec{A} = \frac{1}{2}\left[\vec{H}\times\vec{r}\right].$$

Выбрать оси координат таким образом, чтобы $\vec{H} = (0,0,H), \vec{E} = (E_x,0,E_z)$.

7.11. Плоский математический маятник представляет собой материальную точку массы m, закрепленную на конце невесомого нерастяжимого стержня длины l, находящуюся в поле тяжести и способную совершать движение в определенной плоскости. Найти:

а) функцию Лагранжа, записать уравнения движения;

б) обобщенную и полную энергию и убедиться, что они совпадают;

в) период колебаний в зависимости от амплитуды (начальные условия: $\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0 = 0$).

Решение. а) Уравнения связей $z = 0, x^2 + y^2 = l^2$. Система имеет одну степень свободы. Направим ось x вдоль поля тяжести и выберем в качестве обобщенной координаты угол φ между этой осью и отклонением маятника. Тогда

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} + \omega_0^2\sin\varphi = 0, \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

б) $H = \dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\dot{\varphi} - L = \dfrac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi$;

$$E = T + U = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi .$$

в) С учетом начальных условий энергия маятника $E = -mgl\cos\varphi_0$. Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = \omega_0^2(\cos\varphi - \cos\varphi_0) .$$

Интервал от нуля до φ_0 маятник проходит за четверть периода, поэтому

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{2\omega_0}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} .$$

Подстановкой $\sin\frac{\varphi}{2}\Big/\sin\frac{\varphi_0}{2} = \sin\xi$ из этого выражения получаем

$$T = \frac{4}{\omega_0}K(\sin\frac{\varphi_0}{2}),$$

где $K(\kappa) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\xi}}$ – полный эллиптический интеграл первого рода. Для малых колебаний $\sin\frac{\varphi_0}{2} \approx \frac{\varphi_0}{2} << 1$. В этом случае

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1 + \frac{1}{16}\varphi_0^2 + \ldots\right).$$

Видим, что первые поправки к периоду квадратичны по амплитуде.

7.12. Составить функцию и уравнения Лагранжа заряда e массы m в однородном магнитном поле $\vec{H}$ (в калибровке векторного потенциала $\vec{A}=(0,xH,0)$) и однородном поле тяжести $\vec{g}=(0,0,-g)$. Указать первые интегралы уравнений Лагранжа. Найти закон движения заряда, если в начальный момент времени $t_0=0$ радиус-вектор частицы $\vec{r}(0)=\vec{r}_0$, а скорость $\dot{\vec{r}}(0)=\dot{\vec{r}}_0$.

8. Малые колебания

Малые колебания возникают в системах, имеющих положение устойчивого равновесия, которому соответствует строгий изолированный минимум потенциальной энергии системы. Пусть положение устойчивого равновесия реализуется в точке $q_0=(q_{10},\dots,q_{n0})$. Введем $\xi_i=q_i-q_{i0}$ – отклонение от положения устойчивого равновесия. Если отклонения достаточно малы, то можно разложить потенциальную энергию в степенной ряд, ограничившись первым неисчезающим членом, содержащим ξ_i. Поскольку

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_{q=q_0} = 0, \tag{8.1}$$

то, отбрасывая несущественную константу $U_0 = U(q_0)$, получим

$$U = \frac{1}{2}\sum_{ij} k_{ij}\xi_i\xi_j, \quad k_{ij} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{q=q_0}. \tag{8.2}$$

Условием реализации минимума функции U в точке q_0 является положительная определенность квадратичной формы (8.2), что выполняется тогда и только тогда, когда все *главные* миноры матрицы k_{ij} положительны (критерий Сильвестра):

$$\det(k_{ij})\Big|_{i,j=1}^{l} > 0, l = 1,\ldots,n. \tag{8.3}$$

Таким образом, выражения (8.1) и (8.3) определяют достаточное условие существования минимума потенциальной энергии в точке q_0 – положении устойчивого равновесия системы.

Функция Лагранжа малых колебаний имеет вид:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{ij} m_{ij}\dot{\xi}_i\dot{\xi}_j - \frac{1}{2}\sum_{ij} k_{ij}\xi_i\xi_j. \tag{8.4}$$

Матрицы m_{ij} и k_{ij} симметричны: $m_{ij} = m_{ji}$, $k_{ij} = k_{ji}$. Уравнения Лагранжа, записанные на основе (8.4) будут представлять собой систему n линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка, которая с помощью подстановки

$\xi_i = A_i e^{i\omega t}$ сводится к однородной системе линейных алгебраических уравнений для A_j: $\sum_j \Lambda_{ij}(\omega) A_j = 0$; $\Lambda_{ij}(\omega) = -m_{ij}\omega^2 + k_{ij}$. Последняя будет иметь нетривиальное решение, если равен нулю характеристический определитель системы:

$$\Delta(\omega) = \det\left|\Lambda_{ij}(\omega)\right| = 0 . \tag{8.5}$$

Равенство (8.5) определяет характеристическое уравнение, позволяющее определить собственные частоты $\omega_\alpha = 1, \ldots, n$.

Закон колебаний – зависимость ξ_j от времени – выражается следующим образом:

$$\xi_j = \sum_\alpha \Delta_{j\alpha} \theta_\alpha , \tag{8.6}$$

где $\Delta_{j\alpha} = \Delta_j(\omega_\alpha)$ – алгебраическое дополнение к элементу *j*-го столбца любой строки характеристического определителя, взятого при $\omega = \omega_\alpha$, $\Delta_{j\alpha} = (-1)^{k+j} M_{kj}(\omega_\alpha)$,($M_{kj}(\omega_\alpha)$ – минор элемента матрицы Λ_{ki}), $\theta_\alpha = a_\alpha \cos(\omega t + \delta_\alpha)$ – ***нормальные колебания*** системы. Координаты θ_α, соответствующие нормальным колебаниям системы называются ***нормальными координатами***. В нормальных координатах кинетическая и потенциальная энергии системы представляют собой диагональные квадратичные формы, а функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \sum_{\alpha} \frac{m_\alpha}{2}\left(\dot{\theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \theta_\alpha^2\right), \tag{8.7}$$

где m_α – коэффициенты, определяемые видом матрицы m_{ij}. В нормальных координатах функция Лагранжа системы равна сумме функций Лагранжа гармонических осцилляторов.

Согласно сказанному выше, алгоритм приведения функции Лагранжа к диагональному виду состоит в следующем:

1. Составляется функция Лагранжа.
2. По виду L определяются матрицы m_{ij} и k_{ij}, после чего составляется характеристическое уравнение (8.5) и находятся его корни – частоты ω_α.
3. Составляются алгебраические дополнения $\Delta_{j\alpha}$ и строятся соотношения (8.6).
4. Путем подстановки (8.6) в (8.4) производится диагонализация функции Лагранжа, в результате которой она приводится к виду (8.7).

Задачи.

1. Колебания систем с одной степенью свободы.

8.1. Определить возможные частоты малых колебаний натуральной механической системы, описываемой следующей функцией Лагранжа:

а) $L = \dfrac{\dot{q}^2}{2q^2} - q - \dfrac{4}{q}$; б) $L = (q+3)\dot{q}^2 - q^2 - \dfrac{4}{q^2}$;

в) $L = ch\,q(\dot{q}^2 - 4ch\,q)$; г) $L = q^2\dot{q}^2 - 2\cos q$.

8.2. Определить возможные частоты малых колебаний частицы, движущейся по кривой $y = y(x)$ в вертикальной плоскости x, y. Ось y декартовой системы координат направлена против силы тяжести, а заданная кривая описывается уравнением $(a > 0, b > 0)$:

а) $y = a\sin^2(bx)$; б) $y = a(b^3x^3 - 3bx + 3)$.

8.3. Найти положение устойчивого равновесия и частоты малых колебаний следующих механических систем:

а) математический маятник массы m и длины l;

б) заряженный шарик массы m и заряда e, способный свободно перемещаться в поле тяжести вдоль гладкого вертикального стержня (рис.8.1,а), на котором закреплен заряд e;

в) шарик массы m, движущийся по гладкому горизонтальному стрежню, соединенный пружиной с неподвижной точкой, находящийся на расстоянии l от стержня. Длина пружинки в нерастянутом состоянии равна a, а упругость k (рис.8.1, в);

2. Колебания систем со многими степенями свободы.

8.4. Определить возможные частоты малых колебаний частицы, движущейся по поверхности $z = z(x, y)$. Ось z декартовой системы координат направлена против силы тяжести, а заданная поверхность описывается уравнением $(a > 0, b > 0)$:

а) $z = a\,ch(bx)\,ch(by)$;

б) $z = -z_0\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}, \; z_0 > 0, |x| < a, |y| < b$.

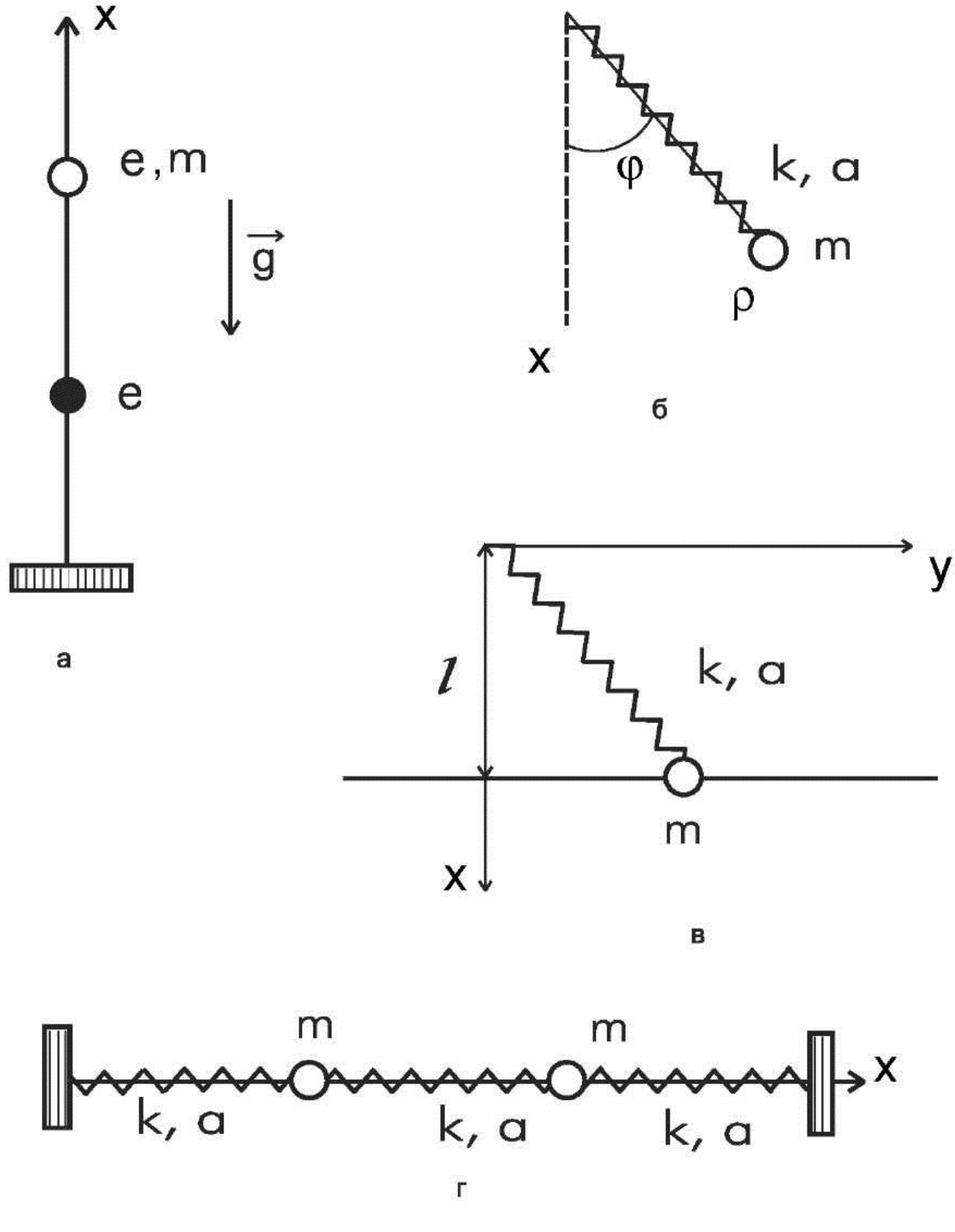

Рис. 8.1

8.5. Найти положение устойчивого равновесия и частоты малых колебаний следующих механических систем:

а) материальная точка массы m, подвешенная на пружинке, движется в вертикальной плоскости. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна a, а жесткость κ(рис.8.1,б);

б) две материальные точки массы m движутся вдоль горизонтального стержня. Точки соединены друг с другом и с концами стержня тремя одинаковыми пружинами длины a и жесткости κ(рис.8.1,г).

8.6. Найти частоты малых колебаний систем, изображенных на рисунках 7.1. ($l_1 = l_2 = l, m_1 = m_2 = m$).

8.7. Привести к диагональному виду функцию Лагранжа и записать закон малых колебаний для систем, изображенных на рис.7.1, 8.1, б и 8.1,г.

Решение. Рассмотрим систему, изображенную на рис.8.1,г. Система имеет 2 степени свободы. Обобщенные координаты x_1 и x_2 – положения каждой частицы на стержне. Положение устойчивого равновесия $x_{01} = a$, $x_{02} = 2a$; отклонения $\xi_i = x_i - x_{i0}$. Тогда $L = \frac{m}{2}\left(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2\right) - \kappa\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_1\xi_2\right)$,

$$m_{ij}=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad k_{ij}=\begin{pmatrix} 2\kappa & -\kappa \\ -\kappa & 2\kappa \end{pmatrix}.$$

$$\Delta(\omega)=\det\left|-m_{ij}\omega^2+k_{ij}\right|=\begin{vmatrix} -m\omega^2+2\kappa & -\kappa \\ -\kappa & -m\omega^2+2\kappa \end{vmatrix}=0.$$

$$\omega_1^2=\frac{\kappa}{m},\ \omega_2^2=3\frac{\kappa}{m}.$$

Алгебраические дополнения $\Delta_{j\alpha}$ построим, вычеркнув первую строку и соответствующий столбец. Имеем:

$$\Delta(\omega_1)=\kappa^2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix},\ \Delta(\omega_2)=\kappa^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

В силу равенства нулю этих определителей на множитель k^2 можно сократить. Тогда

$$\Delta_{12}=\Delta_1(\omega_2)=(-1)^{1+1}1=1;$$
$$\Delta_{22}=\Delta_2(\omega_2)=(-1)^{1+2}1=-1.$$

$$\xi_1=\Delta_{11}\theta_1+\Delta_{12}\theta_2=\theta_1+\theta_2;$$
$$\xi_2=\Delta_{21}\theta_1+\Delta_{22}\theta_2=\theta_1-\theta_2.$$

Функция Лагранжа:

$$L=\frac{m}{2}\left[\left(\dot\theta_1+\dot\theta_2\right)^2+\left(\dot\theta_1-\dot\theta_2\right)^2\right]-$$
$$\kappa\left[\left(\theta_1+\theta_2\right)^2+\left(\theta_1-\theta_2\right)^2-\left(\theta_1+\theta_2\right)\left(\theta_1-\theta_2\right)\right]=$$
$$m\left(\dot\theta_1^2-\omega_1^2\theta_1^2\right)+m\left(\dot\theta_2^2-\omega_2^2\theta_2^2\right)=L_1+L_2.$$

Нормальные колебания: $\theta_\alpha=a_\alpha\cos(\omega_\alpha t+\delta_\alpha), \alpha=1,2$. Закон движения

$$\xi_1 = \theta_1 + \theta_2 = a_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2);$$
$$\xi_2 = \theta_1 - \theta_2 = a_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) - a_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2).$$

Таким образом, колебания системы двух частиц характеризуется двумя собственными частотами и ω_1 , ω_2 и складывается из двух нормальных колебаний. Как легко убедиться (задав соответствующие начальные условия) нормальное колебание θ_1 с частотой ω_1 осуществляется, когда обе частицы колеблются в фазе (средняя пружинка не растянута, а скорости частиц одинаковы по величине и направлению). Нормальное колебание θ_2 с частотой ω_2 реализуется при колебаниях частиц в противофазе (скорости частиц одинаковы по величине, но противоположны по направлению).

9. Метод Гамильтона

В методе Гамильтона в качестве независимых переменных выбираются $2n$ *канонических переменных* – n обобщенных переменных q_i и n обобщенных импульсов p_i. Движение механической системы описывается с помощью $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^d, \end{cases} \tag{9.1}$$

которые называются ***уравнениями Гамильтона***. Если $Q_i^d = 0$, то соответствующие уравнения называются ***каноническими***. Функция $H = H(q, p, t)$, представляющая собой обобщенную энергию, выраженную через канонические переменные, называется ***функцией Гамильтона***. Для построения функции Гамильтона необходимо из выражений

$$p_i = \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i} = f_i(q,\dot{q},t) \tag{9.2}$$

найти обобщенные скорости $\dot{q}_i$ как функции координат, импульсов и времени: $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t)$ и, используя эти выражения, исключить обобщенные скорости из обобщенной энергии:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q,\dot{q},t) \ . \tag{9.3}$$

Из свойств обобщенной энергии следует, что если связи стационарны, или отсутствуют (система свободна), то функция Гамильтона равна полной энергии системы $H = T + U = E$.

Скорость изменения H со временем равна (закон изменения функции Гамильтона)

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i Q_i^d \frac{\partial H}{\partial p_l} . \tag{9.4}$$

Решив уравнения Гамильтона (9.1) получим зависимость канонических переменных от времени: $q_i = q_i(t, q_0 p_0)$, $p_i = p_i(t, q_0 p_0)$, что позволяет описать состояние механической системы в любой момент времени.

Переменная называется ***циклической*** в функции Гамильтона, если функция Гамильтона не зависит явно от этой переменной. Если (при $Q_\alpha^d=0$) циклической переменной в H является координата q_α, то сопряженный ей обобщенный импульс p_α будет интегралом движения: $p_\alpha=const$. Наоборот, если циклической переменной в H является обобщенный импульс p_α, то сопряженная ему обобщенная координата q_α будет интегралом движения: $q_\alpha=const$. Если же циклической переменной в H является время t, то интегралом движения будет сама функция Гамильтона H: $H=const$.

Задачи.

9.1. По известной функции Лагранжа составить функцию Гамильтона:

а) $L=\dfrac{m\dot{x}^2}{2}-\dfrac{m\omega^2x^2}{2}$ (линейный гармонический осциллятор);

б) $L=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{\alpha=1}^{n}m_\alpha\left(\dot{\theta}_\alpha^2-\omega_\alpha{}^2\theta_\alpha^2\right)$ (колебательная система с n степенями свободы);

в) $L=\dfrac{m}{2}\vec{v}^{\,2}-U(\vec{r})$ (частица, движение которой описывается в декартовых координатах);

г) $L=\dfrac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2\right)-U(\rho,\varphi,z)$ (частица, движение которой описывается в цилиндрических координатах);

д) $L=\dfrac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)-U(r,\theta,\varphi)$ (частица, движение которой описывается в сферических координатах);

е) $L=\dfrac{\dot{x}^2}{2}-\dfrac{\omega^2x^2}{2}-\alpha x^3+\beta x\dot{x}^2$ (одномерный ангармонический осциллятор).

Ответы:

а) $H=\dfrac{p_x^2}{2m}+\dfrac{m\omega^2x^2}{2}$;

б) $H=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{\alpha=1}^{n}\left(\dfrac{p_\alpha^2}{m_\alpha}+m_\alpha{\omega_\alpha}^2\theta_\alpha^2\right)$;

в) $H=\dfrac{1}{2m}\vec{p}^{\,2}+U(\vec{r})$;

г) $H=\dfrac{1}{2m}\left({p_\rho}^2+\dfrac{p_\varphi^2}{\rho^2}+{p_z}^2\right)+U(\rho,\varphi,z)$;

д) $H=\dfrac{1}{2m}\left({p_r}^2+\dfrac{p_\theta^2}{r^2}+\dfrac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+U(r,\theta,\varphi)$;

е) $H = \dfrac{p_x^2}{2(1+2\beta x)} + \dfrac{m\omega^2 x^2}{2} + \alpha x^3$.

9.2. Записать функцию Гамильтона заряженной частицы в электромагнитном поле.

Решение. Функция Лагранжа $L = \dfrac{mv^2}{2} - e\varphi(\vec{r},t) + \dfrac{e}{c}\vec{v}\vec{A}(\vec{r},t)$. Обобщенный импульс $\vec{p} = m\vec{v} + \dfrac{e}{c}\vec{A} \neq m\vec{v}$. Функция Гамильтона $H(\vec{r},\vec{p},t) = \vec{p}\vec{v} - L$. В результате получаем $H(\vec{r},\vec{p},t) = \dfrac{(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2}{2m} + e\varphi$.

9.3. Составить функцию Гамильтона и уравнения Гамильтона для движущейся частицы, если ее функция Лагранжа равна $L = e^{\frac{\alpha t}{m}}\left(\dfrac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - U(\vec{r},t)\right)$.

9.4. Найти функцию Лагранжа, если функция Гамильтона системы равна:

а) $H(\vec{p},\vec{r}) = \dfrac{p^2}{2m} - \vec{p}\vec{u}$; б) $H(\vec{p},\vec{r}) = \dfrac{cp}{n(\vec{r})}, p = |\vec{p}|$ – луч света, (волновой пакет) в прозрачной среде с показателем преломления $n(\vec{r})$ в приближении геометрической оптики;

Ответы: а) $L = \dfrac{m(\vec{v}+\vec{u})^2}{2}$; б) L=0 (система не может быть описана с помощью функции Лагранжа).

9.5. Найти уравнения движения частицы, функция Гамильтона которой задана в задаче 9.4.б. Найти траекторию, если а) $n = const$; б) $n(r) = ax$.

Ответ: $\dot{\vec{r}} = \dfrac{c\vec{p}}{np}, \dot{\vec{p}} = \dfrac{cp}{n^2}\dfrac{\partial n}{\partial \vec{r}}$; а) прямая линия; б) $x = c_1 ch(\dfrac{y}{c_1} + c_2)$, где c_1 и c_2 определяются начальной и конечной точкой траектории.

9.6. Проинтегрировать уравнения движения системы, если ее функция Гамильтона задается выражением

а) $H = \dfrac{p_x^2}{2m} + \dfrac{m\omega^2 x^2}{2}$;

б) $H = \sum\limits_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha \left(\dfrac{p_x^2}{2m} + \dfrac{m\omega^2 x^2}{2} \right)^\alpha, \lambda_\alpha = const,$

в) $H = \dfrac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \dfrac{m\omega^2 (x^2 + y^2)}{2} + \gamma xy$;

г) $H = A\sqrt{p_x} - Fx$.

Решение. Рассмотрим случай б). Уравнения Гамильтона преобразуются к виду

$$\frac{m\dot{x}}{p_x} = \varphi(x, p_x); \qquad -\frac{\dot{p}_x}{m\omega^2 x} = \varphi(x, p_x);$$

$$\varphi(x, p_x) = \sum_\alpha \lambda_\alpha \alpha \left(\frac{p^2{}_x}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right)^{\alpha - 1}.$$

Отсюда $\dfrac{p_x \dot{p}_x}{m} + m\omega^2 x\dot{x} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{p^2{}_x}{2m} + \dfrac{m\omega^2 x^2}{2} \right) = 0$, т.е.

$\dfrac{p^2{}_x}{2m} + \dfrac{m\omega^2 x^2}{2} = const$. Но тогда $\varphi(x, p_x)$ является интегралом движения: $\varphi(x, p_x) = \sigma = const$. Исключая из уравнений Гамильтона импульс, получаем:

$$\ddot{x} + \omega^2 \sigma^2 x = 0, \rightarrow x(t) = A\cos(\omega\sigma t + \alpha_0),$$

$$p_x = \frac{m\dot{x}}{\sigma} = -A\sin(\omega\sigma t + \alpha_0).$$

9.7. Материальная точка движется в однородном поле тяжести по гладкой поверхности кругового конуса с вертикально направленной осью симметрии и углом раствора 2α. Раствор конуса направлен вверх против силы тяжести. Найдите функцию Гамильтона и составьте канонические уравнения Гамильтона.

9.8. Найти функцию Гамильтона и составить канонические уравнения Гамильтона для математического маятника длиной l, точка подвеса которого движется по окружности радиуса r с постоянной линейной скоростью v_0.

9.9. Используя метод Гамильтона получить уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле.

Решение. Согласно задаче 9.2 обобщенный импульс и функция Гамильтона, соответственно, равны $\vec{p} = m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A}$, $H(\vec{r},\vec{p},t) = \frac{(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2}{2m} + e\varphi$. Уравнения Гамильтона:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}}{m} = \vec{v}; \\ \dot{\vec{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = \frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\vec{v}_c\vec{A}) - e\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} \end{aligned}\right\}, \tag{9.5}$$

где обозначение $\vec{v}_c$ означает, что вектор $\vec{v}$ остается постоянным при дифференцировании по $\vec{r}$. Продифференцировав по времени первое уравнение в (9.5) получим

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{r}\vec{G} + e\vec{E}, \tag{9.6}$$

где $\vec{G} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\vec{v}_c\vec{A}) - (\vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{r}})\vec{A}, \quad \vec{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

Рассмотрим компоненту вектора $\vec{G}$:

$G_i = v_k\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)$ (здесь и далее по дважды встречающимся индексам подразумевается суммирование). Пользуясь формулой $\vec{H} = rot\vec{A}$ (или в компонентах $H_l = \varepsilon_{lsn}\frac{\partial A_k}{\partial x_n}$) и тем, что

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lsn} = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{snl} = \delta_{is}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{ks} \qquad (9.7)$$

получаем

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} = \varepsilon_{ikl}H_l \Rightarrow G_i = \varepsilon_{ikl}v_k H_l = \left[\vec{v}\times\vec{H}\right]_i, \vec{G} = \left[\vec{v}\times\vec{H}\right]$$

Подставляя найденный вектор $\vec{G}$ в (9.6) получаем известное уравнение движения частицы в в электромагнитном поле

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\left[\vec{v}\times\vec{H}\right].$$

9.10. Решая уравнения Гамильтона, найти закон движения заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле напряженности $\vec{H}$. Векторный потенциал выбрать в виде $A_x = A_z = 0,\ A_e = Hx$.

10. Скобки Пуассона

Скобками Пуассона функций $f_1(q,p,t)$ и $f_2(q,p,t)$ называется выражение:

$$[f_1, f_2] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial f_2}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial f_2}{\partial q_i} \right) \qquad (10.1)$$

Через скобки Пуассона $[f, H]$ можно записать полную производную по времени от произвольной функции $f(q, p, t)$:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] . \qquad (10.2)$$

Из (10.2) следует, что функция f будет интегралом движения тогда и только тогда, когда $\frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0$. В частности, если функция f не зависит от времени явно, то она будет интегралом движения, если $[f, H]$=0. Таким образом, скобки Пуассона дают удобный способ нахождения интегралов движения.

Вычислять скобки Пуассона можно исходя из определения (10.1), либо пользуясь их свойствами:

1) $[f_1, f_2] = -[f_2, f_1]$; 2) $[c, f] = [f, c] = 0$ $(c = const)$;

3) $[f, f] = 0$; 4) $[cf_1, f_2] = [f_1, cf_2] = c[f_1, f_2]$;

5) $\frac{\partial}{\partial t}[f_1, f_2] = \left[\frac{\partial f_1}{\partial t}, f_2\right] + \left[f_1, \frac{\partial f_2}{\partial t}\right]$;

6) $\left[\sum_i \varphi_i, \sum_k \phi_k\right] = \sum_{ik} [\varphi_i, \phi_k]$;

7) $[\varphi_1\varphi_2, f] = \varphi_1[\varphi_2, f] + \varphi_2[\varphi_1, f]$;

8) $[q_i, f] = \frac{\partial f}{\partial p_i}$; 9) $[p_i, f] = -\frac{\partial f}{\partial q_i}$;

9) 10) $[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0; \quad [q_i, p_j] = \delta_{ij}$

(фундаментальные скобки Пуассона);

11) $[f_1, [f_2, f_3]] + [f_2, [f_3, f_1]] + [f_3, [f_1, f_2]] = 0$

(тождество Якоби).

Пользуясь свойствами (8) и (9) через скобки Пуассона можно записать уравнения Гамильтона в симметричном виде:

$$\dot{q}_i = [q_i, H], \quad \dot{p}_i = [p_i, H]. \tag{10.3}$$

Вид уравнений (10.3) не изменится при замене $q_i \leftrightarrow p_i$, что указывает на условность смысла переменных q и p.

Важное свойство скобок Пуассона состоит в том, что если f_1 и f_2 – два интеграла движения, то составленные из них скобки Пуассона также являются интегралом движения: $[f_1, f_2] = const$ (теорема Пуассона о третьем интеграле). Это свойство во многих случаях позволяет находить новые интегралы движения по двум уже известным.

Задачи.

10.1. Вычислить скобки Пуассона

а) $[L_i, x_j]$; б) $[L_i, p_j]$; в) $[L_i, L_j]$;

г) $[\vec{a}\vec{r}, \vec{b}\vec{p}]$; д) $[\vec{a}\vec{L}, \vec{b}\vec{r}]$; е) $[\vec{a}\vec{L}, \vec{b}\vec{L}]$;

ж) $\left[\vec{r}\vec{p},\vec{L}\right]$; з) $\left[\vec{p},r^n\right], r=|\vec{r}|$; и) $\left[\vec{p},(\vec{a}\vec{r})^2\right]$;

к) $\left[L_i,L^2\right]$; л) $\left[p^2,L_i\right]$

(x_i и p_i – декартовы компоненты радиус-вектора $\vec{r}$ и обобщенного импульса $\vec{p}$; $L_i=\varepsilon_{ijk}x_j p_k$ – компоненты момента импульса $\vec{L}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – постоянные векторы).

Ответы: а) $\varepsilon_{ijk}x_k$; б) $\varepsilon_{ijk}p_k$ в) $\varepsilon_{ijk}L_k$ (указание: воспользоваться тождеством (9.7)); г) $\vec{a}\vec{b}$; д) $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\vec{r}$; е) $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\vec{L}$; ж) 0; з) $-n\vec{r}r^{n-2}$; и) $-r\vec{a}(\vec{a}\vec{r})$.

10.2. Найти $\left[v_i,v_j\right]$, где v_i – компоненты скорости заряженной частицы, движущейся в магнитном поле.

Ответ: $\left[v_i,v_j\right]=\dfrac{e}{m^2c}\left(\dfrac{\partial A_j}{\partial x_i}-\dfrac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)=\dfrac{e}{m^2c}\varepsilon_{ijk}H_k$.

10.3. Пусть $\varphi=\varphi(\vec{r},\vec{p}), \vec{f}=\vec{f}(\vec{r},\vec{p})$ – скалярная и векторная функция радиус-вектора и импульса частицы. Вычислить:

а) $[\varphi,L_i]$; б) $\left[\vec{f},L_i\right]$.

Решение: Рассмотрим сначала задачу 10.3.а. Имеем

$$[\varphi, L_i] = [\varphi, \varepsilon_{ijk} x_j p_k] = -\varepsilon_{ijk}[x_j p_k, \varphi] = -\varepsilon_{ijk}(x_j [p_k, \varphi] + p_k [x_j, \varphi]) =$$

$$-\varepsilon_{ijk}\left(-x_j \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial\varphi}{\partial p_j}\right).$$

Поскольку φ – скалярная функция векторов $\vec{r}$ и $\vec{p}$, то она может зависеть только от скалярных комбинаций этих векторов: $\varphi = \varphi(r^2, p^2, \vec{p}\vec{r})$. Тогда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = \frac{\partial\varphi}{\partial r^2} 2x_k + \frac{\partial\varphi}{\partial(\vec{p}\vec{r})} p_k,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_k} = \frac{\partial\varphi}{\partial p^2} 2p_k + \frac{\partial\varphi}{\partial(\vec{p}\vec{r})} x_k.$$

Учитывая, что $\varepsilon_{ijk} x_j x_k = \varepsilon_{ijk} p_j p_k = 0$, получаем $[\varphi, L_i]=0$.

б) Произвольный вектор $\vec{f} = \vec{f}(\vec{r}, \vec{p})$ может быть представлен в виде $\vec{f} = \vec{f}(\vec{r}, \vec{p}) = \vec{r}\varphi_1 + \vec{p}\varphi_2 + [\vec{r} \times \vec{p}]\varphi_3$, где φ_i – скалярные функции. Прямым вычислением получаем $[\vec{f}, L_i] = [\vec{e}_i \times \vec{f}]$, где $\vec{e}_i$ – единичный вектор.

10.4. Частица движется в кулоновском поле $U(r) = -\dfrac{\alpha}{r}$ (задача Кеплера).

1) Используя формализм скобок Пуассона показать, что полная энергия E, момент импульса $\vec{L}$, вектор Лапласа $\vec{\Lambda}$ являются первыми интегралами движения.

2) Вычислить скобки Пуассона $[\Lambda_i, \Lambda_j]$, $[\Lambda_i, L_j]$.

Решение. 1) Функция Гамильтона $H=\dfrac{p^2}{2m}-\dfrac{\alpha}{r}$, $p^2=p_x^2+p_y^2+p_z^2\equiv p_ip_i$, $r^2=x^2+y^2+z^2\equiv x_ix_i$. Поскольку H=E, то $[E,H]=[H,H]=0\Rightarrow E=const$. Момент импульса

$$[L_i,H]=\varepsilon_{ijk}[x_jp_k,H]=\varepsilon_{ijk}x_j[p_k,H]+\varepsilon_{ijk}p_k[x_j,H]=$$

$$-\varepsilon_{ijk}x_kx_j\frac{\alpha}{r^3}+\frac{1}{m}\varepsilon_{ijk}p_jp_k=0\Rightarrow L_j=const.$$

Рассмотрим теперь вектор Лапласа. Имеем:

$$[\Lambda_i,H]=\frac{1}{m\alpha}\varepsilon_{ijk}[p_jL_k,H]-\left[\frac{x_i}{r},H\right]=$$

$$-\frac{1}{mr^3}(\varepsilon_{ijk}x_jL_k+r^2p_i-x_ix_jp_j)=0.$$

2) $[\Lambda_i,\Lambda_j]=\dfrac{2H}{m}\varepsilon_{ijk}L_k$, $\quad[\Lambda_i,L_j]=\varepsilon_{ijk}\Lambda_k$.

10.5. Рассмотрим систему, функция Гамильтона которой не зависит явно от времени. Доказать, что значение любой функции канонических переменных $f(q(t),p(t))$ в момент времени t выражается через ее значение $f(0)=f(q(0),p(0))$ в момент времени t=0 формулой

$$f(q(t),p(t))=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}[L\ldots[[f,H],H]_{t=0},$$

где функции $q(t)$ и $p(t)$ удовлетворяют уравнениям движения. Вычислить с помощью полученной формулы $x(t)$ и $p(t)$ для одномерного гармонического осциллятора.

Указание. Разложить функцию $f(q(t),p(t))$ в ряд Тейлора

$$f(q(t),p(t)) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^n f}{dt^n}\bigg|_{t=0}$$

и воспользоваться тем, что

$$\frac{df}{dt} = [f,H], \dots \frac{d^n f}{dt^n} = \left[\frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}, H\right] = [[\dots[[f,H],H]\dots],H].$$

10.6. Пусть функция Гамильтона зависит от переменных q_1, p_1 лишь через посредство функции $f(q_1,p_1)$: $H = H(f(q_1,p_1), q_2, p_2, \dots, q_n, p_n)$. Доказать, что $f(q_1,p_1)$ – интеграл движения.

б) Найти интегралы движения частицы с зарядом e, движущейся в поле неподвижного электрического диполя $U = e\dfrac{\vec{d}\vec{r}}{r^3}$, $\vec{d}$ – дипольный момент.

Решение. а) Непосредственно из определения скобок Пуассона (10.1) получаем:

$$\frac{df}{dt} = [f,H] = \frac{\partial H}{\partial f}[f,f] = 0 \quad \Rightarrow \quad f(q_1,p_1) = const.$$

б) Функция Гамильтона заряженной частицы в сферических координатах с началом в диполе и полярной осью направленной по вектору $\vec{d}$, имеет вид:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta} \right) + \frac{ed\cos\theta}{r^2}$$

Два интеграла движения очевидны: $H=E$ (полная энергия) и $p_\varphi = c$ (т.к. φ – циклическая переменная в H). С учетом последнего запишем

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2mr^2} f(\theta, p_\theta) = H(f(\theta, p_\theta), r, p_r),$$

где $f(\theta, p_\theta) = p_\theta^2 + \dfrac{c^2}{\sin^2\theta} + 2med\cos\theta$. Тогда, согласно предыдущему функция f также является интегралом движения.

11. Канонические преобразования

Рассмотрим преобразование канонических переменных q, p к новым переменным q', p': $(q, p) \to (q', p')$, при котором

$$\begin{aligned} q_i' &= q_i'(q, p, t), \\ p_i' &= p_i'(q, p, t), i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{11.1}$$

Если такое преобразование не меняет вида уравнений Гамильтона, то оно называется ***каноническим преобразованием*** (КП). Согласно сказанному, в новых переменных q', p' канонические уравнения Гамильтона имеют вид:

$$\dot{q}_i' = \frac{\partial H'}{\partial p_i'}, \quad \dot{p}_i' = -\frac{\partial H'}{\partial q_i'}, \tag{11.2}$$

где $H' = H'(q', p', t)$ – функция Гамильтона, записанная в новых канонических переменных.

Каноническое преобразование может быть построено с помощью ***производящей функции*** (ПФ) F. Всего существует четыре основных типа производящих функций:

$$1.\ F = F_1(q, q', t),\ p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i},\ p_i' = -\frac{\partial F_1}{\partial q_i'}; \qquad (11.3.1)$$

$$2.\ F = F_2(q, p', t),\ p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i},\ q_i' = \frac{\partial F_2}{\partial p_i'}; \qquad (11.3.2)$$

$$3.\ F = F_3(q, p', t),\ p_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i},\ p_i' = -\frac{\partial F_3}{\partial q_i'}; \qquad (11.3.3)$$

$$4.\ F = F_4(q, p', t),\ p_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i},\ p_i' = \frac{\partial F_4}{\partial p_i'}. \qquad (11.3.4)$$

Для всех типов производящих функций имеем

$$H'(q', p', t) = \left[H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t} \right]_{\substack{q = q(q', p', t) \\ p = p(q', p', t)}} \qquad (11.4)$$

При канонических преобразованиях скобки Пуассона сохраняют свой вид:

$$\begin{aligned} [f_1, f_2]_{q,p} &\equiv \sum_i \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i}\frac{\partial f_2}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i}\frac{\partial f_2}{\partial q_i} \right) = \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i'}\frac{\partial f_2}{\partial p_i'} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i'}\frac{\partial f_2}{\partial q_i'} \right) \equiv [f_1, f_2]_{q',p'} \end{aligned} \qquad (11.5)$$

Если взять в качестве функций f_1 и f_2 выражения (11.1), задающие КП, то из (11.5) получим:

$$[q'_i, q'_k]_{q,p} = 0, \; [p'_i, p'_k]_{q,p} = 0, \; [q'_i, p'_k]_{q,p} = \delta_{ik}. \qquad (11.6)$$

Выражения (11.6) задают необходимое и достаточное условие каноничности преобразования (11.1).

Удачно проведенные канонические преобразования позволяют существенно упростить функцию Гамильтона системы и, следовательно, уравнения Гамильтона, что, в свою очередь, приводит к упрощению способа их решения.

Задачи.

11.1. Найти КП, порождаемые ПФ, и установить их смысл:

а) $F_1 = \sum_k q_k q'_k$; б) $F_2 = \sum_k q_k p'_k$; в) $F_2 = \sum_k f_k(q_1,...q_m) p'_k$;

г) $F_2(r, \varphi, p'_1, p'_2) = p'_1 r \cos\varphi + p'_2 r \sin\varphi$.

Ответ: а) $p_i = q'_i$, $p'_i = -q_i$ (преобразование, меняющее местами импульсы и координаты); б) $p'_i = p_i$, $q'_i = q_i$ (тождественное преобразование); в) $q'_i = f_i(q_1, \dots q_m, t)$,

$p_i = \sum \frac{\partial f_k}{\partial q_i} p'_i$ (точечные преобразования обобщенных координат);

г) $q'_k = r\cos\varphi$, $q'_2 = r\sin\varphi$, $p'_1 = p_r \cos\varphi - \frac{p_\varphi}{r}\sin\varphi$,

$p_2' = p_r \sin\varphi + \dfrac{p_\varphi}{r}\cos\varphi$ (переход к полярным координатам).

11.2. Найти КП и новую функцию Гамильтона H', если ПФ имеет вид:

$$F_2(\vec{r}, \vec{p}', t) = \vec{r}\vec{p}' - \vec{u}\vec{p}'t + m\vec{r}\vec{u},\ \vec{u} = const\ .$$

Ответ: $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t, \vec{p} = \vec{p}' + m\vec{u}$ (преобразования Галилея), $H' = H - \vec{u}\vec{p}$.

11.3. Найти КП, задаваемое ПФ

а) $F_1(\vec{r}, \vec{r}', t) = \dfrac{m}{2t}(\vec{r} - \vec{r}')^2$; б) $F_2(\vec{r}, \vec{p}', t) = \vec{r}\vec{p}' - \dfrac{1}{2m}p'^2 t,$

и новую функцию Гамильтона для свободной частицы.

Ответ: а) $\vec{r} = \vec{r}' + \dfrac{t}{m}\vec{p}', \vec{p} = \vec{p}'; H' = 0$;

б) $\vec{r} = \vec{r}' + \dfrac{t}{m}\vec{p}', \vec{p} = \vec{p}'; H' = 0$.

11.4. Частица движется в однородном поле силы тяжести. Найти новую функцию Гамильтона H' и КП, задаваемое ПФ $F_2(\vec{r}, \vec{p}', t) = \vec{r}\vec{p} + m\vec{g}\vec{r}t$.

Ответ: $\vec{r} = \vec{r}', \vec{p} = \vec{p}' + m\vec{g}t, H' = \dfrac{1}{2m}(\vec{p}' + m\vec{g}t)^2$.

11.5. Найти новую функцию Гамильтона и КП для гармонического осциллятора, если ПФ имеет вид:

а) $F_2(x,p') = \frac{1}{2}(ip'^2 - im\omega x^2 + 2\sqrt{2m\omega}xp')$;

б) $F_1(x.x') = -\frac{1}{2}m\omega x^2 tg\, x'$;

в) $F_1(x,x',t) = -\frac{1}{2}m\omega x^2 tg(x' + \omega t)$.

Вычислить $x'(t), p'(t), x(t), p(t)$.

Ответы:

а) $x = \frac{x' - ip'}{\sqrt{2m\omega}}$, $p = -i\sqrt{\frac{m\omega}{2}}(x' + ip')$, $H' = -i\omega p'x'$;

б) $x = \sqrt{\frac{2p'}{m\omega}}\cos x'$, $p = -\sqrt{2m\omega p'}\sin x'$, $H' = \omega p'$;

в) $x = \sqrt{\frac{2p'}{m\omega}}\cos(\omega t + x')$, $p = -\sqrt{2m\omega p'}\sin(\omega t + x')$, $H' = 0$

11.6. Заряд движется в магнитном поле с векторным потенциалом $\vec{A}(\vec{r}) = B(-y,0,0)$. Используя КП, задаваемое ПФ $F_2(\vec{r},\vec{p}') = \vec{r}\vec{p}' - \frac{p_1'p_2'}{m\omega_B}$, $\omega_B = \frac{eB}{mc}$, найти закон движения заряда.

Указание: функция Гамильтона в новых переменных

$H' = \dfrac{p_2'^2}{2m} + \dfrac{m\omega_B^2}{2} x_2'^2 + \dfrac{p_3'^2}{2m}$ описывает одномерный осциллятор, движущийся вдоль оси z.

11.7. Электрон движется в статическом электромагнитном поле, задаваемом потенциалами $\varphi(\vec{r}) = \dfrac{U}{2a^2}(x^2 - y^2)$ и $\vec{A}(\vec{r}) = B(0,-x,0)$. Используя КП, задаваемое ПФ

$$F_2(\vec{r},\vec{p}') = \vec{r}\vec{p}' - \frac{\omega_H}{m\omega_1^2}, \omega_H = \frac{eB}{mc},$$

$\omega_1^2 = \omega_H^2 - \omega_2^2, \omega_2^2 = \dfrac{|e|U}{ma^2}$, найти закон движения электрона.

Указание: функция Гамильтона в новых переменных $H' = \dfrac{p_1'^2}{2m} + \dfrac{m\omega_1^2}{2} x_1^2 + \dfrac{p_2'^2}{2m} + \dfrac{m\omega_2^2}{2} x_2^2 - \left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \dfrac{p_3'^2}{2m}$ описывает систему двух независимых осцилляторов, движущихся вдоль оси z.

12. Метод Гамильтона-Якоби

Рассмотрим движение механической системы по действительным траекториям, удовлетворяющим каноническим уравнениям Гамильтона. Для такого движения

$$q_i = q_i(t, q_0, p_0), \qquad (12.1)$$

где $\{q_0, p_0\}$ – множество канонических переменных в начальный момент времени. Действие

$$S = \int_{t_0}^{t} L(q(t', q_0, p_0), \dot{q}(t', q_0, p_0), t')dt' = S(t, q_0, p_0, t_0). \qquad (12.2)$$

Из (12.1) находим $p_0 = p_0(q, t, q_0)$. Исключив с помощью этих выражений p_0 в (12.2), получим

$$S = S(q, t; q_0, t_0). \qquad (12.3)$$

Таким образом, при движении по действительным траекториям действие может рассматриваться как функция начальных (q_0, t_0) и текущих (q, t) обобщенных координат и времени. Эта функция удовлетворяет уравнению ***Гамильтона-Якоби***:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1, \ldots q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial S}{\partial q_n}, t) = 0, \qquad (12.4)$$

где H – функция Гамильтона системы, в которой обобщенный импульс

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}. \qquad (12.5)$$

Полным интегралом уравнения Гамильтона-Якоби называется такое его решение, которое содержит столько произвольных постоянных, сколько независимых переменных входит в само уравнение. Независимыми переменными в уравнении Гамильтона-Якоби являются обобщенные координаты $q_1 \ldots q_n$ и время t, поэтому полный интеграл этого уравнения будет содержать n+1 произвольную постоянную. Однако, поскольку функция S входит в уравнение только через свои производные, то одна из произвольных постоянных содержится в полном интеграле аддитивным образом. Аддитивную постоянную можно отбросить, поскольку действие S определено с точностью до аддитивной постоянной. Таким образом, полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби может быть записан в виде:

$$S = S(q_1, \ldots q_n, \alpha_1, \ldots \alpha_n, t), \tag{12.6}$$

где $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ – произвольные постоянные. Полный интеграл (12.6) позволяет определить зависимость канонических переменных от времени. А именно, справедлива **теорема Якоби**: если (12.6) – полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби, то зависимость канонических переменных от времени $q_k(t)$ и $p_k(t)$, $k = 1, \ldots n$, определить посредством решения системы уравнений:

$$\begin{cases} p_k = \dfrac{\partial S(q_1, \ldots q_n, \alpha_1, \ldots \alpha_n, t)}{\partial q_k} \\ \beta_k = \dfrac{\partial S(q_1, \ldots q_n, \alpha_1, \ldots \alpha_n, t)}{\partial \alpha_k} \end{cases}, \tag{12.7}$$

где β_k – некоторые постоянные.

Если система консервативна (т.е. полная энергия E сохраняется), то уравнение Гамильтона-Якоби принимает вид (стационарное уравнение Гамильтона-Якоби):

$$H\left(q_1,\ldots q_n,\frac{\partial S_0}{\partial q_1},\ldots\frac{\partial S_0}{\partial q_n}\right)=E\,, \qquad (12.8)$$

где $S_0=S_0(q_1,\ldots q_n)$ – укороченное действие. В этом случае полный интеграл

$$S=S_0(q_1,\ldots q_n,\alpha_1,\ldots\alpha_{n-1})-E(t-t_0)\,. \qquad (12.9)$$

Подставляя это выражение в (12.7), получаем:

$$\begin{cases}\beta_k=\dfrac{\partial S_0(q_1,\ldots q_n,\alpha_1,\ldots\alpha_{n-1},E)}{\partial\alpha_k},k=1,\ldots n-1;\\ t_1=\dfrac{\partial S_0(q_1,\ldots q_n,\alpha_1,\ldots\alpha_{n-1},E)}{\partial E}-t;\\ p_k=\dfrac{\partial S_0(q_1,\ldots q_n,\alpha_1,\ldots\alpha_{n-1},E)}{\partial q_k},k=1,\ldots n-1.\end{cases} \qquad 12.10)$$

В (12.10) первые $n-1$ выражений не содержат времени. Они позволяют определить конфигурационную траекторию системы, т.е. траекторию в пространстве n обобщенных координат. Выражение, содержащее время, определяет движение изображающей точки по конфигурационной траектории. Последние выражения в (12.10) определяют обобщенные импульсы как функции обобщенных координат.

Задачи.

12.1. Частица совершает плоское движение под действием центрального поля с потенциалом $U(r)$. Использовав систему полярных координат (r,φ), составить и решить уравнения Гамильтона-Якоби. Записать уравнения, позволяющие определить траекторию и закон движения. Найти обобщенные импульсы.

Решение. Функция Гамильтона равна $H=\frac{1}{2m}(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\varphi^2)+U(r)$. Система консервативна, поэтому уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S_0}{\partial\varphi}\right)^2\right]+U(r)=E.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$r^2\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2-2m(E-U(r))\right]=-\left(\frac{\partial S_0}{\partial\varphi}\right)^2.$$

Будем искать решение этого уравнения в виде $S_0(r,\varphi)=S_1(r)+S_2(\varphi)$ (метод разделения переменных). Тогда

$$r^2\left[\left(\frac{dS_0}{dr}\right)^2-2m(E-U(r))\right]=-\left(\frac{dS_0}{d\varphi}\right)^2.$$

Равенство двух функций, зависящих от различных переменных возможно только в случае, если каждая из них равна одной и той же постоянной. Обозначив эту постоянную за $-\alpha^2$, получим

$$r^2\left[\left(\frac{dS_0}{dr}\right)^2 - 2m(E-U(r))\right] = -\alpha^2, \left(\frac{dS_0}{d\varphi}\right)^2 = \alpha^2 .$$

Из последнего уравнения находим $S_2(\varphi) = \alpha\varphi$. Решая первое уравнение, получим следующее выражение для укороченного действия:

$$S_0(\varphi) = \int dr\sqrt{2m(E-U(r)-\frac{\alpha}{r^2}} + \alpha\varphi .$$

Полное действие –полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби, равно: $S = S_0 - E(t-t_0)$. На основании (12.10) получаем:

$$\beta = \frac{\partial S_0}{\partial\alpha} = \varphi - \int\frac{dr}{r^2\sqrt{2m(E-U(r)) - \frac{\alpha^2}{r^2}}},$$

$$t + t_1 = \frac{\partial S_0}{\partial E} = m\int\frac{dr}{\sqrt{2m(E-U(r)) - \frac{\alpha^2}{r^2}}},$$

$$p_r = \frac{\partial S_0}{\partial r} = \sqrt{2m(E-U(r)) - \frac{\alpha^2}{r^2}},$$

$$p_\varphi = \frac{\partial S_0}{\partial\varphi} = \alpha .$$

Первые два выражения позволяют определить траекторию $r = r(t), \varphi = \varphi(t)$. Оставшиеся определяют обобщенные импульсы.

12.2. Найти функцию действия S для механических систем, потенциальная энергия которых задается выражениями:

а) $U(x) = \dfrac{m\omega^2 x^2}{2}$ (одномерный гармонический осциллятор);

б) $U(x,y,z) = \dfrac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2)$ (трехмерный анизотропный гармонический осциллятор);

в) $U(r) = -\dfrac{\alpha}{r}$ (частица в кулоновском поле);

г) $U(\vec{r}) = \dfrac{e(\vec{d}\vec{r})}{r^3}$ (заряженная частица в поле электрического диполя).

В случаях (а) и (б) найти закон движения, в случае (в) – траекторию частицы, а в случае (г) определить зависимость радиальной переменной от времени $r(t)$.

12.3. Заряженная частица движется в однородном постоянном электрическом поле. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби и закон движения частицы, выбирая в качестве калибровки скалярного φ и векторного $\vec{A}$ потенциалов следующие выражения: а) $\varphi = -\vec{E}\vec{r}$, $\vec{A} = 0$; б) $\varphi = 0$, $\vec{A} = -c\vec{E}t$.

13. Механика абсолютно твердого тела

Абсолютно твердым телом (АТТ) называется система материальных точек, взаимное расстояние между которыми не изменяется в процессе движения. АТТ имеет 6 степеней свободы: 3 поступательных и 3 вращательных. Эти степени свободы могут быть выбраны следующим образом. Зададим положение произвольной точки АТТ (называемой полюсом) в какой-нибудь инерциальной системе отсчета (называемой неподвижной). В частности полюс может находиться в центре масс АТТ, радиус-вектор которого определяется выражением:

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}.$$

Координаты полюса $\vec{R}(x, y, z)$ задают три поступательные степени свободы. В полюсе можно выбрать начало отсчета другой системы координат, которая жестко связана с АТТ (подвижная система отсчета). Ориентация осей подвижной системы координат относительно неподвижной задается тремя углами $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, которые описывают вращательные степени свободы.

Движение АТТ в неподвижной системе отсчета может быть описано на основе шести уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{V}}-\frac{\partial L}{\partial \vec{R}}=0, \text{ (поступательное движение)} \qquad (13.1)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{\Omega}}-\frac{\partial L}{\partial \vec{\varphi}}=0, \text{ (вращательное движение)} \qquad (13.2)$$

где $\vec{R}$ и $\vec{V}$ – координаты и скорость центра масс тела, а $\vec{\Omega}=\dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$ – угловая скорость, $d\vec{\varphi}$ – угол бесконечно малого поворота, направленный вдоль оси вращения.

Если рассматривать АТТ как дискретную систему материальных точек и выбрать полюс в центре масс, то его функция Лагранжа запишется в виде:

$$L=\frac{MV^2}{2}+\frac{1}{2}\sum_{ik} I_{ik}\Omega_i\Omega_k - U, \qquad (13.3)$$

где M – масса тела, $U=U(\vec{R},\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ –потенциальная энергия, I_{ik} – компоненты тензора инерции:

$$I_{ik}=\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha\{\vec{r}_\alpha^{\,2}\delta_{ik}-x_i^{(\alpha)}x_k^{(\alpha)}\},\ i,k=1,2,3. \qquad (13.4)$$

Здесь $x_i^{(\alpha)}$ – компоненты вектора $\vec{r}_\alpha$, отсчитываемого от центра масс. Переход к непрерывному распределению масс осуществляется в соответствии с правилом

$$\sum_\alpha m_\alpha \ldots \to \int_V d\vec{r}\rho(\vec{r})\ldots,$$

где $\rho(\vec{r})$ – плотность , V – объем тела. Как и любой симметричный тензор I_{ik} может быть приведен к диагональному виду:

$$I_{ik} = I_i \delta_{ik}, \tag{13.5}$$

где I_i называются главными моментами инерции, а оси неподвижной системы координат, в которых I_{ik} диагонален – главными осями инерции.

Компоненты момента импульса АТТ определяются выражением

$$l_i = \frac{\partial L}{\partial \Omega_i} = \sum_k I_{ik} \Omega_k$$

и, по сути, являются обобщенными импульсами. В главных осях $l_i = I_i \Omega_i$.

Движение АТТ в подвижной системе отсчета, т.е. в системе отсчета, жестко связанной с телом, описывается уравнениями

$$\frac{d'\vec{P}}{dt} + \left[\vec{\Omega}, \vec{P}\right] = \vec{F}^e, \text{ (поступательное движение)} \tag{13.6}$$

$$\frac{d'\vec{l}}{dt} + \left[\vec{\Omega}, \vec{l}\right] = \vec{N}^e, \quad \text{(вращательное движение)} \tag{13.7}$$

где $\vec{P}$ – импульс, $\vec{l}$ – момент импульса, $\vec{F}^e$ и $\vec{N}^e$ – внешняя сила и момент внешних сил, соответственно. Штрих в выражениях для производной по времени означает, что эти производные берутся по отношению в подвижной системе отсчета (локальные производные).

Если оси подвижной системы отсчет выбраны по главным осям инерции, то (13.7) запишется в виде:

$$\begin{cases} I_1\dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 = N_1^e, \\ I_2\dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3)\Omega_3\Omega_1 = N_2^e, \\ I_3\dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 = N_3^e. \end{cases} \qquad (13.9)$$

Уравнения (13.8) называются динамическими уравнениями Эйлера. Если величины $\vec{N}^e$ заданы, то эти уравнения позволяют определить компоненты угловой скорости как функции времени $\Omega_i = \Omega_i(t)$.

Ориентацию подвижной системы отсчета относительно неподвижной можно задать с помощью трех углов Эйлера φ, θ, ϕ, (рис. 3.1.) которые удовлетворяют кинематическим уравнениям Эйлера:

$$\begin{cases} \Omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\phi + \dot{\theta}\cos\phi, \\ \Omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\phi - \dot{\theta}\sin\phi, \\ \Omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\phi}. \end{cases} \qquad (13.9)$$

Если угловые скорости Ω_i заданы, то система (13.9) позволяет определить зависимость углов Эйлера от времени: $\varphi = \varphi(t), \theta = \theta(t), \phi = \phi(t)$ и тем самым полностью описать динамику вращательного движения АТТ.

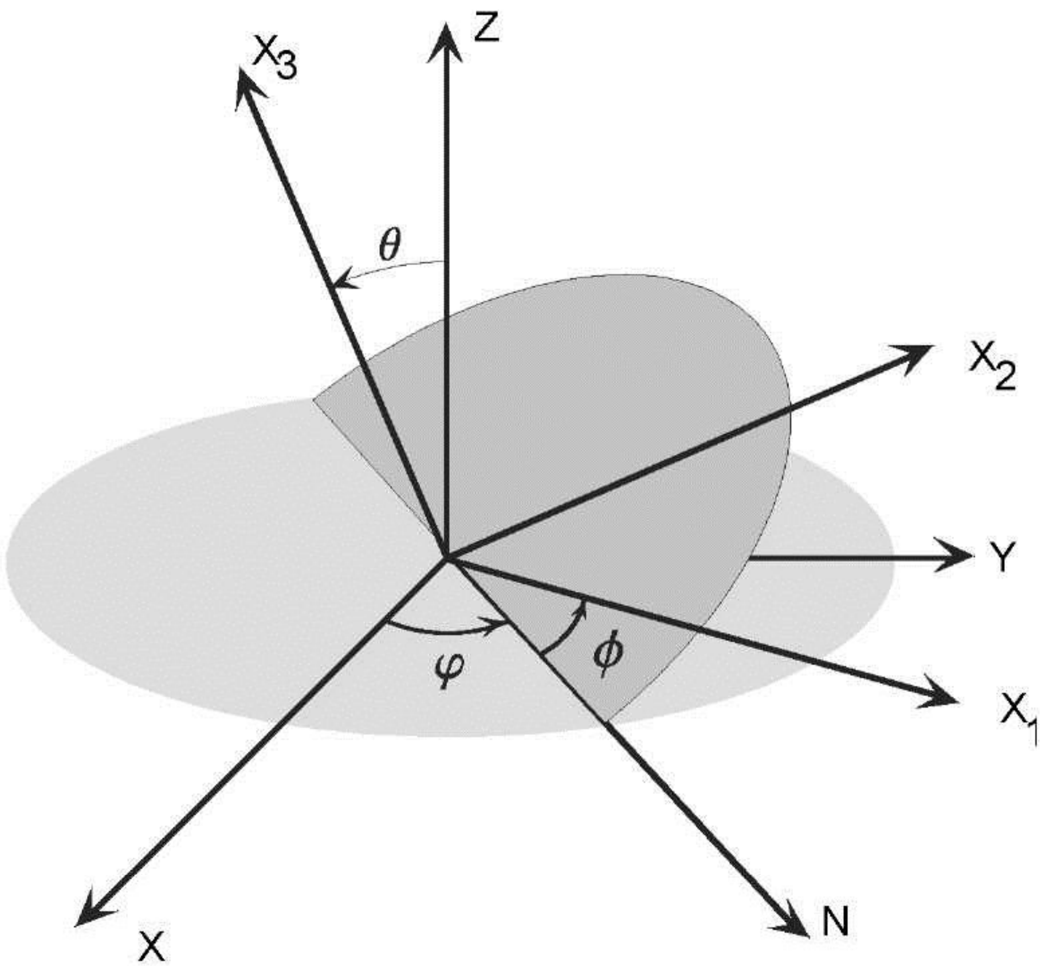

Рис. 13.1. Углы Эйлера.

Задачи.

13.1. Записать выражения для тензора инерции (13.4) в матричной форме.

13.2. В системе координат с началом в центре масс найти главные моменты инерции для следующих систем:

а) квадрат со стороной a, во взаимно противоположных вершинах которого сосредоточены материальные точки с массами *M* и *m* (рис.13.2,а);

б) прямоугольный треугольник (рис.13.2,б);

в) прямоугольник (рис.13.2,в).

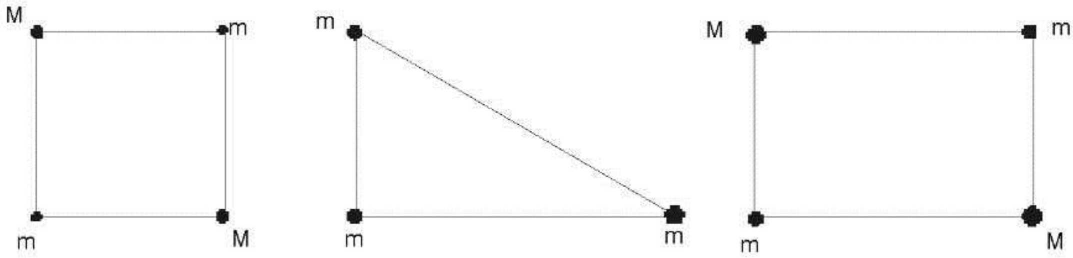

Рис.13.2 К задаче 13.2.

13.3. Определить главные моменты инерции сплошных однородных тел массой *m*:

а) шара радиуса *R*;

б) цилиндра радиуса *R* и высоты *h*;

в) параллелепипеда с длинами ребер *a*, *b*, *c*.

Ответ: а) $I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5}mR^2$; б) $I_1 = I_2 = \frac{1}{4}m(R^2 + \frac{1}{3}h^2)$; $I_3 = \frac{1}{2}mR^2$; в) $I_1 = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$; $I_2 = \frac{1}{12}m(a^2 + c^2)$; $I_3 = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$.

13.4. Записать функции Лагранжа и Гамильтона для симметричного волчка ($I_1 = I_2 \neq I_3$) с одной неподвижной точкой в поле тяжести, выбрав в качестве обобщенных координат углы Эйлера. Масса волчка m, расстояние от центра масс до точки подвеса l.

Ответ:

$$L = \tfrac{1}{2} I_1 (\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \tfrac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\phi})^2 - mgl\cos\theta\,;$$

$$H = \frac{(P_\varphi - P_\phi)^2}{2I_1 \sin^2\theta} + \frac{P_\phi^2}{2I_3} + \frac{P_\theta^2}{2I_1} + mgl\cos\theta\,.$$

13.5. Найти временную зависимость компонент угловой скорости и углов Эйлера в случае свободного вращения:

а) асимметричного волчка;

б) симметричного волчка (регулярная прецессия).

Ответ:

а) $\Omega_1 = \Omega_2 = 0; \Omega_3 = \Omega_0 = const; \varphi = const; \phi = \Omega_0 t + \phi_0;$

$\theta = const$.

б) Записывая динамические уравнения Эйлера, получаем $I\dot{\Omega}_1 = (I_3 - I)\Omega_2\Omega_0, I\dot{\Omega}_2 = (I - I_3)\Omega_1\Omega_0, \Omega_0 = \Omega_3 = const$.

Отсюда находим $\Omega_1 = A\cos(\omega t + \alpha), \Omega_2 = A\sin(\omega t + \alpha)$, где $\omega = \Omega_0 (I_3 - I)/I$. Так как внешние силы отсутствуют, то момент импульса $\vec{l} = const$. Для нахождения углов Эйлера как функции времени удобно воспользоваться системой координат, ось z которой совпадает с направлением вектора $\vec{l}$. Тогда получаем: $l\sin\theta\sin\varphi = l_1 = I\Omega_1 = IA\cos(\omega t + \alpha)$,

$l\sin\theta\cos\varphi = l_2 = I\Omega_2 = IA\sin(\omega t + \alpha)$, $\quad l\cos\theta = l_3 = I\Omega_0$. Из последнего равенства находим $\theta = \arccos\left(I_3\Omega_0/l\right) = const$. Из первых двух равенств получаем $l^2\sin^2\theta = I^2A^2$,

$$A = \sqrt{l^2 - I_3^2\Omega_0^2}\Big/I,\ \varphi = \omega t + \alpha,\ \phi = (\Omega_0 - \omega\cos\theta)t + \phi_0.$$

13.6. Составить и проинтегрировать уравнения движения симметричного волчка, вдоль оси симметрии которого приложен постоянный момент внешних сил $\vec{N}$. Равнодействующая всех сил равна нулю.

Ответ: $\Omega_1 = A\sin\omega[\left(t + I_3\Omega_0/N\right)^2 + \alpha]$,

$\Omega_2 = A\cos\omega[\left(t + I_3\Omega_0/N\right)^2 + \alpha]$, $\quad \omega_3 = Nt/I_3 + \Omega_0$, где $\omega = (I_3 - I)N/2II_3$, Ω_0, α, A

– постоянные интегрирования.

13.7. Найти закон малых колебаний физического маятника (АТТ, которое вращается без трения вокруг горизонтальной оси в однородном поле тяжести; M – масса, l – расстояние от точки подвеса до центра масс маятника).

Ответ: $\varphi = A\sin\left(t\sqrt{Mgl/I} + \alpha\right)$.

13.8. К симметричному волчку приложен момент внешних сил $\bar{N}$. При каких значениях проекций момента на главные оси инерции волчок будет совершать регулярную прецессию?

Ответ: $N_1^e = N\cos\phi, N_2^e = -N\sin\phi, N_3^e = 0$, где

$$N = I_3\omega\omega_1\sin\theta_0\left[1+\frac{I_3-I_1}{I_3}\frac{\omega}{\omega_1}\right]\cos\theta_0$$ (см. задачу 13.5.б).

13.9. Составить и проинтегрировать уравнения момента импульса $\vec{l}$ однородного намагниченного шара в однородном магнитном поле $\vec{h}(0,0,h_0)$. Энергия взаимодействия шара с полем $U = -\gamma\vec{l}\vec{h},\ \gamma = const$ (такого типа взаимодействие используется при исследовании явлений *электронного* и *ядерного магнитного резонанса*).

Решение: Функция Гамильтона $H = \dfrac{p^2}{2M}+\dfrac{l^2}{2I}-\gamma\vec{l}\vec{h}$, где M – масса шара, I – его момент инерции. Уравнение движения удобно записать, используя скобки Пуассона:

$\dot{l}_i = [l_i, H] = \gamma\varepsilon_{ijk}l_jh_k$, или $\dot{\vec{l}} = \gamma[\vec{l}\times\vec{h}]$. Отсюда находим:

$\dot{l}_x = \gamma h_0 l_y,\ \dot{l}_y = -\gamma h_0 l_x,\ \dot{l}_z = 0$. Решая эту систему, получаем:

$$l_x(t) = l_x(0)\cos\omega t + l_y(0)\sin\omega t,$$
$$l_y(t) = l_y(0)\cos\omega t - l_x(0)\sin\omega t, l_z = const,$$
$$l^2 = l_x^2(t)+l_y^2(t)+l_z^2(t) = l^2(0) = const,\ \omega = \gamma h_0.$$

14. Движение в неинерциальных системах отсчета

Под неинерциальной будем понимать такую систему отсчета, которая движется поступательно с ускорением $\vec{w}(t)$ и вращается с угловой скоростью $\vec{\Omega}(t)$ относительно любой наперед заданной инерциальной системы отсчета. Функция Лагранжа свободной частицы в неинерциальной системе отсчета имеет вид:

$$L = \frac{mv^2}{2} - m\vec{v}\vec{r} + m\vec{v}\left[\vec{\Omega}\times\vec{r}\right] + \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega}\times\vec{r}\right]^2 - U \qquad (14.1)$$

Уравнения Лагранжа $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$ приводят к следующему уравнению движения:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \vec{F}_D + \vec{F}_N + \vec{F}_K + \vec{F}_K, \qquad (14.2)$$

где $\vec{F}_D = -m\vec{w}$ – сила инерции Даламбера;

$\vec{F}_N = m\left[\vec{r}\times\dot{\vec{\Omega}}\right]$ – сила, обусловленная неравномерностью вращения системы отсчета;

$\vec{F}_K = 2m\left[\vec{v}\times\vec{\Omega}\right]$ – сила Кориолиса;

$\vec{F}_C = m\left[\vec{\Omega}\times\left[\vec{r}\times\vec{\Omega}\right]\right]$ – центробежная сила.

Отметим, что обобщенный импульс частицы в неинерциальной системе отсчета

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + m\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}\right] \tag{14.5}$$

не равен кинематическому импульсу $m\vec{v}$.

Задачи.

14.1. Определить закон движения плоского гармонического осциллятора, совершающего колебания с частотой ω в плоскости, которая вращается относительно перпендикулярной оси, проходящей через положение равновесия осциллятора. Вращение считать равномерным, происходящим с малой угловой скоростью $|\Omega| << \omega$.

Решение: Потенциальная энергия осциллятора $U = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$. Квазиупругая сила определяется равенством $\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = -\frac{m\omega^2}{2}(x, y, 0)$. Угловая скорость вращения системы отсчета $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega_z)$. В силу малости угловой скорости центробежной силой $\vec{F}_c$, пропорциональной Ω^2, можно пренебречь по сравнению с квазиупругой силой $F \sim \omega^2$. В силу равномерности вращения $\dot{\vec{\Omega}} = 0$ и, следовательно, $\vec{F}_N = 0$. Т.к. система отсчета не совершает поступательного движения, то $\vec{F}_D = 0$. Следовательно, из всех сил инерции остается только сила Кориолиса $\vec{F}_K$. Таким образом, уравнение (14.2) запишется в виде:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 2\Omega_z \dot{y} \\ \ddot{y} + \omega^2 y = -2\Omega_z \dot{x} \end{cases}, \tag{14.4}$$

Умножив второе уравнение на i и сложив с первым, получим одно уравнение $\ddot{\xi} + 2i\Omega_z\dot{\xi} + \omega^2\xi = 0$, где $\xi = x + iy$. При $\Omega_z \ll \omega$ решение этого уравнения имеет вид:

$$\xi = A_1 e^{i(\omega - \Omega_z)t} + A_2 e^{-i(\omega + \Omega_z)t}.$$

Представив комплексные амплитуды в виде $A_1 = a_1 e^{i\alpha_1}$, $A_2 = a_2 e^{i\alpha_2}$, получаем закон движения:

$$x = a_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2),$$

$$y = a_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - a_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2),$$

где $\omega_1 = \omega - \Omega_z, \omega_2 = \omega + \Omega_z$.

Видим, что траектория поворачивается вокруг оси с угловой скоростью Ω_z. Этот же вывод (о вращении траектории вокруг оси с угловой скоростью Ω_z) можно сделать исходя из уравнений (14.4) непосредственно. Умножим первое уравнение на y, второе – на x и вычтем. Тогда получается:

$$\frac{d}{dt}(y\dot{x} - x\dot{y}) = -\frac{d}{dt}(x^2 + y^2)\Omega_z.$$

Интегрируя и переходя к полярным координатам, находим $r^2\dot{\varphi} = r^2\Omega_z$. Отсюда $\dot{\varphi} = \Omega_z$, что и дает угловую скорость вращения траектории. Рассмотренная система моделирует расположенный на одном из полюсов Земли маятник Фуко, т.е. маятник, совершающий колебания в поле тяжести Земли под действием сил инерции.

14.2. Считая угловую скорость вращения Земли малой, найти:

а) отклонение свободно падающего тела от вертикали, обусловленное вращением Земли;

б) отклонение от плоскости для тела, брошенного с поверхности Земли с начальной скоростью $\vec{v}_0$.

Ответ: а) $y = -\frac{1}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}} g\Omega\cos\lambda$ (λ – широта, которую для определенности предполагаем северной). Отрицательные значения y соответствуют отклонению на восток;

б) $y = \dfrac{4v_{0z}^2}{g^2}\left(\dfrac{1}{3}v_{0z}\Omega_x - v_{0x}\Omega_z\right)$.

15. Механика сплошных сред

Сплошная среда – это жидкости, газы и упругие тела, рассматриваемые без учета их атомной структуры.

Общее уравнение движения сплошных сред имеет вид:

$$\rho\left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})v_i\right] = \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \qquad (15.1)$$

где ρ – плотность сплошной среды; $\vec{v}$ – скорость движения элементов сплошной среды; p_{ij} – тензор напряжений; f_i – объемная сила, действующая на единицу массы.

Выполнение закона изменения момента импульса приводит к требованию симметричности тензора напряжений: $p_{ij} = p_{ji}$.

Закон сохранения массы приводит к уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\rho\,\vec{v} = 0\,. \qquad (15.2)$$

Если сплошная среда несжимаема (ρ = *const*), то из (15.2) следует условие несжимаемости $div\,\vec{v} = 0$.

Чтобы решить уравнение (15.1) необходимо знать тензор напряжений p_{ij}. Для вязких жидкостей и газов

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + (\xi - \tfrac{2}{3}\eta)\delta_{ij} div\,\vec{v} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \qquad (15.4)$$

где p – давление, η – коэффициент сдвиговой вязкости, ξ – коэффициент объемной вязкости. Подставляя (15.3) в (15.1) получим уравнение Навье-Стокса:

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}\right] = \rho\,\vec{f} - \vec{\nabla}p + \eta\,\Delta\vec{v} + (\xi + \tfrac{1}{3}\eta)\vec{\nabla}div\vec{v}\,.$$

(15.4)

Из общего уравнения движения сплошной среды (15.1) можно получить уравнения движения для упругого деформируемого твердого тела. Последнее характеризуется тем, что даже при довольно больших внешних воздействиях его частицы мало смещаются из положения равновесия, а при снятии внешнего воздействия опять возвращаются в исходное положение. Поэтому

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} \approx \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \tag{15.5}$$

где $\vec{u}$ – вектор смещений.

Уравнения движения упругого деформируемого тела имеют вид:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + \rho_0 f_i, \tag{15.6}$$

где ρ_0 – плотность недеформированного тела.

Малые деформации деформируемого твердого тела можно характеризовать симметричным тензором деформаций:

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{15.7}$$

Связь тензора напряжений с тензором деформаций выражается законом Гука:

$$p_{ij} = \lambda_{ijkl} u_{kl}, \tag{15.8}$$

где λ_{ijkl} – тензор четвертого ранга упругих постоянных, обладающий следующими свойствами симметрии: $\lambda_{ijkl} = \lambda_{jikl} = \lambda_{klij}$. В общем случае имеется 21 независимая упругая постоянная.

Благодаря свойствам пространственной симметрии количество упругих постоянных может уменьшится, так, например, изотропное твердое тело характеризуется всего двумя упругими постоянными λ и μ. Закон Гука в этом случае записывается в виде:

$$p_{ij} = \lambda\,\delta_{ij} div\,\vec{u} + 2\mu\, u_{ij}\,. \tag{15.9}$$

Для изотропного упругого тела уравнение движения имеет вид:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \vec{f} + (\lambda + \mu)\vec{\nabla} div\vec{u} + \mu\,\Delta\vec{u}\,. \tag{15.10}$$

Граничные условия для задач теории упругости имеют вид:

$$(\vec{u})_1 = (\vec{u})_2; \quad (p_{ij} n_j)_1 = (p_{ij} n_j)_2, \tag{15.11}$$

где n_j – компонента внешней нормали к поверхности двух сред 1 и 2. Первое условие означает неразрывность сплошной среды, а второе выражает свойства сил взаимодействия.

Задачи.

15.1. В вязкой среде распространяется плоская монохроматическая волна с частотой ω. Найти декремент ее затухания на единицу длины.

Решение: Положим $\rho = \rho_0 + \rho_1$, $\rho_0 = const$, $|\rho_1| << \rho_0$. Разлагая давление в ряд и ограничиваясь первым членом разложения, запишем $p = p_0 + c^2\rho_1$, где $c^2 = \dfrac{\partial p}{\partial \rho}$. Линеаризуя далее уравнения (15.2) и (15.4) получаем:

$$\begin{aligned} &\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -c^2\vec{\nabla}\rho_1 + \eta\,\Delta\vec{v} + (\xi + \tfrac{1}{2}\eta)\vec{\nabla} div\vec{v}, \\ &\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho_0 div\vec{v}. \end{aligned} \tag{15.12}$$

Отсюда $\dfrac{\partial^2\rho_1}{\partial t^2} = c^2\Delta\rho_1 - (\xi + \tfrac{4}{3}\eta)\Delta\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial\rho_1}{\partial t}$.

Направим ось x вдоль волнового вектора $\vec{k}$ и положим $p_1 = Ae^{-i\omega t + ikx}$. Тогда $\omega^2 = c^2k^2 + \dfrac{iwk^2}{\rho_0}(\xi + \tfrac{4}{3}\eta)$ – дисперсионное уравнение. Отсюда:

$$k = \frac{\omega}{c}\left(1 + i\frac{(\xi + \frac{4}{3}\eta)\omega}{\rho_0 c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cong \frac{\omega}{c}\left(1 - i\frac{(\xi + \frac{4}{3}\eta)\omega}{2\rho_0 c^2}\right).$$

Мнимая часть k дает искомый декремент затухания, которое происходит по экспоненциальному закону:

$$p_1 = Ae^{-i\omega t + ikx}\exp\left(-x\frac{\omega^2}{2\rho_0 c^3}(\xi + \tfrac{4}{3}\eta)\right).$$

15.2. Дана бесконечная цепочка частиц массы m, соединенных пружинами длины a и жесткости k. Записать уравнение продольных колебаний цепочки в континуальном приближении.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ (u – смещение, $c^2 = a^2 \dfrac{k}{m}$).

15.3. Показать, что произвольное волновое поле в упругой среде можно представить как сумму волновых полей продольных и поперечных смещений.

Решение: Продольные и поперечные волны описываются, соответственно, уравнениями:

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} - c_l^2 \Delta \vec{u}_l = 0; \; \frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} - c_t^2 \Delta \vec{u}_t = 0,$$

где $c_l = \sqrt{\dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}}$ – скорость продольной волны, $c_t = \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho_0}}$ – скорость поперечной волны ($c_l > c_t$). Запишем уравнение движения (15.10) в виде ($\vec{f} = 0$):

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (c_l^2 - c_t^2)\vec{\nabla} div\vec{u} + c_t^2 \Delta \vec{u}.$$

Разложим $\vec{u}$ на потенциальную и вихревую части: $\vec{u} = \vec{u}_l + \vec{u}_t$, где $rot\,\vec{u}_l = 0, div\,\vec{u}_t = 0$. Используя соотношение

$$\vec{\nabla} div\vec{u} = \vec{\nabla} div\vec{u}_l = \Delta \vec{u}_l + rot\,rot\vec{u}_l = \Delta \vec{u}_l$$

получим

$$\left(\frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} - c_l^2 \Delta \vec{u}_l\right) + \left(\frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} - c_t^2 \Delta \vec{u}_t\right) = 0.$$

Каждое из выражений, стоящих в скобках, равно нулю, т.к.

равны нулю их дивергенция и ротор.

15.4. Получить выражения для объемной плотности энергии волн W и вектора Умова-Пойнтинга $\vec{S}$ в изотропном твердом теле.

Решение: Считаем в (15.6) $f_i = 0$. Умножая это уравнение на $\partial u_i / \partial t$ приведем его к виду:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho_0}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2\right] = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(p_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial t}\right) - p_{ik}\frac{\partial u_{ik}}{\partial t}.$$

Пользуясь законом Гука (15.9), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho_0}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}(\lambda - \mu)u_{ll}^2 + \mu u_{ik}^2\right] + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(-\sigma_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial t}\right) = 0.$$

Сравнивая это выражение с законом сохранения энергии в дифференциальной форме

$$\frac{\partial W}{\partial t} + div\vec{S} = 0$$

находим, что плотность энергии $W = W_k + W_p$, где

$$W_k = \frac{\rho_0}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho_0\,\dot{\vec{u}}^2, W_p = \frac{1}{2}(\lambda - \mu)u_{ll}^2 + \mu u_{ik}^2,$$

а компоненты вектора Умова-Пойнтинга равны $S_k = -p_{ik}\dfrac{\partial u_i}{\partial t} = -p_{ik}v_i$.

15.5. Получить выражения для объемной энергии линейных волн W и вектора Умова-Пойнтинга $\vec{S}$ в идеальной жидкости.

Ответ: $W = W_k + W_p = \dfrac{\rho_0 v^2}{2} + \dfrac{c^2}{2\rho_0}\rho_1^{\,2}$; $\quad \vec{S} = c^2 \rho \vec{v}$.

15.6. Показать, что энергия волн в диссипативной сплошной среде уменьшается со временем.

Решение: Учитывая (15.12) и результаты задачи 15.5 получаем

$$\frac{\partial W}{\partial t} + div\vec{S} = \eta \vec{v}\Delta\vec{v} + (\xi + \tfrac{1}{3}\eta)\vec{v}\vec{\nabla} div\vec{v} .$$

Для потенциального (безвихревого) акустического поля:

$$\vec{\nabla} div\,\vec{v} = rot\,rot\,\vec{v} + \Delta\,\vec{v} = \Delta\,\vec{v} .$$

Поэтому правая часть преобразуется следующим образом

$$(\xi + \frac{\eta}{3})\vec{v}\Delta\vec{v} = b\Delta\frac{v^2}{2} - bQ,\ \ Q = (\vec{\nabla} v_x)^2 + (\vec{\nabla} v_y)^2 + (\vec{\nabla} v_z)^2 > 0 ,$$

где b - положительная постоянная. Плотность энергии изменяется в соответствии с законом

$$\frac{\partial W}{\partial t} + div(\vec{S} - b\vec{\nabla}\frac{v^2}{2}) = -bQ .$$

Интегрируем это выражение по объему, на границе которого движение исчезает $\vec{v} = \rho_1 = 0$ (все волновые процессы происходят внутри объема). Пользуясь теоремой Гаусса и учитывая, что поверхностный интеграл по границе рассматриваемого объема обращается в нуль, получаем

$$\frac{d}{dt}\int_V W dV = -b\int_V Q dV < 0 .$$

Отсюда следует, что энергия волн со временем убывает.

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука.1973.
2. Коткин Г.Л., Сербо В.Г. Сборник задач по классической механике. М. Наука, 1977.
3. Ольховский И.И., Павленко Ю.Г., Кузьменков Л.С. Задачи по теоретической механике для физиков. М.: МГУ, 1977.
4. Павленко Ю.Г. Задачи по теоретической механике. М.: МГУ, 1988.
5. Поляхова Е.Н. Сборник задач по аналитической механике. Л.: ЛГУ, 1982.
6. Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике. М.: Высшая школа, 1984.
7. Виноградова М.Б., Руденко О.И., Сухоруков А.П. Теория

волн. М.: Наука, 1990.

8. Алексеев А.И. Техника вычислений в классической механике. М.: МИФИ, 1984.

9. Форш П.А. Задачи по теоретической механике для химиков. М.: МГУ, 2008.

10. Баринова М.Ф., Голубева О.В. Задачи и упражнения по теоретической механике. М.: Высшая школа, 1980.

Оглавление