ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Сборник заданий с примерами решения для
расчетно-графических работ

Данная работа представляет собой сборник задач по основным разделам теоретической механики. Приводится 9 заданий по 25 – 30 задач в каждом задании, а так же рассматриваются примеры решения задач по каждому заданию с объяснением правил и методики решения.

Работа предназначена для студентов различных форм обучения, но особенно полезна для дистанционного обучения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. СТАТИКА

Задание 1.1. **Определение реакций опор одного твердого тела, нагруженного плоской системой внешних сил.**

На рисунках, представленных ниже, приведены расчетные схемы твердого тела с внешними нагрузками и размерами, заданными для каждого варианта в таблице, расположенной рядом со схемой. Необходимо определить реакции опор.

Пример выполнения задания

Дано: вариант расчетной схемы (рис. 1.1); $P_1 = 8$ кН; $P_2 = 10$ кН; $q = 12$ кН/м; $M = 16$ кН·м; $\ell = 0{,}1$ м.

Определить реакции в опорах A и B.

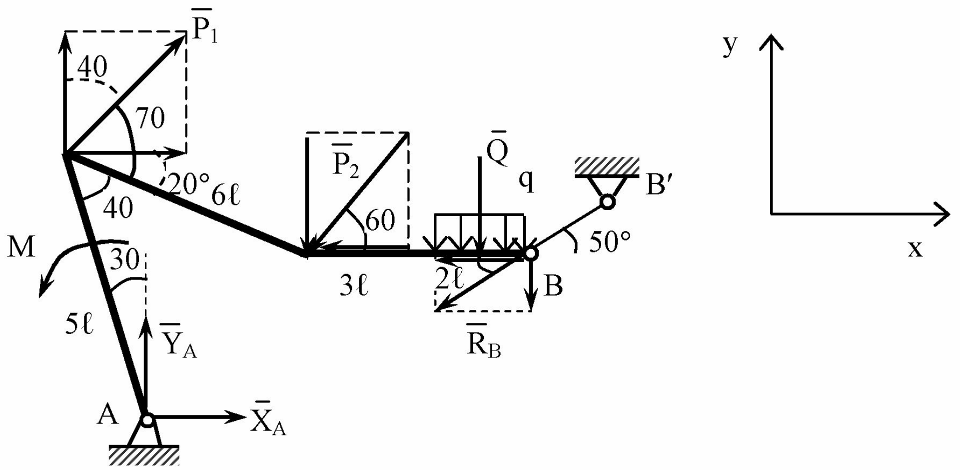


Рис. 1.1

Решение. Заменяем действие связей (опор) реакциями. Число, вид (сила или пара сил с моментом), а также направление реакций зависят от вида опор. В плоской статике для каждой опоры в отдельности можно проверить, какие направления движения запрещает телу данная опора. Проверяют два взаимно перпендикулярных смещения тела относительно опорной точки (A или B) и поворот тела в плоскости действия внешних сил относительно этих точек. Если запрещено смещение, то будет реакция в виде силы по этому направлению, а если запрещен поворот, то будет реакция в виде пары сил с моментом (M_A или M_B).

Первоначально реакции можно выбирать в любую сторону. После определения значения реакции знак «плюс» у него будет говорить о том, что направление в эту сторону верное, а знак «минус» – о том, что правильное направление реакции противоположно выбранному (например, не вниз, а вверх для силы или по часовой стрелке, а не против неё для момента пары сил).

Исходя из вышесказанного, показаны реакции на рис. 1.1. В опоре A их две, т. к. опора запрещает перемещение по горизонтали и вертикали, а поворот вокруг точки A – разрешает. Момент M_A не возникает, т. к. эта шарнирная опора не запрещает поворот телу вокруг точки A. В точке B одна реакция, т. к. запрещено перемещение только в одном направлении (вдоль невесомого рычага BB').

Далее перед составлением уравнения равновесия тела необходимо на рис. 1.1. провести следующие дополнительные построения, упрощающие последующую работу.

Во-первых, распределенная нагрузка q заменяется эквивалентной сосредоточенной силой $\overline{\mathrm{Q}}$. Линия действия её проходит через центр тяжести эпюры (для прямоугольной эпюры центр тяжести на пересечении диагоналей, поэтому сила Q проходит через середину отрезка, на который действует q). Величина силы Q равна площади эпюры, то есть

$$Q = q \cdot 2\ell = 12 \cdot 2 \cdot 0.1 = 2.4 \text{ кН}.$$

Затем необходимо выбрать оси координат x и y и разложить все силы и реакции не параллельные осям на составляющие параллельные им, используя правило параллелограмма. На рис. 1.1 разложены силы $\overline{P_1}, \overline{P_2}, \overline{R_B}$. При этом точка приложения результирующей и её составляющих должна быть одна и та же. Сами составляющие можно не обозначать, т. к. их модули легко выражаются через модуль результирующей и угол с одной из осей, который должен быть задан либо определен по другим заданным углам и показан на схеме. Например для силы P_2 модуль горизонтальной составляющей равен $P_2 cos60$, а вертикальной $- P_2 sin60$.

Теперь можно составить три уравнения равновесия, а так как неизвестных реакций тоже три $\left(\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{Y}}_{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{R}}_{\mathrm{B}}\right)$, их значения легко находятся из этих уравнений. Знак у значения реакции, о чем говорилось выше, определяет правильность выбранных направлений реакций. Для схемы на рис. 1.1 уравнения проекций всех сил на оси x и y и уравнения моментов всех сил относительно точки A запишутся так:

$$\sum M_{A_i} = 0; \quad \mathrm{M} - \mathrm{P}_1 cos40 \cdot 5\ell sin30 - P_1 sin40 \cdot 5\ell cos30 + P_2 cos60(5\ell cos30 - 6\ell sin20) -$$

$$- P_2 sin60(6\ell cos20 - 5\ell sin30) - Q\left(6\ell cos20 - 5\ell sin30 + 3\ell + \frac{1}{2} \cdot 2\ell\right) +$$

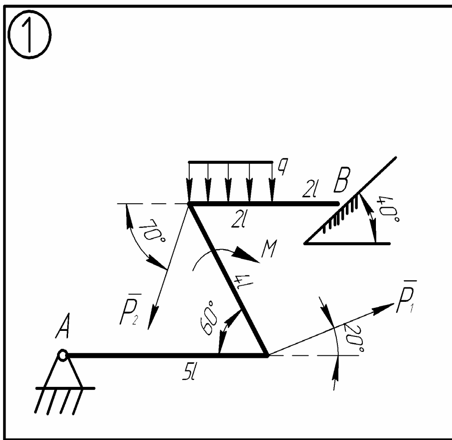
$$+ R_B cos50(5\ell cos30 - 6\ell sin20) - R_B sin50(6\ell cos20 - 5\ell sin30 + 3\ell + 2\ell) = 0;$$

$$\sum F_{x_i} = 0; \quad X_A + P_1 sin40 - P_2 cos60 - R_B cos50 = 0;$$

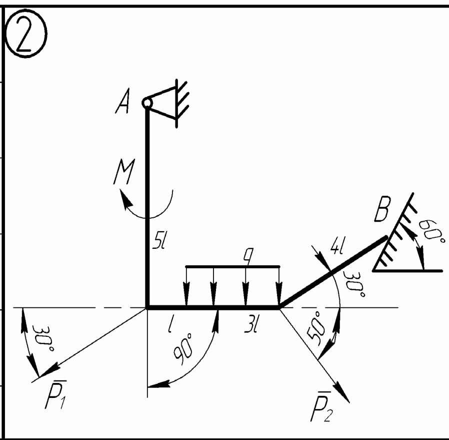
$$\sum F_{y_i} = 0; \quad Y_A + P_1 cos40 - P_2 sin60 - R_B sin50 = 0.$$

Из первого уравнения находим значение R_{B}, затем подставляем его со своим знаком в уравнения проекций и находим значения реакций X_{A} и Y_{A} .

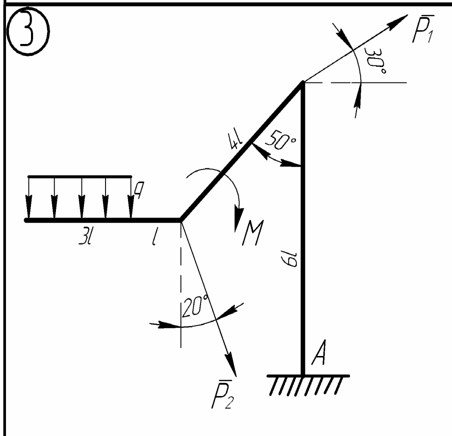
В заключение отметим, что удобно уравнение моментов составлять относительно той точки, чтобы в нем оказалась одна неизвестная, т. е. чтобы эту точку пересекали две другие неизвестные реакции. Оси же удобно выбирать так, чтобы большее число сил оказались параллельны осям, что упрощает составление уравнений проекций.



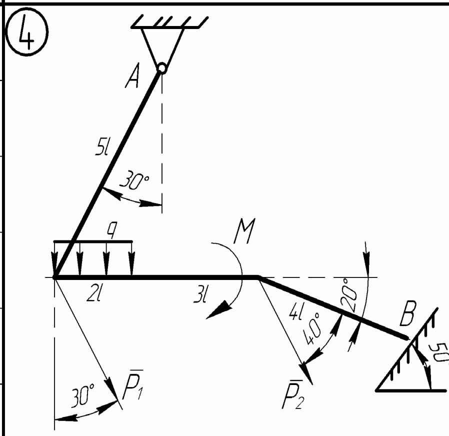
P_1	5 кн
P_2	8 кн
q	10 $\frac{кн}{м}$
M	30 кн*м
l	0.2 м



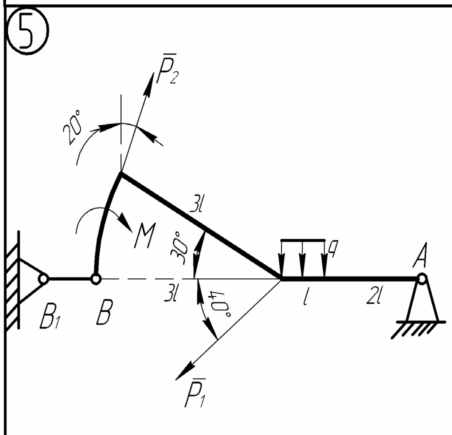
P_1	6 кн
P_2	8 кн
q	10 $\frac{кн}{м}$
M	12 кн*м
l	0.3 м



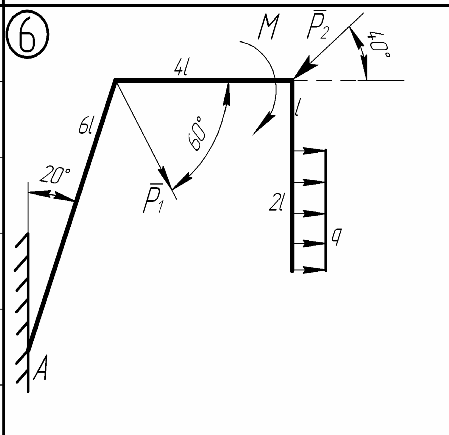
P_1	4 кн
P_2	6 кн
q	10 $\frac{кн}{м}$
M	14 кн*м
l	0.4 м



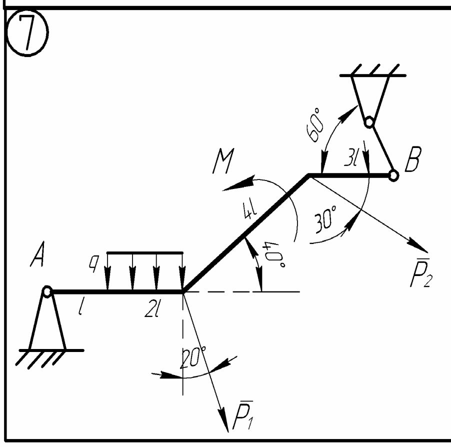
P_1	8 кн
P_2	10 кн
q	10 $\frac{кн}{м}$
M	6 кн*м
l	0.2 м



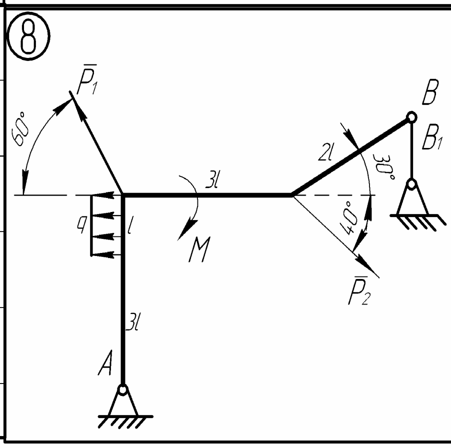
P_1	12 кн
P_2	8 кн
q	10 $\frac{кн}{м}$
M	16 кн*м
l	0.3 м



P_1	10 кн
P_2	14 кн
q	10 $\frac{кн}{м}$
M	18 кн*м
l	0.4 м

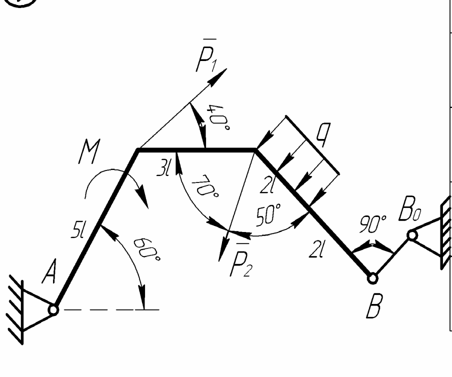


P_1	14 кн
P_2	18 кн
q	10 $\frac{кн}{м}$
M	20 кн*м
l	0.1 м



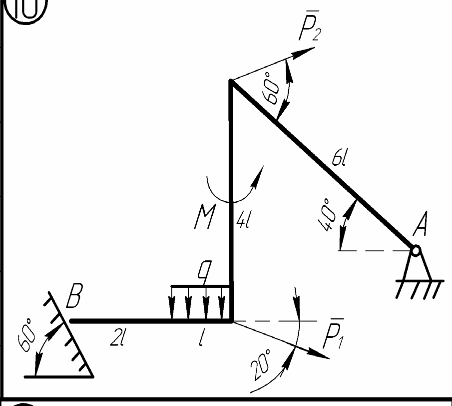
P_1	4 кн
P_2	20 кн
q	10 $\frac{кн}{м}$
M	16 кн*м
l	0.1 м

9



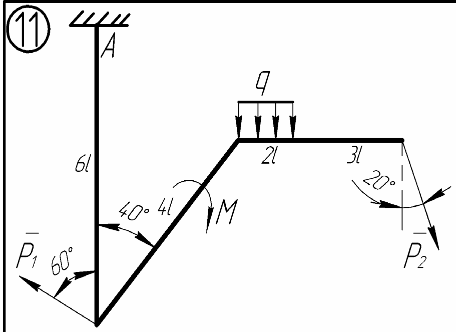
P_1	8 кн
P_2	12 кн
q	10 $\frac{кн}{м}$
M	6 кн*м
l	0.3 м

10



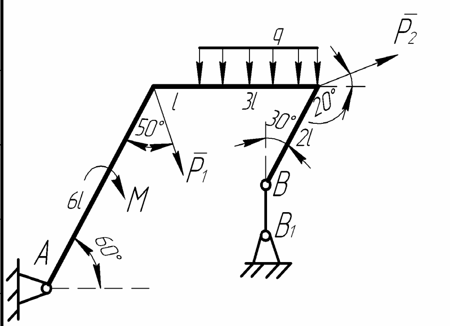
P_1	6 кн
P_2	8 кн
q	10 $\frac{кн}{м}$
M	12 кн*м
l	0.2 м

11



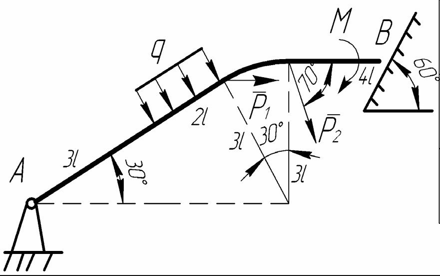
P_1	8 кн
P_2	6 кн
q	10 $\frac{кн}{м}$
M	12 кн*м
l	0.2 м

12



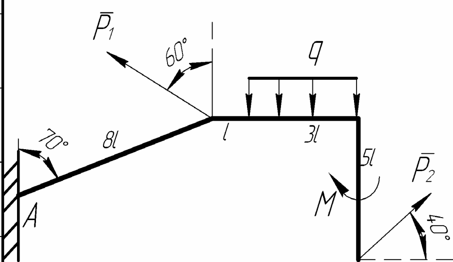
P_1	4 кн
P_2	12 кн
q	8 $\frac{кн}{м}$
M	16 кн*м
l	0.3 м

13



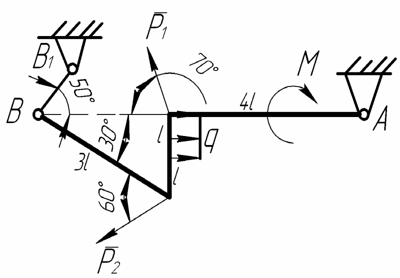
P_1	4 кн
P_2	12 кн
q	8 $\frac{кн}{м}$
M	14 кн*м
l	0.1 м

14



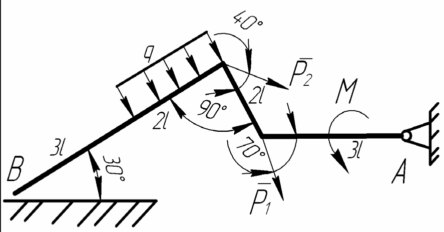
P_1	6 кн
P_2	8 кн
q	8 $\frac{кн}{м}$
M	14 кн*м
l	0.3 м

15



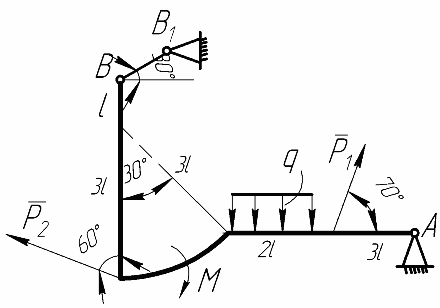
P_1	12 кн
P_2	14 кн
q	8 $\frac{кн}{м}$
M	16 кн*м
l	0.2 м

16



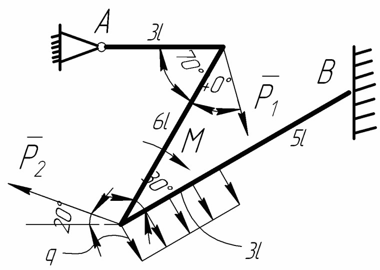
P_1	4 кн
P_2	10 кн
q	8 $\frac{кн}{м}$
M	16 кн*м
l	0.1 м

17



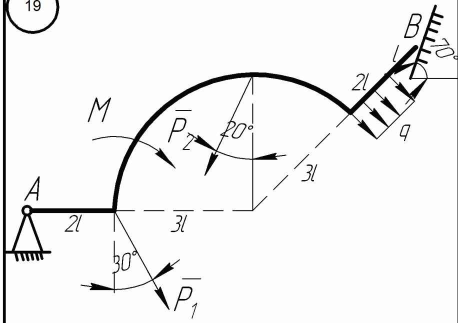
P_1	5 кн
P_2	12 кн
q	10 $\frac{кн}{м}$
M	8 кн*м
l	0.2 м

18



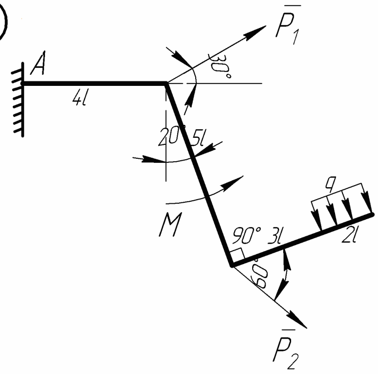
P_1	6 кн
P_2	12 кн
q	10 $\frac{кн}{м}$
M	16 кн*м
l	0.3 м

19



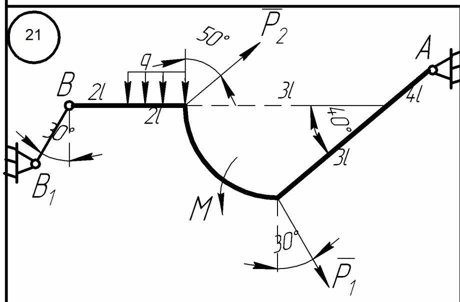
P_1	8 кн
P_2	12 кн
q	8 $\frac{кн}{м}$
M	16 кн*м
l	0.1 м

20



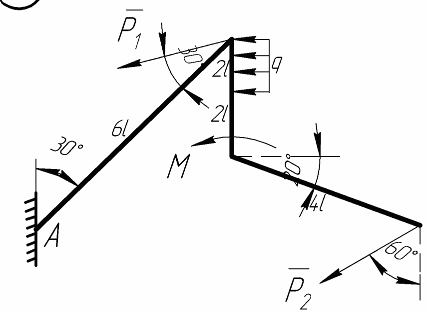
P_1	12 кн
P_2	14 кн
q	8 $\frac{кн}{м}$
M	18 кн*м
l	0.1 м

21



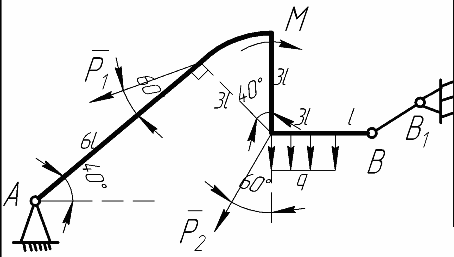
P_1	10 кн
P_2	8 кн
q	10 $\frac{кн}{м}$
M	20 кн*м
l	0.3 м

22



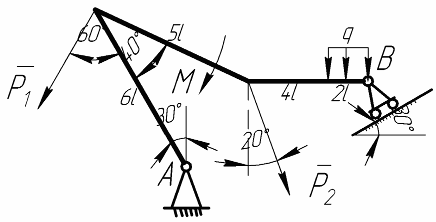
P_1	12 кн
P_2	4 кн
q	10 $\frac{кн}{м}$
M	14 кн*м
l	0.3 м

23

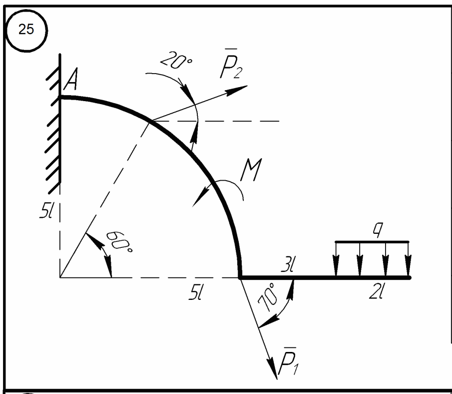


P_1	6 кн
P_2	12 кн
q	8 $\frac{кн}{м}$
M	16 кн*м
l	0.3 м

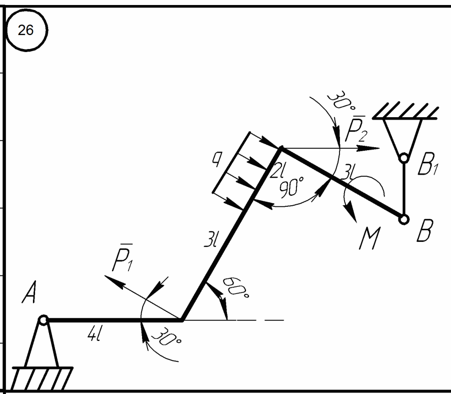
24



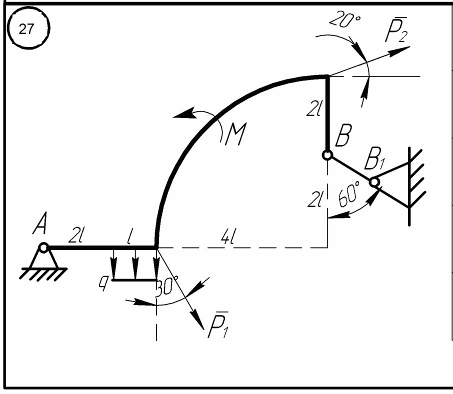
P_1	6 кн
P_2	10 кн
q	8 $\frac{кн}{м}$
M	12 кн*м
l	0.1 м



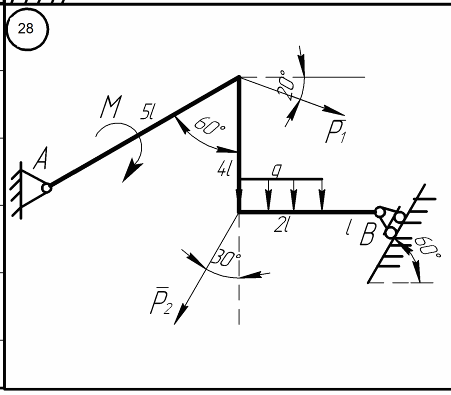
P_1	8 кн
P_2	10 кн
q	8 $\frac{кн}{м}$
M	14 кн*м
l	0.2 м



P_1	6 кн
P_2	4 кн
q	8 $\frac{кн}{м}$
M	12 кн*м
l	0.1 м



P_1	8 кн
P_2	4 кн
q	8 $\frac{кн}{м}$
M	8 кн*м
l	0.1 м



P_1	5 кн
P_2	8 кн
q	10 $\frac{кн}{м}$
M	16 кн*м
l	0.3 м

Задание 1.2. <u>Определение реакций опор составной конструкции, разбиваемой на несколько твердых тел, находящейся под действием плоской системы внешних сил.</u>

На рисунках к данному заданию приведены расчетные схемы с заданными для каждого варианта нагрузками, размерами и углами. Необходимо определить реакции опор.

Пример выполнения задания

Дано: вариант расчетной схемы (рис. 2). P_1 = 14 кН; P_2 = 8 кН; q = 10 кн/м; M = 6 кН·м; AB = 0,5 м; BC = 0,4 м; CD = 0,8 м; DE = 0,3 м; EF = 0,6 м.

Определить реакции в опорах А и F.

Решение. Используя рекомендации задания 1.1, расставляем реакции в опорах. Их получается четыре $\left(\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{M}_A, \overline{R}_F\right)$. Так как в плоской статике для одного тела можно составить только три уравнения равновесия, то для определения реакций необходимо разбить конструкцию на отдельные твердые тела так, чтобы число уравнений и неизвестных совпало. В данном случае можно разбить на два тела *ABCD* и *DEF*. При этом в месте разбиения, т. е. в точке *D* для каждого из двух тел появляются дополнительные реакции, определяемые по виду, числу и направлению так же, как и для точек *A* и *F*. При этом по третьему закону Ньютона они равны по значению и противоположно направлены для каждого из тел. Поэтому их можно обозначить одинаковыми буквами (см. рис. 1.3).

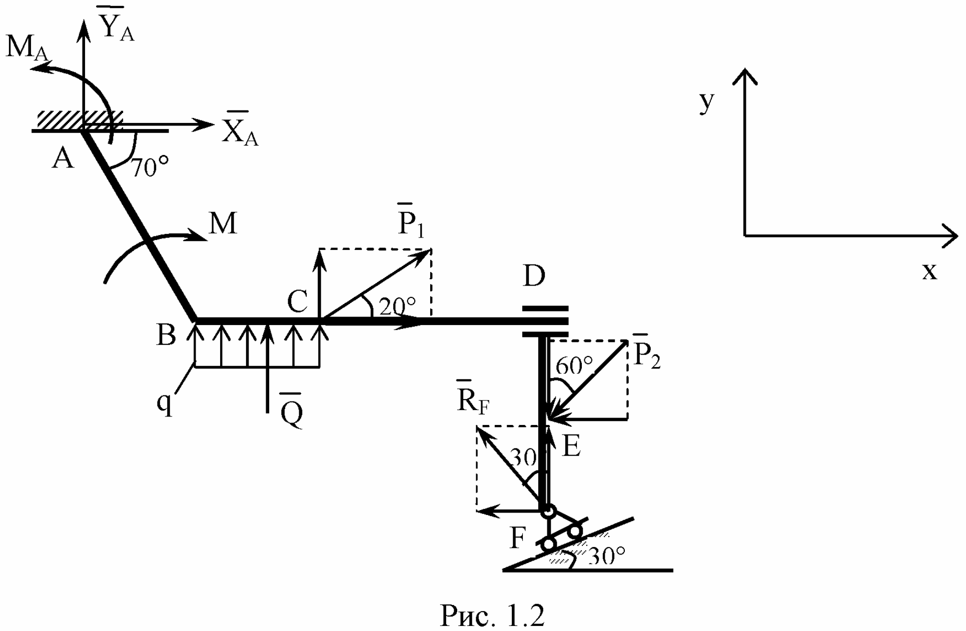


Рис. 1.2

Далее, как и в задании 1.1, заменяем распределенную нагрузку q сосредоточенной силой $\overline{Q}$ и находим её модуль $Q = q{\cdot}BC = 10{\cdot}0{,}4 = 4$ кН. Затем выбираем оси координат и раскладываем все силы на рис. 1.2 и 1.3 на составляющие параллельные осям. После этого составляем уравнения равновесия для каждого из тел. Всего их получается шесть и неизвестных реакций тоже шесть $\left(X_A, \mathrm{Y_A}, \mathrm{M_A}, \mathrm{R_F}, Y_D, M_D\right)$, поэтому система уравнений имеет решение, и можно найти модули, а с учетом знака модуля и правильное направление этих реакций (см. задание 1.1).

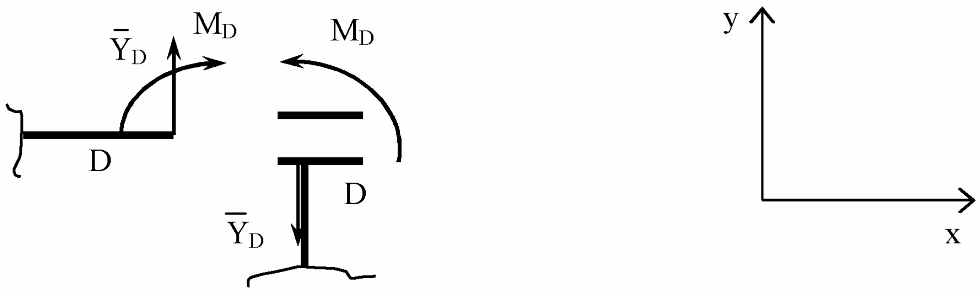


Рис. 1.3. Разбиение конструкции на два тела в точке D, т. е. в месте их соединения скользящей заделкой (трение в ней не учитывается)

Целесообразно так выбирать последовательность составления уравнений, чтобы из каждого последующего можно было определить какую-то одну из искомых реакций. В нашем случае удобно начать с тела DEF, т. к. для него имеем меньше неизвестных. Первым составим уравнение проекций на ось x, из которого найдем R_F. Далее составим уравнения проекций на оси y и найдем Y_D, а затем уравнение моментов относительно точки F и определим M_D. После этого переходим к телу $ABCD$. Для него первым можно составить уравнения моментов относительно точки A и найти M_A, а затем последовательно из уравнений проекций на оси найти X_A, Y_A. Для второго тела необходимо учитывать свои реакции Y_D, M_D, взяв их из рис. 3, но значения этих реакций уже будут известны из уравнений для первого тела.

При этом значения всех ранее определенных реакций подставляются в последующие уравнения со своим знаком. Таким образом, уравнения запишутся так:

для тела DEF

$$\sum F_{xi} = 0; \quad -\mathrm{R_F} \sin 30 - P_2 \sin 60 = 0, \text{ находим } \mathrm{R_F};$$

$$\sum F_{yi} = 0; \quad -\mathrm{Y_D} - P_2 \cos 60 + R_F \cos 60 = 0, \text{ находим } \mathrm{Y_D};$$

$$\sum M_{Fi} = 0; \quad \mathrm{M_D} + P \sin 60 \cdot FE = 0, \text{ находим } \mathrm{M_D}.$$

для тела $ABCD$

$$\sum M_{Ai} = 0; \qquad \mathrm{M_A} - M + Q\left(AB \cos 70 + \frac{1}{2} BC\right) + P_1 \cos 20 \cdot AB \sin 70 +$$

$$+ \mathrm{P_1} \sin 20 (AB \cos 70 + BC) - M_D + Y_D (AB \cos 70 + DC + CD) = 0, \text{ находим } \mathrm{M_A};$$

$$\sum F_{xi} = 0; \quad \mathrm{X_A} + P_1 \cos 20 = 0, \text{ находим } \mathrm{X_A};$$

$$\sum F_{yi} = 0; \quad \mathrm{Y_A} + P_1 \cos 20 + Q + Y_D = 0, \text{ находим } \mathrm{Y_A}.$$

В некоторых вариантах задан коэффициент трения в какой-то точке, например $f_A = 0{,}2$. Это означает, что в этой точке необходимо учесть силу трения $F_{трA} = = f_A N_A$, где N_A реакция плоскости в этой точке. При разбиении конструкции в точке, где учитывается сила трения, на каждое из двух тел действует своя сила трения и реакция плоскости (поверхности). Они попарно противоположно направлены и равны по значению (как и реакции на рис. 1.3).

Реакция N всегда перпендикулярна плоскости возможного скольжения тел либо касательной к поверхностям в точке скольжения, если там нет плоскости. Сила трения же направлена вдоль этой касательной либо по плоскости против скорости возможного скольжения. Приведенная выше формула для силы трения справедлива для случая предельного равновесия, когда скольжение вот-вот начнется (при непредельном равновесии сила трения меньше этого значения, а определяется её величина из уравнений равновесия). Таким образом, в вариантах задания на предельное равновесие с учетом силы трения к уравнениям равновесия для одного из тел необходимо добавить еще одно уравнение $F_{тр} = fN$. Там, где учитывается сопротивление качению и задан коэффициент сопротивления качения μ, добавляются уравнения равновесия колеса (рис. 1.4).

При предельном равновесии

$$\sum F_{xi} = 0; \quad T - \mathrm{F_{тр}} = 0;$$

$$\sum F_{yi} = 0; \quad \mathrm{N} - \mathrm{G} = 0$$

$$\sum M_{Ai} = 0; \quad -\mathrm{TR} + \mu\mathrm{N} = 0.$$

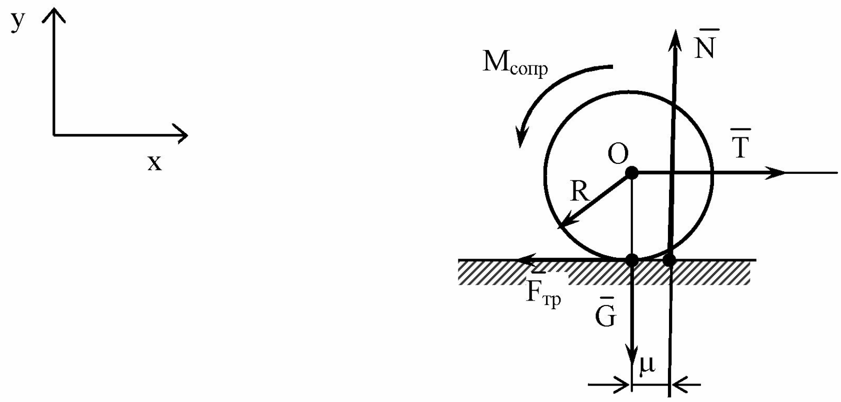


Рис. 1.4

Из последних уравнений, зная G, μ, R, можно найти N, $F_{тр}$, T для начала качения без проскальзывания.

В заключение отметим, что разбиение конструкции на отдельные тела проводят в том месте (точке), где имеет место наименьшее число реакций. Часто это невесомый трос или невесомый ненагруженный рычаг с шарнирами на концах, которые соединяют два тела (рис 1.5).

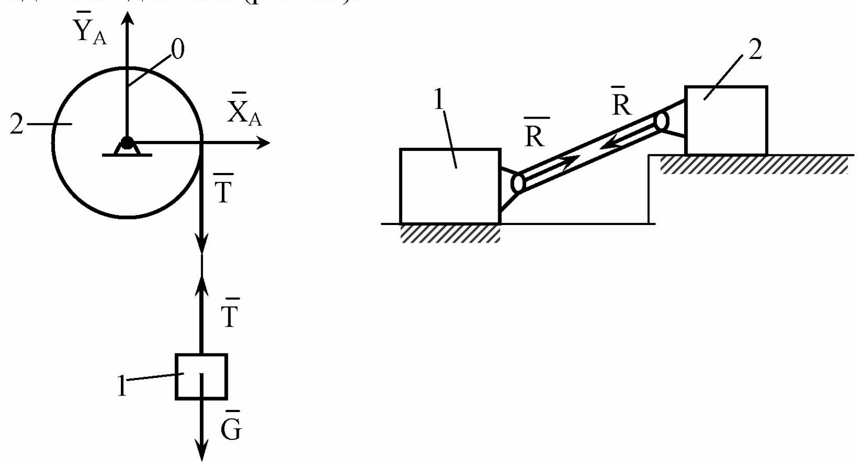
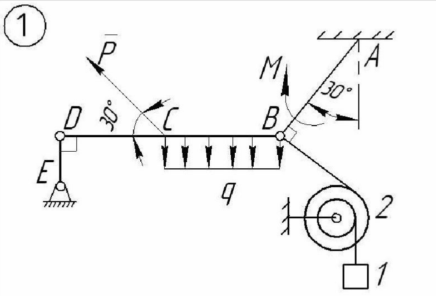


Рис. 1.5

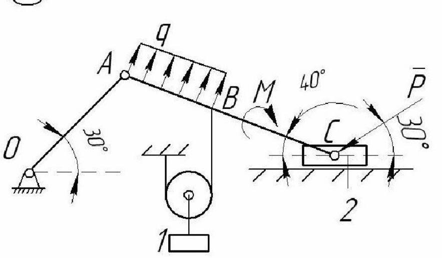
1



G1=5кН
P=6кН
M=12кН*М
q=10кН/М
AB=0.8М
CB=0.3М
DC=0.4М
R2=0.2М
r2=0.1М

Найти: Реакции в заделке A

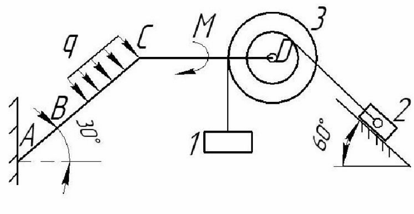
2



G1=2кН
M=5кН*М
q=4кН/М
AB=0.4М
CB=0.6М
f2=0.1

Найти: Минимальное значение P для равновесия

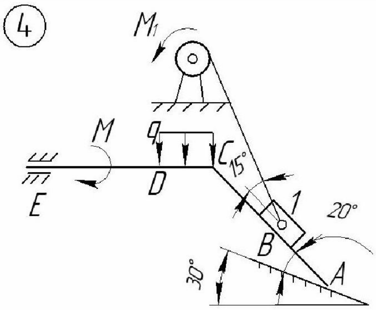
3



G2=8кН
M=12кН*М
q=10кН/М
AB=0.2М
CB=0.3М
DC=0.5М
R3=0.3М
r3=0.1М
f2=0.2

Найти: Минимальное значение G1 для равновесия и реакции в заделке A

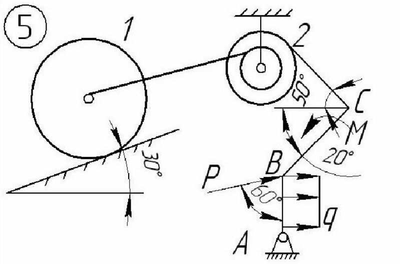
4



G1=20кН
M=5кН*М
q=8кН/М
AB=0.4М
CB=0.4М
DC=0.3М
DE=0.3М
f2=0.2

Найти: Момент двигателя M1 для начала движения и реакции в опорах A и E

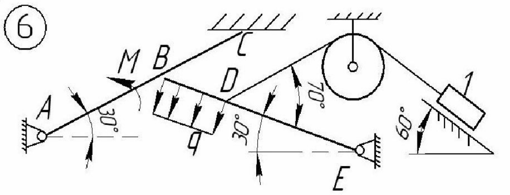
5



G1=26кН
M=8кН*М
q=10кН/М
R1=0.6М
R2=0.4М
r2=0.3М
AB=0.8М
BC=1М
μ1=0.1М-коэф. сопр-я. качению

Найти: Минимальное значение P для начала качения колеса 1 вверх и реакции в опоре A

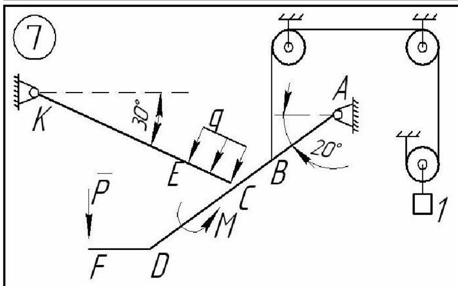
6



G1=16кН
M=6кН*М
q=4кН/М AB=0.6М
CB=0.4М BD=0.3М
DE=0.5М f1=0.2

Найти: Реакции в опорах A и C

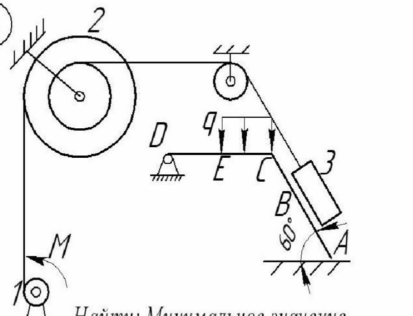
7



P=4кН
M=8кН*М
q=10кН/М
AB=0.2М
CB=0.2М
DC=0.2М
DF=0.2М
KE=0.3М
EC=0.3М

Найти: Минимальное значение G1 для равновесия и реакции в опоре A (В точке C опирание)

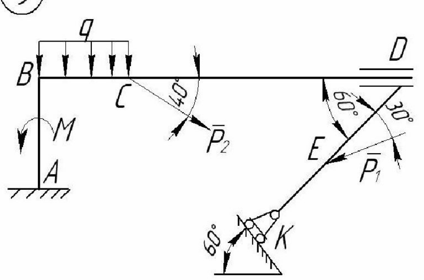
8



G3=20кН
q=10кН/М
AB=0.2М
CB=0.2М
CE=0.2М
DE=0.2М
R1=0.2М
r1=0.1М
R2=0.3М
r2=0.1М
f3=0.2

Найти: Минимальное значение момента двигателя M для начала движения и реакции в опорах A и D при этом

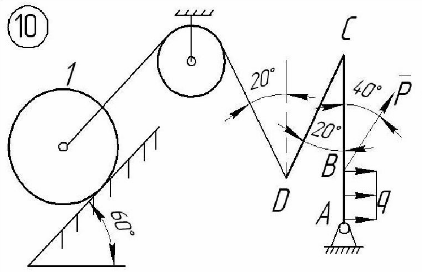
9



P1=10кН
P2=4кН
M=6кН*М
q=8кН/М
AB=0.4М
CB=0.4М
DC=0.5М
KE=0.3М
ED=0.3М

Найти: Реакции в опорах A и K

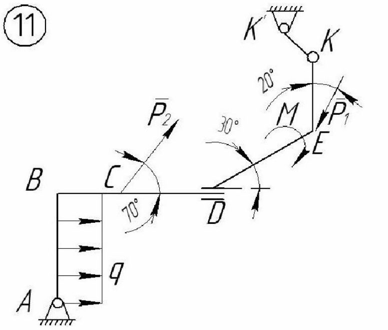
10



G1=20кН
q=4кН/М
AB=0.2М
CB=0.4М
DC=0.5М
R1=0.5М
μ=0.1- коэф.сопрот. качению

Найти: Минимальное значение P для начала качения колеса 1 вверх и реакции в опоре A

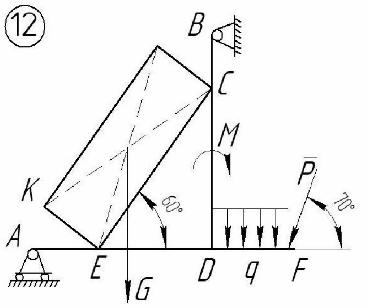
11



P1=5кН;
P2=7кН
M=8кН×М;
q=12кН×М
AB=BC=CD=0.3М
DE=KE=0.5М

Найти: реакции в опорах A, K и в соединении D.

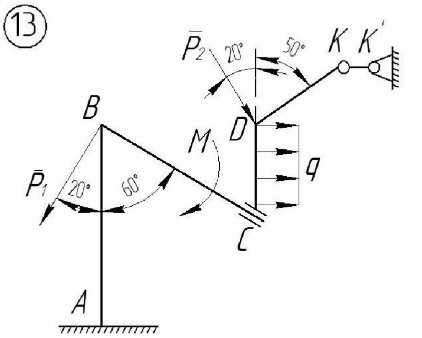
12



P=10кН
M=8кН×М
q=16кН×М
AE=ED=DF=0.3М
CB=KE=0.4М
коэф. трения
fc=0, fe=0.4

Найти: минимальное значение G для начала скольжения бруска и реакции опор A и B при этом.

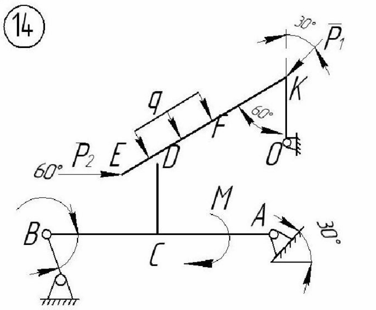
13



P1=8кН
P2=6кН
M=10кН×М
q=12кН×М
AB=AC=0.8М
CD=DK=0.5М

Найти: реакции в опорах A, K и в соединении C.

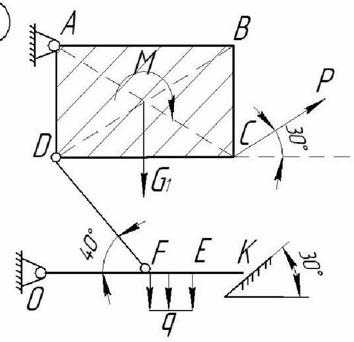
14



P1=12кН
P2=8кН
M=20кН*М
q=10кН/М
AC=CB=0.4М
CD=0.3М
ED=DF=0.2М
FK=0.2М
OK=0.3М

Найти: Реакции в опорах A, B, O

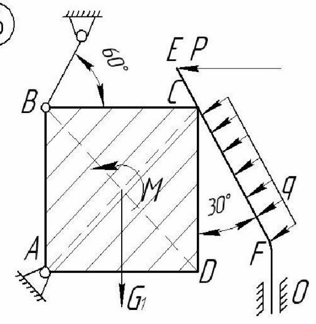
15



G1=12кН
P=6кН
M=8кН*М
q=10кН/М
AB=DC=0.4М
CB=AD=0.2М
OF=FE=0.3М
EK=0.3М

Найти: Реакции в опорах A, O, K

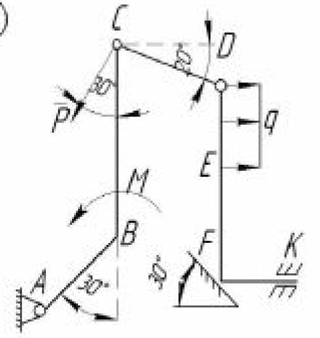
16



G1=8кН
P=6кН
M=10кН*М
q=12кН/М
AB=BC=0.4М
CD=DA=0.4М
EC=0.2М
CF=0.6М
FO=0.5М

Найти: Реакции в опорах A, B, O

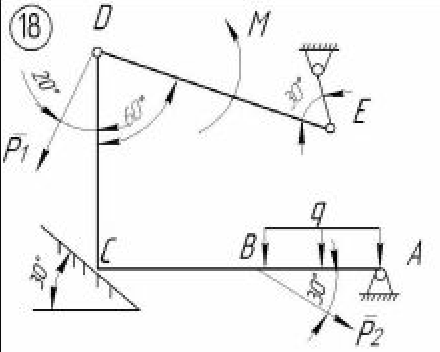
17



P=16кН
M=20кН*М
q=10кН/М
AB=BC=0.8М
DE=0.5М
EF=FK=0.3М

Найти: Реакции в опорах A, F, K

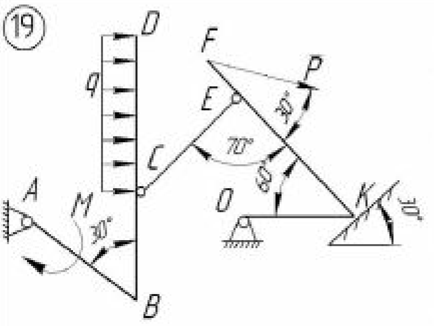
18



P1=6кН
P2=8кН
M=12кН*М
q=10кН/М
AB=0.5М
BC=0.5М
CD=0.5М
DE=0.6М

Найти: Реакции в опорах A, E

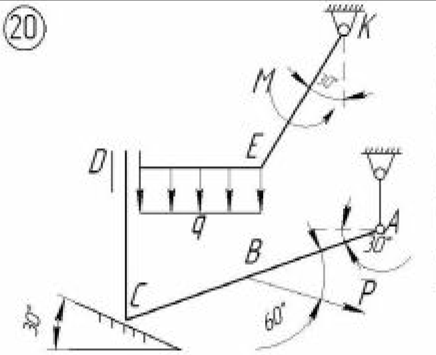
19



P=18кН
M=14кН*М
q=10кН/М
AB=0.4М
BC=0.3М
CD=0.5М
EF=0.2М
OK=0.4М
KE=0.4М

Найти: Реакции в опорах A, O, K

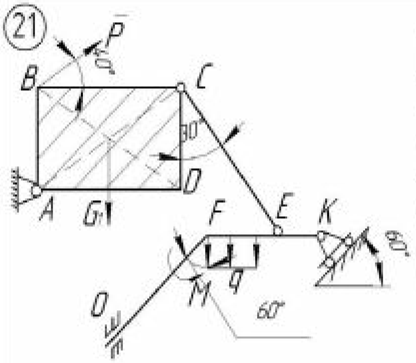
20



P=16кН
M=8кН*М
q=10кН/М
AB=0.5М
BC=0.5М
CD=0.5М
DE=0.3М
EK=0.4М

Найти: Реакции в опорах A, C, K

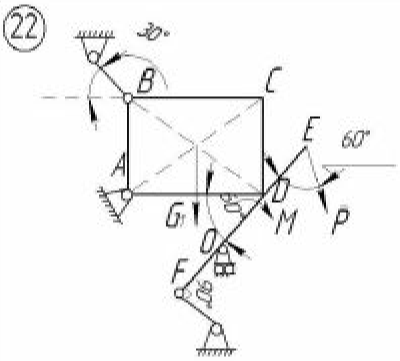
21



G1=8кН
P=4кН
M=6кН*М
q=10кН/М
AB=DC=0.5М
BC=AD=0.8М
FE=EK=0.4М
OF=0.6М

Найти: Реакции в опорах A, O, K

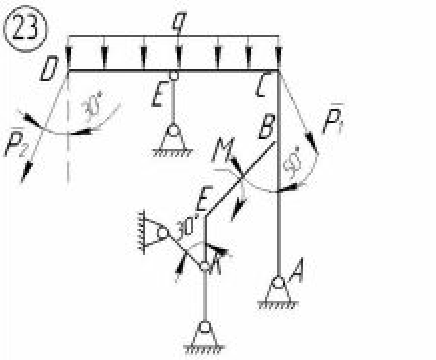
22



G1=4кН
P=8кН
M=10кН*М
AB=CD=0.3М
BC=AD=0.5М
FO=OD=0.4М
DE=0.4М
В точке D опирание

Найти: Реакции в опорах A, B, O, F

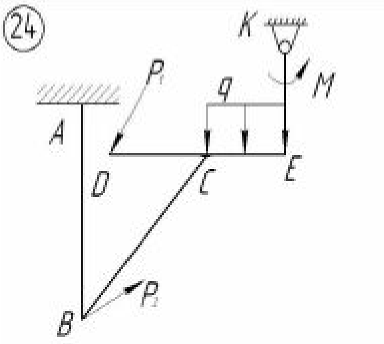
23



P1=14кН
P2=8кН
M=8кН*М
q=10кН/М
DC=0.6М
BC=0.2М
AB=0.5М
BE=0.8М
EK=0.4М
DE=EC

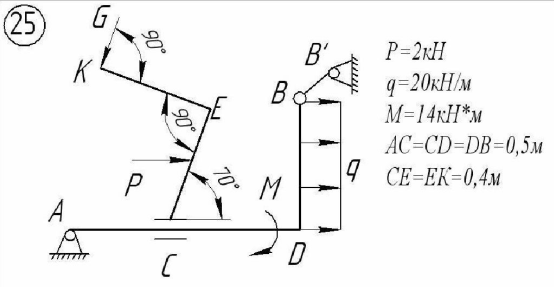
Найти: реакции опор E, A и K при этом

24

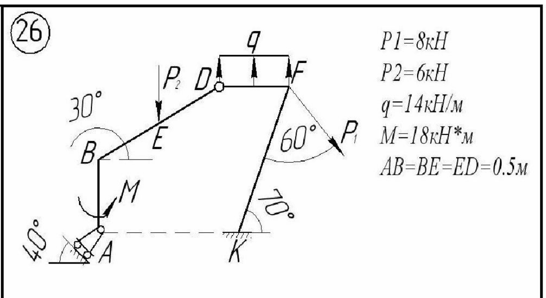


P1=4кН
P2=8кН
q=6кН/м
M=12кН*м
AB=BC=0,8м
DC=KE=0,5м
CE=0,3м

Найти: реакции в опорах A и K в опорной точке C



Найти: G для отсутствия скольжения стержня СКЕ и реакции в точках A,B и C при этом

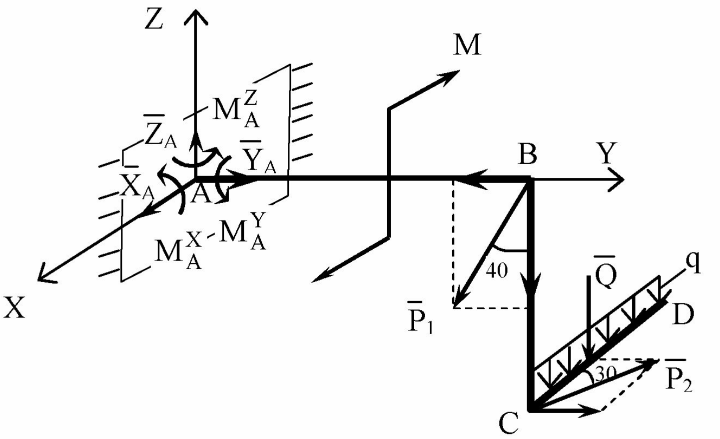


Найти: реакции в опорах A и K в опорной точке D

Задание 1.3. Определение реакций опор тела нагруженного пространственной системой внешних сил.

На рисунках приведены варианты схем с заданными нагрузками и необходимыми размерами и указаниями на расположение относительно осей координат как самой конструкции, так и нагрузок. Необходимо определить все реакции опор.

Пример выполнения задания



Дано: вариант расчетной схемы (рис. 6); P_1 = 8 кН; P_2 = 12 кН; q = 6 кН/м; M = 16 кН·м; AB = 0,8 м; BC = 0,6 м; CD = 0,5 м; BC || AZ; CD || AX; M ⊥ AY; q || AZ; P_1 ⊥ AX; P_2 ⊥ AZ.

Рис. 1.6

Решение. Расставляем реакции опор. Если опора одна и она является жесткой заделкой в точке A, то такая опора запрещает перемещение вдоль всех трех осей и поворот конструкции вокруг этих осей. Поэтому возникают три реакции в виде сил $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{Z}_A$, выбираемых по осям, и три реакции в виде пар сил с моментами M_A^X, M_A^Y, M_A^Z, перпендикулярными осям. Если опор более одной, то последние пары сил перераспределяются между ними и, например, в шарнирных опорах остаются только реакции в виде сил, направленных вдоль соответствующей оси, если опора запрещает перемещение в этом направлении. Если одной из опор является невесомый рычаг или трос, или опорная плоскость, то реакция одна – как на рис. 1.4, 1.5, 1.7.

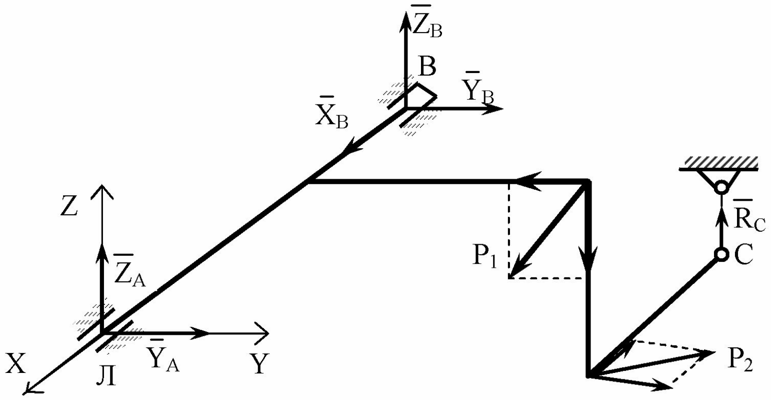


Рис. 1.7

Далее схема решения аналогична примененной ранее в заданиях 1.1, 1.2 (она типична для любой задачи статики). То есть, определяем силу Q, раскладываем все силы на составляющие параллельные осям, используя для этого исходные данные, а именно: то, каким осям параллельна или перпендикулярна данная нагрузка. Затем составляем шесть уравнений равновесия, начиная с уравнений моментов относительно осей, и решаем полученную систему алгебраических уравнений относительно значений искомых реакций (знак реакции, как обычно, говорит о правильности первоначально выбранного её направления).

$$\sum M_{x_i} = 0; \quad -P_1 cos40 \cdot AB + P_2 sin30 \cdot BC - Q \cdot AB + M_A^X = 0;$$

$$\sum M_{y_i} = 0; \quad -M + P_2 cos30 \cdot DC - Q\frac{1}{2}CD + M_A^Y = 0;$$

$$\sum M_{Z_i} = 0; \quad P_2 cos30 \cdot AB + M_A^Z = 0.$$

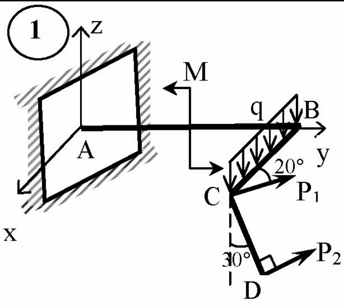
$$\sum F_{x_i} = 0; \quad -P_2 cos30 + X_A = 0;$$

$$\sum F_{y_i} = 0; \quad -P_1 sin40 + P_2 sin30 + Y_A = 0;$$

$$\sum F_{F_i} = 0; \quad -P_1 cos40 - Q + Z_A = 0.$$

В заключение отметим, что момент относительно выбранной оси создают только те силы или составляющие, а также пары сил, которые перпендикулярны ей и не пересекают ось. Наоборот, проекцию на выбранную ось дают только параллельные ей составляющие сил.

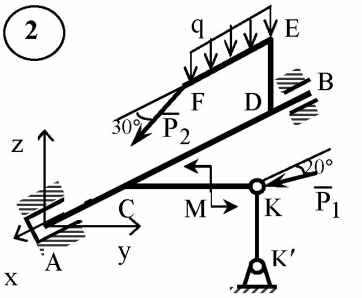
1



$P_1 = 8$ кН;
$P_2 = 4$ кН;
$M = 12$ кН/м;
$q = 10$ кН/м;
$AB = 0,8$ м;
$CB = 0,6$ м;
$DC = 0,4$ м;
$BC \parallel AX$;
$CD \perp AX$;
$q \perp AY$; $M \perp AX$;
$M \perp AX$; $P_1 \perp AZ$; $P_2 \perp AX$.

Найти: реакции в заделке А.

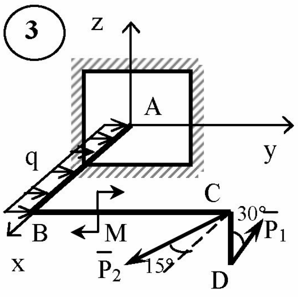
2



$P_1 = 8$ кН;
$P_2 = 6$ кН;
$M = 20$ кН/м;
$q = 10$ кН/м;
$AC = CD = 0,4$ м;
$DB = DE = 0,4$ м;
$EF = 0,3$ м;
$CK = 0.5$ м;
$DE \parallel AZ$;
$KK' \parallel AZ$;
$EF \parallel AX$; $CK \parallel AY$;
$M \perp AX$; $q \perp AY$; $P_1 \perp AZ$; $P_2 \perp AY$.

Найти: реакции в опорах А, В, К.

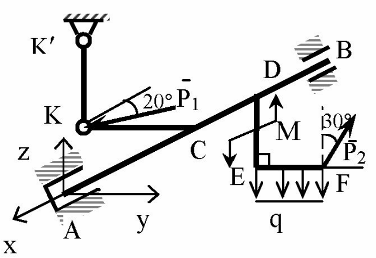
3



$P_1 = 10$ кН;
$P_2 = 4$ кН;
$M = 8$ кН/м;
$q = 6$ кН/м;
$AB = 0,8$ м;
$CB = 0,6$ м;
$DC = 0,4$ м;
$BC \parallel AY$;
$CD \parallel AZ$;
$q \perp AZ$; $M \perp AX$;
$P_1 \perp AX$; $P_2 \perp AZ$.

Найти: реакции в заделке А.

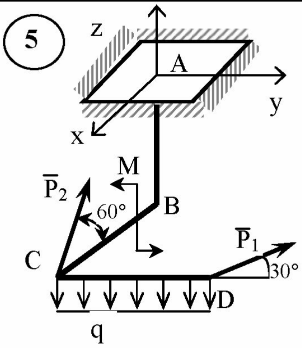
4



$P_1 = 4$ кН;
$P_2 = 10$ кН;
$M = 6$ кН/м;
$q = 8$ кН/м;
$AC = CD = DB =$
$= 0,5$ м;
$DE = 0,4$ м;
$EF = 0,6$ м;
$CK = 0.8$ м;
$DE \parallel AZ$;
$KK' \parallel AZ$; $EF \parallel AY$;
$KC \parallel AY$; $M \perp AY$;
$q \perp AX$; $P_1 \perp AZ$; $P_2 \perp AX$.

Найти: реакции в опорах А, В, К.

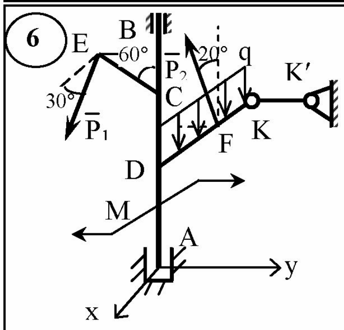
5



$P_1 = 8$ кН;
$P_2 = 4$ кН;
$M = 6$ кН/м;
$q = 12$ кН/м;
$AC = 0,4$ м;
$BC = 0,6$ м;
$CD = 0,8$ м;
$CB \parallel AX$; $CD \parallel AY$;
$q \perp AX$; $M \perp AX$;
$P_1 \perp AZ$; $P_2 \perp AY$.

Найти: реакции в заделке А.

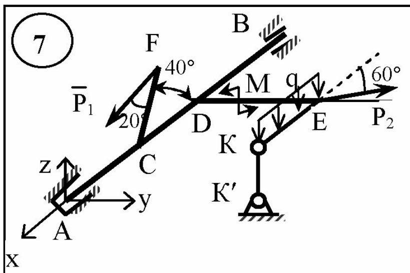
6



$P_1 = 12$ кН;
$P_2 = 2$ кН;
$M = 4$ кН/м;
$q = 8$ кН/м;
$AD=DC=CB= 0,3$ м;
$DF = FK = 0,2$ м;
$EC = 0,5$ м;
$EC \perp AX$; $DK \parallel AX$;
$KK' \parallel AY$; $q \parallel AZ$;
$M \perp AZ$; $P_1 \perp AZ$;
$P_2 \perp AX$.

Найти: реакции в опорах А, В, К.

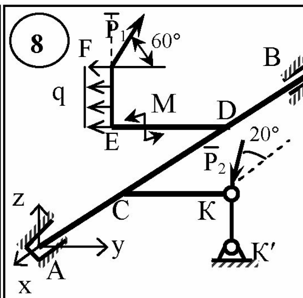
7



$P_1 = 6$ кН;
$P_2 = 8$ кН;
$M = 4$ кН/м;
$q = 8$ кН/м;
$AC = CD =$
$= DB = 0,4$ м;
$CF = DE =$
$= 0,5$ м;
$EK = 0,6$ м;
$DE \parallel AY$; $KE \parallel AX$; $q \parallel AZ$; $CF \perp AY$; $M \perp AY$;
$P_1 \perp AY$; $P_2 \perp AZ$; $KK' \parallel AZ$.

Найти: реакции в опорах А, В и К.

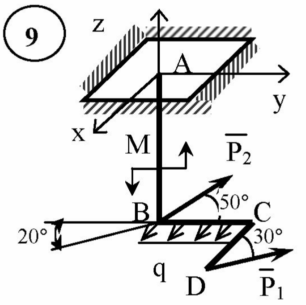
8



$P_1 = 2$ кН;
$P_2 = 6$ кН;
$M = 4$ кН/м;
$q = 8$ кН/м;
$AC = CD = DB = 0,6$м;
$ED = 0,5$ м;
$EF = 0,4$ м; $CK = 0.8$ м;
$ED \parallel AY$; $EF \parallel AZ$;
$KK' \parallel AZ$; $q \parallel AX$;
$M \perp AY$; $P_1 \perp AX$;
$P_2 \perp AY$.

Найти: реакции в опорах А, В, К.

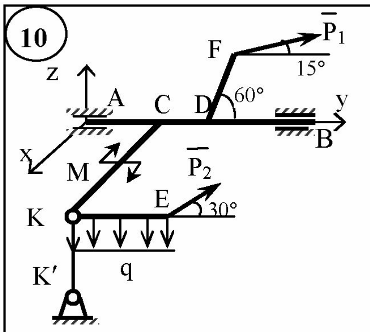
9



$P_1 = 20$ кН;
$P_2 = 8$ кН;
M = 6 кН/м;
q = 10 кН/м;
AB = 0,6 м;
BC = 0,8 м;
CD = 0,4 м;
BC || AY; CD || AX;
q ⊥ AZ; M ⊥ AX;
P_1 ⊥ AZ; P_2 ⊥ AX.

<u>Найти</u>: реакции в заделке А.

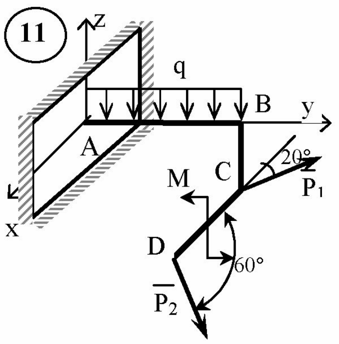
10



$P_1 = 9$ кН;
$P_2 = 6$ кН;
M = 8 кН/м;
q = 14 кН/м;
AC = CD = DB =
= 0,4 м;
CK = KE = 0,6 м;
DF = 0,8 м;
DF ⊥AX; M ⊥ AZ;
CK ||AX; KE || AY;
KK′ || AZ;
q ⊥ AX; P_1 ⊥ AX; P_2 ⊥ AZ.

<u>Найти</u>: реакции в опорах А, В и К.

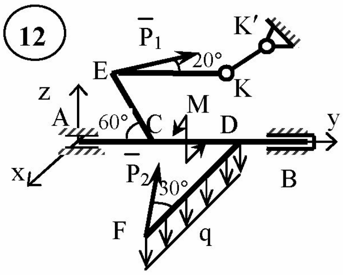
11



$P_1 = 14$ кН;
$P_2 = 8$ кН;
M = 12 кН/м;
q = 16 кН/м;
AB = 0,6 м;
BC = 0,5 м;
CD = 0,7 м;
BC || AZ; CD ||AX;
q ⊥ AX; M ⊥ AX;
P_1 ⊥ AZ; P_2 ⊥ AY.

<u>Найти</u>: реакции в заделке А.

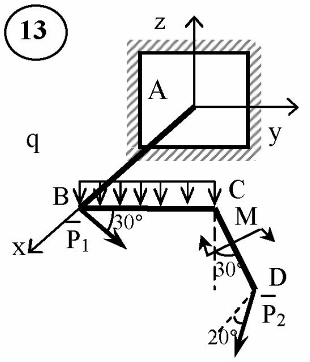
12



$P_1 = 6$ кН;
$P_2 = 9$ кН;
M = 7 кН/м;
q = 4 кН/м;
AC = CD = CB =
= 0,7 м;
CE = EK = 0,7 м;
DF = 0,8 м;
DF || AX; M ⊥ AY;
EK ||AY; EC ⊥AX;
KK′ || AX;
q ⊥ AY; P_1 ⊥ AX; P_2 ⊥ AY.

<u>Найти</u>: реакции в опорах А, В и К.

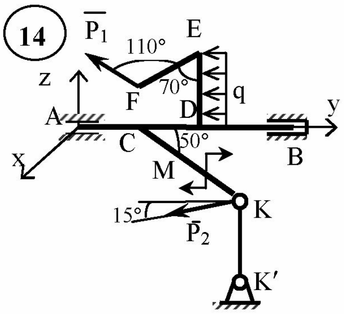
13



$P_1 = 10$ кН;
$P_2 = 12$ кН;
M = 14 кН/м;
q = 16 кН/м;
AB = 0,6 м;
BC = 1 м;
CD = 0,8 м;
BC || AY; CD ⊥ AX;
q ⊥ AX; M ⊥ AX;
P_1 ⊥ AX; P_2 ⊥ AZ.

<u>Найти</u>: реакции в заделке А.

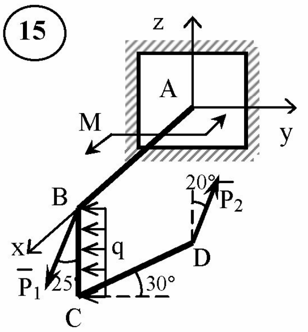
14



$P_1 = 12$ кН;
$P_2 = 10$ кН;
M = 16 кН/м;
q = 8 кН/м;
AC = CD = DB =
= 0,5 м;
DE = EF = 0,6 м;
CK = 0,8 м;
CK ⊥AZ; M ⊥ AX;
CK ||AX; DE || AZ;
KK′ || AZ;
EF⊥ AX; P_1 ⊥ AX; P_2 ⊥ AZ.

<u>Найти</u>: реакции в опорах А, В и К.

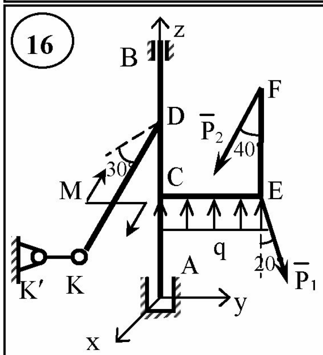
15



$P_1 = 4$ кН;
$P_2 = 8$ кН;
M = 12 кН/м;
q = 10 кН/м;
AB = 0,8 м;
BC = 0.9 м;
CD = 0,5 м;
BC || AZ; CD ⊥ AX;
q ⊥ AX; M ⊥ AZ;
P_1 ⊥ AY; P_2 ⊥ AX.

<u>Найти</u>: реакции в заделке А.

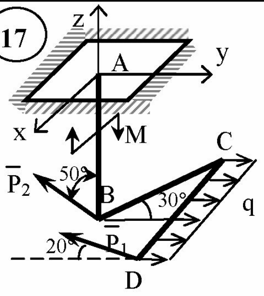
16



$P_1 = 5$ кН;
$P_2 = 7$ кН;
M = 12 кН/м;
q = 8 кН/м;
AC = CD = DB= 0,6 м;
CE = EF = 0,8 м;
DK = 1,2 м;
CE || AY; EF || AZ;
KK′ || AY; q || AZ;
DK ⊥ AY; M ⊥AZ;
P_1 ⊥ AX; P_2 ⊥ AY.

<u>Найти</u>: реакции в опорах А, В, К.

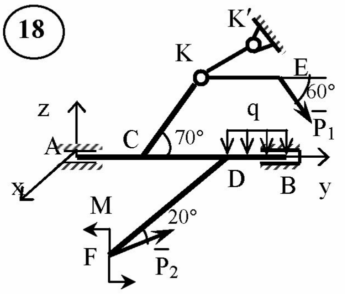
17



$P_1 = 9$ кН;
$P_2 = 7$ кН;
M = 10 кН/м;
q = 12 кН/м;
AB = 0,7 м;
BC = 0,8 м;
CD = 1 м;
BC ⊥ AX; CD || AX;
q ⊥ AZ; M ⊥ AY;
P_1 ⊥ AZ; P_2 ⊥ AX.

Найти: реакции в заделке A.

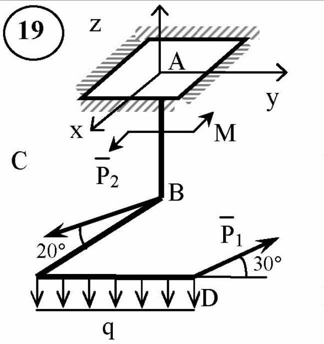
18



$P_1 = 6$ кН;
$P_2 = 9$ кН;
M = 7 кН/м;
q = 10 кН/м;
AC = CD = DB =
= 0,4 м;
CK = KE = 0,6 м;
DF = 0,8 м;
CK ⊥AX; M ⊥AX;
DF⊥ AZ; P_1 ⊥ AX;
P_2 ⊥ AZ.

Найти: реакции в опорах A, B и K.

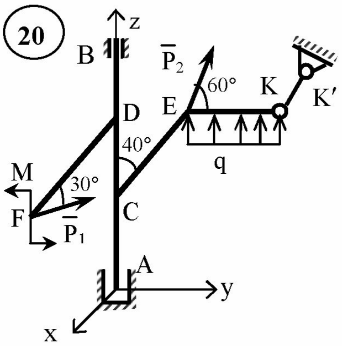
19



$P_1 = 6$ кН;
$P_2 = 9$ кН;
M = 8 кН/м;
q = 12 кН/м;
AB = 0,8 м;
BC = 0,7 м;
CD = 1,2 м;
BC ⊥ AY; CD || AY;
q ⊥ AX; M ⊥ AZ;
P_1 ⊥ AX; P_2 ⊥ AZ.

Найти: реакции в заделке A.

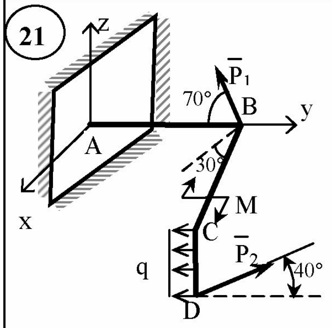
20



$P_1 = 6$ кН;
$P_2 = 8$ кН;
M = 16 кН/м;
q = 10 кН/м;
AC=CD=DB=0,5 м;
CE = EK = 0,6 м;
DF = 0,8 м;
EK || AY; DF || AX;
KK′ || AX; q || AZ;
CE ⊥ AX; M ⊥AX;
P_1 ⊥ AZ; P_2 ⊥ AX.

Найти: реакции в опорах A, B, K.

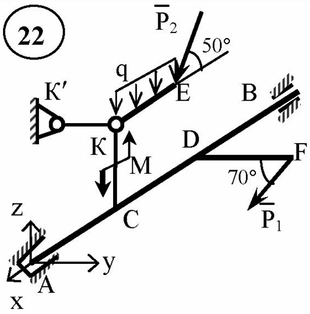
21



$P_1 = 4$ кН;
$P_2 = 9$ кН;
M = 6 кН/м;
q = 8 кН/м;
AB = 0,8 м;
BC = 0,6 м;
CD = 0,4 м;
BC ⊥ AZ; CD||AZ;
q ⊥ AX; M ⊥ AZ;
P_1 ⊥ AX; P_2 ⊥ AZ.

Найти: реакции в заделке A.

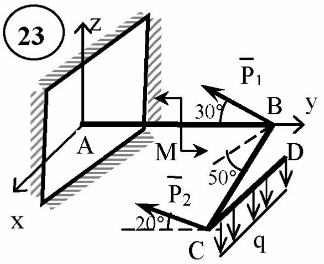
22



$P_1 = 8$ кН;
$P_2 = 7$ кН;
M = 12 кН/м;
q = 8 кН/м;
AC =CD= DB = 0,5м;
CK = KE = 0,4 м;
DF =0,8 м; CK || AZ;
KE || AX; DC || AY;
KK′ || AY; q || AZ;
M ⊥AY; P_1 ⊥ AZ;
P_2 ⊥ AY; DF ⊥ AZ.

Найти: реакции в опорах A, B, K.

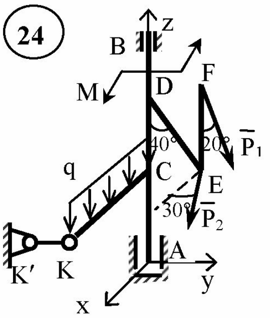
23



$P_1 = 5$ кН;
$P_2 = 9$ кН;
M = 8 кН/м;
q = 6 кН/м;
AB = 0,8 м;
BC = 0,7 м;
CD = 0,5 м;
BC ⊥ AY; M ⊥AX;
CD||AX; q ⊥ AY;
P_1 ⊥ AX; P_2 ⊥ AZ.

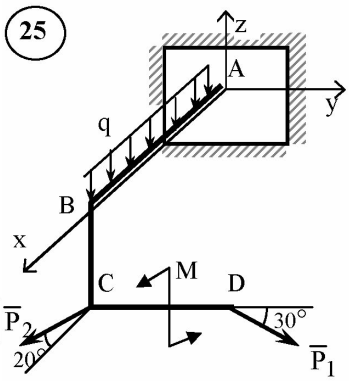
Найти: реакции в заделке A.

24



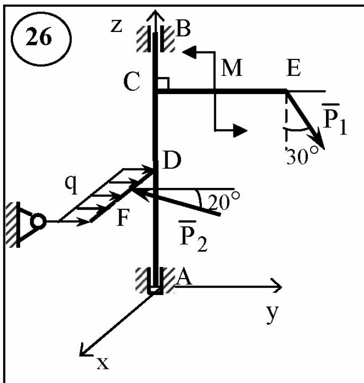
$P_1 = 9$ кН;
$P_2 = 6$ кН;
M = 7 кН/м;
q = 12 кН/м;
AC = CD = DB= 0,4 м;
DE = EF = 0,5 м;
CK = 0,8 м;
EF || AZ; CK || AX;
KK′ || AY; q || AZ;
DE ⊥ AX; M ⊥AZ;
P_1 ⊥ AX; P_2 ⊥ AZ.

Найти: реакции в опорах A, B, K.



$P_1 = 6$ кН;
$P_2 = 8$ кН;
$M = 12$ кН/м;
$q = 10$ кН/м;
$AB = 0{,}6$ м;
$CB = 0{,}4$ м;
$DC = 0{,}8$ м;
$BC \parallel AZ$;
$CD \parallel AY$;
$q \perp AY$; $M \perp AY$;
$P_1 \perp AX$; $P_2 \perp AY$.

<u>Найти</u>: реакции в заделке А.



$P_1 = 12$ кН;
$P_2 = 8$ кН;
$M = 6$ кН/м;
$q = 10$ кН/м;
$AD = CE = 0{,}4$ м;
$CB = 0{,}4$ м;
$DC = CB = 0{,}3$ м;
$DF = FK = 0{,}3$ м;
$CE \parallel AY$;
$KD \parallel AX$;
$q \perp AZ$; $M \perp AX$;
$P_1 \perp AX$; $P_2 \perp AZ$;
$KK' \parallel AY$

<u>Найти</u>: реакции в опорах А, В и К.

2. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задание 2.1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения

По заданным уравнениям движения точки M установить вид ее траектории и для момента времени $t=t_1$ (с) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Необходимые для решения данные приведены в таблице 2.1:

Таблица 2.1

Номер варианта	Уравнения движения		t_1, с
	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	
1	$-2t^2+3$	$-5t$	½
2	$4\cos^2(\pi t/3)+2$	$4\sin^2(\pi t/3)$	1
3	$-\cos(\pi t^2/3)+3$	$\sin(\pi t^2/3)-1$	1
4	$4t+4$	$-4/(t+1)$	2
5	$2\sin(\pi t/3)$	$-3\cos(\pi t/3)+4$	1
6	$3t^2+2$	$-4t$	½
7	$3t^2-t+1$	$5t^2-5t/3-2$	1
8	$7\sin(\pi t^2/6)+3$	$2-7\cos(\pi t^2/6)$	1
9	$-3/(t+2)$	$3t+6$	2
10	$-4\cos(\pi t/3)$	$-2\sin(\pi t/3)-3$	1
11	$-4t^2+1$	$-3t$	½
12	$5\sin^2(\pi t/6)$	$-5\cos^2(\pi t/6)-3$	1
13	$5\cos(\pi t^2/3)$	$-5\sin(\pi t^2/3)$	1
14	$-2t-2$	$-2/(t+1)$	2
15	$4\cos(\pi t/3)$	$-3\sin(\pi t/3)$	1
16	$3t$	$4t^2+1$	½
17	$7\sin^2(\pi t/6)-5$	$-7\cos^2(\pi t/6)$	1

Номер варианта	Уравнения движения		t_1, с
	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	
18	$1+3\cos(\pi t^2/3)$	$3\sin(\pi t^2/3)+3$	1
19	$-5t^2-4$	$3t$	1
20	$2-3t-6t^2$	$3-3t/2-3t^2$	0
21	$6\sin(\pi t^2/6)-2$	$6\cos(\pi t^2/6)+3$	1
22	$7t^2-3$	$5t$	¼
23	$3-3t^2+1$	$4-5t^2+5t/3$	1
24	$-4\cos(\pi t/3)-1$	$-4\sin(\pi t/3)$	1
25	$-6t$	$-2t^2-4$	1
26	$8\cos^2(\pi t/6)+2$	$-8\sin^2(\pi t/6)-7$	1
27	$-3-9\sin(\pi t^2/6)$	$-9\cos(\pi t^2/6)+5$	1
28	$-4t^2+1$	$-3t$	1
29	$5t^2+5t/3-3$	$3t^2+t+3$	1

Пример выполнения задания

Дано:

$$x = 2\cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right) - 2,\ y = -2\sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right) + 3 \qquad (2.1)$$

$t_1 = 1$ (x и y – в см, t и t_1 – в с).

Найти: 1) вид траектории;

2) для $t{=}t_1$ положение точки на траектории;

3) $\upsilon, a, a_n, a_\tau, \rho$.

Решение:

1) Уравнение движения (2.1) можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Чтобы получить уравнения траектории в координатной форме, исключаем время t из уравнений (2.1).

$$\begin{matrix} x = 2\cos\left(\dfrac{\pi t^2}{3}\right) - 2; & & x + 2 = 2\cos\left(\dfrac{\pi t^2}{3}\right); \\ & \Rightarrow & \\ y = -2\sin\left(\dfrac{\pi t^2}{3}\right) + 3; & & 3 - y = 2\sin\left(\dfrac{\pi t^2}{3}\right); \end{matrix}$$

Возводя обе части равенств в квадрат, а затем складывая равенства, получаем $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 2^2$, т.е. траекторией точки M является окружность радиуса 2, показанная на рис. 2.1.

2) Определяем положение точки М в заданный момент времени t=1 с:

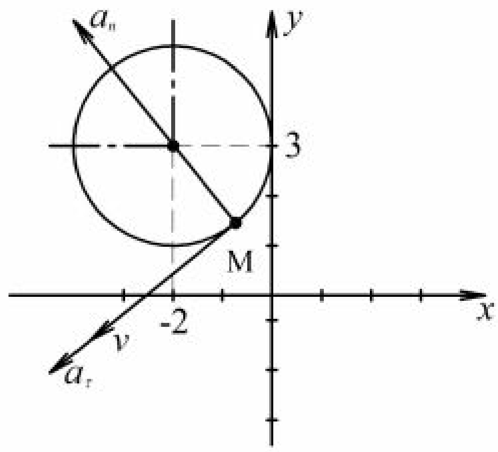


Рис. 2.1

$$x\Big|_{t=1} = 2\cdot\frac{1}{2} - 2 = -1;$$

$$y\Big|_{t=1} = -2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 3 = 1{,}27.$$

Вектор скорости точки

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x \cdot \vec{i} + \upsilon_y \cdot \vec{j}. \qquad (2.2)$$

Вектор ускорения

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}. \qquad (2.3)$$

Здесь $\vec{i}, \vec{j}$ – орты осей x и y; $\upsilon_x, \upsilon_y, a_x, a_y$ – проекции скорости и ускорения точки на оси координат.

Найдем их, дифференцируя по времени уравнения движения (2.1):

$$\upsilon_x = \dot{x} = -2 sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2\pi t}{3}\right) = -\frac{4}{3}\pi t \cdot sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right);$$

$$\upsilon_x\Big|_{t=1} = -\frac{4}{3}\pi\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\pi \approx -3{,}7 \text{ см/с}.$$

$$\upsilon_y = \dot{y} = -2 cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2\pi}{3}t\right) = -\frac{4}{3}\pi t \cdot cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right);$$

$$\upsilon_y\Big|_{t=1} = -\frac{4}{3}\pi\frac{1}{2} = -\frac{2}{3}\pi \approx -2{,}1 \text{ см/с}.$$

$$a_x = \ddot{x} = -\frac{4}{3}\pi\left[sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right) + t\cdot cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2\pi t}{3}\right)\right];$$

$$a_x\Big|_{t=1} = -\frac{4}{3}\pi\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}\right] = -\frac{2\pi}{9}\left(3\sqrt{3} + 2\pi\right) \approx -8 \text{ см/с}^2.$$

$$a_y = \ddot{y} = -\frac{4}{3}\pi\left[cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right) - t\cdot sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2\pi t}{3}\right)\right];$$

$$a_y\Big|_{t=1} = -\frac{4}{3}\pi\left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}\right] = -\frac{2\pi}{9}\left(3 - 2\pi\cdot\sqrt{3}\right) \approx 5{,}4 \text{ см/с}^2.$$

По найденным проекциям определяем модуль скорости:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}, \tag{2.4}$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\pi t\right)^2} = \frac{4}{3}\pi t,$$

$$\upsilon\Big|_{t=1} = \frac{4}{3}\pi \approx 4{,}2 \text{ см/с},$$

и модуль ускорения точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \tag{2.5}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{64 + 28{,}7} = \sqrt{92{,}7} \approx 9{,}63 \text{ см/с}^2.$$

Модуль касательного ускорения точки

$$a_\tau = \left|\frac{d\upsilon}{dt}\right|, \tag{2.6}$$

или

$$a_\tau = \left|\frac{\upsilon_x a_x + \upsilon_y a_y}{\upsilon}\right|; \tag{2.7}$$

$d\upsilon/dt$ выражает проекцию ускорения точки на направление ее скорости. Знак «+» при $d\upsilon/dt$ означает, что движение точки ускоренное, направление $\vec{a}_\tau$ и $\vec{\upsilon}$ совпадают; знак «–» – что движение замедленное.

Вычисляем модуль касательного ускорения для заданного момента времени

$$a_\tau = \left|\frac{d\upsilon}{dt}\right| = \left|\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi t\right)\right| = \frac{4}{3}\pi \approx 4{,}2 \text{ см/с}^2.$$

Модуль нормального ускорения точки

$$a_n = \upsilon^2/\rho. \tag{2.8}$$

Если радиус кривизны траектории ρ в рассматриваемой точке неизвестен, то нормальное ускорение можно определить по формуле

$$a_n = \left|\vec{\upsilon} \times \vec{a}\right| / \upsilon. \tag{2.9}$$

При движении точки в плоскости формула (2.9) принимает вид

$$a_n = \left| \upsilon_x a_y - \upsilon_y a_x \right| / \upsilon .$$

Модуль нормального ускорения можно определить и следующим образом:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} . \qquad (2.10)$$

Воспользуемся в нашем случае формулой (2.10)

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{9{,}63^2 - 4{,}2^2} \approx 8{,}7 \text{ см/с}^2.$$

Радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке определим из выражения:

$$\rho = \frac{\upsilon^2}{a_n}. \qquad (2.11)$$

Тогда $\rho = \dfrac{\upsilon^2}{a_n} = \dfrac{4{,}2^2}{8{,}7} \approx 2$ см.

На рис. 2.1 показано положение точки M в заданный момент времени. Вектор $\vec{\upsilon}$ строим по составляющим $\vec{\upsilon}_x$ и $\vec{\upsilon}_y$, причем этот вектор должен по направлению совпадать с касательной к траектории. Вектор $\vec{a}$ строим по составляющим $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_y$ и затем раскладываем на составляющие $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$. Совпадение величин a_τ и a_n, найденных из чертежа, с их значениями, полученными аналитически, служит контролем правильности решения.

Задание 2.2. Кинематический анализ плоского механизма

Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек B и C, а также угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат. Схемы механизмов помещены на рисунках, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 2.2.

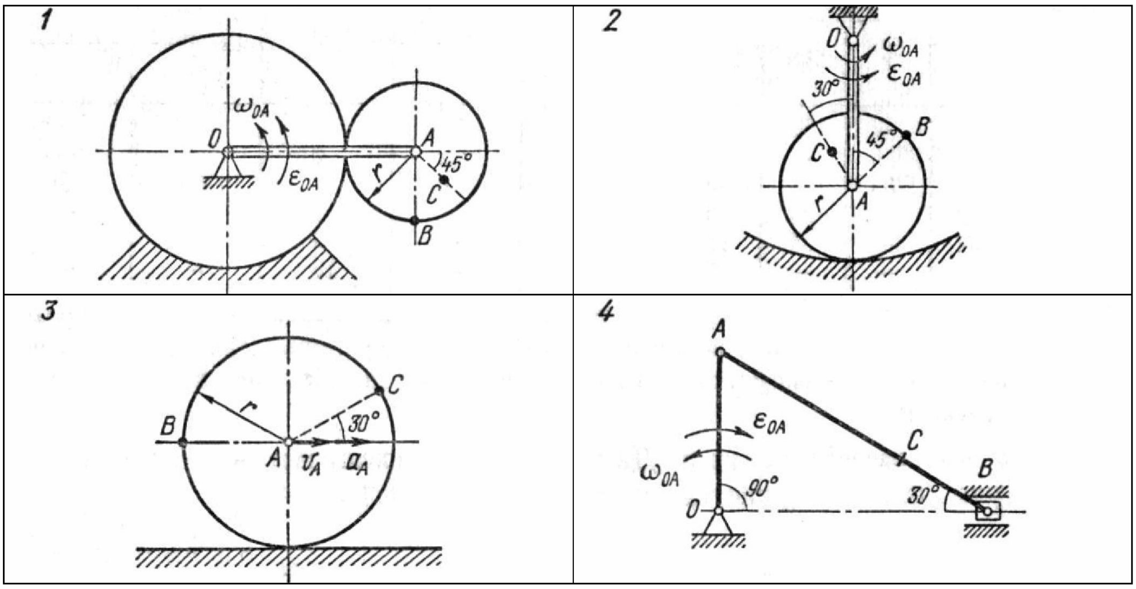
Таблица 2.2

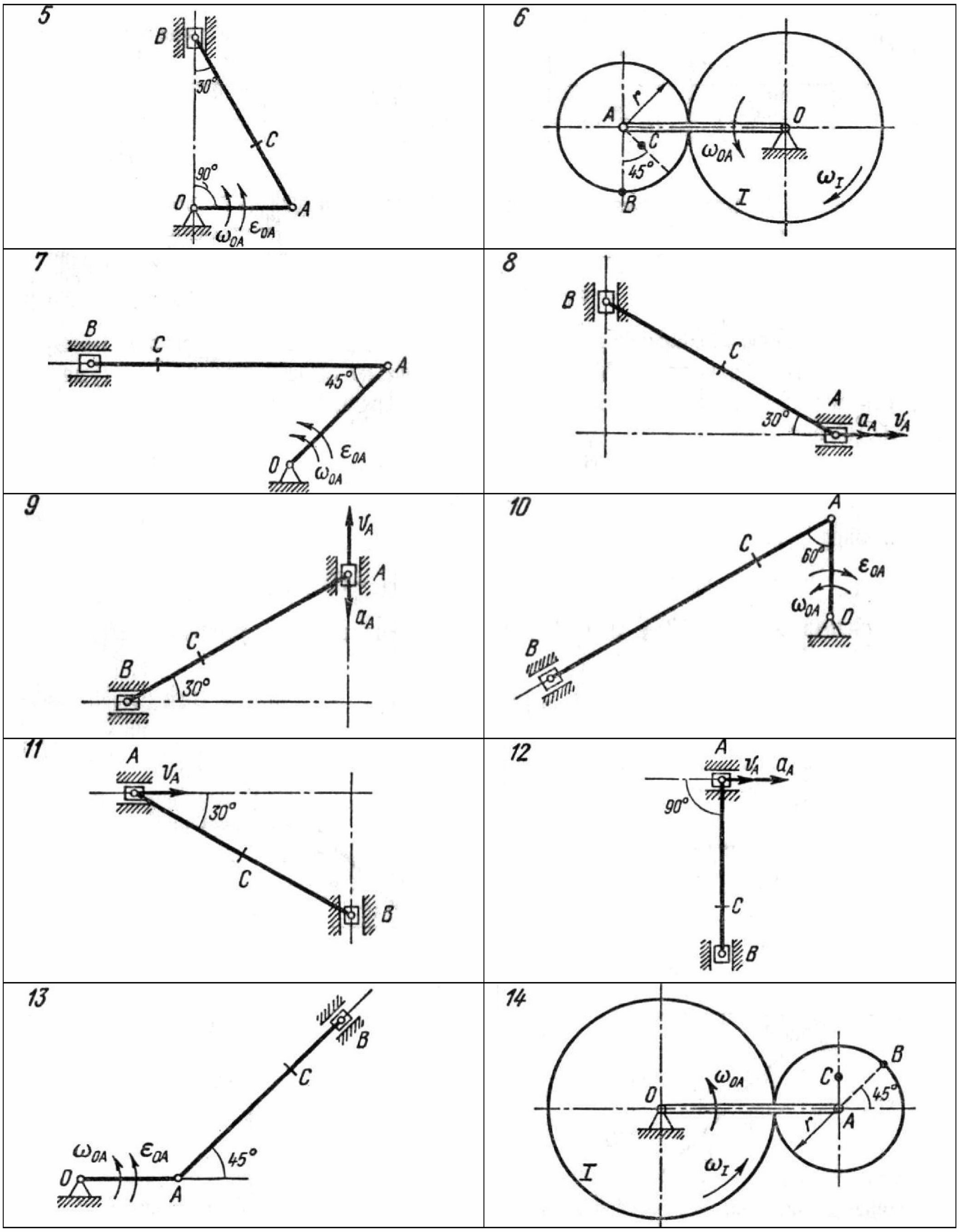
Номер варианта (рис. 1-28)	Размеры, см				ω_{OA}, рад/с	ω_1, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2	υ_A, см/с	a_A, см/с^2
	OA	r	AB	AC					
1	40	15	-	8	2	-	2	-	-
2	30	15	-	8	3	-	2	-	-
3	-	50	-	-	-	-	-	50	100
4	35	-	-	45	4	-	8	-	-
5	25	-	-	20	1	-	1	-	-
6	40	15	-	6	1	1	0	-	-
7	35	-	75	60	5	-	10	-	-
8	-	-	20	10	-	-	-	40	20
9	-	-	45	30	-	-	-	20	10

10	25	-	80	20	1	-	2	-	-
11	-	-	30	15	-	-	-	10	0
12	-	-	30	20	-	-	-	20	20
13	25	-	55	40	2	-	4	-	0
14	45	15	-	8	3	12	0	-	0
Номер варианта (рис. 1-28)	Размеры, см				ω_{OA}, рад/с	ω_1, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2	υ_A, см/с	a_A, см/с^2
	OA	*r*	*AB*	*AC*					
15	40	15	-	8	1	-	1	-	0
16	55	20	-	-	2	-	5	-	0
17	-	30	-	10	-	-	-	80	50
18	10	-	10	5	2	-	6	-	-
19	20	15	-	10	1	2,5	0	-	-
20	-	-	20		-	-	-	10	15
21	30	-	60	15	3	-	8	-	-
22	35	-	60	40	4	-	10	-	-
23	-	-	60	20	-	-	-	5	10
24	25	-	35	15	2	-	3	-	-
25	20	-	70	20	1	-	2	-	-
26	20	15	-	10	2	1,2	0	-	-
27	-	15	-	5	-	-	-	60	30
28	20	-	50	25	1	-	1	-	-

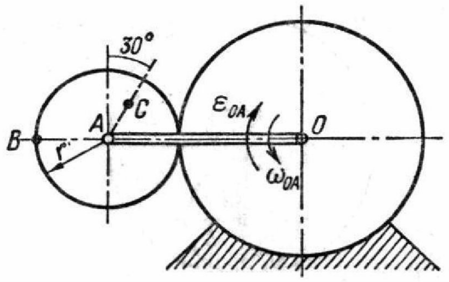
Примечание: ω_{OA} и ε_{OA} – угловая скорость и угловое ускорение кривошипа *OA* при заданном положении механизма; ω_1 – угловая скорость колеса *I* (постоянная); υ_A и a_A – скорость и ускорение точки *A*. Качение колес происходит без скольжения.

Рисунки механизмов (для вариантов № 1–29)

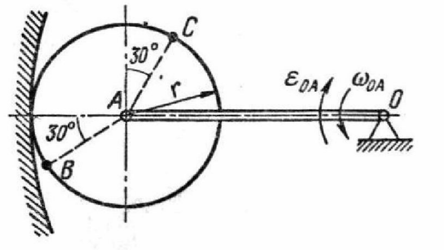



5
B
30°
C
90°
O
A
ωOA
εOA
6
A
r
O
C
45°
B
ωOA
ωI
I
7
B
C
A
45°
O
εOA
ωOA
8
B
C
A
30°
aA
vA
9
vA
A
aA
C
B
30°
10
A
C
60°
εOA
ωOA
O
B
11
A
vA
30°
C
B
12
A
vA
aA
90°
C
B
13
B
C
ωOA
εOA
O
A
45°
14
B
C
ωOA
O
A
r
45°
I
ωI

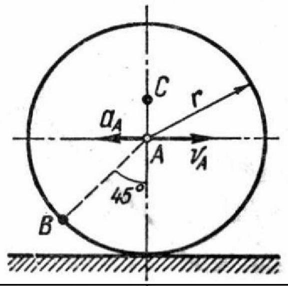
15



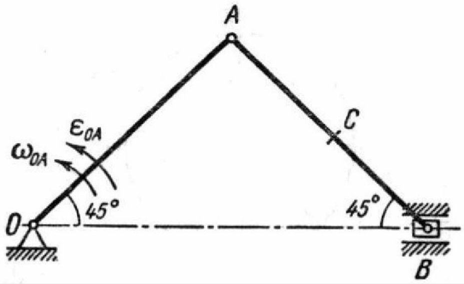
16



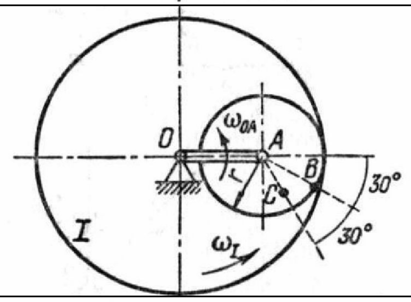
17



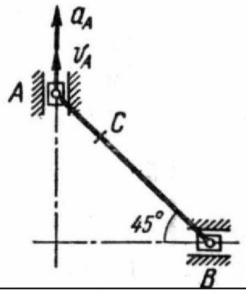
18



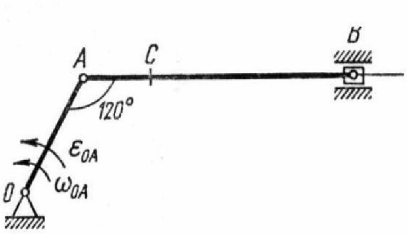
19



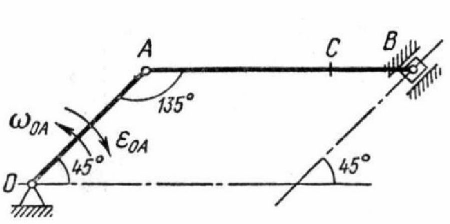
20



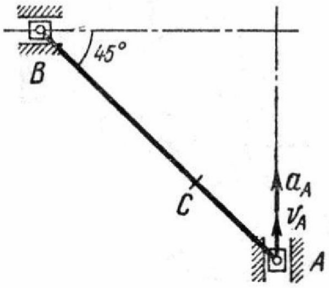
21



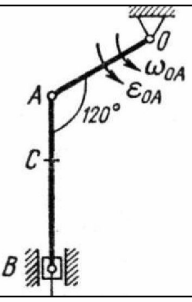
22

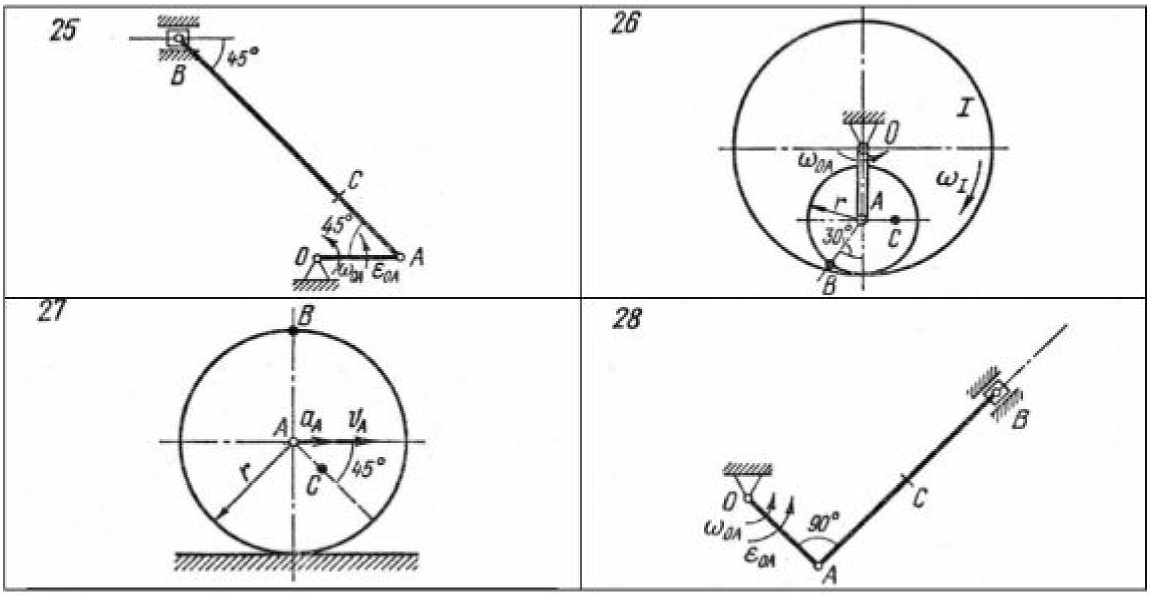


23



24





Пример выполнения задания

Дано: схема механизма в заданном положении (рис. 2), исходные данные таковы, что $OA = 40$ см, $AC = 20$ см, $\omega_{OA} = 5$ рад/с, $\varepsilon_{OA} = 10$ рад/с^2.

Найти:

$\upsilon_B, \upsilon_C, a_B, a_C, \omega_{AB}, \varepsilon_{AB}$.

Решение: 1) *Определение скорости точек и угловой скорости звена AB*:
вычисляем модуль скорости точки A при заданном положении механизма:

$$\upsilon_A = \omega_{OA} \cdot OA.$$

Скорость точки A перпендикулярна кривошипу OA. Скорость ползуна B направлена вдоль OB. Мгновенный центр скоростей P_{AB} шатуна AB находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных из точек A и B к их скоростям.

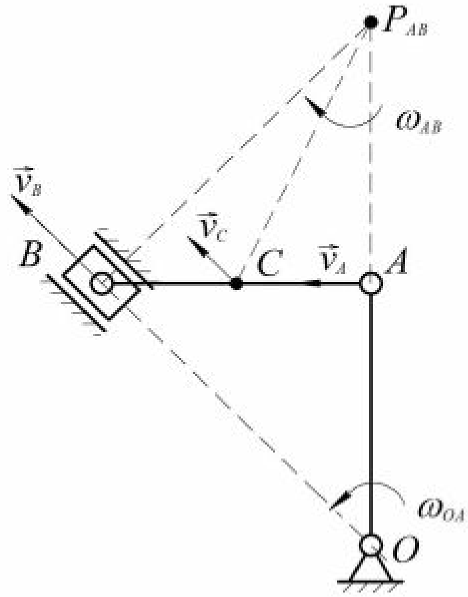


Рис. 2.3

Угловая скорость звена AB:

$$\omega_{AB} = \frac{\upsilon_A}{AP_{AB}} = \frac{\upsilon_B}{BP_{AB}} = \frac{\upsilon_C}{CP_{AB}}.$$

Расстояния AP_{AB}, BP_{AB} и CP_{AB} определяются из рассмотрения треугольников ACP_{AB} и ABP_{AB}:

$$AP_{AB}=OA=40 \text{ см}, \; BP_{AB}=40\sqrt{2} \text{ см}, \; CP_{AB}=20\sqrt{5} \text{ см}.$$

В соответствии с этим $\upsilon_A = 200$ см/с, $\omega_{AB} = 5$ рад/с; $\upsilon_B = 200\sqrt{2}$; $\upsilon_C = 100\sqrt{5}$.

Вектор $\vec{\upsilon}_c$ направлен перпендикулярно отрезку CP_{AB} в сторону, соответствующую направлению вращения звена AB.

2) *Определение ускорений точек и углового ускорения звена AB* (рис. 2.4).

Ускорение точки A складывается из вращательного и центростремительного ускорений:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^B + \vec{a}_A^Ц,$$

где $a_A^B = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 400$ см/с^2, $a_A^Ц = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 1000$ см/с^2.

Согласно теореме об ускорениях точек плоской фигуры:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^B + \vec{a}_{AB}^Ц$$

или

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^B + \vec{a}_A^Ц + \vec{a}_{AB}^B + \vec{a}_{AB}^Ц. \quad (2.1)$$

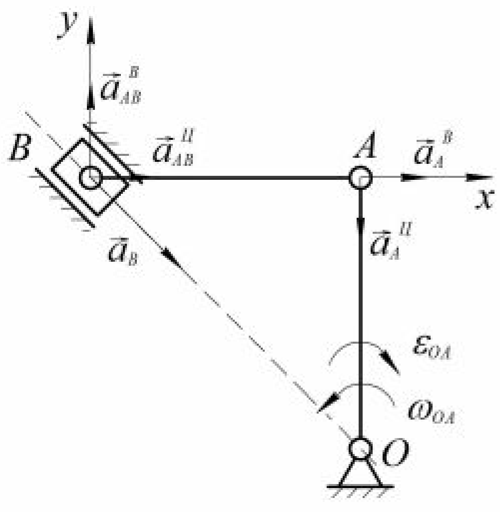


Рис. 2.4

Вектор $a_A^Ц$ направлен от A к O. Вектор $\vec{a}_A^B$ перпендикулярен вектору $\vec{a}_A^Ц$ и направлен в сторону, противоположную $\vec{\upsilon}_A$, (т.к. из условия задачи движение кривошипа OA замедленное).

Центростремительное ускорение точки B во вращательном движении шатуна AB вокруг полюса A: $a_{AB}^Ц = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 1000$ см/с^2 и направлено от B к A.

Ускорение $\vec{a}_B$ направленно вдоль линии OB, а $\vec{a}_{AB}^B \perp AB$. Зададим произвольно их направления: $\vec{a}_{AB}^B$ – вертикально вверх, $\vec{a}_B$ – от B к O. Эти ускорения определим из уравнений проекций векторного равенства (2.1) на оси координат. Знак в ответе показывает, соответствует ли истинное направление вектора принятому при расчете.

Выбрав направление осей x и y, как показано на рис. 4, получаем:

$$a_B \cdot cos 45 = a_{AB}^Ц + a_A^B, \quad (2.2)$$

$$-a_B \, sin 45 = a_{AB}^B - a_A^Ц. \quad (2.3)$$

Из уравнения (2.2) находим

$$a_B = \frac{1000 + 400}{\sqrt{2}/2} = 1960\ \text{см/с}^2.$$

Из уравнения (2.3) получаем

$$a^В_{AB} = a^Ц_A - a_B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1000 - 1400 = -400\ \text{см/с}^2.$$

Следовательно, ускорение a_B направлено так, как показано на рисунке, а $a^В_{AB}$ – в противоположную сторону. Истинная картина ускорений для точки B показана на рис. 2.5.

Угловое ускорение шатуна AB:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\left|a^В_{AB}\right|}{AB} = \frac{400}{40} = 10\ \text{рад/с}^2.$$

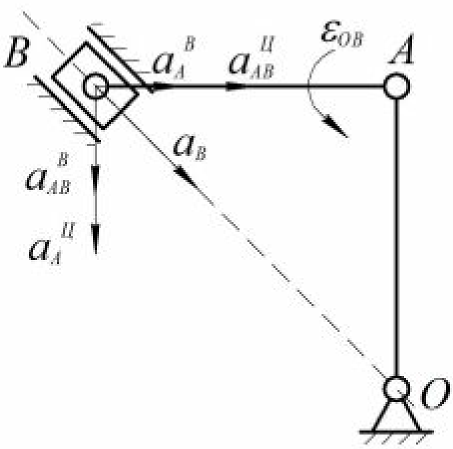


Рис. 2.5

Направление $a^В_{AB}$ относительно полюса A определяет направление углового ускорения ε_{AB}. В данном случае, ε_{AB} не совпадает с направлением ω_{AB}, следовательно, движение звена замедленное.

Определим ускорение точки C:

$$\vec{a}_C = \vec{a}^В_A + \vec{a}^Ц_A + \vec{a}^В_{AC} + \vec{a}^Ц_{AC}.$$

Вращательное и центростремительное ускорения точки C во вращательном движении AB вокруг полюса A:

$$a^В_{AC} = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 10 \cdot 20 = 200\ \text{см/с}^2;$$
$$a^Ц_{AC} = \omega^2_{AB} \cdot AC = 25 \cdot 20 = 500\ \text{см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}^В_{AC}$ перпендикулярен вектору $\vec{a}^Ц_{AC}$ и направлен соответственно угловому ускорению ε_{AB}.

Ускорение $\vec{a}_C$ находим методом проекций (рис. 2.6):

$$a_{Cx} = a^Ц_{AC} + a^В_A,\ a_{Cy} = a^В_{Ay} + a^A_y,$$
$$a_C = \sqrt{(a_{Cx})^2 + (a_{Cy})^2}.$$

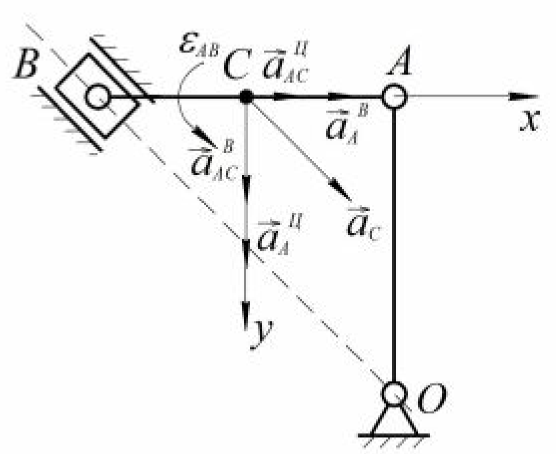


Рис. 2.6

В результате вычислений получаем:

$$a_{Cx} = 900\,см/с^2,$$
$$a_{Cy} = 1200\,см/с^2,$$
$$a_C = 1500\,см/с^2.$$

Задание 2.3. Сложное движение точки. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки

Точка *M* движется относительно тела *D*. По заданным уравнениям относительного движения точки *M* и движения тела *D* определить для момента времени $t=t_1$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки *M*.

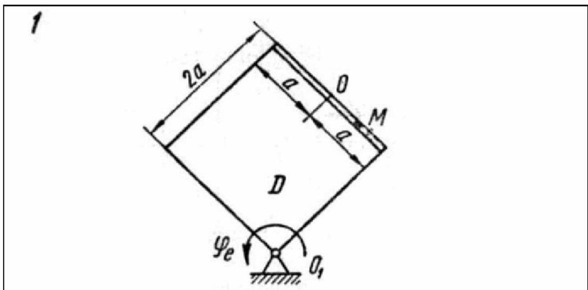
Схемы механизмов показаны на рис. 1–29, а необходимые для расчета данные помещены в табл. 2.3.

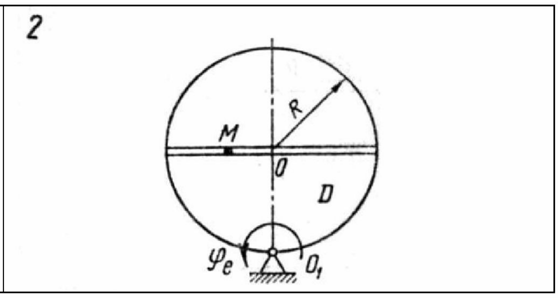
Таблица 2.3

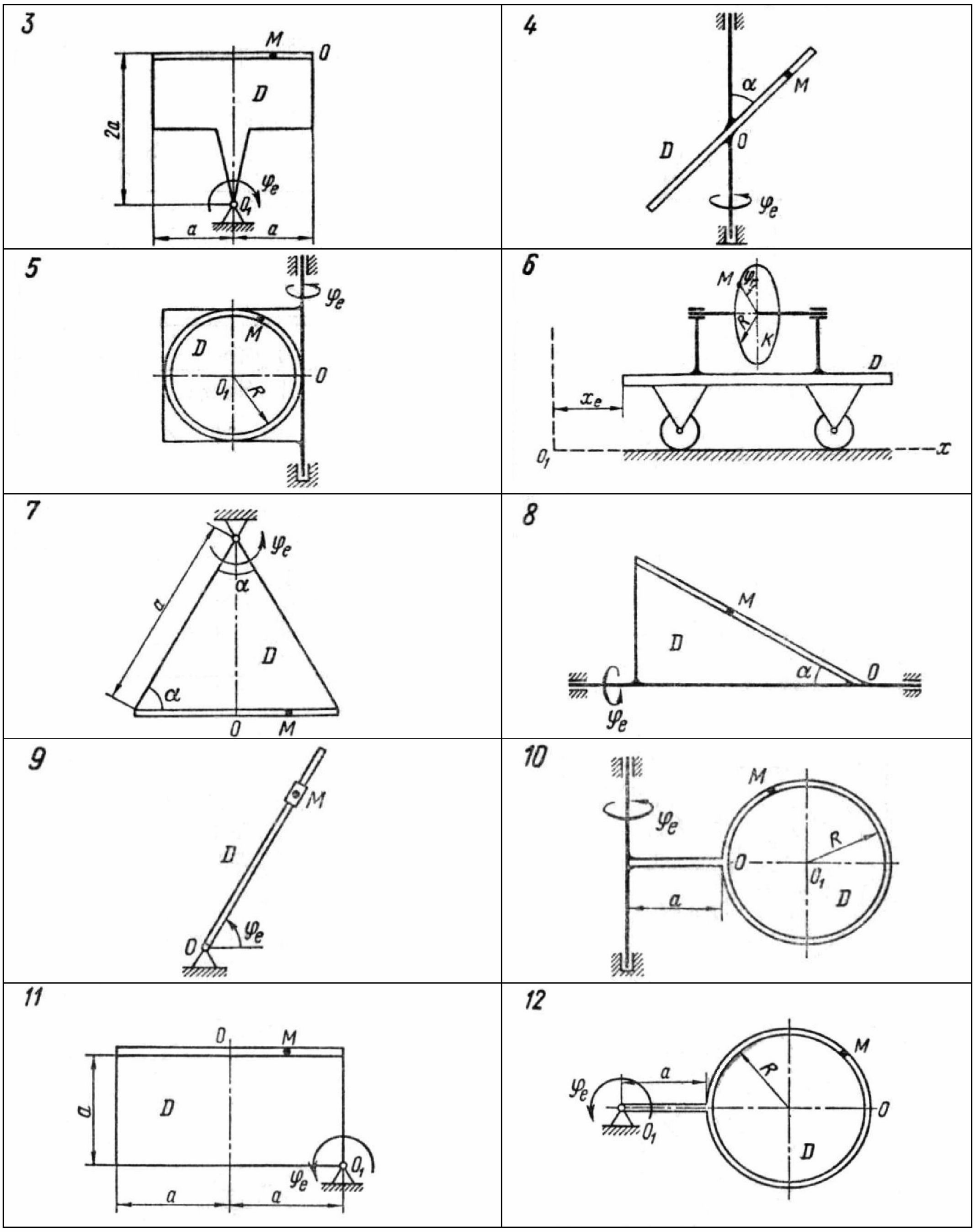
Номер варианта (рис. 1–28)	Уравнение относительного движения точки *M* $OM=s_r=s_r(t)$, см	Уравнение движения тела		t_1, с	*R*, см	*a*, *см*	α, град	Доп. данные
		$\varphi_e=\varphi_e(t)$, *рад*	$x_e=x_e(t)$, см					
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$18\sin(\pi t/4)$	$2t^3-t^2$	-	2/3	-	25	-	
2	$20\sin\pi t$	$0{,}4t^2+t$	-	5/3	20	-	-	
3	$6t^3$	$2t+0{,}5t^2$	-	2	-	30	-	
4	$10\sin(\pi t/6)$	$0{,}6t^2$	-	1	-	-	60	
5	$40\pi\cos(\pi t/6)$	$3t-0{,}5t^3$	-	2	30	-	-	
6	-	-	$3t+0{,}27t^3$	10/3	15	-	-	$\varphi_r=0{,}15\pi t^3$
7	$20\cos 2\pi t$	$0{,}5t^2$	-	3/8	-	40	60	
8	$6(t+0{,}5t^2)$	t^3-5t	-	2	-	-	30	
9	$10(1+\sin 2\pi t)$	$4t+1{,}6t^2$	-	1/8	-	-	-	
10	$20\pi\cos(\pi t/4)$	$1{,}2t-t^2$	-	4/3	20	20	-	
11	$25\sin(\pi t/3)$	$2t^2-0{,}5t$	-	4	-	25	-	
12	$15\pi t^3/8$	$5t-4t^2$	-	2	30	30	-	

13	$120\pi t^2$	$8t^2 - 3t$	-	1/3	40	-	-	
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
14	$3 + 14\sin \pi t$	$4t - 2t^2$	-	2/3	-	-	30	
15	$5\sqrt{2}(t^2 + t)$	$0{,}2t^3 + t$	-	2	-	60	45	
16	$20\sin \pi t$	$t - 0{,}5t^2$	-	1/3	-	20	-	
17	$8t^3 + 2t$	$0{,}5\,t^2$	-	1	-	$4\sqrt{5}$	-	
18	$10t + t^3$	$8t - t^2$	-	2	-	-	60	
19	$6t + 4t^3$	$t + 3t^2$	-	2	40	-	-	
20	$30\pi\cos(\pi t/6)$	$6t + t^2$	-	3	60	-	-	
21	$25\pi(t + t^2)$	$2t - 4t^2$	-	1/2	25	-	-	
22	$10\pi\sin(\pi t/4)$	$4t - 0{,}2t^2$	-	2/3	30	-	-	
23	$6\pi t^2$	-	-	1	18	-	-	$\varphi = \pi t^3/6$; $O_1O = O_2A =$ $= 20$ см
24	$75\pi(0{,}1t + 0{,}3t^3)$	$2t - 0{,}3t^2$	-	1	30	-	-	
25	$15\sin(\pi t/3)$	$10t - 0{,}1t^2$	-	5	-	-	-	
26	$8\cos(\pi t/2)$	$-2\pi t^2$	-	3/2	-	-	45	
27	-	-	$50t^2$	2	75	-	-	$\varphi_r = 5\pi t^3/48$
28	$2{,}5\pi t^2$	$2t^3 - 5t$	-	2	40	-	-	
29	$4\pi t^2$	-	$t^3 + 4t$	2	48	-	-	

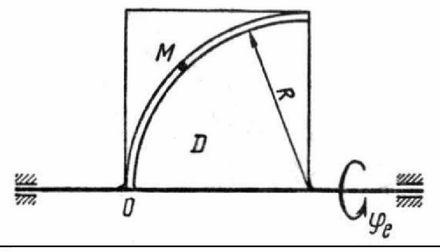
Примечания. Для каждого варианта положение точки M на схеме соответствует положительному значению s_r; в вариантах 5, 10, 12, 13, 20–24, 28–29 $OM = s_r$ – дуга окружности; на схемах 5, 10, 12, 21, 24 OM – дуга, соответствующая меньшему центральному углу. Относительное движение точки M в вариантах 6 и 27 и движение тела D в варианте 23 определяются уравнениями, приведенными в последнем столбце табл. 2.3.



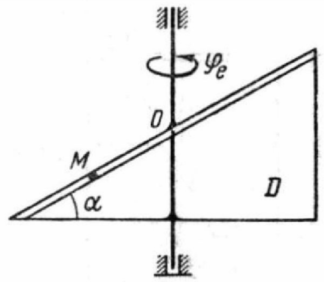



3
M
O
D
2a
φ_e
O_1
a
a
4
α
M
D
O
φ_e
5
φ_e
D
M
O
O_1
R
6
M
φ_r
R
K
D
x_e
O_1
x
7
φ_e
α
a
D
α
O
M
8
M
D
α
O
φ_e
9
M
D
O
φ_e
10
M
φ_e
R
O
O_1
D
a
11
O
M
a
D
φ_e
O_1
a
a
12
M
a
R
φ_e
O
O_1
D

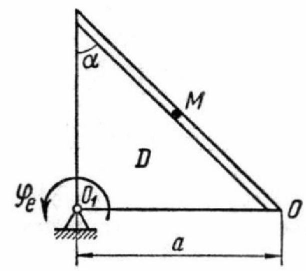
13



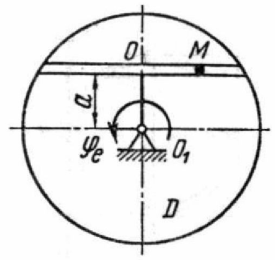
14



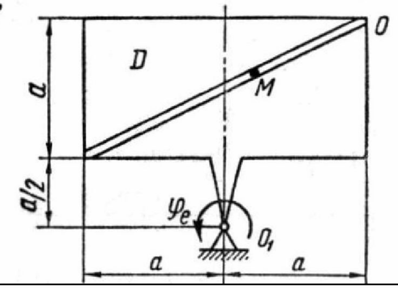
15



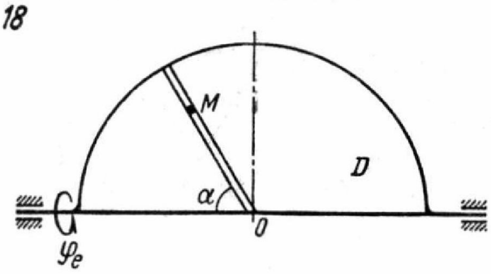
16



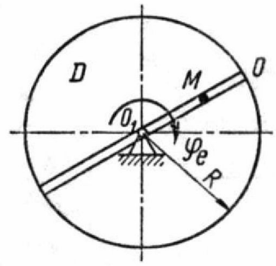
17



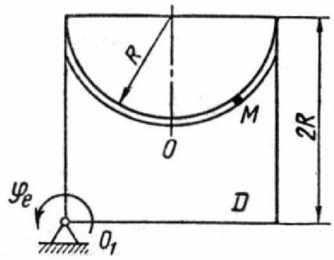
18



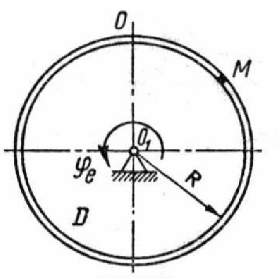
19



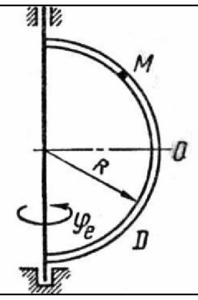
20

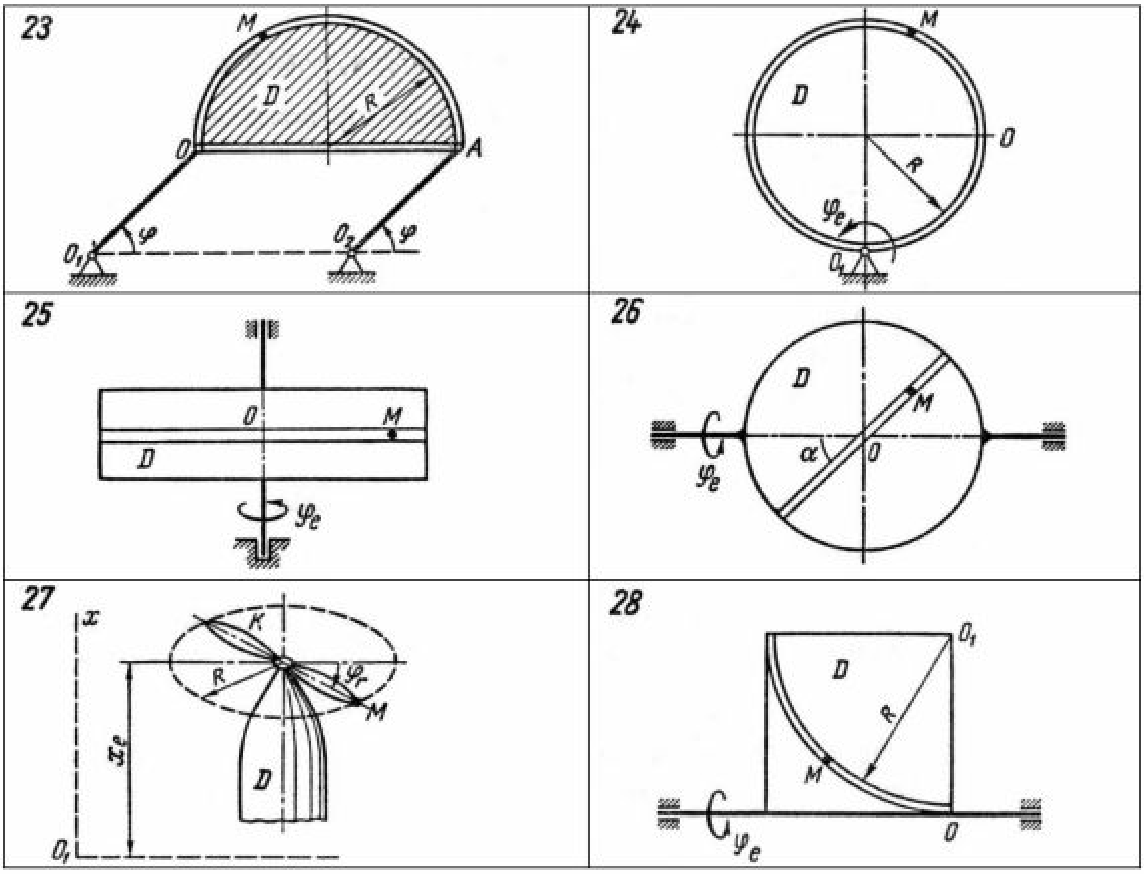


21



22





Пример выполнения задания

<u>Дано</u>: схема механизма (рис. 2.7), $S_r = \pi t^3 \cdot \dfrac{5}{4}$, $t_1 = 2$ с, $R = 30$ см,

$O_1O = O_2A = 40$ см, $\varphi = \dfrac{\pi t^3}{8}$.

<u>Найти</u>: абсолютные скорость и ускорение υ, a точки M.

<u>Решение.</u> Будем считать, что в заданный момент времени плоскость чертежа совпадает с плоскостью *Д*. Положение точки M на теле *Д* определяется расстоянием $S_r = OM$.

При $t = 2$ с,

$$S_r = \pi t^3 \cdot \frac{5}{4} = 10\pi = 31{,}4 \text{ см}.$$

Угол α вычисляется из длины дуги OM

$$l = S_r = \frac{\pi R \alpha}{180},$$

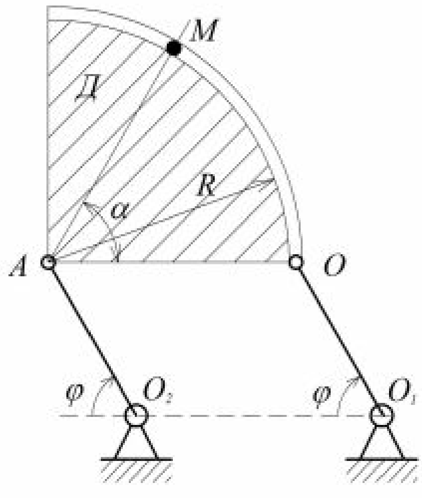


Рис. 2.7

откуда находим значение угла

$$\alpha = \frac{10\pi}{\pi R} \cdot 180 = 60^\circ .$$

Абсолютную скорость точки M найдем как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_r + \vec{\upsilon}_e .$$

Модуль относительной скорости

$$\upsilon_r = \left|\tilde{\upsilon}_r\right|,$$

где

$$\tilde{\upsilon}_r = \frac{dS_r}{dt} = \frac{5}{4} 3\pi t^2 = \frac{15}{4}\pi t^2 .$$

При $t = 2$ с

$$\tilde{\upsilon}_r = 15\pi = 47{,}1 \text{ см/с}, \ \upsilon_r = 41{,}7 \text{ см/с}.$$

Положительный знак у $\tilde{\upsilon}_r$ показывает, что вектор $\vec{\upsilon}_r$ направлен в сторону возрастания S_r.

Модуль переносной скорости

$$\upsilon_e = AO_2 \cdot \omega_e , \tag{2.1}$$

где точка M, как и AO участвует в поступательном движении тела $Д$ (т.е. AO всегда параллельна самой себе).

$$\omega_e = \frac{d\upsilon_e}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi t^3}{8}\right) = \frac{3}{8}\pi t^2 .$$

При $t = 2$ с

$$\omega_e = \frac{3}{8}\pi \cdot 4 = \frac{3}{2}\pi = 4{,}71 \text{ с}^{-1}.$$

Направление ω_e совпадает с направлением отсчета угла φ_e, следовательно, вектор $\vec{\omega}_e$ направлен перпендикулярно плоскости чертежа от нас.
Тогда, согласно формуле (2.1) модуль переносной скорости:

$$\upsilon_e = 40 \cdot 4{,}71 = 188{,}4 \text{ см/с}^2 .$$

Вектор $\vec{\upsilon}_e$ направлен по касательной к окружности O_2A в сторону вращения тела $Д$. В момент времени $t = 2$ с положение тела $Д$ таково, что значение уг-

37

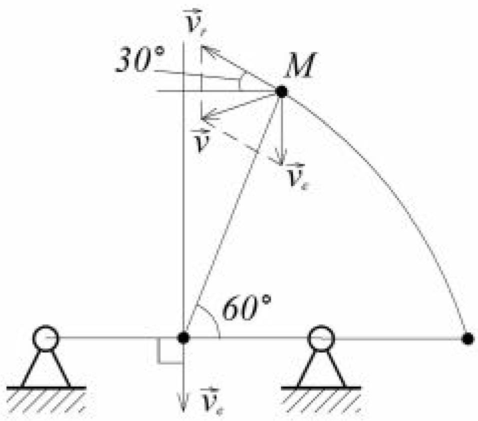


Рис. 2.8

ла φ составляет π рад. Следовательно, вектор $\vec{\upsilon}_e$ направлен вертикально вниз (рис. 2.8). Так как вектор $\vec{\upsilon}_e$ не перпендикулярен вектору $\vec{\upsilon}_r$, то для нахождения модуля абсолютной скорости используем теорему косинусов:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_e^2 + \upsilon_r^2 - 2\upsilon_e \upsilon_r \cos 60^\circ} = 171{,}4 \text{ см/с}^2.$$

Абсолютное ускорение точки M равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

или в развернутом виде

$$\vec{a} = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^{n} + \vec{a}_e^{вр} + \vec{a}_e^{ц} + \vec{a}_c.$$

Модуль относительного касательного ускорения

$$a_r^{\tau} = \left|\tilde{a}_r^{\tau}\right|,$$

$$\tilde{a}_r^{\tau} = \frac{d^2 S_r}{dt^2}.$$

При $t = 2$ с

$$a_r^{\tau} = 15\pi = 47{,}12 \text{ см/с}^2.$$

Знаки $\tilde{\upsilon}_r$ и $\tilde{a}_r^{\tau}$ одинаковы, следовательно, относительное движение точки M ускоренное.

Относительное нормальное ускорение

$$a_r^{n} = \frac{\upsilon_r^2}{R} = \frac{(15\pi)^2}{R} = 7{,}5\pi = 23{,}56 \text{ см/с}^2.$$

Угловое переносное ускорение находим как

$$\varepsilon_e = \frac{d^2 \varphi_e}{dt^2}.$$

При $t = 2$ с

$$\varepsilon_e = \frac{3}{2}\pi = 4{,}7 \text{ с}^{-1}$$

Модуль переносного центростремительного ускорения

$$a_e^{ц} = \omega_e^2 \cdot O_1 A,$$

а модуль переносного вращательного ускорения

$$a_e^{вр} = \varepsilon_e \cdot O_1 A.$$

При $t = 2$ с

$$a_e^{ц} = 887{,}36\ \text{см/с}^2,\ a_e^{вр} = 88\ \text{см/с}^2.$$

Модуль кориолисова ускорения

$$a_c = 2\overline{\omega}_e \times \vec{\upsilon}_r = 2\omega_e \upsilon_r \sin\left(\vec{\omega}_e \hat{}\, \vec{\upsilon}_r\right).$$

Так как вектор $\vec{\omega}_e$ направлен перпендикулярно плоскости чертежа от нас, то угол между направлениями векторов $\vec{\omega}_e$ и $\vec{\upsilon}_r$ равен $\vec{\omega}_e \hat{}\, \vec{\upsilon}_r = 90^\circ$, и тогда

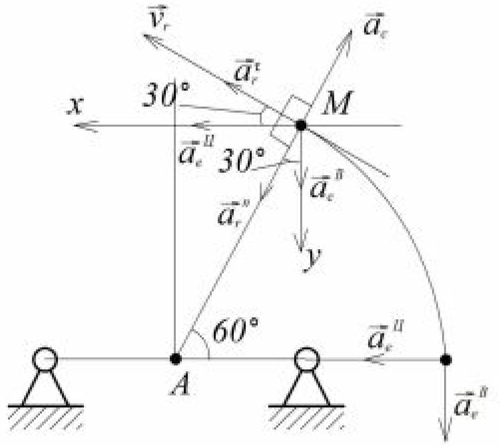


Рис. 2.9

$$a_c = 392{,}81\ \text{см/с}^2.$$

Покажем направление ускорений точки M в момент времени t_1 (рис. 2.9). Вектор $\vec{a}_c$ направлен по правилу векторного произведения вдоль направления MA.

Модуль абсолютного ускорения точки М находим способом проекций:

$$a_x = a_e^{ц} + a_r^{\tau} \cdot \cos 30^\circ + a_r^{n} \cdot \sin 30 - a_c \cdot \cos 60^\circ,$$

$$a_y = a_e^{вр} + a_r^{n} \cdot \cos 30^\circ - a_r^{\tau} \cdot \sin 30^\circ - a_c \cdot \sin 60^\circ,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

После вычисления получаем:

$$a = 750{,}78\ \text{см/с}^2.$$

3. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задание 3.1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянных сил

Варианты 1–5 (схема 1). Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, в течение τ с. Его начальная скорость υ_A. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f.

В точке B тело покидает плоскость со скоростью υ_B и попадает со скоростью υ_C в точку С плоскости BD, наклоненной под углом β к горизонту, находясь в воздухе T с.

При решении задачи тело принять за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 1. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $\upsilon_A = 0$; $f = 0{,}2$; $l = 10$ м; $\beta = 60^\circ$. Определить τ и h.

Вариант 2. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $\upsilon_A = 2$ м/с; $f = 0{,}2$; $h = 4$ м; $\beta = 45^\circ$. Определить l и уравнение траектории точки на участке BC.

Вариант 3. Дано: $\alpha = 30°$; $\upsilon_A = 2{,}5$ м/с; $f \neq 0$; $l = 8$ м; $d = 10$ м; $\beta = 60°$. Определить υ_B и τ.

Вариант 4. Дано: $\upsilon_A = 0$; $\tau = 2$ с; $l = 9{,}8$ м; $\beta = 60°$; $f = 0$. Определить α и T.

Вариант 5. Дано: $\alpha = 30°$; $\upsilon_A = 0$; $l = 9{,}8$ м; $\tau = 3$ с, $\beta = 45°$. Определить f и υ_c.

Варианты 6–10 (схема 2). Лыжник подходит к точке A участка трамплина AB, наклоненного под углом α к горизонту и имеющего длину l, со скоростью υ_A. Коэффициент трения скольжения лыж на участке AB равен f. Лыжник от A до B движется τ с; в точке B со скоростью υ_B он покидает трамплин. Через T с лыжник приземляется со скоростью υ_C в точке С горы, составляющей угол β с горизонтом.

При решении задачи принять лыжника за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

Вариант 6. Дано: $\alpha = 20°$; $f = 0{,}1$; $\tau = 0{,}2$ с; $h = 40$ м; $\beta = 30°$. Определить l и υ_c.

Вариант 7. Дано: $\alpha = 15°$; $f = 0{,}1$; $\upsilon_A = 16$ м/с; $l = 5$ м; $\beta = 45°$. Определить υ_B и T.

Вариант 8. Дано: $\upsilon_A = 21$ м/с; $f = 0$; $\tau = 0{,}3$ с; $\upsilon_B = 20$ м/с; $\beta = 60°$. Определить α и d.

Вариант 9. Дано: $\alpha = 15°$; $\tau = 0{,}3$ с; $f = 0{,}1$; $h = 30\sqrt{2}$ м; $\beta = 45°$. Определить υ_B и υ_A.

Вариант 10. Дано: $\alpha = 15°$; $f = 0$; $\upsilon_A = 12$ м/с; $d = 50$ м; $\beta = 60°$. Определить τ и уравнение траектории лыжника на участке BC.

Варианты 11–15 (схема 3). Имея в точке A скорость υ_A, мотоцикл поднимается τ с по участку AB длиной l, составляющему с горизонтом угол α. При постоянной на всем участке AB движущей силе P мотоцикл в точке B приобретает скорость υ_B и перелетает через ров шириной d, находясь в воздухе T с и приземляясь в точке C со скоростью υ_C. Масса мотоцикла с мотоциклистом равна m.

При решении задачи считать мотоцикл с мотоциклистом материальной точкой и не учитывать силы сопротивления движению.

Вариант 11. Дано: $\alpha = 30°$; $P \neq 0$; $l = 40$ м; $\upsilon_A = 0$; $\upsilon_B = 4{,}5$ м/с; d = 3 м. Определить τ и h.

Вариант 12. Дано: $\alpha = 30°$; $P = 0$; $l = 40$ м; $\upsilon_B = 4{,}5$ м/с; $h = 1{,}5$ м. Определить υ_A и d.

Вариант 13. Дано: $\alpha = 30°$; $m = 400$ кг, $\upsilon_A = 0$; $\tau = 20$ с; $d = 3$ м; $h = 1{,}5$ м. Определить P и l.

Вариант 14. Дано: $\alpha = 30°$; $m = 400$ кг; $P = 2{,}2$ кН; $\upsilon_A = 0$; $l = 40$ м; $d = 5$ м. Определить υ_B и υ_c.

Вариант 15. Дано: $\alpha = 30°$; $\upsilon_A = 0$; $P = 2$ кН, $l = 50$ м; $h = 2$ м; $d = 4$ м. Определить T и m.

Варианты 16–20 (схема 4). Камень скользит в течение τ с по участку AB откоса, составляющему угол α с горизонтом и имеющему длину l. Его начальная скорость υ_A. Коэффициент трения скольжения камня по откосу равен *f*. Имея в точке *B* скорость υ_B, камень через *T* с ударяется в точке *C* о вертикальную защитную стену.

При решении задачи принять камень за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 16. Дано: $\alpha = 30°$; $\upsilon_A = 1$ м/с; $l = 3$ м; $f = 0{,}2$; $d = 2{,}5$ м. Определить *h* и *T*.

Вариант 17. Дано: $\alpha = 45°$; $l = 6$ м; $\upsilon_B = 2\ \upsilon_A$; $\tau = 1$ с; $h = 6$ м. Определить *d* и *f*.

Вариант 18. Дано: $\alpha = 30°$; $l = 2$ м; $\upsilon_A = 0$; $f = 0{,}1$; $d = 3$ м. Определить *h* и τ.

Вариант 19. Дано: $\alpha = 15°$; $l = 3$ м; $\upsilon_B = 3$ *м/с*, $f \neq 0$; $\tau = 1{,}5$ *с*; $d = 2$ м. Определить υ_A и *h*.

Вариант 20. Дано: $\alpha = 45°$, $\upsilon_A = 0$; $f = 0{,}3$; $d = 2$ м; $h = 4$ м. Определить *l* и τ.

Варианты 21–25 (схема 5). Тело движется из точки *A* по участку *AB* (длиной *l*) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Его начальная скорость υ_A. Коэффициент трения скольжения равен *f*. Через τ с тело в точке *B* со скоростью υ_B покидает наклонную плоскость и падает на горизонтальную плоскость в точку *C* со скоростью υ_c при этом оно находится в воздухе *T* с.

При решении задачи принять тело за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

Вариант 21. Дано: $\alpha = 30°$; $f = 0{,}1$; $\upsilon_A = 1$ м/с; $\tau = 1{,}5$ с; $h = 10$ м. Определить υ_B и *d*.

Вариант 22. Дано: $\upsilon_A = 0$; $\alpha = 45°$; $l = 10$ м; $\tau = 2$ с. Определить *f* и уравнение траектории на участке ВС.

Вариант 23. Дано: $f = 0$; $\upsilon_A = 0$; $l = 9{,}81$ м, $\tau = 2$ с; $h = 20$ м. Определить α и T

Вариант 24. Дано: $\upsilon_A = 0$; $\alpha = 30°$; $f = 0{,}2$; $l = 10$ м; $d = 12$ м. Определить τ и *h*.

Вариант 25. Дано: $\upsilon_A = 0$; $\alpha = 30°$; $f = 0{,}2$; $l = 6$ м, $h = 4{,}5$ м. Определить τ и υ_c.

Варианты 26–29 (схема 6). Имея в точке *A* скорость υ_A, тело движется по горизонтальному участку *AB* длиной *l* в течение τ с. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен *f*. Со скоростью υ_B тело в точке *B* покидает плоскость и попадает в точку С со скоростью υ_c, находясь в воздухе *T* с.

При решении задачи принять тело за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 26. Дано: $\upsilon_A = 4$ м/с; $f = 0{,}1$; $\tau = 2$ с; $d = 2$ м. Определить υ_B и *h*.

Вариант 27. Дано: $\upsilon_B = 3$ м/с; $f = 0{,}3$; $l = 3$ м; $h = 5$ м. Определить υ_A и *T*.

Вариант 28. Дано: $\upsilon_A = 3$ м/с; $t;_B = 1$ м/с; $l = 2{,}5$ м; $h = 20$ м. Определить *f* и *d*.

Вариант 29. Дано: $f = 0{,}25$; $l = 4$ м; $d = 3$ м; $h = 5$ м. Определить υ_A и τ.

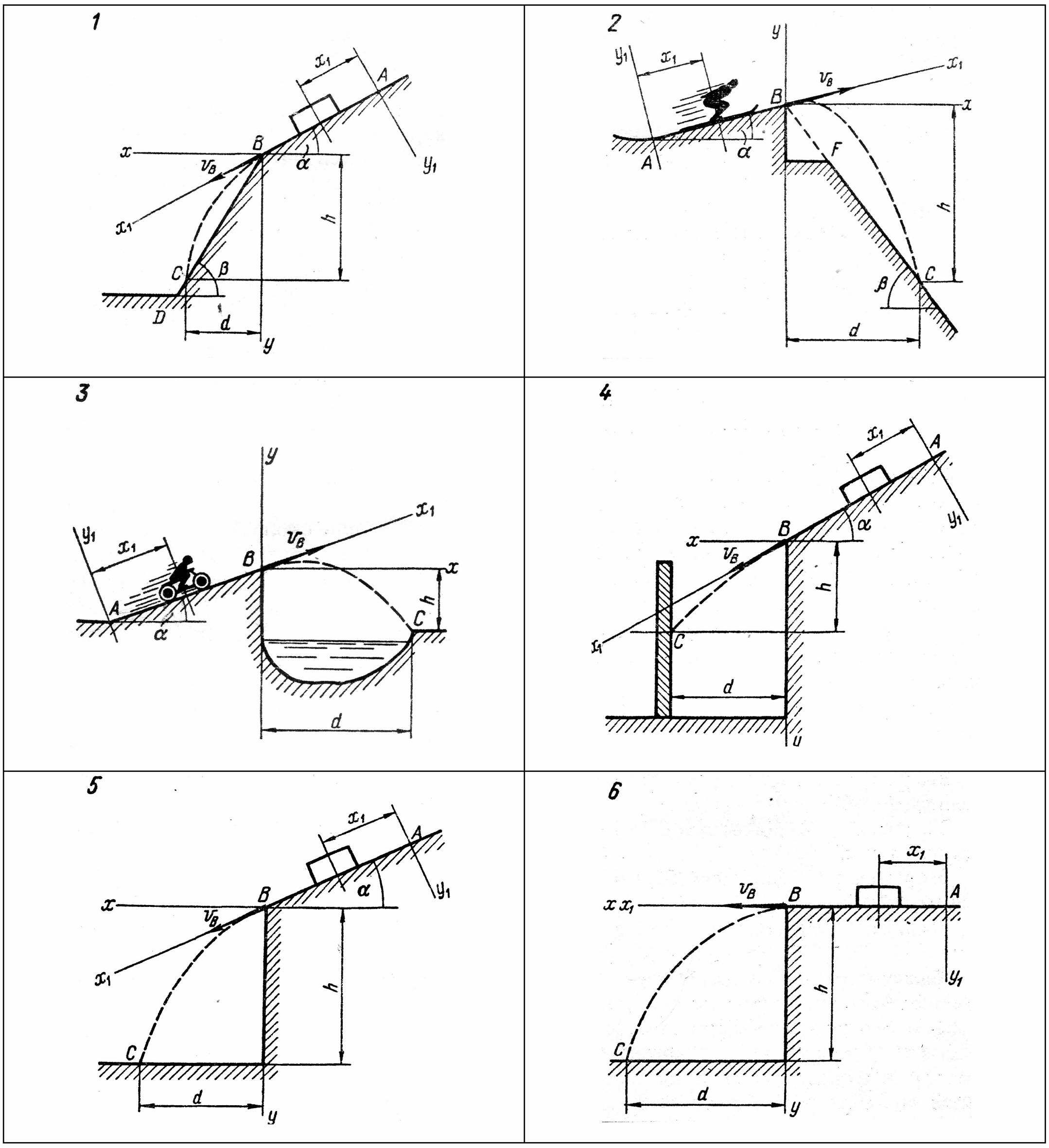


Рис. 3.1

Пример выполнения задания

<u>Дано</u>: схема механизма (рис. 3.2), $\upsilon_A = 7\,м/с$; $f = 0{,}2$; $l = 8\,м$; $h = 20\,м$.

<u>Найти</u>: d, υ_C.

<u>Решение</u>. Рассмотрим движение тела на участке *AB*. Принимая тело за материальную точку, покажем (рис. 3.2) действующие на него силы: вес $\vec{G}$, нормальную реакцию $\vec{N}$ и силу трения скольжения $\vec{F}$.

Составим дифференциальное уравнение движения тела на участке AB:

$$m\ddot{x}_1 = \sum F_{i1} \;\; ; \quad m\ddot{x}_1 = -F_{mp},$$

Сила трения

$$F_{mp} = f \cdot N,$$

где

$$N = G.$$

Таким образом,

$$m\ddot{x}_1 = -f \cdot mg;$$

или

$$\ddot{x}_1 = -f \cdot g.$$

Интегрируя дифференциальное уравнение дважды, получаем:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -f \cdot gt + C, \\ x_1 &= -f \cdot g\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 воспользуемся начальными условиями задачи:

при $t = 0$, $x_{10} = 0$, $\dot{x}_{10} = \upsilon_A$.

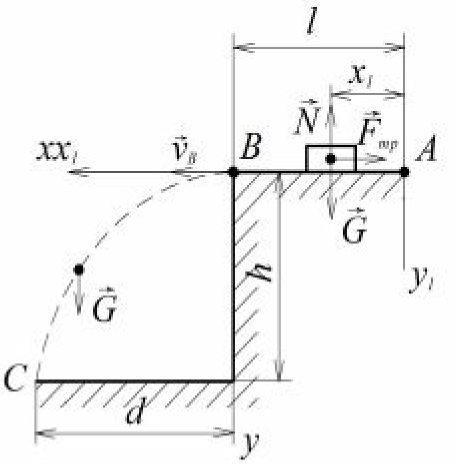


Рис. 3.2

Составим уравнения, полученные при интегрировании формулы (3.1), для $t = 0$:

$$\dot{x}_{10} = C_1, \; x_{10} = C_2.$$

Найдем постоянные интегрирования:

$$C_1 = \upsilon_a, \quad C_2 = 0.$$

Тогда уравнения (3.1) примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -f \cdot gt + \upsilon_A; \\ x_1 &= -f \cdot g\frac{t^2}{2} + \upsilon_A \cdot t. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Для момента τ, когда тело покидает участок AB,

$$\dot{x}_1 = \upsilon_B, \quad x_1 = l \ ,$$

то есть

$$\begin{cases} \upsilon_B = -f \cdot g \cdot \tau + \upsilon_A; \\ l = -f \cdot g \cdot \dfrac{\tau^2}{2} + \upsilon_A \cdot \tau, \end{cases}$$

откуда

$$\tau = \frac{\upsilon_A - \upsilon_B}{f \cdot g};$$

$$l = -\frac{f \cdot g}{2} \frac{(\upsilon_A - \upsilon_B)^2}{f^2 g^2} + \frac{\upsilon_A(\upsilon_A - \upsilon_B)}{f \cdot g} = \frac{\upsilon_A^2 - \upsilon_B^2}{2 \cdot f \cdot g};$$

т. е. $\upsilon_B = \sqrt{-l \cdot 2 \cdot g + \upsilon_A^2} = \sqrt{-(8 \cdot 2 \cdot 0{,}2 \cdot 10) + 49} = \sqrt{17} \approx 4{,}1 \ \ м/с$.

Рассмотрим движение тела от точки B до точки C.

Показав силу тяжести $\vec{G}$, действующую на тело, составим дифференциальные уравнения его движения:

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = G.$$

Начальные условия задачи: при $t = 0$

$$x_0 = 0; \qquad y_0 = 0;$$
$$\dot{x}_0 = \upsilon_B; \qquad \dot{y}_0 = 0.$$

Интегрируем дифференциальные уравнения дважды:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C_3; & \dot{y} &= gt + C_4; \\ x &= C_3 t + C_5; & y &= g\frac{t^2}{2} + C_4 t + C_6; \end{aligned} \tag{3.3}$$

Напишем полученные уравнения (3.3) для $t = 0$

$$\dot{x}_0 = C_3; \qquad \dot{y}_0 = C_4;$$
$$x_0 = C_5; \qquad y_0 = C_6.$$

Отсюда найдём, что

$$C_3 = \upsilon_B; \qquad C_4 = 0;$$
$$C_5 = 0; \qquad C_6 = 0.$$

Получим следующие уравнения проекций скорости тела: из уравнений (3.3) и уравнения движения:

$$\dot{x} = \upsilon_B; \qquad \dot{y} = gt;$$

$$x = \upsilon_B \cdot t + 0; \qquad y = g\frac{t^2}{2};$$

Найдём уравнение траектории тела, исключив параметр t из уравнений движения. Определив t из первого уравнения и подставив его значение во второе, получаем уравнение параболы:

$$y = \frac{g}{2}\left(\frac{x}{\upsilon_B}\right)^2 = \frac{gx^2}{2 \cdot \upsilon_B^2}.$$

В момент падения $y=h$, $x=d$.

Определяя d из уравнения траектории, найдем

$$d = x = \sqrt{\frac{h \cdot 2 \cdot \upsilon_B^2}{g}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 2 \cdot 16{,}8}{10}} \approx 8{,}2.$$

Используя уравнение движения $x = \upsilon_B \cdot t$, найдём время T движения тела от точки B до точки C, учитывая, что $x = d = 18м.$

$$T = \frac{x}{\upsilon_B} = \frac{8{,}2}{4{,}1} = 2\,с.$$

Скорость тела при падении найдём через проекции скорости на оси координат

$$\dot{x} = \upsilon_B, \quad \dot{y} = gt$$

по формуле

$$\upsilon = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Для момента падения $t = T = 2$ $с$.

$$\upsilon_c = \sqrt{(\upsilon_B)^2 + (gt)^2},$$

или

$$\upsilon_c = 20{,}4 м/с.$$

Задание 3.2. Применение основных теорем динамики к исследованию движения материальной точки

Шарик, принимаемый за материальную точку, движется из положения A внутри трубки, ось которой расположена в вертикальной плоскости. Найти скорость шарика в положениях B и C и давление шарика на стенку трубки в положении C. Трением на криволинейных участках траектории пренебречь. В вариантах 3, 6, 7, 10, 13, 15, 17, 19, 25, 28 шарик, пройдя путь h_0, отделяется от пружины.

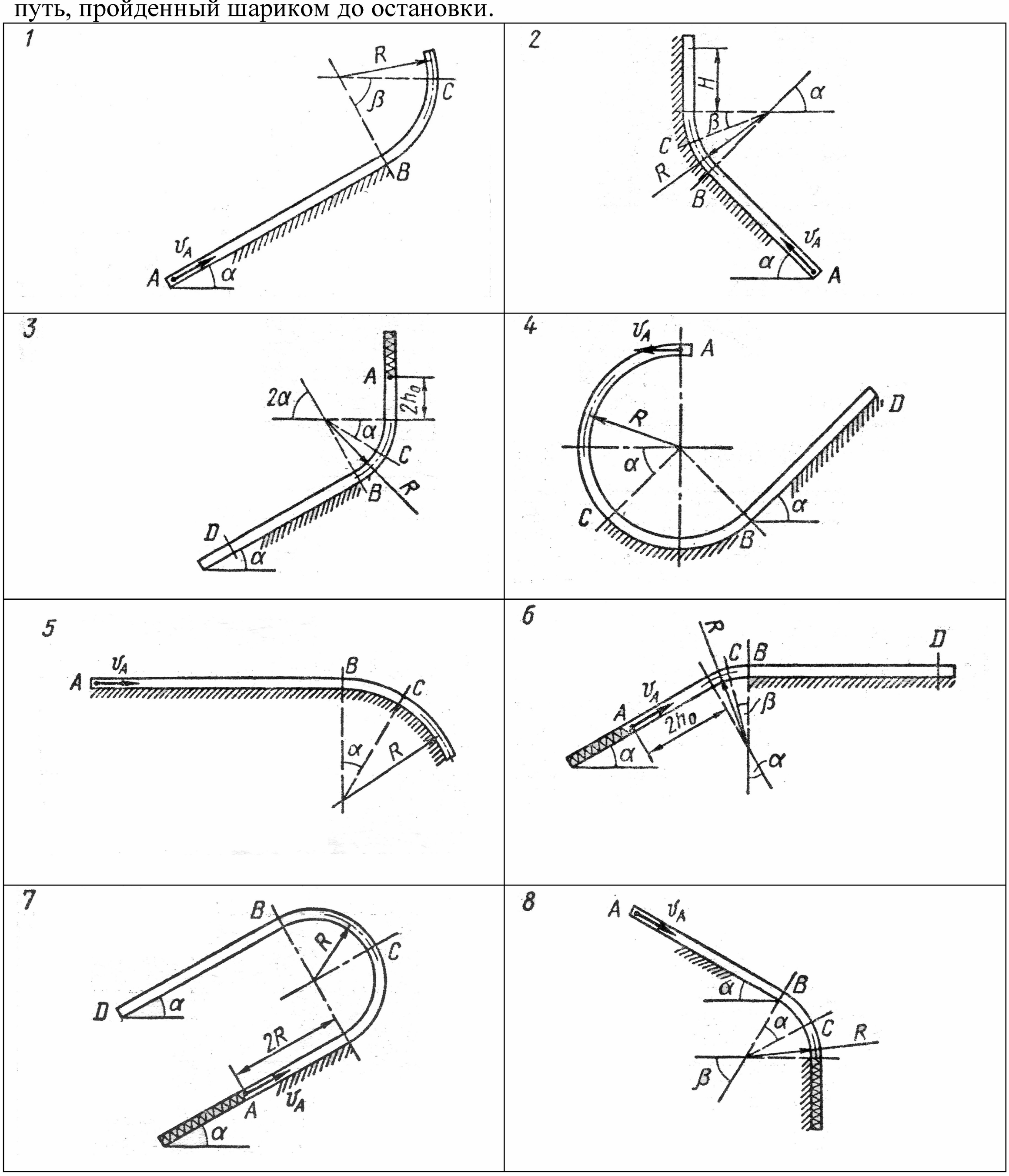
Необходимые для решения данные приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

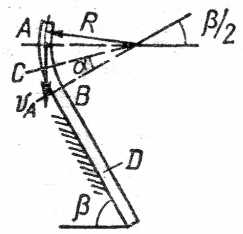
Номер варианта	m, кг	υ_A, м/с	τ, с	R, м	f	α, град	β, град	h_0, см	c, Н/см	Величины, которые требуется определить дополнительно
1	0,5	20	2,0	2,0	0,20	30	45	—	—	—
2	0,6	16	0,2	4,0	0,10	45	20	—	—	H
3	0,4	0	2,0	0,2	0,15	30	—	10	1	υ_D
4	0,2	5	0,5	1,0	0,10	45	—	—	—	υ_D
5	0,1	8	1,5	2,0	0,20	30	—	—	—	—
6	0,3	2	2,0	4,0	0,10	30	20	30	2	υ_D
7	0,4	5	1,0	1,0	0,10	30	—	50	5	υ_D
8	0,2	1	0,5	1,5	0,15	30	60	0	4	h
9	0,5	2	1,5	4,0	0,25	20	60	—	—	υ_D
10	0,4	4	0,1	0,5	0,10	30	60	0,2	0,2	υ_D
11	0,2	6	1,0	1,0	0,30	45	—	—	3	υ_D, h
12	0,4	5	0,4	2,0	0,20	30	60	—	—	υ_D
13	0,3	0	0,1	1,0	0,10	30	60	50	10	υ_D
14	0,6	0	2,0	3,0	0,20	60	30	—	—	s
15	0,1	1	0,1	1,0	0,15	60	20	50	0,2	υ_D
16	0,4	2	0,2	2,0	0,40	30	—	—	—	υ_D
17	0.2	0	0,1	1,0	0,20	30	—	40	1,0	υ_D
18	0,3	3	0,4	1,5	0.10	45	—	—	—	—
19	0,1	4	0,1	0,4	0,30	30	60	10	0,5	υ_D
20	0,2	10	1,0	0,5	0,10	60	—	0	1,2	h
21	0,7	3	0,3	0,3	0,20	45	—	—	—	—
22	0,4	1	0,2	0,2	0,40	45	—	0	1,1	υ_D, h
23	0,6	2	0,4	0,2	0,20	45	—	—	—	—
24	0,5	0	0,5	0,6	030	60	30	—	—	H
25	0,1	0	0,2	0,5	0,25	—	30	30	0,4	υ_D
26	0,2	2	0,1	0,2	0,20	30	—	—	—	υ_D
27	0,8	3	0,2	0,4	0,15	45	—	—	—	υ_D
28	0,3	4	0,1	0,6	0,35	30	15	60	0,1	υ_D

В задании приняты следующие обозначения: m – масса шарика; υ_A – начальная скорость шарика; τ – время движения шарика на участке AB (в вариантах 1, 2, 5, 8, 14, 18, 20, 21, 23, 24, 27, 30) или на участке BD (в вариантах 3, 4, 6, 7, 9–13, 15–17, 19, 22, 25, 26, 28); f – коэффициент трения скольжения шарика по стенке трубки; h_0 – начальная деформация пружины; h – наибольшее сжатие пружины; с

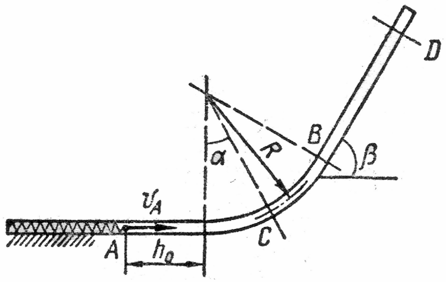
– коэффициент жёсткости пружины; H – наибольшая высота подъёма шарика; s – путь, пройденный шариком до остановки.



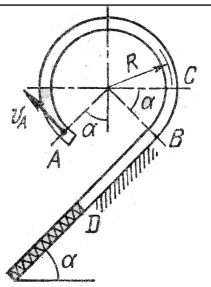
9



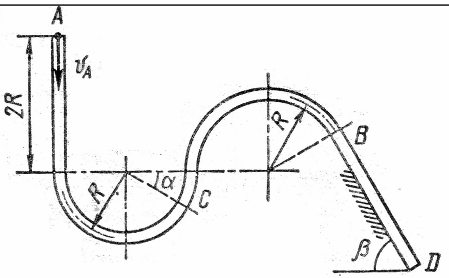
10



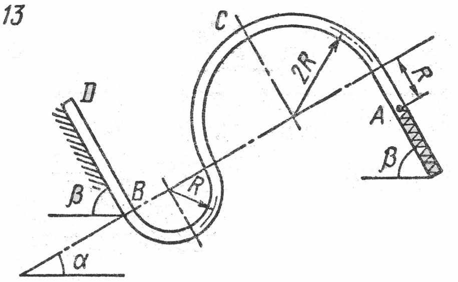
11



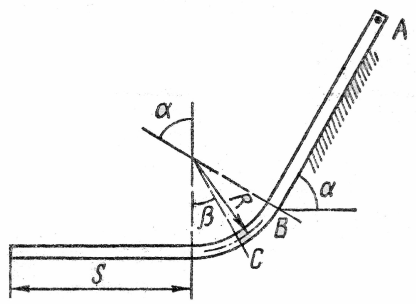
12



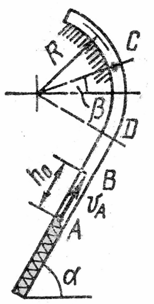
13



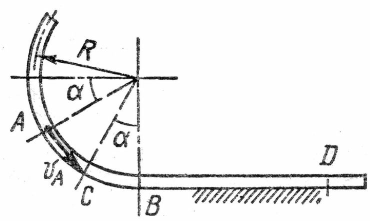
14



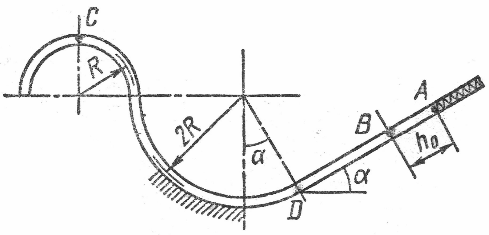
15



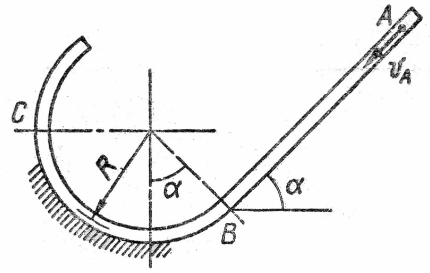
16



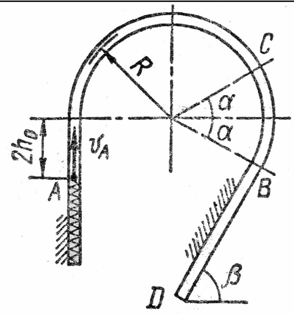
17



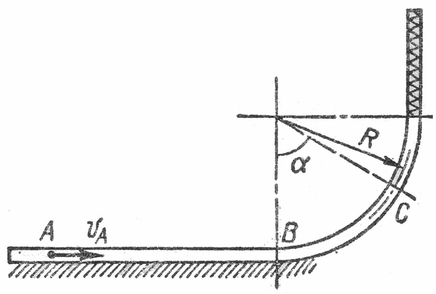
18



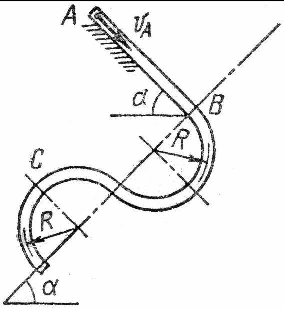
19



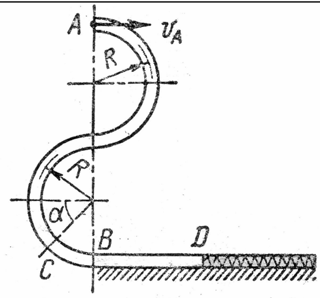
20



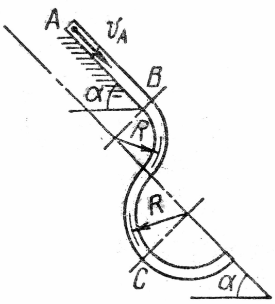
21



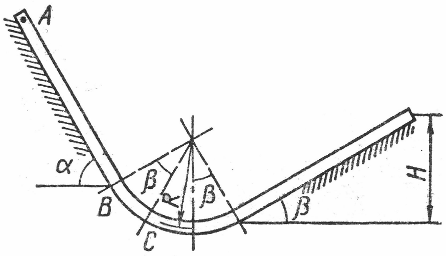
22

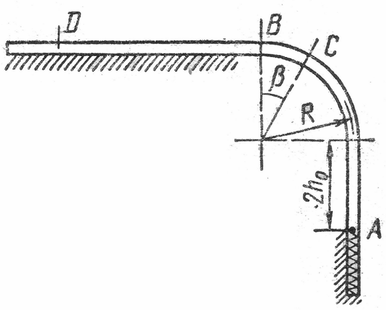
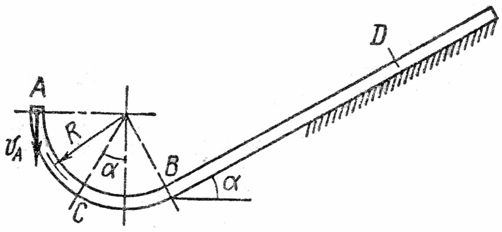
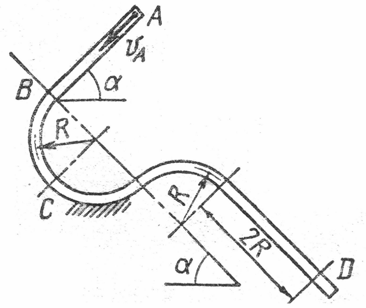
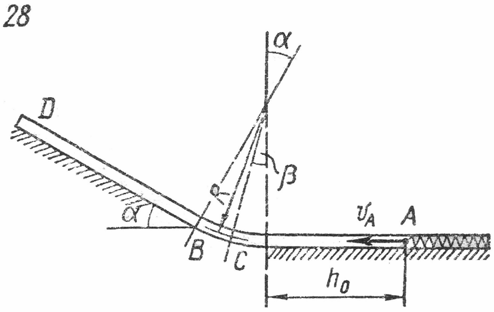


23



24



25 	26 
27 	28 

Пример выполнения задания

<u>Дано</u>: схема механизма (рис. 12, б), $m = 0{,}5\,кг$, $\upsilon_A = 0\,м/с$; $R = 0{,}5\,м$, $f = 0{,}2$; $\tau = 0{,}2\,с$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $h_0 = 50\,см$, $c = 0{,}8\,Н/см$.

<u>Найти</u>: υ_B, υ_C, υ_D, N_C.

<u>Решение.</u> Для определения υ_B и υ_C применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки. Движение шарика на участке *AC* и *AB* траектории происходит под действием силы тяжести *G*, силы трения (силы трения на криволинейных участках не учитываем) и силы сжатия пружины (рис. 3.3, а):

$$\frac{m\upsilon_B^2}{2} - \frac{m\upsilon_A^2}{2} = \sum A_i = (mg\,sin\alpha - mgf\,cos\alpha)h_0 + \frac{ch_0^2}{2}.$$

Откуда, учитывая, что $v_B = 0$, получим

$$\upsilon_B = \sqrt{2g(\sin\alpha - \cos\alpha\cdot f)h_0 + \frac{c\cdot h_0^2}{m}},$$

$$\upsilon_B = 2{,}95\,м/с.$$

Для определения скорости υ_D применим теорему об изменении количества движения материальной точки

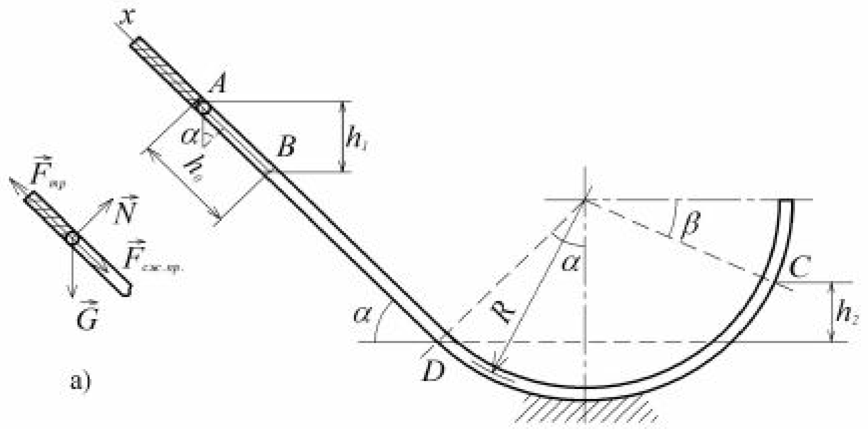
$$m\upsilon_{Dx} - m\upsilon_{Bx} = \sum S_{ix}.$$

Так как $\upsilon_{Dx} = \upsilon_D$, $\upsilon_{Bx} = \upsilon_B$, то

$$m\upsilon_D - m\upsilon_B = \left(mg \cdot sin\alpha - mg \cdot cos\alpha \cdot f\right) \cdot \tau.$$

Откуда получим

$$\upsilon_D = \upsilon_B + g\left(sin\alpha - cos\alpha \cdot f\right) \cdot \tau = 2{,}25 + 9{,}8 \cdot 0{,}565 \cdot 0{,}2 = 3{,}35\, м/с.$$



а)

б)

Рис. 3.3

Определим скорость шарика в точке C. Движение на DC происходит только под действием силы тяжести (по условию), работа силы тяжести меньше нуля, т.к. точка поднимается.

$$\frac{m\upsilon_C^2}{2} - \frac{m\upsilon_D^2}{2} = -mgh_2,$$

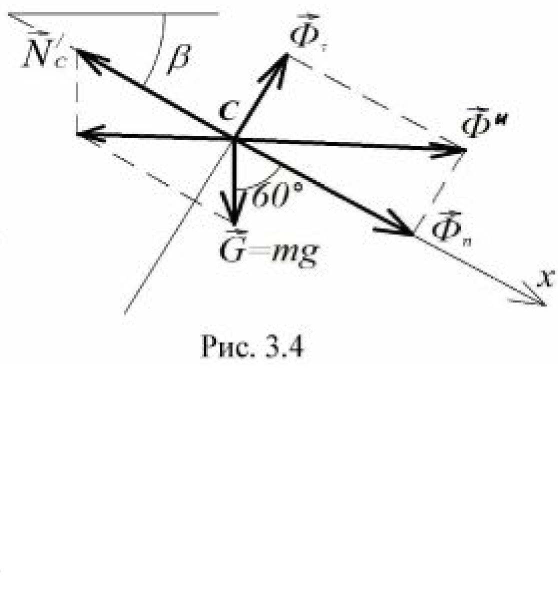
где $h_2 = R \cdot cos\alpha - R \cdot sin\beta = 0{,}5 \cdot \left(0{,}707 - 0{,}5\right) = 0{,}104\, м.$

Откуда получим

$$\upsilon_C = \sqrt{\upsilon_D^2 - 2g \cdot h_2} = 2{,}4\, м/с.$$

Определим давление шарика на стенку канала в положении C (рис. 3.4).

В соответствии с принципом Даламбера для материальной точки геометрическая сумма сил, прило-



51

Рис. 3.4

женных к точке, и силы инерции этой точки равна нулю:

$$\vec{G} + \vec{N}'_C + \vec{\Phi}^{И} = 0 .$$

Силу инерции материальной точки можно разложить на нормальную и касательную составляющие:

$$\vec{\Phi}^{И} = \vec{\Phi}_\tau + \vec{\Phi}_n .$$

Сумма проекций сил $\vec{G}$, $\vec{N}'_c$ и $\vec{\Phi}$ на ось x должна быть равна нулю:

$$- N'_C + G \cdot cos 60 + \Phi_n = 0 .$$

Отсюда

$$N'_C = G \cdot cos 60 + \Phi_n = mg \cdot cos 60 + \frac{m\upsilon_C^2}{R};$$

$$N'_C = 14H.$$

Искомое давление N_C шарика на стенку трубки по числовому значению равно найденной реакции N'_C и направлено в противоположную сторону.

Задание №3.3. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя; начальное положение системы показано на рисунках. Учитывая трение скольжения тела 1 (варианты 1–3, 5, 6, 8–12, 17–23, 28–29) и сопротивление качению тела 3, катящегося без скольжения (варианты 2, 4, 6–9, 11, 13–15, 20, 21, 24, 27), пренебрегая другими силами сопротивления и массами нитей, предполагаемых нерастяжимыми, определить скорость тела 1 в тот момент, когда пройденный им путь станет равным s.

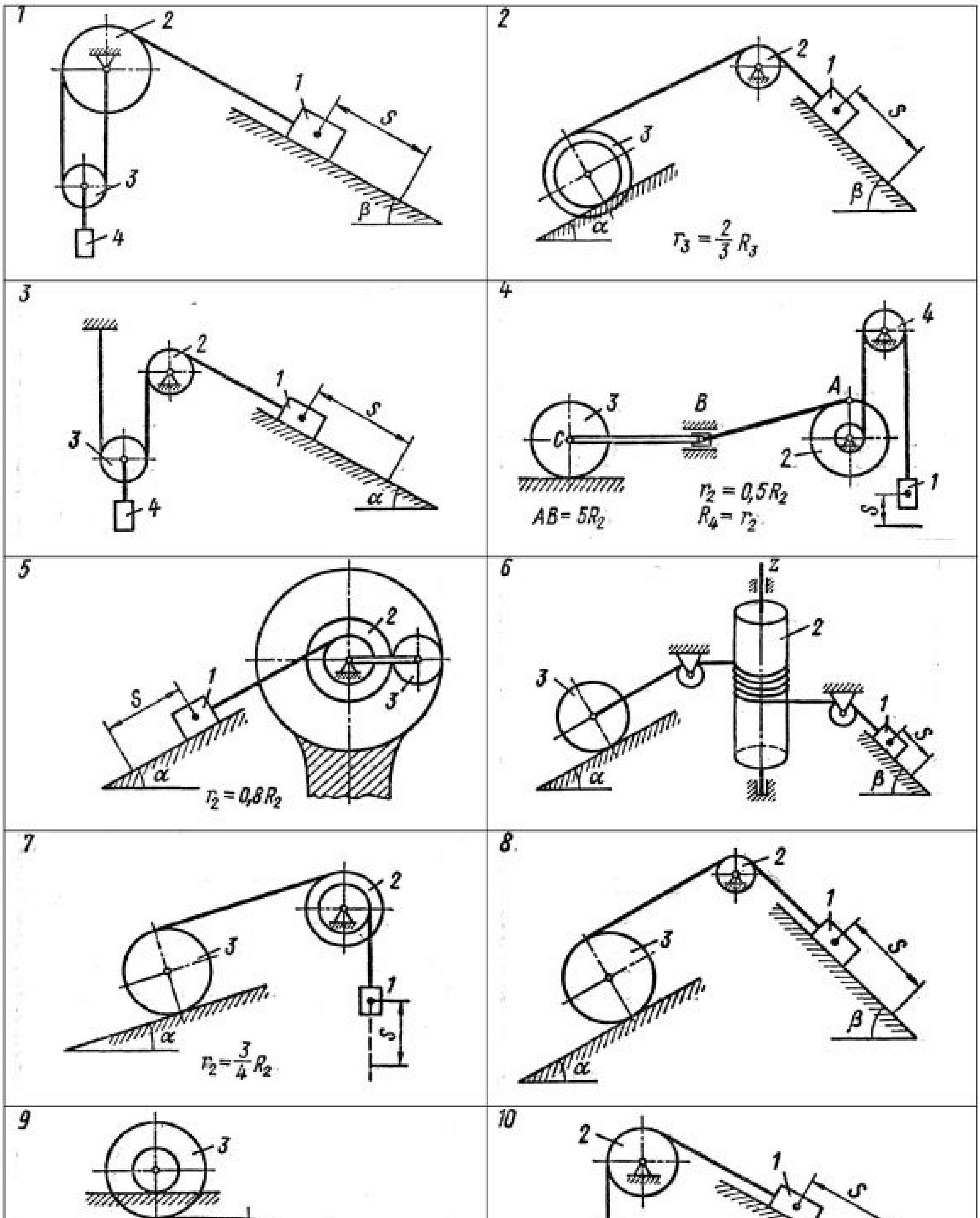
В задании приняты следующие обозначения: m_1, m_2, m_3, m_4 – массы тел *1*, *2*, *3*, *4*; R_2, r_2, R_3, r_3 – радиусы больших и малых окружностей; i_{2x} , $i_{2\xi}$ – радиусы инерции тел 2 и 3 относительно горизонтальных осей, проходящих через их центры тяжести; α, β – углы наклона плоскостей к горизонту; f – коэффициент трения скольжения; δ – коэффициент трения качения.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 3.1. Блоки и катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами.

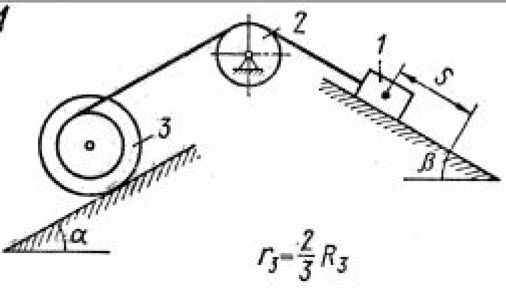
Наклонные участки нитей параллельны соответствующим наклонным плоскостям.

Таблица 3.1

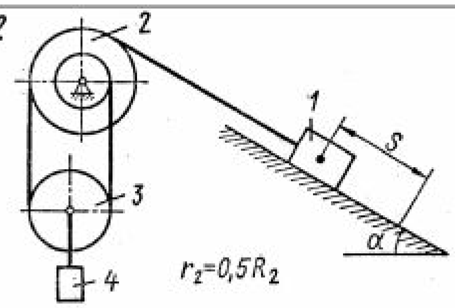
Номер варианта	m_1	m_2	m_3	m_4	R_2	R_3	i_{2x}	$i_{2\xi}$	α	β	f	δ,см	s,м	Примечание
	кг				см		см		град					
1	m	4m	1/5m	4/3m	-	-	-	-	60	-	0,1	-	2	
2	m	1/2m	1/3m	-	-	30	-	20	30	45	0,22	0,2	2	
3	m	m	1/10m	m	-	-	-	-	45	-	0,1	-	2	
4	m	2m	40m	m	20	40	18	-	-	-	-	0,3	0,1π	Массами звеньев AB, BC и ползуна B пренебречь
5	m	2m	m	-	20	15	18	-	60	-	0,12	-	0,28π	Массой водила пренебречь
6	m	3m	m	-	-	28	-	-	30	45	0,1	0,28	1,5	
7	m	2m	2m	-	16	25	14	-	30	-	-	0,2	2	
8	m	1/2m	1/3m	-	-	30	-	-	30	45	0,15	0,2	1,75	
9	m	2m	9m	-	-	30	-	20	30	-	0,12	0,25	1,5	
10	m	1/4m	1/4m	1/5m	-	-	-	-	60	-	0,1	-	3	
11	m	1/2m	1/4m	-	-	30	-	25	30	45	0,17	0,2	2,5	
12	m	1/2m	1/5m	m	30	-	20	-	30	-	0,2	-	2,5	
13	m	2m	5m	2m	30	20	26	-	30	-	-	0,24	2	
14	m	1/2m	5m	4m	-	25	-	-	-	-	-	0,2	2	Массы каждого из четырех колес одинаковы
15	m	1/2m	4m	1/2m	20	12	18	-	60	-	-	0,25	1,5	
16	m	1/10 m	1/10m	1/10m	10	15	-	-	-	-	-	-	0,05π	Массой водила пренебречь
17	m	1/4m	1/5m	1/10m	20	-	15	-	60	-	0,1	-	0,16π	Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень
18	m	3m	m	-	35	15	32	-	60	-	0,15	-	0,2π	Массой водила пренебречь
19	m	1/3m	1/10m	m	24	-	20	-	60	-	0,15	-	1,5	
20	m	2m	20m	-	20	15	16	-	30	-	0,1	0,2	0,2π	Массами звеньев AB, BC и ползуна B пренебречь
21	m	m	2m	-	20	20	16	-	30	45	0,2	0,32	1,2	
22	m	1/2m	1/4m	-	20	10	-	-	60	-	0,17	-	0,1π	Массой водила пренебречь
23	m	m	1/10m	4/5m	20	-	18	-	30	-	0,1	-	1	
24	m	3m	20m	-	20	30	18	-	-	-	-	0,6	0,08π	Массами звеньев AB, BC и ползуна B пренебречь
25	m	1/3m	1/4m	-	16	20	-	-	-	-	-	-	0,04π	Массой водила пренебречь
26	m	1/2m	m	1/3m	30	-	20	-	-	-	-	-	0,6π	Массы и моменты инерции блоков 2 и 5 одинаковы. Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень
27	m	m	6m	1/2m	20	20	16	-	30	-	-	0,2	2	
28	m	2m	3m	-	20	-	14	-	60	-	0,1	-	0,1π	Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень
29	m	1/2m	3/10m	3/2m	26	20	20	18	30	-	0,12	-	2	


1
2
$r_3 = \frac{2}{3} R_3$
3
4
$AB = 5R_2$
$r_2 = 0,5R_2$
$R_4 = r_2$
5
$r_2 = 0,8R_2$
6
7
$r_2 = \frac{3}{4} R_2$
8
9
$r_3 = 0,5R_3$
10

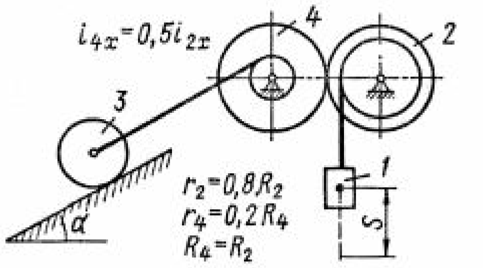
11



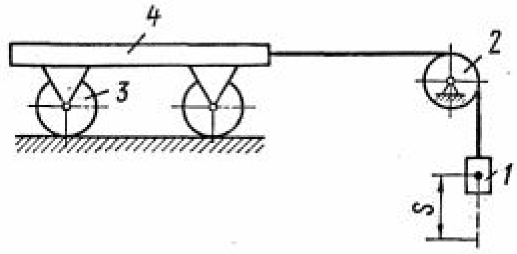
12



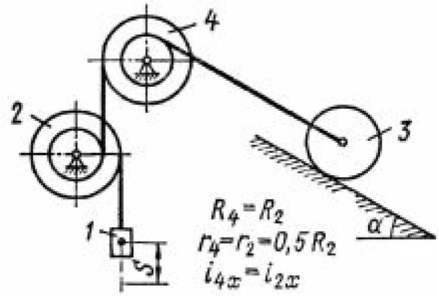
13



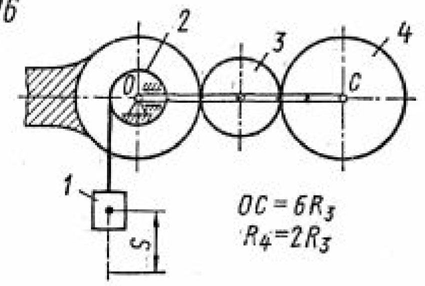
14



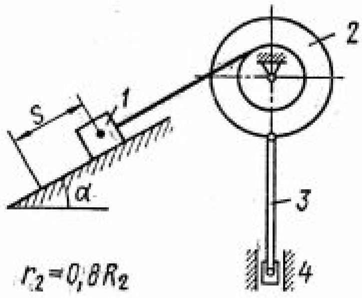
15



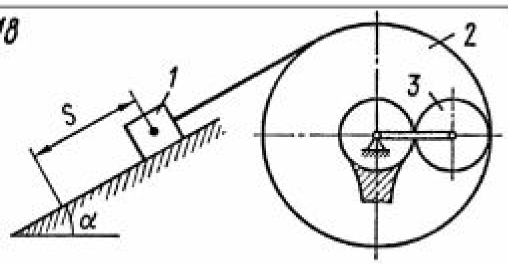
16



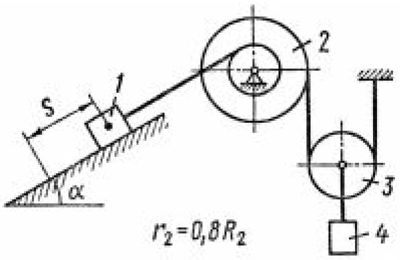
17



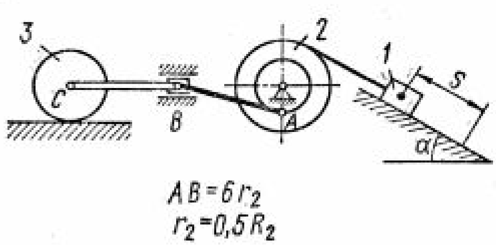
18



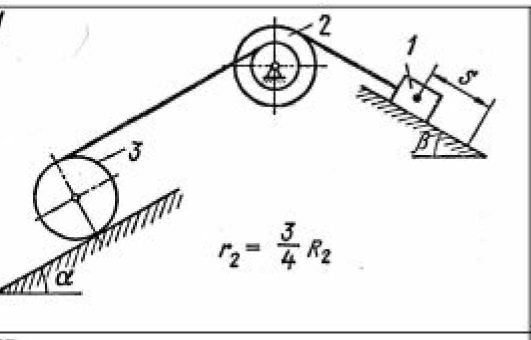
19



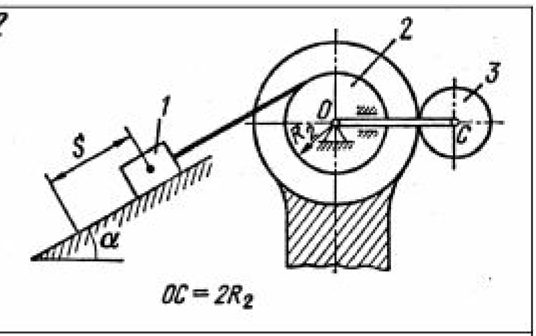
20



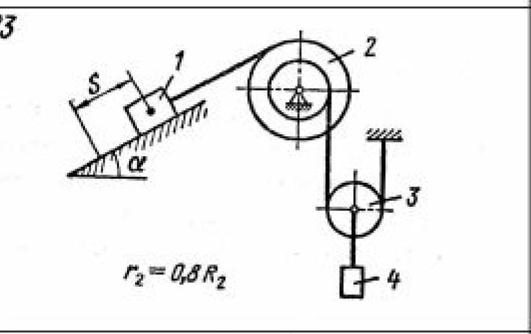
21



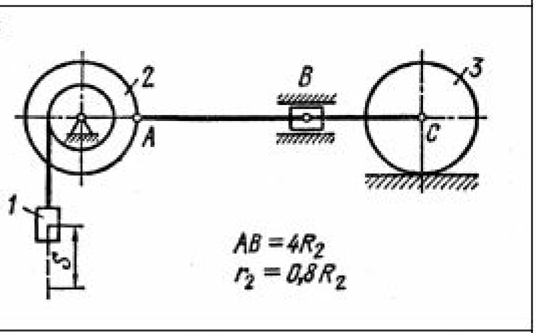
22



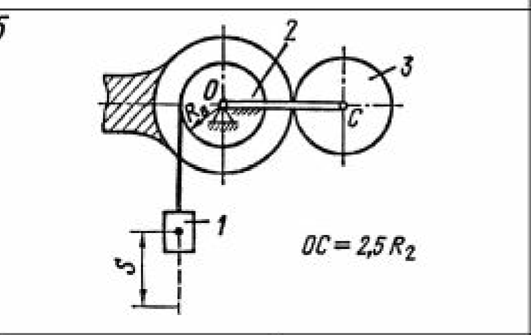
23



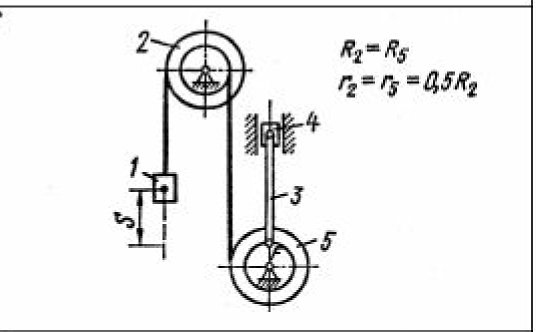
24



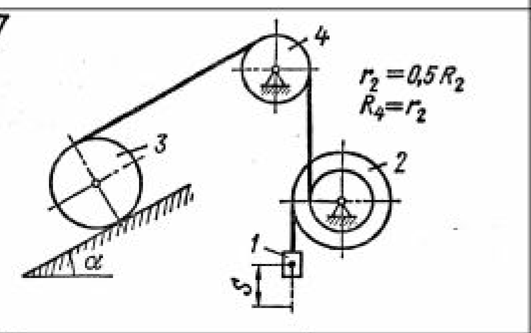
25



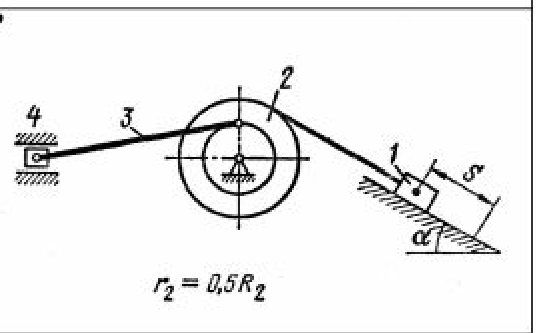
26



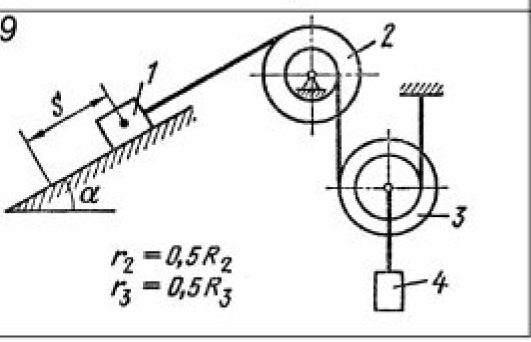
27



28



29



Дано: m_1 – масса груза *1*, $m_2 = \frac{1}{4}m$, $m_3 = \frac{1}{8}m$, $R_3 = 0{,}35$ м, $\alpha = 15°$, $\beta = 30°$, $f = 0{,}2$, $\delta = 0{,}2$ см, $S = 2{,}4$ м. На рис. 15 показана механическая схема в начальном положении.

Найти: υ_1 – скорость груза *1* в конечном положении.

Решение. Применим теорему об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^E + \sum A_k^J, \tag{3.1}$$

где T_0 и T – кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях; $\sum A_i^E$ – сумма работ внешних сил, приложенных к системе, на перемещение системы из начального положения в конечное; $\sum A_i^J$ – сумма работ внутренних сил системы на том же перемещении.

Для рассматриваемых систем, состоящих из абсолютно твёрдых тел, соединенных нерастяжимыми нитями и стержнями,

$$\sum A_k^J = 0.$$

Так как в начальном положении система находится в покое, то $T_0 = 0$.

Следовательно, уравнение (3.1) принимает вид

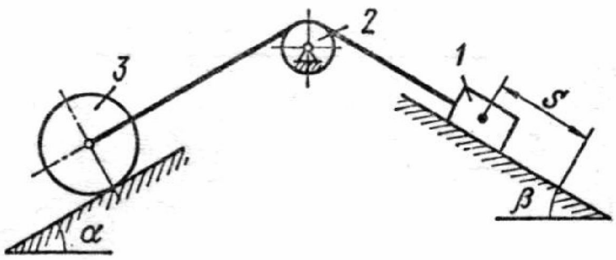


Рис. 3.5

$$T = \sum A_k^E. \tag{3.2}$$

Напишем кинематические соотношения между скоростями и перемещениями точек системы, т. е. уравнения связей, при этом перемещения и скорости тел выразим соответственно через скорости и перемещения груза *1*.

Скорость центра масс катка *3* равна скорости груза *1*:

$$\upsilon_{C3} = \upsilon_1. \tag{3.3}$$

Угловая скорость катка *3*, мгновенный центр скоростей которого находится в точке касания катка с плоскостью

$$\omega_3 = \frac{\upsilon_{C3}}{R_3} = \frac{\upsilon_1}{R_3}. \tag{3.4}$$

Угловая скорость блока *2*

$$\omega_2 = \frac{\upsilon_1}{R_2}. \tag{3.5}$$

Вычислим кинетическую энергию системы в конечном положении как алгебраическую сумму кинетических энергий тел *1*, *2*, *3*:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \tag{3.6}$$

Кинетическая энергия груза 1, движущегося поступательно,

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2. \tag{3.7}$$

Кинетическая энергия блока *2*, вращающегося вокруг оси Ax:

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{Ax} \omega_2^2. \tag{3.8}$$

Момент инерции блока *2* относительно оси Ax:

$$J_{Ax} = \frac{1}{2} m_2 R_2^2. \tag{3.9}$$

Подставляя выражения (3.5), (3.9) в формулу (3.8), получаем

$$T_2 = \frac{1}{16} m \upsilon_1^2.$$

Кинетическая энергия катка *3*, совершающего плоское движение:

$$T_3 = \frac{m_3 \upsilon_{C3}^2}{2} + \frac{1}{2} J_{2\xi} \omega_3^2, \tag{3.10}$$

где $J_{2\xi}$ – момент инерции катка 3 относительно его продольной центральной оси $B_{2\xi}$:

$$J_{2\xi} = \frac{1}{2} m_3 R_3^2. \tag{3.11}$$

Подставляя (3.3), (3.4), (3.11) в формулу (3.10), получаем

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \upsilon_1^2 + \frac{1}{4} m_3 \upsilon_1^2 = \frac{3}{4} m_3 \upsilon_1^2. \tag{3.12}$$

Кинетическая энергия всей системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{21}{32} m \upsilon_1^2 = 0{,}66\, m \upsilon_1^2. \tag{3.13}$$

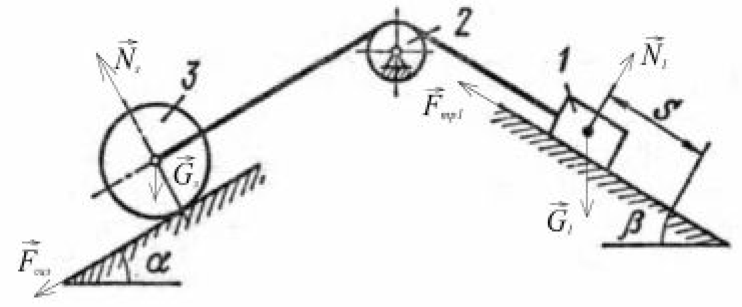


Рис. 3.6

Найдём сумму работ всех внешних сил, приложенных к системе на заданном ее перемещении. Покажем внешние силы, приложенные к системе (рис. 3.6):

для тела 1:

Работа сил тяжести G_1 :

$$A_{G1} = G_1 \cdot h_1 = m_1 g \cdot s \cdot sin\,\beta. \tag{3.14}$$

Работа силы трения скольжения $F_{\text{тр}}$:

$$A_{F_{mp1}} = -F_{mp1} \cdot S\,.$$

Так как

$$F_{mp1} = f \cdot G_1 \cdot \cos\beta\,,$$

то

$$A_{F_{mp1}} = -f \cdot m_1 g \cdot \cos\beta \cdot S\,. \tag{3.15}$$

для катка 3:

Работа силы тяжести G_3 будет отрицательной, т.к. начальное положение катка выше, чем конечное

$$A_{G3} = -G_3 \cdot h_{C3} = -m_3 g \cdot S \cdot \sin\alpha\,. \tag{3.16}$$

Работа силы сцепления катка $A_{F_{сц3}} = 0$, т.к. сила приложена в мгновенном центре скоростей катка.

Работа пары сил сопротивления качению катка 3:

$$A_{Mc_3} = -M_C \cdot \varphi_3,$$

где $M_C = \delta \cdot mg \cdot cos\,\alpha$ – момент пары сил сопротивления качению катка *3*; φ_3 – угол поворота катка *3*.

Так как каток катится без скольжения, то угол его поворота

$$\varphi_3 = \frac{S_{C3}}{R_3},$$

где S_{C3} – перемещение центра тяжести C_3 катка *3*.

В нашем случае перемещение центра масс катка *3* будет равно перемещению центра масс груза *1*, т.е. $S_{C3} = S = 2{,}4\ м$.

Тогда работа пары сил сопротивления качению:

$$A_{Mc_3} = -\delta m_3 g \cdot cos\alpha \cdot \frac{S}{R_3}. \qquad (3.17)$$

Сумма работ внешних сил определится сложением работ, вычисляемых по формулам (14) – (17):

$$\sum A_k^E = mgS \cdot sin\,\beta - fmgS \cdot cos\,\beta - \frac{1}{8} mgS \cdot cos\,\alpha - \frac{1}{8}\delta \cdot mg\,cos\,\alpha \frac{S}{R_3} =$$

$$= mgS\left(sin\,\beta - f \cdot cos\,\beta - \frac{1}{8} sin\,\alpha - \frac{R_3}{8}\delta \cdot cos\,\alpha \right) = 0{,}29mgS.$$

Согласно теореме (3.2), приравниваем значения T и $\sum A_k^E$

$$0{,}66m\upsilon_1^2 = 0{,}29mgS,$$

откуда

$$\upsilon_1 = 3{,}22\ м/с.$$

Библиографический список

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1995. – 415 с.
2. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1971. – Ч. 1. – 275 с.
3. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1971. – Ч. 1. – 460 с.
4. Добронравов В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1983. – 532 с.
5. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Учеб. пособие для вузов./ Под ред. А.А. Яблонского и др. – М.: Высшая школа, 1985. – 367 с.
6. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. – М.: Физматгиз, 1961. – Ч.1. – 457 с.
7. Мещерский Н.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1971. – 450 с.
8. Силков М.В. Кинематика. Методические указания. – ОмГТУ, 2004.