

ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА СТАТИКА. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Методические указания и задания
к расчетно-графической работе

Методические указания содержат порядок выполнения РГР, варианты задач РГР и общие рекомендации по выбору вариантов, а также приведены примеры и порядок выполнения ручного и компьютерного расчетов задач РГР №2.

Таблица вариантов							
№	Ф.И.О.	Задача 1		Задача №2		Задача №3	
		сх.	вар.	сх.	вар.	сх.	вар.
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							
21							
22							
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							
31							
32							
33							

Задача №1. Составная конструкция

Конструкция состоит из двух частей. Определить реакции опор.

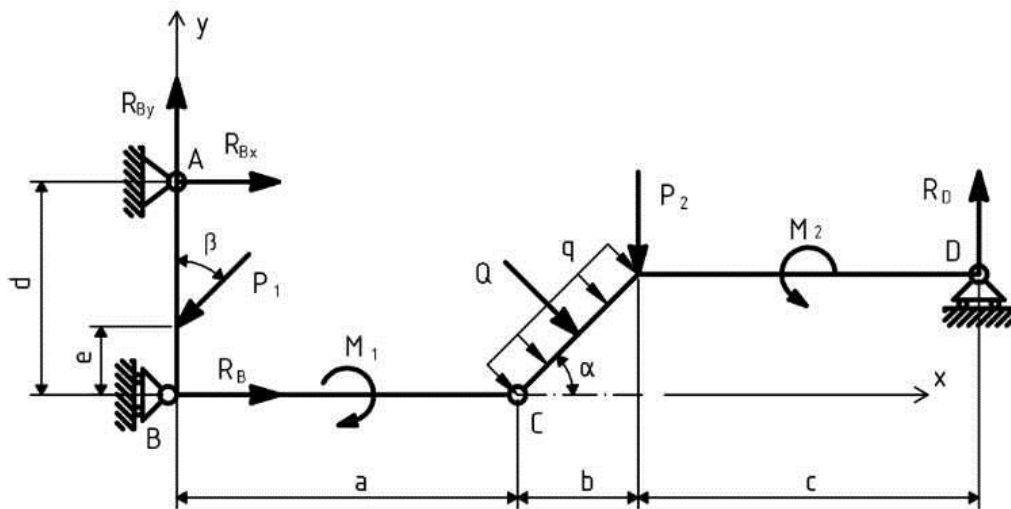


Рис. 1. Расчетная схема.

Дано: $P_1 = 10 \text{ кН}$; $P_2 = 30 \text{ кН}$; $M_1 = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $M_2 = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $\alpha = 45^\circ$;
 $\beta = 30^\circ$; $q = 2 \text{ кН/м}$ ($Q = \frac{q \cdot b}{\cos \alpha} = \frac{2 \cdot 2}{0,707} = 5,657 \text{ кН}$); $a = 4 \text{ м}$; $b = 2 \text{ м}$;
 $c = 4 \text{ м}$; $e = 1 \text{ м}$; $d = 3 \text{ м}$.

Схему составной балки с действующими на нее активными силами изображаем в масштабе (Рис. 1.).

1. Разбиваем систему на два тела по сочленяющему шарниру. В месте разбиения прикладываем реакции отброшенной части. Внешние связи заменяем их реакциями R_{Ax} , R_{Ay} , R_B , R_D .

2. Для каждого тела, образованного при разбиении, составляем уравнения моментов относительно точки сочленения. Полученные уравнения дополняем двумя уравнениями равновесия для всей конструкции в целом.

Составляем уравнение моментов относительно узла С для правой части балки:

$$\sum M_C^{np} = M_2 - P_2 \cdot b - \frac{q \cdot b^2}{2 \cdot \cos^2 \alpha} + R_D \cdot (b + c) = 0 \quad (1),$$

Составляем уравнение моментов относительно узла С для левой части балки:

$$\sum M_C^{лев} = -M_1 + P_1 \cdot \cos \beta \cdot a + P_1 \cdot \sin \beta \cdot e - R_{Ay} \cdot a - R_{Ax} \cdot d = 0 \quad (2),$$

Берем суммы проекций всех сил на ось x и y для всей системы координат:

$$\sum F_x = -P_1 \cdot \sin \beta + R_B + R_{Ax} + Q \cdot \sin \alpha = 0 \quad (3),$$

$$\sum F_y = -P_1 \cdot \cos \beta - P_2 + R_{Ay} + R_D - Q \cdot \cos \alpha = 0 \quad (4).$$

3. Решаем систему четырех уравнений. Определяем реакции опор.

$$R_D = \frac{-M_2 + P_2 \cdot b + \frac{q \cdot b^2}{2 \cdot \cos^2 \alpha}}{b + c} = \frac{-30 + 30 \cdot 2 + \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 0,5}}{6} = 6,33 \text{ кН} \quad (1),$$

$$R_{Ay} = P_1 \cdot \cos \beta + P_2 - R_D + Q \cdot \cos \alpha =$$

$$= 10 \cdot 0,866 + 30 - 6,33 + 5,657 \cdot 0,707 = 36,33 \text{ кН} \quad (4),$$

$$R_{Ax} = \frac{-M_1 + P_1 \cdot \cos \beta \cdot a + P_1 \cdot \sin \beta \cdot e - R_{Ay} \cdot a}{d} =$$

$$= \frac{-10 + 10 \cdot 0,866 \cdot 4 + 10 \cdot 0,5 \cdot 1 - 36,33 \cdot 4}{3} = -38,56 \text{ кН} \quad (2),$$

$$R_B = P_1 \cdot \sin \beta - R_{Ax} - Q \cdot \sin \alpha = 10 \cdot 0,5 + 38,56 - 5,657 \cdot 0,707 = 39,56 \text{ кН} \quad (3).$$

4. Делаем проверку решения, составляя уравнения равновесия целой (нерасчлененной) системы. Составляем уравнение моментов относительно узла С для всей системы:

$$\sum M_C = M_2 - P_2 \cdot b - \frac{q \cdot b^2}{2 \cdot \cos^2 \alpha} + R_D \cdot (b + c) - M_1 + P_1 \cdot \cos \beta \cdot a +$$

$$+ P_1 \cdot \sin \beta \cdot e - R_{Ay} \cdot a - R_{Ax} \cdot d = 30 - 30 \cdot 2 - \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 0,5} + 6,33 \cdot 6 -$$

$$- 10 + 10 \cdot 0,866 \cdot 4 + 10 \cdot 0,5 \cdot 1 - 36,33 \cdot 4 + 38,56 \cdot 3 = -0,02 \text{ кН}$$

Примечание: Для данной задачи есть другой способ решения. Разбиваем систему на две составляющие, добавляем две реакции, действующие в соединительном узле R_{Cx} , R_{Cy} и составляем по три уравнения равновесия для каждой части и для системы в целом. Получаем 9 уравнений из которых находим наши реакции опор и узла.

Методика решения задачи в MathCad:

1. Подготовка исходных данных для программы. Принимаем стандартное направление осей x вправо, а y вверх и задаем положение центра координат в соединительном шарнире. В нашем случае центр координат расположен в т. С. Так же как и в предыдущих задачах берем величины, координаты и углы поворота для сил $P_i(y;x;\alpha)$, распределенных нагрузок $Q_i(y;x;\alpha)$, моментов M_i и опорных реакций $R_i(y;x;\alpha)$ (модули реакций неизвестны) для левой и правой частей балки. В нашей задаче:

Левая часть: $P_1 = 10$ кН ($1;-4;240^\circ$); $M_1 = -10$ кН·м; $R_B(0;-4;0^\circ)$; $R_{Ay}(3;-4;90^\circ)$; $R_{Ax}(3;-4;0^\circ)$. Правая часть: $P_2 = 30$ кН ($2;2;270^\circ$); $M_2 = 30$ кН·м; $Q = 5,657$ кН ($1;1;315^\circ$); $R_D(2;6;90^\circ)$ (Рис. 1.). Сводим полученные данные в таблицу:

	P_1	M_1	R_B	R_{Ay}	R_{Ax}	P_2	M_2	Q	R_D
Сила	10	10	—	—	—	30	—30	5,567	—
y	1	—	0	3	3	2	—	1	2
x	-4	—	-4	-4	-4	2	—	1	6
α°	240°	—	0°	90°	0°	270°	—	315°	90°

2. Вводим подготовленные исходные данные в программу. В матрицы L и R вводим активные силы действующие в левой и правой частях балки соответственно. Переименовываем опорные реакции и моменты заделки так, чтобы у них были численные индексы как на Рис. 2. В нашей задаче $R_B \rightarrow R1$, $R_{Ay} \rightarrow R2$, $R_{Ax} \rightarrow R3$, $R_D \rightarrow R4$. В матрицы LR и RR вводим опорные реакции. Чтобы разобраться куда вводить значения, можно воспользоваться матрицами-образцами с черными прямоугольниками в правом верхнем углу (Рис. 2.а,б.).

$$\begin{aligned}
 L &:= \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & Q_1 & Q_2 & M_1 & M_2 \\ y_1 & y_2 & y_1 & y_2 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & R &:= \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & Q_1 & Q_2 & M_1 & M_2 \\ y_1 & y_2 & y_1 & y_2 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 LR &:= \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 240\text{deg} & 0\text{deg} & 0\text{deg} & 0\text{deg} & 0 & 0 \end{pmatrix} & RR &:= \begin{pmatrix} 30 & 0 & 5,657 & 0 & 30 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 270\text{deg} & 0\text{deg} & 315\text{deg} & 0\text{deg} & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Рис. 2.а. Исходные данные. Активные силы

$$LR := \begin{pmatrix} R_1 & R_2 & R_3 & M1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$RR := \begin{pmatrix} R_1 & R_2 & R_3 & M2 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$LR := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ -4 & -4 & -4 & 0 \\ 0deg & 90deg & 0deg & 0 \end{pmatrix}$$

$$RR := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 90deg & 0deg & 0deg & 0 \end{pmatrix}$$

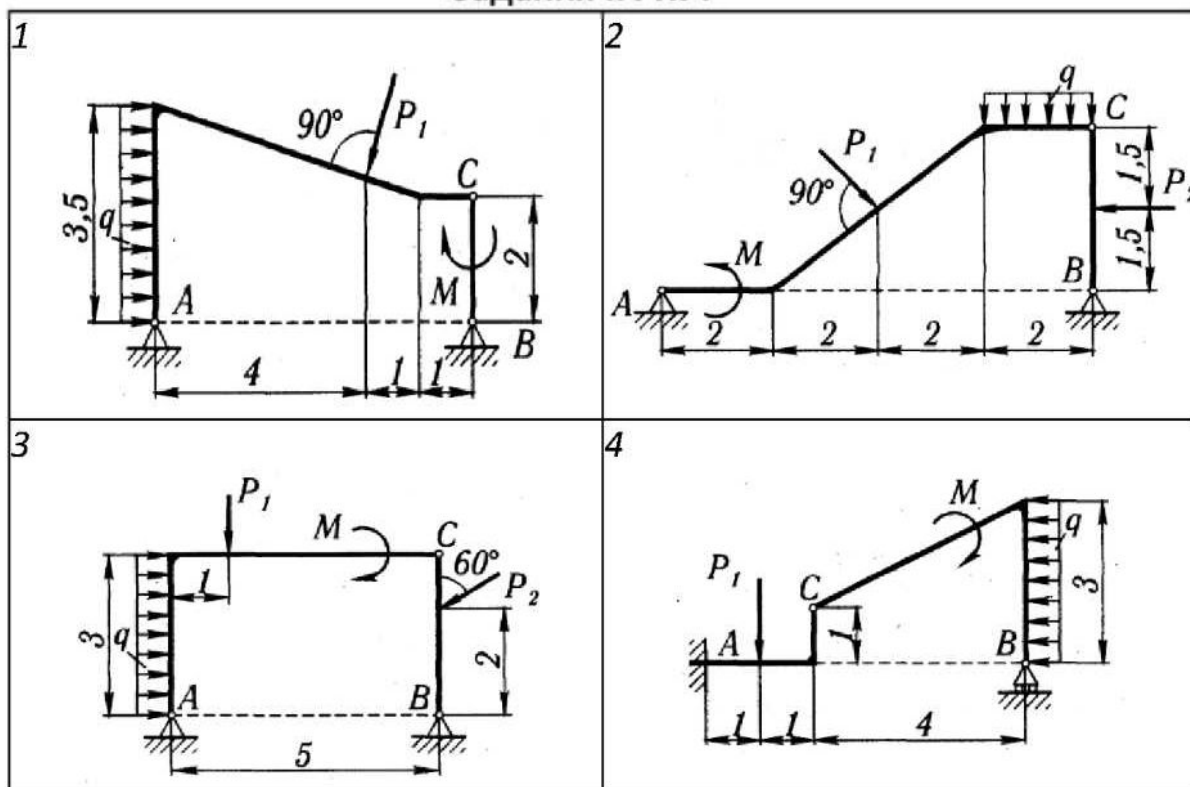
Рис. 2.6. Исходные данные. Реакции опор

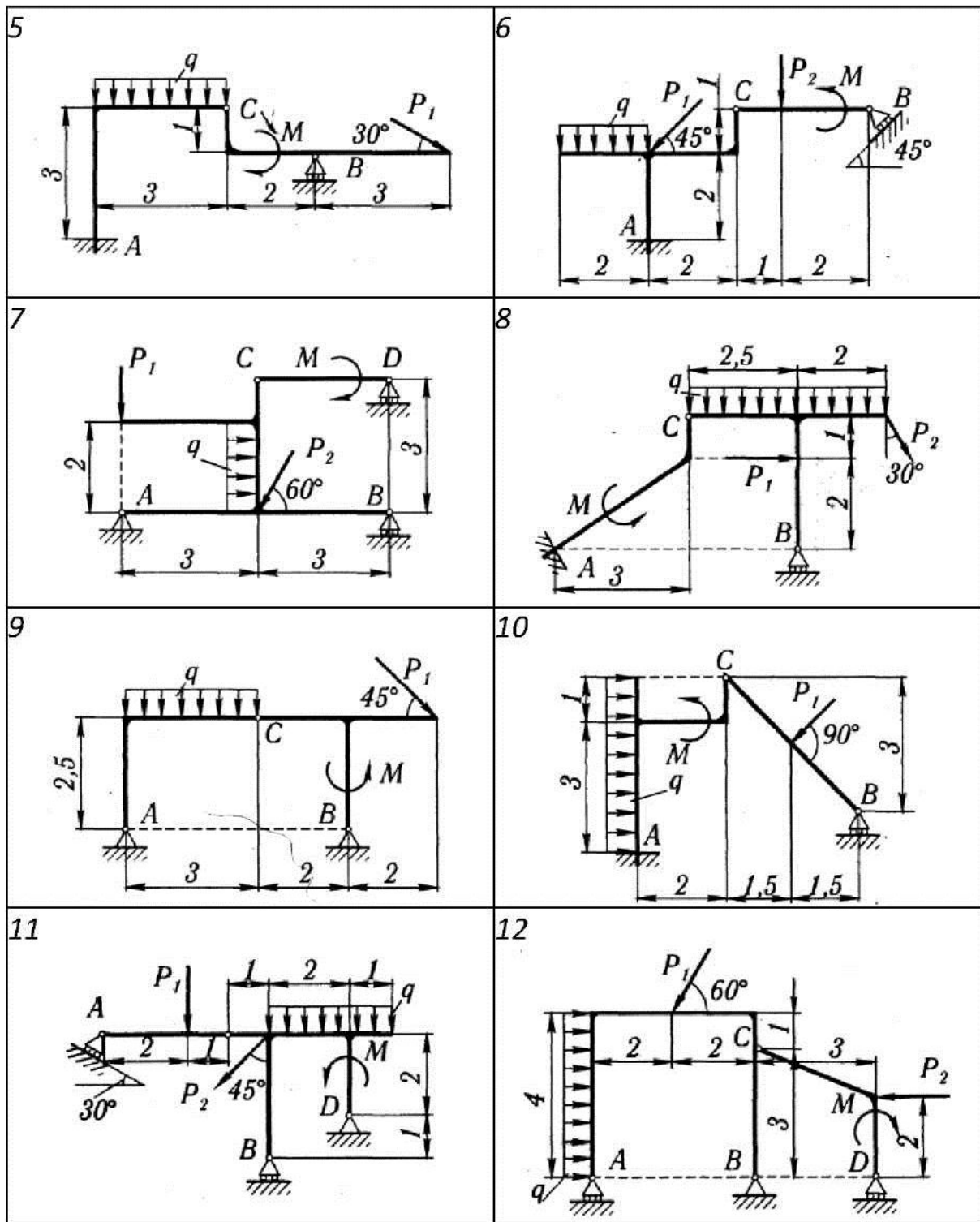
3. Для получения результата в матрицу ответа A вводим искомые неизвестные и автоматически получаем ответ в A^T (Рис. 3.).

```
A := Find(R1, R2, R3, R4)
AT = (39.556 36.327 -38.556 6.333)
```

Рис. 3. Результаты решения

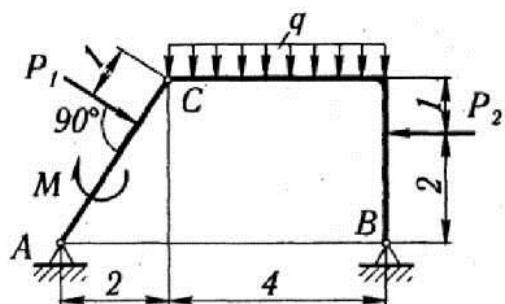
Задания к РПР:



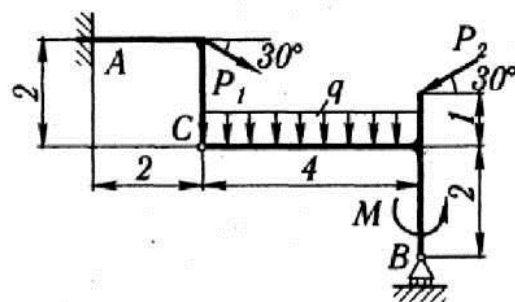


13	14
15	16
17	18
19	20
21	22

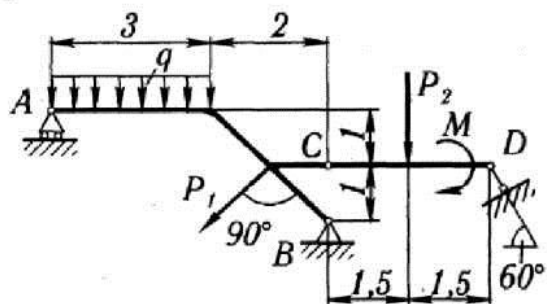
23



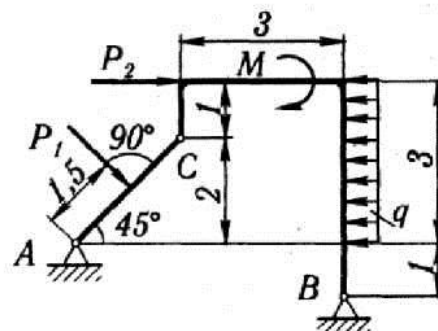
24



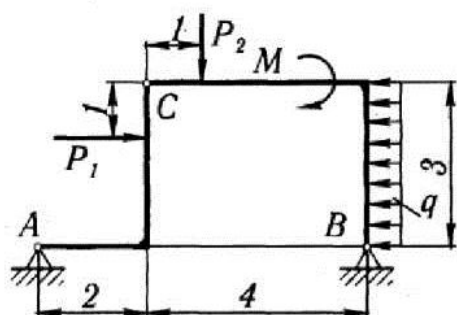
25



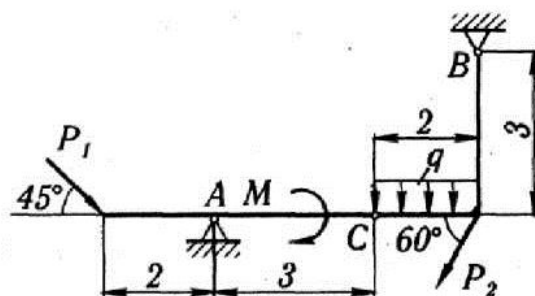
26



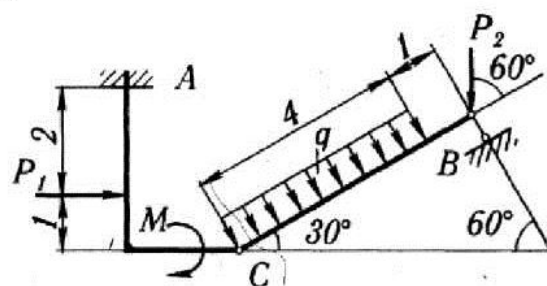
27



28



29



30

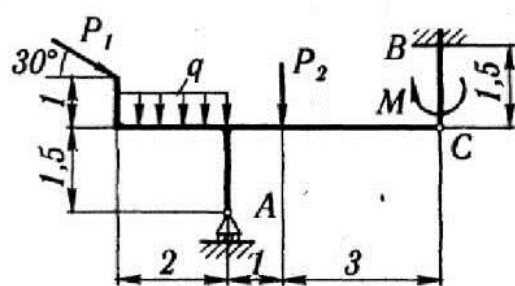


Таблица исходных данных

№	P_1 , кН	P_2 , кН	M , кНм	q , кН/м	№	P_1 , кН	P_2 , кН	M , кНм	q , кН/м
1	5,0	—	24,0	0,8	16	7,0	10,0	14,0	3,8
2	6,0	10,0	22,0	1,0	17	9,0	12,0	26,0	4,0
3	7,0	9,0	20,0	1,2	18	11,0	10,0	18,0	3,5
4	8,0	—	18,0	1,4	19	13,0	9,0	30,0	3,0
5	9,0	—	16,0	1,6	20	15,0	8,0	25,0	2,5
6	10,0	8,0	25,0	1,8	21	10,0	7,0	20,0	2,0
7	11,0	7,0	20,0	2,0	22	5,0	6,0	15,0	1,5
8	12,0	6,0	15,0	2,2	23	8,0	5,0	10,0	1,4
9	13,0	—	10,0	2,4	24	11,0	4,0	5,0	1,3
10	14,0	—	12,0	2,6	25	14,0	6,0	7,0	1,2
11	15,0	5,0	14,0	2,8	26	12,0	8,0	9,0	1,1
12	12,0	4,0	16,0	3,0	27	10,0	7,0	11,0	1,0
13	9,0	6,0	18,0	3,2	28	8,0	9,0	13,0	1,2
14	6,0	—	20,0	3,4	29	6,0	10,0	15,0	1,4
15	5,0	8,0	22,0	3,6	30	10,0	12,0	17,0	1,6

Задача №2. Пространственная система сил

Найти реакции опор конструкции.

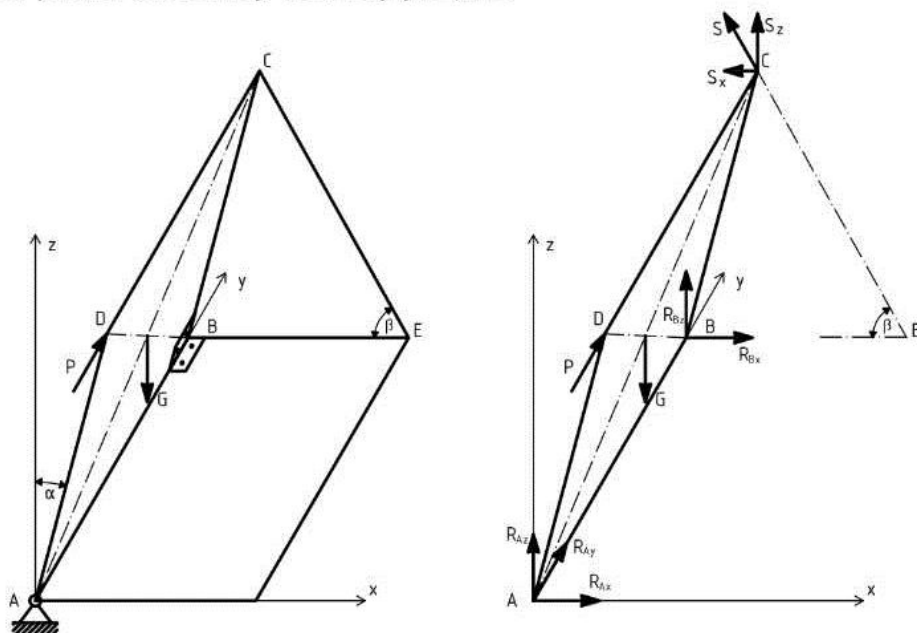


Рис. 4. Расчетная схема

Дано: рама ABCD весом $G = 1$ кН, $P = 2$ кН, $P \parallel Ay$, $AD = BC = 60$ см, $AB = CD = 100$ см, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$ (Рис. 4.). Найти реакции опор A, B и C (A — шаровой шарнир, B — петля, C — стержневая опора).

К раме ABCD приложены сила тяжести G , сила P , реакция S стержня CE и реакции опор A и B. Реакция шарового шарнира A определяется тремя составляющими: R_{Ax} , R_{Ay} , R_{Az} , а реакция петли B — двумя: R_{Bx} и R_{Bz} (Рис. 4.).

Из этих сил — шесть неизвестных. Для их определения можно составить шесть уравнений равновесия.

Уравнения моментов сил относительно координатных осей:

$$\sum M_{ix} = -P \cdot AD \cos 30^\circ - G \cdot AB/2 + S \cos 30^\circ \cdot AB + R_{Bz} \cdot AB = 0 \quad (1),$$

$$\sum M_{iy} = G(BC/2) \sin 30^\circ - S \cdot BC \sin 60^\circ = 0 \quad (2),$$

$$\sum M_{iz} = P \cdot AD \sin 30^\circ + S \cdot AB \cos 60^\circ - R_{Bx} \cdot AB = 0 \quad (3).$$

Из уравнения (2) определяем S , затем из уравнений (1) и (3) находим R_{Bz} и R_{Bx} . Уравнения проекций сил на оси координат:

$$\sum F_{ix} = R_{Ax} + R_{Bx} - S \cos 60^\circ = 0 \quad (4),$$

$$\sum F_{iy} = R_{Ay} + P = 0 \quad (5),$$

$$\sum F_{iz} = R_{Az} - G + R_{Bz} + S \cos 30^\circ = 0 \quad (6).$$

Из этих уравнений находим R_{Ax} , R_{Ay} и R_{Az} .

Результаты вычислений сводим в таблицу:

Силы, кН					
S	R_{Ax}	R_{Ay}	R_{Az}	R_{Bx}	R_{Bz}
0,289	-0,600	-2,00	-0,54	0,744	1,29

1. Методика решения вала и крышки в MathCad:

1. Подготовка исходных данных для программы. Задаем центр координат в одном из шарниров, ось y направляем по валу или крышке, а оси x и z ориентируются так, чтобы при направлении оси y на нас x смотрела вправо, а z — вверх как показано на Рис.5. Подготавливаем расчетные данные для активных сил и опорных реакций. Все силы в данных задачах или лежат в плоскости zx или параллельны оси y . Для первых выбираем величину, координату y , расстояние от линии действия силы до оси y , угол поворота силы вокруг оси y , от оси x против часовой стрелки $P_i(y;r;\alpha)$. r определяем по формуле: $r = R \cdot \cos \varphi$, где R — расстояние от оси y до точки приложения силы, $\cos \varphi$ — угол между направлением силы и касательной окружности (Рис. 5). Знак «+» при вращении силой вала против часовой стрелки, «-» при вращении по часовой стрелке. Те же данные выписываем для опорной нити или стержня

$R(y;r;\alpha)$. Для опорной реакции и активных сил параллельных оси y выбираем их величины и координаты точек их приложения по оси x и y – $P_{iy}(x,y)$, $R_y(x,y)$. Знак величины зависит от направления силы: если она направлена в ту же сторону что и ось, то она положительна, если в противоположную – отрицательна. А также координату второго шарнира y_2 .
 В нашей задаче: $P=2(30;51,96)$, $G=1(50;15;270^\circ)$, $S(100;-51,96;120^\circ)$, $R_{Ay}(0;0)$, $y_2=100$.

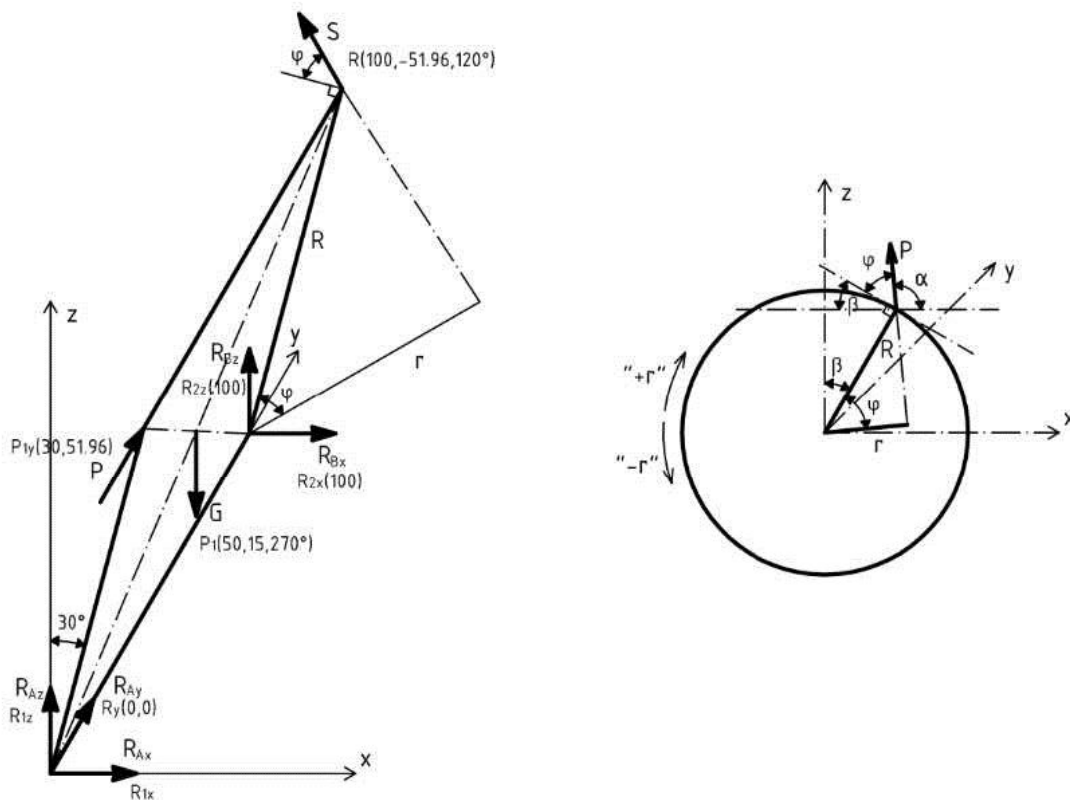


Рис. 5. Подготовка данных для программы

2. Вводим подготовленные исходные данные в программу. В матрицу P вводим активные силы и опорную реакцию, лежащие в плоскости xz . В матрицу Y вводим активные силы и опорную реакцию, параллельные оси y . Переименовываем силы так, чтобы они соответствовали шаблону указанному на Рис. 6. В нашей задаче $P \rightarrow P1y$, $G \rightarrow P1$, $S \rightarrow R$, $R_{Ay} \rightarrow R_y$. Чтобы разобраться куда вводить значения, можно воспользоваться матрицами-образцами с черными прямоугольниками в правом верхнем углу (Рис. 6.). Указать координату y_2 для шарнира не лежащего в начале координат.

$$P := \begin{pmatrix} P1 & P2 & P3 & P4 & P5 & R \\ y1 & y2 & y3 & y4 & y5 & y \\ r1 & r2 & r3 & r4 & r5 & r \\ \alpha1 & \alpha2 & \alpha3 & \alpha4 & \alpha5 & \beta \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} P1y & P2y & P3y & Ry \\ x1 & x2 & x3 & xy \\ z1 & z2 & z3 & zy \end{pmatrix}$$

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & -51.96 \\ 270^\circ & 0^\circ & 0^\circ & 0^\circ & 0^\circ & 120^\circ \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 0 & 0 \\ 51.96 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y2 := 100$$

Рис. 6. Исходные данные

3. Программа автоматически производит расчет и выдает результаты решения задачи (Рис. 7.). Где R_{1x} , R_{1z} – опорные реакции первого шарнира, лежащего в начале координат, R_{2x} , R_{2z} – второго, R_y – реакция действующая вдоль оси y , R – реакция стержня или нити.

$$R_{1x} = -0.6 \quad R_{2x} = 0.744 \quad R_{1z} = -0.539 \quad R_{2z} = 1.289 \quad R_y = -2 \quad R = 0.289$$

Рис. 7. Результаты решения

2. Методика решения консоли в MathCad:

1. Подготовка исходных данных для программы. Задаем центр координат в жесткой заделке. Ось y направляем по консоли, а оси xz располагаем так же как и в предыдущей задаче (Рис. 5.). Раскладываем все действующие силы на их составляющие в проекциях на оси и записываем координаты точек их приложения $P_i \rightarrow [P_{ix}, x, y, z]$, $[P_{iy}, x, y, z]$, $[P_{iz}, x, y, z]$. Значения сил принимаем в соответствии с их направлениями, «+» если по направлению оси, «-» если против.

2. Вводим подготовленные исходные данные в программу. В матрицы X , Y , Z вводим активные силы, направленные вдоль соответствующих осей. Переименовываем силы так, чтобы они соответствовали шаблону указанному на Рис. 8.

$$X := \begin{pmatrix} P1x & P2x & P3x & P4x & Rx \\ x & x & x & x & x \\ y & y & y & y & y \\ z & z & z & z & z \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} P1y & P2y & P3y & P4y & Ry \\ x & x & x & x & x \\ y & y & y & y & y \\ z & z & z & z & z \end{pmatrix} \quad Z := \begin{pmatrix} P1z & P2z & P3z & P4z & Rz \\ x & x & x & x & x \\ y & y & y & y & y \\ z & z & z & z & z \end{pmatrix}$$

$$X := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 3.535 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 80 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Z := \begin{pmatrix} -3.535 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 80 & 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 8. Исходные данные

3. Программа автоматически производит расчет и выдает результаты решения задачи (Рис. 9.).

$$R_x = 0 \quad R_y = -3.535 \quad R_z = 8.535 \quad M_x = 482.8 \quad M_y = 35.35 \quad M_z = 35.35$$

Рис. 9. Результаты решения

3. Методика решения плиты в MathCad:

1. Вводим подготовленные исходные данные в программу. В программе приведен рисунок плиты со всеми возможными действующими на неё усилиями. Переименовываем имеющиеся в задаче усилия в стержнях и боковую силу в соответствии с указанными на рисунке. В матрицу N вводим единицы над номерами соответствующих усилий в стержнях, их должно быть шесть. Задаем размеры плиты (a, b, c, d), боковую нагрузку (P1-8) и вес G (Рис. 10.).

$$N := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 \end{pmatrix}$$

$a := 4.5$ $b := 4$ $c := 4.5$ $d := 0$ $G := 32$
 $P1 := 0$ $P2 := 0$ $P3 := 0$ $P4 := 0$ $P5 := 0$ $P6 := 16$ $P7 := 0$ $P8 := 0$

Рис. 10. Исходные данные

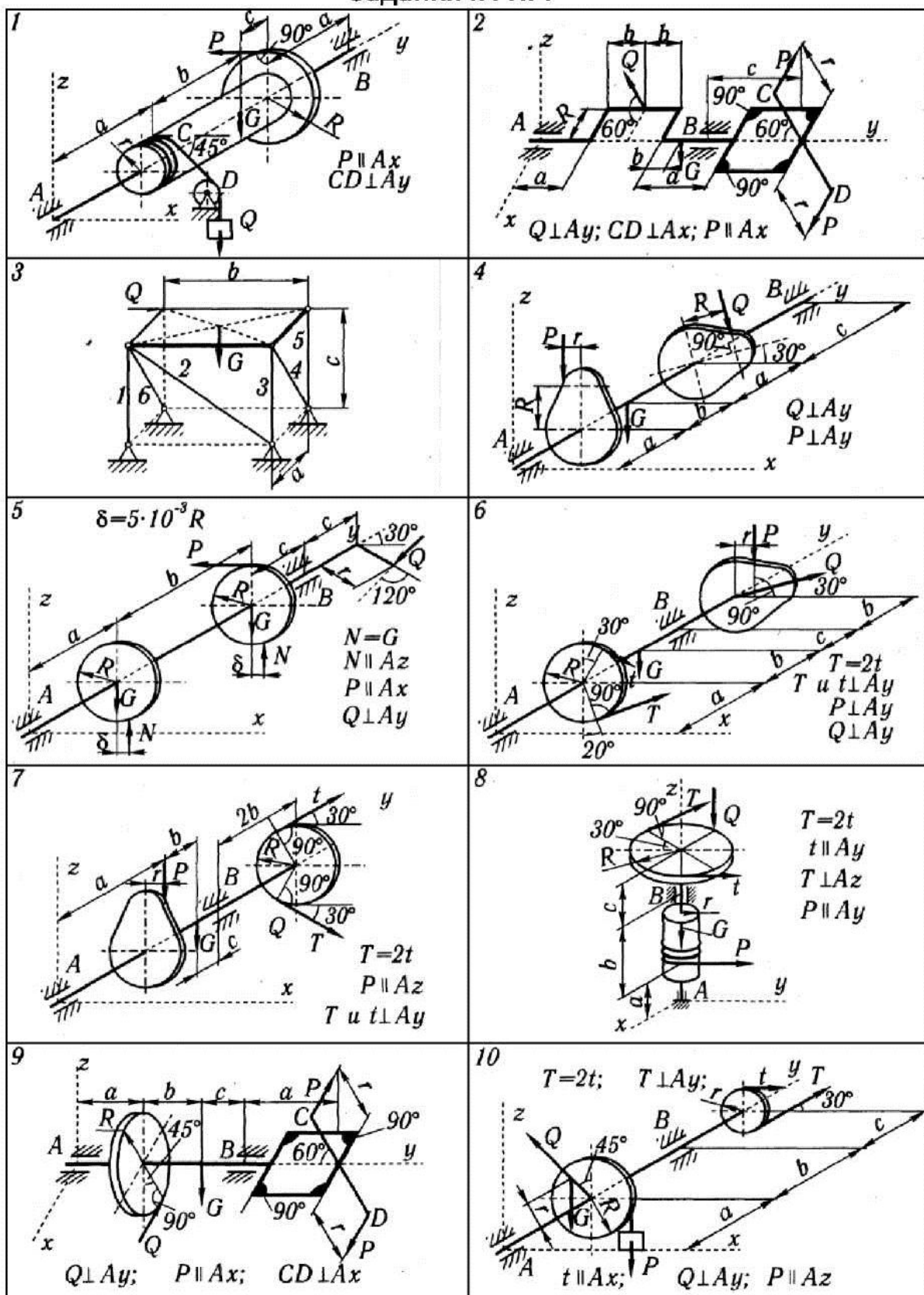
2. Программа автоматически производит расчет и выдает результаты решения задачи (Рис. 11.). Ответом является матрица-строка номера столбцов которой соответствует номерам стержней. При необходимости можно нажать на неё, и подтянуть бегунок чтобы увидеть скрытые столбцы.

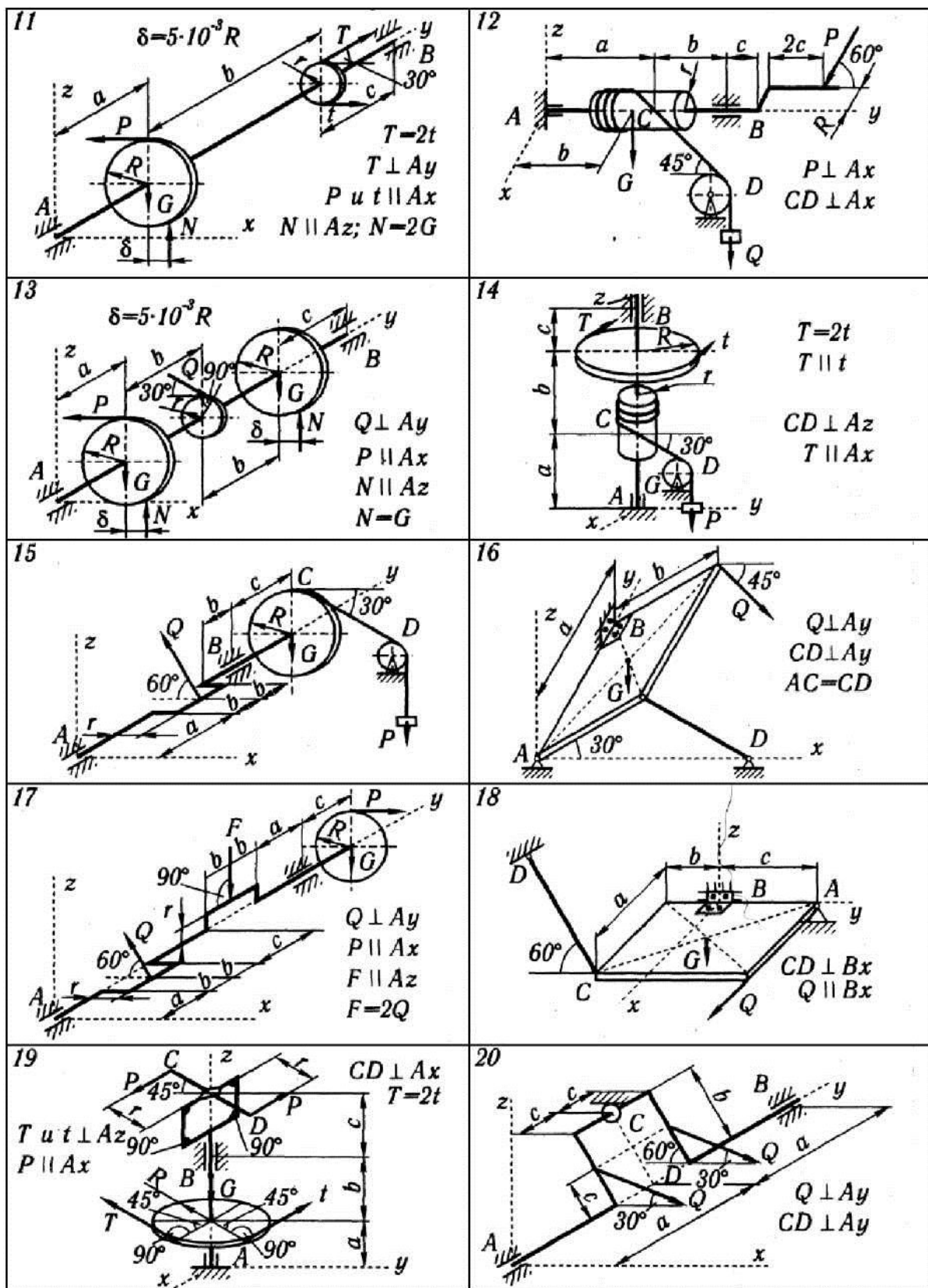
Степ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	-16	-16	-16	0	0	0	0	0	22.627	0	0	0	...

Рис. 11. Результаты решения.

Задания к РПР:





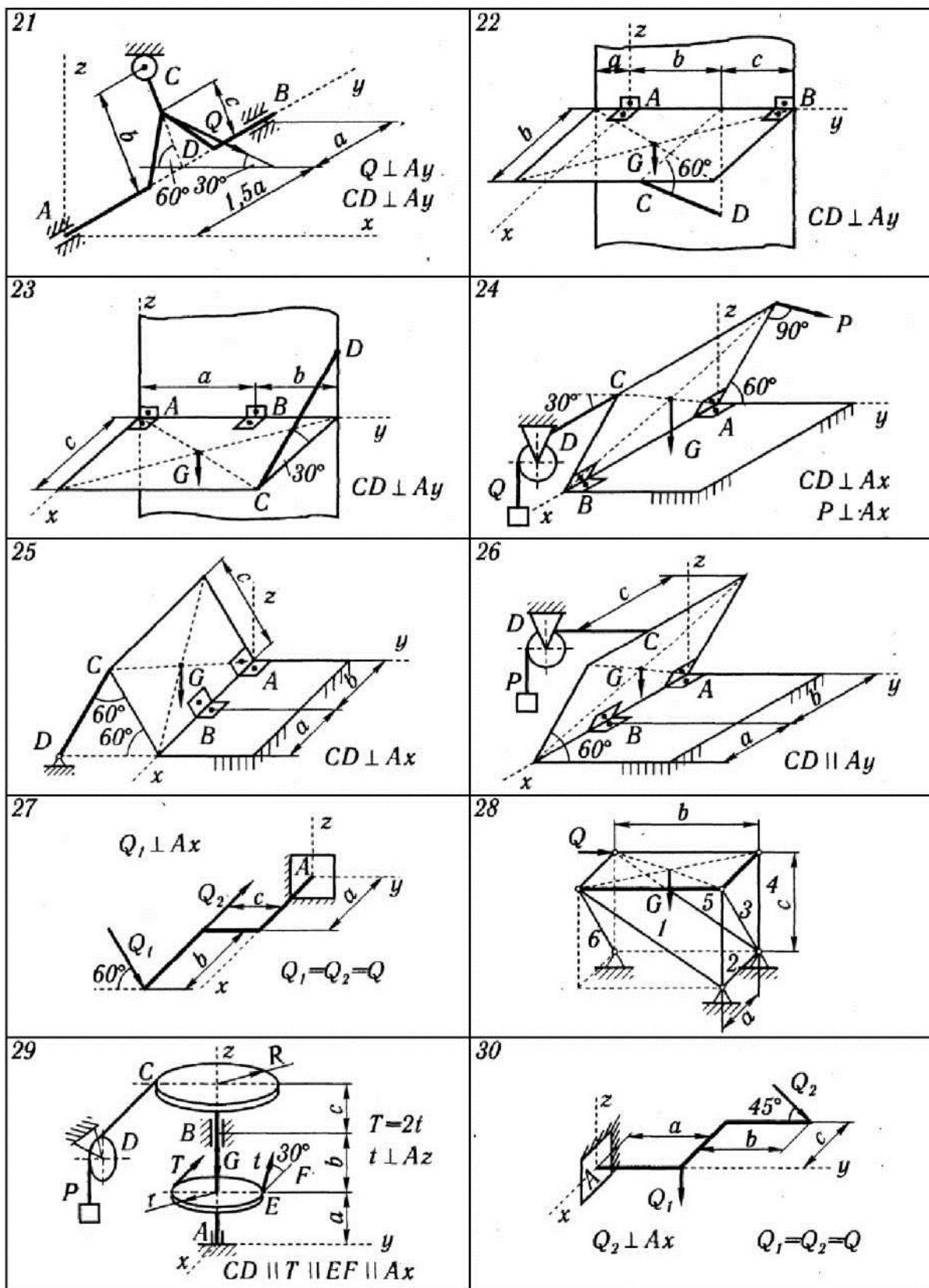


Таблица исходных данных

№	Силы, кН			Размеры, см					№	Силы, кН			Размеры, см				
	Q	T	G	a	b	c	R	r		Q	T	G	a	b	c	R	r
1	2	–	20	20	30	10	15	5	16	4	–	2	50	30	–	–	–
2	4	–	2	20	10	30	10	10	17	2	–	1	15	10	20	20	5
3	20	–	18	400	400	450	–	–	18	6	–	2	60	40	60	–	–
4	3	–	2	30	20	40	15	10	19	–	8	2	20	30	40	20	15
5	5	–	3	30	40	20	20	15	20	4	–	–	60	40	20	–	–
6	1	4	2	40	30	20	20	10	21	2	–	–	40	60	30	–	–
7	–	3	1	30	10	5	18	6	22	–	–	5	20	50	30	–	–
8	4	6	3	20	40	15	20	10	23	–	–	4	40	30	50	–	–
9	5	–	3	20	15	10	30	40	24	5	–	2	–	–	–	–	–
10	1	4	2	30	40	20	20	10	25	–	–	3	50	50	60	–	–
11	–	2	1	20	30	15	15	10	26	–	–	1	20	60	40	–	–
12	4	–	1	25	20	8	15	10	27	10	–	–	50	30	50	–	–
13	10	–	5	40	30	20	25	15	28	35	–	32	400	200	200	–	–
14	–	2	1	30	90	20	30	10	29	–	4	3	15	20	15	15	10
15	3	–	2	60	20	40	20	5	30	5	–	–	40	40	10	–	–

Задача №3. Кинематика точки

По заданным уравнениям движения точки М установить вид ее траектории и для момента времени $t = t_1$ с, найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Дано: $x = 3 \cdot \sin 2t$ см, $y = 2 \cdot \cos 4t$ см, $t = \pi/12$ с.

1. Определяем траекторию движения точки, исключая t из закона движения.

$$y = 2(1 - 2\sin^2 2t) = 2(1 - 2(x/3)^2) = 2 - 4x^2/9, \quad (1)$$

Для того, чтобы окончательно получить ответ на вопрос о траектории, необходимо еще выделить область определения функции (1). Не все точки кривой, определяемой этой функцией, являются точками траектории. При $0 \leq t \leq \pi/4$ имеем

$$0 \leq x \leq 3, \quad (2)$$

т.е. траекторией является правая ветвь параболы (1) (Рис. 12.). График строим по точкам (отмечены звездочками), через равные промежутки времени 0.1 с.

2. Дифференцируя параметрические уравнения по времени находим проекции скорости точки на оси x, y :

$$v_x = \dot{x} = 6 \cos 2t, \quad v_y = \dot{y} = -8 \sin 4t, \quad (3)$$

При $t = \pi/12$ имеем следующие численные значения компонентов скорости:

$$v_x = 6 \cos(\pi/6) = 3\sqrt{3} = 5.196 \text{ см/с},$$

$$v_y = -8 \sin(\pi/3) = -4\sqrt{3} = -6.928 \text{ см/с}.$$

3. Модуль скорости вычисляем по формуле

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 5\sqrt{3} = 8.66 \text{ см/с}. \quad (4)$$

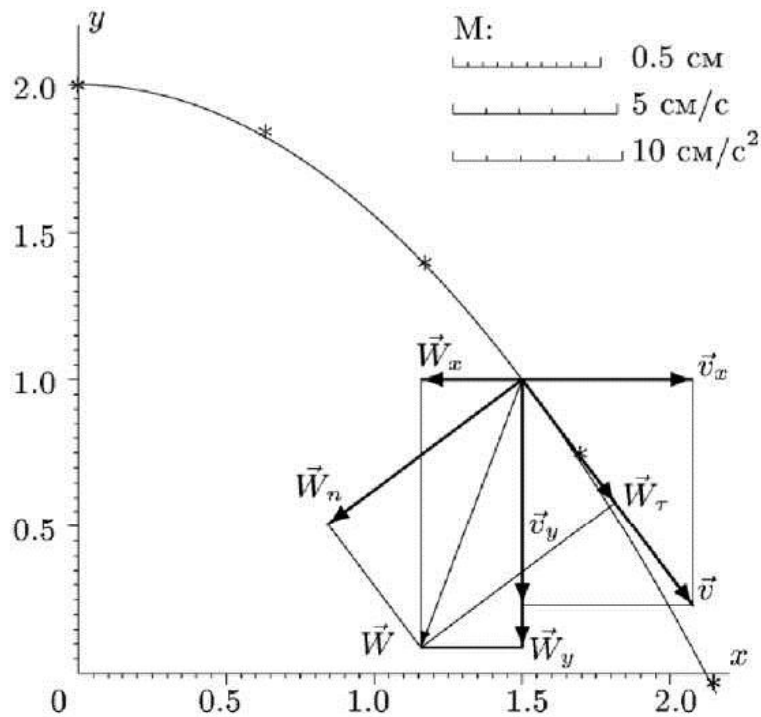


Рис. 12. Траектория движения точки

Вектор скорости $\vec{v}$ строим на рисунке в масштабе по известным компонентам v_x и v_y . Если в вычислениях нет ошибок, то вектор скорости будет направлен по касательной к траектории (Рис. 12).

4. Дифференцируя (3), находим компоненты вектора ускорения:

$$W_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -12 \sin 2t,$$

$$W_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = -32 \cos 4t,$$

При $t = \pi/12$

$$W_x = -12 \sin 2t = -6 \text{ см/с}^2,$$

$$W_y = -32 \cos 4t = -16 \text{ см/с}^2.$$

5. Определяем модуль ускорения

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = \sqrt{292} = 17.088 \text{ см/с}^2.$$

Вектор ускорения строим на чертеже в масштабе ускорений (не обязательно совпадающем с масштабом скоростей). Вектор ускорения направлен внутрь вогнутости кривой.

6. Вычисляем тангенциальное ускорение по формуле:

$$W_{\tau} = \frac{|v_x W_x + v_y W_y|}{v},$$

$$W_{\tau} = \frac{3\sqrt{3}(-6) + (-4\sqrt{3})(-16)}{5\sqrt{3}} = \frac{46}{5} = 9,2 \text{ см/с}^2.$$

7. Вычисляем нормальное ускорение:

$$W_n = \sqrt{W^2 + W_{\tau}^2} = \sqrt{292 - (46/5)^2} = 72/5 = 14,4 \text{ см/с}^2.$$

8. Находим радиус кривизны траектории в указанном положении точки:

$$R = \frac{v^2}{W_n} = \frac{75 \cdot 5}{72} = 5,208 \text{ см.}$$

Центр кривизны траектории лежит на нормали к кривой на расстоянии $R = 5.208$ см внутри вогнутости кривой. Окружность радиусом R с центром в этой точке максимально близко совпадет с кривой в малой окрестности от нее.

3. Методика решения задачи в MathCad:

Заполняем в программе ячейки закона движения $x(t)$, $y(t)$ и времени t , выделенные желтым цветом. Программа автоматически производит расчет с наглядным изображением хода решения задачи и построением графика движения точки, которые впоследствии можно распечатать на бумаге. Вектора скоростей и ускорений на графике можно дорисовать вручную.

Таблица исходных данных

№	Уравнение движения		$t_1, \text{с}$
	$x = x(t), \text{см}$	$y = y(t), \text{см}$	
1	$-2t^2 + 3$	$-5t$	0,5
2	$4\cos^2(\pi/3) + 2$	$4\sin^2(\pi/3)$	1
3	$-\cos(\pi^2/3) + 3$	$\sin(\pi^2/3) - 1$	1
4	$4t + 4$	$-4/(t + 1)$	2

№	Уравнение движения		t ₁ , с
	x = x(t), см	y = y(t), см	
5	$2 \sin(\pi / 3)$	$-3 \cos(\pi / 3) + 4$	1
6	$3t^2 + 2$	$-14t$	0,5
7	$3t^2 - t + 1$	$5t^2 - 5t / 3 - 2$	1
8	$7 \sin(\pi^2 / 6) + 3$	$2 - 7 \cos(\pi^2 / 6)$	1
9	$-3 / (t + 2)$	$3t + 6$	2
10	$-4 \cos(\pi / 3)$	$-2 \sin(\pi / 3) - 3$	1
11	$-4t^2 + 1$	$8 - 3t$	0,5
12	$5 \sin^2(\pi / 6)$	$-5 \cos^2(\pi / 6) - 3$	1
13	$5 \cos(\pi^2 / 3)$	$-5 \sin(\pi^2 / 3)$	1
14	$-2t - 2$	$-2 / (t + 1)$	2
15	$4 \cos(\pi / 3)$	$-3 \sin(\pi / 3)$	1
16	$3t$	$4t^2 + 1$	0,5
17	$7 \sin^2(\pi / 6) - 5$	$-7 \cos^2(\pi / 6)$	1
18	$1 + 3 \cos(\pi^2 / 3)$	$3 \sin(\pi^2 / 3) + 3$	1
19	$-5t^2 - 4$	$3t$	1
20	$2 - 3t - 6t^2$	$3 - 3t / 2 - 3t^2$	0
21	$6 \sin(\pi^2 / 6) - 2$	$6 \cos(\pi^2 / 6) + 3$	1
22	$7t^2 - 3$	$5t$	0,25
23	$3 - 3t^2 + t$	$4 - 5t^2 + 5t / 3$	1
24	$-4 \cos(\pi / 3) - 1$	$-4 \sin(\pi / 3)$	1
25	$-6t$	$-2t^2 - 4$	1
26	$8 \cos^2(\pi / 6) + 2$	$-8 \sin^2(\pi / 6) - 7$	1
27	$-3 - 9 \sin(\pi^2 / 6)$	$-9 \cos(\pi^2 / 6) + 5$	1
28	$-4t^2 + 1$	$-3t$	1
29	$5t^2 + 5t / 3 - 3$	$3 + 3t^2 + t$	1
30	$2 \cos(\pi^2 / 3) - 2$	$-2 \sin(\pi^2 / 3) + 3$	1

Контрольные вопросы:

1. Что такое момент силы относительно оси и как его вычислить?
2. Какая существует зависимость между моментом силы относительно точки и оси?
3. В каких случаях момент силы относительно оси равен нулю?
4. Как формулируется теорема Вариньона о моменте равнодействующей относительно оси?
5. Каковы условия равновесия произвольной пространственной системы сил?
6. Каковы условия равновесия пространственной системы параллельных сил?
7. Как сформулировать условие равновесия тела, имеющего неподвижную ось вращения?
8. Сколько уравнений равновесия можно получить для системы тел, находящихся в равновесии под действием произвольной плоской системы сил?
9. В чем заключается методика решения задач на равновесие систем тел?
10. Как определить реакции внутренних связей конструкции из систем тел?
11. Как приводится пространственная система сил, действующих на свободное твердое тело, к главному вектору и главному моменту?
12. Как привести систему сил к динамическому винту?
13. Что такое траектория?
14. Какую траекторию имеет точка при прямолинейном движении?
15. Каким образом можно описать траекторию движения точки?
16. Чему равна проекция скорости точки на ось?
17. Чему равен модуль скорости?
18. Чему равна проекция ускорения точки на ось?
19. Как определить модуль ускорения точки?
20. В чем разница между равномерным и равнопеременным движением?
21. Как определить направление вектора скорости, нормального и тангенциального ускорения?
22. Как расположены друг относительно друга нормальное и тангенциальное ускорение?

Критерии оценивания РГР:

5 баллов – наличие полностью выполненной работы, решение контрольной задачи, ответ на три контрольных вопроса.

4 балла – наличие полностью выполненной работы, решение контрольной задачи;

3 балла – наличие полностью выполненной работы;

ЛИТЕРАТУРА:

1. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие для технических вузов. / Под ред. А.А. Яблонского – 15-е изд., стереотипное – М.: Интеграл-Пресс, 2006. – 384 с.

2. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособие для вузов / Под. ред. проф. А.А. Яблонского. – 3-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 1978. – 388 с.

3. Мисюрев М.А. Методика решения задач по теоретической механике – М.: Высшая школа, 1963 – 308 с.