

**ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**  
**ЧАСТЬ 1. СТАТИКА**

Теоретические основы с примерами типовых расчетов

# ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика — это наука о наиболее общих законах движения и равновесия материальных тел.

Движение, понимаемое в самом широком смысле этого слова, охватывает собой все происходящие в мире явления — перемещения тел в пространстве, тепловые и химические процессы, сознание и мышление.

Теоретическая механика изучает простейшую форму движения — механическое движение. «Кто не знаком с законами движения, тот не может познать природы» (Галилео Галилей).

Так как состояние равновесия есть частный случай механического движения, то в задачу теоретической механики входит также изучение равновесия материальных тел.

Основная цель механики — открытие, изучение и практическое применение общих законов движения и равновесия материальных тел.

Механика — одна из древнейших наук. Она возникла и развивалась под влиянием запросов общественной практики, а также благодаря любознательности человеческого разума. Рождение механики произошло одновременно с изобретением, изготовлением и применением человеком первых древнейших орудий труда — рычага, наклонной плоскости, блока, клина, винта, веревки. Эти простейшие орудия сыграли роль научных методов, послуживших средством доказательства важнейших теорем и принципов механики. Архимедом (287–212 гг. до новой эры) было обнаружено, что законы равновесия различных машин можно свести к равновесию рычага. Голландский ученый Стевин (1548–1620 гг.) с помощью наклонной плоскости открыл закон параллелограмма сил. Лагранж (1736–1833 гг.) использует систему блоков для доказательства основного принципа статики — принципа возможных перемещений. Равновесие веревки и веревочного многоугольника под действием сил послужило основой для создания графостатики, с помощью которой были выполнены

ны многие расчеты стержневых систем. Таким образом, эти простейшие орудия, предназначенные для поднятия тяжестей, оказались средствами абстрактного научного мышления.

Теоретическая механика относится к числу физико-математических дисциплин. Законы механики носят физический характер.

Рабочими инструментами механики служат различные математические методы. Многие математики внесли существенный вклад в развитие механики.

Теоретическая механика является научной основой целого ряда инженерных дисциплин — сопротивления материалов, теории механизмов и машин, статики и динамики сооружений, строительной механики, деталей машин и других.

Теоретическая механика служит научной базой целого ряда важнейших направлений современной техники, включая железнодорожный транспорт. На законах механики основаны расчеты самых разнообразных сооружений и машин (здания, мосты, тоннели, насыпи; локомотивы, железнодорожные вагоны, краны и т.д.).

Критерием достоверности результатов, к которым приходит любая наука, является практика. В этом отношении механика не представляет исключения. Производство, современная техника, астрономические наблюдения дают возможность убедиться в правильности ее выводов.

Современная техника все чаще и чаще выдвигает перед наукой весьма сложные проблемы, разрешение которых возможно только на основании точного эксперимента и глубоких теоретических исследований.

Знание теоретической механики как научной базы современной техники совершенно необходимо каждому инженеру, в том числе инженеру железнодорожного транспорта.

Теоретическая механика направляет творческую интуицию ученых и инженеров, давая им в краткой и ясной форме итог колоссального опыта человечества.

Развитие современной науки и техники указывает на все возрастающее значение теоретической механики.

Цель преподавания теоретической механики заключается в повышении уровня механико-математической подготовки студентов.

Задача изучения этой дисциплины — показать эффективность методов теоретической механики при решении сложных задач, поставленных наукой и техникой; овладеть понятиями, законами и принципами теоретической механики, навыками их применения в инженерной практике.

Таким образом, при изучении курса студент должен овладеть терминологией, определениями, основными понятиями, теоремами и принципами теоретической механики, навыками их практического применения к решению конкретных задач и к анализу конкретных механических процессов на железнодорожном транспорте, в строительстве, машинах и механизмах и т.д.

Изучение курса теоретической механики требует от студента не только работы над учебником и конспектом для изучения теории, но и систематического решения задач и выполнения контрольных задач.

Теоретическую механику, как и математику, невозможно изучить без решения определенного числа задач.

Методами решения задач являются теоремы и принципы механики.

Теоретическая механика состоит из трех разделов — статики, кинематики и динамики.

**Статика** есть учение о силах. Статика рассматривает общие свойства сил и законы их сложения, а также условия равновесия различных систем сил.

**Кинематика** есть учение о движении материальных тел с геометрической стороны независимо от физических причин, вызывающих их движение.

**Динамика** есть учение о движении материальных тел под действием приложенных сил.

По своему построению теоретическая механика напоминает геометрию — в ее основе лежат определения, аксиомы и теоремы.

## 1. АКСИОМЫ СТАТИКИ. СВЯЗИ И РЕАКЦИИ СВЯЗЕЙ

### 1.1. Основные понятия и определения

Чтобы изучить те или иные стороны какого-либо явления природы, в науке используют абстракции, сосредотачивая внимание на самых существенных сторонах явления, отбрасывая второстепенные стороны.

Все понятия механики возникли в результате многовековых опытов и наблюдений над явлениями природы с последующим абстрагированием и обобщением.

К числу абстракций относятся понятия материальной точки, абсолютно твердого тела, силы и т.д.

**Материальной точкой** называется тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

**Абсолютно твердым телом** называется такое тело, в котором расстояние между любыми его точками остается постоянным.

Другими словами, абсолютно твердое тело сохраняет неизменной свою геометрическую форму (не деформируется).

Твердое тело называется **свободным**, если его можно переместить из данного положения в любое другое положение.

Твердое тело называется **несвободным**, если его перемещению препятствуют другие тела.

**Силой** называется действие одного тела на другое, выражающееся в виде давления, притяжения или отталкивания.

Сила — это мера механического взаимодействия тел, определяющая интенсивность и направление этого взаимодействия.

Примером силы служит сила тяжести. Эта сила, с которой тело притягивается Землей, в результате чего несвободное тело оказывает на свою опору давление (статическое действие силы), а, будучи свободным, падает на Землю

с ускорением  $g = 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$  (динамическое действие силы).

Сила — векторная величина. Она характеризуется точкой приложения, линией действия, направлением вдоль линии действия и своей величиной или численным значением (модулем).

Для силы  $\bar{F}$  имеем (рис. 1):  $A$  — точка приложения;  $ab$  — линия действия; направление силы вдоль этой линии от  $A$  к  $B$  (указывается стрелкой);  $F = AB$  — величина (модуль) силы.

Силы будем изображать буквами  $\bar{F}, \bar{P}, \bar{Q}, \bar{S}$  и т.д. с черточками наверху. Величины этих сил изображаются теми же буквами, но без черточек наверху —  $F, P, Q, S$  и т.д.

Совокупность сил, приложенных к телу, называется **системой сил**.

Две системы сил называются **эквивалентными**, если они оказывают на все точки тела одно и то же действие.

Если под действием системы сил твердое тело остается в покое или совершает инерциальное движение (все точки тела движутся прямолинейно с постоянной и одинаковой для всех точек скоростью), то такое состояние тела называется **состоянием равновесия**, а приложенная система сил называется **уравновешенной**.

Если к данному телу приложена уравновешенная система сил, то говорят также, что эти силы находятся в **равновесии**.

Уравновешенная система сил называется еще статически **эквивалентной нулю**.

Сила, эквивалентная данной системе сил, называется **равнодействующей силой**.

Силы, действующие на тело со стороны других тел, называются **внешними силами**.

Силы взаимодействия между частицами тела называются **внутренними силами**.

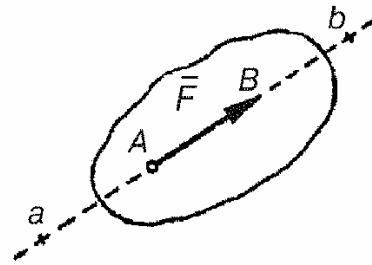


Рис. 1

Сила, приложенная к телу в какой-нибудь одной точке, называется **сосредоточенной силой**.

Силы, действующие на все точки данного объема, поверхности или линии, называются **распределенными силами**.

## 1.2. Аксиомы статики

В основе статики лежат несколько аксиом или положений, подтвержденных опытом и поэтому принимаемых без доказательства. Все остальные положения и теоремы статики выводятся и доказываются на основании аксиом.

### Аксиома 1

#### (о равновесии двух сил, приложенных к твердому телу)

Для равновесия двух сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы эти силы были противоположны и имели общую линию действия (рис. 2)

$$\bar{F}_A = -\bar{F}_{A'}; F_A = F_{A'}; (\bar{F}_A, \bar{F}_{A'}) \sim 0.$$

Действие простейшей уравновешенной системы сил  $(\bar{F}_{A'}, \bar{F}'_{A'})$  на покоящееся твердое тело не изменяет покоя этого тела.

#### Аксиома 2 (о присоединении или отбрасывании уравновешенной системы сил)

Не изменяя действия данной системы сил, можно прибавить к этой системе или отнять от нее любую уравновешенную систему сил.

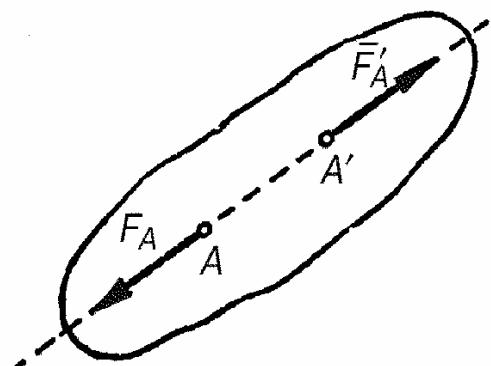


Рис. 2

### Аксиома 3

#### (закон параллелограмма)

Равнодействующая двух сил, приложенных к одной точке тела под углом друг к другу, выражается по величине и по направлению диагональю параллелограмма, построенного на заданных силах (рис. 3).

Величина равнодействующей силы и ее направление определяются соответственно по теореме косинусов и по теореме синусов

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos(\bar{F}_1, \wedge \bar{F}_2)};$$

$$\frac{F_1}{\sin(\bar{R}, \bar{F}_2)} = \frac{F_2}{\sin(\bar{R}, \bar{F}_1)} = \frac{R}{\sin(\bar{F}_1, \wedge \bar{F}_2)}.$$

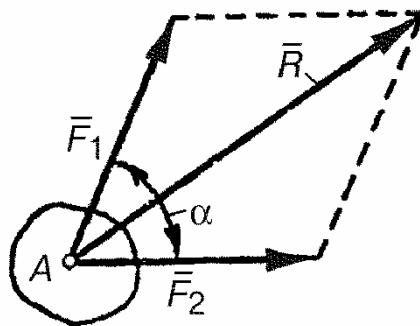


Рис. 3

#### **Аксиома 4 (о равенстве сил действия и противодействия)**

Силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равнопротивоположны и имеют общую линию действия (рис. 4)

$$\bar{F}'_A = -\bar{F}_A.$$

Силы действия и противодействия  $\bar{F}_A$  и  $\bar{F}'_A$  не образуют уравновешенной системы сил, так как они приложены к различным телам.

Таким образом, в природе силы встречаются по две — силы действия и противодействия.

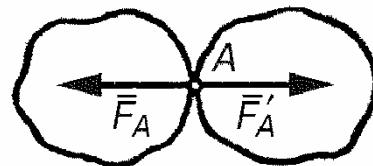


Рис. 4

#### **Аксиома 5 (о затвердевании деформируемого тела)**

Если деформируемое тело под действием данной системы сил находится в равновесии, то равновесие не нарушится, если это тело затвердеет, то есть станет абсолютно твердым.

Из этой аксиомы следует, что условия равновесия сил, приложенных к твердому телу, необходимы и для равновесия деформируемого тела.

Сформулированные аксиомы являются той основой, на которой строится вся статика сил, приложенных к абсолютно твердому телу.

Ниже будет сформулирована еще одна аксиома, называемая принципом освобождаемости от связей.

### 1.3. Простейшие теоремы статики

#### Теорема о переносе силы вдоль линии ее действия

Действие силы на твердое тело не изменится при переносе силы в любую точку на линии ее действия.

**Доказательство:** Пусть к твердому телу в точке  $A$  приложена сила  $\bar{F}_A$  (рис. 5). Приложим в произвольной точке  $B$  линии действия этой силы уравновешенную систему сил  $(\bar{F}_B, \bar{F}'_B) \sim 0$ , причем  $\bar{F}_B = -\bar{F}'_B = \bar{F}_A$ . Заметим, что система сил  $(\bar{F}_A, \bar{F}'_B)$  является уравновешенной. Отбрасывая эту систему сил, получим только силу  $\bar{F}_B$ , приложенную к точке  $B$ .

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_A &\sim \left\{ \bar{F}_A, (\bar{F}_B, \bar{F}'_B) \right\} \sim \\ \text{Итак, } & \sim \left\{ \bar{F}_B, (\bar{F}_A, \bar{F}'_B) \right\} \sim \bar{F}_B; \quad \bar{F}_A \sim \bar{F}_B. \end{aligned} \right\}$$

$$(\bar{F}_A, \bar{F}'_B) \sim 0.$$

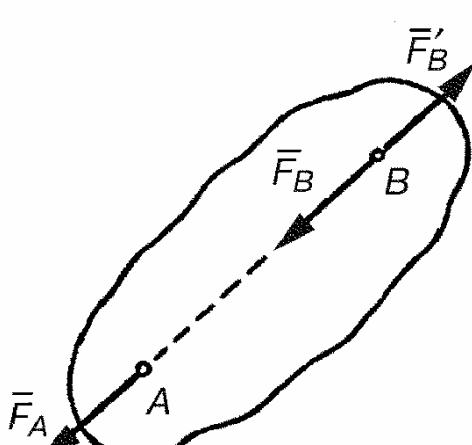


Рис. 5

**Следствие.** Сила, приложенная к твердому телу, есть вектор скользящий.

Заметим, что в деформируемом теле силу нельзя переносить вдоль линии действия. Сила в этом случае будет **связанным** вектором.

Теорема о трех силах

Если лежащие в одной плоскости три непараллельные силы

уравновешиваются, то линии их действия пересекаются в одной точке.

**Доказательство.** Пусть к твердому телу в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$  приложена плоская уравновешенная система сил  $(\bar{F}_A, \bar{Q}_B, \bar{S}_C) \sim 0$  (рис. 6). Перенесем силы  $\bar{F}_A$  и  $\bar{Q}_B$  в точку  $O$  пересечения линий действия этих сил

$$\bar{F}_O = \bar{F}_A; \bar{Q}_O = \bar{Q}_B; (\bar{F}_A, \bar{Q}_B) \sim (\bar{F}_O, \bar{Q}_O).$$

Сложим силы  $\bar{F}_O$  и  $\bar{Q}_O$  по правилу параллелограмма

$$\bar{R}_O \sim (\bar{F}_O, \bar{Q}_O); \bar{R}_O = \bar{F}_O + \bar{Q}_O;$$

$$(\bar{F}_A, \bar{Q}_B, \bar{S}_C) \sim (\bar{F}_O, \bar{Q}_O, \bar{S}_C) \sim (\bar{R}_O, \bar{S}_C) \sim 0.$$

Силы  $\bar{R}_O$  и  $\bar{S}_C$  образуют уравновешенную систему сил. Это означает, что они имеют общую линию действия. Следовательно, линия действия силы  $\bar{S}_C$  проходит через точку  $O$ , что и требовалось доказать.

#### 1.4. Связи и реакции связей.

##### Аксиома связей

При решении задач статики изучают несвободные твердые тела, которые соединены с другими телами или соприкасаются с ними.

Твердые или гибкие тела, которые препятствуют перемещению данного тела, называются **связями**.

Действие связи на тело эквивалентно действию силы на тело.

Сила, с которой связь действует на тело, называется **реакцией связи**.

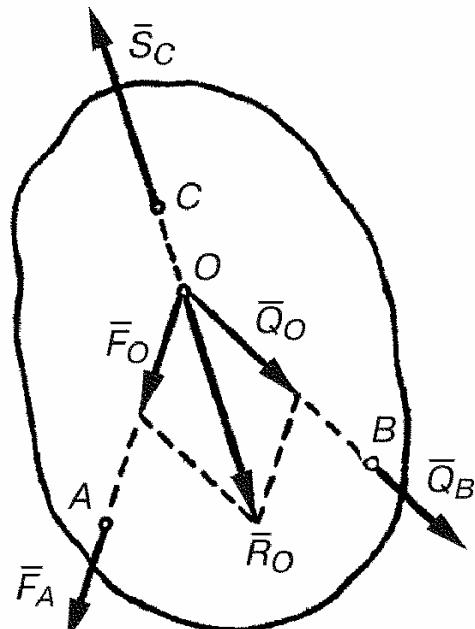


Рис. 6

Реакции связей называют еще **пассивными силами**. Силы, которые могут вызвать движение тела после освобождения его от связей, называются **активными силами**.

В статике рассматривают условия равновесия свободных тел. Чтобы применить их к несвободным телам, надо воспользоваться аксиомой связей.

Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если освободить его от связей и приложить к нему активные силы и реакции связей (аксиома связей или принцип освобождаемости от связей).

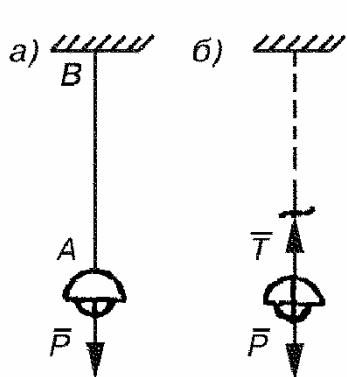


Рис. 7

Пусть, например, лампа весом  $\bar{P}$  подвешена к потолку при помощи нити  $AB$  (рис. 7, а). Нить  $AB$  препятствует падению лампы на пол и, следовательно, является для лампы связью. Нить оказывает на лампу такое же действие, как и сила. Эта сила  $\bar{T}$ , направленная по нити, и есть реакция (натяжение) нити (рис. 7, б).

## 1.5. Простейшие типы связей и их реакции

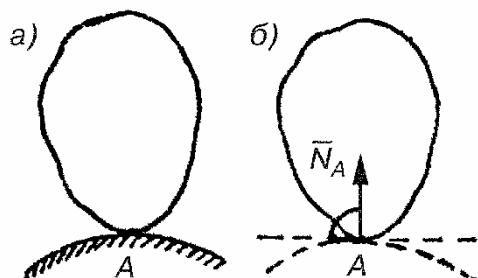


Рис. 8

### Связь, осуществляемая посредством гладкой поверхности и плоскости

Тело опирается на гладкую поверхность в точке  $A$  (рис. 8, а).

Реакция опорной поверхности  $\bar{N}_A$  приложена к телу в точке  $A$  и направлена по нормали к этой по-

верхности (рис. 8, б). Поэтому сила  $\bar{N}_A$  называется нормальной реакцией.

К указанному типу связи относится так называемый подвижной каток (рис. 9, а). В этом случае балка или ферма

своим концом  $B$  опирается на цилиндрический каток. Реакция подвижного катка  $\bar{R}_B$  приложена к балке в точке  $B$  и направлена по нормали к опорной поверхности, по которой могут катиться катки (рис. 9,  $\delta$ ).

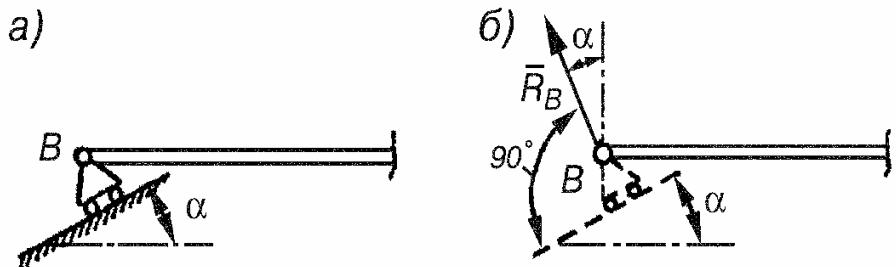


Рис. 9

### Связь, осуществляемая посредством шарниров

#### а) Цилиндрический шарнир (подшипник)

На болт надевается стержень, имеющий отверстие, диаметр которого несколько больше диаметра болта (рис. 10,  $a$ ). Стержень может вращаться вокруг оси болта (оси шарнира). Реакция цилиндрического шарнира  $\bar{R}_O$  лежит в плоскости, перпендикулярной к его оси  $O$ , и проходит через эту ось (рис. 10,  $\delta$ ).

Направление реакции  $\bar{R}_O$  заранее неизвестно и определяется при решении задачи.

#### б) Сферический шарнир (под пятник)

Стержень имеет на одном конце шаровую поверхность, которая укрепляется в опоре (рис. 11,  $a$ ). Он может вращаться вокруг точки  $O$  — центра сферического шарнира. Реакция сферического шарнира  $\bar{R}_O$  проходит через его центр, причем ее направление заранее неизвестно и определяется при решении задачи (рис. 11,  $\delta$ ).

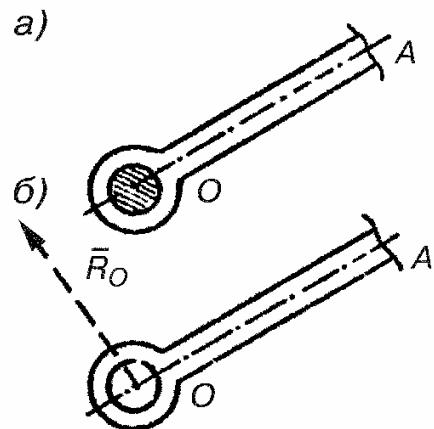


Рис. 10

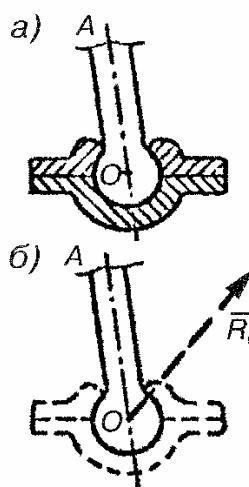


Рис. 11

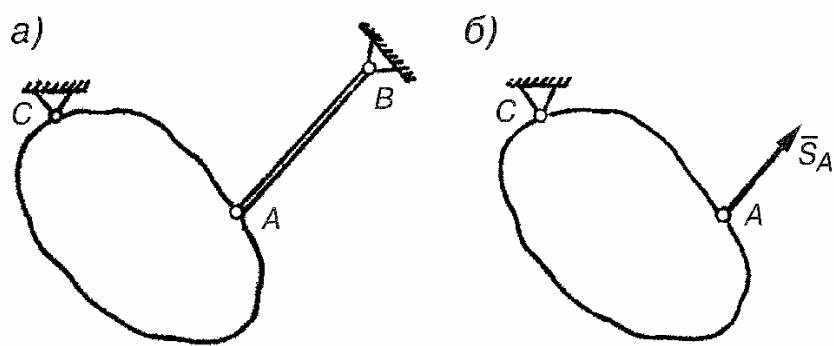


Рис. 12

### Связь, осуществляемая посредством невесомого стержня с шарнирами на концах

Тело в точке  $A$  шарнирно соединено с невесомым стержнем  $AB$  (рис. 12,  $a$ ). Реакция стержня  $\bar{S}_A$  направлена вдоль стержня (рис. 12,  $\bar{b}$ ). Направление этой реакции заранее неизвестно и определяется при решении задачи.

### Связь, осуществляемая посредством гибких тел (веревок, тросов, канатов, нитей и т.д.)

Тело подвешено на тросах  $AA_1$  и  $BB_1$  (рис. 13,  $a$ ). Реакции тросов  $\bar{T}_A$  и  $\bar{T}_B$  называются натяжениями тросов. Они приложены к точкам  $A$  и  $B$  крепления тросов к телу и направлены вдоль тросов (рис. 13,  $\bar{b}$ ). Так как тросы работают только на растяжение, мы можем указать и направления реакций  $\bar{T}_A$  и  $\bar{T}_B$ .

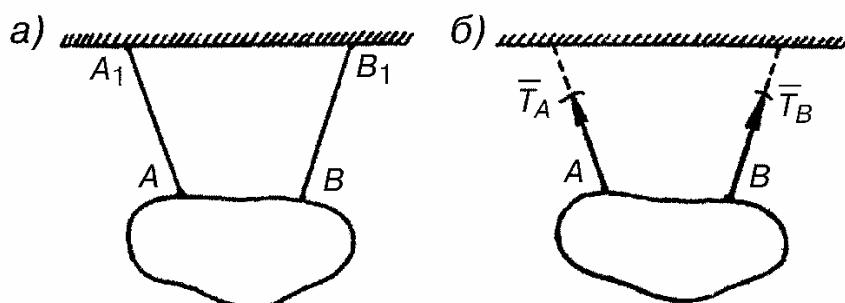


Рис. 13

## **Связь, осуществляемая посредством жесткой заделки**

Балка  $AB$  одним своим концом заделана в стену, другой ее конец служит опорой для конструкции (рис. 14,  $a$ ). В случае нагружения балки в заделке возникают реакции, состоящие из силы — реакции заделки  $\bar{R}_A$  и пары сил с моментом  $m_A$  (рис. 14,  $b$ ). Направление реакции заранее неизвестно и определяется при решении задачи. То же самое можно сказать и о направлении момента пары сил заделки  $m_A$ , который изображается на рисунке в виде круговой стрелки.

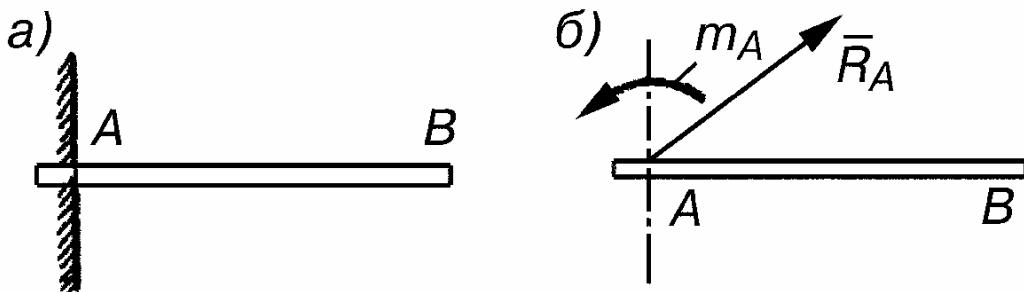


Рис. 14

## **1.6. Две основные задачи статики**

### **Первая задача**

#### **Задача о приведении системы сил к простейшему виду**

Данную систему сил заменить простейшей системой сил, состоящей из одной, двух или трех сил.

При решении первой задачи статики все действующие на тело силы считаются известными. Эта задача имеет важное значение не только в статике, но и в динамике.

### **Вторая задача**

#### **Задача о равновесии системы сил**

Найти условия, при которых данная система будет уравновешенной.

Эта задача ставится в тех случаях, когда равновесие твердого тела имеет место. Условия равновесия устанавлива-

вают зависимости между всеми силами, приложенными к твердому телу.

Дополнительными задачами статики являются:

1. Определение усилий в стержнях ферм.
2. Определение центра тяжести тела.

## 2. СИЛА И ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕЕ ДЕЙСТВИЯ

### 2.1. Проекция силы на ось

Проекцией силы на ось называется скалярная величина, равная взятой с соответствующим знаком длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца силы на эту ось (рис. 15)

$$F_x = AB' = ab = F \cos \alpha; \quad (\text{рис. 15, } a)$$

$$F_x = -AB' = -ab = -F \cos \beta = F \cos \alpha;$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha; \cos \beta = -\cos \alpha. \quad (\text{рис. 15, } b)$$

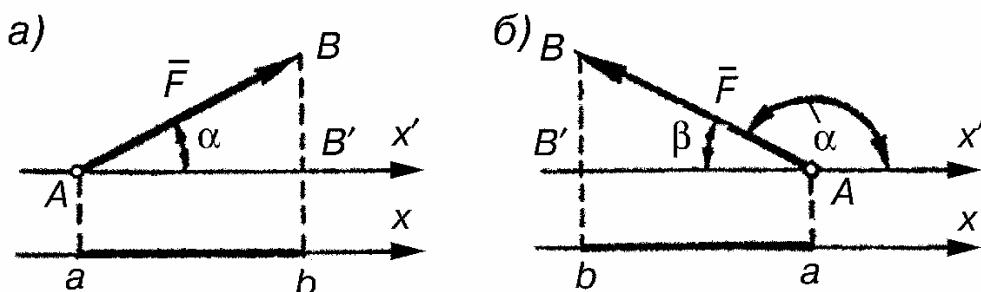


Рис. 15

Проекции силы на любые параллельные и одинаково направленные оси равны друг другу.

Для любого случая расположения силы относительно оси  $l$  величина и знак проекции на ось определяется формулой

$$\text{пр}_l \bar{F} = F \cos(\bar{F}, \wedge l) = F \cos \varphi,$$

где  $\varphi = (\bar{F}, \wedge l)$  - угол между вектором силы  $\bar{F}$  и положительным направлением оси  $l$ .

Проекция силы на ось равна произведению величины (модуля) силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси.

## 2.2. Проекция силы на плоскость

Проекцией силы на плоскость называется вектор, заключенный между проекциями начала и конца силы на эту плоскость.

В отличие от проекции силы на ось, проекция силы на плоскость есть величина векторная.

На рис. 16  $\bar{F}_{xy}$  - проекция силы  $\bar{F}$  на плоскость  $Oxy$ .

$$F_{xy} = F \cos \gamma; \gamma = (\bar{F}, \wedge \bar{F}_{xy}).$$

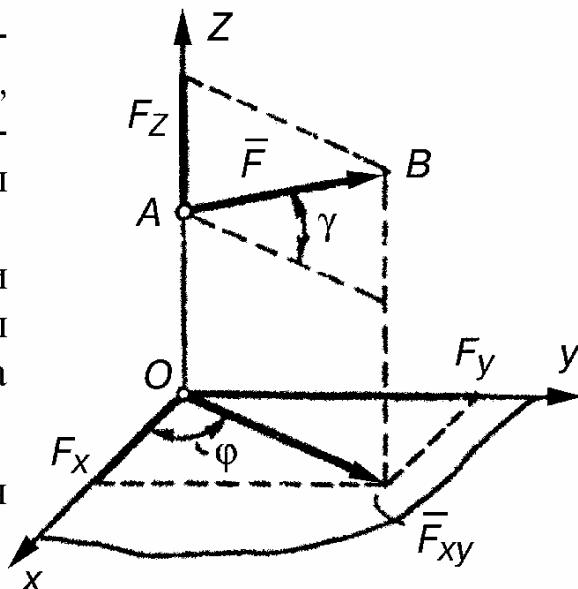


Рис. 16

Проекции силы  $\bar{F}$  на оси координат (рис. 16)

$$F_x = F_{xy} \cos \varphi = F \cos \gamma \cos \varphi;$$

$$F_y = F_{xy} \sin \varphi = F \cos \gamma \sin \varphi;$$

$$F_z = F \sin \gamma.$$

## 2.3. Момент силы относительно точки

Плечом силы относительно точки называется длина перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия силы (рис. 17)

$$h = OE; OE \perp \bar{F}.$$

Моментом силы относительно точки называется взятое с соответствующим знаком произведение величины силы на ее плечо

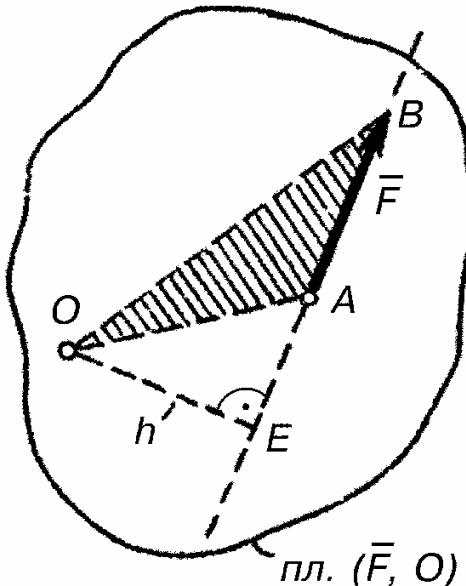


Рис. 17

$$m_0(\bar{F}) = \pm Fh.$$

Этот момент численно равен удвоенной площади треугольника, построенного на силе и моментной точке

$$|m_0(\bar{F})| = 2 \text{ площ. } \Delta OAB = Fh.$$

Момент силы относительно точки считается положительным, если сила стремится повернуть плоскость, проходящую через линию ее действия и моментную точку, против часовой стрелки. В противном случае этот момент будет отрицательным.

#### 2.4. Векторный момент силы относительно очки

Векторным моментом силы относительно точки называется векторное произведение радиус-вектора точки приложения силы на вектор силы (рис. 18)

$$\bar{m}_0(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}.$$

Из этого определения следует:

1. Момент  $\bar{m}_0(\bar{F})$  перпендикулярен к плоскости, проходящей через линию действия силы и моментную точку

$$\bar{m}_0(\bar{F}) \perp \text{пл. } (\bar{F}, O).$$

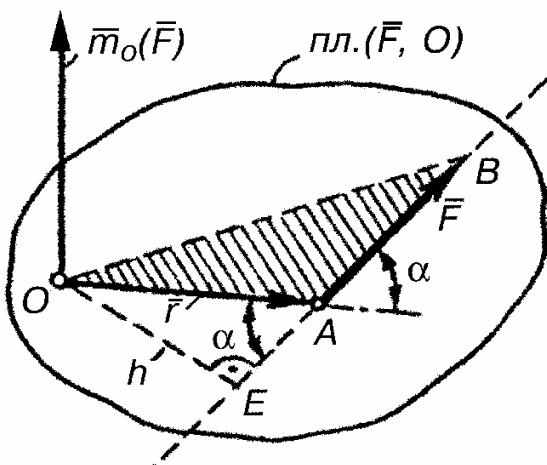


Рис. 18

2. Момент  $\bar{m}_0(\bar{F})$  направлен в ту сторону, откуда вращение указанной выше плоскости под действием силы  $\bar{F}$  видно происходящим против часовой стрелки.

3. Величина момента  $\overline{m}_0(\overline{F})$  равна произведению величины силы на ее плечо

$$\left. \begin{aligned} |\overline{m}_0(\overline{F})| &= |\overline{r} \times \overline{F}| = rF \sin(\overline{r}, \wedge \overline{F}) = Fh = |m_0(\overline{F})|, \\ \text{где } h &= r \sin \alpha; \alpha = (\overline{r}, \wedge \overline{F}). \end{aligned} \right\}$$

4. Момент  $\overline{m}_0(\overline{F})$  считается приложенным в той точке, относительно которой он вычисляется.

## 2.5. Момент силы относительно оси

Моментом силы относительно оси называется момент проекции этой силы на перпендикулярную к оси плоскость относительно точки пересечения оси и плоскости (рис. 19)

$$m_z(\overline{F}) = m_0(F_{\pi}) \pm F_{\pi} h_{\pi}.$$

На рис. 19  $\Pi$  – произвольная плоскость, перпендикулярная оси  $z$ ;  $O$  – точка пересечения оси  $z$  и плоскости  $\Pi$ ;  $\overline{F}_{\pi}$  – проекция силы  $\overline{F}$  на плоскость  $\Pi$ ;

$h_{\pi}$  – плечо вектора  $\overline{F}_{\pi}$  относительно точки  $O$ .

Момент силы относительно оси считается положительным, если проекция силы на перпендикулярную к оси плоскость стремится повернуть эту плоскость вокруг положительного направления оси против часовой стрелки. В противном случае указанный момент будет отрицательным.

Момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.

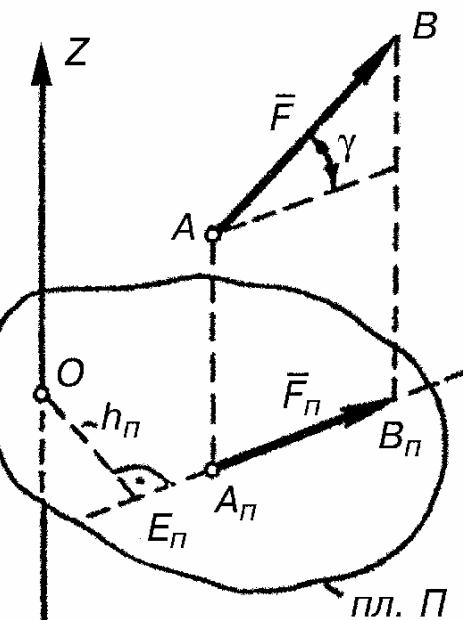


Рис. 19

## 2.6. Теорема о моменте силы относительно оси

Момент силы относительно оси равен проекции на эту ось векторного момента силы относительно любой точки, лежащей на этой оси.

### Доказательство

Пусть  $\Pi$  – произвольная плоскость, перпендикулярная оси  $z$ ,  $O$  – точка пересечения оси и плоскости (рис. 20).

С помощью рис. 20 получаем

$$m_z(\bar{F}) = m_0(\bar{F}_\Pi) = 2 \text{ площ. } \Delta OA_\Pi B_\Pi = \\ = (2 \text{ площ. } \Delta OAB) \cos \varphi,$$

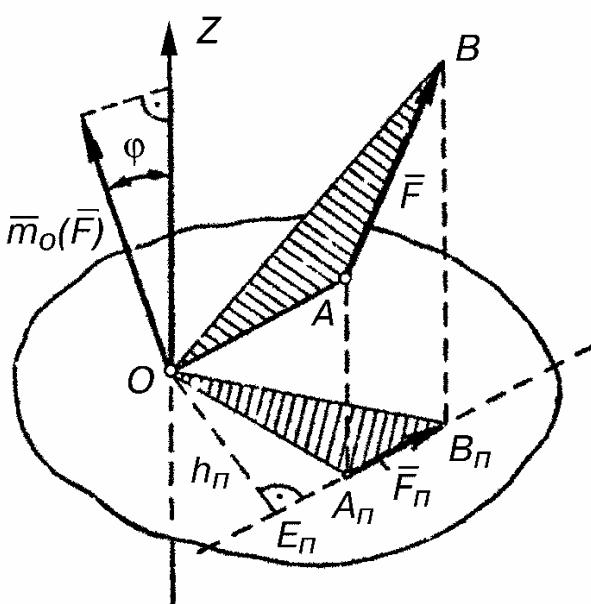


Рис. 20

где  $j$  — угол между плоскостями треугольников  $OAB$  и  $OA_\Pi B_\Pi$ .

Угол между плоскостями равен углу между перпендикулярами к этим плоскостям

$$\varphi = \left\{ \bar{m}_0(\bar{F}), \hat{z} \right\}$$

Продолжая, получим

$$m_z(\bar{F}) = (2 \text{ площ. } \Delta OAB) \cos \varphi = \\ = |\bar{m}_0(\bar{F})| \cos \left\{ \bar{m}_0(\bar{F}), \hat{z} \right\} = \text{пр}_z \left\{ \bar{m}_0(\bar{F}) \right\}$$

что и требовалось доказать.

Так как плоскость  $\Pi$  была взята произвольным образом, то и точка  $O$  является произвольной точкой оси  $z$ .

## 2.7. Проекции векторного момента силы относительно начала координат на оси координат

Найдем векторный момент силы  $\bar{F}$  относительно начала координат  $O$  и спроектируем его на оси координат.

На основании теоремы 2.6. имеем (рис. 21)

$$\left. \begin{aligned} m_x(\bar{F}) &= \text{пр}_x \{ \bar{m}_0(\bar{F}) \} \\ m_y(\bar{F}) &= \text{пр}_y \{ \bar{m}_0(\bar{F}) \} \\ m_z(\bar{F}) &= \text{пр}_z \{ \bar{m}_0(\bar{F}) \} \end{aligned} \right\}$$

Итак, проекции векторного момента силы относительно начала координат на оси координат равны соответственно моментам силы относительно этих осей.

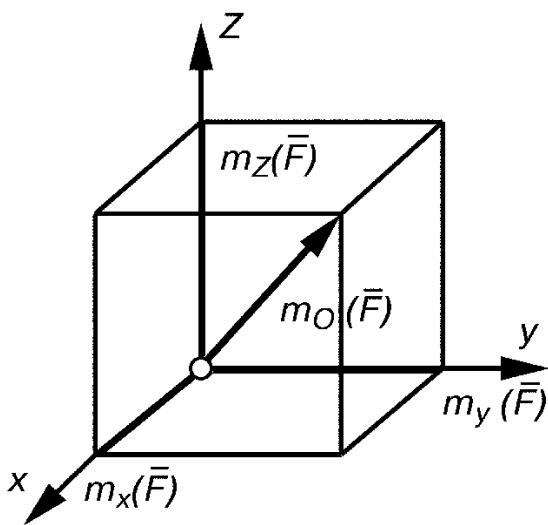


Рис. 21

## 2.8. Аналитические выражения для моментов силы относительно осей координат

Разложим вектор  $\bar{m}_0(\bar{F})$  по ортам осей координат (рис. 22)

$$\begin{aligned} \bar{m}_0(\bar{F}) &= \text{пр}_x \{ \bar{m}_0(\bar{F}) \} \bar{i} + \text{пр}_y \{ \bar{m}_0(\bar{F}) \} \bar{j} + \text{пр}_z \{ \bar{m}_0(\bar{F}) \} \bar{k} = \\ &= \{ m_x(\bar{F}) \} \bar{i} + \{ m_y(\bar{F}) \} \bar{j} + \{ m_z(\bar{F}) \} \bar{k}. \end{aligned} \quad (\text{а})$$

Составим теперь выражение для вектора  $\bar{m}_0(\bar{F})$  в виде векторного произведения

$$\bar{m}_0(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

Разлагая определитель по элементам первой строки, получим

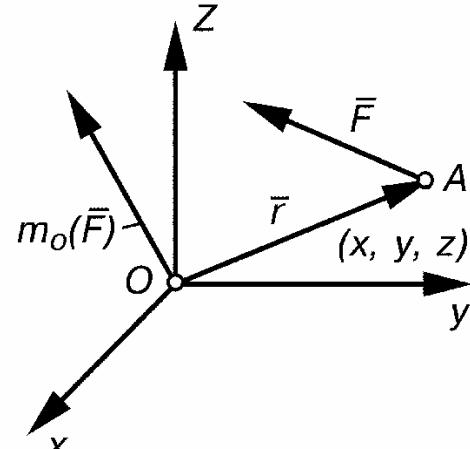


Рис. 22

$$\bar{m}_0(\bar{F}) = (yF_z - zF_y)\bar{i} + (zF_x - xF_z)\bar{j} + (xF_y - yF_x)\bar{k}. \quad (6)$$

Из формул (а) и (6) получаем

$$\left. \begin{aligned} m_x(\bar{F}) &= yF_z - zF_y; \\ m_y(\bar{F}) &= zF_x - xF_z; \\ m_z(\bar{F}) &= xF_y - yF_x. \end{aligned} \right\}$$

Полученные формулы представляют собой аналитические выражения для моментов силы относительно осей координат.

### 3. ПАРА СИЛ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕЕ ДЕЙСТВИЯ. СИЛОВОЙ ВИНТ

#### 3.1. Пара сил. Момент пары

Парой сил или просто парой называется система двух равнопротивоположных сил, имеющих несовпадающие между собой линии действия (рис. 23)

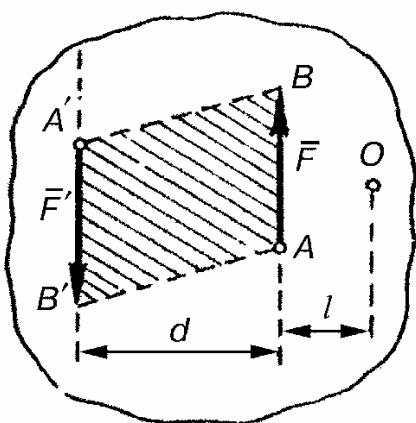


Рис. 23

$(\bar{F}, \bar{F}')$  — пара

сил;  $\bar{F}' = -\bar{F}$ ;  $F' = F$ .

Кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары называется плечом пары.

Плоскость, в которой лежат силы пары, называется плоскостью действия пары.

Сумма сил пары равна нулю

$$\bar{F} + \bar{F}' = 0.$$

Это означает, что пара сил не оказывает тягового (сдвигающего) действия на твердое тело.

Действие, оказываемое парой на тело, нельзя заменить действием одной силы. Следовательно, пара сил не имеет равнодействующей силы.

Пара сил является неприводимым, не упрощаемым элементом механики и наряду с силой представляет собой са-

моментом пары называется момент одной из сил пары относительно точки приложения другой силы (рис. 23)

$$m(\bar{F}, \bar{F}') = m_{A'}(\bar{F}) = m_A(\bar{F}') = \pm Fd,$$

где  $d$  — плечо пары.

Момент пары равен взятому с соответствующим знаком произведению величины силы пары на ее плечо.

Момент пары численно равен площади параллелограмма, построенного на силах пары

$$|m(\bar{F}, \bar{F}')| = \text{площ. параллелограмма } ABA'B' = Fd.$$

Этот момент считается положительным, если силы пары стремятся повернуть ее плоскость действия против часовой стрелки. В противном случае момент пары будет отрицательным.

### 3.2. Векторный момент пары

Векторным моментом пары называется векторный момент одной из сил пары относительно точки приложения другой силы (рис. 24).

$$\bar{m}(\bar{F}, \bar{F}') = \bar{m}_{A'}(\bar{F}) = \overline{A'A} \times \bar{F} = \bar{m}_A(\bar{F}') = \overline{AA'} \times \bar{F}'.$$

Из этого определения следует:

1. Момент  $\bar{F}_p$  перпендикулярен к плоскости действия пары

$$\bar{m}(\bar{F}, \bar{F}') \perp \text{пл.}(\bar{F}, \bar{F}').$$

2. Момент  $\bar{m}(\bar{F}, \bar{F}')$  направлен в ту сторону, откуда поворот указанной выше плоскости под действием

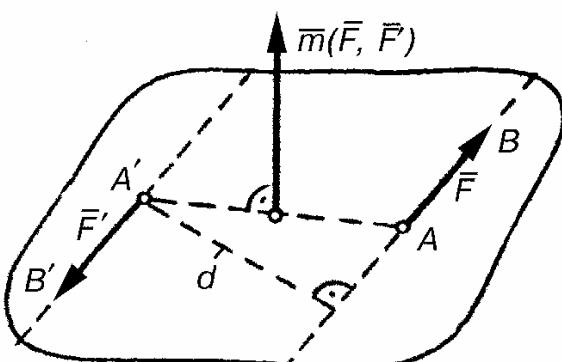


Рис. 24

сил пары виден происходящим против часовой стрелки.

3. Величина момента  $\bar{m}(\bar{F}, \bar{F}')$  равна произведению величины силы пары на ее плечо

$$|\bar{m}(\bar{F}, \bar{F}')| = Fd = |m(\bar{F}, \bar{F}')|.$$

Далее будет показано, что момент  $\bar{m}(\bar{F}, \bar{F}')$  есть вектор свободный и поэтому его можно прикладывать в любой точке тела, к которому приложена пара сил.

### 3.3. Простейшие теоремы о парах сил

#### Первая теорема

Сумма моментов сил пары относительно произвольной точки не зависит от выбора точки и равна моменту пары.

**Доказательство.** С помощью рис. 23 получаем

$$m_0(\bar{F}) + m_0(\bar{F}') = -Fl + F(d+l) = Fd = m(\bar{F}, \bar{F}').$$

Итак,

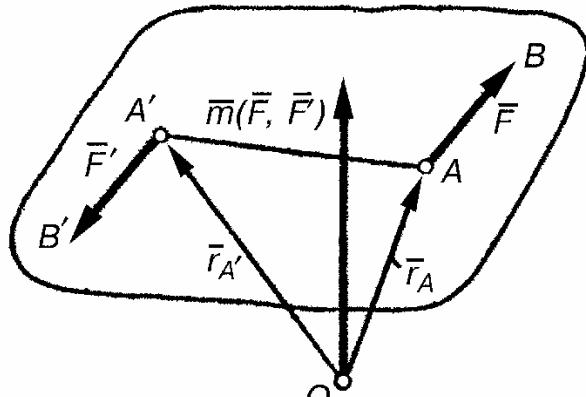


Рис. 25

$$m_0(\bar{F}) + m_0(\bar{F}') = m(\bar{F}, \bar{F}'),$$

где  $O$  — произвольная точка плоскости действия пары.

#### Вторая теорема

Сумма векторных моментов сил пары относительно произвольной точки не зависит от выбора точки и равна векторному моменту пары.

**Доказательство.** С помощью рис. 25 получаем

$$\begin{aligned} \bar{m}_0(\bar{F}) + \bar{m}_0(\bar{F}') &= \bar{r}_A \times \bar{F} + \bar{r}_{A'} \times \bar{F}' = \bar{r}_A \times \bar{F} + \bar{r}_{A'} \times (-\bar{F}) = \\ &= (\bar{r}_A - \bar{r}_{A'}) \times \bar{F} = \bar{m}_{A'}(\bar{F}) = \bar{m}(\bar{F}, \bar{F}'). \end{aligned}$$

Итак,

$$\overline{m}_0(\overline{F}) + \overline{m}_0(\overline{F}') = \overline{m}(\overline{F}, \overline{F}'),$$

где  $O$  — произвольная точка.

**Следствие.** Векторный момент пары есть вектор свободный.

Этот вектор можно переносить параллельно самому себе и прикладывать в любой точке тела.

### 3.4. Способ задания пары сил

Пара сил может быть задана ее векторным моментом.

Из определения векторного момента пары следует, что этот вектор характеризует положение плоскости действия пары, направление вращения и величину ее момента. Поэтому векторный момент пары является общей математической характеристикой пары и оказываемого ей вращательного действия на тело.

### 3.5. Эквивалентные пары. Условие эквивалентности двух пар

Две пары называются эквивалентными, если они оказывают на произвольную точку тела одно и то же вращательное действие.

Две пары эквивалентны, если их векторные моменты равны между собой

$$\left. \begin{aligned} (\overline{F}, \overline{F}') &\sim (\overline{S}, \overline{S}'), \\ \text{если } \overline{m}(\overline{F}, \overline{F}') &= \overline{m}(\overline{S}, \overline{S}'). \end{aligned} \right\}$$

### 3.6. Элементарные операции, выполняемые над парами

Операции, которые можно выполнять над парами без изменения их эквивалентности, называются элементарными операциями.

Над парой сил можно выполнять следующие элементарные операции:

- Перенос и произвольный поворот пары сил в плоскости ее действия.
- Перенос пары сил в любую другую плоскость, параллельную плоскости ее действия.
- Изменение величины силы пары и ее плеча при условии сохранения момента и плоскости действия пары.

При указанных выше элементарных операциях над парой ее векторный момент не изменяется, что свидетельствует о сохранении эквивалентности преобразованной и заданной пары.

### 3.7. Силовой винт

Совокупность силы и пары, плоскость действия которой перпендикулярна к силе, называется силовым винтом (рис. 26)

$$\{\bar{R}', (\bar{T}, \bar{T}')\} - \text{силовой винт.}$$

Элементами винта являются его вектор, ось и векторный момент пары.

Сила, которая не входит в пару сил, называется вектором винта. Линию действия этого вектора называют осью винта. Векторный момент пары, входящей в винт, называется векторным моментом винта.

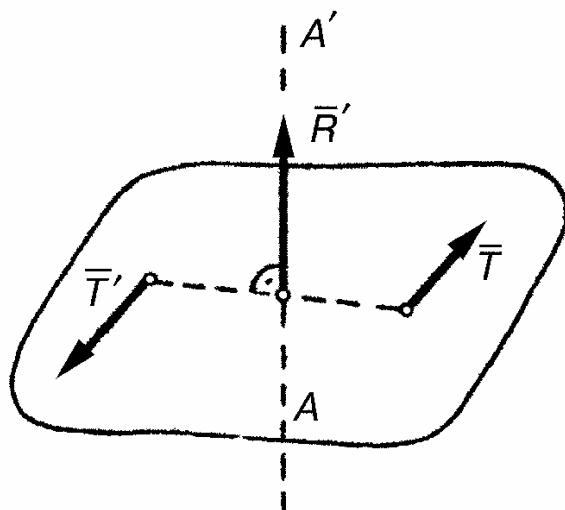


Рис. 26

$\bar{R}'$  — вектор винта;

$\bar{M}_R = \bar{m}(\bar{T}, \bar{T}')$  — векторный момент винта;

$AA'$  — ось винта.

Винт можно представить в виде векторов  $\bar{R}'$  и  $\bar{M}_R$ , направленных по одной прямой (оси винта) (рис. 27).

Условие параллельности (коллинеарности) векторов  $\bar{M}_R$  и  $\bar{R}'$  имеет вид

$$\overline{M}_R = p \overline{R},$$

где  $p$  — некоторый размерный коэффициент, называемый параметром винта.

Упростить силовой винт невозможно. Силу можно рассматривать как вырожденный винт с параметром, равным нулю ( $p = 0$ ).

Пару сил можно рассматривать как вырожденный винт с параметром, равным бесконечности ( $p = \infty$ ). Осью этого вырожденного винта служит любая прямая, параллельная векторному моменту пары.

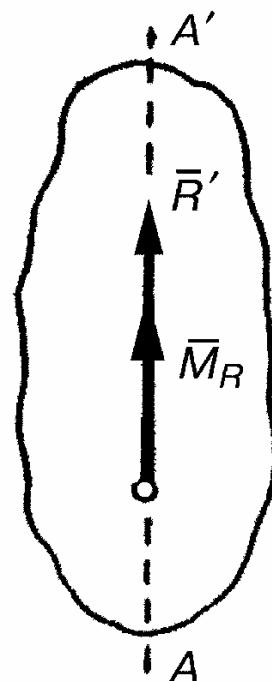


Рис. 27

#### 4. СИСТЕМА СИЛ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕЕ ДЕЙСТВИЯ. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ПРИВЕДЕНИЯ СИСТЕМЫ СИЛ К ЦЕНТРУ

##### 4.1. Главный вектор системы сил

Дана произвольная система сил  $(\overline{F}_1, \dots, \overline{F}_n)$ . Главным вектором системы сил называется сумма всех сил системы

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \dots + \overline{F}_n = \sum_{k=1}^n \overline{F}_k,$$

где  $n$  — число сил, входящих в систему.

Проекции главного вектора  $\overline{R}$  на оси координат

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}, R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}, R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz}.$$

Величина и направление этого вектора в пространстве определяются по формулам

$$\left. \begin{array}{l} R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \\ \cos(\bar{R}, \wedge x) = \frac{R_x}{R}; \\ \cos(\bar{R}, \wedge y) = \frac{R_y}{R}; \\ \cos(\bar{R}, \wedge z) = \frac{R_z}{R}. \end{array} \right\}$$

#### 4.2. Главные моменты системы сил относительно точки и оси

Главным векторным моментом системы сил относительно точки (центра) называется сумма векторных моментов всех сил системы относительно этой точки

$$\bar{M}_0 = \bar{m}_0(\bar{F}_1) + \bar{m}_0(\bar{F}_2) + \dots + \bar{m}_0(\bar{F}_n) = \sum_{k=1}^n \bar{m}_0(\bar{F}_k).$$

Проекции главного момента  $\bar{M}_0$  на оси координат называются главными моментами системы сил относительно осей координат

$$M_{ox} = \sum_{k=1}^n m_x(\bar{F}_k), M_{oy} = \sum_{k=1}^n m_y(\bar{F}_k), M_{oz} = \sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k).$$

где точка  $O$  — начало координат.

Величина и направление этого вектора в пространстве определяются по формулам

$$\left. \begin{array}{l} M_0 = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2}; \\ \cos(\bar{M}_0, \wedge x) = \frac{M_{ox}}{M_0}; \\ \cos(\bar{M}_0, \wedge y) = \frac{M_{oy}}{M_0}; \\ \cos(\bar{M}_0, \wedge z) = \frac{M_{oz}}{M_0}. \end{array} \right\}$$

Главным моментом плоской системы сил относительно точки называется сумма моментов всех сил системы относительно этой точки

$$M_0 = m_0(\bar{F}_1) + m_0(\bar{F}_2) + \dots + m_0(\bar{F}_n) = \sum_{k=1}^n m_0(\bar{F}_k).$$

Дана произвольная система пар

$$\left\{ (\bar{F}_1, \bar{F}'_1), (\bar{F}_2, \bar{F}'_2), \dots, (\bar{F}_n, \bar{F}'_n) \right\}.$$

Очевидно, что главный вектор системы пар равен нулю

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}'_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}'_2 + \dots + \bar{F}_n + \bar{F}'_n = 0.$$

Главным векторным моментом системы пар называется сумма векторных моментов всех пар

$$\bar{M} = \bar{m}(\bar{F}_1, \bar{F}'_1) + \dots + \bar{m}(\bar{F}_n, \bar{F}'_n) = \sum_{k=1}^n \bar{m}(\bar{F}_k, \bar{F}'_k) = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k,$$

$$\text{где } \bar{m}_k = \bar{m}(\bar{F}_k, \bar{F}'_k); \quad \bar{M} \{ M_x, M_y, M_z \},$$

$$M_x = \sum_{k=1}^n m_{kx}; M_y = \sum_{k=1}^n m_{ky}; M_z = \sum_{k=1}^n m_{kz}.$$

Главным моментом плоской системы пар называется сумма моментов всех пар

$$M = m(\bar{F}_1, \bar{F}'_1) + \dots + m(\bar{F}_n, \bar{F}'_n) = \sum_{k=1}^n m(\bar{F}_k, \bar{F}'_k) = \sum_{k=1}^n m_k, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$$

где  $m_k = m(\bar{F}_k, \bar{F}'_k)$ .

### 4.3. Эквивалентные системы сил и системы пар. Условия эквивалентности

Две системы сил называются эквивалентными, если они оказывают на произвольную точку одно и то же тяговое (сдвигающее) и врашательное действие.

Две произвольные системы сил эквивалентны, если их главные векторы и главные векторные моменты относительно произвольной точки соответственно равны между собой

$$\left. \begin{array}{l} (\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim (\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_j), \\ \text{если} \\ \bar{R}^F = \bar{R}^S \text{ и } \bar{M}_0^F = \bar{M}_0^S. \end{array} \right\}$$

Две плоские системы сил эквивалентны, если их главные векторы и главные моменты относительно произвольной точки соответственно равны между собой

$$\left. \begin{array}{l} (\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim (\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_j), \\ \text{если} \\ \bar{R}^F = \bar{R}^S \text{ и } M_0^F = M_0^S. \end{array} \right\}$$

Две произвольные системы пар эквивалентны, если их главные векторные моменты равны друг другу

$$\left. \begin{array}{l} \{(\bar{F}_1, \bar{F}'_1), \dots, (\bar{F}_n, \bar{F}'_n)\} \sim \{(\bar{S}_1, \bar{S}'_1), \dots, (\bar{S}_j, \bar{S}'_j)\}, \\ \text{если } \bar{M}^F = \bar{M}^S. \end{array} \right\}$$

Две плоские системы пар эквивалентны, если их главные моменты равны друг другу

$$\left. \begin{array}{l} \{(\bar{F}_1, \bar{F}'_1), \dots, (\bar{F}_n, \bar{F}'_n)\} \sim \{(\bar{S}_1, \bar{S}'_1), \dots, (\bar{S}_j, \bar{S}'_j)\}, \\ \text{если } M^F = M^S. \end{array} \right\}$$

#### 4.4. Система сходящихся сил и ее равнодействующая сила

Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется системой сходящихся сил. Точка, в которой пересекаются линии действия всех сил, называется точкой схода.

Пусть к твердому телу приложена система сходящихся сил  $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$ . Перенесем все силы по линиям их действия в точку схода  $O$  и сложим их по правилу сложения векторов. В результате сложения получим равнодействующую силу  $\bar{R}^*$ , линия действия которой проходит через точку схода  $O$

$$\left. \begin{aligned} (\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n) &\sim (\bar{F}_{10}, \dots, \bar{F}_{no}) \sim \bar{R}^*, \\ \text{где } \bar{R}^* &= \sum_{k=1}^n \bar{F}_{ko} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k; \bar{F}_{ko} = \bar{F}_k; \\ k &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\}$$

Итак, равнодействующая системы сходящихся сил равна сумме всех сил системы, а линия ее действия проходит через точку схода заданной системы сил.

#### 4.5. Система пар и ее равнодействующая пара

Пусть к твердому телу приложена произвольная система пар

$$\{(\bar{F}_1, \bar{F}'_1), (\bar{F}_2, \bar{F}'_2), \dots, (\bar{F}_n, \bar{F}'_n)\}.$$

Заменив каждую пару ее векторным моментом, получим систему свободных векторов  $(\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_n)$ ,

где  $\bar{m}_k = \bar{m}(\bar{F}_k, \bar{F}'_k); k = 1, 2, \dots, n.$

Приложим векторные моменты всех пар к произвольной точке  $O$  и сложим их по правилу сложения векторов

$$\bar{M} = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k = \sum_{k=1}^n \bar{m}(\bar{F}_k, \bar{F}'_k).$$

Вектор  $\bar{M}$  представляет собой векторный момент равнодействующей пары  $(\bar{S}, \bar{S}^*)$ , то есть

$$\left. \begin{aligned} \overline{M} &= \overline{m}(\overline{S}, \overline{S}^*); \\ (\overline{S}, \overline{S}^*) &\sim \left\{ (\overline{F}_1, \overline{F}'_1), (\overline{F}_2, \overline{F}'_2), \dots, (\overline{F}_n, \overline{F}'_n) \right\} \end{aligned} \right\}$$

Итак, любую приложенную к твердому телу произвольную систему пар можно заменить равнодействующей парой, векторный момент которой равен сумме векторных моментов заданных пар.

#### 4.6. Теорема о приведении силы к центру

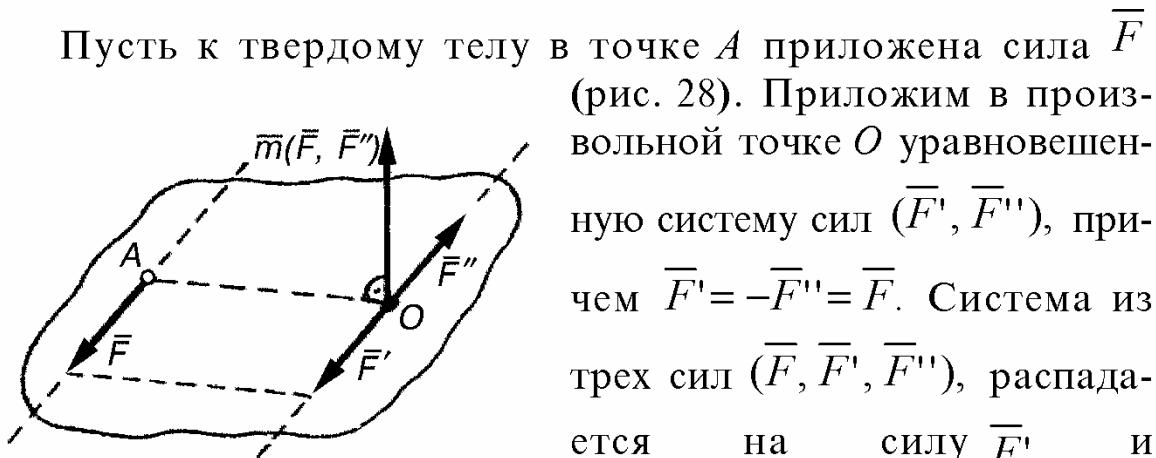


Рис. 28

Пусть к твердому телу в точке  $A$  приложена сила  $\overline{F}$  (рис. 28). Приложим в произвольной точке  $O$  уравновешенную систему сил  $(\overline{F}', \overline{F}'')$ , причем  $\overline{F}' = -\overline{F}'' = \overline{F}$ . Система из трех сил  $(\overline{F}, \overline{F}', \overline{F}'')$ , распадается на силу  $\overline{F}'$  и пару  $(\overline{F}, \overline{F}'')$ , называемую присоединенной парой.

$$\left. \begin{aligned} \text{Итак, } \overline{F} &\sim \left\{ \overline{F}, (\overline{F}', \overline{F}'') \right\} \sim \left\{ \overline{F}', (\overline{F}, \overline{F}'') \right\} \\ \text{причем } \overline{F}' &= \overline{F} \text{ и } \overline{m}(\overline{F}, \overline{F}'') = \overline{m}_0(\overline{F}). \end{aligned} \right\}$$

Чтобы привести силу к центру, необходимо приложить в этом центре геометрически равную ей силу и приложить пару сил, векторный момент которой равен векторному моменту заданной силы относительно взятого центра.

#### 4.7. Теорема о приведении произвольной пространственной системы сил к центру (основная теорема статики)

Пусть к твердому телу в точках  $A_1, \dots, A_n$  приложена произвольная пространственная система сил  $(\overline{F}_1, \dots, \overline{F}_n)$ .

Выберем произвольную точку  $O$  за центр приведения и приведем все силы системы к этому центру.

Для  $k$ -ой силы имеем

$$\bar{F}_k \sim \begin{cases} \bar{F}'_k, \text{ причем } \bar{F}'_k = \bar{F}_k; \\ (\bar{F}_k, \bar{F}''_k), \text{ причем } \bar{m}(\bar{F}_k, \bar{F}''_k) = \bar{m}_0(\bar{F}_k). \end{cases}$$

В результате приведения на твердое тело будет действовать приложенная в точке  $O$  система сил  $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$  и система присоединенных пар  $\{(\bar{F}_1, \bar{F}_1''), \dots, (\bar{F}_n, \bar{F}_n'')\}$  с векторными моментами  $\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_n$ .

Заменим приложенную в точке  $O$  систему сил одной силой  $\bar{R}^*$ , причем

$$\bar{R}^* = \sum_{k=1}^n \bar{F}'_k = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k.$$

Систему присоединенных пар заменим одной парой, векторный момент которой

$$\bar{M}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{m}(\bar{F}_k, \bar{F}''_k) = \sum_{k=1}^n \bar{m}_0(\bar{F}_k).$$

Векторы  $\bar{R}$  и  $\bar{M}_0$  являются соответственно главным вектором и главным векторным моментом системы сил относительно центра приведения  $O$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Итак, } (\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n) \sim (\bar{R}, \bar{M}_0), \\ \text{где } \bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \text{ и } \bar{M}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{m}_0(\bar{F}_k). \end{array} \right\}$$

Любую приложенную к твердому телу систему сил при приведении к произвольно взятому центру можно заменить приложенной в этом центре одной силой и одной парой сил; сила при

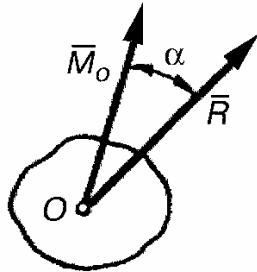


Рис. 29

этом приведении равна главному вектору системы сил, а векторный момент пары равен главному векторному моменту системы сил относительно взятого центра (рис. 29).

#### 4.8. Зависимость между главными векторными моментами системы сил относительно двух центров

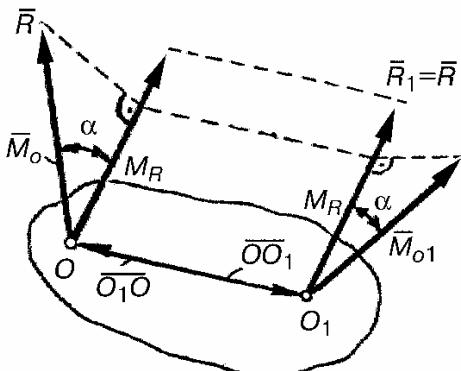


Рис. 30

При приведении произвольной системы сил ( $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n$ ) к центрам  $O$  и  $O_1$  получаем  $(\bar{R}, \bar{M}_0)$  и  $(\bar{R}, \bar{M}_{01})$ , причем  $(\bar{R}, \bar{M}_0) \sim (\bar{R}, \bar{M}_{01})$  (рис. 30).

Вычислим главный векторный момент системы сил относительно центра  $O_1$

$$\begin{aligned}\bar{M}_{01} &= \bar{m}_{01}(\bar{Q}) + \bar{m}_{01}(\bar{Q}') + \bar{m}_{01}(\bar{R}) = \\ &= \bar{m}(\bar{Q}, \bar{Q}') + \bar{m}_{01}(\bar{R}) = \bar{M}_0 + \overline{O_1 O} \times \bar{R} = \bar{M}_0 - \overline{O_1 O} \times \bar{R},\end{aligned}$$

где  $\bar{M}_0 = \bar{m}(\bar{Q}, \bar{Q}') = \bar{m}_0(\bar{Q}) + \bar{m}_0(\bar{Q}')$ .

Итак,  $\bar{M}_{01} = \bar{M}_0 - \overline{O_1 O} \times \bar{R}$ .

Главный векторный момент системы сил относительно второго центра равен разности между главным векторным моментом системы сил относительно первого центра и векторным моментом, приложенного во втором центре главного вектора относительно первого центра.

#### 4.9. Инварианты системы сил

Инвариантом системы сил называют величину (векторную или скалярную), имеющую одно и то же значение в любом центре приведения.

*Первый инвариант (векторный).*

Главный вектор системы сил не зависит от центра приведения

$$\bar{R}_1 = \bar{R} \text{ (рис. 30).}$$

Эту величину называют первым инвариантом системы сил по отношению к изменению центра приведения.

*Второй инвариант (скалярный).*

Известно, что

$$\bar{M}_{01} = \bar{M}_0 - \overline{O_1 O} \times \bar{R}.$$

Составим скалярное произведение каждой части этого равенства на главный вектор

$$\bar{M}_{01} \cdot \bar{R} = \bar{M}_0 \cdot \bar{R} - (\overline{O_1 O} \times \bar{R}) \cdot \bar{R}.$$

Смешанное произведение, в которое входят два параллельных (коллинеарных) вектора, равно нулю

$$(\overline{O_1 O} \times \bar{R}) \cdot \bar{R} = |\overline{O_1 O} \times \bar{R}| \cdot |\bar{R}| \cos 90^\circ = 0.$$

Окончательно получаем

$$\bar{M}_{01} \cdot \bar{R} = \bar{M}_0 \cdot \bar{R} = \text{const.}$$

Скалярное произведение главного вектора и главного векторного момента системы сил для любого центра приведения есть величина постоянная (второй инвариант системы сил).

Покажем, что проекция главного векторного момента на направление главного вектора для любого центра приведения есть величина постоянная.

Преобразуя последнее равенство, получим (рис. 29).

$$M_{01} R_1 \cos \alpha_1 = M_0 R \cos \alpha; M_0 \cos \alpha_1 = M_0 \cos \alpha;$$

$$M_{R1} = M_{01} \cos \alpha; M_R = M_0 \cos \alpha;$$

$$M_{R1} = M_R = \text{const.}$$

Найдем величину проекции главного момента на направление главного вектора

$$\overline{M}_0 \cdot \overline{R} = M_0 R \cos \alpha = M_R R = M_{ox} R_x + M_{oy} R_y + M_{oz} R_z;$$

$$M_R = \frac{\overline{M}_0 \cdot \overline{R}}{R} = \frac{1}{R} (M_{ox} R_x + M_{oy} R_y + M_{oz} R_z).$$

Угол  $\alpha$  между векторами  $\overline{R}$  и  $\overline{M}_0$  определяется по формуле

$$\cos \alpha = \frac{\overline{M}_0 \cdot \overline{R}}{M_0 \cdot R} = \frac{M_R}{M_0} =$$

$$= \frac{1}{M_0 R} (M_{ox} R_x + M_{oy} R_y + M_{oz} R_z).$$

## 5. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПРИВЕДЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СИЛ. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМ СИЛ И ПАР

### 5.1. Приведение системы сил к равнодействующему силовому винту

Для силового винта  $\left\{ \overline{R}^*, (\overline{T}, \overline{T}^*) \right\}$  имеем

$$\left. \begin{aligned} \overline{R} &= \overline{R}^* + \overline{T} + \overline{T}^* = \overline{R}^*; \\ \overline{M}_0 &= \overline{m}_0(\overline{R}^*) + \overline{m}(\overline{T}, \overline{T}^*) = \overline{m}_0(\overline{R}^*) + \overline{M}^*, \end{aligned} \right\}$$

где  $\overline{R}^*$  – вектор винта;  
 $\overline{M}^* = \overline{m}(\overline{T}, \overline{T}^*)$  – векторный момент винта.

Очевидно, что в общем случае векторы  $\overline{R}$  и  $\overline{M}_0$  не перпендикулярны друг к другу. Если точка  $O$  лежит на оси винта (линии действия вектора  $\overline{R}^*$ ), то векторы  $\overline{R} = \overline{R}^*$  и  $\overline{M}_0 = \overline{M}^*$  будут параллельны и направлены вдоль этой оси. Пусть система сил имеет равнодействующий винт

$$\left\{ \bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n \right\} \sim \left\{ \bar{R}^*, (\bar{T}, \bar{T}^*) \right\}.$$

На основании условия эквивалентности двух систем сил получаем

$$\left. \begin{aligned} \bar{R} &= \sum \bar{F}_k = \bar{R}^*; \\ \bar{M}_0 &= \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k) = \bar{m}_0(\bar{R}^*) + \bar{m}(\bar{T}, \bar{T}^*) = \bar{m}_0(\bar{R}^*) + \bar{M}^*. \end{aligned} \right\}$$

Условие приведения системы сил к равнодействующему винту выражают условие отсутствия перпендикулярности векторов  $\bar{R}$  и  $\bar{M}_0$

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_0 \neq 0.$$

Пусть  $\alpha = (\bar{R}, \bar{M}_0) = \frac{\pi}{2}$  (рис. 31). Возьмем для определен-

ности  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ . Разложим  $\bar{M}_0$  на две взаимно перпендикулярные составляющие, одну из которых  $\bar{M}_R$  направим по линии действия  $\bar{R}$

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_0 &= \bar{M}_1 + \bar{M}_R; \quad \bar{M}_1 \perp \bar{M}_R \\ (\bar{R}, \bar{M}_0) &\sim \left\{ \bar{R}, (\bar{M}_1, \bar{M}_R) \right\} \\ \text{где } M_R &= M_0 \cos \alpha; \quad M_1 = M_0 \sin \alpha \end{aligned} \right\}.$$

Представим  $\bar{M}_1$  в виде пары  $(\bar{R}_1, \bar{R}_2)$ , причем

$$R_1 = R_2 = R; \quad d = \frac{M_1}{R} = \frac{M_0 \sin \alpha}{R}.$$

Силу  $\bar{R}_1$  этой пары приложим в точке  $O$  так, чтобы она была уравновешена силой  $\bar{R}$ , то есть  $(\bar{R}, \bar{R}_1) \sim 0$ .

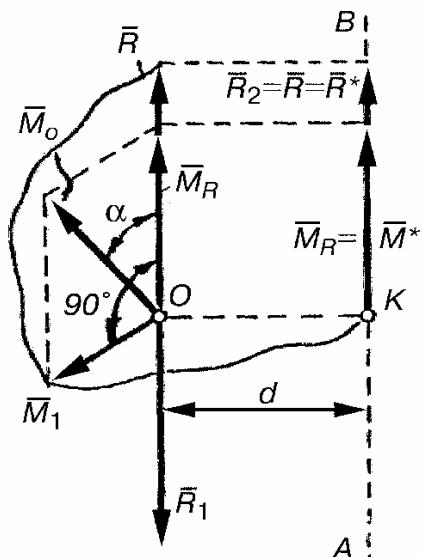


Рис. 31

Мы получили приложенную к точке  $K$  силу  $\bar{R}_2 = \bar{R}$  и векторный момент пары  $\bar{M}_R$ , параллельные друг другу, причем  $OK \perp \text{пл. } (\bar{R}, \bar{M}_0)$ . Момент  $\bar{M}_R$ , как свободный вектор, перенесем на линию действия силы  $\bar{R}_2 = \bar{R}$  и приложим в точке  $K$  (рис. 31).

$$\begin{aligned} \text{Итак, } & \left\{ \bar{R}, (\bar{M}_1, \bar{M}_R) \right\} \sim \left[ \bar{R}, (\bar{R}_1, \bar{R}_2), \bar{M}_R \right] \sim \\ & \sim \left[ (\bar{R}, \bar{R}_1), \bar{R}_2, \bar{M}_R \right] \sim (\bar{R}_2, \bar{M}_R). \end{aligned}$$

Если принять точку  $K$  за новый центр приведения, то система сил приводится к векторам  $\bar{R}_2 = \bar{R} = \bar{R}^*$  и  $\bar{M}_R = \bar{M}^*$ , параллельным друг другу. Система сил приведена к равнодействующему винту  $(\bar{R}^*, \bar{M}^*)$ .

Прямая  $AB$ , по которой направлен вектор равнодействующего винта, называется центральной осью системы сил.

Равнодействующий винт является простейшей системой, к которой может быть приведена пространственная система сил. Равнодействующая сила и равнодействующая пара являются частными случаями равнодействующего винта.

## 5.2. Вывод уравнения центральной оси

Центральная ось системы сил есть геометрическое место центров приведения, для которых главный векторный момент параллелен главному вектору  $(\bar{M}_R \parallel \bar{R})$ .

Условие параллельности векторов  $\bar{M}_R$  и  $\bar{R}$  имеет вид

$$\frac{\bar{M}_R}{\bar{R}} = p,$$

где  $p$  — параметр винта.

Воспользуемся зависимостью между главными векторными моментами относительно двух центров (рис. 32)

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_{01} &= \bar{M}_R = \bar{M}_0 + \overline{O_1 O} \times \bar{R} \\ \text{или} \\ \bar{M}_R &= \bar{M}_0 - \overline{O O_1} \times \bar{R}. \end{aligned} \right\}$$

Условие параллельности векторов  $\bar{M}_R$  и  $\bar{R}$  принимает вид

$$\frac{\bar{M}_0 - \overline{O O_1} \times \bar{R}}{\bar{R}} = p.$$

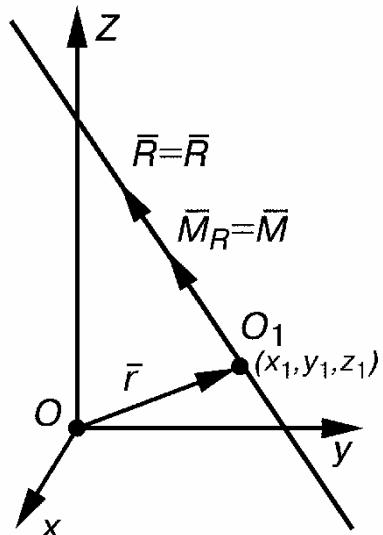


Рис. 32

Последнее уравнение представляет собой уравнение центральной оси в векторной форму. Текущей координатой в этом уравнении является радиус-вектор  $\bar{r} = \overline{O O_1}$  произвольной точки  $O_1(x, y, z)$  этой оси.

Уравнения центральной оси в проекциях на оси координат имеет вид (точка  $O$  — начало координат)

$$\begin{aligned} \frac{M_{ox} - (yR_z - zR_y)}{R_x} &= \frac{M_{oy} - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \\ &= \frac{M_{oz} - (xR_y - yR_x)}{R_z} = p. \end{aligned}$$

Если положить последовательно  $x = 0, y = 0, z = 0$ , то можно из последних уравнений определить координаты точки пересечения центральной оси с координатными плоскостями.

### 5.3. Приведение систем сил к равнодействующей силе

Для силы  $\bar{R}^*$  имеем:  $\bar{m}_0(\bar{R}^*) \perp \bar{R}^*$  (точка  $O$  не лежит на линии действия  $\bar{R}^*$ );  $\bar{m}_0(\bar{R}^*) = 0$  (точка  $O$  лежит на линии действия  $\bar{R}^*$ ).

Пусть система сил имеет равнодействующую силу

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n) \sim \overline{R}^*.$$

На основании условий эквивалентности двух систем сил получаем

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_k = \overline{R}^*; \overline{M}_0 = \sum_{k=1}^n \overline{m}_0(\overline{F}_k) = \overline{m}_0(\overline{R}^*).$$

В этом случае главный вектор и главный векторный момент перпендикулярны друг другу или этот момент равен нулю

$$\overline{R} \perp \overline{M}_0 \text{ или } \overline{M}_0 = 0.$$

Условие приведения системы сил к равнодействующей силе выражает условие перпендикулярности векторов  $\overline{R}$  и  $\overline{M}_0$  или равенство нулю вектора  $\overline{M}_0$

$$\overline{R} \cdot \overline{M}_0 = 0 \text{ или } M_{ox}R_x + M_{oy}R_y + M_{oz}R_z = 0.$$

Пусть  $\alpha = (\overline{R}, \overline{M}_0) = \frac{\pi}{2}$ .

В этом случае

$$M_R = M_0 \cos \alpha = 0; \quad M_1 = M_0 \sin \alpha = M_0 \quad (\text{см. 5.1.}).$$

Система сил приводится к равнодействующей силе  $\overline{R}_2 = \overline{R} = \overline{R}^*$ , приложенной к точке К, причем

$$OK = d = \frac{M_0}{R} \quad (\text{см. рис. 31}).$$

Если  $\overline{M}_0 = 0$ , то линия действия равнодействующей силы проходит через точку  $O$ . Равенство  $\overline{R} \cdot \overline{M}_0 = 0$  остается справедливым и в этом случае.

Формула  $\overline{m}_0(\overline{R}^*) = \sum \overline{m}_0(\overline{F}_k)$  выражает собой теорему Вариньона: **векторный момент равнодействующей силы**

**относительно точки равен сумме векторных моментов всех сил системы относительно этой точки.**

Далее получаем

$$\left. \begin{aligned} m_x(\bar{R}^*) &= \sum m_x(\bar{F}_k) \text{ и т. д.} \\ m_0(\bar{R}^*) &= \sum m_0(\bar{F}_k). \\ (\text{для плоскостной системы сил}). \end{aligned} \right\}$$

Момент равнодействующей силы относительно оси точки равен сумме моментов всех сил системы относительно этой оси (точки).

Используя теорему Вариньона, вычислим моменты сил  $\bar{F}$  и  $\bar{Q}$  относительно осей координат (рис. 33, а).

Силы  $\bar{F}$  и  $\bar{Q}$  приложены к вершинам прямоугольного параллелепипеда с ребрами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

С помощью рис. 33, б находим

$$\bar{F} = \bar{F}_x + \bar{F}_z; \bar{S} = S_x + S_y.$$

$$\left. \begin{aligned} m_x(\bar{F}) &= m_x(\bar{F}_x) + m_x(\bar{F}_z) = (F \cos \alpha)b; \\ m_y(\bar{F}) &= m_y(\bar{F}_x) + m_y(\bar{F}_z) = -(F \cos \alpha)a; \\ m_z(\bar{F}) &= m_z(\bar{F}_x) + m_z(\bar{F}_z) = (F \sin \alpha)b. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} m_x(\bar{S}) &= m_x(\bar{S}_x) + m_x(\bar{S}_y) = -(S \cos \varphi)c; \\ m_y(\bar{S}) &= m_y(\bar{S}_x) + m_y(\bar{S}_y) = -(S \sin \varphi)c; \\ m_z(\bar{S}) &= m_z(\bar{S}_x) + m_z(\bar{S}_y) = (S \cos \varphi)a. \end{aligned} \right\}$$

Если система сил имеет равнодействующую силу  $\bar{R}^* = \bar{R}$ , то центральная ось становится линией действия этой силы.

Уравнения линии действия равнодействующей силы имеют вид

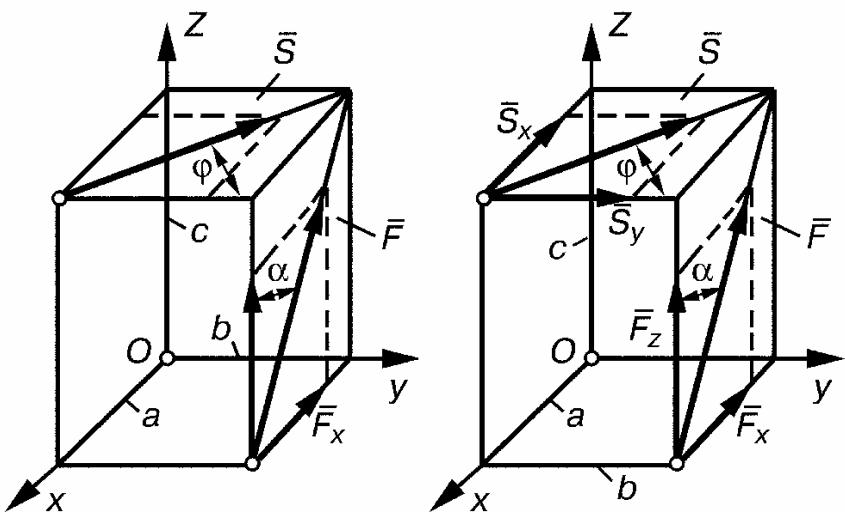


Рис. 33

$$\left. \begin{aligned} (p=0) \quad M_{ox} &= yR_z - zR_y; \\ M_{oy} &= zR_x - xR_z; \\ M_{oz} &= xR_y - yR_x. \end{aligned} \right\}$$

Эти же уравнения могут быть получены с помощью теоремы Вариньона.

#### 5.4. Приведение системы сил к равнодействующей паре сил

Для пары сил  $(\bar{S}, \bar{S}^*)$  имеем

$$\bar{R} = \bar{S} + \bar{S}^* = 0; \quad \bar{M}_0 = \bar{m}(\bar{S}, \bar{S}^*) = \bar{M}.$$

Пусть система сил имеет равнодействующую пару

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim (\bar{S}, \bar{S}^*).$$

На основании условий эквивалентности двух систем сил получаем

$$\left. \begin{aligned} \bar{R} = \sum \bar{F}_k &= \bar{S} + \bar{S}^* = 0; \\ \bar{M}_0 = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k) &= \bar{m}(\bar{S}, \bar{S}^*) = \bar{M}. \end{aligned} \right\}$$

Главный векторный момент в этом случае постоянен во всех точках тела

$$\overline{M}_{01} = \overline{M}_0 - \overline{OO_1} \times \overline{R} = \overline{M}_0 = \overline{\overline{M}} = \text{const.}$$

Если главный вектор системы равен нулю, то система сил приводится к равнодействующей паре сил, векторный момент которой равен главному векторному моменту системы сил.

Равнодействующая пара может быть реализована в любой плоскости, перпендикулярной вектору  $\overline{M}_0 = \overline{\overline{M}}$ .

## 5.5. Равнодействующая сила некоторых частных систем сил

### 5.5.1. Пространственная система параллельных сил

Пусть все силы параллельны оси  $Ox$ .

Тогда  $\overline{R}\{R_x, O, O\}, \overline{M}_0\{O, M_{ox}, M_{oy}\}$

Данная система сил имеет равнодействующую силу  $\overline{R}^* = \overline{R}$ , параллельную оси  $Ox$ .

### 5.5.2. Пространственная система сходящихся сил (см. также п. 4.4)

Пусть  $O$  — точка схода этой системы сил (начало координат). Тогда  $\overline{R}\{R_x, R_y, R_z\}, \overline{M}_0\{O, O, O\}$ .

Эта система сил имеет равнодействующую силу  $\overline{R}^* = \overline{R}$ , линия действия которой проходит через точку схода  $O$ .

### 5.5.3. Плоская система сил

Пусть все силы лежат в плоскости  $Oxy$ .

Для данной системы сил получаем

$$\overline{R}\{R_x, R_y, O\}, \overline{M}_0\{O, O, M_{oz}\}$$

$$M_{oz} = M_0 = \sum_{k=1}^n m_0(\overline{F}_k).$$

Плоская система сил имеет равнодействующую силу  $\bar{R}^* = \bar{R}$ .

#### **5.5.4. Плоская система параллельных сил**

Пусть все силы лежат в плоскости  $Oxy$  и параллельны оси  $Ox$ . Тогда  $\bar{R}\{R_x, O, O\} \bar{M}_0\{O, O, M_{oz}\}$ .

Данная система сил имеет равнодействующую силу  $\bar{R}^* = \bar{R}$ .

#### **5.5.5. Плоская система сходящихся сил**

Пусть все силы лежат в плоскости  $Oxy$ ,  $O$  — точка схода этой системы сил.

Тогда  $\bar{R}\{R_x, R_y, O\} \bar{M}_0\{O, O, O\}$ .

Плоская система сходящихся сил имеет равнодействующую силу  $\bar{R}^* = \bar{R}$ , линия действия которой проходит через точку схода  $O$ .

### **5.6. Равнодействующая пара системы пар**

#### **5.6.1. Пространственная система пар (см. также п. 4.5)**

Для пространственной системы пар имеем

$$\bar{R}\{O, O, O\} \bar{M}_0\{M_x, M_y, M_z\} \quad \bar{M}_0 = \bar{M}.$$

Данная система пар имеет равнодействующую пару  $(\bar{S}, \bar{S}^*)$ , векторный момент которой равен главному векторному моменту этой системы пар

$$\bar{m}(\bar{S}, \bar{S}^*) = \bar{M}.$$

#### **5.6.2. Плоская система пар**

Пусть все пары лежат в плоскости  $Oxy$ .

В этом случае  $\bar{R}\{O, O, O\} \bar{M}_0 = \bar{M}\{O, O, M_z\}$

Плоская система пар полностью характеризуется главным моментом

$$M = \sum_{k=1}^n m(\bar{F}_k, \bar{F}'_k) = \sum_{k=1}^n m_k,$$

который представляет собой момент равнодействующей пары  $(\bar{S}, \bar{S}^*)$ , то есть  $m(\bar{S}, \bar{S}^*) = M$ .

Таким образом, любую приложенную к твердому телу плоскую систему пар можно заменить равнодействующей парой, момент которой равен сумме моментов заданных пар.

### 5.7. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил

Пусть главный вектор  $\bar{R}$  и главный векторный момент системы сил  $\bar{M}_0$  равны нулю. В этом случае система сил находится в равновесии.

Равенство нулю главного вектора означает, что уравновешиваются все силы, приложенные в точке  $O$  (см. основную теорему статики). Равенство нулю главного векторного момента означает, что уравновешиваются все присоединенные пары.

Таким образом, для равновесия приложенной к твердому телу произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный векторный момент системы сил относительно произвольного центра были равны нулю

$$\bar{R} = 0; \bar{M}_0 = 0.$$

$$\bar{R}\{R_x, R_y, R_z\} \bar{M}_0\{M_{ox}, M_{oy}, M_{oz}\}.$$

В проекциях на оси координат получаем аналитические условия равновесия (6 уравнений равновесия)

$$\sum F_{kx} = 0; \quad (1) \quad \sum m_{ox}(\bar{F}_k) = 0; \quad (4)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad (2) \quad \sum m_{oy}(\bar{F}_k) = 0; \quad (5)$$

$$\sum F_{kz} = 0; \quad (3) \quad \sum m_{oz}(\bar{F}_k) = 0. \quad (6)$$

Итак, для равновесия приложенной к твердому телу произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси координат и суммы моментов всех сил относительно этих же осей были равны нулю.

## 5.8. Условия равновесия частных систем сил

### 5.8.1. Пространственная система параллельных сил

Пусть все силы параллельны оси  $Ox$ .

Тогда  $\bar{R}\{R_x, O, O\}, \bar{M}_0\{O, M_{oy}, M_{oz}\}$  (см. п.п. 5.5.1).

Для условий равновесия этой системы сил получаем

$$\sum F_{kx} = 0; \quad (1)$$

$$\sum m_{oy}(\bar{F}_k) = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_{oz}(\bar{F}_k) = 0. \quad (3)$$

### 5.8.2. Пространственная система сходящихся сил

Пусть  $O$  — точка схода этой системы сил (начало координат). Тогда  $\bar{R}\{R_x, R_y, R_z\}, \bar{M}_0\{O, O, O\}$

Условия равновесия имеют вид

$$\sum F_{kx} = 0; \quad (1) \quad \sum F_{ky} = 0; \quad (2) \quad \sum F_{kz} = 0; \quad (3)$$

Для равновесия произвольной пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси координат были равны нулю.

### 5.8.3. Плоская система сил

Пусть все силы лежат в плоскости  $Oxy$ . Тогда  $\bar{R}\{R_x, R_y, O\}, \bar{M}_0\{O, O, M_{oz}\}$  (см. п.п. 5.5.3).

Условия равновесия плоской системы сил имеют вид

$$\sum F_{kx} = 0; \quad (1) \quad \sum F_{ky} = 0; \quad (2) \quad \sum m_0(\bar{F}_k) = 0; \quad (3).$$

Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси координат и сумма моментов всех сил относительно произвольной точки были равны нулю.

#### 5.8.4. Плоская система параллельных сил

Пусть все силы лежат в плоскости  $Oxy$  и параллельны

оси  $Ox$ . Тогда  $\left. \begin{array}{l} \bar{R}\{R_x, O, O\} \\ \bar{M}_0\{O, O, M_z\} \end{array} \right\}$  (см. п.п. 5.5.4)

Условия равновесия этой системы имеют вид

$$\sum F_{kx} = 0; \quad (1)$$

$$\sum m_0(\bar{F}_k) = 0. \quad (2)$$

#### 5.8.5. Плоская система сходящихся сил

Пусть все силы лежат в плоскости  $Oxy$ .  $O$  — точка схода. Тогда  $\bar{R}\{R_x, R_y, O\} \bar{M}_0\{O, O, O\}$  (см. п.п. 5.5.5).

Для условий равновесия этой системы сил получаем

$$\sum F_{kx} = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0. \quad (2)$$

### 5.9. Условия равновесия системы пар

#### 5.9.1. Пространственная система пар

В этом случае  $\bar{R}\{O, O, O\}, \bar{M}_0 = \bar{M}\{M_x, M_y, M_z\}$  причем  $M_x = \sum m_{kx}, M_y = \sum m_{ky}, M_z = \sum m_{kz}$  (см. 4.2 и 5.6.1).

Для равновесия пространственной системы пар получаем

$$\overline{M} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{или } \sum m_{kx} = 0; (1) \quad \sum m_{ky} = 0; (2) \\ \sum m_{kz} = 0. (3) \end{array} \right\}$$

Для равновесия произвольной пространственной системы пар необходимо и достаточно, чтобы главный векторный момент был равен нулю или суммы проекций векторных моментов всех пар на оси координат были равны нулю.

### 5.9.2. Плоская система пар

Пусть все пары лежат в плоскости  $Oxy$ . В этом случае  $\overline{R}\{O, O, O\}, \overline{M}_0 = \overline{M}\{O, O, M_z\}$

Для условий равновесия плоской системы пар получаем

$$M_z = M = 0 \text{ или } \sum m_{kz} = \sum m_k = 0.$$

Для равновесия плоской системы пар необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех пар была равна нулю.

## 6. ЦЕНТР СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СВЯЗАННЫХ СИЛ И ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

### 6.1. Центр системы параллельных связанных сил

В данной главе все силы считаются связанными векторами.

Напомним, что связанный вектор приложен к данной точке и его никуда нельзя переносить.

Выше отмечалось, что система параллельных сил имеет равнодействующую силу, равную главному вектору.

Центром системы параллельных сил называется точка, через которую проходит линия действия равнодействующей силы при любых поворотах сил относительно точек их приложения в одну и ту же сторону и на один и тот же угол.

Другими словами, центр системы параллельных сил представляет собой точку приложения равнодействующей этой системы сил.

На рис. 34  $\bar{R}^*$  — равнодействующая системы параллельных сил  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$ ,  $C$  — центр этой системы сил.

Найдем координаты центра системы параллельных сил  $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$ .

Выберем систему координат так, чтобы все силы были параллельны оси  $O_z$  (рис. 35).

Воспользуемся теоремой Вариньона о моменте равнодействующей силы

$$\left. \begin{aligned} \sum m_{ox}(\bar{R}^*) &= \sum m_{ox}(\bar{F}_k) \text{ или } R^* y_c = \sum F_k y_k; \\ \sum m_{oy}(\bar{R}^*) &= \sum m_{oy}(\bar{F}_k) \text{ или } R^* x_c = \sum F_k x_k, \end{aligned} \right\}$$

где  $F_k = F_{kz}$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ ;  $R^* = \sum F_k = \sum F_{kz}$ .

Координаты  $x_c$  и  $y_c$  центра системы параллельных сил определяются по формулам

$$x_c = \frac{\sum F_k x_k}{\sum F_k}; \quad y_c = \frac{\sum F_k y_k}{\sum F_k}.$$

Для определения координаты  $z_c$  повернем все силы вокруг их точек приложения в одну сторону на угол  $90^\circ$  параллельно оси  $Oy$  и еще раз применим теорему Вариньона

$$\begin{aligned} m_{ox}(\bar{R}^*) &= \sum m_{ox}(\bar{F}_k) \text{ или } R^* z_c = \sum F_k z_k; \\ z_c &= \frac{\sum F_k z_k}{\sum F_k}. \end{aligned}$$

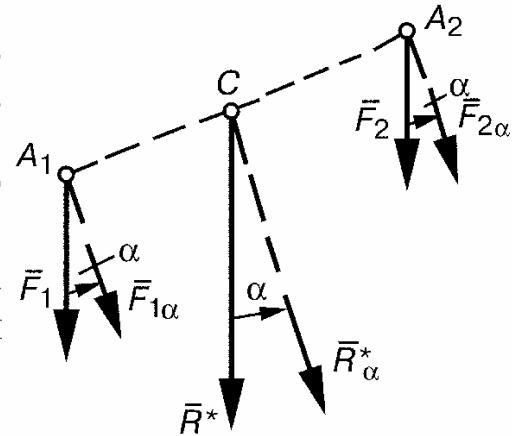


Рис. 34

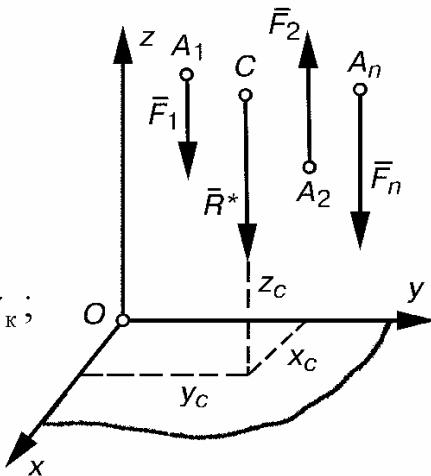


Рис. 35

Объединяя найденные формулы в одну, получим выражение для радиус-вектора  $\bar{r}_c$  центра системы параллельных сил

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}_c &= \frac{\sum F_k \bar{r}_k}{\sum F_k}; \bar{r}_c \{x_c, y_c, z_c\}, \\ \bar{r}_k \{x_k, y_k, z_k\}, k &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\}$$

## 6.2. Центр тяжести твердого тела и его координаты

На любую частицу твердого тела, находящегося вблизи поверхности Земли, действует направленная по вертикали вниз сила, называемая силой тяжести. Для тел, размеры которых малы по сравнению с земным радиусом, силы тяжести его частиц можно считать параллельными друг другу и сохраняющими постоянную величину при любых поворотах тела (рис. 36).

Центром тяжести тела называется центр параллельных сил тяжести отдельных частиц тела.

Сила тяжести тела есть равнодействующая сил тяжести отдельных частиц тела.

Центр тяжести тела представляет собой точку приложения силы тяжести тела.

Координаты центра тяжести, как центра системы параллельных сил, определяются по формулам

$$x_c = \frac{\sum p_k x_k}{\sum P}; y_c = \frac{\sum p_k y_k}{\sum P}; z_c = \frac{\sum p_k z_k}{\sum P},$$

где  $p_k$  — сила тяжести  $K$ -ой частицы тела;

$P$  — сила тяжести всего тела, причем  $P = \sum p_k$ .

## 6.3. Центр тяжести однородного твердого тела

Если тело однородное, то положение центра тяжести тела не зависит от вещества тела, а лишь от его геометрической формы.

## **Тело в виде объема**

Для этого случая имеем  $p_k = \gamma_v v_k$ ,  $P = \gamma_v V$ ,  
где  $v_k$  и  $V$  — объем  $k$ -й частицы и всего тела;  
 $\gamma_v = \text{const}$  (вес единицы объема);

$$x_c = \frac{\sum v_k x_k}{\sum V}; y_c = \frac{\sum v_k y_k}{\sum V}; z_c = \frac{\sum v_k z_k}{\sum V}.$$

## **Тело в виде плоской фигуры**

Для этого случая получаем  $p_k = \gamma_s s_k$ ,  $P = \gamma_s S$ ,  
где  $s_k$  и  $S$  — объем  $k$ -й частицы и всего тела;  
 $\gamma_s = \text{const}$  (вес единицы площади):

$$x_c = \frac{\sum s_k x_k}{\sum S}; y_c = \frac{\sum s_k y_k}{\sum S}; z_c = \frac{\sum s_k z_k}{\sum S}.$$

## **Тело в виде линии**

Для этого случая имеем  $p_k = \gamma_l l_k$ ,  $P = \gamma_l L$ ,  
где  $l_k$  и  $L$  — объем  $k$ -ой частицы и всего тела;  
 $\gamma_l = \text{const}$  (вес единицы линии):

$$x_c = \frac{\sum l_k x_k}{\sum L}; y_c = \frac{\sum l_k y_k}{\sum L}; z_c = \frac{\sum l_k z_k}{\sum L}.$$

## **6.4. Способы нахождения центров тяжести**

### **Симметрия**

Если однородное тело имеет центр симметрии, ось симметрии или плоскость симметрии, то центр тяжести тела лежит соответственно в этом центре, на этой оси и в этой плоскости.

### **Разбиение**

Положение центра тяжести тела сложной формы определяется после разбиения его на простейшие части, центры тяжести которых известны.

## **Дополнение (способ отрицательных масс)**

Этот случай является частным случаем способа разбиения. Он применяется к телам, имеющим пустые полости, в которых нет массы. Центр тяжести тела с полостями можно определить, если известен центр тяжести тела без полостей и центры тяжести заполненных полостей.

### **Интегрирование**

Если однородное тело разделить на частицы с бесконечно малым объемом, площадью и длиной, то из ранее полученных формул можно получить путем замены сумм интегралами следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{1}{V} \int_V x dv \text{ и т.д.;} \\ x_c &= \frac{1}{S} \int_S x ds \text{ и т.д.;} \\ x_c &= \frac{1}{L} \int_L x dl \text{ и т.д.} \end{aligned} \right\}$$

Этот способ используется для тел, имеющих правильную геометрическую форму.

### **Опыт (экспериментальный способ)**

Центр тяжести плоской фигуры можно найти способом подвешивания.

Подвесим фигуру на нити к точке  $A$  и отметим на ней вертикаль  $AA_1$ , на которой должен находиться центр тяжести (рис. 37,  $a$ ). Затем подвесим фигуру на нити в какой-нибудь точке  $B$  и отметим на ней вертикаль  $BB_1$ . Точка  $C$  пересечения прямых  $AA_1$  и  $BB_1$  и есть центр тяжести фигуры (рис. 37,  $b$ ).

Другим опытным способом определения центра тяжести является способ взвешивания. Тело сначала взвешивается, а

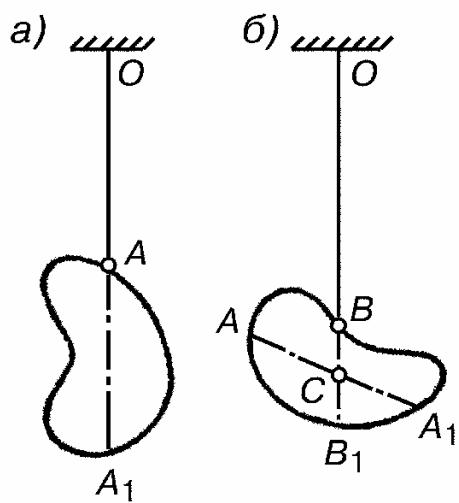


Рис. 37

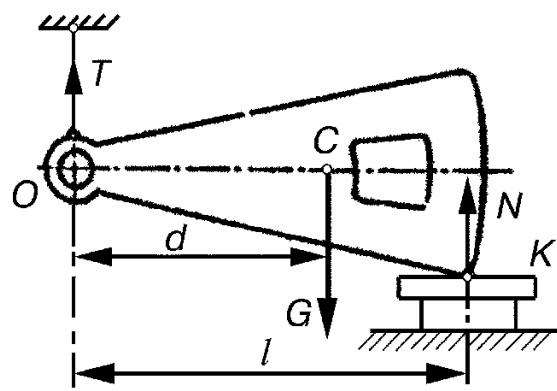


Рис. 38

затем одним концом подвешивается на нити, причем другой конец кладется на площадку весов  $K$  (рис. 38). Весы показывают величину давления тела на эту площадку или величину нормальной реакции  $N$ . Длина  $l$  измеряется. Положение центра тяжести определяется из уравнения равновесия тела

$$\sum m_0(\bar{F}_k) = 0; Nl - Gd = 0; d = \frac{N}{G}l.$$

## 6.5. Центры тяжести простейших однородных тел

### Треугольник

Разделим треугольник  $ABD$  на элементарные полоски, параллельные стороне  $AB$  (рис. 39). Эти полоски можно рассматривать как однородные стержни, центры тяжести которых находятся на медиане  $ED$ . Следовательно, центр тяжести треугольника будет находиться тоже на этой медиане. Разделив треугольник на полоски, параллельные стороне  $-AD$ , находим, что центр тяжести треугольника находится на медиане  $BK$ .

Таким образом, центр тяжести треугольника лежит в точке пересечения его медиан

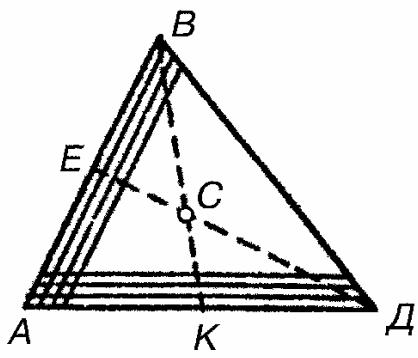


Рис. 39

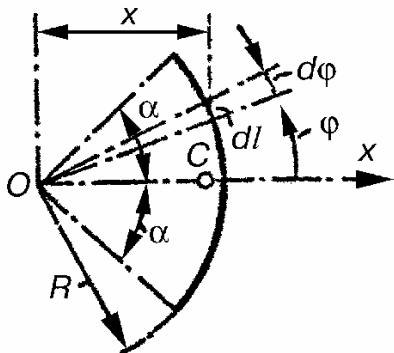


Рис. 40

$$\left. \begin{aligned} KC &= \frac{1}{3} KB; x_c = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C); \\ EC &= \frac{1}{3} ED; y_c = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C). \end{aligned} \right\}$$

### Дуга окружности

Найдем положение центра тяжести дуги окружности, имеющей угол  $2\alpha$  (рис. 40).

С помощью рис. 40 получаем

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{L} \int x dl = \frac{1}{L} \int_{-\alpha}^{\alpha} (R \cos \varphi) R d\varphi = \\ &= \frac{1}{2R\alpha} (R^2 \sin \varphi) \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \\ x &= R \cos \varphi; \quad dl = R d\varphi; \quad L = 2R\alpha. \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } OC = x_c = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

### Круговой сектор

Разделим сектор на элементарные секторы, которые можно рассматривать как треугольники. Центры тяжести этих треугольников лежат на дуге окружности радиуса

$$r = \frac{2}{3} R \quad (\text{рис. 41}). \quad \text{Определение центра}$$

тяжести сектора сводится нахождению центра тяжести дуги окружности

$$OC = x_c = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

### Полушар

Найдем положение центра тяжести полушара радиуса  $R$ .

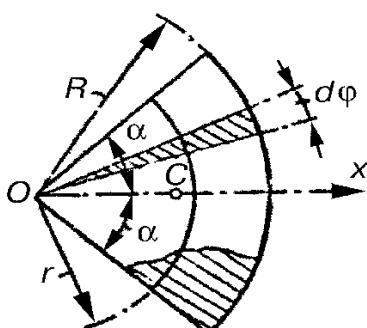


Рис. 41

С помощью рис. 42 получаем:

$$\begin{aligned} z_c &= \frac{1}{V_{(V)}} \int z dv = \frac{1}{V} \int_0^R z \pi (R^2 - z^2) dz = \\ &= \frac{1}{V} \pi \left[ R^2 \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_0^R = \frac{3}{8} R; \\ dv &= \pi r_z^2 dz; \quad r_z^2 = R^2 - z^2; \quad V = \frac{2}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

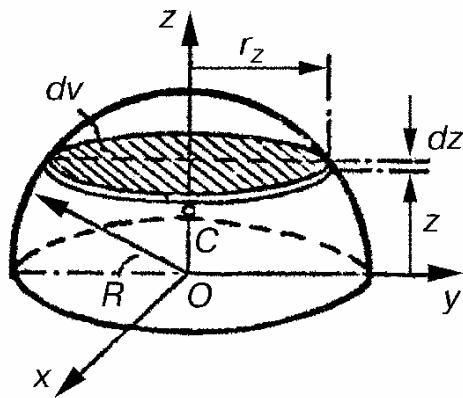


Рис. 42

$$\text{Итак, } OC = z_c = \frac{3}{8} R.$$

### Прямой круговой конус

Вычислим центр тяжести прямого кругового конуса высотой  $h$  (рис. 43).

С помощью рис. 43 получаем:

$$\begin{aligned} z_c &= \frac{1}{V_{(V)}} \int z dv = \frac{1}{V} \int_0^h z S \frac{z^2}{h^2} dz = \\ &= \frac{1}{V} S \frac{z^4}{4h^2} \Big|_0^h = \frac{3}{4} h; \end{aligned}$$

$$s_z = S \frac{z^2}{h^2}, \quad dv = s_z dz; \quad V = \frac{1}{3} Sh.$$

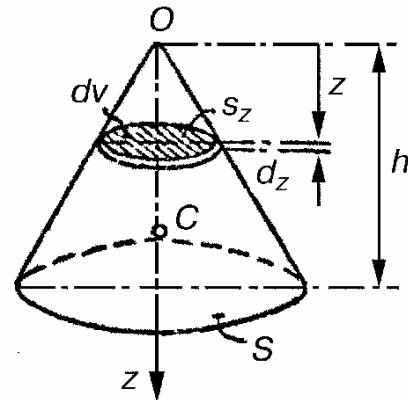


Рис. 43

$$\text{Итак, } OC = z_c = \frac{3}{4} h.$$

## 7. ТРЕНИЕ СКОЛЬЖЕНИЯ И ТРЕНИЕ КАЧЕНИЯ

### 7.1. Предварительные замечания

Трением называется сопротивление возможному или действительному перемещению соприкасающихся тел, возникающему в месте их соприкосновения.

По кинематическим признакам различают трение скольжения (трение 1-го рода) и трение качения (трение 2-го рода).

Трение подошв человека о землю, на чем основана возможность его передвижения, является примером трения скольжения. Примером же трения качения является трение при перекатывании колес вагона по рельсам.

Многие обычные способы передвижения были бы совершенно невозможны при отсутствии трения.

Трение до сих пор является недостаточно изученной областью механики и физики. Единой и стройной теории трения, охватывающей часто противоречивые данные экспериментальных исследований, до настоящего времени еще не создано.

Явление трения обусловлено множеством факторов механического, внутримолекулярного, термического, электрического и т.д. характера.

В теоретической механике рассматривается только сухое трение между поверхностями тел, когда между соприкасающимися телами нет смазывающего материала.

Полезно или вредно трение? Многие, не задумываясь, отвечают: «Конечно, вредно!» Но, если бы не было трения, мы не могли бы ходить по земле, ездить на любом колесном транспорте (колеса бы вертелись на месте), ничего нельзя было бы носить (нитки в ткани держатся силами трения). Если бы не было трения, вся мебель в комнате сбивалась бы в один угол, тарелки, стаканы и блюдца соскальзывали бы со стола, гвозди и шурупы не держались бы в стене, ни одной вещи нельзя было бы удержать в руках и т.д. Перечень подобных примеров можно продолжить, но и так ясно, что трение – явление отнюдь не вредное. Оно вредно только в машинах, и инженеры принимают меры к его снижению, применяя шарикоподшипники, смазку и т.д.

Трение – следствие многих причин, но основными из них являются две. Во-первых, поверхности тел всегда неровны, и зазубрины одной поверхности цепляются за шероховатости другой. Это так называемое геометрическое трение.

Во-вторых, трещиющиеся тела очень близко соприкасаются друг с другом, и на их движение оказывает влияние взаимодействие молекул (молекулярное трение).

## 7.2. Законы Кулона

Шарль Кулон (1736–1806 гг.) установил основные приближенные законы для сухого трения скольжения при покое. Эти законы справедливы, когда поверхности тел не вдавливались друг в друга, а их шероховатость была не слишком велика.

Законы Кулона можно установить на приборе, схема которого дана на рис. 44. На этом приборе, изменения вес гири  $\bar{P}$ , можно изменять нормальное давление между трещищимися поверхностями. Изменяя же вес гири  $\bar{Q}$ , можно изменять тяговую (сдвигающую) силу  $\bar{T}$  ( $T = Q$ ), которая стремится двигать тело вдоль поверхности другого тела, являющегося связью.

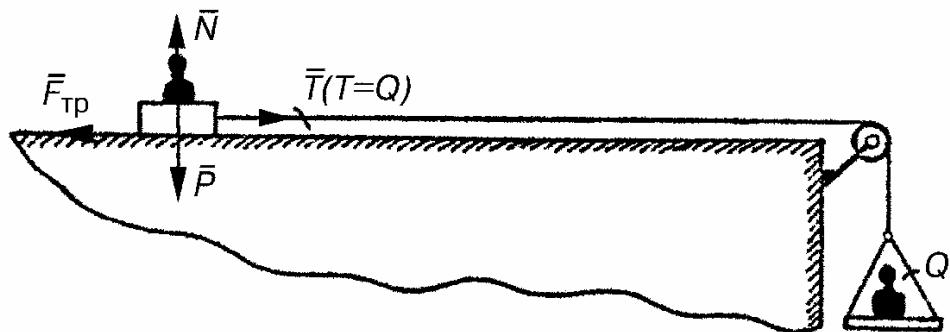


Рис. 44

Если силу  $\bar{T}$  увеличивать, то по условию равновесия возникнет сила трения  $\bar{F}_{\text{тр}}$ , причем  $\bar{F}_{\text{тр}} = \bar{T}$ . Можно достичь положения, когда сила  $\bar{T}$  выведет тело из равновесия и оно будет скользить по поверхности связи. В предельном положении равновесия тела сила трения становится максималь-

ной и не может уравновесить силу  $\bar{T}$  при ее дальнейшем увеличении.

Сформулируем законы Кулона для трения скольжения.

**Первый закон.** Сила трения скольжения равна сдвигающей силе и заключена между нулем и максимальным значением, которое достигается в момент выхода тела из положения равновесия

$$0 \leq F_{\text{тр}} \leq F_{\text{тр/макс}}$$

(условие отсутствия скольжения тела).

**Второй закон.** Максимальная сила трения скольжения при прочих условиях не зависит от площади соприкосновения трущихся поверхностей.

Из этого закона следует, что для того, чтобы сдвинуть, например, кирпич, надо приложить одну и ту же силу независимо от того, какой гранью он положен на поверхность – широкой или узкой.

**Третий закон.** Максимальная сила трения скольжения пропорциональна силе нормального давления тела на опорную поверхность

$$F_{\text{тр/макс}} = fN$$

(условие начала скольжения тела)

$$\bar{N} = -\bar{Q}; N = Q;$$

где  $\bar{N}$  — нормальная реакция опорной поверхности;

$\bar{Q}$  — сила давления тела на эту поверхность.

Безразмерный коэффициент  $f$  называют коэффициентом трения скольжения или коэффициентом трения 1-го рода.

**Четвертый закон.** Коэффициент трения скольжения зависит от материала и физического состояния трущихся поверхностей (степени шероховатости, влажности, температуры и других условий).

Коэффициент трения скольжения в зависимости от различных условий устанавливается экспериментально.

Приведем значения коэффициента трения скольжения для некоторых материалов:

Сталь по льду	0,027
Сталь по стали	0,15
Бронза по чугуну	0,16
Бронза по железу	0,19
Кожаный ремень по чугуну	0,28
Дуб по дубу	0,54–0,62

Приведенные выше данные содержат лишь приближенную оценку коэффициентов трения скольжения и поэтому пригодны лишь для приближенных технических расчетов. В некоторых случаях приходится ставить особые эксперименты для определения более точных значений коэффициентов трения.

Законы Кулона приближенно справедливы при скольжении одного тела по поверхности другого с некоторой относительной скоростью. При этом коэффициент трения зависит от относительной скорости скольжения. Для большинства материалов он уменьшается с увеличением этой скорости. В приближенных технических расчетах обычно считают, что коэффициент трения скольжения не зависит от относительной скорости скольжения тела.

### 7.3. Угол и конус трения

Пусть твердое тело под действием активных сил находится на шероховатой поверхности в предельном состоянии равновесия, когда сила трения достигает своего максимального значения  $F_{\text{тр}} = F_{\text{тр}/\max}$  при данном значении реакции (рис. 45). В этом случае полная реакция шероховатой поверхности отклонена от нормали общей касательной плоскости трущихся поверхностей на наибольший угол  $\phi = \phi_{\text{тр}}$ .

Угол между полной реакцией, построенной на наибольшей силе трения при данной нормальной реакции, и направлением нормальной реакции, называется углом трения.

$$\varphi_{\text{тр}} = (\bar{R}_{\max}, \wedge \bar{N}); \bar{R}_{\max} = \bar{F}_{\text{тр}/\max} + \bar{N}.$$

Из рис. 45 следует

$$\operatorname{tg} \varphi_{\text{тр}} = \frac{\bar{F}_{\text{тр}/\max}}{\bar{N}}; F_{\text{тр}/\max} = fN.$$

Тангенс угла трения равен коэффициенту трения

$$\operatorname{tg} \varphi_{\text{тр}} = f.$$

Конус с вершиной в точке приложения нормальной реакции шероховатой поверхности, образующая которого составляет угол трения с этой нормальной реакцией, называется конусом трения (рис. 45).

Все максимальные реакции шероховатой поверхности направлены вдоль образующих конуса трения.

Если коэффициент трения во всех направлениях одинаков, то конус трения круговой.

Конус трения интересен тем, что ограниченная им область определяет область равновесия тела. Если линия действия равнодействующей активных сил проходит внутри конуса трения, то эта сила не сдвигает тело, как бы она ни была велика. Если же линия действия равнодействующей активных сил расположена вне конуса трения, то эта сила сдвинет тело, как бы мала она ни была.

#### 7.4. Трение качения

Если рассматриваемое тело имеет форму цилиндрического катка и под действием активных сил может катиться по поверхности другого тела, то из-за деформации поверхностей этих тел в месте их соприкосновения возникают силы реакции, препятствующие как скольжению, так и качению катка. Примерами таких катков являются различные колеса, например, колеса локомотивов, электровозов, вагонов, автомашин и т.д.

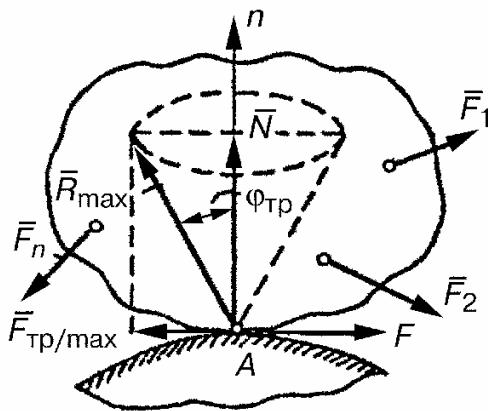


Рис. 45

Пусть к оси катка веса  $P$ , находящегося на горизонтальной плоскости, приложена горизонтальная сила  $\bar{T}$  (рис. 46). Соприкосновение катка с плоскостью из-за их деформации происходит не вдоль одной образующей цилиндра, как в случае абсолютно твердых тел, а по некоторой площадке  $BC$ . Точка приложения реакций  $\bar{N}$  и  $\bar{F}_{\text{тр}}$  будет находиться в некоторой точке  $E$  этой площадки.

Из условий равновесия катка имеем

$$T - F_{\text{тр}} = 0; N - P = 0; N\varepsilon - Tr = 0.$$

На каток действуют две уравновешенные пары сил

$$\{(\bar{T}, \bar{F}_{\text{тр}}), (\bar{N}, \bar{P})\} \sim 0.$$

Пара  $(\bar{T}, \bar{F}_{\text{тр}})$  стремится привести каток в движение; пара  $(\bar{P}, \bar{N})$  препятствует движению.

Момент пары  $(\bar{P}, \bar{N})$  называется моментом сопротивления качению.

Итак, реакция плоскости на каток состоит из нормальной реакции  $\bar{N}$ , касательной реакции  $\bar{F}_{\text{тр}}$  (силы трения качения), из пары трения качения  $(\bar{P}, \bar{N})$  с моментом сопротивления качению.

Установлены следующие приближенные законы трения качения.

**Первый закон.** Максимальный момент пары сил, препятствующий качению, в широких пределах не зависит от радиуса катка.

**Второй закон.** Максимальный момент сопротивления качению пропорционален силе нормального давления катка на

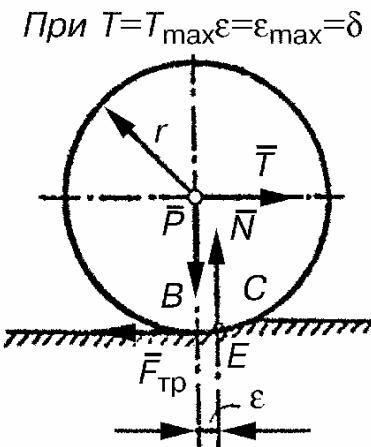


Рис. 46

опорную плоскость и достигается в момент выхода катка из положения равновесия

$$M_{\max} = \delta N; \delta = \varepsilon_{\max}.$$

(условие начала качения катка)

Коэффициент  $\delta$  называют коэффициентом трения качения или коэффициентом трения 2-го рода. Он имеет размерность длины.

Коэффициент трения качения равен плечу пары сопротивления качению при предельном равновесии катка (рис. 46).

**Третий закон.** Коэффициент трения качения зависит от материала катка, опорной плоскости, а также от физического состояния их поверхностей.

В момент начала качения катка (выхода катка из положения равновесия) (рис. 46)

$$T = T_{\max}; \delta = \varepsilon_{\max}; N\delta - T_{\max}r = 0.$$

Коэффициенты трения скольжения устанавливаются экспериментально.

Приведем значения коэффициентов трения качения для некоторых материалов:

Стальной каток по стали	0,005 см
Деревянный каток по стали	0,03–0,04 см
Деревянный каток по дереву	0,05–0,08 см
Колесо вагона по рельсу	≈0,05 см
Резиновая шина по шоссе	≈0,24 см

Коэффициент трения качения при качении можно считать не зависящим от угловой скорости качения катка и его скорости скольжения по плоскости.

Законы трения качения, как и законы трения скольжения, справедливы для не очень больших нормальных давлений и не слишком легко деформируемых материалов катка и плоскости.

Вычислим тяговую силу, необходимую для начала скольжения тела и для начала качения катка радиуса  $r$  одинакового веса  $P$  по горизонтальной плоскости

$$\left. \begin{aligned} T^{(ck)} &= T_{\max}^{(ck)} = fN = fP; \\ T^{(кач)} &= T_{\max}^{(кач)} = N \frac{\delta}{r} = \frac{\delta}{r} P; \\ T_{\max}^{(кач)} &= \frac{\delta}{r} fT_{\max}^{(ck)}. \end{aligned} \right\}$$

Обычно  $\frac{\delta}{r} \ll f$ . Следовательно, для начала качения кат-

ка требуется значительно меньшая сила, чем для начала скольжения тела одинакового веса по горизонтальной плоскости. С точки зрения затрат энергии выгодно заменять скольжение качением. Изобретение колеса примерно 5000 лет назад явилось огромным достижением человечества по пути борьбы с трением.

### **ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**

Последовательность решения задач на равновесие твердых тел

1. Выделить тело, равновесие которого будет рассмотрено в данной задаче.
2. Освободить тело от связей, приложить к нему заданные силы и реакции связей.
3. Установить, какая система сил приложена к телу.
4. Построить систему координат и составить уравнения равновесия сил, приложенных к телу (уравнения равновесия тела).
5. Решить уравнения равновесия и найти неизвестные величины.

#### **Задача 1**

К гладкой вертикальной стене на веревке  $AC$  подведен шар. Веревка составляет со стеной угол  $\alpha$ , вес шара равен  $P$  (рис. 47). Найти давление шара на стену и натяжение веревки.

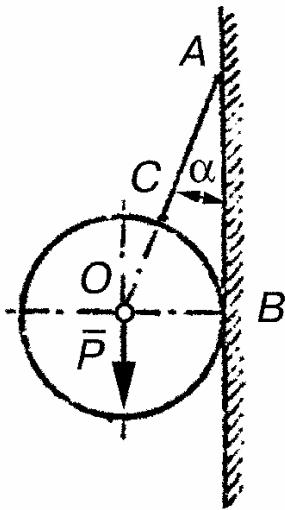


Рис. 47

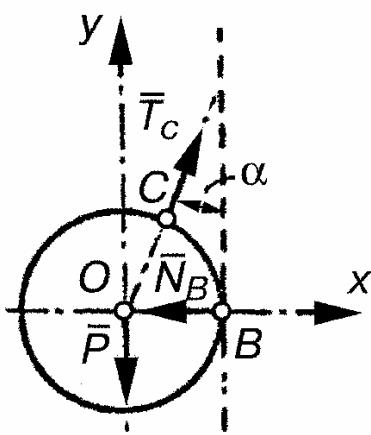


Рис. 48

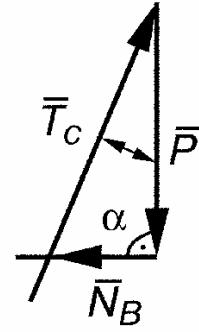


Рис. 49

**Решение.** Рассмотрим равновесие шара. Освободим шар от связей, приложим к нему реакции связей. Перерезав веревку, заменим ее действие на шар реакцией (натяжением) веревки  $\bar{T}_C$ ; убрав стену, ее действие на шар заменяем нормальной реакцией стены  $\bar{N}_B$  (рис. 48).

Воспользуемся геометрическим способом решения задачи.

На свободный, находящийся в равновесии шар действует плоская уравновешенная система сходящихся сил

$$(\bar{P}, \bar{T}_C, \bar{N}_B) \sim 0.$$

Равнодействующая этой системы сил, равная сумме всех сил, равна нулю

$$\bar{P} + \bar{T}_C + \bar{N}_B = 0.$$

Строим на силах  $\bar{P}$ ,  $\bar{T}_C$ ,  $\bar{N}_B$  силовой треугольник (рис. 49). Из этого треугольника получаем

$$N_B = P \operatorname{tg} \alpha; \quad (1)$$

$$T_C = \frac{P}{\cos \alpha}. \quad (2)$$

Воспользуемся аналитическим способом решения задачи.

Построим систему координат  $Oxy$  (рис. 48). Составим условия равновесия плоской системы сходящихся сил, приложенной к шару

$$\sum F_{kx} = 0; -N_B + T_C \sin \alpha = 0; \quad (3)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad T_C \cos \alpha - P = 0. \quad (4)$$

Из (3) и (4) вновь получаем (1) и (2).

### Задача 2

Балка  $AB$  удерживается в горизонтальном положении стержнем  $CD$  (рис. 50). В точке  $B$  к балке приложена сила  $F = 6$  кН, направленная вертикально вниз. Крепления в точках  $A$ ,  $C$  и  $D$  шарнирные. Определить реакции опор  $A$  и  $C$ , если  $AC = a = 2$  м,  $CB = b = 1$  м,  $\alpha = 60^\circ$ . Силами тяжести балки и стержня пренебречь.

**Решение.** Рассмотрим равновесия балки  $AB$ . Отбросим связи и заменим их действие реакциями связей. На рис. 51 показаны реакции  $\bar{R}_A$  и  $\bar{S}_C$  шарниров  $A$  и  $C$ . Линия действия реакции  $\bar{R}_A$  определяется с помощью теоремы о равновесии трех непараллельных сил. Она проходит через точку  $E$  пересечения линий действия сил  $\bar{F}$  и  $\bar{S}_C$ .

Теперь балку  $AB$  можно рассматривать как свободное твердое тело, находящееся в равновесии под действием трех сил, образующих плоскую систему сходящихся сил.

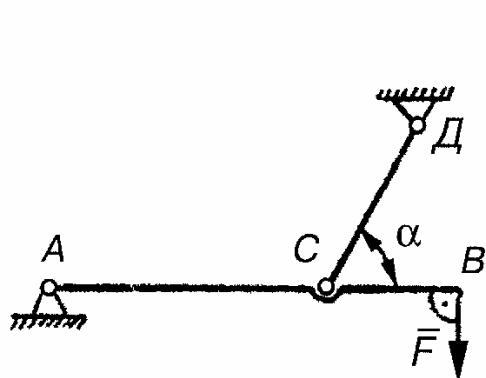


Рис. 50

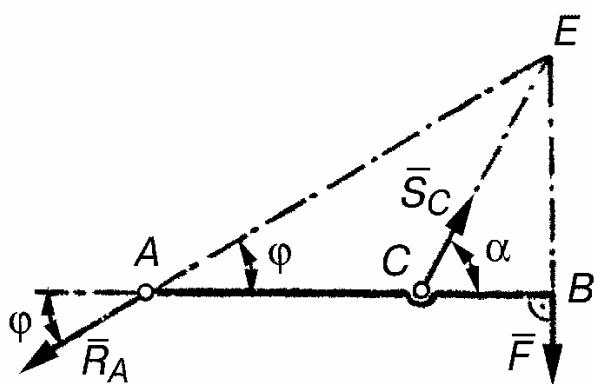


Рис. 51

Условия равновесия этой системы сил имеют вид (рис. 51)

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{\text{кx}} &= 0; R_A \cos \varphi + S_C \cos \alpha = 0; \\ \sum F_{\text{ky}} &= 0; -R_A \sin \varphi + S_C \sin \alpha - F = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1) \quad (2)$$

Из (1) и (2) находим

$$R_A = S_C \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi}; \quad (3)$$

$$S_C = \frac{F}{\sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi}. \quad (4)$$

Из рис. 51

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{BE}{AB} = \frac{b}{a+b} \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (5)$$

После подстановки (5) в (4) получаем

$$S_C = \frac{F}{\sin \beta} \cdot \frac{a+b}{a}. \quad (4')$$

Вычисления приводят к следующим результатам:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{3} \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}; \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}; \varphi = 30^\circ;$$

$$S_C = \frac{F}{\sin \alpha} \cdot \frac{a+b}{a} = 6\sqrt{3} = 10,4 \text{ кН};$$

$$R_A = S_C \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi} = 6 \text{ кН}.$$

### Задача 3

Через блок перекинута веревка  $ABC\bar{D}$ , к вертикальной части которой  $\bar{D}$  прикреплен груз весом  $P$  (рис. 52). Определить натяжение наклонной части веревки  $AB$ .

**Решение.** Рассмотрим последовательно равновесие груза и блока (рис. 53, а и 53, б).

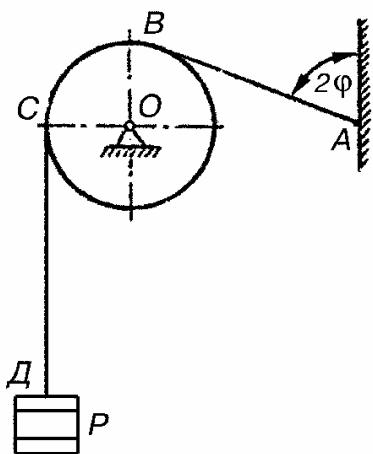


Рис. 52

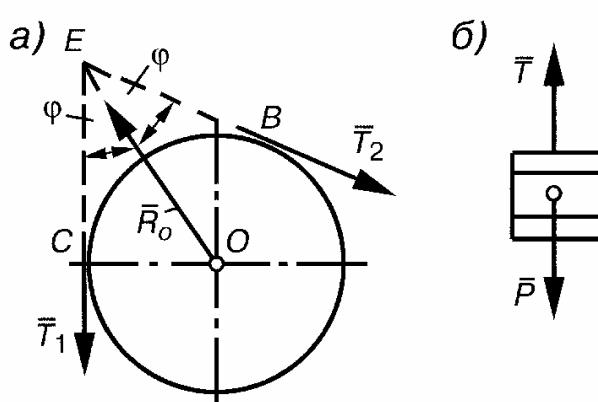


Рис. 53

На груз действуют силы  $\bar{P}$  и  $\bar{T}$  (натяжение вертикальной части веревки). Очевидно, что  $(\bar{P}, \bar{T}) \sim 0; \bar{T} + \bar{P} = 0;$

$$\bar{T} = -\bar{P}; T = P.$$

На блок действуют силы  $\bar{T}_1$ ,  $\bar{T}_2$  и  $\bar{R}_o$  (натяжения частей веревки и реакция шарнира  $O$ ).

По теореме о трех силах линии действия реакции  $\bar{R}_o$  проходит через точку  $E$ .

Очевидно, что

$$(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{R}_o) \sim 0; \bar{T}_1 + \bar{T}_2 + \bar{R}_o = 0;$$

$$\bar{T}_1 = -\bar{T}; T_1 = T = P.$$

Строим силовой треугольник (рис. 54). Этот треугольник является равнобедренным, поэтому  $T_2 = T_1$  или  $T_2 = T_1 = P$ .

Итак, блок изменяет направление силы, но не изменяет ее величины.

#### Задача 4

Однородный стержень  $AB$  весом  $G$  может вращаться вокруг оси  $A$  (рис. 55).

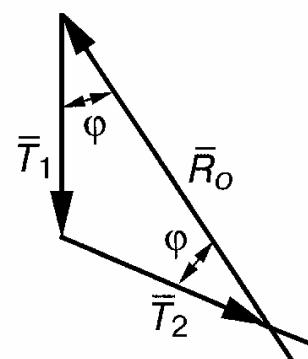


Рис. 54

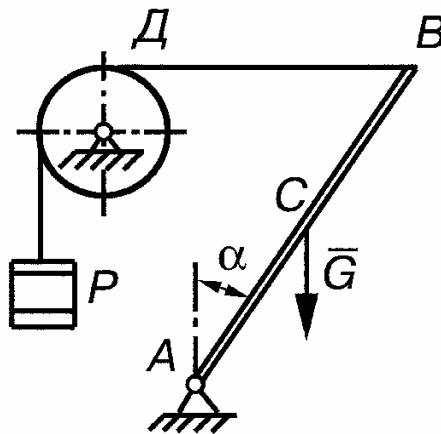


Рис. 55

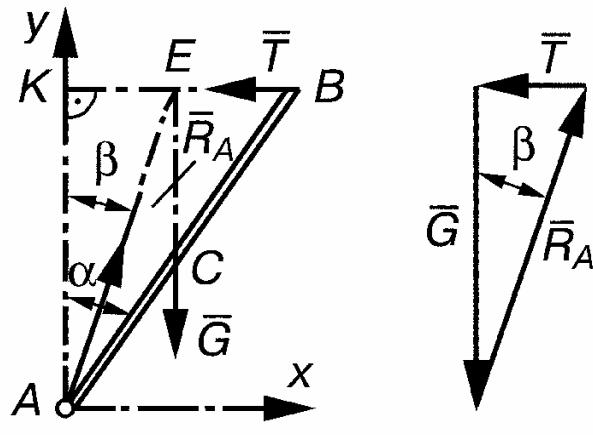


Рис. 56

Рис. 57

К точке  $B$  стержня прикреплена нить, перекинутая через блок, а к свободному концу нити подвешен груз весом  $P$ . Определить реакцию шарнира  $A$  и угол  $\alpha$ , который составляет стержень с вертикалью при равновесии, если участок нити  $BD$  горизонтален.

**Решение.** Рассмотрим равновесие стержня  $AB$  (рис. 56). Разорвем нить, а ее действие заменим реакцией (натяжением)  $\bar{T}$ , причем  $T = P$ . Линия действия реакции  $\bar{R}_A$  шарнира  $A$  определяется при помощи теоремы о трех силах. Она проходит через точку  $E$  пересечения линий действия сил  $\bar{T}$  и  $\bar{G}$ . Система сил  $(\bar{G}, \bar{T}, \bar{R}_A)$  является уравновешенной, поэтому

$$\bar{G} + \bar{T} + \bar{R}_A = 0.$$

Строим на силах  $\bar{G}, \bar{T}, \bar{R}_A$  силовой треугольник, который подобен построенному на рис. 56 треугольнику  $AKE$ . С помощью рис. 56 и 57 получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BK}{AK} = \frac{2KE}{AK} = 2 \operatorname{tg} \beta = 2 \frac{T}{G} = 2 \frac{P}{G},$$

$$R_A = \sqrt{T^2 + G^2} = \sqrt{P^2 + G^2}.$$

Проверим полученные результаты аналитическим способом, составив условия равновесия стержня (рис. 56)

$$\left. \begin{array}{l} \sum F_{kx} = 0; R_{AX} - T = 0; \quad (1) \\ \sum F_{ky} = 0; R_{AY} - G = 0; \quad (2) \\ \sum m_A (\bar{F}_k) = 0; T(AB \cos \alpha) - G \left( \frac{1}{2} AB \sin \alpha \right) = 0. \quad (3) \end{array} \right\}$$

Из (1), (2), (3) находим  $R_{AX} = T$ ;  $R_{AY} = G$ ;

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2T}{G} = \frac{2P}{G} \quad (T = P);$$

$$R_A = \sqrt{R_{AX}^2 + R_{AY}^2} = \sqrt{P^2 + G^2}.$$

### Задача 5

Груз весом  $Q = 300$  Н подведен к узлу  $A$ , удерживаемому в равновесии двумя стержнями и тросом (рис. 58). Найти усилия  $S_1$  и  $S_2$  в стержнях  $AB$  и  $AC$ , а также усилие  $T$  в тросе  $AD$ , если  $\angle PCBA = \angle PBCA = \alpha = 60^\circ$  и  $\angle POAD = \beta = 30^\circ$ . Плоскость  $ABC$  горизонтальна. Крепление стержней в точках  $B$  и  $C$  шарнирные.

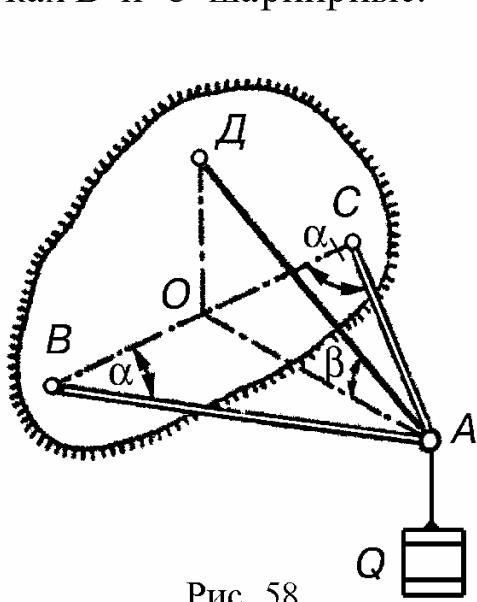


Рис. 58

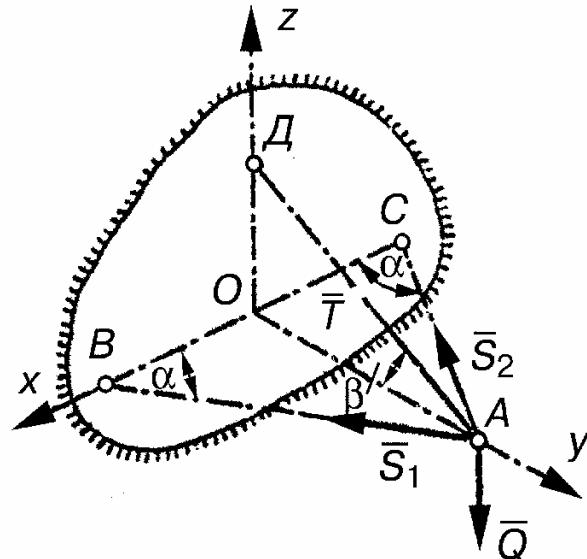


Рис. 59

**Решение.** Рассмотрим равновесие узла  $A$ . Освободим этот узел от связей, приложим к нему реакции связей. На рис. 59 показаны реакции  $\bar{S}_1$  и  $\bar{S}_2$  стержней  $AB$  и  $AC$ , а также реакция груза  $\bar{T}$  троса  $AD$ . К узлу  $A$  приложена еще сила тяжести груза  $\bar{Q}$ . Узел  $A$  рассматриваем как свободное твердое тело, находящееся в равновесии под действием четырех сил, образующих пространственную систему сходящихся сил.

Построим систему координат  $Oxyz$  и составим условия равновесия (рис. 59).

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0; S_1 \cos \alpha - S_2 \cos \alpha = 0; \quad (1) \\ \sum F_{ky} &= 0; -S_1 \sin \alpha - S_2 \sin \alpha - T \cos \beta = 0; \quad (2) \\ \sum F_{kz} &= 0; -Q + T \sin \beta = 0. \quad (3) \end{aligned} \right\}$$

Из (1), (2), (3) получаем

$$T = \frac{Q}{\sin \beta} = 600 \text{ Н}; \quad S_1 = S_2 = S;$$

$$S_1 = S_2 = \frac{1}{2} T \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = -300 \text{ Н.}$$

Знак «минус» у значений  $S_1$  и  $S_2$  свидетельствует о том, что силы  $\bar{S}_1$  и  $\bar{S}_2$  направлены в стороны, противоположные указанным на рис. 59.

### Задача 6

Арочная ферма имеет неподвижный опорный шарнир в точке  $A$ , в точке  $B$  — подвижную гладкую опору, плоскость которой наклонена под углом  $30^\circ$  (рис. 60). Пролет  $AB = 2l = 20$  м. Центр тяжести фермы, вес которой вместе со снеговой нагрузкой  $G = 100$  кН, находится в точке  $C$ . Равнодействующая сил давления ветра  $Q = 20$  кН; эта сила направлена параллельно  $AB$ , причем линия ее действия от-

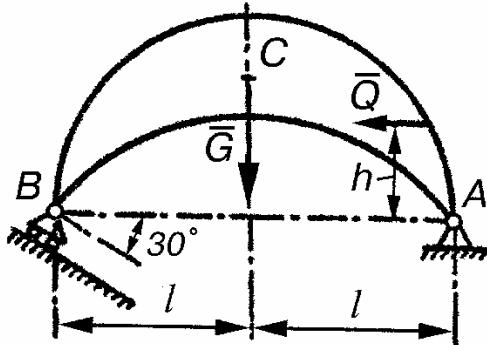


Рис. 60

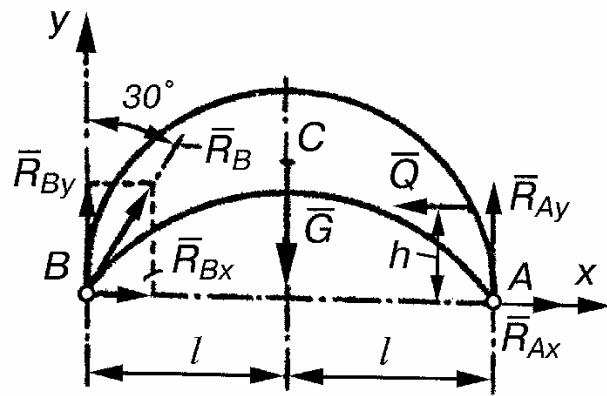


Рис. 61

стоит от  $AB$  на расстоянии  $h = 4$  м. Определить опорные реакции фермы.

**Решение.** Рассмотрим равновесие фермы. Освободим ферму от связей, приложим к ней реакции связей. На рис. 61 показаны приложенные к ферме силы:  $\bar{G}$ ,  $\bar{Q}$ ,  $\bar{R}_B$  (реакция опоры  $B$ ),  $\bar{R}_{Ax}$ ,  $\bar{R}_{Ay}$  (составляющие реакции шарнира  $A$ ).

Условия равновесия фермы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0; R_B \cos 60^\circ + R_{Ax} - Q = 0; \quad (1) \\ \sum F_{ky} &= 0; R_B \cos 30^\circ + R_{Ay} - G = 0; \quad (2) \\ \sum m_B (\bar{F}_k) &= 0; R_{Ay} 2l + Qh - Gl = 0. \quad (3) \end{aligned} \right\}$$

Из (1), (2), (3) находим

$$\begin{aligned} R_{Ax} &= -11,2 \text{ кН}; \quad R_{Ay} = 46 \text{ кН}; \\ R_B &= 62,4 \text{ кН}; \end{aligned}$$

Сила  $\bar{R}_{Ax}$  направлена в сторону, противоположную указанному направлению на рис. 61.

### Задача 7

Однородная балка весом  $G = 600$  Н и длиной  $l = 4$  м опирается одним концом на гладкий пол, а промежуточной точкой  $B$  — на столб высотой  $h = 3$  м, образуя с вертикалью угол  $30^\circ$  (рис. 62). Балка удерживается в таком положении

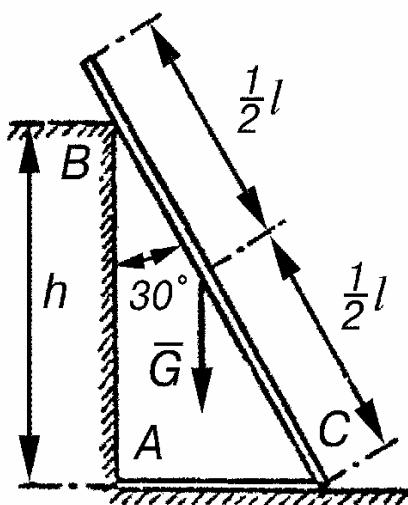


Рис. 62

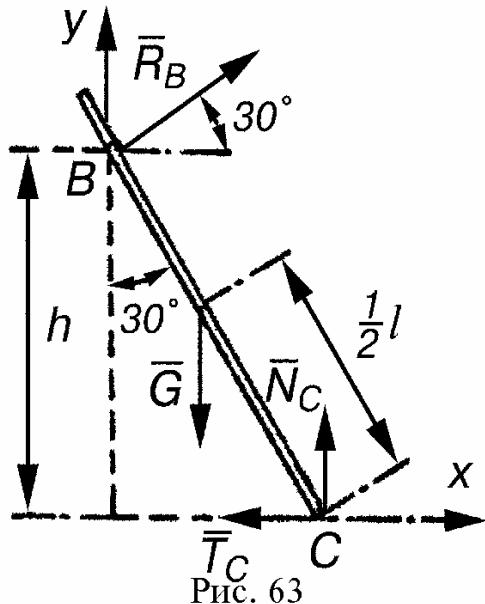


Рис. 63

веревкой  $AC$ , протянутой по полу. Пренебрегая трением, определить натяжение веревки, реакции столба и пола.

**Решение.** Рассмотрим равновесие балки. Освободим ее от связей, приложим к ней реакции связей (рис. 63). К балке приложены силы  $\bar{G}$ ,  $\bar{N}_C$  (нормальная реакция пола),  $\bar{T}_C$  (натяжение веревки),  $\bar{R}_B$  (реакция столба).

Составим условия равновесия балки

$$\left. \begin{array}{l} \sum F_{kx} = 0; R_B \cos 30^\circ - T_C = 0; \quad (1) \\ \sum F_{ky} = 0; R_B \cos 60^\circ - G + N_C = 0; \quad (2) \\ \sum m_C (\bar{F}_k) = 0; -R_B \frac{h}{\cos 30^\circ} + G \frac{1}{2} l \sin 30^\circ = 0. \quad (3) \end{array} \right\}$$

Из (1), (2), (3) находим

$$R_B = 173 \text{ Н}; \quad N_C = 513 \text{ Н}; \quad T_C = 150 \text{ Н}.$$

### Составные конструкции

При решении многих задач статики требуется изучить равновесие конструкции, состоящей из нескольких твердых тел, связанных между собой при помощи шарниров, нитей и т.д.

Пусть конструкция состоит из двух тел. В этом случае необходимо рассмотреть равновесие всей конструкции в целом и равновесие одного из двух твердых тел, входящих в ее состав. Можно рассмотреть равновесие каждого твердого тела в отдельности (второй способ).

Таким образом, для конструкции, состоящей из двух твердых тел, могут быть составлены 6 независимых между собой уравнений равновесия (при действии плоской системы сил).

Простейшая задача этого типа была рассмотрена выше (см. задачу 3).

### Задача 8

На гладкой горизонтальной плоскости стоит передвижная лестница  $ABC$ , состоящая из двух частей, соединенных между собой шарниром  $B$  и веревкой  $DE$  (рис. 64). Вес каждой части лестницы  $P$ , размеры  $AB = BC = 1$  и  $AD = -EC = \frac{1}{4}l$ . В точке  $K$  на расстоянии  $BK = \frac{1}{3}l$  стоит человек весом  $G$ . Определить реакции пола и шарнира  $B$ , а также натяжение веревки  $DE$ .

**Решение.** Рассмотрим последовательно равновесие лестницы в целом и ее левой части. Освободим лестницу от связей, приложим к ней реакции связей. На нее действуют силы  $\bar{P}, \bar{P}, \bar{G}$  (силы тяжести),  $\bar{N}_A$  и  $\bar{N}_C$  (реакция пола).

Составим условия равновесия лестницы (рис. 64)

$$\sum F_{kx} = 0; 0 \equiv 0.$$

$$\sum F_{ky} = 0; N_A + N_C - P - P - G = 0; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sum m_A(\bar{F}_k) &= 0; N_C 2l \cos 60^\circ - P \frac{3}{2} l \cos 60^\circ - \\ &- G \frac{4}{3} l \cos 60^\circ - P \frac{1}{2} l \cos 60^\circ = 0. \quad (2) \end{aligned}$$

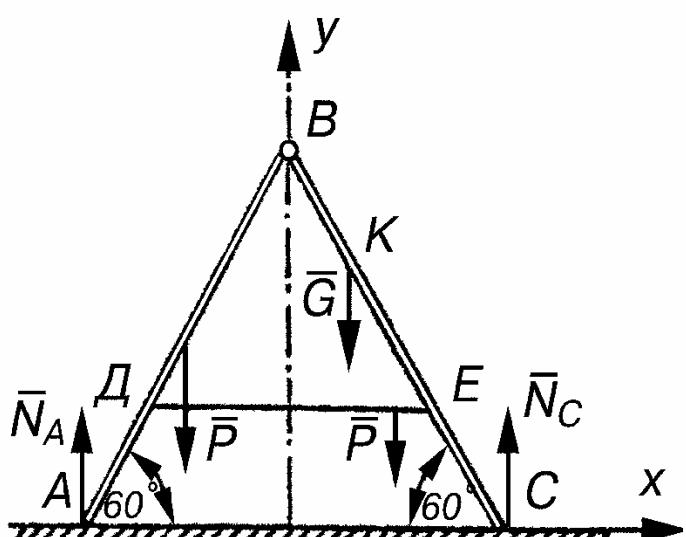


Рис. 64

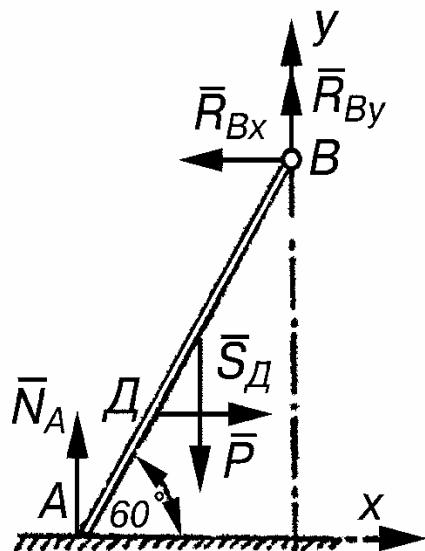


Рис. 65

Освободим левую часть лестницы от связей и приложим к ней реакции связей (рис. 65). На рис. 65 показаны составляющие реакции  $\bar{R}_{\text{bx}}$ ,  $\bar{R}_{\text{by}}$  шарнира и натяжение  $\bar{S}_d$  веревки.

Условия равновесия левой части лестницы имеют вид

$$\sum F_{\text{xx}} = 0; \quad S_D - R_{\text{BX}} = 0; \quad (3)$$

$$\sum F_{\text{ky}} = 0; \quad N_A - P - R_{\text{BY}} = 0; \quad (4)$$

$$\sum m_B(\bar{F}_k) = 0; -N_A l \cos 60^\circ + S_D \frac{3}{4} l \sin 60^\circ - P \frac{1}{2} l \cos 60^\circ = 0. \quad (5)$$

Из (1)–(5) можно определить реакции пола  $NA$ ,  $NC$ , натяжение веревки  $S = SD$  и составляющие реакции  $\bar{R}_{bx}$ ,  $\bar{R}_{by}$  шарнира  $B$ .

### Задача 9

К заделанной в стену балке  $OA$  прикреплен в точке  $A$  прямоугольный параллелепипед, нагруженный силами  $\bar{F}_1$ ,  $\bar{F}_2$  и парой сил с моментом  $M$  (рис. 66). Определить

реакции заделки. Силами тяжести балки и параллелепипеда пренебречь.

**Решение.** Освободим балку от связей, приложим к ней реакции связей (рис. 66). Разложим реакцию заделки на составляющие  $\bar{R}_{ox}$ ,  $\bar{R}_{oy}$ ,  $\bar{R}_{oz}$  вдоль осей координат. Пару сил заделки разложим на три пары, лежащие в плоскостях  $Oyz$ ,  $Oxz$ ,  $Oxy$ . Моменты этих пар обозначим соответственно  $m_{ox}$ ,  $m_{oy}$ ,  $m_{oz}$ .

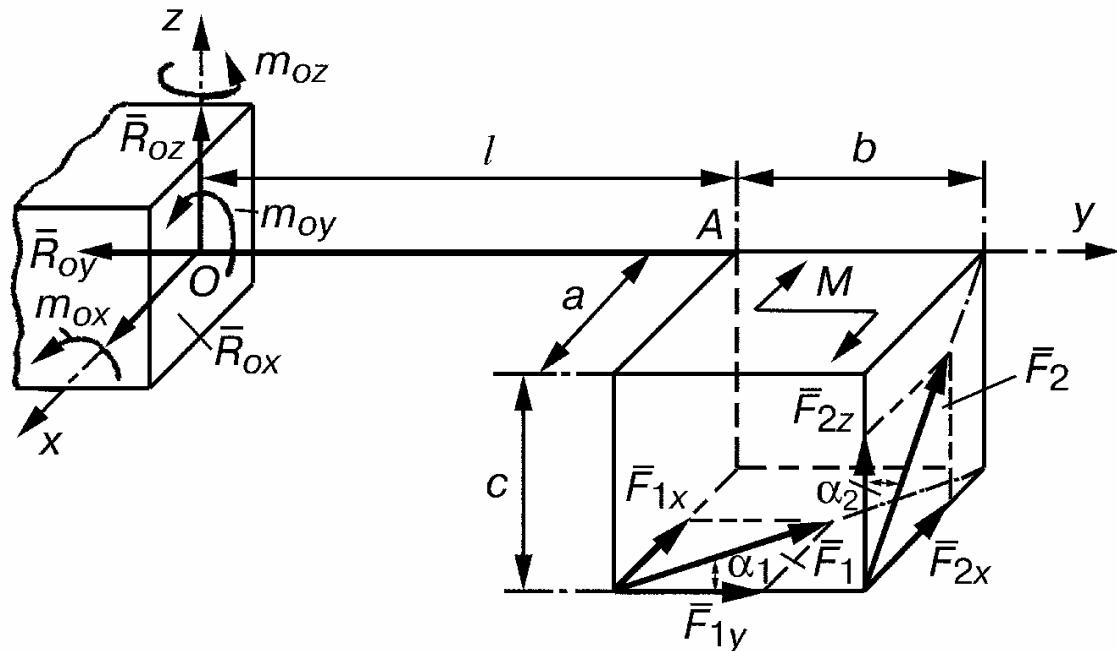


Рис. 66

Силы  $\bar{F}_1$ ,  $\bar{F}_2$  образуют с осями координат углы  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ . Эти углы вычисляются при помощи размеров  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (длин ребер параллелепипеда).

Условия равновесия балки имеют вид

$$\sum F_{kx} = 0; R_{ox} - F_1 \sin \alpha_1 - F_2 \sin \alpha_2 = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0; -R_{oy} + F_1 \cos \alpha_1 = 0; \quad (2)$$

$$\sum F_{kz} = 0; R_{oz} + F_2 \cos \alpha_2 = 0; \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\sum m_x(\bar{F}_k) = 0; \quad &m_{ox} + (F_1 \cos \alpha_1) \cdot c + \\ &+ (F_2 \cos \alpha_2)(l+b) = 0; \quad (4)\end{aligned}$$

$$\sum m_y(\bar{F}_k) = 0; \quad m_{oy} + (F_1 \sin \alpha_1) \cdot c = 0; \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\sum m_z(\bar{F}_k) = 0; \quad &m_{oz} + (F_1 \cos \alpha_1) \cdot a + (F_1 \sin \alpha_1)l + \\ &+ (F_2 \sin \alpha_2)(l+b) - M = 0. \quad (6)\end{aligned}$$

На основании (1)÷(6) можно найти неизвестные величины  $R_{ox}, R_{oy}, R_{oz}, m_{ox}, m_{oy}, m_{oz}$ . Реакции заделки определяются по формулам

$$R_0 = \sqrt{R_{ox}^2 + R_{oy}^2 + R_{oz}^2}; \quad m_0 = \sqrt{m_{ox}^2 + m_{oy}^2 + m_{oz}^2}.$$

### Задача 10

К вершинам куба с ребром  $b$  приложены силы  $\bar{F}_1, \bar{F}_2$  и приложена пара сил с моментом  $M$  (рис. 67). Куб скреплен с осью  $AB$ , установленной в упорном подшипнике (подпятнике)  $A$  и радиальном подшипнике  $B$ .

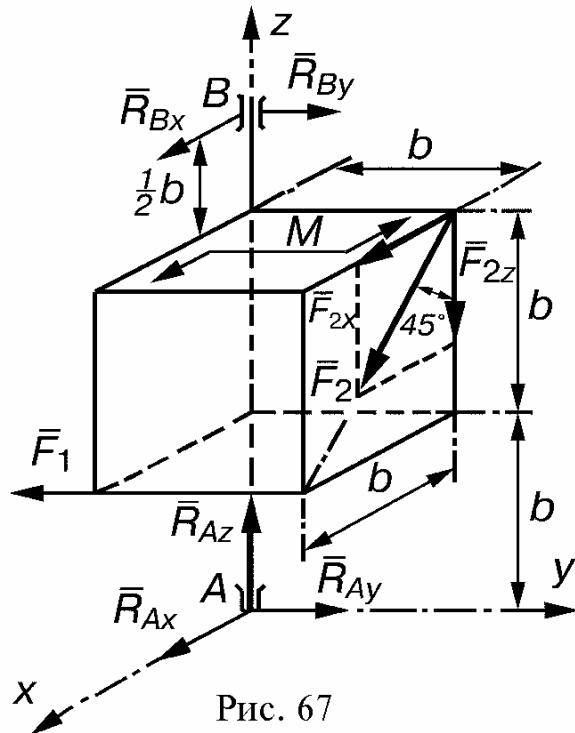


Рис. 67

Составить условия равновесия куба с осью  $AB$  для определения реакций подшипников и момента  $M$  пары сил. Силами тяжести оси  $AB$  и куба пренебречь.

**Решение.** Рассмотрим равновесие куба, скрепленного с осью  $AB$ . На конструкцию действуют силы  $\bar{F}_1, \bar{F}_2$ , пара сил с моментом  $M$ , реакции под пятника  $A$  и подшипника  $B$ . Реакцию под пятника  $A$  представим тремя составляющими  $\bar{R}_{AX}, \bar{R}_{AY}, \bar{R}_{AZ}$  вдоль осей координат, реакцию подшипника  $B$  — двумя составляющими  $\bar{R}_{BX}, \bar{R}_{BY}$  (рис. 67).

Составим условия равновесия куба с осью  $AB$

$$\sum F_{kx} = 0; R_{AX} + R_{BX} + F_2 \cos 45^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0; R_{AY} + R_{BY} - F_1 = 0; \quad (2)$$

$$\sum F_{kz} = 0; R_{AZ} - F_2 \cos 45^\circ = 0; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sum m_x(\bar{F}_k) = 0; & -R_{BY} \cdot \frac{5}{2}b - (F_2 \cos 45^\circ) \cdot b - \\ & - F_1 b = 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sum m_y(\bar{F}_k) = 0; R_{BX} \cdot \frac{5}{2}b + (F_2 \cos 45^\circ) \cdot b = 0; \quad (5)$$

$$\sum m_z(\bar{F}_k) = 0; -(F_2 \cos 45^\circ) \cdot b - F_1 \cdot b + M = 0. \quad (6)$$

Из (1)÷(6) определяются неизвестные величины  $\bar{R}_{AX}, \bar{R}_{AY}, \bar{R}_{AZ}, \bar{R}_{BX}, \bar{R}_{BY}$  и  $M$ .

### Задача 11

Однородный брус опирается в точке  $A$  на негладкий горизонтальный пол и удерживается в точке  $B$  веревкой (рис. 68). Коэффициент трения бруса об пол равен  $f$ .

При каком угле  $\phi$  наклона веревки к горизонту брус начнет скользить по полу?

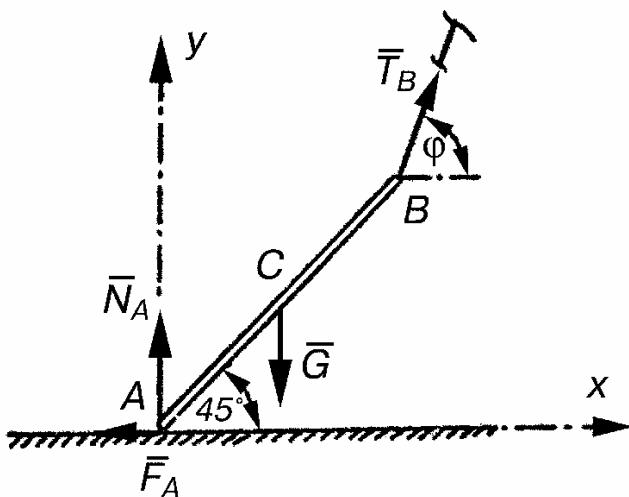


Рис. 68

Угол  $\alpha$ , образуемый бруском с полом, равен  $45^\circ$ .

**Решение.** Рассмотрим равновесие бруса. Освободим брус от связей, приложим к нему реакции связей. На брус действуют силы  $\bar{G}$ ,  $\bar{T}$  (натяжение веревки),  $\bar{N}_A$ ,  $\bar{F}_A$  (нормальная и касательная составляющие реакции горизонтальной плоскости).

Составим условия равновесия бруса

$$\sum F_{kx} = 0; \quad T_B \cos \varphi - F_A = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad T_B \sin \varphi + N_A - G = 0; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sum m_A (\bar{F}_k) = 0; \quad & -N_A (AB \cos \alpha) - F_A (AB \sin \alpha) + \\ & + G \left( \frac{1}{2} AB \cos \alpha \right) = 0. \quad (3) \end{aligned}$$

На основании закона Кулона имеем

$$F_A = f N_A. \quad (4)$$

Последовательно получаем зависимости

$$N_A = \frac{G}{2(1+f)}; \quad (\cos \alpha = \sin \alpha; \alpha = 45^\circ); \quad (3')$$

$$T_B = \frac{F_A}{\cos \varphi} = \frac{f N_A}{\cos \varphi}; \quad (1') \quad T_B = \frac{G - N_A}{\sin \varphi}. \quad (2)$$

$$\frac{f N_A}{\cos \varphi} = \frac{G - N_A}{\sin \varphi}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{G - N_A}{f N_A} = 2 + \frac{1}{f}.$$

$$\text{Итак, } \operatorname{tg} \varphi = 2 + \frac{1}{f}.$$

### Задача 12

Цилиндрический каток радиуса  $r = 30$  см и весом  $G = 3000$  Н приводится в равномерное движение человеком, который давит на рукоятку  $AB$  с постоянной силой  $\bar{P}$  в направлении  $AB$  (рис. 69). Коэффициент трения качения катка  $d = 0,5$  см, коэффициент трения скольжения между катком и дорогой  $f = 0,2$ . Определить величину силы  $P$  и нормальную реакцию горизонтальной плоскости. Рукоятка  $AB$  составляет с горизонтом углом  $\alpha = 30^\circ$ .

**Решение.** Рассмотрим равновесие катка. Освободим каток от связей, приложим к нему реакции связей (рис. 70). На каток действуют силы  $\bar{G}, \bar{Q}$  (давление рукоятки на шарнир  $B$ ),  $\bar{N}, \bar{F}_{\text{тр}}$  (нормальная и касательная составляющие реакции горизонтальной плоскости), причем  $Q = P$ .

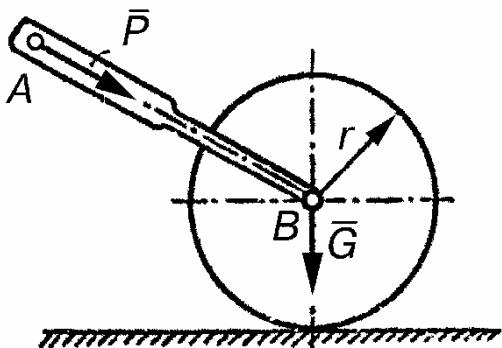


Рис. 69

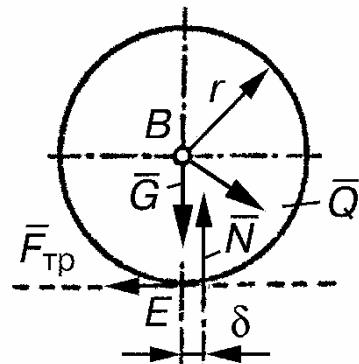


Рис. 70

Уравнения равновесия катка имеют вид

$$\sum F_{\text{кx}} = 0; Q \cos \alpha - F_{\text{тр}} = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{\text{кy}} = 0; N - G - Q \sin \alpha = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_E (\bar{F}_k) = 0; -(Q \cos \alpha)r + N\delta = 0. \quad (3)$$

Из (1), (2), (3) находим

$$F_{\text{tp}} = Q \cos \alpha; \quad (1') \quad N = G + Q \sin \alpha; \quad (2')$$

$$N = Q \frac{r}{\delta} \cos \alpha. \quad (3')$$

Далее получаем

$$G + Q \sin \alpha = Q \frac{r}{\delta} \cos \alpha;$$

$$Q = P = \frac{G\delta}{r \cos \alpha - \delta \sin \alpha}.$$

Выполним вычисления

$$Q = P = \frac{G\delta}{r \cos \alpha - \delta \sin \alpha} = \frac{3000 \cdot 0,5}{30 \cdot 0,866 - 0,5 \cdot 0,5} = 58 \text{ H};$$

$$N = G + Q \sin \alpha = 3000 + 58 \cdot 0,5 = 3029 \text{ H}.$$

Проверим выполнение условия качения катка без скольжения

$$F_{\text{tp}} \leq F_{\text{tp/max}} \leq fN.$$

Вычислим силу трения качения и силу трения скольжения

$$F_{\text{tp}} = Q \cos \alpha = 58 \cdot 0,866 = 50,2 \text{ H};$$

$$F_{\text{tp/max}} = fN = 0,2 \cdot 3029 = 605,8 \text{ H}.$$

Таким образом, сила трения качения меньше силы трения скольжения. Каток будет катиться без скольжения.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	3
1. Аксиомы статики. Связи и реакции связей .....	6
2. Сила и характеристики ее действия .....	16
3. Пара сил и характеристики ее действия.	
Силовой винт .....	22
4. Система сил и характеристики ее действия. Общий случай приведения системы сил к центру .....	27
5. Частные случаи приведения произвольной системы сил. Условия равновесия систем сил и пар .....	36
6. Центр системы параллельных связанных сил и центр тяжести .....	48
7. Трение скольжения и трение качения .....	55
Примеры решения задач .....	63

## **Библиографический список**

1. Яблонский А. А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / А. А. Яблонский. М.: Высшая школа, 1972, 1978, 1985, 1998.
2. Бать М. Л. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1/ М. Л. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. М.: Наука, 1984. – 502 с.
3. Яблонский А. А. Курс теоретической механики./ А. А. Яблонский., В. М. Никифорова. Ч. 1. М: Высшая школа, 1984. – 368 с.
4. Бутенин Н. В. Курс теоретической механики./ Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин . Т. 1. М.: Наука, 1985. – 250 с.
5. Добронравов В. В. Курс теоретической механики./ В. В. Добронравов, Н. Н. Никитин. М.: Высшая школа, 1983. – 576 с.