ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
СТАТИКА (ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ)
Учебное пособие

1.ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Реальные физические тела в результате действия на них других тел меняют свою форму и размеры, т.е. деформируются. Однако, такие деформации, как правило, незначительны и не влияют на движение тела, поэтому в механике ими пренебрегают и считают рассматриваемые тела абсолютно твердыми.

Абсолютно твердым называется такое тело, расстояния между двумя любыми точками которого остаются неизменными независимо от действий на него других тел.

Для краткости термин абсолютно твердое тело заменяется термином «твердое тело» или просто «тело».

1.2. Состояние движения или покоя данного тела зависит от механических взаимодействий с другими телами. Мерой такого взаимодействия является сила.

Силой называется векторная величина, определяющая меру механического взаимодействия двух тел.

Характеристиками действия силы являются:

а) численное значение силы или ее модуль;

б) направление силы;

в) точка ее приложения.

Линией действия силы называется прямая, вдоль которой действует сила.

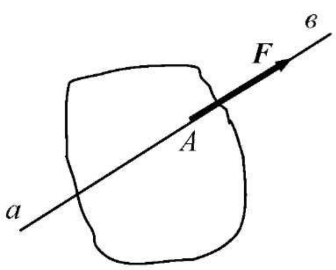

Рис.1

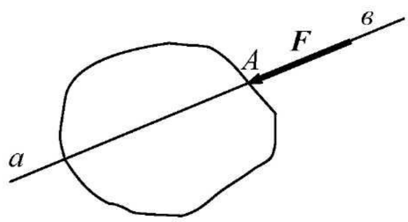

Рис.2.

Графически сила изображается направленным отрезком, длина которого в выбранном масштабе выражает модуль, а начало вектора совпадает с точкой приложения силы (рис.1). Иногда точку приложения силы совмещают с концом направленного отрезка – острием стрелки вектора (рис.2). Линия действия силы - прямая *ав*.

1.3. ***Системой сил называется совокупность сил, приложенных к одному твердому телу.***

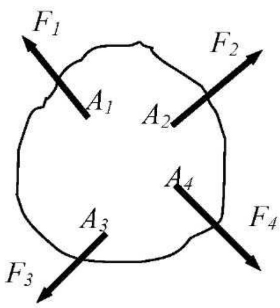

Рис. 3

Систему сил, приложенных к данному твердому телу (рис.3), обозначают: $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\}$

Наиболее часто встречаются следующие системы сил:

а) система сходящихся сил, т.е. сил, линии действия которых пересекаются в одной точке;
б) система параллельных сил;
в) плоская система сил, т.е. сил, линии действия которых лежат в одной плоскости.

Эквивалентными называются такие две системы сил, каждую их которых можно заменить другой, не изменяя состояния покоя или характер движения тела: $\{\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_k\} \infty \{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\}$.

Равнодействующей называется сила, эквивалентная системе сил:

$$\overline{F} \infty \{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\}.$$

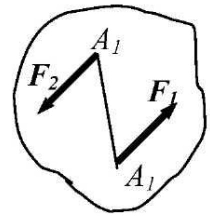

Рис.4.

Уравновешенной или эквивалентной нулю называется система сил, под действием которой тело находится в покое. $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\} \infty 0$.

Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил (рис.4)

Пару сил обозначают: $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$.

1.4. Свободным называется твердое тело, не скрепленное с другими телами, которому можно сообщить из данного положения любое перемещение в пространстве.

Связями называются любые ограничения, препятствующие перемещениям тела в пространстве.

К связям относятся различного вида устройства, закрепляющие тела, и опорные поверхности.

Тело с наложенными на него связями называется несвободным.

Реакцией называется сила, с которой связь действует на тело.

Направления реакций определяются свойствами связей. Реакция конкретной связи направлена в сторону, противоположную той, куда эта связь не дает телу перемещаться.

Все силы, действующие на несвободное тело, разделяются на две категории: активные силы и реакции связей. Силы, не зависящие от связей, называются активными или заданными. Реакции связей являются пассивными, поскольку они возникают в результате действия на тело активных сил.

1.5. Статика решает две задачи:
1) определяет методы эквивалентных преобразований систем сил;
2) определяет условия равновесия абсолютно твердых тел.

Равновесием в статике называется состояние покоя данного тела или нескольких тел по отношению к инерциальной системе отсчета.

Для инженерных расчетов инерциальной системой может служить система координат, связанная с Землей.

2. МОМЕНТЫ СИЛ И ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НИМИ.

Моменты сил являются мерой вращательного действия сил на тело.

2.1. ***Вектором моментом силы F относительно центра O называется вектор $m_O(F)$, приложенный в этом центре, направленный перпендикулярно плоскости, в которой лежат центр и сила, в ту сторону, откуда поворот силы вокруг центра виден против часовой стрелки, и равный по модулю произведению модуля силы на плечо*** (рис.5.)

Плечом силы относительно центра называется кратчайшее расстояние h между центром O и линией действия силы F.

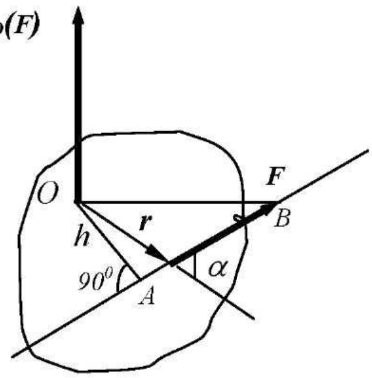

Рис.5

Следовательно, модуль вектора-момента силы равен $\left|\,\overline{m}_O(\overline{F})\,\right| = \left|\overline{F}\right| \cdot h$.

Так как h является высотой треугольника OAB, то $\left|\,\overline{m}_O(\overline{F})\,\right| = 2S_{OAB}$, где S_{OAB} - площадь треугольника OAB.

Векторный момент силы относительно центра равен векторному произведению радиуса-вектора, проведенного из центра в точку приложения силы, и вектора силы, так как эти два вектора имеют одинаковые модули и направления.

$$\overline{m}_O(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F} \, .$$

2.2 ***Моментом силы относительно оси называется момент проекции силы на плоскость, перпендикулярную этой оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью*** (рис.6).

Момент силы относительно оси считается положительным, если проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси, стремится повернуть тело вокруг положительного направления оси против часовой стрелки, отрицательным, если – по часовой стрелке. Момент силы $\overline{F}$ относительно оси z обозначается символом $m_z(\overline{F})$. $\quad m_z(\overline{F}) = m_O(\overline{F}_{xy}) = \pm\left|\overline{F}_{xy}\right| \cdot h$,

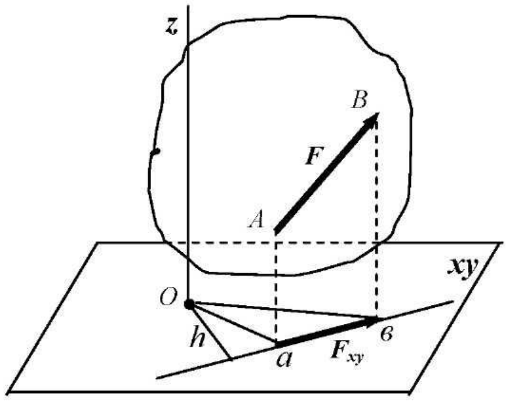

Рис.6

где $\overline{F}_{xy}$ – проекция силы $\overline{F}$ на плоскость xy, перпендикулярную оси z.

Так как h является высотой треугольника $Oaв$, то $m_z(\overline{F}) = 2S_{Oab}$, где S_{Oab} – площадь треугольника *Оав*.

Для определения момента силы $\overline{F}$ относительно оси z нужно выполнить следующие действия:

1. провести плоскость *xy*, перпендикулярную оси z и указать точку О пересечения оси z с этой плоскостью;
2. найти проекцию $\overline{F}_{xy}$ силы $\overline{F}$ на плоскость *xy*;
3. из точки О опустить перпендикуляр h на линию действия проекции $\overline{F}_{xy}$ и вычислить момент $m_O(\overline{F}_{xy})$ как произведение модуля проекции силы $\overline{F}_{xy}$ на плечо h с соответствующим знаком.

Момент силы относительно оси равен нулю, если сила параллельна оси или пересекает ось, т.е. в том случае, когда ось и действующая сила лежат в одной плоскости.

Теорема 1. ***Проекция векторного момента силы относительно центра на ось, проходящую через этот центр, равна моменту силы относительно этой оси.***

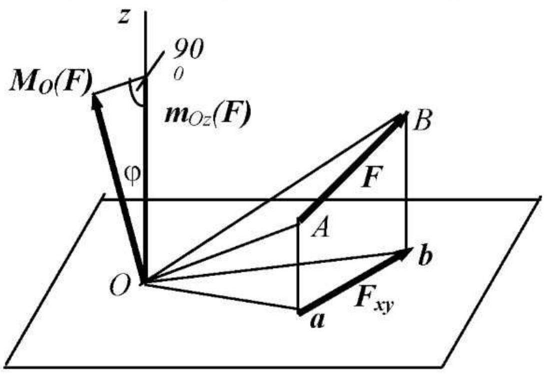

Рис.7

Доказательство. Проведем через точку O ось z и спроецируем на нее вектор $\overline{m}_O(\overline{F})$ (рис.7). Эта проекция равна: $m_{Oz}(\overline{F}) = \left|\overline{m}_O(\overline{F})\right| \cdot \cos\varphi$. Модуль $\left|\overline{m}_O(\overline{F})\right|$ равен удвоенной площади треугольника *OAB*: $\left|\overline{m}_O(\overline{F})\right| = 2\,S_{OAB}$. Значит, $m_{Oz}(\overline{F}) = 2S_{OAB}\cos\varphi$. Момент силы $\overline{F}$ относительно оси z $m_Z(\overline{F}) = 2S_{Oab}$, где треугольник *Оав* является проекцией треугольника *OAB* на плоскость, перпендикулярную оси z. Значит, $S_{Oab} = S_{OAB}\cos\varphi$, так как угол между плоскостями этих треугольников измеряется углом между перпендикулярами к ним, т.е. углом φ. Окончательно, $m_{Oz}(\overline{F}) = 2S_{Oab} = m_Z(\overline{F})$.

Аналогично, $m_{Ox}(\overline{F}) = m_x(\overline{F})$, $m_{Oy}(\overline{F}) = m_z(\overline{F})$.

2.3. Выражение момента силы относительно оси в координатной форме.

Разложим векторный момент $\overline{m}_O(\overline{F})$ силы $\overline{F}$ относительно центра O по координатным осям *x, y, z,* связанным с центром O.

$$\overline{m}_O(\overline{F}) = m_{Ox}(\overline{F})\overline{i} + m_{Oy}(\overline{F})\overline{j} + m_{Oz}(\overline{F})\overline{k} = m_x(\overline{F})\overline{i} + m_y(\overline{F})\overline{j} + m_z(\overline{F})\overline{k}. \qquad (1)$$

Разложим также по координатным осям векторное произведение.

$$\overline{m}_O(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F} = (yF_z - zF_y)\overline{i} + (zF_x - xF_z)\overline{j} + (xF_y - yF_x)\overline{k}. \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получаем выражения моментов силы $\overline{F}$ относительно координатных осей.

$$m_x = yF_z - zF_y;$$

$$m_y = zF_x - xF_z;$$

$$m_z = xF_y - yF_x ,$$

где x, y, z - координаты точки приложения силы, а F_x, F_y, F_z - проекции силы $\overline{F}$ на оси координат.

2.4. ***Векторным моментом пары называется вектор, направленный перпендикулярно плоскости пары в ту сторону, откуда вращение пары видно происходящим против часовой стрелки, и равный по модулю произведению модуля одной из сил пары на ее плечо.***

Плечом пары называется кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары.

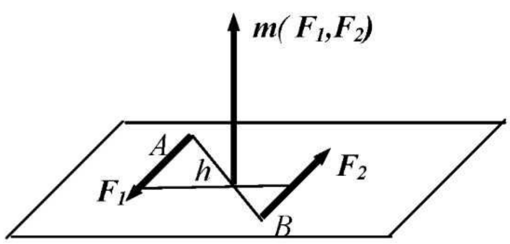

Рис.8

Момент пары $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2\right)$ обозначается символом $\overline{m}(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ или $\overline{M}$. Модуль момента пары рис.8) равен

$$|\overline{m}(\overline{F}_1, \overline{F}_2)| = \left|\overline{F}_1\right| \cdot h .$$

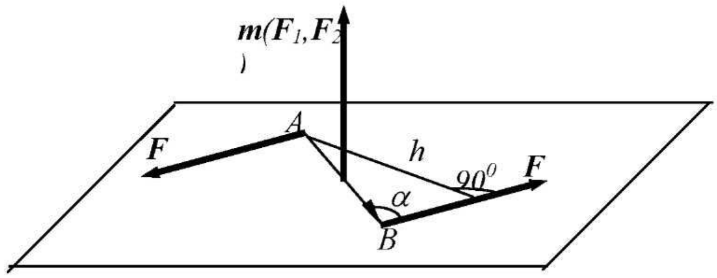

Рис. 9

Век*торный момент пары сил равен векторному произведению радиуса-вектора, проведенного из точки приложения одной из сил пары в точку приложения второй, и вектора этой силы* (рис.9).

$$\overline{m}(\overline{F}_1, \overline{F}_2) = A\overline{B} \times \overline{F}_1$$

Эти векторы равны, так как они имеют одинаковые модули и направления.

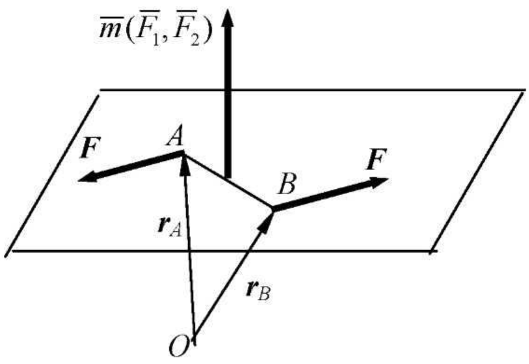

Рис. 10

Т**еорема 2.** ***Сумма векторных моментов сил, составляющих пару, относительно любого центра равна векторному моменту пары*** (рис.10).

Доказательство. Так как силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ составляют пару, то $\overline{F}_1 = -\overline{F}_2$.

Тогда

$$\overline{m}_O(\overline{F}_1) + \overline{m}_O(\overline{F}_2) = \overline{r}_A \times \overline{F}_1 + \overline{r}_B \times \overline{F}_2 = \overline{r}_A \times \overline{F}_1 - \overline{r}_B \times \overline{F}_2 = (\overline{r}_A - \overline{r}_B) \times \overline{F}_1 == B\overline{A} \times \overline{F}_1 =$$
$$= m(\overline{F}_1, \overline{F}_2).$$

2.5. Моменты для плоской системы сил

2.5.1. Алгебраическим моментом силы относительно центра называется взятое с соответствующим знаком произведение модуля силы на плечо.

$$m_O(\boldsymbol{F}) = \pm F\,h.$$

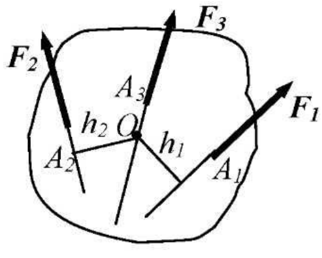

Рис. 11

Момент силы имеет знак плюс, если сила стремится повернуть тело вокруг центра O против часовой стрелки (рис.11). Если линия действия силы проходит через центр, то ее момент относительно этого центра равен нулю.

$$m_0(\boldsymbol{F_1}) = F_1 h_1;$$
$$m_0(\boldsymbol{F_2}) = -\,F_2 h_2;$$
$$m_0(\boldsymbol{F_3}) = 0.$$

2.5.2. Алгебраическим моментом пары называется взятое со знаком плюс или минус произведение модуля одной из сил пары на плечо (рис.12).

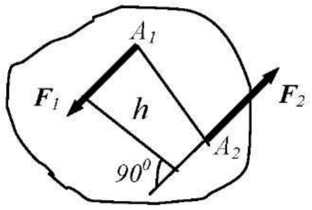

Рис.12

$$m(\overline{F}_1, \overline{F}_2) = \pm F_1\,h\,.$$

Знак плюс берется в том случае, когда пара стремится повернуть тело против часовой стрелки, и минус, когда – по часовой.

2.6. Главный вектор и главный момент

2.6.1.Главным вектором $\overline{R}$ ***системы сил*** $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\}$ ***называется геометрическая сумма всех сил системы***.

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ... + \overline{F}_n = \sum \overline{F}_k$$

2.6.2. Главным моментом M_O относительно центра O называется геометрическая сумма моментов всех сил системы относительно этого центра $\overline{M}_O = \overline{m}_O(\overline{F}_1) + \overline{m}_O(\overline{F}_2) + ... + \overline{m}_O(\overline{F}_n) = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k)$.

3. АКСИОМЫ СТАТИКИ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ОПЕРАЦИИ.

Аксиома 1. ***Для равновесия абсолютно твердого тела под действием двух приложенных к нему сил необходимо и достаточно, чтобы силы были равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны*** (рис.13). $\overline{F}_2 = -\overline{F}_1$.

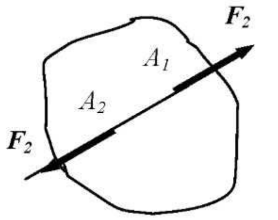

Рис.13

Аксиома 2. ***Действие данной системы сил на абсолютно твердое тела не изменится, если добавить к ней или отнять от нее уравновешенную систему сил.***

Если $\{\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_k\} \infty 0$, то $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n, \overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_k\} \infty \{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ... \overline{F}_n\}$

Следствие. Действие силы на абсолютно твердое тело не изменится, если перенести силу вдоль линии действия в любую точку тела (рис.14).

Доказательство. Пусть сила $\overline{F}$ приложена в точке A. Приложим в точке B, находящейся на линии действия этой силы, две равные по модулю и противоположные по направлению силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ Выберем $\left|\overline{F_1}\right| = \left|\overline{F_2}\right| = \left|\overline{F}\right|$. По аксиоме 1 система сил $\left\{\overline{F_1}, \overline{F_2}\right\} \infty 0$.

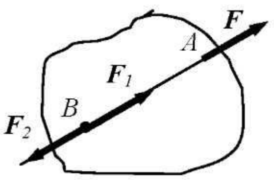

Рис.14

На основании аксиомы 2 имеем:

$$\overline{F_1} \infty \left\{\overline{F}, \overline{F_1}, \overline{F_2}\right\} \qquad (1)$$

Силы $\overline{F}$ и $\overline{F_2}$ также удовлетворяют аксиоме 2, следовательно, $\left\{\overline{F}, \overline{F_2}\right\} \infty 0$.

Тогда $\left\{\overline{F}, \overline{F_1}, \overline{F_2}\right\} \infty \overline{F_1}$. (2)

Сравнивая (1) и (2), получаем: $\overline{F} \infty \ \overline{F_1}$.

Аксиома 3. ***Две силы, приложенные в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и определяемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах***.

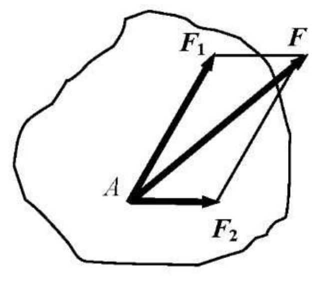

Рис.15

Вектор $\overline{F}$, равный диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ (рис. 15) называется геометрической суммой этих векторов.

$$\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$$

Аксиома 4. ***При всяком действии одного тела на другое силы их взаимодействия равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Указанные силы приложены к разным телам, поэтому вместе они не составляют уравновешенную систему сил.***

Аксиома 5. ***Равновесие деформируемого тела, находящееся под действием системы сил не нарушится, если тело считать абсолютно твердым.***

3.1. Элементарные операции и их свойства.

Элементарными называются операции преобразования сил, основанные на применении первых трех аксиом статики.

К элементарным операциям относятся следующие действия:

1) перенос точки приложения силы вдоль ее линии действия;
2) сложение двух приложенных в одной точке сил или разложение силы на две составляющие по правилу параллелограмма.

Свойства элементарных операций.

Применение элементарных операций при преобразовании системы сил не меняет ее главного вектора и главного момента относительно произвольной точки.

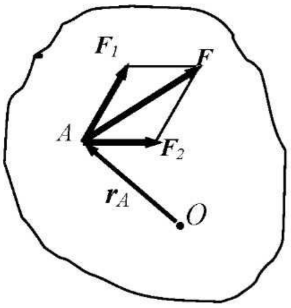

Рис.16

Очевидно, что перенос точки приложения силы вдоль ее линии действия не может изменить главного вектора системы, так как при этой операции вектор каждой силы остается неизменным. Главный момент также не изменится, так как момент силы не зависит от положения точки приложения силы на ее линии действия.

Рассмотрим теперь вторую операцию. Пусть в точке A приложены две силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ (рис.16) Заменим их одной силой $\overline{F}$, найденной по правилу параллелограмма: $\overline{F}=\overline{F}_1+\overline{F}_2$.

Найдем момент силы $\overline{F}$ относительно точки O.

$$\overline{m}_O(\overline{F})=\overline{r}_A\times\overline{F}=\overline{r}_A\times(\overline{F}_1+\overline{F}_2)=\overline{r}_A\times\overline{F}_1+\overline{r}_A\times\overline{F}_2=\overline{m}_O(\overline{F}_1)+\overline{m}_O(\overline{F}_2).$$

Таким образом, применение этой элементарной операции приводит к замене в выражениях главного вектора и главного момента двух слагаемых их геометрической суммой. Очевидно, что главный вектор и главный момент при этом не изменяются.

4. ВИДЫ СВЯЗЕЙ И ИХ РЕАКЦИИ.

4.1. **Гладкая поверхность**. Гладкой считается поверхность, трением о которую можно пренебречь. Гладкое тело, опирающееся на гладкую поверхность, может скользить вдоль этой поверхности и не может перемещаться по нормали к ней.

Реакция гладкой поверхности направлена по общей нормали к соприкасающимся поверхностям тела и опоры и приложена в точке их контакта (рис.17). В случае шероховатых поверхностей трение можно исключить при

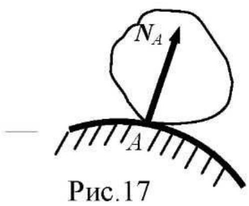

Рис.17

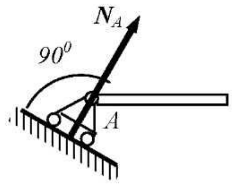

Рис.18

помощи катков (рис.18), соединенных с телом и устанавливаемых на опорную плоскость. Реакция катков направлена по нормали к опорной плоскости.

4.2 **Точечная опора** (острие, гладкий выступ).Реакция точечной опоры направлена по нормали к поверхности тела (рис.19).

4.3. **Нить**, на которой подвешено тело (рис. 20), не дает ему удаляться от точки

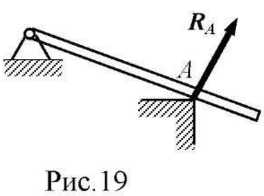

Рис.19

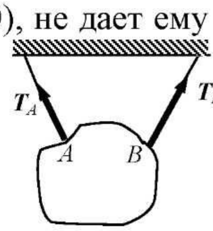

Рис.20

подвеса. Реакция направлена вдоль нити от точки ее закрепления на данном теле.

4.4. **Цилиндрический шарнир** состоит из болта и надетой на него втулки. Такое закрепление допускает перемещение вдоль оси шарнира и вращение вокруг нее. Реакция шарнира приложена в точке контакта болта и втулки и направлена по общей нормали к соприкасающимся поверхностям. Положение точки контакта зависит от приложенных к телу активных сил, поэтому направление реакции шарнира заранее неизвестно (рис.21), и ее раскладывают на две взаимно-перпендикулярные составляющие, параллельные координатным осям (рис.22).

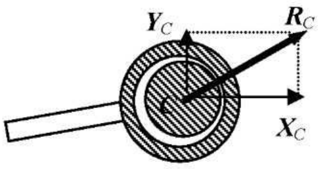

Рис. 21

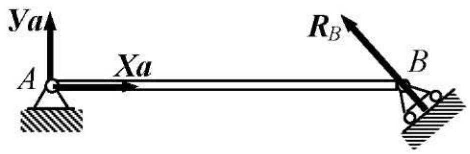

Рис.22

4.5. **Подшипник** – опора вала, допускающая его вращение вокруг своей оси и перемещение вдоль этой оси. Реакция подшипника лежит в плоскости, перпендикулярной оси вала и раскладывается на две взаимно-перпендикулярные составляющие (рис.23).

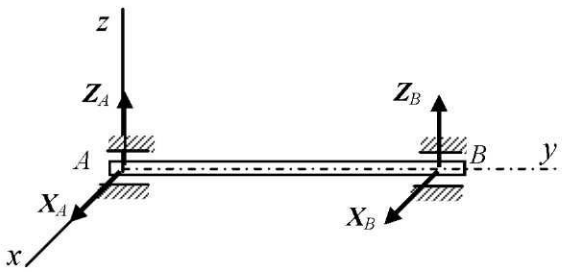

Рис.23

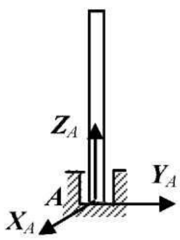

Рис.24

4.6. **Подпятник** представляет собой опору вала, позволяющую ему перемещаться только в одном направлении вдоль оси вала и поворачиваться вокруг нее. Реакция подпятника (рис.24) раскладывается на три взаимно-перпендикулярные составляющие.

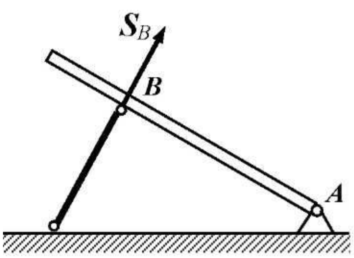

Рис.25

4.7. Реакция **тонкого невесомого стержня**, шарнирно соединенного концами с телом и опорой, направлена вдоль стержня (рис. 25). Это следует из того, что опорный стержень находится в равновесии под действием двух приложенных в шарнирах сил, а в этом случае на основании аксиомы 1 силы направлены вдоль прямой, соединяющей точки их приложения.

4.8. Жесткая заделка. При таком закреплении балки (рис.26) исключается ее поворот, горизонтальные и вертикальные перемещения, поэтому реакция такой связи состоит из пары сил с моментом M_A, препятствующей повороту балки, и двух взаимно-перпендикулярных сил $\boldsymbol{X_A}, \boldsymbol{Y_A}$.

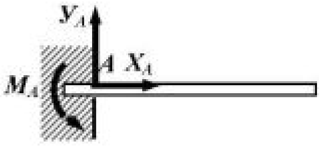

Рис.26

5. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ДВУМ СИЛАМ. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ СИЛ.

5.1. Теорема. ***Произвольную систему сил при помощи элементарных операций можно преобразовать в эквивалентную систему, состоящую из двух сил; при этом главный вектор и главный момент системы не изменятся***.

Доказательство. Докажем эту теорему для системы, состоящей из трех сил. Пусть к твердому телу в точках A, B и C приложены силы $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ и $\overline{F}_3$ (рис.27).

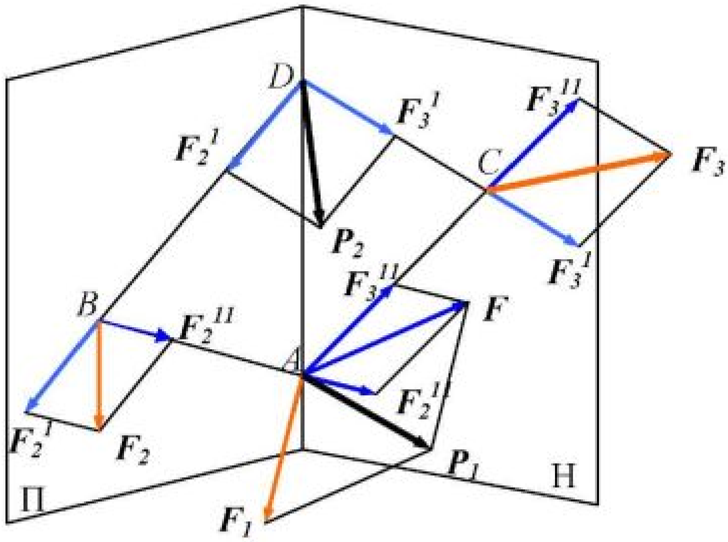

Рис.27

Будем считать, что эти силы не лежат в одной плоскости. Проведем через точку A и силу $\overline{F}_2$ плоскость П, а через точку A и силу $\overline{F}_3$ - плоскость Н. Выберем на линии пересечения этих плоскостей произвольную точку D. Соединим точки A и D с точками B и C. Разложим силу $\overline{F}_2$ на две составляющие $\overline{F}_2^1$ и $\overline{F}_2^{11}$, направленные по прямым AB и BD и перенесем эти составляющие по линиям их действия в точки A и D.

Разложим силу $\overline{F}_3$ на составляющие $\overline{F}_3^1$ и $\overline{F}_3^{11}$, направленные по прямым DC и AC, и перенесем эти составляющие вдоль их линий действия в точки A и D. Силы $\overline{F}_2^1$ и $\overline{F}_3^1$, приложенные в точке D, заменим, используя правило параллелограмма, одной силой $\overline{P}_2$, приложенной в той же точке. Силы $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2^{11}$ и $\overline{F}_3^{11}$, приложенные в точке A, заменим, используя дважды правило параллелограмма, одной силой $\overline{P}_1$. Таким образом, исходная система сил $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3\}$ оказалась замененной системой $\{\overline{P}_1, \overline{P}_2\}$. Так как при этом применялись только элементарные операции, то системы $\{\overline{P}_1, \overline{P}_2\}$ и $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3\}$ оказались эквивалентными, и, следовательно, их главные векторы и главные моменты не изменились: $\overline{R}^F = \overline{R}^P$, $\overline{M}_O{}^F = \overline{M}_O{}^P$.

Если плоскости П и Н сливаются, то точку D можно брать где угодно в этих плоскостях.

Теорема доказана для системы, состоящей из трех сил. Если система состоит из большего числа сил, то, повторяя эту операцию несколько раз, приведем к двум силам и любую заданную систему сил.

Операция замены системы сил эквивалентной системой, состоящей из двух сил, называется приведением данной системы сил к двум силам.

5.2.Теорема о равновесии системы сил. ***Для равновесия произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент относительно любого центра равнялись нулю.***

Доказательство необходимости. Пусть система сил $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\} \infty 0$.

Докажем, что главный вектор системы равен нулю и главный момент относительно любого центра также равен нулю: $\overline{R}^F = 0$, $\overline{M}_O^F = 0$.

Заменим эту систему эквивалентной системой двух сил $\{\overline{P}_1, \overline{P}_2\}$ $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\} \infty \{\overline{P}_1, \overline{P}_2\} \infty 0$.

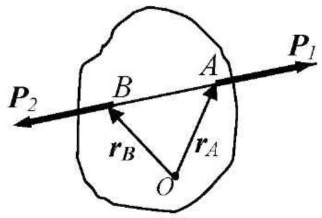

Рис.28.

Если система $\{\overline{P}_1, \overline{P}_2\} \infty 0$, то на основании первой аксиомы заключаем, что силы $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис.28). Главный вектор $\overline{R}^P = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 = 0$.

Главный момент системы $\overline{M}_O^P = \overline{r}_A \times \overline{P}_1 + \overline{r}_B \times \overline{P}_2 = (\overline{r}_A - \overline{r}_B) \times \overline{P}_1 = \overline{BA} \times \overline{P}_1 = 0$, так как векторы $\overline{BA}$ и $\overline{P}_1$ направлены по одной прямой.

Следовательно, будут равны нулю главный вектор и главный момент системы $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\}$, т.е. $\overline{R}^F = 0$, $\overline{M}_O^F = 0$.

Доказательство достаточности. Пусть главный вектор и главный момент системы $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\}$ равны нулю: $\overline{R}^F = 0$; $\overline{M}_O^F = 0$. (рис.28).

Докажем, что система находится в равновесии: $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\} \infty 0$.

Преобразуем систему $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\}$ в эквивалентную систему двух сил $\{\overline{P}_1, \overline{P}_2\}$: $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\} \infty \{\overline{P}_1, \overline{P}_2\}$. Тогда, $\overline{R}^P = \overline{R}^F = 0$. $\overline{R}^P = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 = 0$.

Следовательно, $\overline{P}_2 = -\overline{P}_1$

Определим главный момент системы $\{\overline{P}_1, \overline{P}_2\}$ относительно точки O:

$\overline{M}_O = \overline{m}_O(\overline{P}_1) + \overline{m}_O(\overline{P}_2) = \overline{r}_A \times \overline{P}_1 + \overline{r}_B \times \overline{P}_2 = 0$, где $\overline{r}_A$ и $\overline{r}_B$ - радиусы-векторы, проведенные из точки O в точки приложения сил $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$.

Заменим: $\overline{P}_2 = -\overline{P}_1$, получим $\overline{M}_O = \overline{r}_A \times \overline{P}_1 - \overline{r}_B \times \overline{P}_1 = (\overline{r}_A - \overline{r}_B) \times \overline{P}_1 = \overline{BA} \times \overline{P}_1 = 0$. Векторное произведение равно нулю в том случае, когда один из сомножителей равен нулю, или когда перемножаемые векторы параллельны. В нашем случае $\overline{P}_1 \neq 0$, $\overline{BA} \neq 0$. Следовательно, векторы $\overline{P}_1$ и $\overline{BA}$ параллельны. Отсюда следует, что линии действия сил $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ совпадают с прямой AB.

Итак, силы $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ равны по модулю, и направлены по одной прямой в противоположные стороны, такие силы уравновешиваются, т.е. $\{\overline{P}_1, \overline{P}_2\} \infty 0$. Следовательно, эквивалентная ей система $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\}$ также находится в равновесии: $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\} \infty 0$.

5.3. Уравнения равновесия произвольной системы сил.

Определим для заданной системы сил $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\}$ модуль главного вектора $\overline{R}$ и модуль главного момента $\overline{M}_O$ относительно произвольного центра O. Главный вектор системы равен геометрической сумме всех сил системы $\overline{R} = \sum \overline{F}_k$. Проекции главного вектора на оси координат, связанные с произвольным центром O, равны

$$R_x = \sum F_{kx}, \quad R_y = \sum F_{ky}, \quad R_z = \sum F_{kz}.$$

Модуль главного вектора равен

$$|\overline{R}| = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2} = \sqrt{\left(\sum F_{kx}\right)^2 + \left(\sum F_{ky}\right)^2 + \left(\sum F_{kz}\right)^2}.$$

Главный момент $\overline{M}_O$ системы сил относительно выбранного центра O равен геометрической сумме моментов всех сил относительно этого центра

$$\overline{M}_O = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k).$$

Спроецируем это равенство на одну из выбранных координатных осей, например, на ось x: $M_{Ox} = \sum m_{Ox}(\overline{F}_k)$.

Проекция момента $\overline{m}_O(\overline{F}_k)$ силы $\overline{F}_k$ относительно центра O равна моменту этой силы относительно оси x, проходящей через этот центр, тогда

$$M_{Ox} = \sum m_x(\overline{F}_k).$$

Аналогично: $M_{Oy} = \sum m_y(\overline{F}_k)$, $M_{Oz} = \sum m_z(\overline{F}_k)$.

Модуль главного момента относительно центра O равен:

$$|\overline{M}_O| = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} = \sqrt{\left[\sum m_x(\overline{F}_k)\right]^2 + \left[\sum m_y(\overline{F}_k)\right]^2 + \left[\sum m_z(\overline{F}_k)\right]^2}.$$

Условием равновесия системы сил является равенство нулю главного вектора и главного момента относительно произвольного центра O: $\overline{R} = 0$, $\overline{M}_O = 0$, т.е.

$$\sqrt{\left(\sum F_{kx}\right)^2 + \left(\sum F_{ky}\right)^2 + \left(\sum F_{kz}\right)^2} = 0 \quad \sqrt{\left[\sum m_x(\overline{F}_k)\right]^2 + \left[\sum m_y(\overline{F}_k\right]^2 + \left[\sum m_z(\overline{F}_k)\right]^2 = 0}.$$

Эти равенства выполняются при условии, что каждое слагаемое в обоих подкоренных выражениях равно нулю:

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad \sum m_x(\overline{F}_k) = 0,$$
$$\sum F_{ky} = 0, \qquad \sum m_y(\overline{F}_k) = 0,$$
$$\sum F_{kz} = 0, \qquad \sum m_z(\overline{F}_k) = 0.$$

Для равновесия произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы три суммы проекций всех сил на оси координат равнялись нулю и три суммы моментов всех сил относительно этих координатных осей также равнялись нулю.

5.3. Равновесие сходящейся системы сил.

Система сил называется сходящейся, если линии действия всех сил проходят через одну точку (рис.29). Выберем начало координат в точке, где пересекаются линии действия сил системы. Тогда моменты любой силы относительно координатных осей будут равны нулю.

Следовательно, из шести уравнений равновесия, записанных в общем виде, останутся только три:

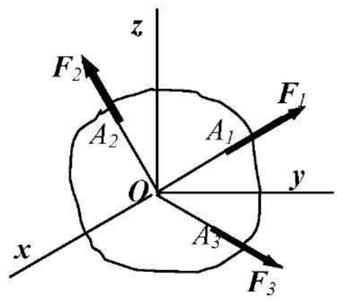

Рис.29

$$\sum F_{kx} = 0,$$
$$\sum F_{ky} = 0,$$
$$\sum F_{kz} = 0.$$

Для равновесия сходящейся системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил системы на выбранные координатные оси равнялись нулю.

5.4. Равновесие системы параллельных сил.

Выберем оси координат так, чтобы ось Oz оказалась параллельной силам системы (рис.30). В этом случае проекции каждой силы на оси x и y будут равны нулю. Кроме того, момент каждой силы относительно оси z тоже будет равен нулю. Следовательно, для системы параллельных сил уравнения их проекций на оси x и y, а также уравнение моментов относительно оси

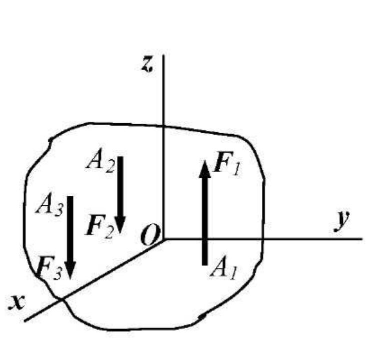

Рис.30

z теряют смысл. Остаются следующие три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kz} = 0,$$
$$\sum m_x(\overline{F}_k) = 0,$$
$$\sum m_y(\overline{F}_k) = 0.$$

Для равновесия системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций этих сил на ось, параллельную этим силам, равнялась нулю, а также равнялись нулю суммы моментов всех сил относительно двух других координатных осей.

5.5. Равновесие плоской системы сил.

Выберем плоскость, в которой расположены силы, за координатную плоскость Oxy (рис.31). Тогда проекция каждой силы на ось Oz будет равна нулю, поскольку все силы лежат в плоскости, перпендикулярной этой оси. Кроме того, момент каждой силы и относительно оси x и относительно оси y будет равняться нулю, поскольку силы данной системы либо пересекают обе оси, либо параллельны одной их них и пересекают вторую. Следовательно, уравнения равновесия плоской системы сил будут представлены уравнениями:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum m_z(\overline{F}_k) = 0$$

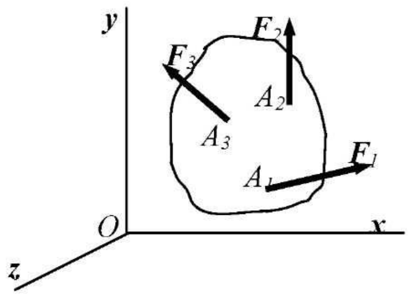

Рис.3 1

На основании определения момента силы относительно оси, момент каждой силы плоской системы относительно оси z равен моменту этой силы относительно точки O: $m_z(\overline{F}_k) = m_O(\overline{F}_k)$.

Тогда получим:

$$\sum F_{kx} = 0,$$
$$\sum F_{ky} = 0,$$
$$\sum m_O(\overline{F}_k) = 0.$$

Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на оси x и y равнялись нулю, а также равнялась нулю сумма моментов этих сил относительно произвольно выбранной точки.

6. ЭКВИВАЛЕННОСТЬ СИСТЕМ СИЛ. ТЕОРЕМА ВАРИНЬОНА. ТЕОРЕМА ПУАНСО.

6.1. Теорема об эквивалентности двух систем.

6.1.1. Предварительные замечания.

Пусть к твердому телу приложена система сил $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\}$. Изменим направления всех сил системы на противоположные, сохраняя точки их приложения. Полученную систему сил $\{-\overline{F}_1, -\overline{F}_2, ..., -F_n\}$будем называть противоположной данной. Система сил, составленная из данной системы $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\}$ и противоположной ей $\{-\overline{F}_1, -\overline{F}_2, ..., -\overline{F}_n\}$, является уравновешенной:

$$\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n, -\overline{F}_1, -\overline{F}_2, ..., -\overline{F}_n\} \infty\ 0$$

Возьмем новую систему $\{\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_k\} \infty \{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\}$. Очевидно, $\{\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_k, -\overline{F}_1, -\overline{F}_2, ..., -\overline{F}_n\} \infty\ 0$.

6.1.2. Теорема. ***Для того, чтобы две системы сил были эквиваленты, необходимо и достаточно, чтобы были равны их главные векторы и главные моменты относительно одного и того же центра.***

Доказательство необходимости.

Даны две эквивалентные системы сил: $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\} \infty \{\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_k\}$. Главный вектор и главный момент системы $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\}$ обозначим: $\overline{R}^F = \sum \overline{F}_i$, $\overline{M}_O^F = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_i)$. Главный вектор и главный момент системы $\{\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_k\}$ обозначим: $\overline{R}^P = \sum \overline{P}_\nu$, $\overline{M}_O^P = \sum \overline{m}_O(\overline{P}_\nu)$. Докажем, что $\overline{R}^F = \overline{R}^P$, $\overline{M}_O^F = \overline{M}_O^P$.

Составим новую систему сил $\{\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_k, -\overline{F}_1, -\overline{F}_2, ..., -\overline{F}_n\} \infty\ 0$. Главный вектор этой системы равен: $\overline{R} = \sum \overline{P}_\nu - \sum \overline{F}_k = \overline{R}^P - \overline{R}^F = 0$. Тогда, $\overline{R}^F = \overline{R}^P$.

Главный момент этой системы $\overline{M}_O = \sum \overline{m}_O(\overline{P}_\nu) - \sum m_O(\overline{F}_i) = \overline{M}_O^P - \overline{M}_O^F = 0$.

Следовательно, $\overline{M}_O^F = \overline{M}_O^P$.

Доказательство достаточности.

Даны две системы сил $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\}$ и $\{\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_k\}$, для которых равны их главные векторы и главные моменты относительно одного и того же центра: $\overline{R}^F = \overline{R}^P$, $\overline{M}_O^F = \overline{M}_O^P$.

Докажем, что $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\} \infty \{\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_k\}$.

Составим систему $\{\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_k, -\overline{F}_1, -\overline{F}_2, ..., -\overline{F}_n\}$ и определим главный вектор и главный момент этой системы.

$\overline{R} = \sum \overline{P}_\nu - \sum \overline{F}_i = \overline{R}^P - \overline{R}^F = 0$. $\overline{M}_O = \sum \overline{m}_O(\overline{P}_\nu) - \sum m_O(\overline{F}_i) = \overline{M}_O^P - \overline{M}_O^F = 0$. Система сил, главный вектор и главный момент которой равны нулю, находится в равновесии, т.е. $\{\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_k, -\overline{F}_1, -\overline{F}_2, ..., -\overline{F}_n\} \infty\ 0$.

Следовательно, $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\} \infty \{\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_k\}$.

6.1.3. Теорема. ***Для эквивалентности двух пар сил необходимо и достаточно, чтобы векторные моменты этих пар сил были равны.***

Эта теорема является следствием общей теоремы об эквивалентности двух систем сил.

Главный вектор сил, образующих пару, равен нулю, а главный момент относительно любой точки равен моменту пары сил. Следовательно, для эквивалентности двух пар сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ и $(\overline{P}_1, \overline{P}_2)$ необходимо и достаточно равенства их векторов-моментов $\overline{m}(\overline{F}_1, \overline{F}_2) = \overline{m}(\overline{P}_1, \overline{P}_2)$.

Из этой теоремы вытекают следующие следствия:

1. ***Данную пару сил, не изменяя ее действия на тело, можно как угодно перемещать в своей плоскости и переносить в параллельную плоскость.***
2. ***У данной пары сил можно менять величины сил, образующих пару, и плечо, но так, чтобы момент пары оставался неизменным.***

6.2. Теорема Вариньона. ***Если система сил приводится к равнодействующей, то векторный момент этой равнодействующей относительно произвольного центра равен геометрической сумме векторных моментов сил системы относительно этого же центра.***

Доказательство: Пусть система $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\} \infty\ \overline{F}$.

По теореме об эквивалентности двух систем главные моменты этих систем относительно произвольного центра равны. Главный момент заданной системы $\overline{M}_O = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k)$. Главный момент равнодействующей относительно того же центра обозначим $\overline{m}_O(\overline{F})$. Тогда $\overline{m}_O(\overline{F}) = \overline{M}_O$, или $\overline{m}_O(\overline{F}) = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k)$.

Спроецируем это векторное равенство на ось s, проходящую через центр O: $m_{OS}(\overline{F}) = \sum m_{OS}(\overline{F}_k)$, откуда следует, что $m_S(\overline{F}) = \sum m_S(\overline{F}_k)$.

Момент равнодействующей системы сил относительно какой-либо оси равен алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно этой же оси.

6.3. Приведение системы сил к центру.

6.3.1. Теорема Пуансо. ***Любую систему сил, приложенных к твердому телу, можно заменить одной силой, приложенной в произвольно выбранном центре и равной главному вектору данной системы сил, и одной парой сил с моментом, равным главному моменту данной системы сил относительно этого центра.***

Доказательство. Пусть дана система сил $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\}$, главный вектор которой равен $\overline{R} = \sum \overline{F}_k$, а главный момент равен $\overline{M}_O = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k)$. Составим теперь новую систему сил $\{\overline{F}, (\overline{P}, \overline{P}^1)\}$, состоящую из силы $\overline{F}$, приложенной в точке O, и пары сил $(\overline{P}, \overline{P}^1)$, и пусть $\overline{F} = \overline{R} = \sum \overline{F}_k$, а момент пары $m(\overline{P}, \overline{P}^1) - \overline{M}_O = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k)$. Составим также вспомогательную систему сил $\{-\overline{F}_1, -\overline{F}_2, ..., -\overline{F}_n, \overline{F}, \overline{P}, \overline{P}^1\}$, состоящую из системы $\{-\overline{F}_1, -\overline{F}_2, ..., -\overline{F}_n\}$, силы $\overline{F}$ и пары сил $(\overline{P}, \overline{P}^1)$. Определим для этой системы главный вектор и главный момент относительно точки O.

$\overline{R}^1 = -\sum \overline{F}_k + \overline{F} + \overline{P} + \overline{P}^1 = 0$, $\overline{M}_O^1 = -\sum \overline{m}(\overline{F}_k) + \overline{m}_O(\overline{F}) + \overline{m}(\overline{P}, \overline{P}^1) = 0$ (сила $\overline{F}$ приложена в точке O, и ее момент относительно этой равен нулю).

Так как главный вектор $\overline{R}^1$ и главный момент $\overline{M}_O^1$ вспомогательной системы равны нулю, то эта система сил находится в равновесии, т.е.

$\left\{-\overline{F}_1, -\overline{F}_2, ..., -\overline{\overline{F}}_n, \overline{F}, \overline{P}, \overline{P}^1\right\} \infty\ 0$. Отсюда следует, что $\left\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\right\} \infty \left\{\overline{F}, (\overline{P}, \overline{P}^1\right\}$, при этом $\overline{F} = \overline{R} = \sum \overline{F}_k$, а момент пары $\overline{m}\ (\overline{P}, \overline{P}^1) = \overline{M}_O = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k)$.

Таким образом, ***любую систему сил можно заменить одной силой, равной главному вектору $\overline{R}$ и приложенной в произвольном центре О, и одной парой сил с моментом, равным главному моменту $\overline{M}_O$ относительно этого центра***

Точка, в которой приложена сила $\overline{F}$, называется центром приведения, а сама операция замены данной системы сил одной силой и одной парой сил, называется приведением системы сил к центру.

6.3.2. Частные случаи приведения системы сил к центру.

1. Пусть для системы $\left\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\right\}$главный вектор равен нулю, а главный момент отличен от нуля: $\overline{R}$ =0, $\overline{M}_O \neq\ 0$. Очевидно, что такая система сил приводится к паре сил с моментом $\overline{M}_O$.

2. Пусть для системы $\left\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\right\}$ главный вектор не равен нулю, а главный момент равен нулю: $\overline{R} \neq\ 0$, $\overline{M}_O =\ 0$. Такая система приводится к равнодействующей, равной $\overline{R}$ и приложенной в центре приведения O.

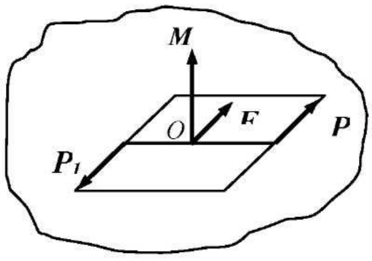

Рис.32

3. Докажем, что система сил $\left\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\right\}$, для которой $\overline{R} \neq\ 0$, $\overline{M}_O \neq\ 0$ и $\overline{R} \perp \overline{M}_O$(рис. 32) приводится к равнодействующей.

Заменим систему $\left\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\right\}$ силой $\overline{F} = \overline{R}$, приложенной в точке O и парой сил $(\overline{P}, \overline{P}_1)$ с моментом $\overline{M}_O$. Если $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M}_O \neq 0$ и $\overline{R} \perp \overline{M}_O$, то сила $\overline{F}$ и пара сил $(\overline{P}, \overline{P}_1)$ располагаются в одной плоскости. Заменим пару сил $(\overline{P}, \overline{P}_1)$ парой сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2\ )$, не изменяя момента: $\overline{m}(\overline{P}, \overline{P}_1) = \overline{m}(F_1, \overline{F}_2)$. Повернем пару сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ в своей плоскости так, чтобы одна из ее сил $\overline{F}_2$ оказалась приложенной в точке O и направленной противоположно силе $\overline{F}$. Вторую силу $\overline{F}_1$ приложим в точке A, находящейся на перпендикуляре к силе $\overline{F}$ на расстоянии h, равном плечу пары $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$: $h = \dfrac{\left|\overline{m}(\overline{F}_1, \overline{F}_2)\right|}{\left|\overline{F}_1\right|} = \dfrac{\left|\overline{M}_O\right|}{\left|\overline{F}\right|} = \dfrac{\left|\overline{M}_O\right|}{\left|\overline{R}\right|}$.

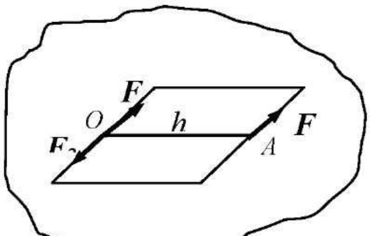

Рис. 33

Так как силы $\overline{F}$ $\overline{F}_2$, приложенные в точке О уравновешиваются, то полученная система трех сил $(\overline{F}, \overline{F}_1, \overline{F}_2)$ приводится к одной силе (равнодействующей), приложенной в точке A, при этом OA =h.

Следовательно, система сил $\left\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\right\}$, для которой $\overline{R} \neq\ 0$, $\overline{M}_O \neq 0$ и $\overline{R} \perp \overline{M}_O$, приводится к равнодействующей (рис.33), равной главному вектору и приложенной в точке A, отстоящей от центра приведения на расстоянии OA =h..

4. Если для данной системы сил (рис.34) $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M}_O \neq 0$ и вектор $\overline{R}$ параллелен вектору $\overline{M}_O$, то система приводится к силе $\overline{F} = \overline{R}$ и паре сил ($\overline{P}$, $\overline{P}_1$), плоскость которой перпендикулярна силе $\overline{F}$.

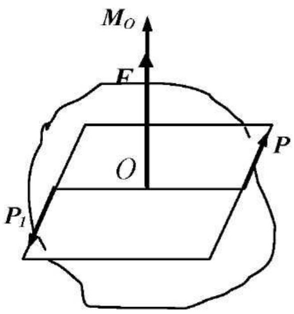

Рис. 34

Совокупность такой силы и пары сил называется динамическим винтом, а прямая, вдоль которой направлена сила, - осью винта, при этом ось винта проходит через центр приведения точку O.

5. Если для системы сил векторы $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M}_O \neq 0$ и не перпендикулярны и не параллельны друг другу, то такая система сил приводится к динамическому винту, но ось винта в этом случае не будет проходить через центр приведения.

7. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ.

На каждую частицу тела, находящегося вблизи поверхности Земли, действует сила притяжения, называемая силой тяжести. Все эти силы, строго говоря, направлены к центру Земли, но так как размеры тела невелики по сравнению с радиусом Земли, то направления этих сил практически будут параллельны и направлены вертикально вниз.

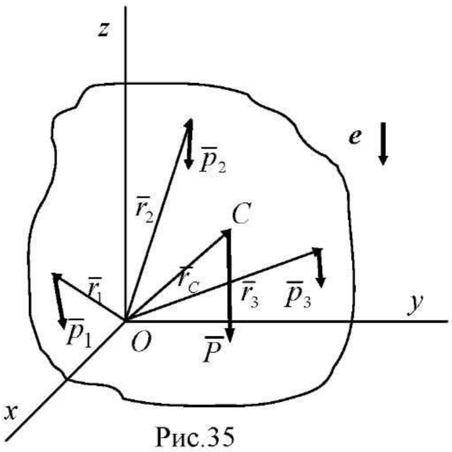

Рис.35

Силой тяжести тела называется равнодействующая всех сил тяжести, действующих на частицы тела. Обозначим $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_2, ... \overline{p}_k$ силы тяжести, приложенные к частицам тела, их равнодействующую обозначим $\overline{P}$. $\overline{P} = \sum \overline{p}_k$.

Центром тяжести тела называется точка C ***приложения силы тяжести тела***. При любом повороте тела силы $\overline{p}_k$ остаются приложенными в одних и тех же точках и параллельными друг другу, но изменяется их направление относительно тела. Неизменным остается также положение центра тяжести относительно тела.

Определим положение центра тяжести тела относительно произвольно выбранной точки O. Соединим (рис.35) радиусами-векторами с точкой O точки приложения сил тяжести всех частиц и центр тяжести тела. Запишем теорему Вариньона:

$\overline{m}_O(\overline{P}) = \sum \overline{m}_O(\overline{p}_k)$; так как

$\overline{m}_O(\overline{P}) = \overline{r}_C \times P$; $\overline{m}_O(\overline{p}_k) = \overline{r}_k \times \overline{p}_k$,

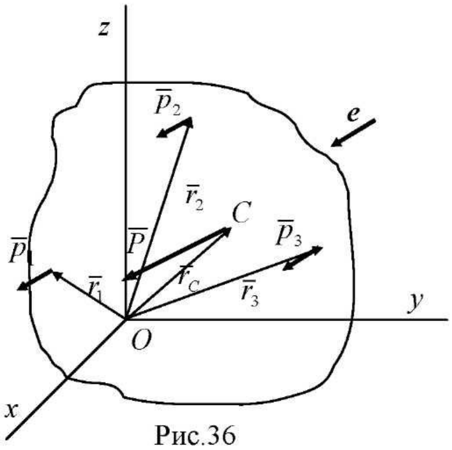

Рис.36

то $\overline{r}_C \times \overline{P} = \sum \overline{r}_k \times \overline{p}_k$; или $\overline{r}_C \times \overline{P} - \sum \overline{r}_k \times \overline{p}_k = 0$.

Выберем единичный вектор $\overline{e}$, определяющий направление сил тяжести. Тогда : $\overline{p}_k = p_k \overline{e}$, $\overline{P} = P\overline{e}$. Подставим эти значения в предыдущее равенство: $\overline{r}_C \times P\,\overline{e} - \sum \overline{r}_k \times p\,\overline{e}_k = 0$. В этом выражении P и p_k являются скалярными коэффициентами, поэтому их можно поставить перед векторами $\overline{r}_C$ и $\overline{r}_k$, вектор $\overline{e}$, можно вынести за скобки, получим $(P\,\overline{r}_C - \sum p_k \overline{r}_k) \times \overline{e} = 0$.

Как было отмечено выше, при повороте тела силы тяжести поворачиваются относительно него на один и тот же угол, а центр тяжести C сохраняет положение неизменным. Эту же ситуацию можно смоделировать (рис.36), повернув все силы тяжести на один и тот же угол вокруг точек приложения, оставив при этом тело неподвижным. Тогда единичный вектор $\overline{e}$ изменит свое направление, и поэтому в общем случае он не будет параллелен вектору $(P\,\overline{r}_C - \sum p_k \overline{r}_k)$. Так как вектор $\overline{e}$ не равен нулю, то векторное произведение векторов $(P\,\overline{r}_C - \sum p_k \overline{r}_k)$ и $\overline{e}$ будет равно нулю только тогда, когда вектор $(P\,\overline{r}_C - \sum p_k \overline{r}_k)$ будет равен нулю: $(P\,\overline{r}_C - \sum p_k \overline{r}_k) = 0$. Отсюда определяем значение радиуса - вектора $\overline{r}_C$ центра тяжести тела. $\overline{r}_C = \dfrac{\sum p_k \overline{r}_k}{P}$.

Свяжем с точкой C систему координат xyz . Тогда координаты цента тяжести в этом системе координат определяются следующими формулами: $x_C = \dfrac{\sum p_k x_k}{P}$; $y_C = \dfrac{\sum p_k y_k}{P}$; $z_C = \dfrac{\sum p_k z_k}{P}$; где x_k, y_k, z_k - координаты точек приложения сил тяжести $\overline{p}_k$, действующих на частицы тела. Для однородного тела сила тяжести p_k любой его части пропорциональна объему v_k этой части: $p_k = \gamma v_k$, а сила тяжести тела P пропорциональна объему V этого тела: $P = \gamma V$.

Подставив значения P и p_k в формулы координат центра тяжести, получим:
$x_C = \dfrac{\sum v_k x_k}{V}$; $y_C = \dfrac{\sum v_k y_k}{V}$; $z_C = \dfrac{\sum v_k z_k}{V}$.

Положение центра тяжести тела, как следует из полученных формул, зависит только от геометрической формы тела, поэтому точку C называют центром тяжести объема.

Аналогично определим центр тяжести однородной плоской пластины, расположенной в плоскости xy:

$$x_C = \frac{\sum s_k x_k}{S}; \qquad y_C = \frac{\sum s_k y_k}{S};$$

где S площадь всей пластины, s_k – площади ее частей.

Точно также получаются координаты центра тяжести однородной линии:

$x_C = \dfrac{\sum l_k x_k}{L}$; $y_C = \dfrac{\sum l_k y_k}{L}$; $z_C = \dfrac{\sum l_k z_k}{L}$, где L – длина всей линии, l_k – длины ее частей.

Если однородное тела имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр тяжести лежит в плоскости, на оси или в центре симметрии. Отсюда следует, что центр тяжести однородного стержня лежит в его середине, центр тяжести круглого кольца, круглой или прямоугольной пластины, шара находится в соответствующем геометрическом центре. Центры тяжести ромба, параллелограмма лежат в точках пересечения их диагоналей.

Для определения центра тяжести тело разбивается на конечное число частей, положение центра тяжести каждой из которых известно. Координаты центра тяжести тела вычисляются по общим формулам. В тех случаях, когда данное тела имеет отверстия, его можно представить как разность тел, в этом случае сила тяжести большего тела считается положительной величиной, а сила тяжести меньшего – отрицательной.

Если тело нельзя разбить на несколько конечных частей, положения центров тяжести которых известны, то тело разбивают на бесконечно большое элементарных частиц и положение центра тяжести тела определяется интегрированием. В этом случае координаты центра тяжести однородного твердого тела равны:

$$x_C = \frac{\int_V x\,dv}{V}; \qquad y_C = \frac{\int_V y\,dv}{V}, \qquad z_C = \frac{\int_V z\,dv}{V},$$

где V объем всего тела.

В случае однородной плоской фигуры, расположенной в плоскости *xy:*

$$x_C = \frac{\int_S x\,ds}{S}; \qquad y_C = \frac{\int_S y\,ds}{S},$$

где S – площадь всей фигуры.

Для однородной линии, длина которой равна L, координаты центра тяжести равны:

$$x_C = \frac{\int_L x dl}{L}; \quad y_C = \frac{\int_L y dl}{L}; \quad z_C = \frac{\int_L z dl}{L}.$$