ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
СТАТИКА
Учебно-методическое пособие с заданиями для студентов
заочной формы обучения всех специальностей

Представлены материалы по теоретической механике из раздела «Статика». Рассмотрены общие положения статики, даны краткие теоретические сведения, разобраны примеры, даны задания для выполнения контрольных работ.

Предназначено для студентов заочной формы обучения всех специальностей.

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика – наука об общих законах движения и равновесия материальных тел, а также о возникающих при этом взаимодействиях между телами. В теоретической механике изучают простейшие механические движения тел, т.е. изменение их взаимного расположения в пространстве с течением времени. Мерой механического взаимодействия между телами в механике является ***сила***, а результатом взаимодействия – ***изменение движения тел или изменение их формы*** (деформации).

Теоретическая механика принадлежит к числу фундаментальных естественных наук, представляет собой одну из основ различных научных и технических дисциплин и имеет большое значение в подготовке инженеров. Она является фундаментом для изучения таких дисциплин, как сопротивление материалов, теория колебаний, гидравлика, теория упругости, аэро- и гидромеханика, теория управления движущимися объектами, электродинамика, биомеханика, теория механизмов и машин, приборов, роботов-манипуляторов и других.

Как естественная наука, теоретическая механика в своей основе базируется на совокупности законов и аксиом, полученных из опыта. Справедливость этих законов и аксиом подтверждена огромным количеством непосредственных наблюдений, опытной проверкой следствий из них и многовековой практической деятельностью человека. Как теоретическая наука механика при выводе своих положений опирается на логику и математику. При этом объекты – материальные тела, изучаемые в теоретической механике, – идеализируют. В качестве таких объектов принимают: ***абсолютно твердое тело*** и ***материальную точку.*** Абсолютно твердым называют такое тело, расстояние между двумя любыми точками которого считают неизменными. Материальная точка – это тело, размерами которого при изучении его движения или равновесия можно пренебречь. Также идеализируют такие понятия, как ***пространство*** и ***время***. Пространство в классической механике считают абсолютным трехмерным евклидовым, его свойства не зависят от движущихся в нем материальных тел и времени, они одинаковы во всех точках и направлениях. Время тоже абсолютно, изменяется монотонно от настоящего к будущему и протекает одинаково во всех системах отсчета. Движение и равновесие одних материальных тел в теоретической механике рассматривают по отношению к другим телам. Для теоретического описания движения и равновесия используют такое понятие, как ***система отсчета***, которая включает в себя тело отсчета (тело, по отношению к которому изучают движение рассматриваемых тел), систему координат, связанную с телом отсчета, и часы.

Основные положения теоретической механики основываются на законах Ньютона, справедливых только в инерциальных системах отсчета. В качестве основной инерциальной системы отсчета используют так называемую ***гелиоцентрическую систему*** с началом в центре солнечной системы и осями, направленными к далеким «*неподвижным*» звездам. Во многих задачах в качестве инерциальной можно принять систему отсчета, связанную с Землей. Однако существуют задачи, в которых неинерциальностью Земли, связанной с ее суточным вращением, пренебречь нельзя.

Статика – важный раздел курса теоретической механики. Ее положения являются не только основой, на которой в дальнейшем строится изучение специальных и научных дисциплин, но имеют и самостоятельное значение. Решение различных практических задач, связанных с проектированием и расчетами машин, механизмов, сооружений, требует во многих случаях установления условий равновесия конструкций или их элементов и определения сил взаимодействия между ними.

Настоящее учебно-методическое пособие содержит краткие теоретические сведения по всему разделу «Статика», а также более подробное изложение основных тем:

1) Равновесие тела под действием пространственной системы сходящихся сил;

2) Равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил;

3) Равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил.

По каждой теме даны вопросы для самоконтроля, а по основным темам – примеры решения типовых задач и контрольные задания.

При изучении конкретной темы студенту следует:

■ внимательно прочитать соответствующий раздел в учебнике, выбранном из списка рекомендуемой литературы; изучить теоретические сведения и методические рекомендации настоящего пособия; составить краткий конспект, записав основные определения, теоремы и формулы; ответить на контрольные вопросы;

■ разобрать решения приведенных типовых задач;

■ самостоятельно решить и оформить контрольные задания.

Данное пособие способствует выработке навыков составления и решения уравнений равновесия под действием различных систем сил.

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ СТАТИКИ

1.1. Понятия и определения

Статика изучает методы преобразования одних систем сил, действующих на абсолютно твердое тело, в другие, им эквивалентные, а также условия равновесия тел под действием различных систем сил.

Абсолютно твердым называют такое тело, расстояние между двумя любыми точками которого при взаимодействии с другими телами не меняется. В дальнейшем абсолютно твердое тело будем называть твердым телом или просто телом.

Силой в статике называют вектор, являющийся мерой механического взаимодействии тел. Сила определяется величиной, точкой приложения и направлением. Прямую, вдоль которой направлена сила, называют ***линией действия силы***. В случае действия на тело нескольких сил, их называют ***системой сил***.

Если две системы сил, приложенные к одному телу, придают ему одинаковое состояние, то такие системы называют ***эквивалентными***. Систему сил, приложенную к телу и не изменяющую его состояния, называют эквивалентной нулю или ***уравновешенной***. Если действующую на тело систему сил можно заменить одной силой, не изменяя его состояния, то такую силу называют ***равнодействующей*** этой системы сил. Не каждая система сил имеет равнодействующую.

Если система сил при добавлении к ней еще одной силы становится эквивалентной нулю, то добавленную силу называют ***уравновешивающей*** этой системы сил. Не каждая система сил имеет уравновешивающую силу.

Силы делят на *сосредоточенные* и *распределенные* по объему, поверхности и линии тела. Под действие силы тело в общем случае может совершать сложное движение, включая вращение относительно какой-либо точки или оси. Для характеристики вращательного действия, оказываемого силой на твердое тело, в статике вводят понятия *момента силы относительно точки* и *момента силы относительно оси*.

Моментом силы относительно точки называют вектор, характеризующий интенсивность вращательного действия силы, направление и плоскость, в которой лежат сила и точка. Он равен векторному произведению радиус-вектора точки приложения силы, проведенного из данной точки, на эту силу. Момент силы относительно точки перпендикулярен плоскости, в которой расположены сила и точка, и направлен так, что с его вершины вращение тела относительно точки под действием силы наблюдается происходящим против часовой стрелки. Модуль момента характеризует интенсивность действия силы и равен произведению модуля силы на плечо силы относительно точки. ***Плечо силы относительно точки*** – кратчайшее расстояние от этой точки до линии действия силы (длина перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия силы).

Моментом силы относительно оси называют проекцию на эту ось момента силы относительно любой точки на оси.

Наряду с силой, основным понятием статики является ***пара сил*** – это система двух равных по модулю, параллельных и противоположно направленных сил, линии действия которых не совпадают. Такая система не имеет равнодействующей и оказывает вращательное действие на твердое тело.

Действие пары сил на тело полностью определяет ее вектор-момент. Он направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены силы пары так, что с его вершины вращение тела этими силами наблюдается происходящим против часовой стрелки. Модуль момента равен произведению модуля одной из сил пары на это кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары, называемое ***плечом пары***.

В статике доказывают следующие основные свойства пар сил:

■ сумма моментов сил пары относительно любой точки не зависит от выбора этой точки и равна вектору-моменту пары сил;

■ пару сил можно переносить в плоскости ее действия в любую область твердого тела или в любую плоскость, параллельную плоскости ее действия, не меняя этого действия на тело;

■ силы пары можно как угодно поворачивать в плоскости ее действия, а также менять одновременно плечо и силы пары, оставляя без изменения модуль ее вектора-момента;

■ действующую на тело систему пар сил можно заменить одной парой, вектор-момент которой равен геометрической сумме векторов-моментов этих пар.

Твердое тело называют ***свободным***, если на его перемещения в пространстве не наложено никаких ограничений, и ***несвободным***, если перемещения его ограничены. Тела, ограничивающие перемещения тела, называют ***связями***. Действие связей на несвободное тело выражается силами – ***реакциями связей***. Силы, не зависящие от связей, называют ***активными***. Реакции связей зависят от активных сил и возникают именно в результате их действия. Они также зависят от типов связей. Таким образом, силы, действующие на несвободное тело, разделяют на *активные силы* и *реакции связей.*

Теоретические положения статики вытекают из шести аксиом.

<u>Аксиома 1.</u> Система двух сил, приложенных к твердому телу, является уравновешенной или эквивалентной нулю, если эти силы равны по величине, направлены в противоположные стороны и лежат на одной прямой.

<u>Аксиома 2.</u> Состояние твердого тела, находящегося под действием некоторой системы сил, не изменится, если к ней добавить или исключить из нее систему сил, эквивалентную нулю.

Следствие из первых двух аксиом. Не меняя действия силы на тело, силу можно переносить вдоль линии ее действия в любую точку тела.

<u>Аксиома 3.</u> Две силы, приложенные в одной точке твердого тела, имеют равнодействующую, равную геометрической сумме векторов этих сил и приложенную в этой же точке (*Аксиома параллелограмма сил*).

<u>Аксиома 4.</u> При действии одного тела на другое силы их взаимодействия равны по модулю, имеют общую линию действия и направлены в противоположные стороны (*Третий закон Ньютона*).

<u>Аксиома 5.</u> Несвободное твердое тело можно считать свободным, если отброшенные связи заменить действующими на него реакциями связей.

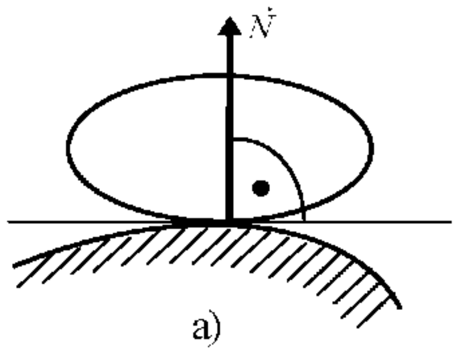
Аксиома 6. Равновесие деформируемого тела не нарушится, если жестко связать все его точки и считать это тело абсолютно твердым (*Принцип отвердевания*).

1.2. Типы связей и их реакции

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся в механике типы связей и их реакции.

1.2.1. ***Идеально гладкая поверхность***

Реакция идеально гладкой поверхности (без учета трения) направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся твердых тел (рис. 1.1,а). Если одна из поверхностей вырождается в точку, то реакцию следует направить по нормали к другой поверхности (например, реакции $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$, рис. 1.1,б).



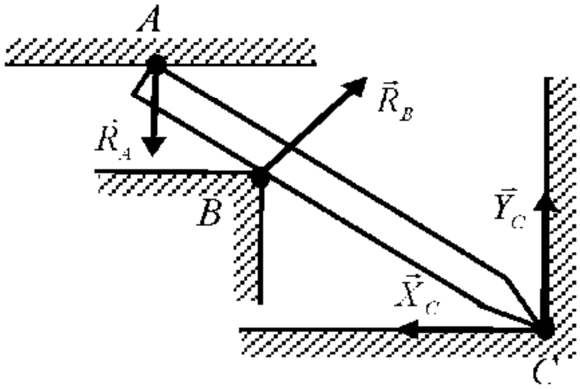


Рисунок 1.1

Когда тело упирается острием в угол (см. рис. 1.1,б), связь препятствует перемещению острия как по горизонтали, так и по вертикали. Реакция в точке C для этого случая может быть представлена двумя составляющими $\vec{X}_C$ и $\vec{Y}_C$. Модуль реакции находят по формуле

$$R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2}\ .$$

1.2.2. *Гибкая нерастяжимая нить*

Реакция нити направлена от объекта равновесия вдоль нее так, что нить натянута. Например, реакции нитей $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ (рис. 1.2) направлены вдоль нитей к точкам их подвеса C и D. Они не позволяют точкам A и B удаляться соответственно от точек C и D.

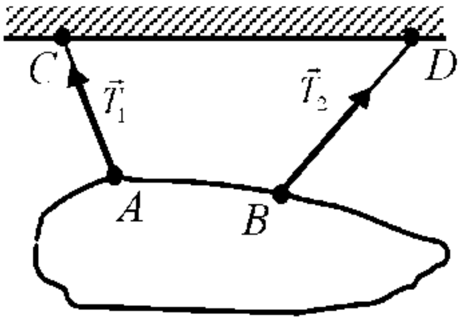


Рисунок 1.2

1.2.3. *Идеальный стержень*

Идеальным называют жесткий невесомый стержень, имеющий на концах шарниры (рис. 1.3). Такая связь препятствует перемещению тела только вдоль прямой, соединяющей шарниры. Поэтому реакции прямого $\vec{S}_1$ и изогнутого $\vec{S}_2$ стержней направлены вдоль линий, соединяющих шарниры A и B, C и D.

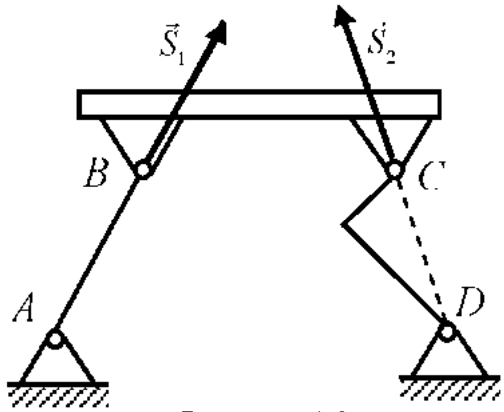


Рисунок 1.3

1.2.4. *Цилиндрическая шарнирно-подвижная опора*

Цилиндрическая шарнирно-подвижная опора (рис. 1.4) – каток – препятствует перемещению закрепленной точки тела по перпендикуляру к плоскости, на которой она расположена. Реакция такой связи $\vec{R}_B$ направлена по нормали к плоскости I-I.

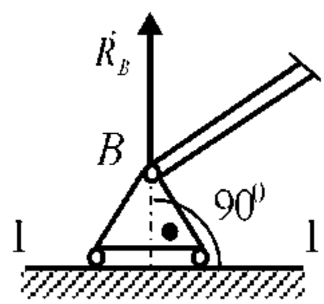


Рисунок 1.4

1.2.5. *Цилиндрическая шарнирно-неподвижная опора*

Шарнирно-подвижная опора (рис. 1.5) – шарнир – позволяет телу поворачиваться вокруг оси шарнира, но препятствует перемещению закрепленной точки в плоскости, перпендикулярной этой оси. Поэтому реакция такой связи может быть представлена силой $\vec{R}_A$, которая лежит в указанной плоскости. Направление реакции заранее неизвестно. Чаще всего реакцию раскладывают на две составляющие, направленные параллельно выбранным осям: $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$ (см. рис. 1.5,а) или $\vec{Z}_A$ и $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_B$ и $\vec{Y}_B$ (см. рис. 1.5.б).

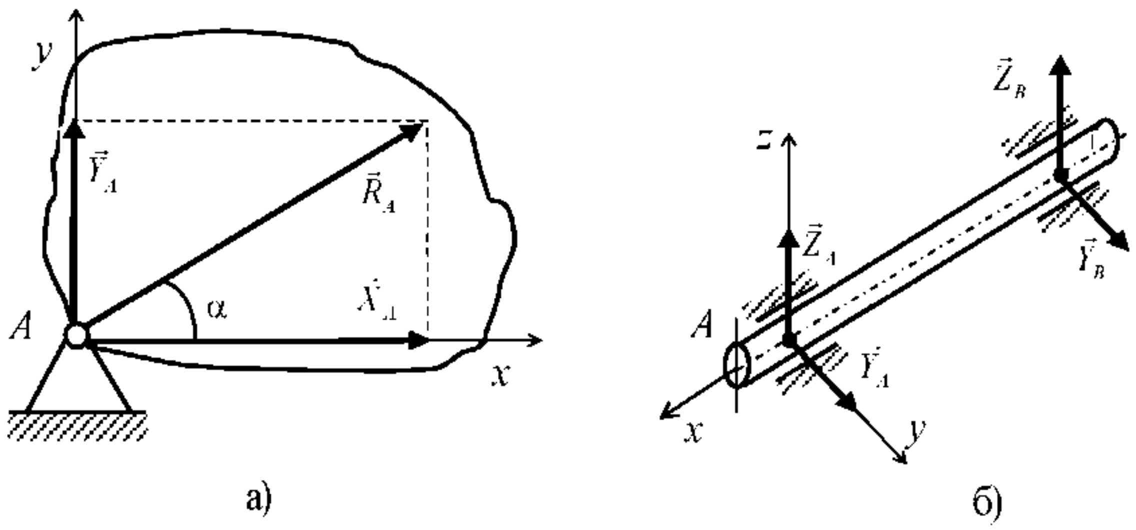
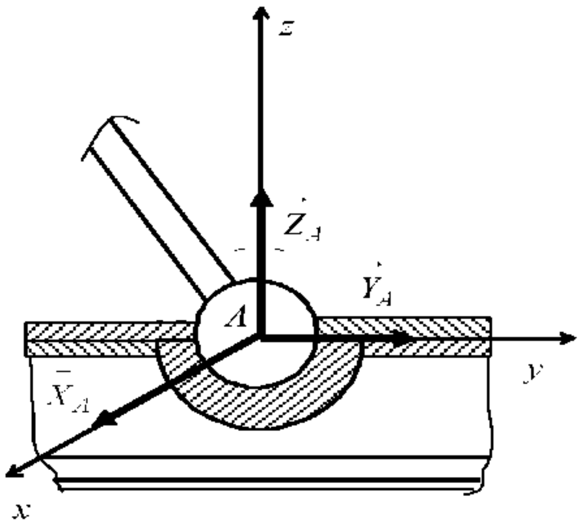


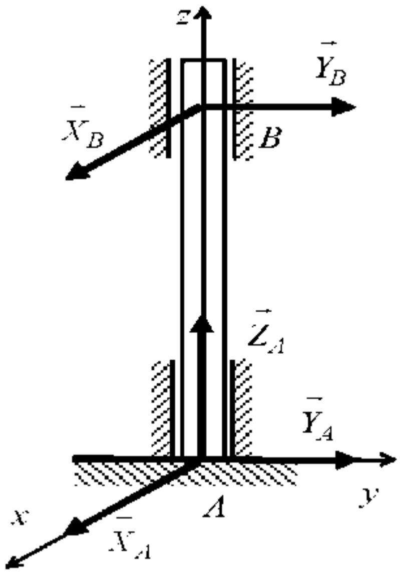
Рисунок 1.5

1.2.6. *Сферический шарнир и подпятник*

Сферический шарнир (рис. 1.6) – это связь, которая позволяет телу поворачиваться вокруг некоторой точки, но препятствует перемещению точки в любом направлении. Поэтому реакция такого шарнира представлена тремя составляющими: $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$ (см. рис. 1.6,а).

Аналогично обстоит дело и с реакцией подпятника вала (точка A. см. рис. 1.6,б), который препятствует перемещению этой точки в трех взаимно перпендикулярных направлениях. В точке B вал закреплен с помощью подшипника (см. рис. 1.6,б). составляющие реакции которого изображены в соответствии с п. 1.2.5.

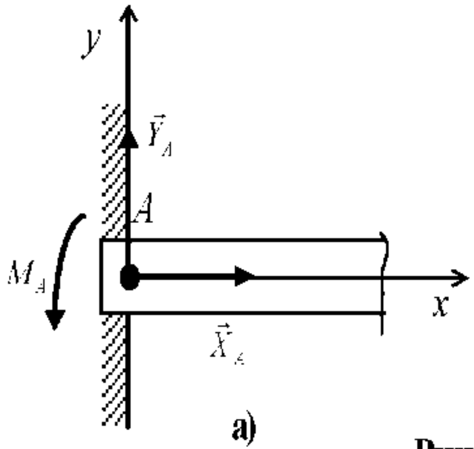


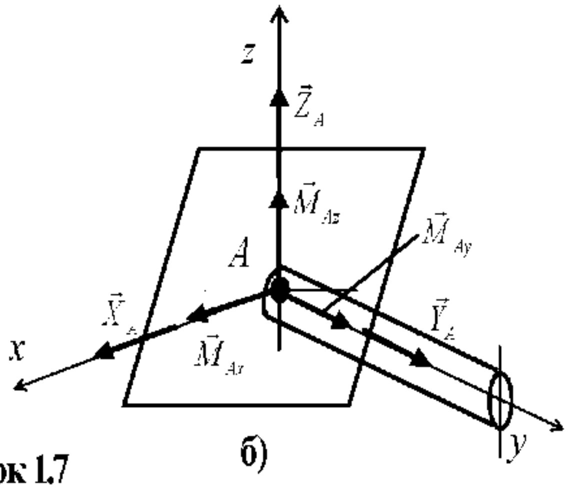


а) Рисунок 1.6 б)

1.2.7. ***Жесткое защемление (заделка)***

Защемление исключает все перемещения тела: и поступательное, и вращательное. Если на балку действует плоская система сил, то реакцию защемления можно представить силой, составляющие которой $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, и парой сил, момент которой M_A (рис. 1.7,а). При действии на тело пространственной системы сил (рис. 1.7,б) реакция защемления имеет три составляющие силы $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$ и три составляющих момента пары сил $\vec{M}_{Ax}$, $\vec{M}_{Ay}$, $\vec{M}_{Az}$.





а) **Рисунок 1.7** б)

Одной из основных задач статики является определение условий равновесия тел под действием приложенных к ним сил. Для свободного тела эти условия характеризуются соотношениями между активными силами, под действием которых тело находится в равновесии, а для несвободного – между активными силами и реакциями связей. Когда все силы, действующие на тело, известны, необходимо проверить: находится или не находится оно в равновесии. В противном случае неизвестные силы должны быть определены из условий равновесия, которые представляют собой уравнения равновесия. Неизвестными в этих уравнениях могут быть не только силы, но и другие параметры, характеризующие систему действующих на тело сил.

1.3. Условия равновесия твердого тела

Для равновесия тела, находящегося под действием произвольной системы сил и пар сил, необходимо и достаточно, чтобы *главный вектор* и *главный момент* этой системы относительно любой точки равнялись нулю. ***Главным вектором*** называют геометрическую сумму всех сил системы, а ***главным моментом*** относительно точки – геометрическую сумму моментов всех сил относительно этой точки.

В общем случае условия равновесия в векторной форме имеют вид:

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{P}_k = 0; \quad \sum_{k=1}^{n}\vec{M}_0(\vec{P}_k) = 0. \qquad (1.1)$$

Проецируя векторные равенства (12.1) на координатные оси, получим аналитические условия равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n}P_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n}P_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n}P_{kz} = 0;$$

$$(1.2)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{M}_x(\vec{P}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^{n}\vec{M}_y(\vec{P}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^{n}\vec{M}_z(\vec{P}_k) = 0.$$

Таким образом, для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из трех координатных осей и сумма моментов их относительно каждой из этих осей были равны нулю.

При рассмотрении частных случае, когда система сил, действующих на тело, не является произвольной пространственной, условия равновесия записывают с учетом специфики данной системы сил.

Задачи статики на равновесие тела под действием различных систем сил следует решать в предлагаемой последовательности:

1) выбрать объект равновесия;

2) изобразить все активные силы, действующие на объект равновесия;

3) отбросить связи, наложенные на объект равновесия, и заменить их действие реакциями, соответствующими типам связей;

4) записать для полученной системы сил систему уравнений равновесия, решить эту систему и определить искомые величины.

Примечания:

■ в качестве объекта (объектов) равновесия может быть выбрана материальная точка, тело или совокупность связанных между собой тел таким образом, чтобы к этому объекту (объектам) были приложены все искомые силы или их часть;

■ если из уравнения равновесия невозможно однозначно определить все искомые силы или иные неизвестные параметры, то задача является *статически неопределенной* и решать ее в рамках статики нельзя. При этом возможны следующие случаи: число неизвестных больше числа уравнений статики, матрица системы уравнений при равенстве числа неизвестных числу уравнений – особенная (*вырожденная*), число неизвестных меньше числа уравнений. В последнем случае объект может находиться в равновесии только при условиях, налагаемых на активные силы.

1.4. Центр параллельных сил. Центр тяжести

В статике доказывают, что если система параллельных сил имеет равнодействующую, то существует точка, притом только одна, через которую проходит ее линия действия. Эту точку называют ***центром параллельных сил***. Центр параллельных сил обладает одним важным свойством – если все силы повернуть относительно параллельных осей, проходящих через точки их приложения на один и тот же угол, то равнодействующая системы этих сил повернется на тот же угол относительно аналогичной оси, проходящей через центр параллельных сил.

Рассмотрим тело произвольной формы, находящееся в поле сил тяжести Земли. При этом на каждый элементарный объем рассматриваемого тела действует сила тяжести

$$\Delta \vec{P}_k = \vec{\gamma}\ \ x_k, y_k, z_k\ \ \Delta v_k, \tag{1.3}$$

где $\vec{\gamma}\ \ x_k, y_k, z_k$ – удельный вес элемента объема Δv_k,

$$\vec{\gamma}\ \ x_k, y_k, z_k\ \ = \lim_{\Delta v_k \to 0}\left(\frac{\Delta \vec{P}_k}{\Delta v_k}\right).$$

Когда тело однородно, $\vec{\gamma}$ не зависит от координат.

Силы тяжести, действующие на каждый элементарный объем тела, направлены к центру Земли. Если размерами тела по отношению к размерам Земли пренебречь, то систему сил тяжести можно считать системой параллельных сил, направленных в одну сторону. Такая система всегда имеет равнодействующую, а, следовательно, и центр параллельных сил.

Центр системы сил тяжести, действующих на тело со стороны Земли, называют ***центром тяжести тела***. Если тело рассматривается в системе отсчета с центром в точке O и с координатными осями x, y, z (рис. 1.8), то радиус-вектор центра тяжести и его координаты определяют по формуле:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum \vec{r}_k \Delta P_k}{\sum \Delta P_k};\ \ x_C = \frac{\sum x_k \Delta P_k}{\sum \Delta P_k};\ \ y_C = \frac{\sum y_k \Delta P_k}{\sum \Delta P_k};\ \ z_C = \frac{\sum z_k \Delta P_k}{\sum \Delta P_k}. \tag{1.4}$$

Здесь ΔP_k – модуль силы тяжести, действующей на элементарный объем Δv_k.

Центр тяжести не изменяет своего положения по отношению к телу при любой его ориентации относительно Земли. Центр тяжести – геометрическая точка, которая может не принадлежать телу, но обязательно с ним жестко связана. Если тело однородно, т.е. $\vec{\gamma} = \vec{P}/v$, где $\vec{P} = \sum \vec{P}_k;\ v = \sum \Delta v_k$, то вместо понятия центр тяжести можно использовать центр тяжести объема, занимаемого телом. Аналогично, если однородное тело представляет собой тонкую пластинку или оболочку постоянной толщины, либо тонкий криволинейный стержень постоянной толщины, то центр тяжести такого тела называют ***центром тяжести поверхности*** или ***линии***.

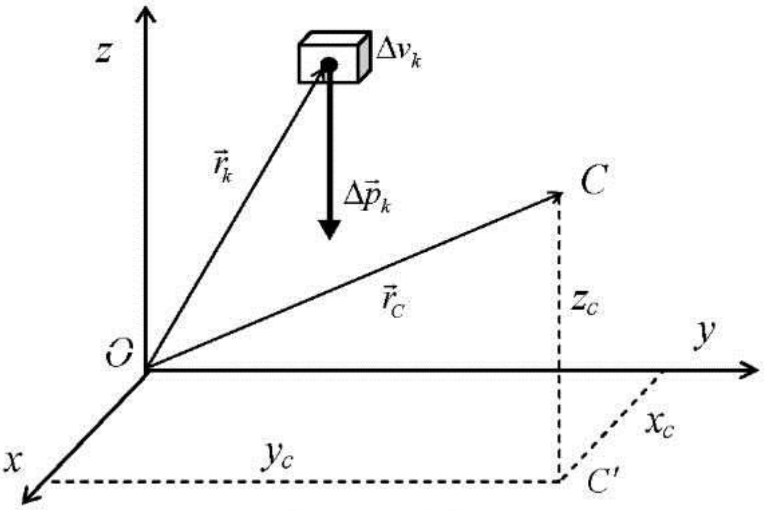


Рисунок 1.8

Формулы, по которым определяют координаты центров тяжести однородных тел, имеют следующий вид:

– центр тяжести объема

$$x_C = \frac{1}{V}\iiint_V x dv; \quad y_C = \frac{1}{V}\iiint_V y dv; \quad z_C = \frac{1}{V}\iiint_V z dv; \tag{1.5}$$

– центр тяжести поверхности

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_S x ds; \quad y_C = \frac{1}{S}\iint_S y ds; \quad z_C = \frac{1}{S}\iint_S z ds; \tag{1.6}$$

– центр тяжести линии

$$x_C = \frac{1}{L}\int_L x dl; \quad y_C = \frac{1}{L}\int_L y dl; \quad z_C = \frac{1}{L}\int_L z dl, \tag{1.7}$$

где соответственно величины: V – объема тел; S – площади поверхности тела; L – длины тела, по которым берут интегралы.

Для нахождения центров тяжести тел используют непосредственно приведенные формулы, а также правила симметрии и методы разбиения сложных тел на более простые, для которых легче определить положения их центров тяжести. В отдельных случаях положения центров тяжести тел находят экспериментальным путем.

1.5. Сухое трение. Законы Кулона

Понятия сухого трения вводятся в теоретическую механику из физики. Реальные тела не являются идеально гладкими и абсолютно твердыми. Поэтому при попытке перемещать или катить одно тело по поверхности другого возникают, кроме сил взаимодействия, направленных по общей нормали к соприкасающимся поверхностям в месте их контакта, силы и пары сил, которые препятствуют скольжению и качению. Эти силы называют соответственно ***силами трения скольжения*** и силами трения качения. Трение называют ***сухим***, если между взаимодействующими твердыми телами отсутствует смазочный материал.

Многие задачи статики не могут быть решены без учета сил трения. Так, например, без этих сил невозможно равновесие твердого тела на наклонной плоскости. Всем известен факт буксования колес автомобиля на скользкой дороге, так что само движение в большинстве случаев обусловлено силами трения. Трение скольжения и трение качения учитывают в статике посредством эмпирических (опытных) данных, которые называют ***законами Кулона***.

При попытке качения одного тела по поверхности другого сопротивление качению оказывает пара сил, называемая ***моментом сил трения качения***. Сформулируем законы Кулона для трения качения. Направление момента сил трения качения противоположно тому направлению, в котором активные силы стремятся катить тело. Величина момента трения качения находится в интервале $0 \le M_{\text{тр}} \le M_{\text{тр.пр}}$. Ее определяют формулой

$$M_{\text{тр.пр}} = \delta N,$$

где δ – ***коэффициент трения качения***, имеющий размерность длины; N – нормальное давление. Экспериментально установлено, что величина δ зависит от материалов тел и радиуса катящегося тела. Значения δ можно найти в справочниках.

Отличительной особенностью задач статики при наличии сил трения является то, что, когда сила трения $F_{\text{тр}}$ или момент сил трения $M_{\text{тр}}$ меньше предельных значений, реакции связей, включающие силу и момент сил трения, определяют из уравнений равновесия, как обычно.

Если же силы трения достигают предельных значений, то их находят с помощью коэффициентов трения и вводят как известные величины. При этом, однако, тело не находится в равновесии и применение уравнений статики ко всему телу становится неправомерным. Для установления равновесия тел при наличии трения уравнения равновесия дополняют соответствующими неравенствами, которые требуют, чтобы сила трения скольжения или момент сил трения качения не превосходили предельных значений.

Вопросы для самоконтроля

1. Что изучают в разделе статика курса теоретической механики?

2. Что называют абсолютно твердым телом?

3. Как определяют понятия силы и системы сил в статике?

4. Какие соотношения существуют между силами и системами сил? Приведите классификацию сил.

5. На каких аксиомах базируются теоретические положения статики?

6. Какое тело называют несвободным?

7. Как определяют понятия связей и их реакций?

8. Какие основные связи могут быть наложены на абсолютно твердое тело? Какие реакции возникают в этих связях?

9. Как формулируют условия равновесия абсолютно твердого тела в векторной и аналитической формах?

10. Какова последовательность решения задачи об определении реакций связей?

11. Какие условия должны выполняться для разрешимости системы уравнений равновесия абсолютно твердого тела?

12. Как определяют радиус-вектор и координаты центра тяжести тела?

13. Каким образом в статике учитывают действие сил сухого трения на твердое тело?

14. В чем заключаются особенности решения задач статики при наличии сил трения?

2. РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

2.1. Краткие теоретические сведения

В инженерной практике нередко приходится рассматривать равновесие тел, находящихся под действием системы сходящихся сил. С такими задачами, в частности, встречаются при расчетах плоских и пространственных шарнирно-стержневых конструкций – ферм.

Совокупность сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называют ***системой сходящихся сил***. Если все силы расположены в одной плоскости, то такую систему называют ***плоской системой сходящихся сил***, а если силы произвольно расположены в пространстве – то ***пространственной*** или ***произвольной системой сходящихся сил.*** Так как любую силу, действующую на абсолютно твердое тело, можно переносить по ее линии действия в любую точку тела, то, перенося все силы в точку пересечения их линий действия, получаем систему сил, приложенных в одной точке, эквивалентную исходной. Такую систему на основании аксиомы параллелограмма сил можно заменить одной равнодействующей силой, которая приложена в той же точке и равна геометрической сумме этих сил, т.е.

$$\vec{R} = \sum_{k}^{n} \vec{F}_k \ . \tag{2.1}$$

где n – число сил, $\vec{R}$ – равнодействующая данной системы сил.

Из формулы (2.1) следуют условия равновесия тела под действием системы сходящихся сил или условия равновесия системы сходящихся сил:

$$\vec{R} = \sum_{k}^{n} \vec{F}_k = 0 \, . \tag{2.2}$$

Последнее выражение записано в векторной форме. Однако для решения задач удобно использовать аналитическую форму условий равновесия, которая требует равенства нулю проекций равнодействующей на координатные оси или сумм проекций на эти оси сил исходной системы:

$$\sum_{k}^{n} F_{kx} = 0; \ \sum_{k}^{n} F_{ky} = 0; \ \sum_{k}^{n} F_{kz} = 0 \, . \tag{2.3}$$

Здесь x, y, z – оси произвольно выбранной системы координат.

Для решения задачи нужно уметь определять проекции сил на оси. В некоторых случаях, особенно в задачах на равновесие произвольной системы сил, удобно пользоваться способом двойного проецирования. Суть способа состоит в том, что вначале находят проекцию силы на плоскость, в которой эта ось расположена, а затем – проекцию полученного вектора на ось. Так, для определения проекций силы $\vec{P}$ на оси (рис. 2.1) вначале находим проекцию силы на плоскость xOy и получаем вектор $\vec{P}_{xy}$, а затем

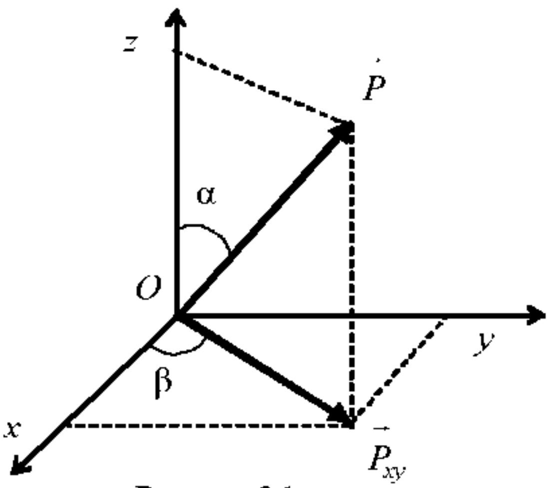


Рисунок 2.1

$$P_x = P_{xy}\cos\beta = P\sin\alpha\cdot\cos\beta;$$

$$P_y = P_{xy}\sin\beta = P\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

Проекцию силы на ось z находим по обычному правилу, т.е. $P_z = P\cos\alpha$.

2.2. Последовательность решения задач

Задачи на определение неизвестных реакций связей можно решать в предлагаемой последовательности:

1) выбрать объект равновесия. Для системы сходящихся сил объектом равновесия является точка, в которой пересекаются линии действия сил;

2) изобразить все активные силы, действующие непосредственно на объект равновесия. Если активные силы передаются на объект равновесия с помощью нитей, переброшенных через неподвижные блоки без трения в подшипниках, то на объект равновесия действуют силы натяжения нитей в точках их крепления. Их определяют из условий равновесия блоков;

3) отбросить связи, наложенные на объект равновесия и заменить их действие реакциями, соответствующими типам связей;

4) записать для полученной системы сил, включающей активные силы и реакции связей, систему уравнений равновесия;

5) решить полученную систему уравнений и определить реакции связей.

2.3. Примеры решения типовых задач

Приведем несколько типичных примеров решения задач.

Пример 1. На столб AO (идеальный стержень) высотой 6 м, укрепленный оттяжками AC и AD, которые симметрично расположены относительно плоскости yOz (рис. 2.2), действует сила натяжения провода T = 300 Н, которая направлена параллельно оси y. При этом $\angle COD$ = 120^0, а OC = OD = 4,5 м.

Определить натяжения тросов в оттяжках и усилие, действующее на столб.

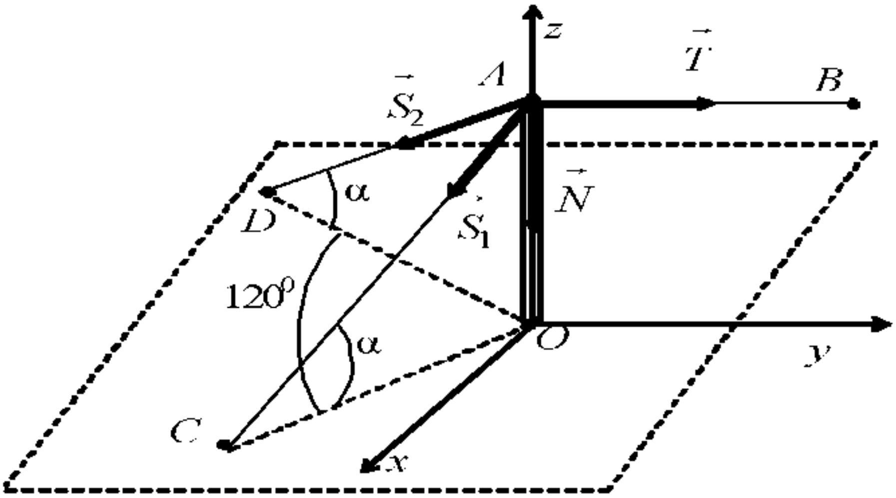


Рисунок 2.2

Решение

1) В качестве объекта равновесия примем точку A.

2) Активной силой является сила натяжения $\vec{T}$ провода AB.

3) Отбрасывая связи (оттяжки AD, AC и столб AO), заменим их действие на объект равновесия реакциями $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ и $\vec{N}$.

4) Запишем уравнения равновесия (2.3) полученной системы сходящихся сил в принятой системе координат (см. рис. 2.2). Для удобства составим табл. 2.1, которая является вспомогательной, а для сил $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ применим способ двойного проецирования.

Таблица 2.1

$\vec{P}_k$	$\vec{T}$	$\vec{S}_1$	$\vec{S}_2$	$\vec{N}$
F_{kx}	0	$S_1 \cos\alpha \cdot \cos 30^0$	$-S_2 \cos\alpha \cdot \cos 30^0$	0
F_{ky}	T	$-S_1 \cos\alpha \cdot \cos 60^0$	$-S_2 \cos\alpha \cdot \cos 60^0$	0
F_{kz}	0	$-S_1 \sin\alpha$	$-S_2 \sin\alpha$	$-N$

Теперь для записи системы уравнений равновесия просуммируем элементы соответствующих строк таблицы и приравняем эти суммы нулю:

$$S_1 \cos\alpha \cdot \cos 30^0 \ -S_2 \cos\alpha \cdot \cos 30^0 = 0;$$

$$T - S_1 \cos\alpha \cdot \cos 60^0 \ -S_2 \cos\alpha \cdot \cos 60^0 = 0;$$

$$-S_1 \sin\alpha \ -S_2 \sin\alpha - N \quad 0.$$

Здесь $\cos\alpha = \dfrac{CO}{AC} = \dfrac{4.5}{\sqrt{6^2 + 4.5^2}} = 0,6;$ $\sin\alpha = \dfrac{AO}{AC} = \dfrac{6}{\sqrt{6^2 + 4.5^2}} = 0,8.$

Из 1-го уравнения полученной системы следует, что $S_1 = S_2$. Далее находим:

из 2-го уравнения

$$S_1 = S_2 = \frac{T}{2\cos\alpha \cdot \cos 60^0} = \frac{300}{2 \cdot 0,6 \cdot 0,5} = 500\,\text{Н},$$

из 3-го уравнения

$$N = -2S_1 \sin\alpha = 2 \cdot 500 \cdot 0,8 = -800\,\text{Н}.$$

Знак «минус» указывает на то, что реакция столба в действительности направлена в сторону, противоположную принятой (см. рис. 2.2).

Пример 2. Груз Q весом 100 кН с помощью троса, переброшенного через неподвижный блок E, прикреплен к точке D и удерживается в равновесии тремя идеальными стержнями, которые шарнирно присоединены к этой точке (рис. 2.3).

Определить усилия в стержнях AD, BD и CD, если $\alpha = 45^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 30^0$, $\varepsilon = 30^0$. Трением в блоке пренебречь.

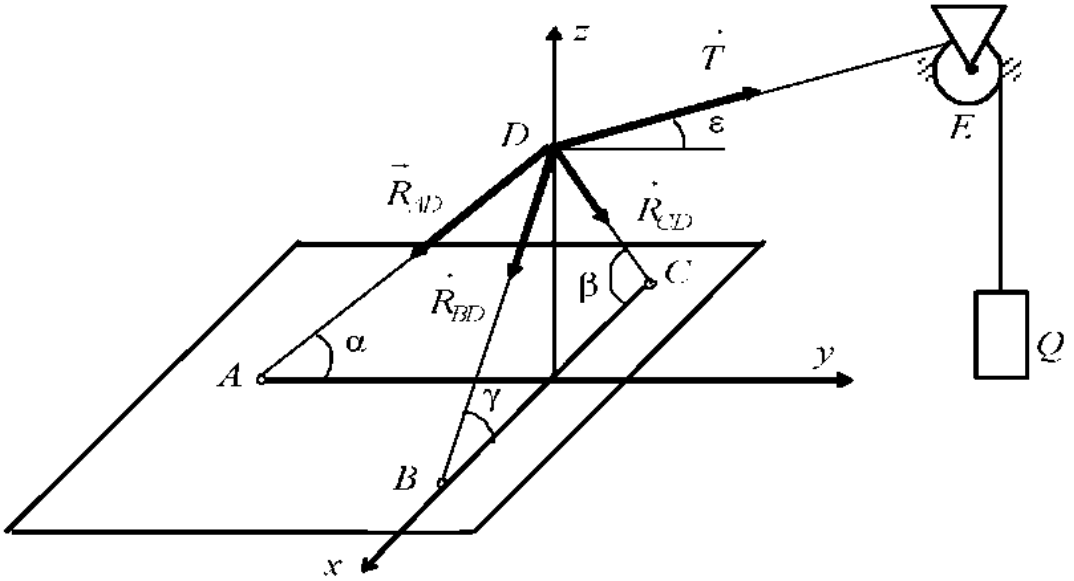


Рисунок 2.3

Решение

1) В качестве объекта равновесия примем точку D.

2) Активной силой является сила $\vec{T}$ натяжения нити, действующая на объект равновесия, причем величина этой силы равна весу груза Q, поскольку трение в блоке отсутствует.

3) Реакции связей, усилия в идеальных стержнях $\vec{R}_{AD}$, $\vec{R}_{BD}$, $\vec{R}_{CD}$ и оси выбранной системы координат показаны на схеме (см. рис. 2.3).

4) Запишем уравнения равновесия, в данном случае не составляя вспомогательной таблицы:

$$\sum F_{kx} = 0; R_{BD}\cos\gamma - R_{CD}\cos\beta = 0;$$
$$\sum F_{ky} = 0; \quad R_{AD}\cos\alpha + T\cos\varepsilon = 0;$$
$$\sum F_{kz} = 0; \ -R_{AD}\sin\alpha - R_{BD}\sin\gamma - R_{CD}\sin\beta + T\sin\varepsilon = 0.$$

Вначале решаем 2-е уравнение, поскольку в нем содержится одна неизвестная реакция

$$R_{AD} = \frac{T\cos\varepsilon}{\cos\alpha} = \frac{100\cdot 0,866}{0,707} = 122,49 \text{ кН}.$$

Затем, выражая из 1-го уравнения $R_{BD} = \dfrac{R_{CD}\cos\beta}{\cos\gamma}$ и подставляя R_{BD} и R_{AD} в 3-е уравнение

$$-122,49\sin\alpha - R_{CD}(\cos\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma + \sin\beta) + T\sin\varepsilon = 0,$$

находим

$$R_{CD} = \frac{T\sin\varepsilon - 122.49\sin\alpha}{\cos\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma + \sin\beta} = \frac{100\cdot 0,5 - 122,49\cdot 0,707}{0,5\cdot 0,577 + 0,866} = -31,7\ \text{кН}.$$

Далее определяем $R_{BD} = \dfrac{-31,7\cdot 0,5}{0,866} = -18,3$ кН.

Знаки «минус» у реакций R_{CD} и R_{BD} означают, что эти силы имеют направления, противоположные указанным на рис. 2.3.

Пример 3. В крановой конструкции груз Q весом 500 кН, прикрепленный к вертикальной стене в точке O с помощью троса, переброшенного через блок G, удерживается в равновесии тремя идеальными стержнями, одни концы которых шарнирно соединены в точке D, а другие прикреплены с помощью шарниров к той же стене (рис. 2.4,а).

Определить усилия в стержнях, если $\alpha = \beta = 45^0$, $\gamma = 60^0$, $\varepsilon = 30^0$. Размерами блока и трением пренебречь.

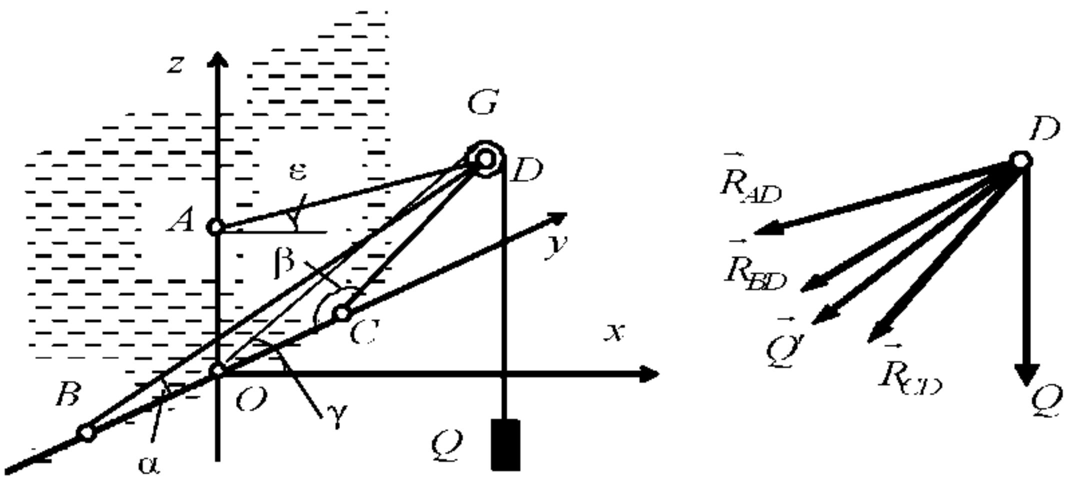


Рисунок 2.4

Решение

1) В качестве объекта равновесия примем точку D.

2) Активные силы, действующие на объект равновесия, приведены на схеме (см. рис. 2.4,б). Учитывая, что трение в блоке отсутствует, активными силами будут силы $\vec{Q}$ и $\vec{Q}'$, равные по величине силе тяжести груза Q.

3) Реакции связей – усилия в идеальных стержнях $\vec{R}_{AD}$, $\vec{R}_{BD}$, $\vec{R}_{CD}$ – направлены от узла D (см. рис. 2.4.б).

4) Запишем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx}=0;\ -R_{BD}\sin\alpha\cos\gamma-R_{CD}\sin\beta\cos\gamma-R_{AD}\cos\varepsilon-Q'\cos\gamma=0;$$

$$\sum F_{ky}=0;\ -R_{BD}\cos\alpha+R_{CD}\cos\beta=0;$$

$$\sum F_{kz}=0;\ -R_{AD}\sin\varepsilon-R_{BD}\sin\alpha\sin\gamma-R_{CD}\sin\beta\sin\gamma-Q'\sin\gamma-Q=0.$$

Из 2-го уравнения следует, что $R_{BD}\cos\alpha=R_{CD}\cos\beta$, а поскольку $\alpha=\beta$, то $R_{BD}=R_{CD}$. Далее из 3-го уравнения находим

$$R_{AD}=\frac{-2R_{BD}\sin\alpha\sin\gamma-Q'\sin\gamma-Q}{\sin\varepsilon}$$

и подставляем в 1-е, откуда, учитывая, что $|\vec{Q}|=|\vec{Q}'|$, определяем

$$R_{BD}=Q\frac{\cos\gamma-\mathrm{ctg}\varepsilon(1+\sin\gamma)}{2\sin\alpha(\sin\gamma\,\mathrm{ctg}\varepsilon-\cos\gamma)}=$$

$$=500\frac{0,5-1,732(1+0,866)}{2\cdot 0,707(0,866\cdot 1,732-0,5)}=969,091\ \text{кН},$$

а затем

$$R_{AD}=\frac{2\cdot 966,091\cdot 0,707\cdot 0,866-500\cdot 0,866-500}{0,5}=500,003\ \text{кН}.$$

Таким образом, имеем

$$R_{BD}=R_{CD}=-966,091\ \text{кН и}\ R_{AD}=500,003\ \text{кН}.$$

Знак «минус» у реакций R_{BD} и R_{CD} означает, что направления этих сил противоположны принятым (см. рис. 2.4,б).

Вопросы для самоконтроля

1. Какая совокупность сил называют системой сходящихся сил?
2. Как сформулировать условие равновесия системы сходящихся сил в векторной форме?
3. Как записать аналитические условия равновесия системы сходящихся сил?
4. Как определяют проекцию силы на ось?
5. В чем заключается способ двойного проецирования вектора?
6. В какой последовательности следует решать задачу об определении реакций связей из условия равновесия тела?
7. Какой вывод следует сделать, если реакции некоторых связей оказались со знаком «минус»?

3. РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

3.1. Краткие теоретические сведения

При конструировании различных технических устройств, проектировании инженерных сооружений приходится решать задачи о равновесии тел, на которые действуют силы, расположенные в одной плоскости. Для решения такого класса задач наряду с умением определять проекции сил на координатные оси, необходимо также научиться находить моменты сил относительно некоторых точек. Поскольку все силы расположены в одной плоскости, можно ограничиться понятием *алгебраического момента силы* относительно некоторой точки. Здесь же встречается понятие о *парах сил*.

Произвольной плоской системой сил называют совокупность сил, расположенных в одной плоскости и действующих в различных направлениях.

Алгебраическим моментом силы относительно некоторой точки называют алгебраическую величину, равную произведению модуля силы на плечо силы относительно данной точки, взятую с соответствующим знаком. Обозначение имеет вид $M_O(\vec{P})$.

Плечом силы относительно некоторой точки называют кратчайшее расстояние от этой точки до линии действия силы. Другими словами, это длина перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия силы. Знак позволяет сравнивать вращательное действие различных сил по отношению к выбранной точке. Принято ставить знак «плюс», если сила стремиться повернуть тело относительно выбранной точки против хода стрелки часов и знак «минус» – в противном случае.

Приведем примеры определения алгебраических моментов силы относительно точки (рис. 3.1). Алгебраическими моментами сил $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$, приложенных в точках 1, 2 и 3 относительно точки O, будут:

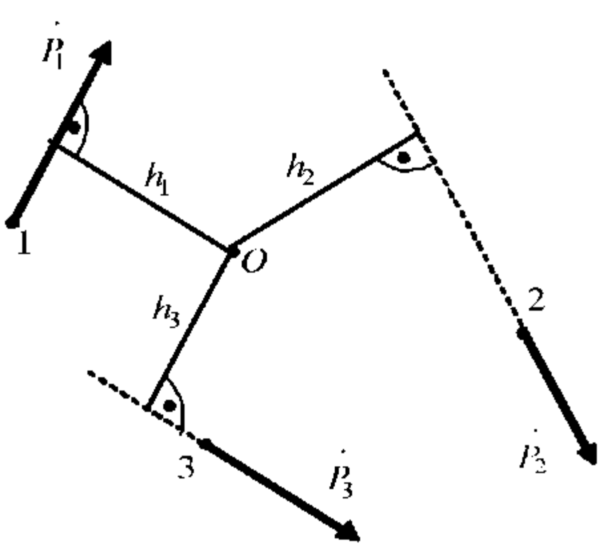


Рисунок 3.1

$$M_O(\vec{P}_1) = -P_1 \cdot h_1;$$

$$M_O(\vec{P}_2) = -P_2 \cdot h_2;$$

$$M_O(\vec{P}_3) = P_3 \cdot h_3.$$

Из определения также следует, что, если линия действия силы проходит через заданную точку, то алгебраический момент силы относительно этой точки равен нулю.

Парой сил называют систему двух равных по величине и противоположно направленных сил, не лежащих на одной прямой. Кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары называют ***плечом пары***. Из определения следует, что сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю. При решении задач на равновесие тел под действием произвольной плоской системы сил удобно пользоваться понятием *алгебраического момента пары сил*. ***Алгебраическим моментом пары сил*** называют величину, равную произведению модуля одной из сил пары на плечо пары, взятую со знаком «плюс», если пара стремится вращать тело против хода стрелки часов, и со знаком «минус» – в противном случае. Выражения для алгебраических моментов пар сил, приведенных на рис. 3.2 имеют вид:

$$M_1 = M(\bar{P}_1, \bar{P}_1') = P_1 \cdot h_1;\; M_2 = M(\bar{P}_2, \bar{P}_2') = -P_2 \cdot h_2.$$

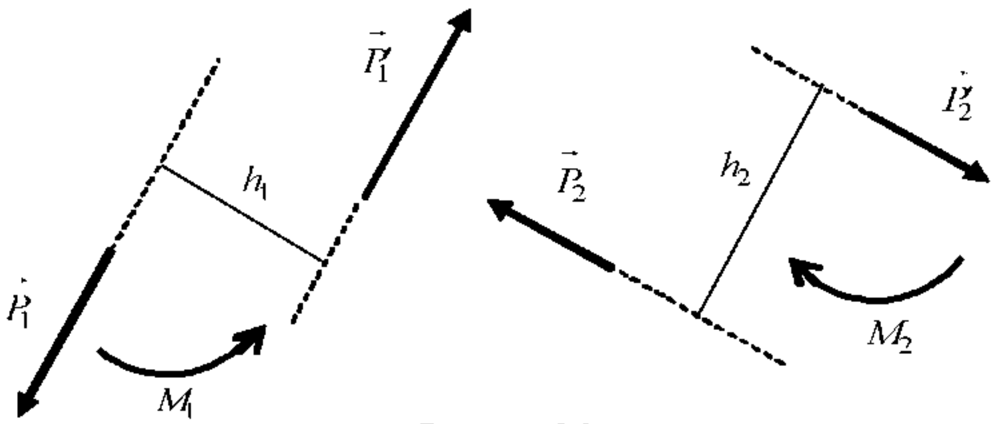


Рисунок 3.2

Пары сил, действующие на абсолютно твердое тело, обладают рядом важных свойств:

1) сумма моментов сил, составляющих пару, относительно любой точки в плоскости действия сил равна алгебраическому моменту этой пары сил (не зависит от выбора точки на плоскости);

2) пары сил, лежащие в одной плоскости и имеющие одинаковые алгебраические моменты, эквивалентны, т.е. оказывают на тело одинаковое воздействие. Из этого следует, что пару сил можно переносить в плоскости ее действия в любую область тела, поворачивать как угодно в этой плоскости, менять одновременно модули сил пары и плечо пары так, чтобы величина алгебраического момента пары оставалась неизменной;

3) несколько пар сил, лежащих в одной плоскости, эквивалентны одной паре, алгебраический момент которой равен сумме алгебраических моментов этих пар.

Перечисленные свойства позволяют изображать пары сил дуговыми стрелками, указывающими направление действия, и задавать при этом численные значения их алгебраических моментов (см. рис. 3.2). Согласно основной теореме статики (теореме Пуансо), произвольную систему сил можно заменить эквивалентной системой, состоящей из одной силы, равной *главному вектору* системы сил, и одной пары, векторный момент которой равен *главному моменту системы сил* относительно некоторой точки – центра приведения. Напомним, что главным вектором системы сил называют геометрическую сумму сил системы, а главным моментом системы сил относительно некоторой точки – геометрическую сумму моментов сил системы относительно этой точки. Поскольку для системы сил, расположенных в одной плоскости, векторные моменты сил относительно любой точки в этой плоскости являются коллинеарными векторами, то главный момент системы сил равен сумме алгебраических моментов сил относительно этой точки. С другой стороны, главный вектор плоской системы сил перпендикулярен плоскости, в которой расположены силы и, следовательно, имеет только не равные нулю проекции на оси координат, расположенные в плоскости действия сил. Условия равновесия – равенства нулю главного вектора и главного момента – произвольной плоской системы сил поэтому могут быть записаны в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0; \ \sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0; \ \sum_{k=1}^{n} M_O(\vec{P}_k) = 0, \qquad (3.1)$$

где n –количество сил системы; O – центр приведения (в дальнейшем индексы суммирования будем опускать, предполагая, что суммирование производится по всем силам системы); x и y – оси декартовой системы координат, расположенные в плоскости действия сил системы. Условия (3.1) представляют собой аналитические условия равновесия, записанные в первой (основной) форме. Существуют и другие формы условий равновесия, однако при этом накладываются некоторые ограничения на выбор координатных осей или центра приведения. Например, можно использовать и такие условия:

$$\sum P_{kx} = 0; \sum M_A(\vec{P}_k) = 0; \sum M_B(\vec{P}_k) = 0, \qquad (3.2)$$

где A и B – любые точки, лежащие в плоскости действия сил, а ось x – ось, не перпендикулярная отрезку $\overline{AB}$,

или такие условия:

$$\sum M_A(\dot{P}_k) = 0; \sum M_B(\dot{P}_k) = 0; \sum M_C(\dot{P}_k) = 0, \qquad (3.3)$$

где A, B и C – любые точки, не лежащие на одной прямой.

Если в условиях равновесия часть сил неизвестна и из них должна быть найдена, тогда эти условия становятся системой линейных алгебраических уравнений. Разрешимость такой системы изучают в линейной алгебре. Следует отметить, что для получения единственного решения число неизвестных сил должно быть равно числу уравнений, а определитель матрицы левой части системы – не равен нулю. Для получения более простых уравнений, с точки зрения решения системы, в качестве центра приведения целесообразно принимать точку пересечения линий действия наибольшего числа неизвестных сил, а оси координат выбирать так, чтобы бо́льшая часть сил была либо параллельна, либо перпендикулярна этим осям. Естественно, что если в плоской системе сил все силы параллельны, то, выбрав одну из осей, параллельной силам, получим, что сумма проекций всех сил на другую ось, перпендикулярную первой, тождественно равна нулю. Таким образом, из трех уравнений равновесия для плоской системы параллельных сил остаются только два. Если же линии действия сил пересекаются в одной точке, то, выбрав ее в качестве центра приведения, получим, что сумма алгебраических моментов всех сил относительно этой точки тождественно равна нулю и для решения задачи остается система двух уравнений. Запишем систему (3.1) в виде:

для 1-го случая

$$\sum_{k-1}^{n} P_{kx} = 0; \ \sum_{k-1}^{n} M_O(\vec{P}_k) = 0, \qquad (2.4)$$

где ось x перпендикулярна силам;

для 2-го случая

$$\sum_{k-1}^{n} P_{kx} = 0; \sum_{k-1}^{n} P_{ky} = 0. \qquad (2.5)$$

Во многих задачах, когда вычисление плеча силы относительно точки затруднено, удобно использовать теорему Вариньона: ***“Если некоторая система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любой точки равен сумме моментов всех сил системы относительно той же точки”***. Теперь силу можно разложить по линии ее действия на две составляющие и найти сумму моментов этих составляющих относительно выбранной точки. Так, сила $\vec{P}$, показанная на рис. 3.3, может быть представлена двумя составляющими $\vec{P}'$ и $\vec{P}''$, причем $\vec{P} = \vec{P}' + \vec{P}''$, а модули этих составляющих равны, соответственно, $\left|\vec{P}'\right| - \left|\vec{P}\right| \cos\alpha$ и $\left|\vec{P}''\right| - \left|\vec{P}\right| \sin\alpha$. На основании приведенной теоремы момент силы $\dot{P}$ относительно, например, точки O находят по формуле

$$\sum M_O(\dot{P}) = \sum M_O(\dot{P}') + \sum M_O(\dot{P}'') = -P \cdot h = -P' \cdot b + P'' \cdot a,$$

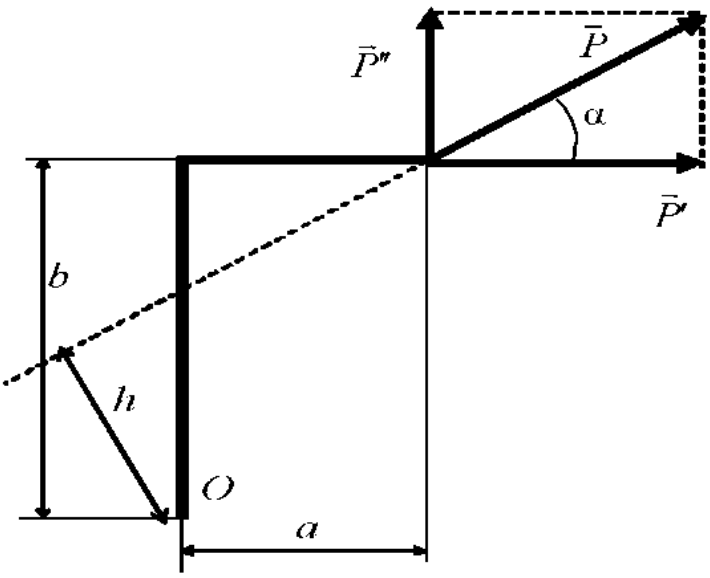


Рисунок 3.3

где a и b, соответственно, плечи сил $\vec{P}''$ и $\vec{P}'$ относительно этой точки.

Часто встречаются задачи, когда на тело действует нагрузка, равномерно распределенная по какой-либо прямой (рис. 3.4.). Ее задают *интенсивностью* q, имеющей размерность Н/м и выражающей силу, приходящуюся на единицу длины участка, на котором эта нагрузка действует. Равномерно распределенную нагрузку можно заменить равнодействующей Q, равной произведению интенсивности на длину участка и приложенной посредине этого участка, т.е. $|\vec{Q}| = q \cdot b$. Если, например, необходимо определить значение алгебраического момента равномерно распределенной нагрузки (см. рис. 3.4.) относительно точки O, то используют формулу

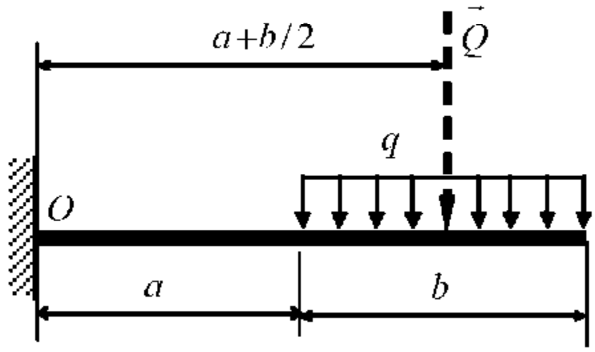


Рисунок 3.4

$$M_O(q) = M_O(\vec{Q}) = -q \cdot b \cdot (a + \frac{b}{2}) .$$

Для проверки правильности решения задачи записывают дополнительное уравнение, выражающее сумму моментов всех сил относительно любой точки, не использованной при решении задачи. После подстановки в это уравнение найденных значений реакций связей сумма должна быть равной нулю. Наличие погрешностей в вычислениях приводит к тому, что в действительности равенство нулю выполняется неточно. Оценить полученный результат можно с помощью вычисления относительной погрешности, которую определяют, например, по формуле

$$\delta = \frac{|\Sigma|}{|\Sigma +|} \cdot 100\%,$$

где $|\Sigma|$ – модуль полученной суммы; $|\Sigma +|$ – сумма положительных слагаемых. Относительная погрешность зависит от точности вычислений, но не должна превышать 1–3 %. Если погрешность велика, то необходимо проверить правильность записи уравнений равновесия и вычислений при решении.

3.2. Примеры решения типовых задач

Пример 1. Определить реакции шарнирных опор A и B мостовой фермы (рис. 3.5.), нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q = 5 кН/м, сосредоточенной силой P = 20 кН и парами сил с алгебраическими моментами M_1 = 30 кН·м, M_2 = 15 кН·м, если a = 2 м; b = 3 м; $\alpha = 60^0$.

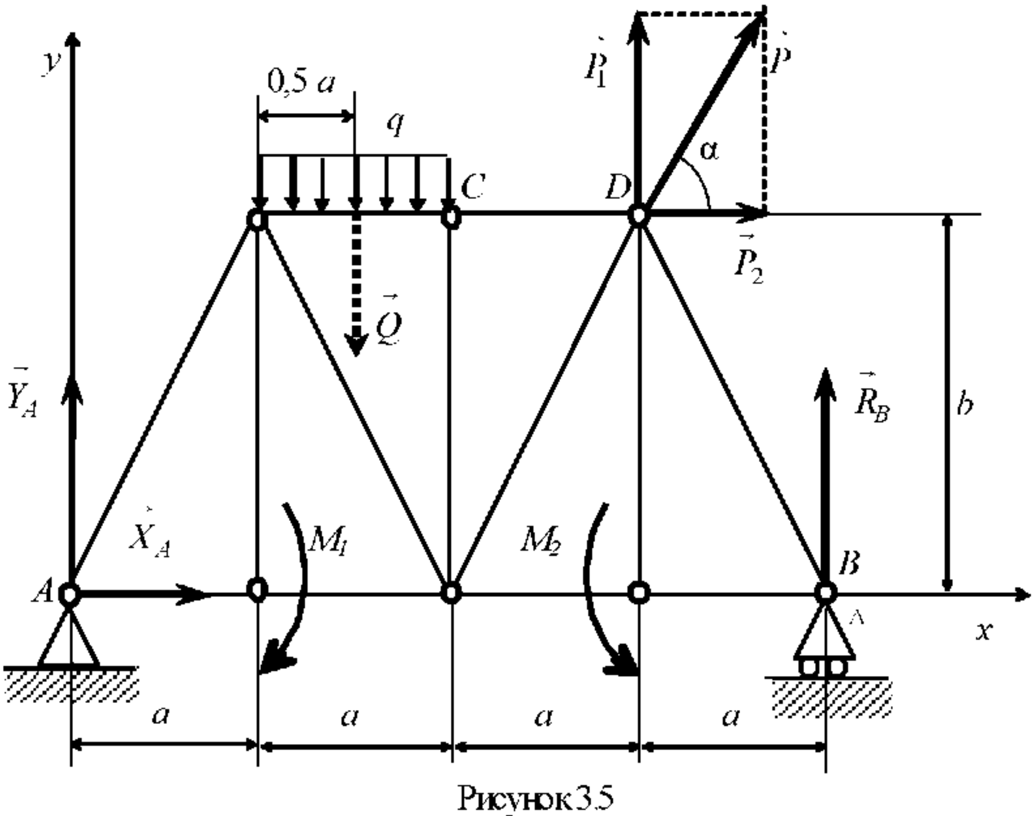


Рисунок 3.5

Решение

1) В качестве объекта равновесия примем всю ферму, которую будем считать абсолютно твердым телом.

2) Активными силами, действующими на объект равновесия, будут силы $\vec{P}$, $\vec{Q}$ и пары сил с алгебраическими моментами M_1, M_2. Сила $\vec{Q}$ является равнодействующей равномерно распределенной нагрузки q, модуль которой $\left|\vec{Q}\right| = q \cdot a = 5 \cdot 2 = 10$ кН. Приложена она в середине отрезка длиной a. Силу $\vec{P}$ целесообразно разложить на составляющие $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$, параллельные координатным осям

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2,$$

модули которых

$$P_1 = P \sin\alpha = 20 \sin 60^0 = 17,32 \text{ кН};$$

$$P_2 = P \cos\alpha = 20 \cos = 10 \text{ кН}.$$

3) Отбрасывая связи (неподвижный цилиндрический шарнир A и подвижный цилиндрический шарнир B), заменим их действие на объект равновесия реакциями $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$. Реакция неподвижного шарнира $\vec{R}_A$ представлена составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, параллельными координатным осям.

4) Запишем уравнения равновесия (3.1) полученной плоской системы сил в принятой системе координат (см. рис. 3.5). Составим табл. 3.1. Суммируя элементы соответствующих строк таблицы, и приравнивая эти суммы нулю, получим систему уравнений равновесия:

$$X_A + P_2 = 0;$$

$$Y_A + R_B + P_1 - Q = 0;$$

$$R_B \cdot 4a + P_1 \cdot 3a - P_2 \cdot b - Q \cdot 1,5a - M_1 + M_2 = 0.$$

Таблица 3.1

$\vec{P}_k$	$\vec{X}_A$	$\vec{Y}_A$	$\vec{R}_B$	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{Q}$	M_1	M_2
P_{kx}	X_A	0	0	0	P_2	0	–	–
P_{ky}	0	Y_A	R_B	P_1	0	$-Q$	–	–
$M_A(\vec{P}_k)$	0	0	$R_B\cdot 4a$	$P_1\cdot 3a$	$-P_2\cdot b$	$-Q\cdot 1{,}5a$	$-M_1$	M_2

5) Решим полученную систему уравнений, из которых следует:

из 1-го

$$X_A=-P_2=-10\ \text{кН};$$

из 3-го

$$R_B=\frac{-P_1\cdot 3a+P_2\cdot b+Q\cdot 1{,}5a+M_1-M_2}{4a}=$$

$$=\frac{-103.92+30+30+30-15}{8}=-3.62\ \text{кН};$$

из 2-го

$$Y_A=-R_B-P_1+Q=3{,}62-17{,}32+10=-3{,}7\ \text{кН}.$$

Знаки «минус» у всех реакций указывают на то, что эти реакции в действительности направлены в стороны. противоположные принятым в соответствии с рис. 3.5.

По составляющим реакции в шарнире A можно определить модуль и направление реакции $\vec{R}_A$

$$\left|\vec{R}_A\right|=\sqrt{X_A^2+Y_A^2}=\sqrt{100+13{,}69}=10{,}66\ \text{кН},$$

$$\cos\beta=\frac{X_A}{R_A}=\frac{-10}{10{,}66}=-0{,}9381,$$

где β – угол, между вектором реакции $\vec{R}_A$ и положительным направлением оси x.

Для проверки полученного решения составим выражение суммы моментов всех сил , например, относительно точки D

$$\sum M_D(\vec{P}_k) = X_A \cdot b - Y_A \cdot 3a + R_B \cdot a + Q \cdot 1.5a - M_1 + M_2 =$$
$$= -30 + 22.2 - 7.24 + 30 - 30 + 15 = 67,2 - 67,24 = -0,4 \approx 0.$$

Вычислим относительную погрешность

$$\delta = \frac{|-0,4|}{67,2} \cdot 100\,\% = 0,59\,\%,$$

которая не превышает 1 % и связана с точностью вычислений.

__Пример 2.__ Определить реакции жесткой заделки A в ломаном брусе (рис. 3.6.), нагруженном распределенными нагрузками интенсивности которых составляют, соответственно, q_1 = 2 кН/м и q_2 = 5 кН/м, силой P = 30 кН, и моментом M = 8 кН·м, если a = 2 м, b = 3 м, c = 1 м, d = 2 м, $\alpha = 30^0$.

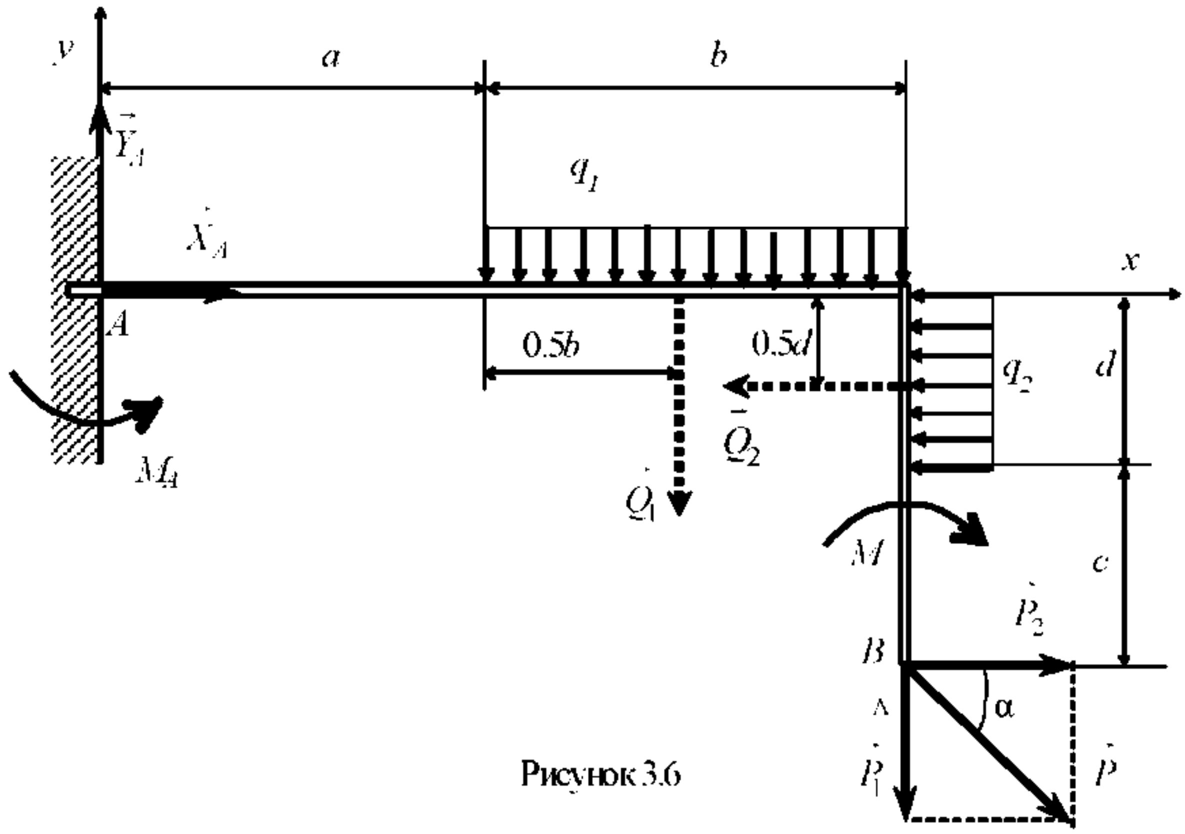


Рисунок 3.6

__Решение__

1) В качестве объекта равновесия примем брус AB.

2) Активными силами, действующими на объект равновесия, будут $\vec{P}$, $\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$ и пара сил, алгебраический момент которой M. Силы

$\vec{Q}_1$ и $\vec{Q}_2$ являются равнодействующими распределенных нагрузок q_1 и q_2. Их модули: $\left|\vec{Q}_1\right| = q_1 \cdot b = 2 \cdot 3 = 6$ кН; $\left|\vec{Q}_2\right| = q_2 \cdot d = 5 \cdot 2 = 10$ кН. Приложены они в середине отрезков длиной b и d (см. рис. 3.6.). Силу $\vec{P}$ целесообразно разложить на составляющие $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$, параллельные координатным осям.

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 .$$

Модули этих составляющих:

$$P_1 = P \sin\alpha = 30 \sin 30^0 = 15 \text{ кН}; \quad P_2 = P\cos\alpha = 30\cos 30^0 = 25{,}98 .$$

3) Отбрасывая связь (плоскую жесткую заделку A), заменим ее действие на объект равновесия реакцией $\vec{R}_A$, которая представлена составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, параллельными координатным осям, и парой сил с алгебраическим моментом M_A.

4) Запишем уравнения равновесия (3.1) полученной плоской системы сил в принятой системе координат (см. рис. 3.6), составив предварительно табл. 3.2.

Таблица 3.2

$\vec{P}_k$	$\vec{X}_A$	$\vec{Y}_A$	M_A	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{Q}_1$	$\vec{Q}_2$	M
P_{kx}	X_A	0	–	0	P_2	0	$-Q_2$	–
P_{ky}	0	Y_A	–	$-P_1$	0	$-Q_1$	0	
$M_A(\vec{P}_k)$	0	0	M_A	$-P_1\times$ $\times(a+b)$	$P_2\times$ $\times(d+c)$	$-Q_1\times$ $\times(a+b/2)$	$-Q_2\times$ $\times d/2$	M

Суммируя элементы соответствующих строк таблицы и приравнивая эти суммы нулю, получим систему уравнений равновесия:

$$X_A + P_2 - Q_2 = 0;$$

$$Y_A - P_1 - Q_1 = 0;$$

$$M_A - P_1 \cdot (a+b) + P_2 \cdot (d+c) - Q_1 \cdot (a + b/2) - Q_2 \cdot d/2 - M = 0.$$

5) Решим полученную систему уравнений и найдем:
из 1-го

$$X_A = -P_2 + Q_2 = -25{,}98 + 10 = -15{,}98 \text{ кН};$$

из 2-го

$$Y_A = P_1 + Q_1 = 15 + 6 = 21 \text{ кН};$$

из 3-го

$$M_A = P_1 \cdot (a+b) - P_2 \cdot (d+c) + Q_1 \cdot (a + b/2) + Q_2 \cdot d/2 + M =$$
$$-15 \cdot 5 - 25{,}98 \cdot 3 + 6 \cdot 3{,}5 + 10 \cdot 1 + 8 - 36{,}06 \text{ кН·м}.$$

Знак «минус» у реакции X_A указывает на то, что эта реакция в действительности направлена в сторону, противоположную ранее принятой (см. рис. 3.6.).

По составляющим реакции в шарнире A можно определить ее модуль и направление

$$\left|\vec{R}_A\right| = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{255{,}36 + 441} = 26{,}39 \text{ кН},$$

$$\cos\beta = \frac{X_A}{R_A} = \frac{-15{,}98}{26{,}39} = -0{,}6055,$$

где β – угол между вектором реакции $\vec{R}_A$ и положительным направлением оси x.

Для проверки полученного решения составим выражение суммы моментов всех сил , например, относительно точки B:

$$\sum M_B(\vec{P}_k) = -X_A \cdot (c+d) - Y_A \cdot (a+b) + Q_1 \cdot b/2 + Q_2 \cdot (c + d/2) - M + M_A =$$
$$= 47{,}94 - 105 + 9 + 20 - 8 + 36{,}06 = 113 - 113 = 0.$$

В данном примере относительная погрешность оказалась равной нулю.

__Пример 3.__ Определить реакцию шарнира A и усилие в идеальном стержне BC балки (рис. 3.7.), нагруженной равномерной распределенной нагрузкой интенсивностью q = 4 кН/м и удерживающей груз весом P = 6 кН с помощью троса. Он переброшен через неподвижный блок B. Трение в блоке отсутствует. Размеры на рисунке даны в метрах. Точки A, B и D считать расположенными на одной прямой.

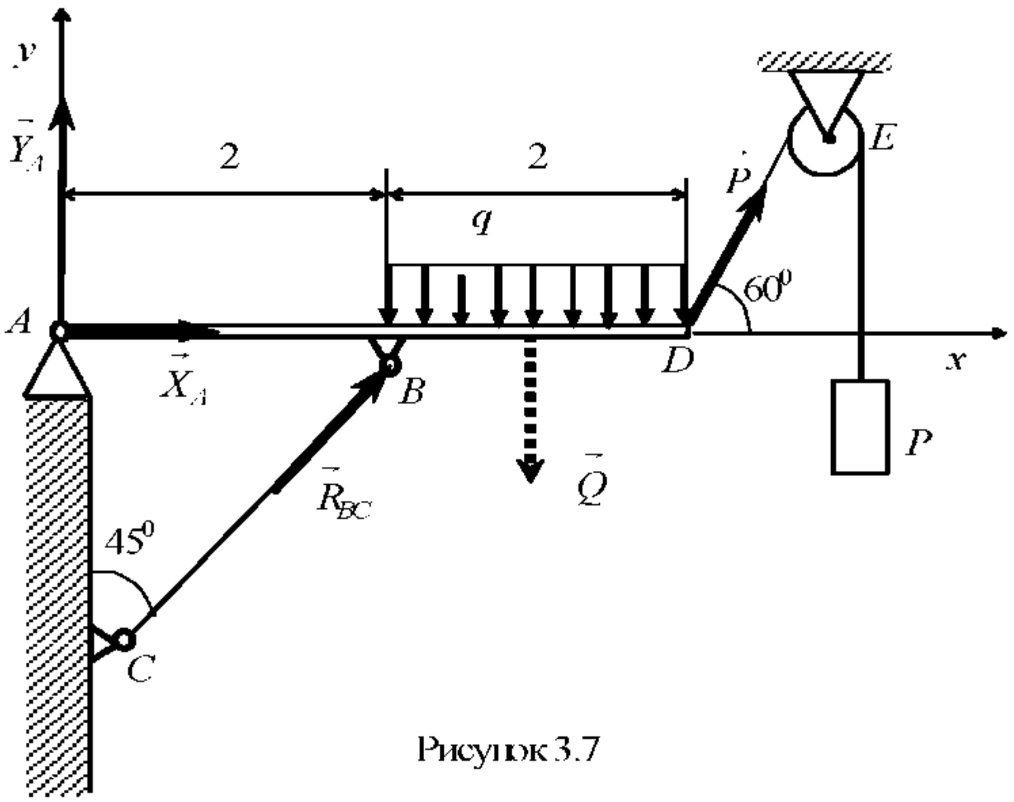


Рисунок 3.7

Решение

1) В качестве объекта равновесия примем балку AD.

2) Активными силами, действующими на объект равновесия, будут сила $\vec{P}$, направленная вдоль нити в месте крепления, и сила $\vec{Q}$, которая является равнодействующей распределенной нагрузки q и модуль которой $\left|\vec{Q}\right| = q \cdot 2 = 8$ кН.

3) Отбрасывая связи (неподвижный цилиндрический шарнир A и идеальный стержень BC), заменим их действие на объект равновесия реакцией $\vec{R}_A$. Она представлена составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, параллельными координатным осям, и усилием в стержне $\bar{R}_{BC}$, которое направлено по прямой, соединяющей шарниры B и C.

4) Запишем уравнения равновесия (3.2) полученной плоской системы сил в принятой системе координат (см. рис. 3.7), составив предварительно табл. 3.3.

Таблица 3.3

$\vec{P}_k$	$\vec{X}_A$	$\vec{Y}_A$	$\vec{R}_{BC}$	$\vec{P}$	$\vec{Q}$
P_{kx}	X_A	0	$R_{BC}\sin 45^0$	$P\cos 60^0$	0
$M_A(\vec{P}_k)$	0	0	$R_{BC}\sin 45^0\cdot 2$	$P\sin 60^0\cdot 4$	$-Q\cdot 3$
$M_B(\vec{P}_k)$	0	$-Y_A\cdot 2$	0	$P\sin 60^0\cdot 2$	$-Q\cdot 1$

Суммируя элементы соответствующих строк таблицы и приравнивая эти суммы нулю, получим систему уравнений равновесия:

$$X_A + R_{BC}\sin 45^0 + P\cos 60^0 = 0;$$

$$R_{BC}\sin 45^0\cdot 2 + P\sin 60^0\cdot 4 - Q\cdot 3 = 0;$$

$$-Y_A\cdot 2 + P\sin 60^0\cdot 2 - Q\cdot 1 = 0.$$

5) Решим полученную систему уравнений и найдем:
из 2-го

$$R_{BC} = \frac{-P\sin 60^0\cdot 4 + Q\cdot 3}{\sin 45^0\cdot 2} = \frac{-20,784 + 24}{1,414} = 2,274 \text{ кН};$$

из 1-го

$$X_A = -R_{BC}\sin 45^0 - P\cos 60^0 = -1,608 - 3 = -4,608 \text{ кН};$$

из 3-го

$$Y_A = \frac{P\sin 60^0\cdot 2 - Q\cdot 1}{2} = \frac{10,392 - 8}{2} = 1,196 \text{ кН}.$$

Знак «минус» у реакции X_A указывает на то, что эта реакция в действительности направлена в сторону, противоположную ранее принятой (см. рис. 3.7).

Для проверки полученного решения составим выражение суммы проекций всех сил на ось y:

$$\sum \vec{P}_{ky} = Y_A + R_{BC}\cos 45^0 + P\sin 60^0 - Q =$$

$$= 1{,}196 + 1{,}608 + 5{,}196 - 8 = 8 - 8 = 0.$$

В данном примере относительная погрешность также оказалась равной нулю.

Вопросы для самоконтроля

1. Какую совокупность сил называют произвольной плоской системой сил?
2. Как определяют алгебраический момент силы относительно точки?
3. Что называют плечом силы относительно точки?
4. Как принято устанавливать знак алгебраического момента силы относительно точки?
5. Когда удобно использовать теорему Вариньона для нахождения момента силы относительно точки?
6. Какую систему сил называют парой сил и как определяют алгебраический момент пары сил?
7. Какими основными свойствами обладает пара сил?
8. Какую эквивалентную замену применяют для равномерно распределенной нагрузки?
9. Как записывают условия равновесия произвольной плоской системы сил в основной и в дополнительных формах?
10. Выполнение каких условий необходимо для разрешимости уравнений равновесия?
11. Каким образом можно проверить правильность решения задачи и оценить его точность?

4. РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

4.1. Краткие теоретические сведения

Задачи на равновесие тела, находящегося под действием произвольной пространственной системы сил, представляют собой наиболее общий случай задач о равновесии абсолютно твердого тела и имеют важное значение в технике. Новыми элементами при составлении уравнений равновесия является вычисление моментов сил и моментов пар сил относительно координатных осей. При решении данного типа задач необходимо пользоваться понятием вектора-момента пары сил в отличие от алгебраического момента пары.

Моментом силы относительно некоторой оси называют скалярную величину, равную проекции на эту ось вектора-момента силы относительно любой точки на этой оси. Из приведенного определения следует другое правило вычисления указанной величины, часто используемое при непосредственном решении задач. Его формулируют следующим образом: «***Момент силы относительно оси равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля проекции силы на плоскость, перпендикулярную данной оси, на ее плечо относительно точки пересечения оси с плоскостью***». Знак «плюс» ставят тогда, когда поворот тела вокруг данной оси с ее положительного направления наблюдается происходящим против хода стрелки часов, и знак «минус» – в противном случае. Другими словами, момент силы относительно оси равен алгебраическому моменту проекции силы на плоскость, перпендикулярную данной оси, относительно точки пересечения этой плоскости с осью. Из сказанного вытекает, что момент силы относительно оси равен нулю в случаях, если сила параллельна оси (тогда проекция силы на плоскость, перпендикулярную данной оси, равна нулю) или если линия действия силы пересекает ось (тогда плечо равно нулю). Оба указанных случая можно объединить в один – момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось расположены в одной плоскости. Когда, например, оси x, y, z являются тремя взаимно перпендикулярными осями, проведенными из любой точки тела, и нужно определить момент силы $\vec{P}$ относительно оси z (рис. 4.1), то можно воспользоваться формулой

$$M_z(\vec{P}) = M_O(\vec{P}_{xy}) = \pm\left|\vec{P}_{xy}\right| \cdot h. \qquad (4.1)$$

где $\vec{P}_{xy}$ – векторная величина, равная проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси z, т.е. на плоскость xOy; h – плечо силы $\vec{P}_{xy}$ относительно точки O. Таким образом, необходимо выполнить следующие действия:

1) определить проекцию силы на плоскость, перпендикулярную данной оси – вектор $\vec{P}_{xy}$;

2) найти точку пересечения данной плоскости с осью (в рассматриваемом примере это точка O);

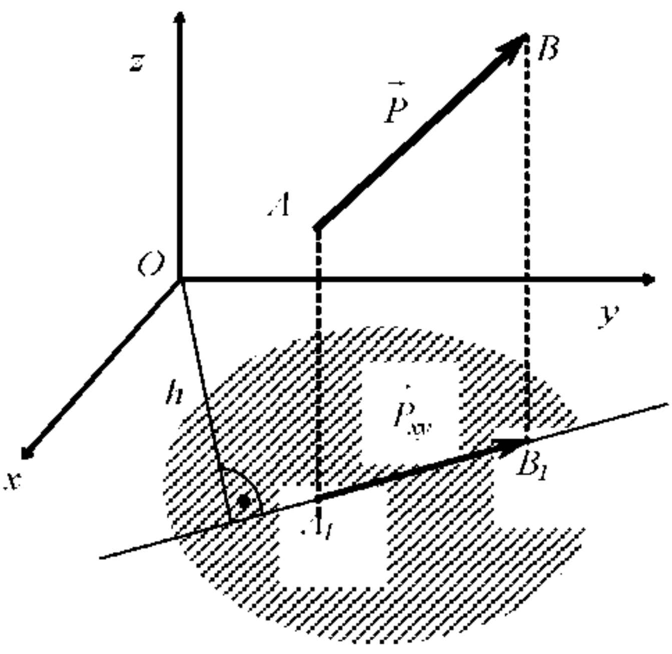


Рисунок 4.1

в) вычислить алгебраический момент силы $\vec{P}_{xy}$ относительно этой точки, для чего умножить модуль силы на ее плечо относительно точки O, и поставить соответствующий знак. Заметим, что при вычислении алгебраического момента силы относительно точки можно воспользоваться теоремой Вариньона, т.е. разложить удобным образом силу $\vec{P}_{xy}$ на две составляющие и определить сумму их моментов относительно точки O.

Если сила $\vec{P}$ задана проекциями на координатные оси, т.е. величинами P_x, P_y и P_z, а точка приложения силы имеет координаты x, y, z, то для определения моментов силы $\vec{P}$ относительно координатных осей можно воспользоваться следующими аналитическими выражениями:

$$
\begin{aligned}
M_x(\vec{P}) &= y \cdot P_z - z \cdot P_y; \\
M_y(\vec{P}) &= z \cdot P_x - x \cdot P_z; \\
M_z(\vec{P}) &= x \cdot P_y - y \cdot P_x.
\end{aligned}
\qquad (4.2)
$$

Действие пары сил на твердое тело полностью определяется вектором-моментом пары. В теории пар сил доказано, что вектор-момент пары сил – это *свободный вектор*, не имеющий точки приложения, другими словами, такой вектор может считаться приложенным в любой точке тела. Напомним, что вектор-момент пары сил – это *вектор, перпендикулярный плоскости*, в которой расположены силы пары, а его модуль равен произведению модуля одной из сил пары на плечо пары. Направлен вектор-момент пары сил так, что вращение тела силами пары наблюдается с его конца происходящим против хода стрелки часов. Две пары сил эквивалентны, если равны их векторы-моменты. Две и более пар сил, действующих на абсолютно твердое тело, можно заменить одной парой, векторный момент которой равен геометрической сумме векторов-моментов этих пар. Если на твердое тело действуют пары сил, то их моменты относительно некоторой оси равны проекциям на данную ось векторов-моментов этих пар.

Для произвольной пространственной системы сил необходимыми и достаточными условиями равновесия является равенство нулю главного вектора и главного момента этой системы сил относительно произвольной точки:

$$\sum \vec{P}_k = 0; \sum \vec{M}_O(\vec{P}_k) = 0. \qquad (4.3)$$

Аналитические условия равновесия для произвольно выбранной системы декартовых координат имеют вид:

$$\begin{gathered} \sum P_{kx} = 0; \ \sum P_{ky} = 0; \ \sum P_{kz} = 0; \\ \sum M_x(\vec{P}_k) = 0; \ \sum M_y(\vec{P}_k) = 0; \sum M_z(\vec{P}_k) = 0. \end{gathered} \qquad (4.4)$$

4.2. Примеры решения типовых задач

Пример 1. Определить из условий равновесия реакции подпятника A, неподвижного цилиндрического шарнира B и величину силы $\vec{Q}$ для невесомого вертикального вала AB (рис. 3.2), к которому жестко прикреплены стержни CD и KE, расположенные в плоскостях, перпендикулярных оси z, причем стержень CD параллелен оси x, а стержень KE – оси y. Конструкция нагружена силами $\vec{P}$ и $\vec{Q}$, причем сила $\vec{P}$, $|\vec{P}| = 2$ кН расположена в плоскости, перпендикулярной оси z, и составляет с осью стержня KE угол $\gamma = 30^0$, а сила $\vec{Q}$ – в плоскости, перпендикулярной оси x, и составляет с горизонталью угол $\beta = 60^0$. Кроме того, к концам стержня LG, жестко прикрепленного к валу и расположенного в плоскости yOz, приложены две равные, противоположно направленные силы $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$, параллельные оси x и образующие пару сил. Вектор-момент этой пары $\vec{M}$, $|\vec{M}| = 0,4$ кН·м расположен в плоскости yOz и составляет с осью z угол $\alpha = 30^0$. Размеры на схеме даны в метрах.

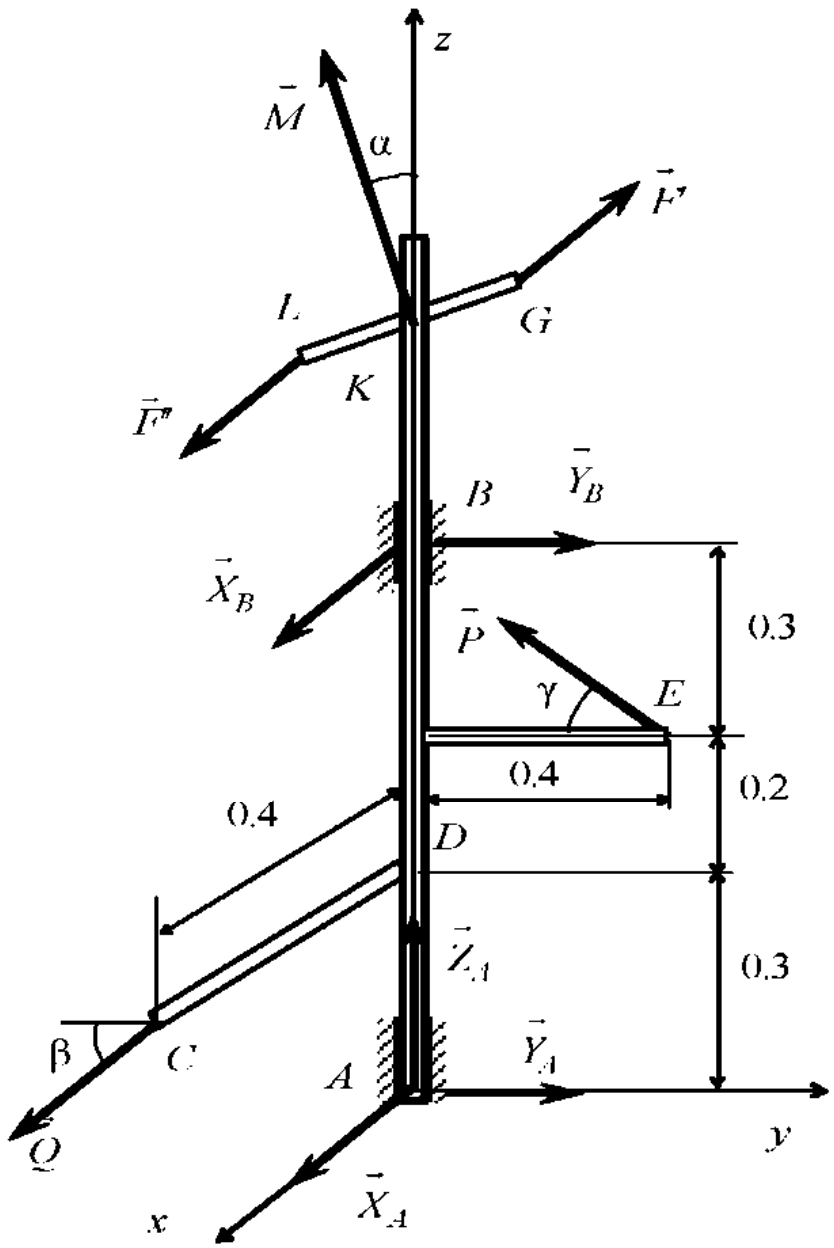


Рисунок 4.2

Решение

1) Объектом равновесия является вся конструкция (вал с прикрепленными к нему стержнями).

2) Активными силами, действующими на объект равновесия, будут силы $\vec{P}$, $\vec{Q}$ и пара сил, вектор-момент которой $\vec{M}$.

3) Отбрасывая связи (подпятник A и неподвижный цилиндрический шарнир B), заменим их действие на объект равновесия реакциями $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$. Реакция подпятника представлена составляющими $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ и $\vec{Z}_A$, а неподвижного цилиндрического шарнира – составляющими $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$, параллельными соответствующим координатным осям.

4) Запишем уравнения равновесия (4.4) полученной пространственной системы сил в принятой системе координат (см. рис. 4.2) с помощью табл. 4.1.

Таблица 4.1

$\vec{P}_k$	$\vec{X}_A$	$\vec{Y}_A$	$\vec{Z}_A$	$\vec{X}_B$	$\vec{Y}_B$
P_{kx}	X_A	0	0	X_B	0
P_{ky}	0	Y_A	0	0	Y_B
P_{kz}	0	0	Z_A	0	0
$M_x(\vec{P}_k)$	0	0	0	0	$-Y_B \cdot AB$
$M_y(\vec{P}_k)$	0	0	0	$-Y_B \cdot AB$	0
$M_z(\vec{P}_k)$	0	0	0	0	0

Продолжение табл. 4.1

$\vec{P}_k$	$\vec{Q}$	$\vec{P}$	$\vec{M}$
P_{kx}	0	$-P\sin\gamma$	–
P_{ky}	$-Q\cos\beta$	$P\cos\gamma$	–
P_{kz}	$-Q\sin\beta$	0	–
$M_x(\vec{P}_k)$	$Q\cos\beta \cdot AB$	$P\cos\gamma \cdot AK$	0
$M_y(\vec{P}_k)$	$-Q\sin\beta \cdot DC$	$P\sin\gamma \cdot AK$	$-M\sin\alpha$
$M_z(\vec{P}_k)$	$-Q\cos\beta \cdot DC$	$P\sin\gamma \cdot KE$	$M\cos\alpha$

Рассмотрим более подробно определение момента силы относительно оси на примере силы $\vec{P}$ (см. рис. 4.2).

С п о с о б 1. Определим проекции силы $-M \cdot \sin\alpha$:

– на плоскость, перпендикулярную оси x, $\left|\vec{P}_{yz}\right| = P\cos\gamma$;

– на плоскость, перпендикулярную оси y, $\left|\vec{P}_{zz}\right| = P\sin\gamma$;

– на плоскость, перпендикулярную оси z, $\left|\vec{P}_{xy}\right| - P$.

При определении моментов силы $\dot{P}$ относительно осей x и y плечом будет одно и то же расстояние AK. Поэтому с учетом знаков получим

$$M_x(\dot{P}) = P \cdot \cos\gamma \cdot AK; \quad M_y(\dot{P}) = -P \cdot \sin\gamma \cdot AK.$$

При определении моментов силы $\dot{P}$ относительно оси z учтем, что сила уже расположена в плоскости, перпендикулярной этой оси. Точка пересечения этой плоскости с осью – это точка K. Для нахождения алгебраического момента силы $\bar{P}$ относительно этой точки воспользуемся теоремой Вариньона

$$M_z(\bar{P}) = M_K(\bar{P}_x) + M_K(\bar{P}_y) = P\sin\gamma \cdot KE + P\cos\gamma \cdot 0 = P\sin\gamma \cdot KE.$$

С п о с о б 2. Запишем проекции силы $\dot{P}$ на оси координат:

$$P_x = -P \cdot \sin\gamma; \quad P_y = -P \cdot \cos\gamma; \quad P_z = 0$$

и координаты точки приложения силы $\vec{P}$ – точки E:

$$x_E = 0; \quad y_E = KE; \quad z_E = AK.$$

Используя аналитические выражения (4.2), получим

$$M_x(\vec{P}) = y_E \cdot P_z - z_E \cdot P_x = P\cos\gamma \cdot AK;$$

$$M_y(\vec{P}) = z_E \cdot P_x - x_E \cdot P_z = -P\sin\gamma \cdot AK;$$

$$M_z(\vec{P}) = x_E \cdot P_y - y_E \cdot P_x = P\sin\gamma \cdot KE.$$

Суммируя элементы соответствующих строк таблицы и приравнивая эти суммы нулю, получим систему уравнений равновесия:

$$X_A + X_B - P\sin\gamma = 0;$$

$$Y_A + Y_B - Q\cos\beta - P\cos\alpha = 0;$$

$$Z_A - Q\sin\beta = 0;$$

$$-Y_B \cdot AB + Q\cos\beta \cdot AB + P\cos\gamma \cdot AK = 0;$$

$$X_B \cdot AB + Q\sin\beta \cdot DC - P\sin\gamma \cdot AK - M\sin\alpha = 0;$$

$$-Q\cos\beta \cdot DC + P\sin\gamma \cdot KE + M\cos\alpha = 0.$$

5) Решим полученную систему, начиная с уравнений, содержащих не более одной неизвестной силы. Так, из последнего уравнения определим

$$Q = \frac{P\sin\gamma \cdot KE + M\cos\alpha}{\cos\beta \cdot DC} = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,866}{0,5 \cdot 0,4} = 3,732 \text{ кН}.$$

Затем с учетом найденного значения Q решим 5-е уравнение и определим

$$X_B = \frac{-Q\sin\beta \cdot DC + P\sin\gamma \cdot AK + M\sin\alpha}{AB} =$$
$$= \frac{-3,732 \cdot 0,866 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,5}{0,8} = -0,741 \text{ кН},$$

Далее из уравнений находим:

из 1-го

$$X_A = -X_B + P\sin\gamma = 0,741 + 2 \cdot 0,5 = 1,741 \text{ кН};$$

из 3-го

$$Z_A = Q\sin\beta = 3,732 \cdot 0,866 = 3,232 \text{ кН};$$

из 4-го

$$Y_B = \frac{Q\cos\beta \cdot AB + P\cos\gamma \cdot AK}{AB} = \frac{3,732 \cdot 0,5 \cdot 0,8 + 2 \cdot 0,866 \cdot 0,5}{0,8} = 2,949 \text{ кН}$$

и, наконец, из 2-го

$$Y_A = -Y_B + Q\cos\beta + P\cos\gamma = -2,949 + 3,732 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,866 = 0,649 \text{ кН}.$$

Пример 2. Определить реакции жесткой пространственной заделки A для невесомой рамы ABC (рис. 4.3.), расположенной в горизонтальной плоскости xOy и нагруженной силой $\vec{P}$, $|\vec{P}| = 4$ кН, силами $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$, образующими пару сил, вектор-момент которой $\vec{M}$, $|\vec{M}| = 0.2$ кН·м. Кроме того, с помощью троса, переброшенного через неподвижный блок D и прикрепленного к концу C рамы, удерживается в равновесии груз весом $Q = 2$ кН. Сила $\vec{P}$ расположена в плоскости, перпендикулярной оси y, и составляет с прямой BC угол $\alpha = 30^0$. Стержень KE, к концам которого приложены силы пары, параллельные оси x, жестко прикреплен к раме и расположен в плоскости yOz под углом $\beta = 60^0$ к оси y. Прямая CD параллельна оси x. Размеры на схеме даны в метрах.

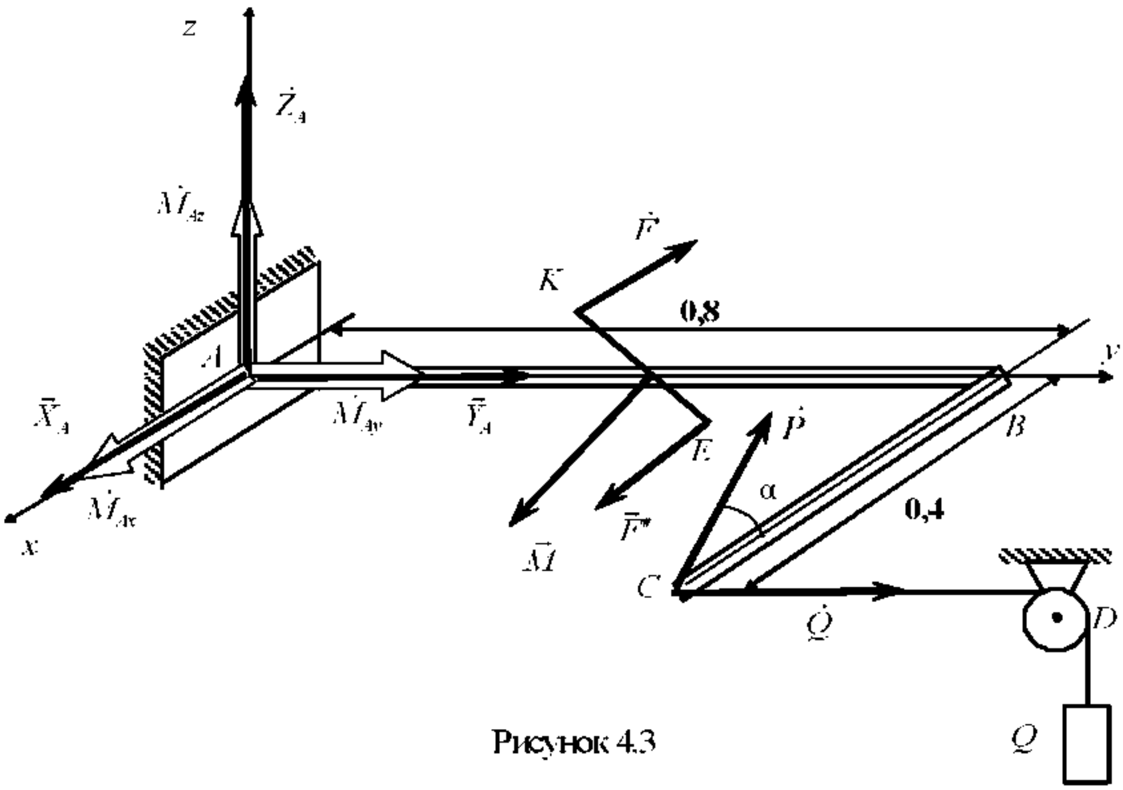


Рисунок 4.3

Решение

1) Объектом равновесия является рама ABC.

2) Активными силами, действующими на объект равновесия, будут силы $\vec{P}$, $\vec{Q}$ (сила натяжения троса, удерживающая груз Q) и пара сил, вектор-момент которой $\vec{M}$.

3) Отбрасывая связь – жесткую пространственную заделку A, заменим ее действие на объект равновесия реакцией $\vec{R}_A$, представленной составляющими $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ и $\vec{Z}_A$, и вектором-моментом $\vec{M}_A$, представленным составляющими $\vec{M}_{Ax}$, $\vec{M}_{Ay}$ и $\vec{M}_{Az}$.

4) Запишем уравнения равновесия (4.4) полученной пространственной системы сил в принятой системе координат (см. рис. 4.3), составив табл. 4.2.

Таблица 4.2

$\vec{P}_k$	$\bar{X}_A$	$\bar{Y}_A$	$\bar{Z}_A$	$\vec{M}_A$
P_{kx}	X_A	0	0	–
P_{ky}	0	Y_A	0	–
P_{kz}	0	0	Z_A	–
$M_x(\vec{P}_k)$	0	0	0	M_{Ax}
$M_y(\vec{P}_k)$	0	0	0	M_{Ay}
$M_z(\vec{P}_k)$	0	0	0	M_{Az}

Продолжение табл. 4.2

$\vec{P}_k$	$\vec{Q}$	$\vec{P}$	$\vec{M}$
P_{kx}	0	$-P\cos\alpha$	–
P_{ky}	Q	$-P\cos\gamma$	–
P_{kz}	0	$P\sin\alpha$	–
$M_x(\vec{P}_k)$	0	$P\sin\alpha\cdot AB$	0
$M_y(\vec{P}_k)$	0	$-P\sin\alpha\cdot BC$	$-M\sin\beta$
$M_z(\vec{P}_k)$	$Q\cdot BC$	$P\cos\alpha\cdot AB$	$-M\cos\beta$

Суммируя элементы соответствующих строк таблицы и приравнивая эти суммы нулю, получим систему уравнений равновесия:

$$X_A - P\cos\alpha = 0;$$

$$Y_A + Q = 0;$$

$$Z_A + P\sin\alpha = 0;$$

$$M_{Ax} + P\sin\alpha \cdot AB = 0;$$

$$M_{Ay} - P\sin\alpha \cdot BC - M\sin\beta = 0;$$

$$M_{Az} + Q\cdot BC + P\cos\alpha \cdot AB - M\cos\beta = 0.$$

5) Решим полученную систему:

$$X_A = P\cos\alpha = 4\cdot 0{,}866 = 3{,}464 \text{ кН};$$

$$Y_A = -Q = -2 \text{ кН};$$

$$Z_A = -P\sin\alpha = -4\cdot 0{,}5 = -2 \text{ кН};$$

$$M_{Ax} = -P\sin\alpha\cdot AB = -4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}8 = -1{,}6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{Ay} = P\sin\alpha\cdot BC + M\sin\beta = 4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}4 + 0{,}2\cdot 0{,}866 = 0{,}973 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{Az} = -Q\cdot BC - P\cos\alpha\cdot AB + M\cos\beta =$$
$$= -2\cdot 0{,}4 - 4\cdot 0{.}866\cdot 0{.}8 + 0{,}2\cdot 0{.}5 = -3{,}471 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Пример 3. Определить силы натяжения тросов, удерживающих в горизонтальном положении однородную пластину ABC, имеющую форму равностороннего треугольника, на которой находится точечный груз (рис. 4.4.). Длина стороны пластины a = 100 см, ее вес G = 0,2 кН. Вес точечного груза P = 5 кН. Координаты точки O_2, в которой расположен груз: x_{O2} = 15 см, y_{O2} = 25 см.

Решение

1) Объектом равновесия является пластина ABC.

2) Активными силами, действующими на объект равновесия, будут $\vec{P}$ и $\vec{Q}$.

3) Отбрасывая связи, т.е. рассекая тросы, на которых подвешена

пластина, заменим их действие на объект равновесия силами натяжения $\vec{T}_A$, $\vec{T}_B$ и $\vec{T}_C$.

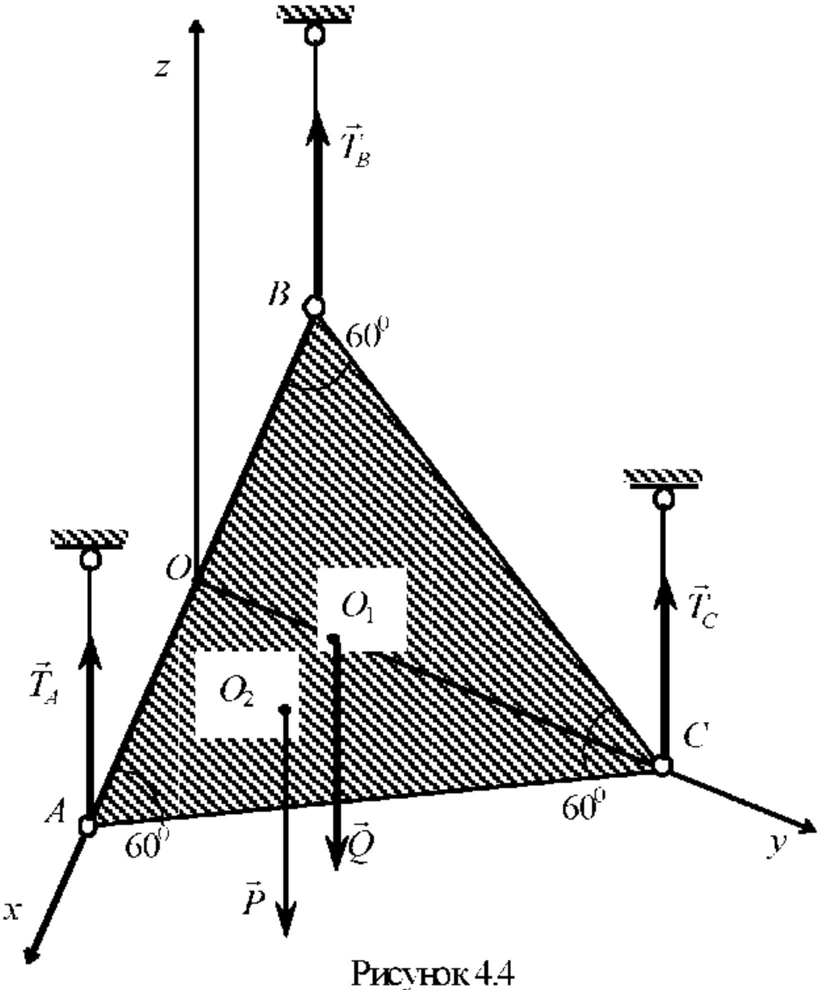


Рисунок 4.4

4) Запишем уравнения равновесия (4.4) полученной пространственной системы сил в принятой системе координат (см. рис. 4.4). Предварительно определим координаты точки O_1 – точки приложения равнодействующей силы тяжести пластинки $\vec{P}$. Центр тяжести однородной треугольной пластины расположен в точке пересечения медиан треугольника. Поэтому для выбранной системы координат запишем координаты точки O_1:

$$x_{O1} = z_{O1} = 0; \quad y_{O1} = \frac{1}{3} a \cdot \sin 60^0 = 28{,}87 \text{ см}.$$

Следует учесть, что силы, действующие на объект равновесия, представляют собой систему параллельных сил в пространстве. Поэтому два первых и последнее уравнения удовлетворяются тождественно: проекции сил на оси x и y равны нулю, так как каждая из сил перпендикулярна этим осям и момент их относительно оси z равен нулю, поскольку линии действия сил параллельны оси z. Таким образом, для определения трех неизвестных реакций можно записать следующие уравнения равновесия:

$$\sum P_{kz} = 0; \quad T_A + T_B + T_C - G - Q = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{P}_k) = 0; \quad T_C \cdot a \sin 60^0 - G \cdot y_{O_1} - P \cdot y_{O_2} = 0;$$

$$\sum M_y(\vec{P}_k) = 0; \quad T_B \cdot \frac{a}{2} - T_A \cdot \frac{a}{2} + P \cdot x_{O_2} = 0;$$

5) Решим полученную систему. Вначале из 2-го уравнения определим

$$T_C = \frac{G \cdot y_{O_1} + P \cdot y_{O_2}}{a \sin 60^0} = \frac{0,2 \cdot 28,87 + 5 \cdot 25}{100 \cdot 0,866} = 1,51 \text{ кН},$$

а затем, используя 3-е уравнение, выразим T_B через T_A:

$$T_B = T_A - \frac{2P \cdot x_{O_2}}{a} = T_A - \frac{2 \cdot 5 \cdot 15}{100} = T_A - 1,5.$$

Подставляя полученные результаты в 1-е уравнение, получим

$$2T_A - 1,5 + T_C - G - Q = 0,$$

откуда

$$T_A = \frac{1,5 - 1,51 + 0,2 + 5}{2} = 2.595 \text{ кН};$$

$$T_B = T_A - 1,5 = 2,595 - 1,5 = 1,095 \text{ кН}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какую совокупность сил называют произвольной пространственной системой сил?
2. Чем характеризуется вращательное действие силы на тело, имеющее неподвижную ось?
3. Что называют моментом силы относительно оси?
4. Как определяют величину момента силы относительно оси?
5. Как определяют знак момента силы относительно оси?
6. В каких случаях момент силы относительно оси равен нулю?
7. Какие способы используют для определения момента силы относительно оси?
8. Чем в общем случае полностью определяется действие пары сил на твердое тело?
9. Чему равен модуль вектора-момента пары сил и как он направлен?
10. Какими свойствами обладает вектор-момент пары сил?
11. Как определить момент пары сил относительно оси?
12. Как записывают условия равновесия произвольной пространственной системы сил в векторной форме?
13. Как записывают условия равновесия произвольной пространственной системы сил в аналитической форме?
14. Каким условиям должна удовлетворять система уравнений равновесия для получения единственного решения?

5. ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ

Контрольные работы по статике включают три задания на определение реакций связей из условия равновесия твердого тела, находящегося под действием пространственной системы сходящихся сил, произвольной плоской системы сил и произвольной пространственной системы сил. Для каждого задания в соответствующих таблицах приведено по 10 расчетных схем и по 10 вариантов исходных данных. Номера расчетной схемы и варианта задания студенту сообщает преподаватель при выдаче заданий. Выполненное задание должно содержать расчетную схему и исходную информацию. На расчетных схемах необходимо показать определяемые реакции связей. Решение задачи излагается последовательно с краткими комментариями к ходу решения. В конце необходимо привести численные значения и размерности реакций связей, а также сделать выводы об их действительных направлениях.

Задание № 1

Равновесие пространственной системы сходящихся сил

Расчетные схемы к заданию приведены в табл. 5.1, а варианты – в табл. 5.2. Рассчитываемые конструкции включают три идеальных стержня, произвольно расположенных в пространстве и соединенных с помощью сферического шарнира в одном общем узле. Нагрузка представлена в общем случае в виде трех сил и груза, прикрепленного к общему узлу конструкции с помощью троса, переброшенного через неподвижный блок. Силы, которым в табл. 5.2 соответствуют прочерки, на схеме не указывать и в расчетах не использовать.

Указания:

1) Силы, ориентация которых не следует из схемы, считать направленными вдоль соответствующих координатных осей;

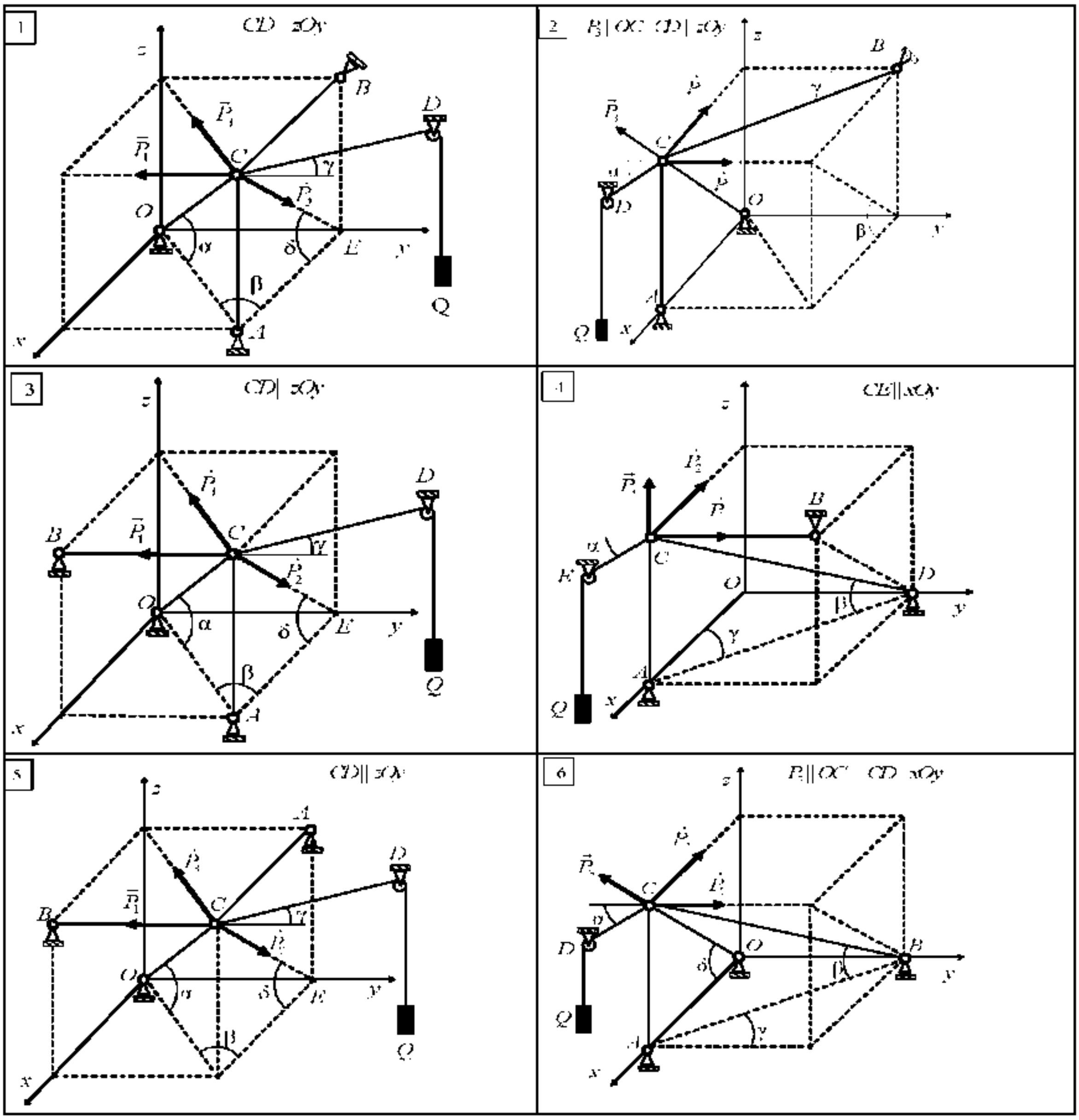
2) Дополнительные углы, значения которых в табл. 5.2 не заданы, могут быть определены из условий задачи. Например, (см. расчетную схему № 1):

$$AC = OC \cdot \sin\alpha; \quad AE = OC \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta; \quad tg\delta = \frac{AC}{AE} = \frac{tg\alpha}{\cos\beta};$$

3) Для нахождения проекций на координатные оси реакций стержней, расположенных в наклонных плоскостях (см. схемы №№ 7-

10), вначале их следует разложить на взаимно-перпендикулярные составляющие в этих плоскостях, а затем спроецировать полученные составляющие на координатные оси.

Таблица 5.1



Продолжение табл. 5.1.

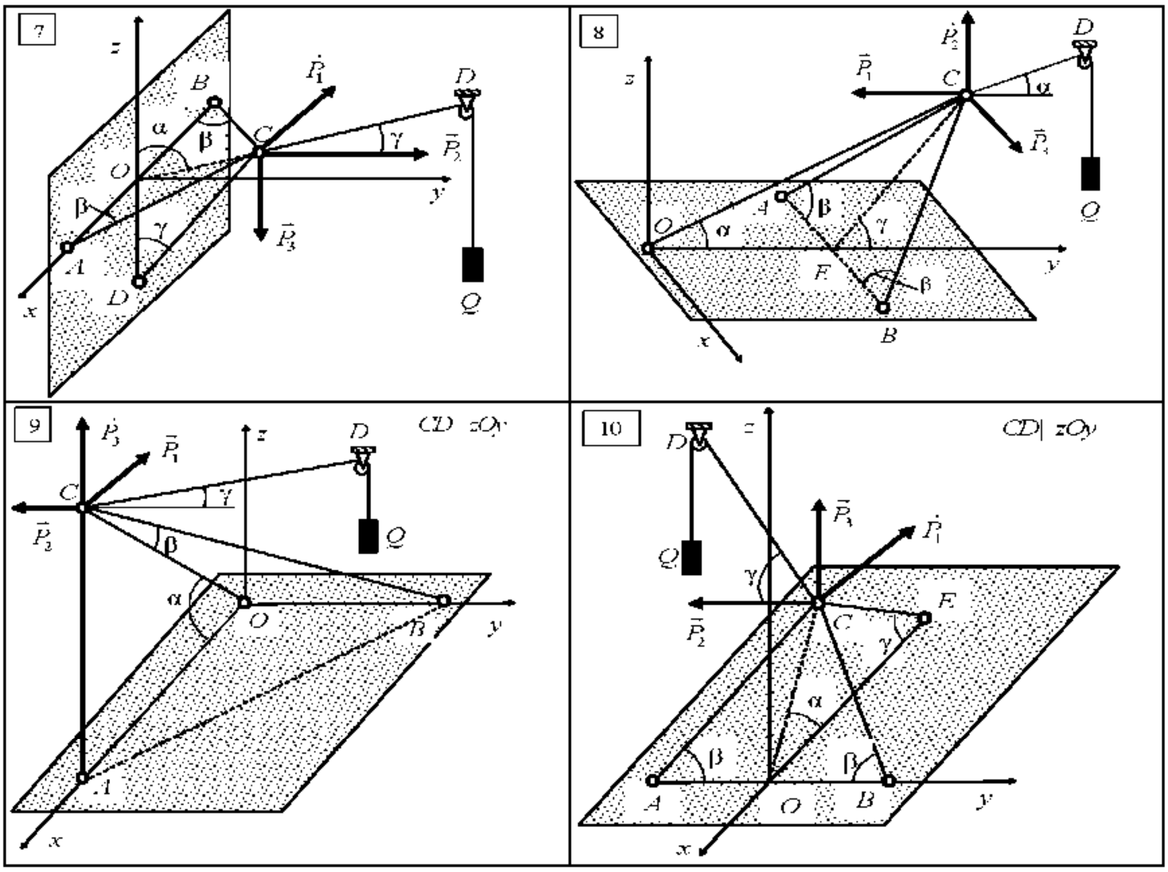


Таблица 5.2

Номер варианта	P_1	P_2	P_3	Q	α	β	γ
	кН				град		
1	5	–	15	10	45	60	30
2	10	15	–	5	30	45	60
3	–	5	10	15	60	30	45
4	5	–	10	10	45	60	30
5	5	–	15	5	30	45	60
6	–	15	5	15	60	30	45
7	5	–	10	10	45	60	30
8	15	10	–	5	30	45	60
9	–	5	10	15	60	30	45
10	5	–	15	10	45	60	30

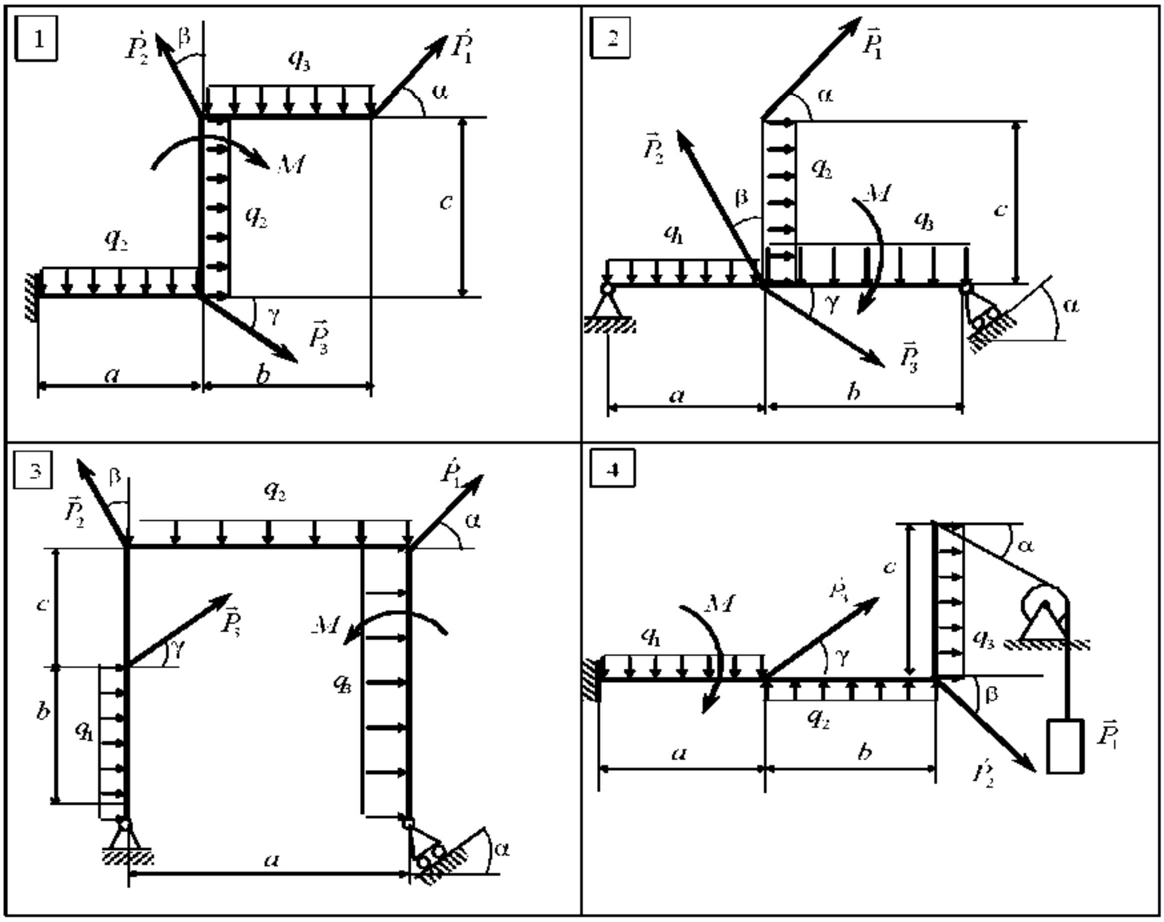
Задание № 2

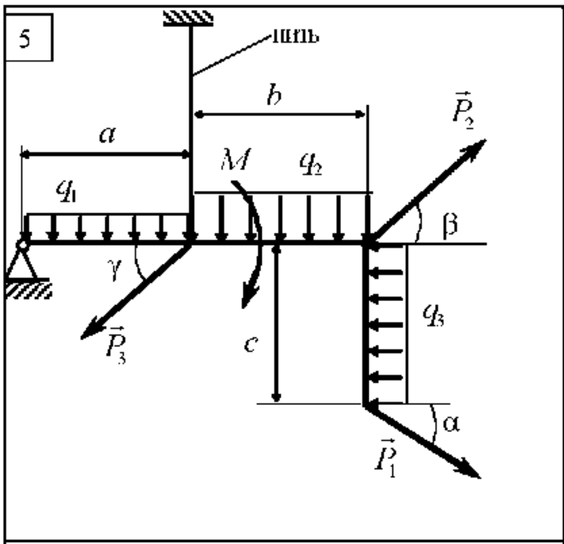
Равновесие произвольной плоской системы сил

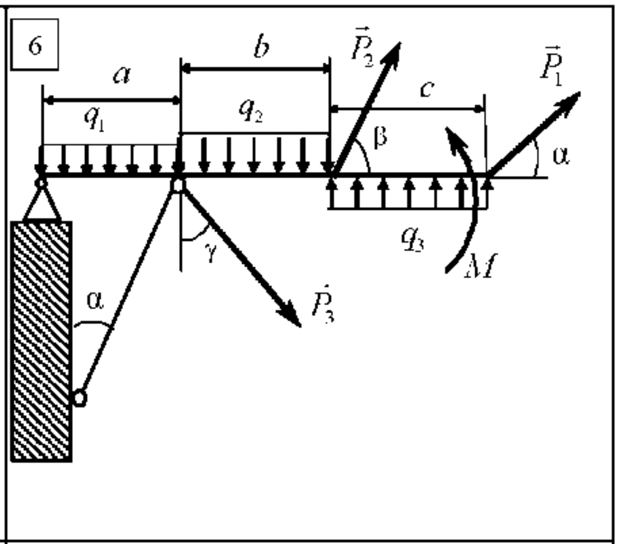
Расчетные схемы к заданию приведены в табл. 5.3, нагрузки – в табл. 5.4, а геометрические параметры – в табл. 5.5.

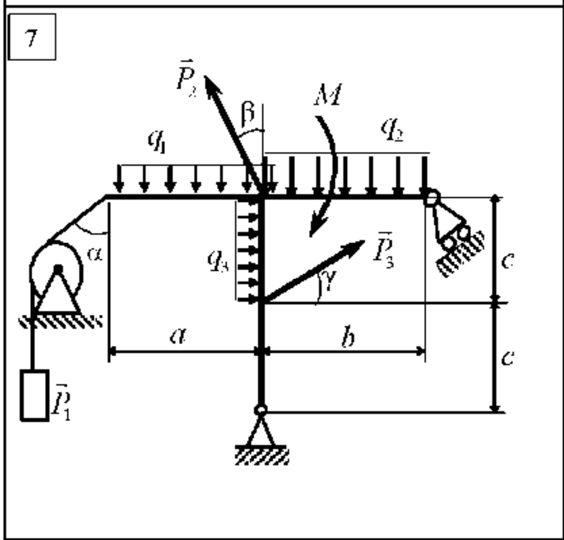
Рассчитываемые конструкции представляют собой плоские рамы, ломаные или прямые стержни, нагруженные в своих плоскостях. Связи, наложенные на конструкцию, представлены плоскими заделками, неподвижными и подвижными плоскими цилиндрическими шарнирами, идеальными стержнями и тросом. Нагрузка представлена в общем случае в виде трех сил, трех равномерно распределенных нагрузок, пары сил и груза, который прикреплен к узлу конструкции с помощью троса, переброшенного через неподвижный блок. Силы и распределенные нагрузки, которым в табл. 5.4 соответствуют прочерки, на расчетной схеме не указывать и в расчетах не использовать.

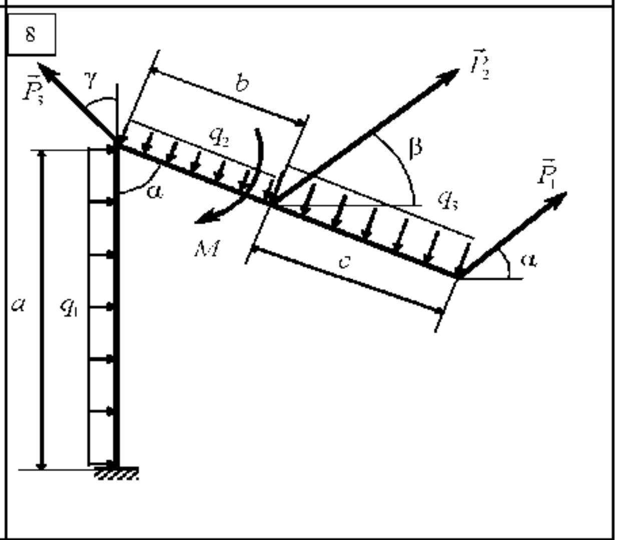
Таблица 5.3

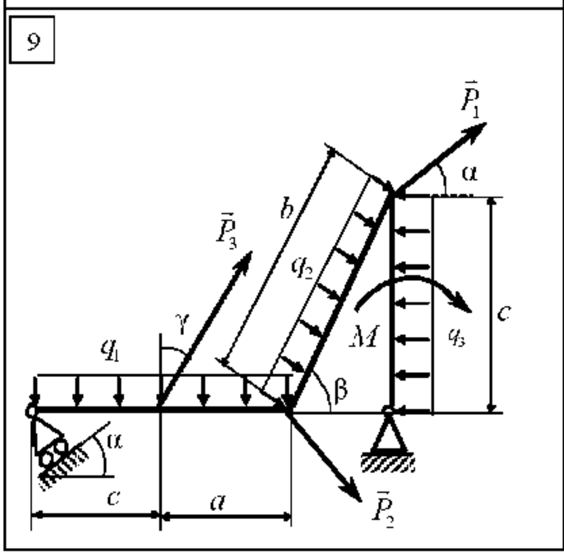



5
нить
a
b
M
q1
q2
P2
β
γ
P3
c
q3
α
P1


6
a
b
P2
c
P1
q1
q2
β
α
γ
q3
M
P3
α


7
P2
β
M
q1
q2
α
q3
P3
γ
c
a
b
c
P1


8
P3
γ
b
P2
q2
β
α
q3
P1
M
c
α
a
q1


9
P1
α
b
P3
q2
c
γ
M
q3
q1
β
α
c
a
P2

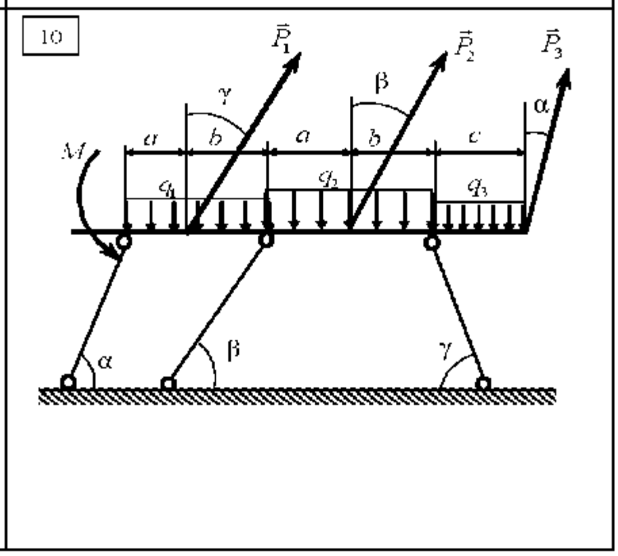

10
P1
P2
P3
γ
β
α
M
a
b
a
b
c
q1
q2
q3
α
β
γ

Таблица 5.4

Номер варианта	P_1	P_2	P_3	M	q_1	q_2	q_3
	кН			кН·м	кН/м		
1	10	–	–	8	–	–	2
2	–	5	–	4	–	4	–
3	–	–	8	7	3	–	–
4	7	–	–	–	4	2	–
5	–	9	–	5	–	–	6
6	–	–	12	6	–	3	–
7	6	–	–	8	5	–	–
8	–	11	–	5	–	–	3
9	–	–	4	3	–	2	–
10	6	–	8	–	4	–	–

Таблица 5.5

Номер варианта	a	b	c	α	β	γ
	м			град		
1	1.0	1,5	2,0	30	45	60
2	2,0	1,0	1,5	45	30	45
3	1,5	2,0	1,0	60	60	30
4	1.0	1,5	2,0	30	45	60
5	2,0	1,0	1,5	45	30	45
6	1,5	2,0	1,0	60	60	30
7	1.0	1,5	2,0	30	45	60
8	2,0	1,0	1,5	45	30	45
9	1,5	2,0	1,0	60	60	30
10	1.0	1,5	2,0	30	45	60

Задание № 3

Равновесие произвольной пространственной системы сил

Расчетные схемы к заданию приведены в табл. 5.6, варианты нагрузок – в табл. 5.7, а геометрические параметры – в табл. 5.8.

Рассчитываемые конструкции произвольно расположены в пространстве. Связи, наложенные на конструкцию, представлены пространственными заделками, неподвижными плоскими цилиндрическими шарнирами, подпятниками, сферическими шарнирами и идеальными стержнями. Нагрузка представлена в общем случае в виде трех сил, пары сил с вектором-моментом $\bar{M}$, произвольно расположенным в пространстве, и груза, который прикреплен к узлу конструкции с помощью троса, переброшенного через неподвижный блок. Силы, которым в табл. 5.7 соответствуют прочерки, или силы, не указанные на схеме, а также геометрические параметры, не показанные на схеме, в расчетах не использовать.

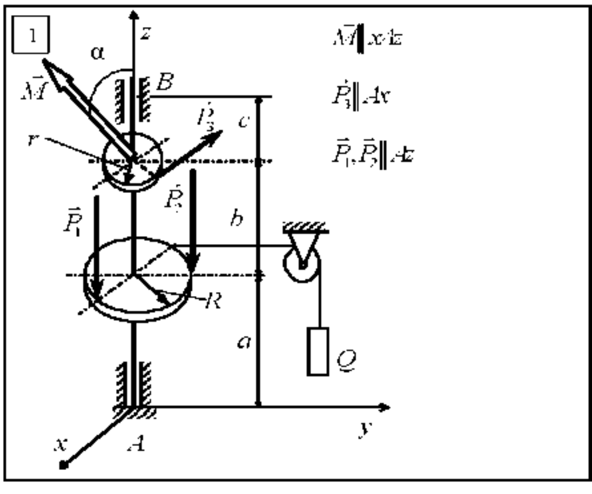
Указания:

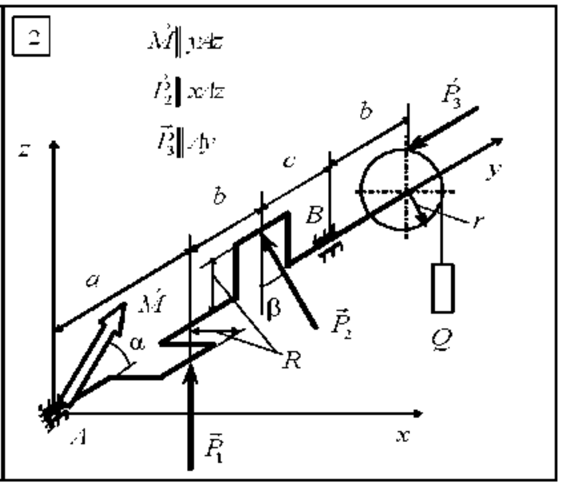
1) Силы, ориентация которых не следует из расчетной схемы, считать направленными вдоль соответствующих координатных осей;

2) Вес груза Q на схемах №№ 1, 2, 8, 9, 10 нужно определить из условий равновесия;

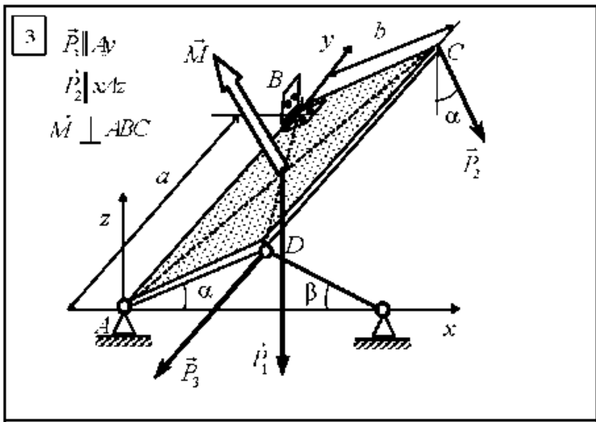
3) Дополнительные сведения об ориентации отдельных векторов приведены в табл. 5.6.

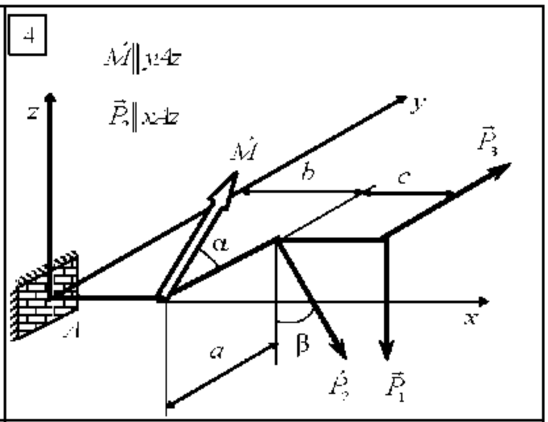
Таблица 5.6

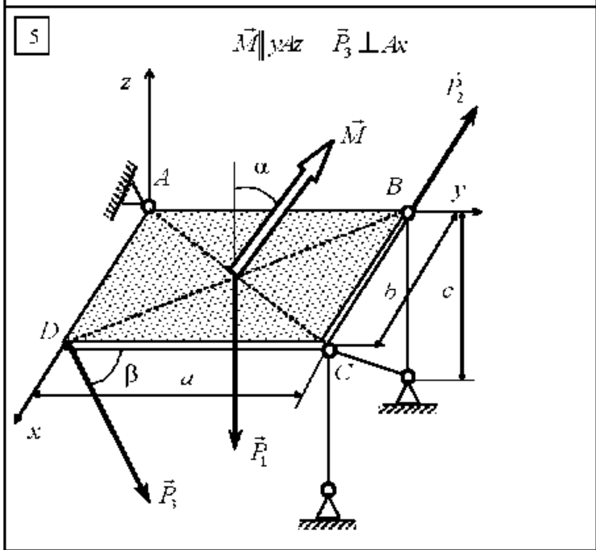


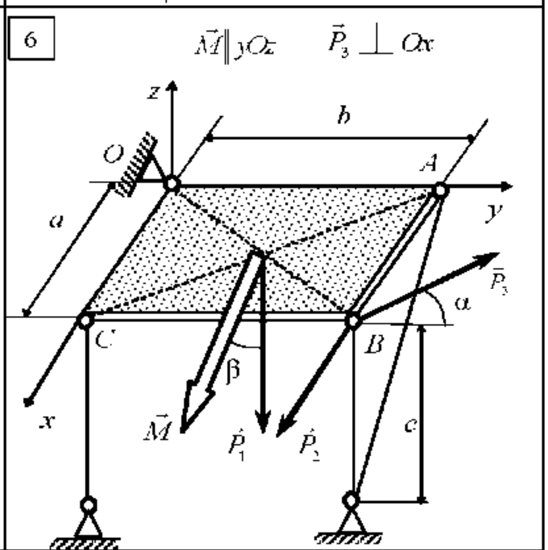


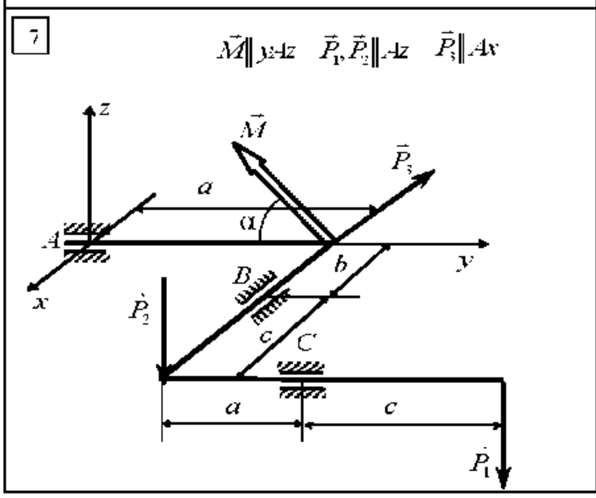
Продолжение табл. 5.6

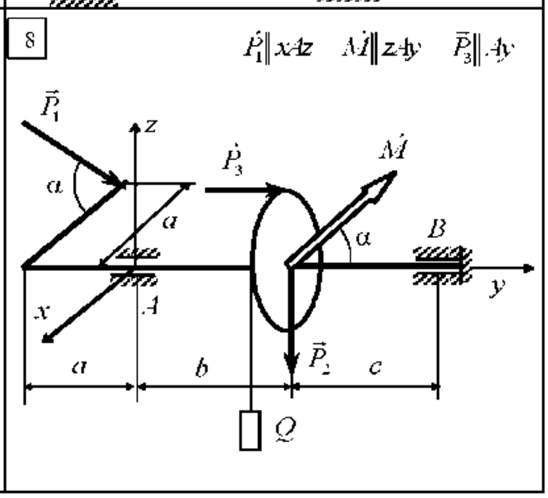




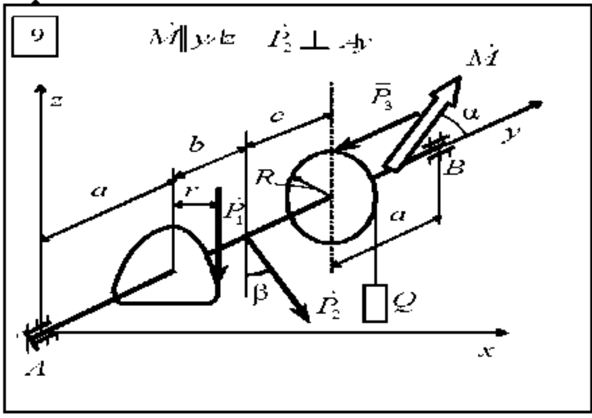








Продолжение табл. 5.6



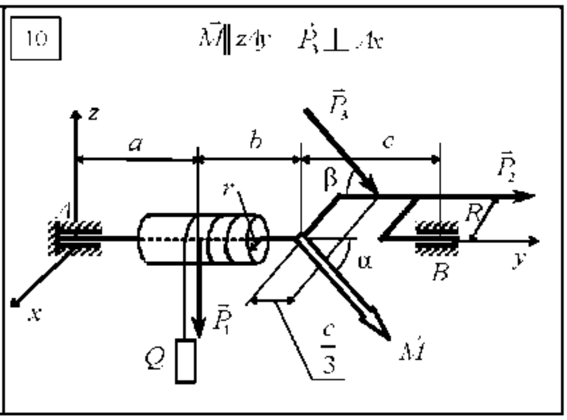


Таблица 5.7

Номер варианта	P_1	P_2	P_3	M
	кН			кН·м
1	10	–	4	8
2	8	5	–	4
3	–	4	8	7
4	7	–	6	5
5	3	9	–	8
6	–	4	12	4
7	6	–	5	7
8	5	11	–	5
9	–	8	4	8
10	6	–	8	4

Таблица 5.8

Номер варианта	R	r	a	b	c	α	β
	м					град	
1	0,4	0.2	1,0	1.5	2,0	30	45
2	0,5	0,25	2,0	1,0	1.5	45	30
3	0,6	0,3	1,5	2,0	1,0	60	60
4	0.5	0.3	1.0	1.5	2.0	30	45
5	0,7	0,35	2,0	1,0	1.5	45	30
6	0,4	0,3	1,5	2,0	1,0	60	60
7	0.8	0.5	1,0	1,5	2,0	30	45
8	0,2	0.1	2,0	1,0	1.5	45	30
9	0,3	0,15	1,5	2,0	1,0	60	60
10	0.8	0,4	1,0	1,5	2,0	30	45

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики.– М.: Высшая школа, 1974.– 400 с.

2. Бутенин И.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Краткий курс теоретической механики. Т.1 : Статика и кинематика.– М.: Наука, 1985.– 240 с.

3. Яблонский А.А. Курс теоретической механики Ч.1 : Статика. Кинематика.– М.: Высшая школа, 1984.– 343 с.

4. Павловський М.А. Теоретична механіка.– Київ : Техніка, 2002.– 670 с.

5. Беломытцев А.С. Краткий курс теоретической механики. Статика и кинематика / Тексты лекций для студентов заочной формы обучения всех специальностей.– Харьков : НТУ «ХПИ», 2004.– 76 с.

6. Адашевский В.М., Анищенко Г.О., Тарсис Ю.Л. Общий курс теоретической механики / Учебное пособие для студентов заочной формы обучения.– Харьков : НТУ «ХПИ», 2005.– 108 с.

7. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1 : Статика и кинематика.– М.: Наука, 1990.– 670 с.

СОДЕРЖАНИЕ